

Министерство образования и науки РФ  
Смоленский государственный университет

---

# **Системы компьютерной математики и их приложения**

*Материалы XVII Международной научной конференции*

Выпуск 17

Смоленск  
Издательство СмолГУ  
2016

УДК 621.396.218  
ББК 32.97  
С 409

*Печатается по решению  
редакционно-издательского  
совета СмолГУ*

**Редакционная коллегия:** *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *И.Б. Болотин*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *С.А. Гомонов*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *Е.П. Емельченков*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Н.М. Тимофеева*, канд. пед. наук, доц.

**Системы компьютерной математики и их приложения:**  
С 409 материалы XVII Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. – Вып. 17. – 268 с.  
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XVII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 20–22 мая 2016 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218  
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,  
*продолжающееся издание*

© Авторы, 2016  
© Издательство СмолГУ, 2016

# СЕКЦИЯ 1

## Системы компьютерной математики

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СКМ MAPLE В РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Н.В. ЗАЙЦЕВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань  
e-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru

УДК 517.95

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, оператор Бесселя, краевая задача.

*В работе рассматривается краевая задача для трехмерного эллиптического уравнения с оператором Бесселя, решение которой получено с помощью программы Maple.*

Решим с помощью программы Maple следующее уравнение

```
>eq:=diff(u(x,y,z),x$2)+diff(u(x,y,z),y$2)+diff(u(x,y,z),z$2)+  
(k/z)*diff(u(x,y,z),z)=0;
```

где по переменной  $z$  действует оператор Бесселя,  $k > 0$  – некоторое действительное число. И зададим краевые условия:

```
>init1:=u(0,y,z)=0,u(a,y,z)=0;
```

```
>init2:=u(x,0,z)=0,u(x,b,z)=0;
```

```
>init3:=u(x,y,0)=0,u(x,y,c)=phi(x,y).
```

Решение задачи будем искать методом разделения переменных (методом Фурье) в виде  $u(x,y,z)=X(x)*Y(y)*Z(z)$ .

```
>pdsolve(eq,HINT=X(x)*Y(y)*Z(z)).
```

После разделения переменных относительно неизвестной функции  $X(x)$  получим задачу Штурма-Лиувилля:

```
>eq1:=diff(X(x),x$2)+(lambda(1))^2*X(x)=0;
```

```
>inX:=X(0)=0,X(a)=0.
```

Относительно функции  $Y(y)$  получим следующую задачу:

```
>eq2:=diff(Y(y),y$2)+(lambda(2))^2*Y(y)=0;
```

```
>inY:=Y(0)=0,Y(b)=0.
```

А относительно неизвестной функции  $Z(z)$  получаем уравнение Бесселя:

```
>eq3:=diff(Z(z),z$2)+(k/z)*diff(Z(z),z)-lambda^2*Z(z)=0;
```

где постоянные разделения в уравнениях связаны соотношением:

```
>lambda:=sqrt((lambda(1))^2+(lambda(2))^2).
```

В программе находим собственные значения и соответствующие им собственные функции спектральных задач  $X(x,n)$ ,  $Y(y,m)$ , общее решение уравнения Бесселя, а затем, учитывая условия  $init3$ , записываем решение краевой задачи в виде следующего ряда:

$u:=(x,y,z)\rightarrow\text{Sum}(\text{Sum}(Z(z)*X(x,n)*Y(y,m),n=1..infinity),m=1..infinity).$

### Литература

1. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. - Ч. I. – М.: И.Л., 1949. – 799 с.
2. Игнатъев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple: лекции для школы по математическому моделированию. – Казань: Казанский университет, 2014. – 298 с.

## СЕРВИСНЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК ПО ОСНОВАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СКМ MAPLE

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ<sup>1</sup>, А.Р. САМИГУЛЛИНА<sup>2</sup>

Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, г. Казань  
e-mail: <sup>1</sup>ignatev\_yu@rambler.ru, <sup>2</sup>alsu\_sam@mail.ru

УДК 004.94, 004.92

Ключевые слова: *электронный учебник, системы компьютерной математики, информационные технологии, высшая математика, Maple.*

*Описан сервисный электронный учебник, который содержит краткое изложение вопросов высшей математики, входящих в курс «Основы математической обработки информации» для студентов физических и информационных специализаций и естественнонаучных специализаций. Курс снабжен примерами решения задач в системе компьютерной математики Maple 5 и инструкциями по применению этой системы для студентов и преподавателей.*

В связи с внедрением в систему высшего образования государственных стандартов 3 поколения в учебные программы всех направлений подготовки студентов вводится курс «Основы математической обработки информации», который фактически является кратким изложением основ высшей математики, включая элементы теории вероятности, а также элементарные методы компьютерной обработки информации. Чрезвычайная краткость курса (36 аудиторных

часов) в сочетании с широтой охвата материала требует для его освоения привлечение информационных технологий. В Казанском федеральном университете этот курс реализуется на основе внедрения методов математического и компьютерного моделирования в СКМ Maple. Эти методы, включая автоматизацию контроля знаний в балльно-рейтинговой системе (БРС), были описаны ранее [1-6], а также доложены на предыдущих конференциях СКМП в 2009 – 2015 годах.

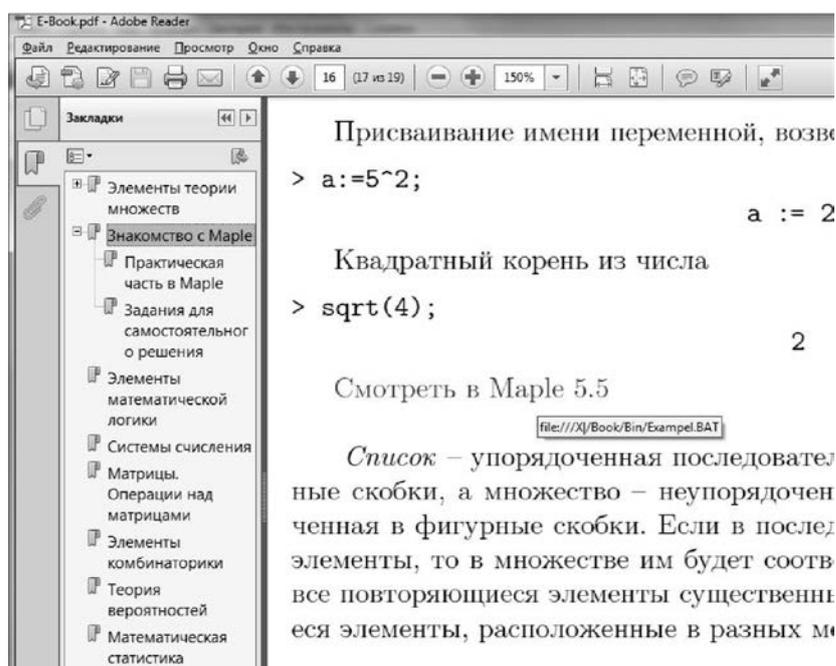


Рис. 1. Вызов Maple-примера из СЭУ

В данной статье рассматриваются вопросы применения указанных методов для обеспечения дисциплины «Основы математической обработки информации». В частности, представлен созданный сервисный электронный учебник (СЭУ), обеспечивающий как самостоятельную работу студентов, включая аналитическое самотестирование, так и работу преподавателей по подготовке электронных учебно-методических материалов, включая презентации, на основе пакета Maple. Материалы СЭУ расположены на электронном носителе (флеш), который запускается кнопкой «Запуск» из корневого каталога носителя, в результате чего на компьютере появляется образ этого носителя с фиксированным индексом «х». Затем нажатием кнопки «E-Book» открывается электронное учебное пособие (ЭУП) в формате pdf, снабженное системой внутренних и внешних гиперссылок, адресованных к носителю «х». ЭУП содержит следующие разделы: «Элементы теории множеств», «Элементы математической логики», «Матрицы», «Системы счисления», «Элементы комбинаторики», «Элементы теории вероятностей», «Элементы математической

статистики». На рисунке 1 показана операция вызова командного файла из текста СЭУ и ее результат в виде Maple-файла с обучающими материалами (рис. 2).

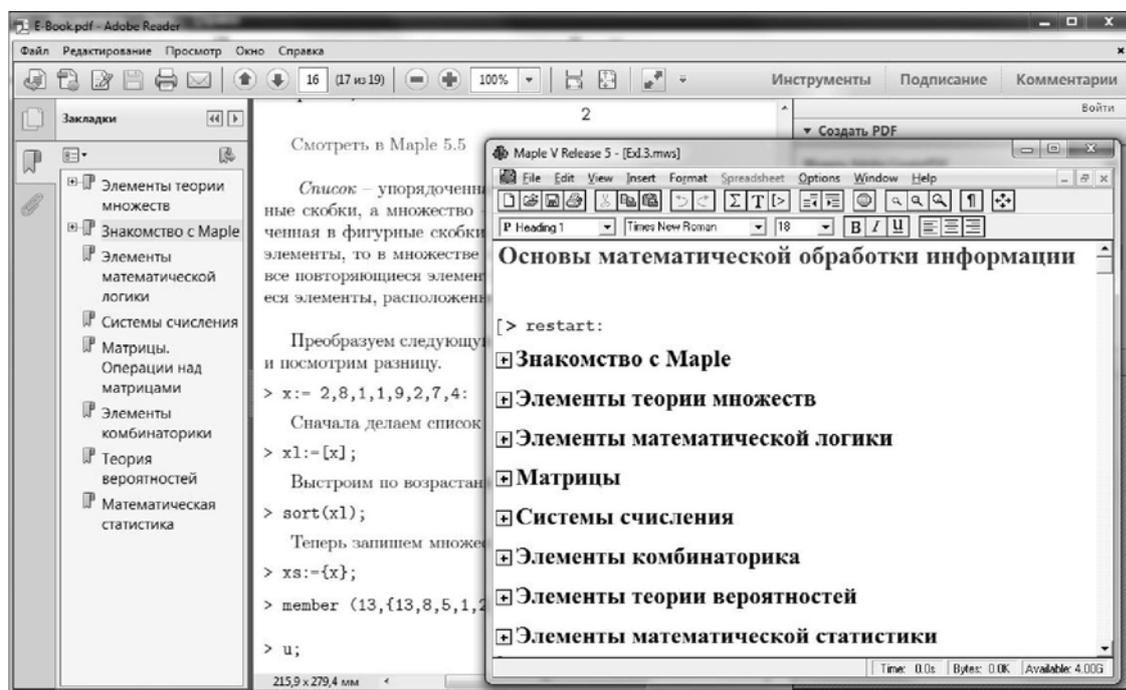


Рис. 2. Окно Maple

## Литература

1. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Информационные технологии изучения физико-математических курсов на основе математического моделирования в системе компьютерной математики // Известия СмолГУ. – 2012, №4 (20). – С. 471–480.
2. Самигуллина А.Р. Математическое моделирование объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в системе компьютерной математики Maple // Вестник ТГГПУ. – 2010, №3 (21). – С. 69-74.
3. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Библиотека программных процедур для методического обеспечения курса высшей алгебры в системе компьютерной математики «Maple» // Вестник ТГГПУ. – 2011, №1 (23). – С. 20-24.
4. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программное обеспечение теории кривых второго порядка в пакете компьютерной математики // Вестник ТГГПУ. – 2011, №4(26). – С. 22-29.
5. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. A Mathematical Modeling in Computer Algebra Systems (CAS) as a Base For a Development of the Mathematics Education // arXiv:1410.4456[physics.ed-ph].
6. Самигуллина А.Р. Система аналитического тестирования математических знаний на основе Maple и его приложения Marplet / Международная научно-практическая конференция – «ИТОН–2015». Международная школа-семинар по математическому моделированию в системах компьютерной математики – «KAZCAS-2015». // Материалы конференции и труды школы-семинара. / под ред. Ю.Г. Игнатъева. – Казань: Академии наук РТ. – 2015. – С. 167– 176.

# О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ МОДЕРНИЗАЦИИ ПРОДУКЦИИ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**В. Р. КРИСТАЛИНСКИЙ, А. А. БЕРЕСТНЕВА**

Смоленский государственный университет  
e-mail: kristvr@rambler.ru; Nastyaskorpion@mail.ru

УДК 004.92

Ключевые слова: *прогнозирование, нечеткое моделирование, экономический эффект.*

*В работе дается описание решения задачи прогнозирования стоимости оборудования, прошедшего модернизацию, основанное на методах нечеткого моделирования.*

В настоящих экономических условиях остро стоит вопрос об осуществлении модернизации имеющейся в распоряжении различных структур техники. При планировании модернизации одним из важнейших является вопрос о том, модернизация каких компонентов изделия может принести наибольший экономический эффект, в каком случае соотношение затрат на модернизацию и экономического эффекта может оказаться оптимальным.

Для решения задачи прогнозирования стоимости оборудования, прошедшего модернизацию, зачастую используется информация не только статистического характера, но и качественная информация, характеризующаяся различного рода неопределенностью.

Неопределенность при прогнозировании стоимости модернизации оборудования вызывается следующими причинами: сложность точного определения комплекса средств, необходимых для достижения предъявляемых к оборудованию требований; сложность получения точной оценки влияния степени изменения определенных типов средств на прогнозируемую стоимость оборудования. Поэтому здесь вполне оправданным является применение методов нечеткого моделирования.

Один из вариантов применения нечеткого моделирования для случая проектирования нового образца вооружения описан в работе одного из авторов [1]. В отношении гражданской техники проведение экономического анализа стоимости модернизации имеет существенно большее значение, поскольку здесь требования к экономической эффективности более жесткие – производство должно быть окупаемым.

Входными данными для нечеткой модели будут являться данные о степени изменения тех или иных структурных элементов, необходимой для достижения предъявляемых к модернизируемому оборудованию требований, выходными – сведения об изменении стоимости

производства модернизированного образца. Затем на основе данных об изменении стоимости производства и рыночной стоимости продукции можно построить модель, прогнозирующую экономическую эффективность производства и продажи модернизированного оборудования.

Данные о влиянии степени модернизации структурных элементов на стоимость продукции можно получить экспертным путем или с использованием алгоритмов прогнозирования Azure Machine Learning.

Затем на основе полученных данных строится база правил системы нечеткого вывода.

Таблица 1

Пример структуры базы продукционных правил нечеткой модели оценки степени влияния определенных структурных элементов при реализации конкретных требований на стоимость оборудования

Номер правила	Входные переменные					Степень влияния структурных элементов на стоимость $G_i$
	Элемент 1	Элемент 2	Элемент 3	Элемент 4	Элемент 5	
$P_1$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$
...						
$P_{N-1}$	$C$	$H$	$H$	$C$	$H$	$H$
$P_N$		$H$	$H$	$H$	$H$	$H$

Таким образом, типичное правило вывода имеет вид: если степень модернизации элемента 1 высокая, элемента 2 высокая, элемента 3 средняя, элемента 4 низкая, элемента 5 низкая, то степень влияния модернизации на стоимость будет средней.

Построенная модель может быть реализована средствами расширения Fuzzy Logic Toolbox пакета MatLab. Очевидно, что объем системы правил зависит от количества структурных элементов в оборудовании и от реализуемости предъявляемых требований за счет той или иной комбинации модернизации структурных элементов (если нужные требования не достигаются, то нет смысла рассматривать этот вариант).

В условиях экономического кризиса, который сегодня переживает Россия, задача управления ценой на производимую промышленными

предприятиями продукция является острой и требующей для своего решения адекватного инструментария. Предприятия все чаще сталкиваются с проблемой разработки эффективной ценовой политики. Цена как фундаментальная экономическая категория представляет собой такой объем денежных средств, за который производитель готов продать свой продукт, а потребитель приобрести этот продукт. То есть цена, с одной стороны, отражает денежную стоимость продукта, а с другой – его потребительскую ценность. Также цена, являясь инструментом рыночной конкуренции, не остается постоянной. В связи с динамичностью процессов в экономике, а также в условиях кризиса перед предприятием стоит задача формирования ценовых решений, позволяющих в короткие сроки адаптироваться к сформировавшейся ситуации на рынке. Одним из вариантов решения этой задачи является создание математической модели принятия ценовых решений.

Успешная ценовая политика на предприятии должна учитывать максимальное количество факторов при формировании цены на продукцию [3].

Факторы, изменяющиеся медленно, влияют на выбор стратегии предприятия в долгосрочной перспективе, а быстро изменяющиеся факторы – на тактические решения регулирования цены в краткосрочном периоде. Процесс принятия решений по выбору ценовой стратегии предприятия с учетом перечисленных факторов сводится к следующим мероприятиям. Первоочередной задачей является конкретизация основных финансовых целей предприятия. Решить поставленную задачу по регулированию цен на готовую продукцию производственного предприятия позволяет математическое моделирование на основе метода нечеткой логики. Для решения задачи принятия решений по регулированию цен на готовую продукцию промышленного предприятия с помощью метода нечеткой логики требуется качественное ее описание на основе лингвистических выражений (логических правил). Необходимо ввести входные и выходные переменные. Отношения себестоимости и конкурентоспособности собственного товара к себестоимости и конкурентоспособности продукции у конкурента определяют переменные «Себестоимость» и «Конкурентоспособность продукции» соответственно. Для оценки чувствительности покупателя к изменению на цену продукцию используется эластичность спроса по цене, взаимозаменяемость продукции оценивается перекрестной эластичностью. Рынок продукции характеризуется переменной «Динамика спроса». Ответные действия (управленческие решения) в отношении цены и затрат при ситуации, описанной с помощью сочетания входных параметров, обозначаются выходными переменными.

Сегодня предприятия все чаще сталкиваются с проблемой разработки эффективной ценовой политики, позволяющей быстро адаптироваться к динамичным условиям отраслевого рынка, характеризующегося значительной продуктовой дифференциацией, а следовательно, ценовой и неценовой конкуренцией. Результаты экспериментов показали, что применение данной технологии на промышленном предприятии позволяет осуществить адаптацию цен на реализуемую продукцию, обеспечивая максимум критерия эффективности функционирования предприятия (прибыли), а также сохранить, а в ряде случаев и расширить, долю рынка данного предприятия [4].

### Литература

1. Кристалинский В.Р., Александрова В. И. Методика прогнозирования стоимости перспективного образца вооружения и военной техники на основе методов нечеткой логики // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2012. – С. 64–67.
2. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений: пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
3. Клейнер Г.Б. К методологии моделирования принятия решений экономическими агентами // Экономика и математические методы. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 167–182.
4. Филатов А.Ю., Айзенберг Н.И. Математические модели несовершенной конкуренции. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2012. – 117 с.
5. Морякова А.В., Кривенцева М.А. Управление ценообразованием на предприятии: экономическое содержание, задачи, методы // Экономика и управление: новые вызовы и перспективы. – 2013. – № 4. – С. 194–196.

## МАТЕМАТИКА В НОВЫХ ВЕРСИЯХ СИСТЕМЫ MATHEMATICA

**Р.Е. КРИСТАЛИНСКИЙ**  
ВА ВПВО ВС РФ, г. Смоленск  
e-mail: kristalinskiyy-roman@rambler.ru

УДК 519.257

Ключевые слова: *система Mathematica, Марковские системы, обработка данных.*

*В работе представлен обзор новых возможностей системы Mathematica при решении задач обработки данных, анализа систем массового обслуживания, теории многочленов и комплексного анализа.*

Первая версия системы Mathematica появилась 23 июня 1988 года. С тех пор разработчики этой системы постоянно и систематично делают ее еще больше, мощнее, шире и глубже. Последняя 10 версия этой

системы появилась в 2014 году. В эту версию по сравнению с предыдущей было добавлено новых функций больше, чем было во всей Mathematica 1 (около 700).

В эту версию включено большое число новых алгоритмов. Некоторые из них будут рассмотрены в данном сообщении. Кроме того, в данном сообщении предполагается рассмотреть реализации некоторых алгоритмов, рассмотренных в 9 версии системы.

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Имеется выборка из 50 реализаций случайной величины X:

$$X = \{ \quad \quad \quad \}.$$

Найдем закон распределения рассматриваемой случайной величины и вычислим его параметры.

Будем сначала предполагать, что рассматриваемая случайная величина распределена по нормальному закону и вычислим его параметры.

**H = EstimatedDistribution[X, MultinormalDistribution[Array[μ,3], Array[s,{3,3}]]];**

Выводим элементы математического ожидания рассматриваемой случайной величины.

$$\mathbf{M} = \mathbf{Mean}[\mathbf{H}]$$
$$\{5.72314, 4.09828, 9.40776\}.$$

Выводим элементы ковариационной матрицы рассматриваемой случайной величины.

$$\mathbf{C1} = \mathbf{Covariance}[\mathbf{H}]$$
$$\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{Covariance}[\mathbf{H}]]$$
$$\begin{matrix} 0.278395 & -0.0525767 & -0.0411487 \\ 0.0525767 & 0.93234 & -0.0420455 \\ -0.0411487 & -0.0420455 & 0.792369 \end{matrix}$$

Найдем вероятность ошибки, которую мы совершим, если примем гипотезу о том, что рассматриваемая случайная величина не распределена по нормальному закону.

**T1 = DistributionFitTest[X, H, "HypothesisTestData"];**  
**T1["TestDataTable", "KolmogorovSmirnov"];**

Выполнив эту команду, мы найдем, что если мы примем гипотезу о том, что рассматриваемая случайная величина не распределена по нормальному закону, то совершим ошибку с вероятностью 0,969779.

**Statistic Kolmogorov-Smirnov                      P-Value**

2.28205,

0.938322

Найдём вероятность того, что значение рассматриваемой случайной величины будет принадлежать шару радиуса 10 с центром в начале координат

**NProbability[x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> + z<sup>2</sup> ≤ 100, {x, y, z} ≈ H]**  
**0.0565293**

Использование системы Mathematica помогает существенно упростить расчёт систем массового обслуживания с конечным числом состояний. Для решения указанных задач применяется следующий алгоритм.

1. Строится матрица плотностей вероятностей переходов.
2. Рассматривается соответствующий Марковский процесс.
3. Для заданного момента времени находятся вероятности состояний системы.

**Пример 2.** Имеется многоканальная система массового обслуживания с отказами. Интенсивность входящего потока заявок  $\lambda=2,4$ , интенсивность потока обслуживания  $\mu=1,2$ . Число каналов обслуживания  $n = 6$ . Найти вероятности состояний системы в момент времени  $t = 3$ .

Вводим исходные данные.

$$\lambda = 2.4; \mu = 1.2; n = 6.$$

Строим матрицу плотностей вероятностей переходов.

$$\Lambda = \text{Table}[0, \{i, 1, n + 1\}, \{j, 1, n + 1\}];$$

$$\text{Do}[\Lambda[[i, i + 1]] = \lambda, \{i, 1, n\}]$$

$$\text{Do}[\Lambda[[i + 1, i]] = i\mu, \{i, 1, n\}]$$

$$\text{Do}[\Lambda[[i, i]] = -\sum_{k=1}^{n+1} \lambda[[i, k]], \{i, 1, n + 1\}]$$

Строим соответствующий Марковский процесс.

**R=ContinuousMarkovProcess[1, Λ]**

Находим вероятности состояний системы в момент времени  $t = 3$ .

**Table[NProbability[x==i, x ≈ R[3], {i, 1, n+1}]**  
{0.143156, 0.278652, 0.27132, 0.176235, 0.0859544, 0.0336236, 0.0110274}.

Далее рассмотрим еще несколько примеров. Для этого напомним, что многочлен с вещественными коэффициентами называется устойчивым, если все корни этого многочлена расположены в левой полуплоскости. Система Mathematica позволяет легко исследовать многочлены на устойчивость.

**Пример 3.** Исследовать на устойчивость многочлен

$$z^6 + 13z^5 + 6z^4 + 15z^3 + 3z^2 + 5z + 14.$$

```
NSolve[z^6+13 z^5+6z^4+15z^3+3 z^2+5 z+14==0&Re[z]>=0,z]
{{z->0.57633 -0.727771 I}, {z->0.57633 +0.727771 I}}
```

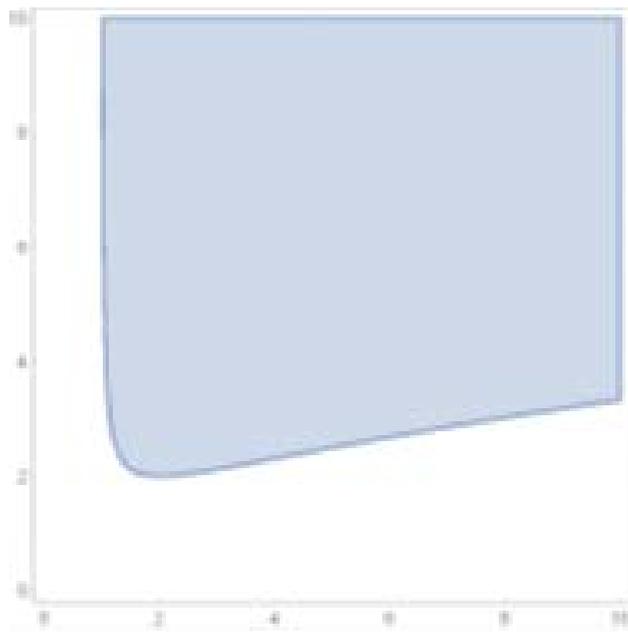
В правой полуплоскости расположены два корня многочлена. Многочлен не является устойчивым.

Иногда приходится рассматривать следующую задачу. Коэффициенты многочлена зависят от параметров. Требуется указать область изменения параметров, для которых многочлен остаётся устойчивым.

**Пример 4.** Дан многочлен  
 $f[z]=z^4+a^2 z^3+b z^2+a b z+1$ .

Требуется найти область изменения параметров  $a$  и  $b$ , принадлежащую заданному квадрату  $0 \leq a \leq 10, 0 \leq b \leq 10$ , для которых многочлен является устойчивым.

```
f[z_]=z^4+a^2 z^3+b z^2+a b z+1;
R=Solve[f[z]==0,z];
H=Table[z/.R[[i]],{i,1,4}];
U=True;Do[U=U&Re[H[[i]]]<0,{i,1,4}]
RegionPlot[U,{a,0,10},{b,0,10}]
```



Благодаря специальной символике, разработанной для работы с многочленами, удастся находить вычеты функций, найти которые другим путем затруднительно.

**Пример 5.** Найти вычеты функции в корнях многочлена  $z^5+3 z+5$ .

```
f[z_]=Exp[-3 z^2]Sin[z]/Sin[(z^5+3 z+5)^2]^3;
R=Solve[z^5+3 z+5==0,z];
T=Table[z/.R[[i]],{i,1,5}];
```

**Table[N[Residue[f[z],{z,T[[i]]}],{i,1,5}]**  
**{-0.000910057,-0.395807-0.288572 I,-0.395807+0.288572 I,**  
**-0.00226879+0.00207565 I,-0.00226879-0.00207565 I}**

Решение систем алгебраических уравнений. Система Mathematica позволяет находить комплексные корни систем алгебраических уравнений, принадлежащие заданной области.

**Пример 6.** Найти решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 3y^3 + z = 5 \\ y^3 + z^3 + 3x = 12 \\ x^3 + z^3 + 7y = 13, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям

$$|x|^2 \leq 2; |y|^2 \leq 2; \operatorname{Re}[z] < 3.$$

**NSolve[x^3+3 y^3+z==5&&y^3+z^3+3 x==12&&x^3+z^3+7**  
**y==13&&**  
**(Re[x]^2+(Im[x])^2<=2&&(Re[y])^2+(Im[y])^2<=2&&Re[z]<3,{x,y,z}]**  
**{{x->-0.614658+1.08957 I,y->-0.369709+0.487336 I,z->2.40449 -**  
**0.193722 I},**  
**{x->-0.614658-1.08957 I,y->-0.369709-0.487336 I,z->2.40449**  
**+0.193722 I}}**

## **ПРИМЕНЕНИЕ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ УРОВНЯ ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ**

**Р.С. КУЗЕНКОВ**

Смоленский государственный университет  
 e-mail: alphasromeo7@mail.ru

УДК 519.25

Ключевые слова: *уровень жизни населения, прикладная статистика, кластерный анализ.*

*В статье представлен сравнительный анализ субъектов ЦФО РФ, полученный с помощью одного из методов многомерной статистической обработки данных на основе различных социально-экономических показателей, характеризующих уровень жизни населения.*

В настоящее время экономика России переживает серьезный упадок. Одной из важнейших проблем в этой области является очень высокий уровень дифференциации регионов России по социально-экономическому развитию. Как известно, приоритетной социально-экономической категорией, определяющей народное благосостояние, является уровень жизни населения. Организацией Объединенных Наций рекомендован перечень условий жизнедеятельности, которые в совокупности составляют понятие «уровень жизни»: рождаемость, смертность, продолжительность жизни, уровень потребления продовольствия, жилищные условия, баланс доходов и расходов, потребительские цены, обеспеченность транспортом и т. д. Однако не все из этих условий можно представить в количественном виде. Зачастую для оценки уровня жизни применяют показатели, охватывающие не все, а лишь часть параметров. В качестве основных были выбраны следующие:

X1 – среднедушевые денежные доходы руб./мес.;

X2 – среднемесячная начисленная заработная плата, руб.;

X3 – средний размер назначенных пенсий, руб.;

X4 – величина прожиточного минимума (в среднем на душу нас.), руб./мес.;

X5 – численность населения с денежными доходами ниже величины прожиточного минимума, %;

X6 – число собственных легковых автомобилей на 1000 чел. Населения;

X7 – общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя, кв. м.

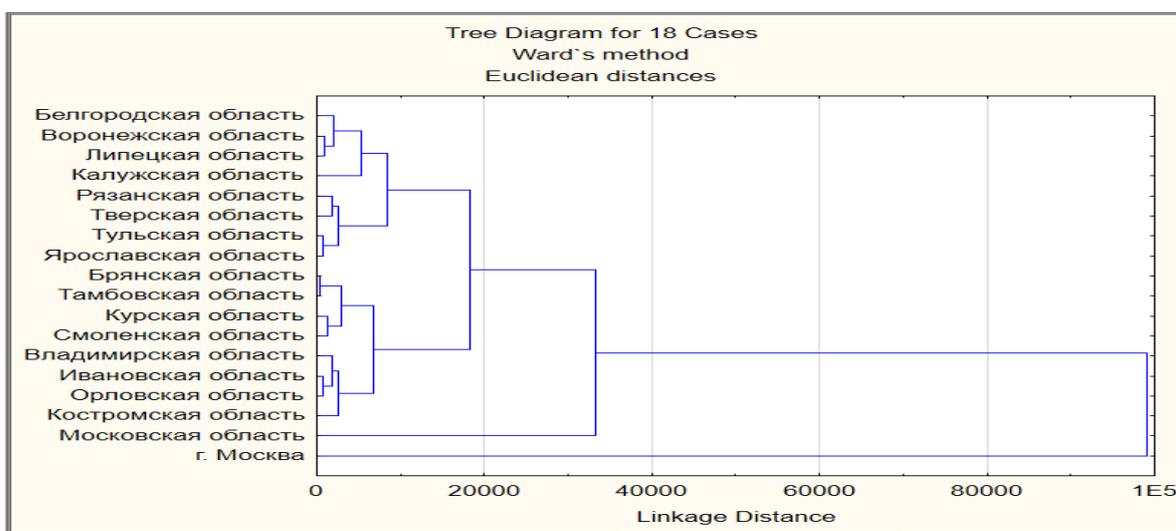


Рис. 1. Дендрограмма (метод Варда, евклидово расстояние)

Полученный статистический банк данных был обработан с помощью кластерного анализа, который позволил классифицировать регионы ЦФО по уровню жизни населения. Методом разбиения на группы был выбран метод Варда. Он построен таким образом, чтобы оптимизировать минимальную дисперсию внутри кластеров. В качестве метрики использовано евклидово расстояние, что способствовало увеличению контрастности кластеров.

Для проверки устойчивости кластерного решения существует эмпирическое правило – устойчивая типология сохраняется при изменении методов кластеризации. Устойчивость иерархического кластерного решения была проверена итеративным методом k-средних.

	Cluster 1		Cluster 2
	Distance		Distance
г. Москва	0,00	Московская область	0,00
	Cluster 3		Cluster 4
	Distance		Distance
Белгородская область	767,789	Брянская область	604,197
Воронежская область	674,504	Владимирская область	328,334
Калужская область	1194,426	Ивановская область	483,561
Липецкая область	601,324	Костромская область	1093,453
Тверская область	1013,689	Курская область	795,373
Тульская область	453,169	Орловская область	559,683
Ярославская область	523,207	Рязанская область	811,792
		Смоленская область	363,081
		Тамбовская область	637,750

Рис. 2. Результат кластеризации методом k-средних

Из рисунков 1 и 2 следует, что кластеры имеют долю совпадений более 70% (позицию изменила только Рязанская область, попав в 4 кластер), значит, построенное кластерное решение принимается. В первые два кластера попали Москва и Московская область, значительно опережающие остальные субъекты практически по всем показателям уровня жизни, а особенно по уровню среднедушевых денежных доходов и среднемесячной начисленной заработной плате. В третий кластер вошли субъекты ЦФО с высокими показателями уровня жизни (это Белгородская, Воронежская, Липецкая области и др.). Четвертый кластер составили регионы, наименее благоприятные для жизни. К сожалению, в их число попала Смоленская область.

# ПРИВЕДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИНВАРИАНТОВ В СКМ MAPLE

А.М. НИГМЕДЗЯНОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

e-mail: aigmani@rambler.ru

УДК 004.94, 514.142.24

Ключевые слова: *математическое моделирование, системы компьютерной математики, аналитическая геометрия, поверхности второго порядка, метод инвариантов, канонический вид поверхностей второго порядка.*

*Работа посвящена приведению поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода ортогональных инвариантов в СКМ Maple. Написана программа в пакете Maple, которая классифицирует поверхность второго порядка, записанную в общем виде с помощью метода инвариантов, а также приводит графическую иллюстрацию поверхности и ее каноническое уравнение.*

Применение компьютера и других информационно-коммуникационных технологий на занятиях в общеобразовательной школе и в вузе позволяет оптимизировать управление обучением, повысить эффективность и объективность учебного процесса при значительной экономии времени преподавателя, мотивировать учащихся на получение новых знаний и закрепление выработанных умений и навыков.

В предыдущих статьях автор уже строил цифровое оснащение к задачам математической физики [1], динамическую текстовую визуализацию построения сечений многогранников [2], а также оснащенную динамическую визуализацию построения точки по ее проективным координатам на расширенной прямой [3] и плоскости [4]. Также была написана программа по приведению кривых второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов [5]. Написанные программы позволяют повысить наглядность при изучении соответствующих разделов математики.

Данная статья посвящена разделу «Аналитическая геометрия», теме «Канонический вид поверхностей второго порядка. Метод инвариантов».

Данная тема вызывает некоторые затруднения у студентов, поскольку дается на самостоятельное изучение.

"Исходное уравнение:",  $2x^2 + 4y^2 - 2yz + 9z^2 + 8x + 7y + 3z = 0$

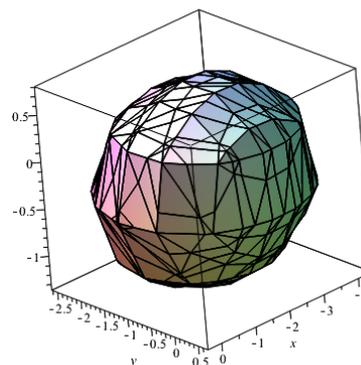
"Центральная поверхность"

"Эллиптический тип поверхности"

"Эллипсоид"

"Каноническое уравнение:"

$$\frac{280}{1639} X^2 + \frac{Y^2}{\frac{21307}{9800} - \frac{1639}{9800} \sqrt{29}} + \frac{Z^2}{\frac{21307}{9800} + \frac{1639}{9800} \sqrt{29}} = 1$$



Настоящая работа является продолжением ранее проводимых исследований автора [6]; в данной работе программа усовершенствована и выводит не только основные данные преобразований и графическую модель, но и приводит приведенное каноническое уравнение поверхности. Для этого изучены и спрограммированы все условия и циклы, позволяющие провести классификацию поверхности, а также коэффициенты самого канонического уравнения в стандартном виде.

Таким образом, данная разработка может использоваться не только как наглядный материал для обучающихся, но и для проверки результатов, полученных аналитическим способом.

## Литература

1. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация задач математической физики // Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН-2012: материалы конференции и труды семинара. 8-12 октября 2012 г., Казань. – С.127–121.
2. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построений сечений многогранников // Международный научный семинар «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии» и Российская школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений». Казань, 21-26 октября 2013 г. – С. 151–157.
3. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построения точки по ее координатам на проективной прямой // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции.– Смоленск: СмолГУ, 2014. – Вып. 15. – С. 36–38.
4. Нигмедзянова А.М.. Динамическая визуализация построения точки в пространстве по ее проективным координатам // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики». – Казань: Изд-во «Фолиант», 2014. – С. 236–239.
5. Нигмедзянова А.М. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI Международной научной

конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. – Вып. 16. – С.30–32.

6. Нигмедзянова А.М. Классификация поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple // Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН-2015». – Казань: КГУ, 2015. – С.160–162.

7. <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=privedenie-uravneniya-poverhnosti-k-kanonicheskomu-vidu-po-invariantam>.

## ВАРИАНТ РЕАЛИЗАЦИИ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

**Е.В. ПЕТРОВА**

Смоленский государственный университет

e-mail: petrova-elena-vlad@mail.ru

УДК 004.67 + 519.65

Ключевые слова: *сплайн-интерполяция, сплайн Акимы, стохастичность процесса.*

*В работе рассматривается построение модели доходности активов компании в виде комбинаций случайных функций времени, представленных сплайнами Акимы.*

В теории приближения функций существует достаточно большой набор сплайновых структур, которые находят широкое применение для решения вычислительных задач. Одним из популярных видов сплайнов является кубический сплайн. Такой вид сплайна имеет хорошие параметры для анализа и является нетрудоемким для вычислений. Но отрицательной его особенностью является тенденция осциллировать в окрестности точки, значение в которой существенно отличается по отношению с ближайшими. Ситуации, когда подобное может происходить, достаточно распространены в условиях обработки потоков цифровых данных, например, в цифровых измерениях, в системах с числовым программным управлением [1, 2]. Для повышения устойчивости к таким характерным выбросам применяется особый вид кубического сплайна, называемый сплайном Акимы (Akima H.).

При вычислении данного вида сплайна выполняются основные условия сплайн-интерполяции без требования непрерывности второй производной. Построение сплайна возможно по пяти узловым точкам, он является локальным. Это обстоятельство делает сплайн менее «жестким», при резких выбросах значений минимизируются искажения. Основное расчетное вычисление полинома сплайна выполняется по формуле:

$$y = p_0 + p_1(x - x_i) + p_2(x - x_i)^2 + p_3(x - x_i)^3,$$

где

$$p_0 = y(x_i); p_1 = t_i; p_2 = \frac{3 \cdot (y(x_{i+1}) - y(x_i)) - 2t_i - t_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}; p_3 = \frac{t_i + t_{i+1} - 2 \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i}}{(x_{i+1} - x_i)^2},$$

а  $t_i$  является производной в точке  $x_i$  и полагается равной модулю среднего значения от разделенной разности первого порядка справа и слева.

Анализ методов сплайн-интерполяции, реализованных в популярных системах компьютерной математики, показывает, что подобный вид сплайн не встречается [3, 4]. Программную реализацию вычисления сплайна Акимы можно встретить лишь в специализированных библиотеках [5]. Поэтому полезным является пример применения встроенной функции `ainterp` для вычисления данного вида сплайна в проекте SMath Studio [6]. Результат вычисления двух видов сплайна – кубического и Акимы представлен на рисунке 1. Сплайн Акимы имеет большую устойчивость в окрестности выброса (отмеченные точки на графике) по сравнению с кубическим сплайном.

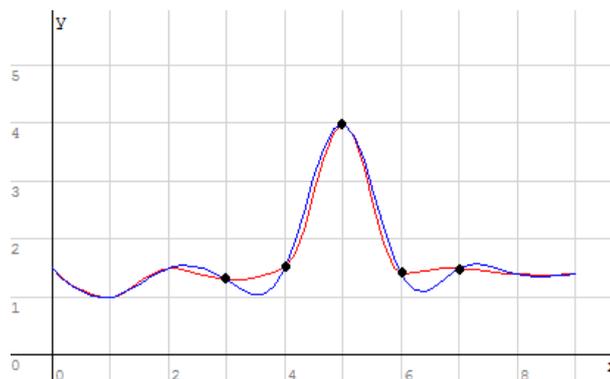


Рис. 1. График кубического сплайна (синий) и сплайна Акимы (красный)

Надо отметить, что программа SMath Studio имеет весьма скромные вычислительные мощности. Но вместе с тем она компактна, предоставляет графический интерфейс для вычисления математических выражений и построения графиков, основана на принципах свободного использования. Эти факторы достаточно привлекательны для решения вычислительных задач анализа практических ситуаций, например в экономике.

В работе была рассмотрена математическая модель анализа доходности активов компании в виде комбинации случайных функций времени [7]:

$$R(t) = R_f(t) + \beta(t) \cdot [R_m(t) - R_f(t)], \quad (1)$$

где  $R_f(t)$  – случайная функция стоимости денег по безрисковым ставкам,  $R_m(t)$  – случайная функция среднерыночного уровня доходности акций,

$\beta(t)$  – случайная функция, характеризующая систематический риск ценной бумаги по сравнению с рынком.

Основная идея состоит в возможности моделирования изменчивости стоимостных показателей бизнес-процессов на основе использования случайных функций времени. Подобные функции могут адекватно отражать реальные показатели с учетом случайных составляющих.

Поиск решения выполнялся в несколько этапов.

1. Все исходные случайные функции были преобразованы в сплайновые структуры по методу Х. Акимы. Это гарантировало устойчивое поведение сплайнов для любых случайных значений.

2. Полученные сплайновые структуры в качестве исходных данных были рассчитаны по формуле (1) согласно правилам преобразования матричных данных. Результат вычисления, функция  $R(t)$ , представлен на рисунке 2 кривой синего цвета. Другие кривые показывают характер поведения случайных функций исходных параметров.

Все вычислительные операции и процедуры визуализации результатов выполнены в программе SMath Studio.

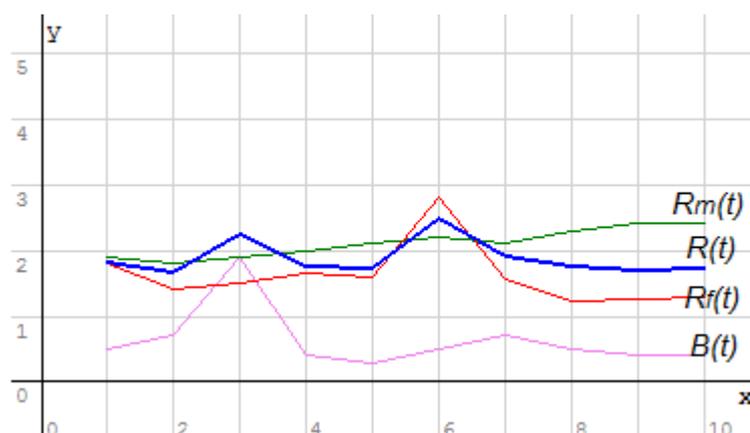


Рис. 2. График исходных данных функций  $Rf(t)$ ,  $Rm(t)$ ,  $\beta(t)$  и результирующей функции  $R(t)$

Полученную функциональную зависимость можно использовать для анализа финансовых параметров при конкретном временном значении на заданном диапазоне.

### Литература

1. Афонский А.А., Суханов Е.В. Интерполяция в цифровой осциллографии // Контрольно-измерительные приборы и системы. – 2010. – № 5. – С. 13–16.
2. Обухов А.И. Принцип реализации сплайнового интерполятора системы ЧПУ // Труды 2-й Международной Интернет-конференции молодых ученых, аспирантов и студентов INNOTECH 2010. URL: <http://www.conference.msa.pstu.ru/index.php/ru/> (дата обращения: 10.03.2016).
3. Дьяконов В.П. Энциклопедия компьютерной алгебры. – М.: ДМК Пресс, 2009.

4. Петрова Е.В. Решение задач аппроксимации функций в системах компьютерной математики: дис. ... канд. тех. наук. – Смоленск, 2002. – 141 с.

5. Кросс-платформенная библиотека численного анализа ALGLIB [Электронный ресурс] URL: <http://alglib.sources.ru/> (дата обращения: 20.02.2016).

6. Математическая свободно-распространяемая программа SMath Studio. URL: <http://ru.smath.info/> (дата обращения: 10.02.2016).

7. Паин А.А. Моделирование волатильности стоимостных показателей в системе корпоративных финансов с учетом стохастичности доходности бизнес-процессов // Международный научно-исследовательский журнал. – 2014. – № 3-3(22). – С.61–63.

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ**

**А. В. ПОДРОГА**

ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва

e-mail: [anastasiapodoroga@gmail.com](mailto:anastasiapodoroga@gmail.com)

УДК 532.5+004.942

Ключевые слова: *математическое моделирование, квазилинейное уравнение первого порядка, метод характеристик.*

*Для квазилинейного уравнения дорожного движения средствами компьютерного моделирования решается задача о построении поля характеристик.*

При математическом описании дорожного движения часто используют макроскопический подход [1]. Транспортный поток рассматривают как специфический поток сплошной среды. Основными характеристиками потока являются его плотность  $\rho = \rho(x, t)$  и интенсивность  $q = q(x, t)$ , зависящие от координаты  $x$  и времени  $t$ . Ключевую роль играет связь интенсивности и плотности

$$q = Q(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}.$$

Это соотношение называют *фундаментальной диаграммой* дорожного движения. Непрерывная функция  $Q(\rho)$  предполагается неотрицательной и выпуклой вверх на  $[0, \rho_{\max}]$ , равной нулю на концах отрезка. Используя фундаментальную диаграмму, получаем по аналогии с уравнением неразрывности основное *уравнение дорожного движения*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t).$$

Это квазилинейное уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + k(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t),$$

где

$$k(\rho) \equiv \frac{dQ(\rho)}{d\rho}.$$

Если известно начальное распределение автомобилей, то возникает задача Коши

$$\rho(x, 0) = \mu(x).$$

Решение задачи Коши выражается в виде неявной функции

$$\rho = \mu(x - k(\rho)t).$$

Восстановить отсюда явный вид  $\rho = \rho(x, t)$  не всегда возможно.

Поэтому задачу Коши решают *методом характеристик* [2; 3]. Через каждую точку  $x_0$  на оси  $Ox$  в плоскости  $(x, t)$  проводят прямую

$$x = x_0 + k(\mu(x_0))t,$$

называемую *характеристикой*. Решение квазилинейного уравнения сохраняет свое значение вдоль характеристики. Таким образом, если линия выходит из точки  $x_0$ , то всюду на ней значение плотности  $\rho(x, t)$  равно  $\mu(x_0)$ . Построив достаточно плотное поле характеристик, можно восстановить решение для любого начального состояния  $\mu(x)$ .

Впрочем, здесь встречаются сложности, связанные с тем, что некоторые характеристики могут пересекаться или расходиться. Если характеристики пересекаются, то образуется линия сильного разрыва – так называемая *ударная волна*, которая движется в плоскости  $(x, t)$  в соответствии с условием Рэнкина–Гюгонио (см. [1; 3]). При этом стоит учитывать, что хотя сами характеристики суть прямые линии, возникающая ударная волна будет достаточно сложной нелинейной кривой. Помимо пересечений характеристики могут расходиться, образуя пустые области, куда не попадает ни одна прямая. Всякую такую область искусственно заполняют «веером» характеристик, формируя специальную *волну разрежения* (см. [4; 5]).

В настоящем сообщении обсуждается компьютерная программа, моделирующая построение поля характеристик. Программа написана на языке C# и снабжена наглядной визуализацией. Сначала ось  $Ox$  разбивают на сетку с достаточно мелким шагом. Через каждую точку  $x_0$  построенной сетки проводят характеристику, угол наклона которой зависит от начального условия  $\mu(x_0)$  и выбранной фундаментальной диаграммы  $Q(\rho)$ . Значение плотности на такой характеристике

совпадает с  $\mu(x_0)$ . Исходя из плотности программа определяет цвет характеристики. Черный цвет соответствует максимальной плотности, белый цвет – минимальной (нулевой) плотности. При уменьшении шага сетки характеристики все «гуще» заполняют фазовую плоскость  $(x, t)$ . В итоге получается «трехмерный» график плотности  $\rho(x, t)$ , выполненный в оттенках серого. Ударные волны будут возникать в точках пересечения характеристик и формироваться далее в соответствии с условием Рэнкина–Гюгонио. Таким образом, геометрический подход позволяет получать графики решений задачи Коши для произвольных начальных условий при выбранной фундаментальной диаграмме  $Q(\rho)$ .

Работа компьютерной модели протестирована на большой серии типичных примеров.

### Литература

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие // А.В. Гасников [и др.]; под ред. А.В. Гасникова. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2013. – 427 с.
2. Lighthill M. J., Whitham G. B. On Kinematic Waves. II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads // Proceedings of the Royal Society of London. – Series A; Mathematical and Physical Sciences. – 1955. – Vol. 229, No. 1178. – P. 317–345.
3. Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 296 с.
4. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // УМН. 1957. – Т. 12, № 3. – С. 3–73.
5. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. – 576 с.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ МЕТОДАМИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ МАТНСАД

А.Г. СУХАНОВА

Филиал Университета машиностроения в г. Рославле  
e-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru

УДК 519.688

Ключевые слова: *динамическое программирование, оптимальный портфель, метод рекуррентных соотношений, матрица доходностей, система нечеткого вывода, принцип оптимальности.*

*Построен оптимальный портфель ценных бумаг с использованием метода рекуррентных соотношений. В качестве инструментальной среды разработки использована система Mathcad.*

В данной работе автором для построения оптимального портфеля ценных бумаг использованы методы динамического программирования. В качестве инструментальной среды разработки использована система Mathcad. Ранее автором для выбора инвестиционного портфеля был предложен нечетко-множественный подход в системе Mathcad [1]. Реализация теории нечетких множеств в системе Mathcad рассмотрена также в [2].

В работе построен оптимальный портфель методом рекуррентных соотношений, являющимся одним из основных методов динамического программирования. Метод рекуррентных соотношений основан на использовании принципа оптимальности, разработанного Р. Беллманом.

Пусть имеется некоторая сумма средств  $x$ , которую необходимо распределить между  $n$  различными акциями так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Математическая форма сформулированной задачи:

$$f_n(x) = \max \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n x_i = x, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где

$x_i$  – сумма денежных средств, вложенная в акции  $i$ -го вида ( $i = \overline{1, n}$ );

$g_i(x_i)$  – функция полезности, величина дохода от использования денежных средств  $x_i$ , вложенных в акции  $i$ -го вида;

$f_k(x)$  – наибольший доход, который можно получить при вложении суммы денежных средств  $x$  в акции первых  $k$  различных видов.

Рассмотренная выше задача решена для акций Норникель, Магнит, Верхнесалдинского МПО, ФосАгро. Нами была составлена матрица доходностей указанных ценных бумаг с учетом возможных состояний рынка ценных бумаг. Разработанная экспертная система нечеткого вывода для оценки характера рынка ценных бумаг рассмотрена в [3]. В данной работе использована матрица доходностей указанных акций на четыре даты с интервалом в три месяца (табл. 1).

Матрица доходностей

Дата формирования портфеля	GMKN	MGN T	VSMO	RHO R
	Норникель	Магнит	Верхнесалдинское МПО	ФосАгро
01.08.2013	0,65	2,64	2,60	-0,22
01.11.2013	1,44	-0,32	3,14	1,96
03.02.2014	-1,55	1,01	-1,12	-2,51
06.05.2014	0,39	1,72	0,78	1,13

Расчет дохода при вложении всех предполагаемых средств в каждый вид акций в системе Mathcad представлен на рисунке 1.

**Доход при вложении 101500 руб. в каждый вид акций, руб.**

$$e := aa \cdot 5 \quad i := 0..3 \quad agz_i := \text{floor}\left(\frac{e}{pr_i}\right)$$

$$agz = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 12 \\ 79 \end{pmatrix} \quad al_i := pr_i \cdot agz_i \quad ee_{i,0} := al_i + \frac{x_{i,0} \cdot al_i}{100}$$

$$j := 1..3 \quad ee_{i,j} := ee_{i,j-1} + \frac{ee_{i,j-1} \cdot x_{i,j}}{100} \quad i := 0..3 \quad j := 0..3$$

$$ee_{i,3} =$$

$9.755 \cdot 10^4$
$1.006 \cdot 10^5$
$9.98 \cdot 10^4$
$1.006 \cdot 10^5$

Рис. 1. Доход при вложении 101 500 руб. в каждый вид акций

Решение задачи разбивается на этапы в зависимости от количества видов акций, в которые предполагается вложение денежных средств. Рекуррентные соотношения, связывающие  $f_k(x)$  и  $f_{k-1}(x)$ , имеют вид:

- для акций Норникель (GMKN)

$$f_1(x) = g_1(x_1), \quad (3)$$

- для всех остальных акций

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}. \quad (4)$$

Программный модуль решения задачи, начиная со второго этапа до четвертого, в системе Mathcad представлен на рисунке 2.

```

x := 0      i := 2..4
fi,x := | fi-1,0 ← 0
          | x ← 1
          | while x ≤ 5
          |   | qi ← 0
          |   | fi,x ← 0
          |   | while qi ≤ x
          |   |   | a ← max(gi,qi + fi-1,x-qi)
          |   |   | fi,x ← a if a > fi,x
          |   |   | qi ← qi + 1
          |   | x ← x + 1
          |
x := 1, 2..5
f4,x =


|                       |
|-----------------------|
| 1.951·10 <sup>4</sup> |
| 4.159·10 <sup>4</sup> |
| 6.191·10 <sup>4</sup> |
| 8.513·10 <sup>4</sup> |
| 1.046·10 <sup>5</sup> |


```

Рис. 2. Реализация второго-четвертого этапов в системе Mathcad

Расчет эффективности сформированного портфеля в Mathcad представлен на рисунке 3.

**Эффективность портфеля**  
**Максимальный доход при вложении 101500 руб. в один вид акций**

$$i := 5 \quad k := \max(g_{1,i}, g_{2,i}, g_{3,i}, g_{4,i})$$

$k = 1.006 \times 10^5$  Верхнесалдинское МПО

**Максимальный доход при вложении 101500 руб в четыре вида акций**

$$f_{4,5} = 1.046 \times 10^5$$

$$l := \frac{f_{4,5} - k}{f_{4,5}} \cdot 100 \quad l = 3.829$$

Рис. 3. Оценка эффективности сформированного портфеля

Наибольший доход при вложении денежных средств в сумме 101 500 руб. будет получен рассмотренным методом, если вложить 20 300 руб. в акции ФосАгро и 81 200 руб. в акции Магнит, т.е. доля вложения в первый вид акций 0,2, во второй 0,8. Полученный доход на 3,8% больше, чем при вложении той же суммы средств в один вид акций (ФосАгро).

### Литература

1. Суханова А.Г. Нечетко-множественный подход к выбору инвестиционного портфеля в системе Mathcad // Системы компьютерной математики и их

приложения: материалы XVI Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ. 2015. – Вып. 16. – С.38–41.

2. Стримжа М.М., Мазур М.В., Седова М.А. Реализация в Mathcad элементов теории нечетких множеств // Международна научна школа «Парадигма». Лято-2015: сборник научни статии в 8 т. – 2015. – С. 288–296.

3. Ратушняк Г.Я., Суханова А.Г. Нечеткая оценка характера рынка ценных бумаг // Вестник МГИМО. – 2015. – № 2 (41). – С.259–264.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЯЗЫКА ДОКУМЕНТА ПРИ ПОМОЩИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЯЗЫКОВОЙ МОДЕЛИ

**М. И. ТИХОНОВА**

мехмат МГУ имени М. В. Ломоносова

e-mail: m\_tikhonova94@mail.ru

УДК 519.688

Ключевые слова: *машинное обучение, распознавание языка, компьютерная математика.*

*Рассматривается задача автоматической обработки текста, связанная с распознаванием языка документа. Поставленная задача решается средствами машинного обучения для классифицирующей компьютерной модели, обучающейся на корпусе размеченных текстов.*

В работе рассмотрена типичная задача машинного обучения, связанная с компьютерной обработкой текстовых документов (см. [1-3]). Требуется в автоматическом режиме распознавать язык, на котором подготовлен тот или иной текстовый документ. На базе программной среды Ipython Notebook была построена компьютерная модель, которая после предварительного обучения самостоятельно определяла язык подаваемого на вход текстового документа. На этапе машинного обучения модели в нее подавался заранее подготовленный набор текстов с уже определенными языками. Это так называемая *обучающая выборка*. Программа анализировала каждый из текстов и вычисляла частоты встречающихся в них N-грамм (под *N-граммой* понимается последовательность из N идущих подряд слов). Полученные данные о частотах использовались затем для определения языка по методу максимального правдоподобия.

Опишем работу модели, названную LanguageEstimator. При ее инициализации на вход подается число N, которое задает длину стандартной N-граммы, используемой в программе. Затем предлагается корпус текстов для обучения, т. е. указывается адрес папки, в которой хранятся текстовые документы на разных языках. Отсюда языковая

модель извлекает нужную информацию о частотной встречаемости тех или иных N-грамм в соответствующих языках.

После инициализации, совмещенной с обучением модели, наступает этап распознавания языка произвольного предложенного документа. В качестве метрики качества был выбран логарифм правдоподобия, реализованный в программе в виде функции `def loglikelihood(model,kgrams)`. Модель предсказывает тот язык, правдоподобие которого максимально.

Для определения надежности модели были проведены стандартные эксперименты. На вход классификатору подавались документы, языки которых требовалось распознать. Также подавались правильные ответы. Полученные результаты сравнивались с ответами по метрике ассурасу (точность), вычисляющей долю правильных ответов. Тесты проводились на двух корпусах текстов. Для распознавания усеченного корпуса текстов была выбрана модель, работающая на основе 1-грамм, то есть определяющая язык документа по частотности встречающихся в нем слов. Для полного корпуса текстов использована 3-граммная модель. В обоих случаях доля правильных ответов составила свыше 95%.

### **Литература**

1. Jurafsky D., Martin J. Speech and Language Processing. – 2nd ed. – Prentice-Hall, 2008. – 1024 p.
2. Manning C., Raghavan P., Schütze H. Introduction to Information Retrieval. – Cambridge University Press, 2008. – 504 p.
3. Manning C., Schütze H. Foundations of Statistical Natural Language Processing. – MIT Press. Cambridge, MA: May 1999. – 717 p.

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ СВЯЗИ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

**О. В. ТИХОНОВА**

Московский технологический университет МИРЭА, г. Москва  
e-mail: o\_tikhonova@inbox.ru

УДК 623.4.01

Ключевые слова: *математическое моделирование, алгоритм синхронизации, помехоустойчивое кодирование, цифровая система связи.*

*Обсуждается вопрос об использовании универсальной математической модели цифровой системы связи для оптимизации работы системы. Рассмотрен алгоритм восстановления блочной структуры при передаче данных. Выбраны параметры алгоритма*

*путем компьютерного моделирования. Проведен анализ результатов, полученных в численных экспериментах.*

Покажем роль компьютерного моделирования при проектировании сложных систем на примере характерных задач, возникающих при создании высокоскоростных систем цифровой связи. Для обеспечения передачи данных с заданной скоростью при ограничениях по полосе передачи сигнала обычно применяют комбинированный подход, сочетающий использование узкополосного сигнала сложной структуры, методы демодуляции на основе алгоритма Витерби и разные варианты помехоустойчивого кодирования [1].

Многоуровневая математическая модель высокоскоростной системы связи подробно описана в [2]. Применяемые в системе связи линейные блочные коды используют разбиение исходной информации на отдельные блоки. Каждый из них подвергается кодированию и последующей передаче. Для обратного декодирования информации надо обеспечить восстановление блочной структуры после демодуляции сигнала. Здесь требуются эффективные алгоритмы. Логика работы системы связи состоит в следующем. Перед передачей данных для фиксации отдельных блоков известной длины между ними вставляют особый набор выделенных данных в виде последовательности с явно выраженным пиком автокорреляционной функции и ее минимальными боковыми лепестками. Это так называемая *синхропоследовательность*. При последующем приеме непрерывно поступающего набора данных в нем ищут и выделяют синхропоследовательность. Ее наличие снова проверяют при приеме двух следующих блоков. Затем фиксируют «вход в синхронизацию», и система приступает к работе. Все выделяемые блоки подвергаются дальнейшей обработке. В процессе работы происходит постоянная проверка наличия синхропоследовательности. При трехкратном отсутствии синхропоследовательности в известных местах (что может быть вызвано сбоями в канале передачи сигнала) фиксируется «выход из синхронизации», и система возвращается в режим поиска синхропоследовательности.

Наличие шумов в канале передачи сигнала приводит к возможным искажениям данных в синхропоследовательности. Поэтому она должна обнаруживаться даже при несовпадении некоторого количества символов. Синхропоследовательность считается найденной при возможном отклонении от номинала не более чем на величину порога на вход  $p_{in}$  при вхождении в синхронизацию и на величину порога на выход  $p_{out}$  при возможных потерях синхронизации. Наличие некоторой зоны нечувствительности представляется обоснованным, поэтому принято соглашение  $p_{out} > p_{in}$ .

С помощью компьютерного моделирования изучаются следующие вопросы:

— работает ли эта логика при известных вероятностях ошибок передачи сигнала  $p\_mist$ ;

— каковы оптимальная длина синхропоследовательности и ее конкретный вид;

— какие значения параметров  $p\_in$  и  $p\_out$  надо выбрать.

Следует учесть, что увеличение длины синхропоследовательности приводит к уменьшению скорости передачи данных за счет увеличения объема избыточно передаваемой информации. Несогласованность пороговых значений с вероятностью битовой ошибки  $p\_mist$  может приводить к излишне затянутому процессу входа в синхронизацию (когда происходит пропуск большого количества информации на начальном этапе приема или при потере синхронизации). Также не исключена ошибочная фиксация выхода из синхронизации при нормальной передаче данных.

После проведения численных экспериментов на компьютерной модели системы связи удалось утвердительно ответить на поставленные вопросы. В частности, предложен явный вид синхропоследовательности длины  $m = 31$  и приняты значения  $p\_in = 3$ ,  $p\_out = 8$  при  $p\_mist = 10^{-2}$ . Для таких параметров самопроизвольный выход из синхронизации наблюдался с вероятностью  $10^{-9}$ , что согласуется с теоретическими расчетами. Вероятность ошибочного выхода из синхронизации для указанного алгоритма составляет

$$p1 = \left( C_m^6 (p\_mist)^6 (1 - p\_mist)^{m-6} \right)^3.$$

На компьютерной модели дана также оценка эффективности работы помехоустойчивого турбокода произведения, разработанного на базе расширенного кода Хемминга. Результаты численных экспериментов полностью совпали с теоретическими оценками, приведенными в статье М. И. Потапова «Эффективность кодирования информации при использовании турбокода произведения на основе кода Хемминга», представленной в настоящем сборнике.

## Литература

1. Бернгард Склад. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.

2. Тихонова О. В. Специальные вопросы, возникающие при моделировании цифровой системы связи // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. – Вып. 16.– С. 41–46.

## **РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО РЕСУРСА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА БАЗЕ ФЕРМЫ ТЕРМИНАЛЬНЫХ СЕРВЕРОВ**

**А.В. ШЕПЕЛИН**

Billing system Technical Architecture analyst, SIA «Tele2 Shared Service Center»,  
Рига, Латвия  
e-mail: aleksey.shepelin@gmail.com

**В.А. ШЕПЕЛИН**

Смоленский филиал Российской академии народного хозяйства  
и государственной службы при Президенте Российской Федерации  
e-mail: shodin@mail.ru

УДК 004.9

Ключевые слова: *серверная ферма, балансировка нагрузки, отказоустойчивость, терминальный сервер, CRM, RDWeb.*

*В статье рассматривается способ повышения отказоустойчивости информационной системы путем параллельной обработки пользовательских запросов несколькими вычислительными узлами (фермой серверов). Предложен механизм распределения сеансов подключения пользователей, рассмотрен алгоритм настройки фермы серверов на платформе Windows 2008 R2 Datacenter, а также организация удаленного доступа к приложению при помощи Web.*

Среди современных информационных систем массовой обработки данных значительную долю рынка занимают системы типа CRM (Customer Relationship Management, Система управления взаимоотношениями с клиентами).

CRM-система – это прикладное программное обеспечение для организаций, предназначенное для автоматизации стратегий взаимодействия с заказчиками (клиентами), в частности, для повышения уровня продаж, оптимизации маркетинга и улучшения обслуживания клиентов путем сохранения информации о клиентах и истории взаимоотношений с ними, установления и улучшения бизнес-процессов и последующего анализа результатов [1]

CRM-система может включать:

– клиентскую часть, реализующую пользовательский интерфейс оператора и обеспечивающую обслуживание клиентов;

- сервер приложения, реализующий бизнес-логику системы;
- хранилище данных;
- аналитическую и другие вспомогательные подсистемы.

В случае, если клиентская база предприятия достаточно велика, число пользователей CRM-системы также значительно. Например, в качестве пользователей CRM-системы могут выступать операторы службы технической поддержки провайдера интернет-услуг или колл-центра оператора мобильной связи, принимающие одновременно большое количество звонков от клиентов. В этой связи к подобной системе предъявляются повышенные требования отказоустойчивости, а также надежности в плане обеспечения необходимой вычислительной мощностью. Такого рода задачи могут быть успешно решены с применением подхода параллельных распределенных вычислений [2]. Таким образом, вместо единого сервера, занимающегося обработкой пользовательских запросов клиентской части CRM-системы, следует использовать несколько параллельно работающих серверов, обрабатывающих запросы одновременно. Вычислительная нагрузка между ними должна быть распределена с помощью дополнительной системы диспетчеризации запросов. В случае отказа одного из серверов пользовательские запросы распределяются между остальными работоспособными серверами прозрачно и незаметно для пользователей системы. Подобная ассоциация серверов, соединенных сетью передачи данных и работающих как единое целое, называется серверной фермой (англ. *Serverfarm*). Поскольку в рамках данной статьи рассматривается только клиентская часть CRM-системы, то есть предоставляющая по сути терминал оператора системы, его рабочую среду, то речь будет идти о ферме терминальных серверов, или терминальной ферме.

Терминальная ферма – это группа серверов, которые предназначены для предоставления удаленной рабочей среды (рабочего стола или приложений) пользователям, которые подключаются к ним с помощью программ-клиентов удаленно. Между серверами фермы подключения распределяются с помощью специального программного или аппаратного обеспечения [3].

Существуют различные подходы к реализации фермы серверов. Например, серверная платформа Windows 2008 R2 Datacenter предоставляет следующие варианты реализации распределения нагрузки между группой серверов [4], [5]:

- Network Load Balancer (NLB), балансировщик сетевой нагрузки;
- Связка Remote Desktop ConnectionBroker (Брокер соединений удаленных рабочих столов) и DNS Round Robin, один из методов распределения нагрузки на уровне DNS-сервера.

Первая технология использует аппаратную привязку клиента и требует дополнительную настройку сетевых интерфейсов, помимо того, обеспечение должного распределения нагрузки требует довольно сложного администрирования, поэтому в нашем случае предпочтительнее второй вариант реализации фермы серверов.

Connection Broker работает следующим образом. Он контролирует входящие контрольные запросы (пинги или редиректы) от серверов фермы и таким образом понимает, что терминальный сервер работоспособен. В случае, если редиректов нет более 60 секунд (настраиваемый параметр), то Connection Broker начинает сам посылать пинги на терминальный сервер, и, если несколько пингов подряд (так же настраиваемый параметр `NumberFailedPingsBeforePurge`) завершаются неудачно, Connection Broker исключает сервер из своей базы.

Round Robin DNS работает, отвечая на запросы не только одним IP-адресом, а списком из нескольких адресов серверов, предоставляющих идентичный сервис. Таким образом, для реализации этого алгоритма на DNS-сервере создается список IP-адресов серверов фермы, которым соответствует виртуальное доменное имя фермы. Порядок, в котором возвращаются IP-адреса из списка, основан на алгоритме некотором Round-Robin, зависящим от конкретной реализации DNS-сервера. С каждым ответом последовательность IP-адресов меняется. Как правило, простые клиенты пытаются устанавливать соединения с первым адресом из списка, таким образом, разным клиентам будут выданы адреса разных серверов, что распределит общую нагрузку между серверами.

Помимо этого, Windows 2008 R2 Datacenter предоставляет технологию веб-публикации приложений RDWeb [6]. Это означает, что доступ к приложению (клиенту CRM-системы в нашем случае), установленному на сервере Datacenter, может быть осуществлен удаленно через интернет-браузер с сохранением функционала приложения. Это не требует установки клиента на каждый пользовательский компьютер, значительно облегчает администрирование системы.

Итак, рассмотрим пример создания фермы терминальных серверов с помощью стандартных средств Windows 2008 R2 Datacenter. Ферма будет использоваться для публикации CRM-клиента TestCRM на RDWeb.

Терминальная ферма состоит из четырех серверов (Т1–Т4), на которых установлено и опубликовано приложение TestCRM (см. рис. 1). На отдельном сервере установлен RD Connection Broker, который осуществляет балансировку загрузки серверов фермы. На этом же отдельном сервере работает Internet Information Server с веб-сайтом RDweb, который использует нашу ферму в качестве источника

приложений. Получая пользовательский запрос, IIS перенаправляет его на один из серверов фермы, используя технологию DNS Round Robin.

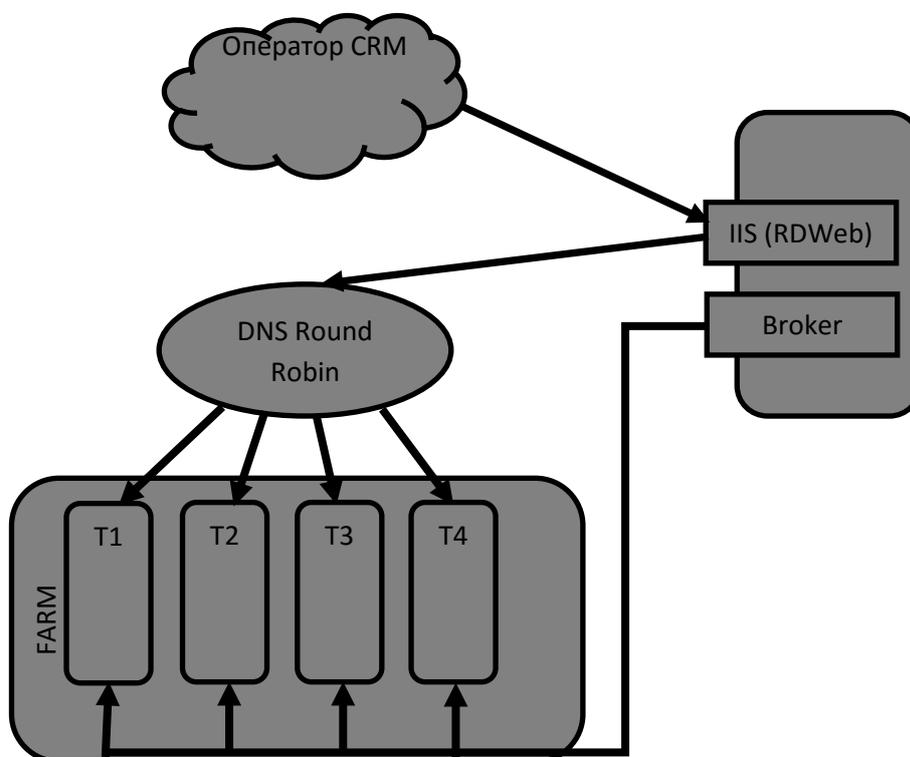


Рис. 1. Структура терминальной фермы

Ниже приводится пошаговое руководство по созданию и конфигурированию фермы терминальных серверов.

1. На каждом из серверов фермы (T1–T4) добавляется роль «Remote desktop services» с сервисами «Remote Desktop Session Host» (Узел сеансов удаленных рабочих столов) и «Remote Desktop Web Access». Последний сервис автоматически повлечет за собой установку веб-сервера IIS.

2. На сервере B1 устанавливается роль брокера (посредника) подключений к удаленному рабочему столу Remote Desktop Connection Broker role service (Server manager -> Roles -> Role services -> Add role services).

3. После установки роли брокера на сервере B1 в локальную пользовательскую группу Session Broker Computers (Server Manager -> Configuration -> Local Users and Groups) следует добавить все сервера-члены создаваемой фермы (T1–T4).

На каждом из терминальных серверов T1–T4 в конфигурации RD Session Host следует указать, что сервер является членом фермы, а также прописать имя сервера B1 и название создаваемой фермы. Название может быть выбрано произвольно, но оно должно быть одинаковым для

всех членов фермы. Также следует указать весовой коэффициент сервера в ферме, по умолчанию этот параметр имеет значение 100 и означает равномерное распределение нагрузки между серверами фермы. В этом же диалоговом окне нужно выбрать метод перенаправления запросов как IPaddress redirection и IP-адрес (по умолчанию текущий адрес сервера) для переподключения (Start -> Administrative Tools -> Remote Desktop Services-> RD session Host configuration-> Edit settings-> RD Connection Broker-> Change settings).

4. На каждом из терминальных серверов устанавливается приложение TestCRM. Важно, чтобы путь к рабочим каталогам приложения на каждом из серверов был одинаков, например: C:\Program Files\TestCRM.

5. С помощью RemoteApp manager на каждом из терминальных серверов публикуется установленное ранее приложение TestCRM

6. На каждом из серверов T1–T4 в локальную группу Web Access computers следует добавить сервер, на котором планируется публикация приложения для доступа через RDWeb (B1 в нашем случае).

7. На каждом из серверов T1–T4 в локальную группу Remote desktop users следует добавить пользователей, для которых предусмотрен доступ к приложению TestCRM (операторов системы) (Server Manager -> Configuration -> Local Users and Groups -> Groups).

8. Установить уровень безопасности как RDP security layer на серверах T1–T4 в настройках RD Session Host (Administrative tools -> Remote desktop services -> RD Session Host configuration->Connections-> RDP-Тср -> General).

9. Публикация фермы на RDWeb.

Создается специальная запись для фермы на DNS-сервере. Администрирование DNS-сервера выходит за рамки данной статьи и производится, как правило, администратором домена. Администратору следует предоставить список IP-адресов членов фермы (T1–T4) и желаемое доменное имя фермы. После того, как указанная запись создана, вывод команды nslookup на любом из серверов фермы должен выглядеть следующим образом:

```
C:\Users\Administrator>nslookup crmfarm.corp.company.com
Server: compdc1.corp.company.com
Address: 172.16.255.18
Name: crmfarm.corp.company.com
Addresses: 11.6.97.144
           11.6.97.141
           11.6.97.142
           11.6.97.143
```

где crmfarm.corp.comany.com – FQDN (Full Qualified Domain Name, полное доменное имя) нашей фермы, а адреса – IP терминальных серверов.

Далее указывается FQDN создаваемой фермы в качестве источника данных RemoteApp на сервере B1 (Administration tools ->Remote Desktop Services -> Remote Desktop Connection Manager ->Add RemoteApp Source). Последний шаг - Administrative Tools -> RD Services -> Remote Desktop Web Access configuration. В открывшемся окне Internet Explorer следует ввести данные учетной записи доменного пользователя, имеющего права администрировать сайт RD Web Access site (пользователь должен быть внесен в локальную группу “TS Web Access Administrators” сервера B1). На открывшейся странице следует выбрать “An RD Connection Broker server” и указать полное доменное имя сервера B1 в качестве источника данных.

Если конфигурация фермы была выполнена правильно, по адресу <https://<имя сервера B1>/RDWeb/> должна открываться страница Enterprise Remote Access с иконкой приложения TestCRM.

В статье рассмотрен алгоритм построения фермы терминальных Windows-серверов с балансировкой сетевой нагрузки. Подобное решение позволяет осуществить распределение пользовательских подключений по серверам фермы, а также обеспечить надежность информационной системы благодаря избыточности узлов обработки данных. Из-за сложности настройки и администрирования механизма NLB предложено использовать DNS Round Robin и RD Connection Broker. Выбранный подход обеспечивает прозрачную диспетчеризацию пользовательских сеансов между серверами фермы незаметно для операторов информационной CRM-системы. Публикация приложения с помощью технологии RDWeb позволяет осуществлять удаленный доступ к информационной системе через веб-браузер.

## Литература

1. Шеховцов О.И., Чертовской В.Д., Шифрин Б.М. Интеллектуальные средства поддержки принятия управленческих решений. – СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2000. – 59 с.
2. Pacheco Peter. Introduction to Parallel computing. Morgan Kaufmann Publishing, 2011. – 392 с.
3. Теория информационных процессов и систем: учебник / под ред. Ю.Ю. Громов, В.Е. Дидрих, О.Г. Иванова, В.Г. Однолько. – Тамбов: ТГТУ, 2014. – 172 с.
4. <https://social.technet.microsoft.com/Forums/windowsserver/en-US/16599a80-bf1c-4841-9550-645f9d079379/remoteapps-server-2012>.
5. <https://technet.microsoft.com/en-us/library/cc753891.aspx>.
6. [https://technet.microsoft.com/en-us/library/cc759800\(v=ws.10\).aspx](https://technet.microsoft.com/en-us/library/cc759800(v=ws.10).aspx).

## СЕКЦИЯ 2

### Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

#### РАЗРАБОТКА МОБИЛЬНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ ДЛЯ СЕРВИС-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Н.С. АЛЕКСЕЕНКОВ, Т.А. САМОЙЛОВА

Смоленский государственный университет

e-mail: emotive912@gmail.com, tatsam@hotmail.ru

УДК 004.75

*Ключевые слова: мобильное приложение, сервис-ориентированная архитектура, информационная система, Business Intelligence, Android, Windows Phone, iOS, HTML5, Java, IntelXDK, AJAX, Microsoft Azure.*

*В работе рассмотрены два основных подхода к созданию мобильных приложений: разработка нативных приложений с использованием языка программирования, присущего операционной системе мобильного устройства, и создание гибридных приложений с использованием HTML5 и JavaScript. Выполнено сравнение производительности нативных и веб-приложений мобильного BI, проведен анализ проблем, возникающих в работе мобильных клиентов, подключенных к облачной платформе Microsoft Azure.*

В настоящее время сервис-ориентированная архитектура (СОА) применяется во многих крупных информационных системах таких предприятий, как банки, транспортные компании, сферы оптовой и розничной торговли и многих других [1]. Приложения клиентов, взаимодействующие с веб-сервисами в единой информационной системе, зачастую целесообразно реализовать на мобильных платформах: Android, Windows Phone и iOS. Особенно востребованы мобильные приложения среди компаний, в которых существуют системы бизнес-анализа (Business Intelligence – BI). В подразделениях этих компаний, где выполняется бизнес-анализ, есть сотрудники, проводящие достаточно времени вдалеке от стационарных компьютеров. Это могут быть менеджеры по продажам, проводящие большую часть времени в разъездах и на встречах с партнерами и клиентами, или технологи по производству, постоянно следящие в цехах за работой линий. Всем им необходим удаленный доступ к аналитической информации, например, к результатам прогнозирования продаж. При этом главное требование к мобильному приложению – это

оперативность, качество визуализации и удобство использования. При этом мобильное решение ничего не будет значить без организации системы хранения и обработки данных, которые обеспечивает веб-сервис. Именно веб-сервис представляет собой главный программный компонент, реализующий функции предоставления данных, которые необходимы приложениям клиентов. Такими функциями сервиса могут быть как интеллектуальный анализ данных, построенный на базе математической модели, так и простейшая операция над данными.

В работе рассмотрены два основных подхода к созданию мобильных приложений визуализации BI:

- разработка нативных приложений с использованием языка программирования, присущего операционной системе мобильного устройства;
- создание гибридных приложений с использованием HTML5 и JavaScript.

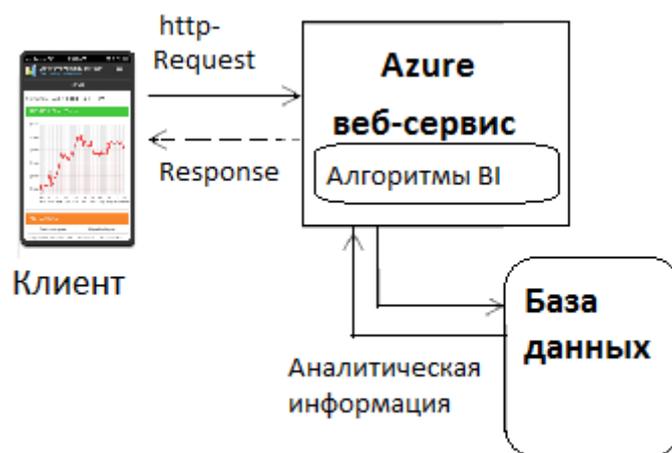


Рис.1. Схема взаимодействия мобильного клиента с веб-сервисом

Для сравнения производительности и усилий на создание нативных и веб приложений мобильной аналитики, а также анализа проблем, возникающих в работе мобильных клиентов COA-информационных систем, были разработаны два мобильных клиентских приложения для веб-сервиса, опубликованного на облачной платформе Microsoft Azure. Первое приложение реализовано средствами HTML5 в среде IntelXDK [2]. Динамическая графика в нем создавалась посредством объектно-ориентированной клиентской библиотеки Chart JS. Обмен данными между приложением клиента и веб-службой выполняется посредством jQuery.AJAX (Asynchronous Javascript and XML). При этом пользователь получает приложение с динамическим обновлением контента без перезагрузки всей страницы. Второе приложение реализовано в среде Android Studio средствами Java, в нем использована самая популярная библиотека MPChart для работы с графикой. На рисунке 1 приведена

схема взаимодействия мобильных приложений с веб-сервисом, опубликованном в Microsoft Azure. Сервис, содержащий алгоритмы бизнес-анализа, обменивается аналитической информацией с базой данных.

На рисунке 2 показаны скриншоты экранов мобильных приложений, демонстрирующих визуализацию результатов бизнес-анализа.



Рис. 2. Мобильный BI, созданный средствами Java(1) и HTML5(2,3)

Сравнение двух подходов, реализованных нативным и гибридным приложениями, показало, что, пользуясь первым подходом, можно достичь высокой производительности даже для интерактивной визуализации данных и наличия анимации. В том случае, если мобильное устройство невысокой вычислительной мощности подключается к сети через низкоскоростное беспроводное соединение, этот подход будет наилучшим.

При втором подходе в условиях низкоскоростного соединения организация интерактивности и воспроизведение анимации могут оказаться невозможными. Однако в случае передачи по сети небольших объемов данных и с учетом того, что интерпретаторы JavaScript с каждым годом становятся быстрее, этот подход будет идеальным решением.

Следует отметить, что мобильные BI-решения привлекают все больше внимания, обусловленного стремительным проникновением мобильных и планшетных устройств во все сферы нашей жизни. Уже сегодня эти приложения позволяют с помощью мобильных устройств работать с аналитическими таблицами, графиками и диаграммами.

Автоматизация ВІ – трудоемкий и наукоемкий процесс. Несмотря на это, большинство прогнозов утверждают [3], что в 2016 году бизнес-аналитика станет мобильной. Полученные в работе результаты в значительной мере способствуют тому, что эти прогнозы сбудутся.

### Литература

1. Биберштейн Н. [и др.]. Компас в мире сервис-ориентированной архитектуры (SOA): ценность для бизнеса, планирование и план развития предприятия: пер. с англ. – М.: КУДИЦ-ПРЕСС, 2007. – 256 с.
2. Intel XDK, <https://software.intel.com/ru-ru/intel-xdk>.
3. 25 прогнозов на 2016 год от Business Insider, <https://vc.ru/p/bi-intelligence>.

## «СОВМЕСТИМЫЕ» НЕЧЕТКИЕ КОГНИТИВНЫЕ КАРТЫ

**В.В. БОРИСОВ, А.С. ФЕДУЛОВ**

Филиал ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске  
e-mail: vadim.v.borisov@mail.ru; fedulov\_a@mail.ru

УДК 004.82

Ключевые слова. *Нечеткая когнитивная карта, совместимость концептов.*

*Предлагается способ учета совместимости концептов нечетких когнитивных карт, который, в зависимости от особенностей задания значений концептов, их взаимовлияния и от используемой модели системной динамики, может быть эффективно использован для различных типов нечетких когнитивных карт. Приведен пример использования предлагаемого способа для одного из типов нечетких когнитивных карт.*

*Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России № 2014/123 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности, проект № 2493, а также при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-41-03259 p\_центр\_a.*

В настоящее время активно развиваются методы нечеткого когнитивного моделирования сложных слабо формализуемых систем, процессов, ситуаций. В основе этих методов лежат различные типы нечетких когнитивных моделей (карт), к основным из которых относятся следующие: нечеткие когнитивные карты Б. Коско и их разновидности [1]; нечеткие когнитивные карты В. Силова [2]; нечеткие продукционные когнитивные карты [3]; нечеткие обобщенные продукционные когнитивные карты [4]; нечеткие реляционные когнитивные карты [5]. Эти нечеткие когнитивные карты предоставляют расширенные возможности для качественного и количественного

анализа и моделирования систем и процессов в условиях стохастической и нестохастической неопределенности.

Вместе с тем существует ряд задач, требующих учета совместимости концептов (системных факторов) этих карт как при анализе, так и в процессе моделирования системной динамики. Однако перечисленные разновидности моделей, за исключением обобщенных продукционных нечетких когнитивных карт, не обеспечивают таких возможностей. Но при этом механизм учета степени совместимости, реализуемый в обобщенных продукционных нечетких когнитивных картах, во-первых, ориентирован на представление значений концептов и отношений между ними в виде лингвистических термов, во-вторых, достаточно сложен для формализации и экспертной интерпретации; в-третьих, ограничен в возможностях использования инструментов систем компьютерной математики.

В статье предлагается способ учета совместимости концептов нечетких когнитивных карт при передаче влияния между ними, который в зависимости от особенностей задания значений концептов, их взаимовлияния, используемой модели системной динамики может быть эффективно использован для всех указанных выше типов нечетких когнитивных карт.

Проиллюстрируем предлагаемый способ учета совместимости концептов на примере нечетких когнитивных карт В. Силова (см. рис. 1). Отношения влияния между концептами нечеткой когнитивной карты данного типа представлены в виде весов  $w_{ij} \in [-1, 1]$ . Но из-за того, что операции над нечеткими множествами определены для значений из интервала  $[0, 1]$ , то задача учета отрицательных влияний концептов решается за счет отдельного их анализа с положительными влияниями.

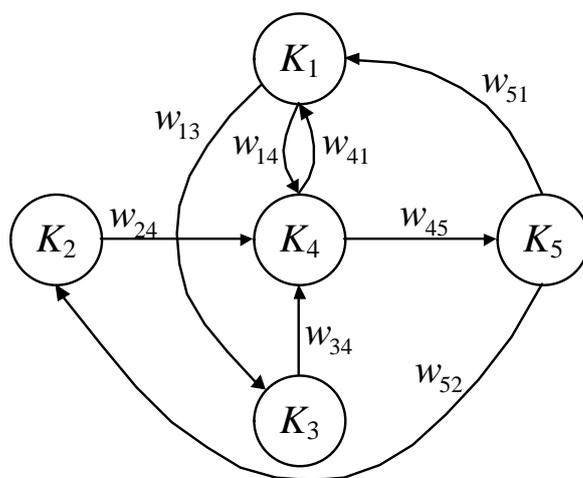


Рис. 1. Пример структуры нечеткой когнитивной карты

Значения выходного концепта  $K_j$  вычисляются с использованием операций  $t$ -норм над значениями входных концептов  $K_i$  и весов влияния. Наиболее часто используются операции минимума и алгебраического произведения, например:

$$K_j = \min(K_i, w_{ij}).$$

А при аккумуляции влияния нескольких ( $N$ ) концептов на один используется операция  $s$ -нормы, например, операция максимума:

$$K_j = \bigvee_{i=1}^N (K_i \wedge w_{ij}).$$

При нахождении взаимовлияния концептов нечеткой когнитивной карты положительно-отрицательная матрица связей  $\mathbf{W} = \|w_{ij}\|_{n \times n}$  преобразуется в матрицу положительных связей  $\mathbf{W}^* = \|w_{lk}^*\|_{2n \times 2n}$ :

$$\text{если } w_{ij} > 0, \text{ то } w_{2i-1, 2j-1}^* = w_{ij}, w_{2i, 2j}^* = w_{ij},$$

$$\text{если } w_{ij} < 0, \text{ то } w_{2i-1, 2j-1}^* = -w_{ij}, w_{2i, 2j}^* = -w_{ij}.$$

По результатам транзитивного замыкания матрицы  $\widehat{\mathbf{W}}^* = \mathbf{W}^* \vee \mathbf{W}^{*2} \vee \dots$  находится нечеткое отношение взаимовлияния концептов модели. Результаты представляются в виде матрицы пар элементов  $\mathbf{V} = \|(v_{ij}, \bar{v}_{ij})\|$ , где  $v_{ij} = \max(\widehat{w}_{2i-1, 2j-1}^*, \widehat{w}_{2i, 2j}^*)$ ,  $\bar{v}_{ij} = -\max(\widehat{w}_{2i-1, 2j}^*, \widehat{w}_{2i, 2j-1}^*)$ .

В отличие от известного подхода предлагается при передаче влияния по когнитивной карте учитывать отношение совместимости между ее концептами. Для этого на основе значений матрицы  $\mathbf{V}$  рассчитывается отношение совместимости между концептами когнитивной карты:

$$R = \left\{ \left( (K_i, K_j) / c_{ij} \right) \right\},$$

где  $c_{ij}$  – степень совместимости концептов  $K_i$  и  $K_j$  вычисляется на основе системного показателя консонанса влияния концепта  $K_i$  на концепт  $K_j$

$$c_{ij} = \frac{|v_{ij} + \bar{v}_{ij}|}{|v_{ij}| + |\bar{v}_{ij}|}.$$

Значения степеней совместимости  $c_{ij}$  концептов  $K_i$  и  $K_j$  в дальнейшем используются для выбора операций «взвешивания» при непосредственной передаче влияния от одного концепта к другому.

В качестве этих операций «взвешивания» влияний целесообразно использовать параметризованное семейство операций,

удовлетворяющее аксиомам нормировки, неубывания, непрерывности, бисимметричности:

$$K_j = \text{med}(K_i, w_{ij}; c_{ij}), \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, c_{ij} \in [0, 1].$$

Значение же концепта  $K_j$ , на которое передаются непосредственные влияния с нескольких концептов  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , зависит от порядка просмотра степеней совместимости  $c_{ij}$ , обуславливающего очередность их аккумуляирования. Могут быть применены различные стратегии аккумуляирования. Так для примера, представленного на рисунке 1, аккумуляирование влияния концептов  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  на концепт  $K_4$  (при очередности от наименьшей к наибольшей степени совместимости концептов и при условии  $c_{14} \leq c_{24} \leq c_{34}$ ) примет вид

$$K_4 = \text{med}\left(\left(\text{med}\left(\left(\text{med}(K_1, w_{14}; c_{14})\right), \left(\text{med}(K_2, w_{24}; c_{24})\right); c_{14}\right)\right), \text{med}(K_3, w_{34}; c_{34}); c_{24}\right).$$

Предлагаемый способ учета совместимости концептов нечетких когнитивных карт может быть распространен и на другие типы нечетких когнитивных карт и позволяет повысить гибкость, а в ряде случаев и достоверность результатов нечеткого когнитивного моделирования.

### Литература

1. Kosko B. Fuzzy cognitive maps// Int. Journal of Man-Machine Studies. – 1986. – Vol. 24. – P. 65–75.
2. Силов В.Б. Принятие стратегических решений в нечеткой обстановке. – М.: ИНПРО–РЕС, 1995.
3. Carvalho J.P., Tomé J.A. Rule Based Fuzzy Cognitive Maps – Qualitative Systems Dynamics // Proc. of the 19th Int. Conf. of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS2000. – Atlanta, 2000.
4. Borisov V.V., Fedulov A.S. Generalized Rule-Based Fuzzy Cognitive Maps: Structure And Dynamics Model// Lecture Notes in Computer Science. – 2004. – V. 3316. – P. 918–922.
5. Федулов А.С. Нечеткие реляционные когнитивные карты // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – № 1. – С. 120–132.

## АНАЛИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА СЛИЯНИЯ НЕСТРОГО УПОРЯДОЧЕННЫХ ФАЙЛОВ

**Е.И. ДАНИЛЮК, В.И. МУНЕРМАН**  
Смоленский государственный университет  
e-mail: lovingcn@mail.ru, vimoona@gmail.com

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы.*

*В работе проведен анализ алгоритма параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов. Для анализа был сконструирован программно-аппаратный комплекс на основе SMP-архитектуры. Приведены экспериментальные данные, подтверждающие эффективность предложенных алгоритма и архитектуры.*

В основу параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов положены принцип симметричного горизонтального распределения данных [1] и алгоритм, основанный на вычерпывании [3] ведущего файла. Если файлы  $X_K$  и  $Y_K$  нестрого упорядочены по множеству ключей  $K$ , можно считать, что оба файла состоят из классов эквивалентности, соответствующих одним и тем же значениям экземпляров множества ключей  $K$ . Тогда эти файлы могут быть представлены как фактор-множества  $X_K = \{X_{K_1^*}, \dots, X_{K_p^*}\}$  и  $Y_K = \{Y_{K_1^*}, \dots, Y_{K_p^*}\}$ , где классы эквивалентности  $X_{K_i^*}$  и  $Y_{K_i^*}$  есть совокупности  $X_{K_i^*} = \{x_{i1}, \dots, x_{i q_i}\}$  и  $Y_{K_i^*} = \{y_{i1}, \dots, y_{i q_i}\}$  записей этих файлов. Рассматриваемый алгоритм считывает в буферную область оперативной памяти каждый класс эквивалентности файла  $X_K$  целиком. Классы эквивалентности файла  $Y_K$  считываются по одной записи. Если экземпляр множества ключей, хранящихся в черпаке записей ведущего файла совпадает с экземпляром множества ключей прочитанной записи ведомого файла, производится совместная обработка всех записей черпака и этой записи. В результате для каждого экземпляра множества ключей формируется декартово произведение соответствующих ему классов эквивалентности файлов  $X_K$  и  $Y_K$ .

Для реализации предложенного параллельного алгоритма операции слияния нестрого упорядоченных файлов предложена архитектура программно-аппаратного комплекса, основанного на архитектуре SMP и реализованного в облачной системе Microsoft Azure на виртуальной машине с четырехъядерным процессором Xeon E5-2673. В роли файлов выступали таблицы в базах данных СУБД Microsoft SQL Server.

В ходе эксперимента в основной базе данных последовательно создавались таблицы, соответствующие файлам  $X_K$  и  $Y_K$ . Таблицы содержали фиксированное число строк, но различные (увеличивающиеся на каждом этапе эксперимента) размеры классов эквивалентности. Эти базы разбивались на четыре фрагмента, каждый из которых содержал 25% таблиц основной базы данных. Разбиение производилось на основе принципа симметричного горизонтального распределения [1].

На каждом этапе эксперимента программа, реализующая алгоритм слияния нестрого упорядоченных файлов, четырьмя параллельными потоками считывала классы эквивалентности фрагментов таблиц. Каждый поток порождал два потока, которые выполняли декартово произведение этих классов эквивалентности. По завершении всех потоков результаты объединялись в одну таблицу. Затем выполнялась операция JOIN над таблицами основной базы данных. При выполнении этой операции использовались стандартные средства распараллеливания, присущие СУБД Microsoft SQL Server.

Результаты эксперимента представлены на рисунках 1 и 2.

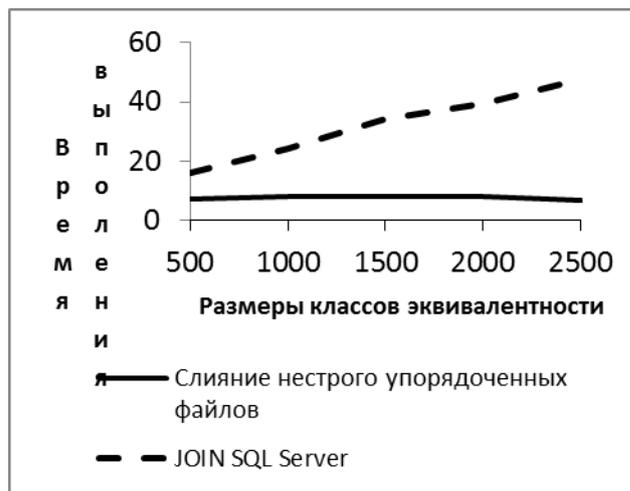


Рис. 1. Зависимость времени выполнения операции слияния нестрого упорядоченных файлов от размеров классов эквивалентности

График, приведенный на рисунке 1, показывает, что предложенные алгоритм и архитектура программно-аппаратного комплекса обеспечивают более эффективную обработку данных, чем стандартные средства СУБД.

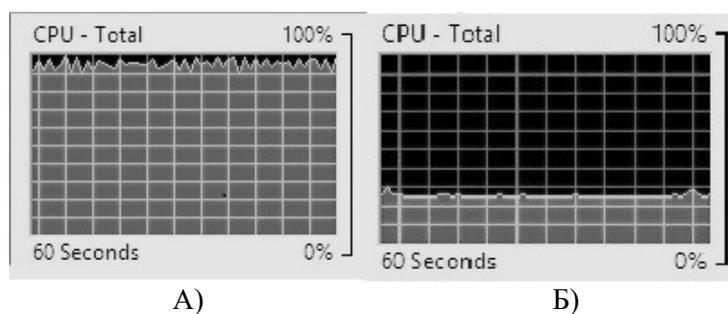


Рис. 2. График загрузки процессора

На рисунке 2 показана загрузка процессоров при выполнении обоих способов реализации операции: А) – применение предложенного алгоритма, Б) – стандартными средствами. Очевидно, что предложенный алгоритм и архитектура программно-аппаратного комплекса лучше используют средства вычислительной системы.

### **Литература**

1. Левин Н.А., Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности. – 2013. – Т.9, № 1. – С. 35–43.

2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

3. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2014. – Т.10, № 4. – С. 3–16.

## **ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ БАЗ ДАННЫХ**

**Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ, К.П. САВЧЕНКОВ**

Смоленский государственный университет  
e-mail: ypy1101@gmail.com, ksavchenkov@outlook.com

УДК 004.652

Ключевые слова: *объектно-реляционные базы данных, абстрактный тип данных.*

*В статье рассматривается один из подходов к проектированию баз данных. Приводится описание понятия «объектная база данных» на основе определения абстрактного типа данных.*

Один из современных подходов к теории и практике баз данных основан на объектной модели данных, в которой данные моделируются в виде объектов, их атрибутов, методов и классов. Считается, что в объектных базах данных (а также объектно-ориентированных системах управления базами данных) информация представлена в виде объектов, которые используются в объектно-ориентированном программировании. При этом предполагается, что объектные базы данных отличаются от реляционных баз данных, которые определяют как таблично-ориентированные. Объектно-реляционные базы данных являются гибридом обоих подходов. Для связывания реляционного и объектного подходов предлагается объектно-реляционная модель данных. В этом

случае модель позволяет использовать технологии, реализующие объектно-ориентированный подход, при котором объекты, классы и наследование реализованы в структуре баз данных и языке запросов [1].

Объектно-реляционными СУБД являются, например, широко известные Oracle Database, Informix, DB2, PostgreSQL. Язык объектного манипулирования данными – язык, предназначенный для формулирования запросов на поиск, обмен данными между прикладной программой и базой данных, а также для расширения языка программирования, либо как самостоятельный язык [2].

Для того чтобы использовать объектный подход нужно отказаться от неформального взгляда на объектные базы данных, сделать попытку дать формальное определение объекта и объектно-реляционной базы данных. Для данной задачи нам потребуется механизм описания высокого уровня, не связанный с особенностями реализации. В качестве такого механизма будем использовать понятие абстрактного класса. Попытка формализации данного понятия была предпринята в работах академика Л.В.Канторовича [3], затем развита в трудах В.М. Глушкова, Г.Е. Цейтлина, Е.Л. Ющенко [4].

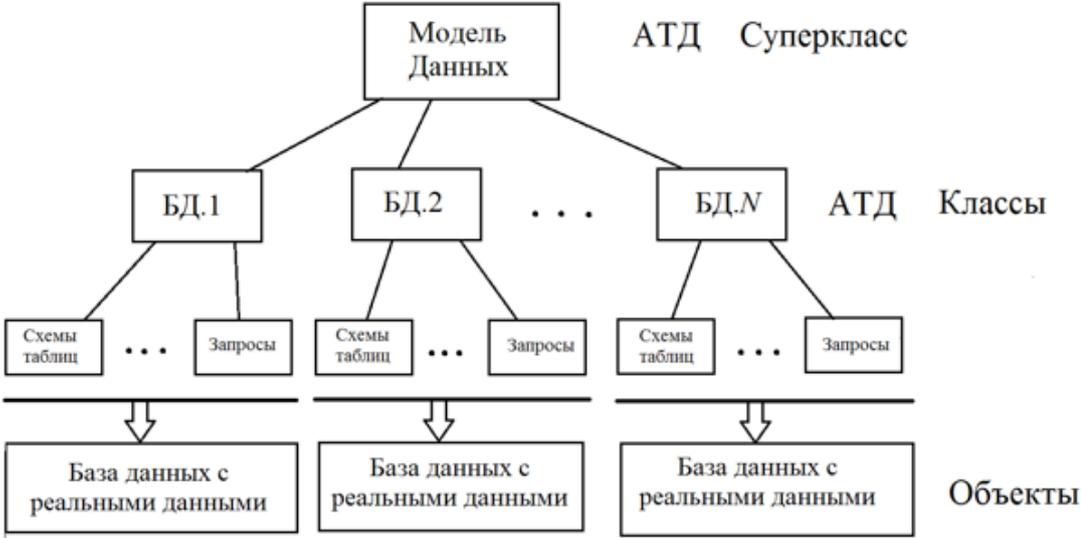


Рис.1. Архитектура модели данных

В предлагаемом подходе абстрактный тип данных определяется как многоосновная универсальная алгебраическая система. Тогда любая модель данных, в том числе объектно-реляционная, может рассматриваться как базовый абстрактный тип данных, потому что представляет собой универсальную многоосновную алгебраическую систему, в современной терминологии этому соответствует понятие

«суперкласс». Тогда, как это показано на рисунке 1, база данных – набор конкретных схем таблиц и операций над ними – является объектом этого суперкласса.

Таким образом, необъектных баз данных нет и современные процедурные языки манипулирования данными (ЯМД), такие как Transact-SQL, можно рассматривать как языки, поддерживающие технологию объектно-ориентированного проектирования и программирования. Действительно, поскольку конкретная база данных есть АД, то ее можно рассматривать как совокупность переменных (свойств), в роли которых выступают отношения (таблицы), и операции над ними (методы), представленные в виде запросов и хранимых процедур, а также функций, триггеров и прочих процедурных элементов базы данных.

### **Литература**

1. Liskov B., Zilles S. Programming with abstract data types // ACM SIGPLAN Notices. – Volume 9, Is. 4. – April 1974. – P. 50–59.
2. Кузнецов С.Д. Объектно-реляционные базы данных: прошедший этап или недооцененные возможности? – М.: Институт системного программирования РАН, 2007. – 117 с.
3. Канторович Л. В., Петрова А.Т. О математической символике, удобной при вычислениях на машинах // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. – 1956. – Т. II. – С. 151.
4. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки программирования. – Киев: Наукова думка, 1989. – 376 с.

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАЦИЙ СЛИЯНИЯ НЕСТРОГО УПОРЯДОЧЕННЫХ ФАЙЛОВ**

**В.Н. ЗАХАРОВ, В.И. МУНЕРМАН**

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,  
Смоленский государственный университет  
e-mail: VZakharov@ipiran.ru, vimoona@gmail.com

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, модели данных, оптимизация запросов, динамическое программирование.*

*Статья посвящена задаче оптимизации вычислительной сложности последовательности операций слияния нестрого упорядоченных файлов. Предложен метод определения вычислительной сложности этой операции на основе индексно-последовательного*

*метода доступа. Показано, что эта задача может быть решена методом динамического программирования.*

В работе рассматривается задача оптимизации процесса обработки данных, состоящих из последовательности операций слияния нестрого упорядоченных файлов [1]. Файл  $X_K$  определяется как фактор-множество множества однотипных записей  $X$  по отношению эквивалентности, порожденному множеством ключей  $K$ . Если в каждом классе эквивалентности файла  $X_K$  содержится не менее одной записи, он называется нестрого упорядоченным.

В работе [2] было приведено решение задачи оптимизации последовательности умножений многомерных матриц. Решение состояло в обобщении решения аналогичной задачи для плоских матриц методом динамического программирования, которое было предложено в [3]. Как было показано в [4], многомерно-матричная модель данных соответствует теоретико-множественной (файловой) и реляционной моделям данных. Поэтому аналогичная задача разрешима и для алгебраических выражений, состоящих из последовательности операций слияния нестрого упорядоченных файлов (в файловой модели) и последовательности операций Join (в Sql-реляционной модели). В этом случае основная проблема заключается в определении вычислительной сложности этих операций над файлами (таблицами).

Решение этой проблемы возможно на основе использования метаданных, соответствующих файлам (таблицам) при использовании индексно-последовательного метода доступа [4]. Пусть в операции слияния участвуют два файла:  $X_{K_1}$  и  $Y_{K_2}$ . Их множества ключей можно разбить на три подмножества следующим образом:  $K_1 = C \cup S \cup L$ ,  $K_2 = C \cup S \cup M$ , ( $C = \{C_1, \dots, C_\mu\}$ ,  $S = \{S_1, \dots, S_\lambda\}$ ,  $L = \{L_1, \dots, L_\kappa\}$ ,  $M = \{M_1, \dots, M_\nu\}$ ). Тогда файлы  $X_C$  и  $Y_C$  нестрого упорядочены по множеству ключей  $C$ . В результате операции получается файл  $Z_{K_3}$  с множеством ключей  $K_3 = S \cup L \cup M$ . Запись индексного файла, с помощью которого осуществляется слияние, будет содержать следующие данные:  $C^*$  – экземпляр множества ключей, идентифицирующий соответствующие друг другу классы эквивалентности файлов  $X_C$  и  $Y_C$ ,  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$  – количество записей в этих классах эквивалентности. Вычислительная сложность операции слияния нестрого упорядоченных файлов  $X_{K_1}$  и  $Y_{K_2}$ , в результате которой будет получен файл  $Z_{K_3}$ , имеет порядок  $w(Z_{K_3}) = w(X_{K_1}, Y_{K_2}) = \sum_{(S)} \mu_X \times \mu_Y$ . Суммирование

производится по всем экземплярам множества ключей  $S$ . Если в Sql-реляционной модели файлам  $X_{K_1}$  и  $Y_{K_2}$  соответствуют таблицы  $X$  и  $Y$ , то

тот же результат получается посредством операции  $SELECT S, L, M, \dots FROM X INNER JOIN Y ON X.C_1=Y.C_1 AND \dots AND X.C_\mu=Y.C_\mu$ , которая имеет тот же порядок вычислительной сложности.

Если задана последовательность файлов  $X_{K_1}^1, \dots, X_{K_n}^n$ , над которыми выполняются операции слияния нестрого упорядоченных файлов, то возможность определить сложность каждой операции и множество ключей файла результата позволяет применить для оптимизации процесса слияния этих файлов метод динамического программирования и алгоритм, предложенный в [2]. Пусть файлы  $X_{K'}^i$  и  $X_{K''}^j$  формируются как результаты последовательностей операций слияния нестрого упорядоченных файлов  $X_{K_i}^i, \dots, X_{K_l}^l$  и  $X_{K_{l+1}}^{l+1}, \dots, X_{K_j}^j$  соответственно. В этом случае предложенное в [2] уравнение Беллмана примет следующий вид:

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ \underset{i \leq k \leq j}{MIN}(w_{il} + w_{l+1,j} + w(X_{K'}^i, X_{K''}^j)), & \text{если } j > i. \end{cases}$$

Здесь  $w_{il}$  – минимальная сложность получения файла  $X_{K'}^i$ ,  $w_{l+1,j}$  – минимальная сложность получения файла  $X_{K''}^j$ . Величина  $w(X_{K'}^i, X_{K''}^j)$  есть вычислительная сложность операции слияния нестрого упорядоченных файлов  $X_{K'}^i$  и  $X_{K''}^j$ .

В [2] доказано, что алгоритм построения оптимальной последовательности умножений  $n$  матриц имеет вычислительную сложность порядка  $n^3$ . В рассмотренной задаче используется тот же самый алгоритм, а расчет вычислительной сложности операции слияния нестрого упорядоченных файлов также имеет полиномиальную сложность (линейно зависит от числа записей в индексном файле). Поэтому можно утверждать, что реализация построения оптимальной последовательности операций слияния нестрого упорядоченных файлов для заданной последовательности  $X_{K_1}^1, \dots, X_{K_n}^n$  может использоваться не только при проектировании регулярных задач обработки данных, но и при обработке интерактивных запросов к базам данных.

### Литература

1. Мунерман В.И. Объектно-ориентированная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2011. – Т. 7, № 4. – С. 72–74.
2. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Синтез и оптимизация запросов в системах массовой обработки данных // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. – Вып. 16. – С. 77–82.

3. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

4. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Модели и методы параллельной обработки структурированных больших данных // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2014. – № 10. – С. 534–547.

5. Макаров Д.И., Мунерман В.И. Параллельная реализации операции соединения для массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2012. – Т. 8, № 3. – С. 26–28.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАХОЖДЕНИЯ ПУТЕЙ В ГРАФЕ

**В.А. КОВАЛЁВ, В.И. МУНЕРМАН**

Смоленский государственный университет  
e-mail: wladickowalew@gmail.com, vimoon@gmail.com

004.021

Ключевые слова: *методы оптимизации, поиск путей в графе, многомерные матрицы.*

*В работе рассматривается метод поиска всех возможных путей в нагруженном ориентированном графе, основанный на алгебре многомерных матриц. Приведен алгоритм решения задачи поиска путей последовательностью операций умножения многомерных матриц.*

Для решения задач поиска кратчайших путей используются различные алгоритмы, например, алгоритм Флойда-Уоршалла [1]. Он используется для нахождения кратчайших путей в нагруженном графе, а также для нахождения транзитивного замыкания некоего отношения  $R$ . Выполнение алгоритма позволяет найти длины (суммарные веса) кратчайших путей между всеми парами вершин, хотя и не возвращает детали самих путей, например, в виде последовательностей вершин, через которые проходят эти пути. Кроме этого алгоритма, известны и другие, например, алгоритм, основанный на вычислении транзитивного замыкания матрицы весов графа  $G$ , которое вычисляется как

$$\hat{G} = \sum_{k=1}^K G^k, G^k \neq Z (i \leq K), G^{K+1} = Z (Z - \text{нуль-матрица}) [2, 3].$$

В работе предлагается модификация матричного алгоритма поиска кратчайших путей, основанная на применении алгебры многомерных матриц [4]. Потребность в модификации обусловлена следующими практическими соображениями:

- необходимость найти не только длину пути, но и сам путь;

– необходимость найти кратчайший путь между двумя вершинами при условии его прохождения через одну или несколько фиксированных вершин.

Для реализации предлагаемого алгоритма используется частный случай умножения многомерных матриц, который определяется следующим образом. Пусть даны  $p$ -мерная матрица  $A = \|a_{i_1 \dots i_p}\|$  и  $q$ -мерная матрица  $B = \|b_{i_1 \dots i_q}\|$ . Можно разбить совокупности индексов  $i_1, \dots, i_p$  и  $i_1, \dots, i_q$  на три группы, содержащие соответственно  $\kappa$ ,  $\lambda$  и  $\nu$  индексов ( $\kappa, \lambda, \nu \geq 0$ ). Причем  $\kappa + \lambda = p$ , а  $\lambda + \nu = q$ . Разбиение порождает три группы индексов:  $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$  и  $m = (m_1, \dots, m_\nu)$ . Индексы разбиения  $s$  называются скоттовыми и принадлежат обеим матрицам. Тогда матрицы  $A$  и  $B$  можно представить в виде  $A = \|a_{ls}\|$  и  $B = \|b_{sm}\|$ . Очевидно, что если индексу  $s_\gamma$  соответствуют индекс  $i_\alpha$  в матрице  $A$  и индекс  $i_\beta$  в матрице  $B$ , то  $n_{i_\alpha} = n_{i_\beta}$ . Матрица  $C = \|c_{lsm}\|$ , элементы которой вычисляются по формуле  $c_{lsm} = a_{ls} \times b_{sm}$ , называется  $(\lambda, 0)$ -свернутым произведением матриц  $A$  и  $B$  и обозначается  ${}^{\lambda,0}(A \times B)$ . Мультипликативная операция над элементами матриц определяется семантикой задачи.

Пусть вершины графа  $G$  пронумерованы от 1 до  $n$  и  $d_{ij}$  – длина (вес) ребра  $(i, j)$ , если таковое существует, в противном случае  $d_{ij} = \infty$ .  $D = \|d_{ij}\|$  – начальная матрица всех путей в этом графе. Тогда  $D_k = \|d_{i_1 i_2 \dots i_k}\|$ , ( $k = 2, \dots, n$ ) –  $k$ -мерная матрица, содержащая длины всех путей, которые состоят не более, чем из  $k - 1$  ребер. Например, матрица  $D_2 = \|d_{i_1 i_2}\| = \|d_{ij}\| = D$ , составляемая по графу  $G$ , содержит длины путей, состоящих из одного ребра (начальных путей).

Тогда матрица для путей, состоящих из  $k - 1$  ребер, определяется как  $D_k = {}^{\lambda,0}(D_{k-1} \times D)$ , мультипликативная операция  $(\times)$  над элементами этой матрицы для задачи поиска кратчайших путей задается следующим образом:

$$\begin{cases} d_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} + d_{i_{k-1} i_k}, & \text{если } i_1 \neq i_2, \\ d_{i_2 \dots i_{k-1} i_k}, & \text{если } i_1 = i_2. \end{cases}$$

С помощью этой рекуррентной формулы можно получить матрицу  $D_n$ , которая содержит в себе всю информацию о путях длиной не более чем  $n - 1$  ребер, причем последовательность индексов элемента есть путь, который нужно пройти, чтобы получить то или иное значение длины пути. Например, элемент  $d_{14523}$  содержит в себе длину пути из вершины 1

в вершину 3 через вершины 4, 5 и 2, а элемент  $d_{22213}$  – длину пути из вершины 2 в вершину 3 через вершину 1.

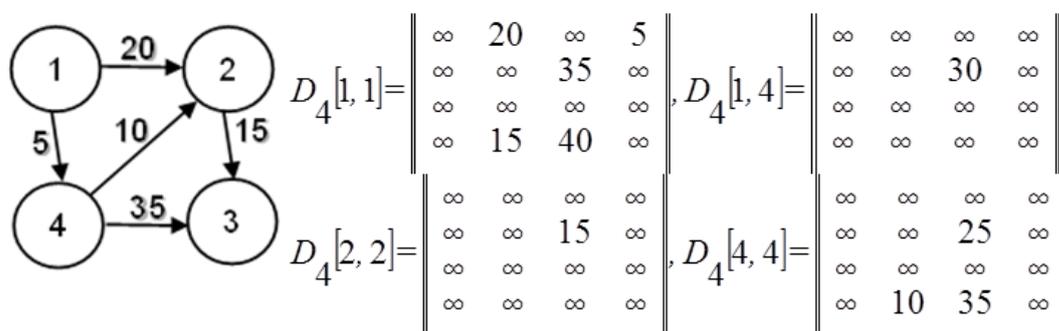


Рис.1. Сечения матрицы  $D_4$ , содержащие длины всех возможных путей графа

На рисунке 1 приведен пример графа, на котором возможны пути, содержащие от одного до трех ребер, и сечения четырехмерной матрицы  $D_4$ . Эти сечения – двумерные матрицы, отличные от  $\infty$  элементы которых равны длинам путей, проходящих через вершины, определенные набором индексов этих элементов.

### Литература

1. Lidl R., Pilz G. Applied abstract algebra. – 2nd edition: Undergraduate Texts in Mathematics. – Springer, 1998. – 488 p.
2. Gross J. L., Yellen J. Handbook of Graph Theory, Discrete Mathematics and Its Applications // CRC Press. – 2004. – P. 779.
3. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.
4. Мунерман В.И. Многомерно-матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2012. – Т. 8, № 3. – С. 19–22.

## РАЗДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПРИЗНАКОВ НА ОСНОВЕ ОПЕРАЦИЙ ОКОННОЙ ОБРАБОТКИ

**К.П. КОРШУНОВА**

Филиал ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске  
e-mail: ksenya-kor@mail.ru

УДК004.93'1

Ключевые слова: *классификация, разделение пространства признаков, признаки-отношения.*

*Предложен алгоритм разбиения признакового пространства на области, являющийся составной частью некоторого способа классификации на основе учета отношений между признаками.*

Пусть в задаче бинарной классификации каждый объект характеризуется несколькими признаками, выраженными натуральными числами. Рассмотрим координатную плоскость  $\langle S_i, S_j \rangle$  – декартово произведение множеств признаков  $S_i$  и  $S_j$ . Нанесем точки, соответствующие каждому объекту обучающей выборки, и присвоим им цветовые и цифровые метки: 1 – класс 1, 3 – класс 2, 2 – объекты обучающей выборки как из класса 1, так из класса 2 (рис. 1).

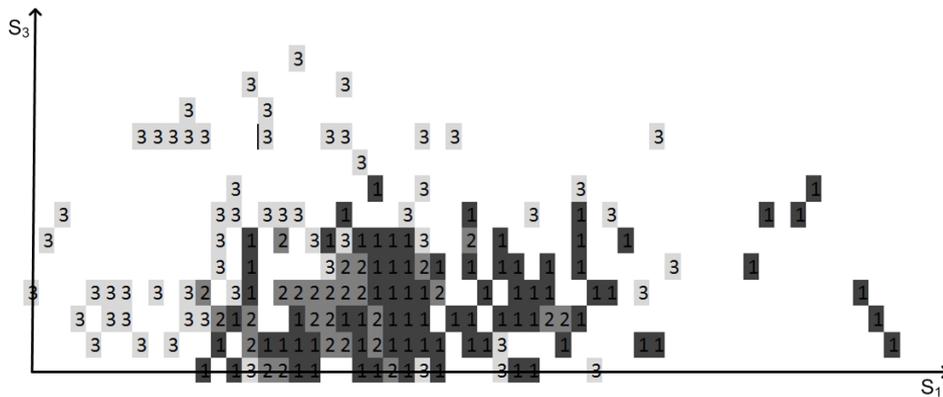


Рис. 1. Координатная плоскость  $\langle S_i, S_j \rangle$

Необходимо выделить в полученной координатной плоскости области сгущения точек *одного* типа (цвета). Номера данных областей далее рассматриваются как дополнительные признаки классификации.

Предлагаемый алгоритм основан на принципе, используемом в алгоритме кластеризации *k* ближайших соседей: объект относится к тому классу, элементов которого окажется больше среди *k* ближайших соседей [2].

Для простоты реализации плоскость  $\langle S_i, S_j \rangle$  представим в виде двумерного массива, элементами которого являются метки (цвета), индексами строк и столбцов – значения признака  $S_i$  и  $S_j$  соответственно (номера диапазонов значений).

Будем передвигать по данному матричному представлению окно заданного размера, формируя границы областей и «раскрашивая» точки, не попавшие в обучающую выборку:

*Первый обход* координатной плоскости (сглаживание границ и устранение шумов): считаются вхождения каждой метки внутри окна, к числу вхождений центрального элемента прибавляется его вес. Значение элемента меняется на значение с максимальным числом вхождений внутри окна. Окно перемещается.

*Второй обход* координатной плоскости (выполняется только для нулевых элементов):

- 1) считаются вхождения каждой метки внутри окна;

2) если внутри окна все элементы нулевые, то увеличивается размер окна и повторяется п. 1. В противном случае значение центрального элемента изменяется на значение с максимальным числом вхождений. Окно перемещается.

После применения данного алгоритма обработки двумерного массива получаем разбивку координатной плоскости  $\langle S_i, S_j \rangle$  на области (рис. 2).



Рис. 2. Разбиение координатной плоскости  $\langle S_i, S_j \rangle$  на области

Благодаря матричному представлению признакового пространства для отнесения нового (ранее не рассматривавшегося) объекта к области достаточно обратиться к элементу двумерного массива по индексам строки и столбца – значениям соответствующих признаков объекта.

Аналогичные алгоритмы применяются к трехмерным областям.

### Литература

1. Коршунова К.П. Способ решения задачи классификации сложных объектов на основе учета отношений между вероятностными признаками // ИТС 2014: материалы международной научной конференции. – 2014. – С. 266–267.
2. Larose Daniel T. Discovering knowledge in data: an introduction to data mining.– John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005. – P. 240.

## СИСТЕМА ЛАТЕНТНО-СЕМАНТИЧЕСКОГО ПОЛНОТЕКСТОВОГО ПОИСКА

**К.А.КОСТЮХИН**

Смоленский государственный университет  
e-mail: skymorr@yandex.ru

УДК 004.912

Ключевые слова: *полнотекстовый поиск, LSA, синонимия, полисемия, семантическое пространство, терм, документ, поисковый индекс, SVD.*

*В статье рассмотрены алгоритмы функционирования популярных современных систем полнотекстового поиска, выделены их недостатки, которые при определенных условиях могут сделать применение данных программных средств неправильным с точки зрения качества поисковой выборки. В качестве аналога предложен механизм латентно-семантического анализа и поиска в произвольном массиве документов.*

**Введение.** Согласно ГОСТ [3] полнотекстовым называется автоматизированный документальный поиск, при котором в качестве поискового образа документа используется его полный текст или существенные части текста. Примером использования полнотекстового поиска может служить поиск среди статей СМИ или документов архива.

В данной области ИТ в настоящее время уже построено несколько сложных систем. Среди них в странах СНГ популярен Shpinx Search Engine, на западе – Elastic Search, Apache Lucene или Xapian. Существуют реализации полнотекстовых индексов и на уровне СУБД, однако они уступают специализированным системам в удобстве использования и популярности. Вышеописанные системы стабильно работают и выводят, согласно запросу пользователя документы из информационной базы. Однако существует несколько фундаментальных недостатков в их алгоритмах формирования поисковых индекса и выдачи.

**Недостатки существующих систем полнотекстового поиска.** Все вышеупомянутые системы во время индексации документов строят инверсный поисковый индекс – структуру данных, которая для каждого слова (терма) из коллекции текстов (документов) указывает на документы, в которых оно встречается. Поисковый запрос пользователя разбивается на термы, и для каждого из них в поисковом индексе ищутся ссылки на документы, где он был встречен. Проблемы такого подхода кроются в языковых явлениях синонимии и полисемии. Благодаря синонимам существует несколько способов описать один предмет, т.е. может сложиться ситуация, когда ни одно слово из поискового запроса не встречается в документе, но «по смыслу» он является релевантным. Возможна и обратная ситуация, когда слово встречается в документе (и классический полнотекстовый поиск посчитает такой документ релевантным), но при этом имеет другой смысловой контекст. Наличие определенного слова в поисковом запросе совершенно не означает, что документ, содержащий данное слово, является интересным пользователю.

Распространенность синонимов уменьшает эффективность классических систем поиска, а полисемия подчеркивает недочеты данного подхода, основанного на вхождении слов или фраз из запроса в документы.

**Альтернатива – семантический поиск.** Новый подход к автоматической индексации и поиску, который спроектирован для преодоления фундаментальной проблемы простого сопоставления слов пользовательского поискового запроса со словами коллекции документов, называется латентно-семантическим поиском.

Метод позволяет выявлять скрытые (латентные) смысловые связи между документами. Сутью метода является построение семантического пространства, где тексты и связанные по смыслу слова расположены близко друг к другу. Таким образом, слова могут не быть частью документа, но все равно ассоциироваться с ним.

Алгоритмы ЛСА, как и классические, требуют предварительной обработки текстов, попадающих в ИПС: удаление символов пунктуации, стоп-слов, прохождение через процедуру стемминга. После предварительной обработки формируется матрица термы-на-документы [1]. В этой матрице строки соответствуют проиндексированным термам, а столбцы — документам (табл. 1). В каждой ячейке матрицы указано, сколько раз слово встречается в соответствующем документе.

Следующим шагом проводится сингулярное разложение (SVD) полученной матрицы. Одно из применений SVD-приближения матриц матрицами заданного ранга. Обозначим матрицу термы-на-документы как  $X$  размерности  $t \times d$ . Как показано в [1], она может быть разложена на три составляющих посредством сингулярного разложения.

$$X = T_0 * S_0 * D_0^T. \quad (1)$$

Если из всех сингулярных значений отобрать  $k$  наибольших (согласно методу главных компонент), то мы получим аппроксимацию исходной матрицы матрицей ранга  $k$ . В матрице  $T_0$  остаются только первые  $k$  столбцов, а в матрице  $D_0^T$  – первые  $k$  строк. Матрица  $S_0$  обрезается до размера  $k \times k$ . Полученная матрица будет являться приближением исходной матрицы  $X$  матрицей ранга  $k$ . Число  $k$  называют размерностью семантического пространства.

$$X \approx \hat{X} = T * S * D^T. \quad (2)$$

Полученные матрицы  $T$ ,  $S$  и  $D^T$  хранят в себе всю необходимую информацию для поиска в семантическом пространстве, добавления и удаления из него документов и могут считаться альтернативой поискового индекса классических информационно-поисковых систем. Согласно [1], строки матрицы  $T$  являются координатами термов в  $k$ -мерном семантическом пространстве. Аналогично, столбцы матрицы  $D^T$  являются координатами документов в этом пространстве. Сингулярные значения из матрицы  $S$  «отвечают» за масштаб по каждой из координатных осей. Выбрав метод определения расстояния между векторами, например, косинусное сходство, можно оценить смысловую близость двух произвольных документов одного пространства, а в качестве фактора ранжирования использовать непосредственно расстояние. Поисковый запрос пользователя в данном случае рассматривается как маленький документ. Для него справедливо вычисление координат в пространстве и расстояний до других документов.

**Выводы.** Латентно-семантический поиск позволяет отойти от простого сопоставления термов из поискового запроса термам коллекции документов и взглянуть на коллекцию документов более широко - выявлять скрытые (латентные) связи между составляющими документа и документами внутри коллекции. Метод лишен недостатков, связанных с синонимией или полисемией, потому что каждый терм из коллекции, каждый документ влияет на все значения матриц  $T$ ,  $S$  и  $D$ , т.е. коллекция документов обрабатывается комплексно, как единое целое. Кроме того, построенное семантическое пространство может служить основой не только для полнотекстового поиска, но и для кластеризации документов или автоматического определения смысловой направленности произвольного текста.

### Литература

1. Deerwester S., Dumais S.T., Furnas G.W., Landauer T.K., Richard H. 1990. Indexing by Latent Semantic Analysis. Journal of the American Society for Information Science, 41. – P. 391-407
2. Landauer T.K., Foltz P. and Laham D. An Introduction to Latent Semantic Analysis // DiscourseProcesses. – 1998. – 25. – P. 259–284
3. ГОСТ 7.73-96 СИБИД «Поиск и распространение информации. Термины и определения». – Введ. 01.01.98. – М.: Изд-во стандартов, 1997. – 16 с.

## ВЕБ-СЕРВИС КЛАСТЕРИЗАЦИИ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

**В.В. КРАВЧЕНКОВ, Т.А. САМОЙЛОВА**

Смоленский государственный университет  
e-mail: mr.kravchenkov@mail.ru, tatsam@hotmail.ru

УДК: 004:9

*Ключевые слова: веб-сервис, кластеризация изображений, алгоритм k-means, метрика расстояния, квантование, база данных, хранилище, информационная система, WEB API.*

*В работе представлены результаты разработки веб-сервиса кластеризации цветных изображений с применением алгоритма k-means для квантования цветов. Исходная графическая информация преобразуется в RGB-формат, содержащий координаты и цифровые коды цветов пикселей, а затем вводится средствами сетевой информационной системы в хранилище BLOB или SQL-базу данных. Кластеризация изображений осуществляется веб-сервисом, а визуализация результатов – десктопным приложением.*

Кластеризация цветных изображений — актуальная проблема, с которой приходится сталкиваться при решении различных научных и практических задач, например, в системах технического зрения, при обработке снимков спутниковой съемки, в медицинской диагностике, криминалистике и т.д. [1]. Чаще всего кластеризацию применяют в методах распознавания образов, позволяющих распознавать изображения и классифицировать объекты изображений. Она часто выступает первым шагом при анализе данных: выделение групп похожих объектов помогает понять структуру данных и использовать свой подход к обработке каждой группы. Она также позволяет сократить объем хранимых данных (оставив по одному наиболее типичному представителю каждого кластера) и обнаружить нетипичные объекты, которые не удастся причислить ни к одному из кластеров (задача обнаружения новизны). Для решения задач кластеризации изображений существует множество специализированных однопользовательских программных пакетов. Например, получивший широкое распространение пакет MatLab, предназначенный в основном для математического моделирования, содержит приложения для проведения четкой и нечеткой кластеризации, которые можно использовать и для графической информации. Однако моделирование средствами пакетов существенно ограничивает количество обрабатываемых изображений и не предназначено для обработки больших коллекций оцифрованных

изображений, востребованных во многих отраслях и представленных базами данных. В связи со снижением в настоящее время стоимости вычислительных мощностей баз данных необходимость в эффективных механизмах кластеризации таких коллекций очевидна.

Подход, предложенный в данной работе, основан на сохранении цветных изображений в базе данных, включенной в сетевую информационную систему. Это позволяет реализовать многопользовательскую совместную работу с коллекциями графических данных, в том числе с Big Data. При этом ввод изображений в BLOB - хранилище или SQL-СУБД может выполняться средствами клиентских приложений различных платформ, в том числе мобильных. На рисунке 1 представлена схема обработки базы данных изображений сетевой информационной системой, содержащей веб-сервис кластеризации.



Рис. 1. Информационная система кластеризации изображений

Для разработки веб-сервиса кластеризации был выбран алгоритм *k*-средних (*k*-means) [2]. Он хорошо работает для графики, поскольку здесь данные по своей естественной природе делятся на компактные сферические группы. В процессе квантования для каждой пары пикселей изображения в пространстве RGB вычисляется «расстояние» между ними – степень похожести. Метрика расстояния – это геометрическое расстояние Евклида в многомерном пространстве:

$$\rho(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2}.$$

Алгоритм кластеризации реализован как метод веб-сервиса REST средствами WEB API среды Microsoft Visual Studio. Состав модулей сервиса и их назначение:

- ConvertImagetoBD – модуль загрузки изображения любого формата и его преобразования в таблицу RGB = {X,Y,R,G,B} обычного трехцветного rgb-изображения;

- Clusterizaion – модуль обращения к таблице RGB базы SQL и кластеризации алгоритмом *k*-means;

– ConvertBDtoImage — модуль преобразования реляционного rgb-изображения в bmp-формат.

					
	..	..	..	..	..
	43	43	03	03	55
	43	42	33	34	11
	43	41	67	61	16
	43	40	90	70	68
	43	39	33	4	08
	..	..	..	..	..

Рис. 2. Таблица базы данных с информацией о пикселях изображения

На рисунке 2 представлен фрагмент входных данных, преобразованных в записи таблицы базы данных. Каждая запись содержит информацию об одном пикселе изображения. Поля X, Y представляют собой координаты x и y текущего пикселя, за которыми следуют поля R, G, B (красный, зеленый и синий) значений его цвета. Каждый из цветовых значений – целое число от 0 до 255.

Результаты кластеризации отображаются десктопным приложением, на котором выполнялось тестирование сервиса. На рисунке 3 изображена визуализация результатов кластеризации одного из изображений для различного числа кластеров.



Рис. 3. Визуализация результатов кластеризации:  $k = 4$  и  $k = 2$

По результатам работы программы можно сделать вывод о том, что сетевая информационная система, содержащая веб-сервис кластеризации, является удобной средой для обработки больших

объемов коллекций изображений, но требует для этого мощной компьютерной базы.

### Литература

1. Журавель И.М. Краткий курс теории обработки изображений: электронный учебник. – 2006.
2. Воронцов К.В. Алгоритмы кластеризации и многомерного шкалирования: курс лекций. – МГУ, 2007.

## ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАЦИИ СЛИЯНИЯ НЕСТРОГО УПОРЯДОЧЕННЫХ ФАЙЛОВ

**В.И. МУНЕРМАН, Д.В. МУНЕРМАН**

Смоленский государственный университет  
e-mail: vimoona@gmail.com, danvmoon@gmail.com

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы.*

*В работе рассмотрен подход к построению архитектуры программно-аппаратного комплекса для параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов. Приведены экспериментальные данные, подтверждающие эффективность предложенной архитектуры.*

В работе рассматривается архитектура программно-аппаратного комплекса, который обеспечивает повышение эффективности процессов массовой обработки данных (МОД) за счет параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов. Эта операция определена и используется в теоретико-множественной модели данных. В многомерно-матричной и реляционной моделях данных ей соответствуют операции умножения многомерных матриц и соединения (Join) [1].

В основу параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов положены принцип симметричного горизонтального распределения данных [2] и алгоритм, основанный на вычерпывании [3] ведущего файла. Пусть файлы  $X_K$  (ведущий) и  $Y_K$  (ведомый) нестрого упорядочены по множеству ключей  $K$ . Без ограничения общности можно считать, что оба файла состоят из классов эквивалентности, соответствующих одним и тем же значениям экземпляров множества ключей  $K$ . Тогда эти файлы могут быть представлены как фактор-множества  $X_K = \{X_{K_1^*}, \dots, X_{K_p^*}\}$  и  $Y_K = \{Y_{K_1^*}, \dots, Y_{K_p^*}\}$ , где классы эквивалентности  $X_{K_i^*}$  и  $Y_{K_i^*}$  есть совокупности  $X_{K_i^*} = \{x_{i1}, \dots, x_{iq_i}\}$

и  $Y_{K_i^*} = \{y_{i1}, \dots, y_{in}\}$  записей этих файлов. Особенность рассматриваемого алгоритма состоит в том, что каждый класс эквивалентности файла  $X_K$  целиком считывается (зачерпывается) в буферную область оперативной памяти (черпак), а класс эквивалентности файла  $Y_K$  – по одной записи. Если экземпляр множества ключей, хранящихся в черпаке записей ведущего файла, совпадает с экземпляром множества ключей прочитанной записи ведомого файла, то производится совместная обработка всех записей черпака и этой записи.

В результате для каждого экземпляра множества ключей формируется декартово произведение соответствующих ему классов эквивалентности файлов  $X_K$  и  $Y_K$ . Для реализации предложенного параллельного алгоритма операции слияния нестрого упорядоченных файлов предложена архитектура программно-аппаратного комплекса, которая сочетает элементы MPP и SMP архитектур.

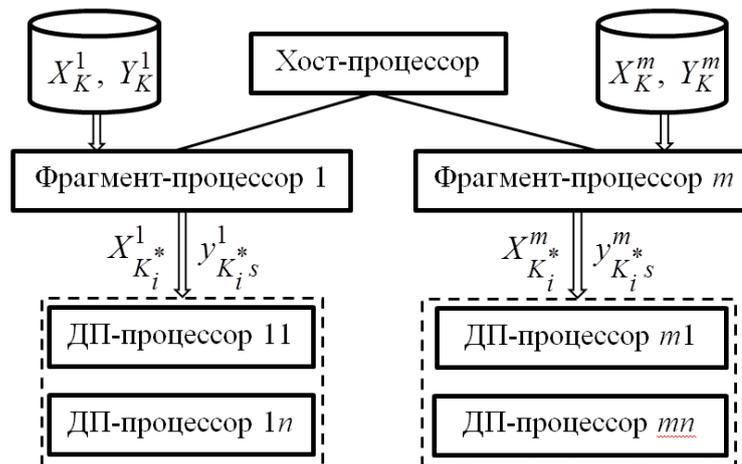


Рис. 1. Архитектура программно-аппаратного комплекса для операции слияния нестрого упорядоченных файлов

Как показано на рисунке 1, этот комплекс состоит из  $m$  фрагмент-процессоров, каждый из которых работает со своими фрагментами файлов  $X_K$  и  $Y_K$ , полученных в результате симметричного горизонтального распределения. Фрагмент-процессор реализует одновременное зачерпывание классов эквивалентности фрагмента файла  $X_K$  и позаписное считывание фрагмента файла  $Y_K$ . После зачерпывания очередного класса эквивалентности ведущего файла фрагмент-процессор делит его на  $n$  равных частей. Каждая часть передается процессору, реализующему фрагмент декартова произведения классов эквивалентности, совместно обрабатывая свою часть класса эквивалентности ведущего файла с соответствующей очередной записью ведомого файла.

Для оценки производительности построенного программно-аппаратного комплекса был проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого время реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов сравнивалось по времени с реализацией в СУБД.

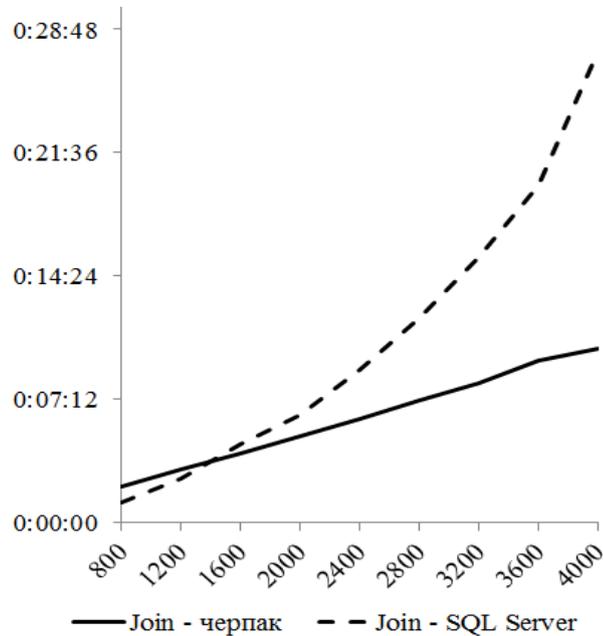


Рис. 2. Время реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов

Microsoft SQL Server операции Join. Эти операции соответствуют друг другу в файловой и реляционной моделях данных. Для их реализации был создан виртуальный программно-аппаратный комплекс с архитектурой SMP. Данные были представлены как таблицы в SQL Server базах данных. Результаты эксперимента, приведенные на рисунке 2, подтверждают, что применение предложенного метода более эффективно, чем реализация стандартными средствами СУБД.

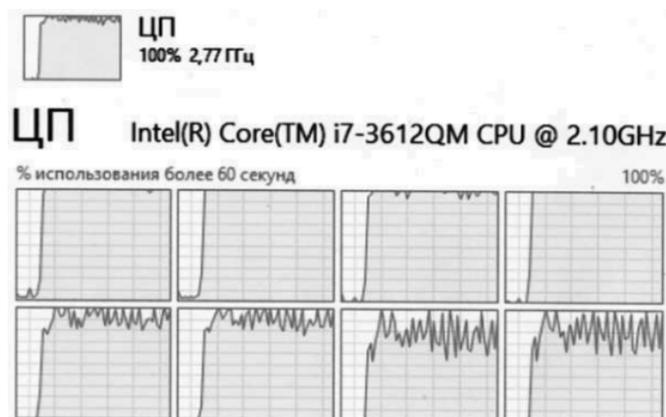


Рис. 3. Загрузка процессоров (ядер) в виртуальном программно-аппаратном комплексе

Кроме того, на рисунке 3 показано, что предложенный программно-аппаратный комплекс эффективно использует ресурсы (в частности, многоядерного центрального процессора) вычислительных средств, на которых он реализован.

### Литература

1. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2014. – Т. 10, № 4. – С. 3–16.
2. Левин Н.А., Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности. – 2013. – Т. 9, № 1. – С. 35–43.
3. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

## ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАЦИИ JOIN СРЕДСТВАМИ ТЕХНОЛОГИИ CUDA

**В.И. МУНЕРМАН, А.А. НАДЭЛИН**

Смоленский государственный университет  
e-mail: vimoona@gmail.com, dgonny1986@yandex.ru

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы.*

*В работе рассматривается способ повышения эффективности реализации операции JOIN, реализованной в программно-аппаратном комплексе, построенном на основе технологии CUDA. Приведены данные вычислительного эксперимента, подтверждающие преимущество предложенного подхода.*

Как известно, алгоритм вычисления JOIN имеет вычислительную сложность, пропорциональную произведению числа строк в таблицах, следовательно, время выполнения операции тоже будет пропорционально произведению количества строк в таблицах. Уменьшить время выполнения операции JOIN можно за счет параллельного выполнения не связанных между собой элементов операции JOIN на разных ядрах процессора.

Технология CUDA – это программно-аппаратная архитектура, позволяющая производить на графическом процессоре вычисления общего назначения. При этом графический процессор играет роль мощного сопроцессора. В данное время технология CUDA позволяет

создавать программное обеспечение для решения сложных вычислительных задач за меньшее время. Происходит это в результате многоядерной вычислительной мощности графических процессоров. Количество CUDA ядер в составе графического процессора может достигать нескольких тысяч, что позволяет существенно распараллелить процесс вычисления [1]. Технология CUDA также используется для повышения производительности при реализации запросов к базам данных [2].

В работе описан эксперимент с использованием двух вычислительных архитектур. В первом случае операция JOIN была реализована над двумя таблицами с помощью технологии CUDA и принципа симметричного горизонтального распределения [3]. Применение этого принципа позволило разработать алгоритм реализации операции JOIN, основанный на чтении (зачерпывании) исходных таблиц классами эквивалентности, соответствующими фиксированному значению экземпляра множества ключей. После зачерпывания оба класса эквивалентности передавались в видеопамять, и выполнялось их декартово произведение ядрами графического процессора. Во втором случае операция JOIN тех же таблиц осуществлялась средствами СУБД. Эксперимент проводился с использованием двух СУБД: MySQL и Microsoft SQL Server 2014. Выбор этих СУБД определился тем, что они существенно различаются по производительности, кроме того СУБД Microsoft SQL Server 2014 многие действия реализует параллельно.

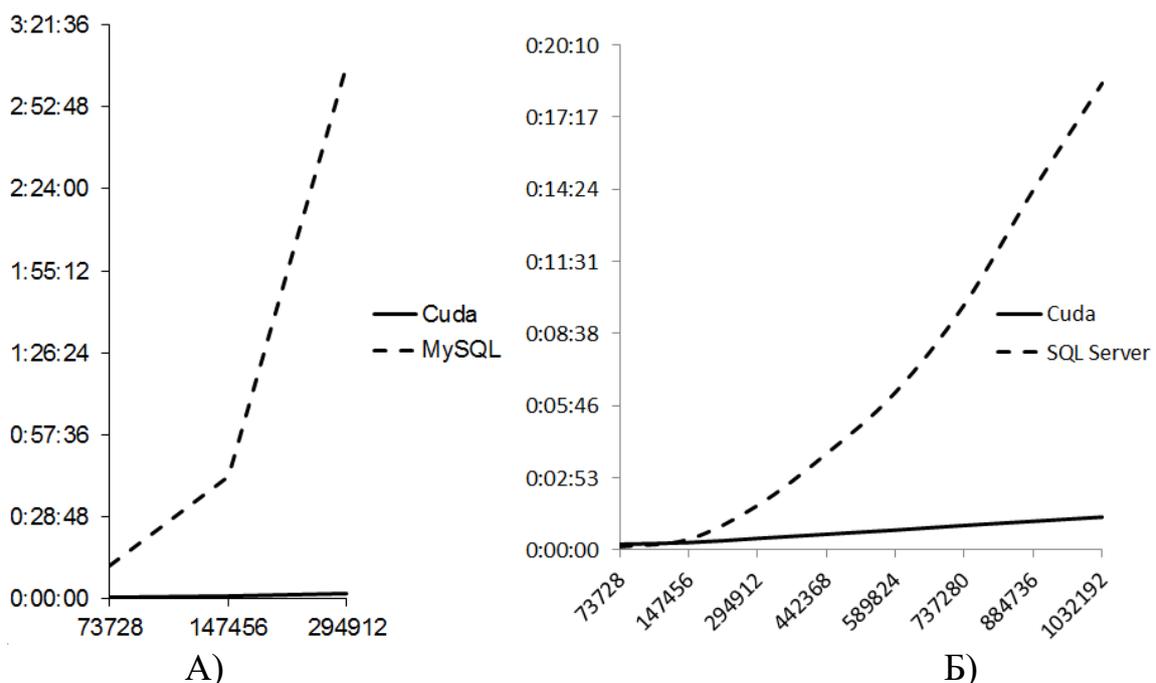


Рис. 1. Сравнение времени выполнения операции JOIN средствами СУБД и технологии CUDA

В ходе эксперимента была реализована операция, которой соответствует SQL-запрос:

```
SELECT T1.F1, SUM(T1.F2*T2.F2) FROM T1 INNER JOIN T2
ON T1.F1 = T2.F1 GROUP BY T1.F1 ORDER BY T1.F1.
```

Для эксперимента была использована 384-ядерная видеокарта Gigabyte GT730. Выполнялась операция JOIN над парами таблиц с одинаковым числом строк, которое изменялось от 73728 до 442368 (кратно числу ядер графического процессора). Результаты, полученные в ходе эксперимента, приведены на рисунке 1 (А, Б).

Таким образом, на основании результатов эксперимента можно сделать вывод о том, что предложенный алгоритм параллельной реализации операции JOIN средствами технологии существенно превосходит по быстродействию реализацию этой операции в СУБД.

### Литература

1. Боресков А.В. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA: учебное пособие. – М: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012. – 336 с.
2. Bakkum P., Skadron K. Accelerating SQL database operations on a GPU with CUDA // Proceedings of the 3rd Workshop on GeneralPurpose Computation on Graphics Processing Units. – ACM, 2010. – P. 94–103.
3. Левин Н.А., Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности. – 2013. – Т. 9, № 1. – С. 35–43.

## АНАЛИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА УМНОЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ

**В.И. МУНЕРМАН, Н.В. ПАРФЕНОВ**

Смоленский государственный университет  
e-mail: vimoona@gmail.com, npzxcf@gmail.com

УДК 004.657

Ключевые слова: *многомерные матрицы, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы.*

*В работе дано описание вычислительного эксперимента, который проводился на различных программно-аппаратных комплексах для оценки алгоритма умножения матриц с различным числом измерений. Приведены результаты эксперимента, и проведен их анализ.*

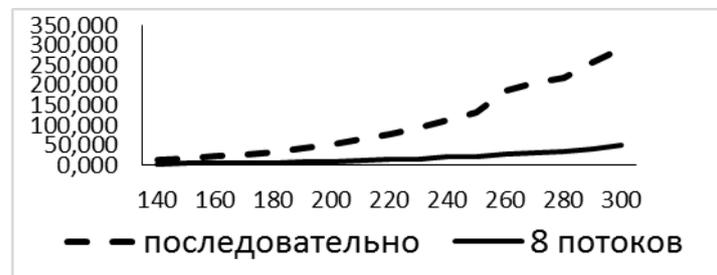
Операция умножения многомерных матриц определяется следующим образом. Пусть матрицы  $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$  и  $B = \left\| b_{i_1 \dots i_q} \right\|$ ,  $p$  и  $q$ -мерные соответственно. Совокупности индексов этих матриц  $i_1, \dots, i_p$

и  $i_1, \dots, i_q$  разбиваются на четыре группы, содержащие соответственно  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$  индексов ( $\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0$ ). Причем  $\kappa + \lambda + \mu = p$ , а  $\lambda + \mu + \nu = q$ . Для полученных групп индексов используются обозначения:  $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$ ,  $c = (c_1, \dots, c_\mu)$  и  $m = (m_1, \dots, m_\nu)$ . Тогда матрицы  $A$  и  $B$  можно представить в виде  $A = \|a_{lsc}\|$  и  $B = \|b_{scm}\|$ . Индексы групп  $s$  и  $c$  в матрицах  $A$  и  $B$  полностью совпадают. Так же как в операции свертки, индексы разбиения  $c$  называются кэлиевыми. Индексы разбиения  $s$  называются скоттовыми, а индексы разбиения  $m$ , так же как и индексы разбиения  $l$ , – свободными. Матрица  $C = \|c_{lsm}\|$ , элементы которой вычисляются по формуле  $c_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} \times b_{scm}$ , называется  $(\lambda, \mu)$ -

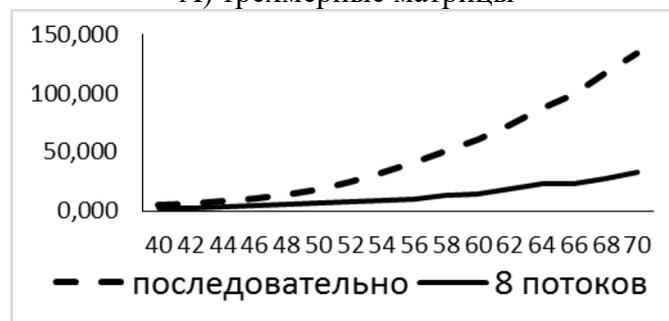
свернутым произведением матриц  $A$  и  $B$  и обозначается  ${}^{\lambda, \mu}(A \times B)$  [1].

Для умножения использовался блочный параллельный алгоритм умножения многомерных матриц, описание которого приведено в [2, 3].

Эксперимент проводился для трехмерных  $(A_{lsc}, B_{scm})$  и четырехмерных  $(A_{ls_1s_2c}, B_{s_1s_2cm})$  числовых матриц. Все индексы трехмерных матриц принимали значения от 10 до 300 с шагом 10, а четырехмерных – от 10 до 70 с шагом 2.



А) трехмерные матрицы



Б) четырехмерные матрицы

Рис. 1. Зависимость производительности алгоритма от размерности индексов

На каждом шаге эксперимента выполнялись последовательное и параллельное (8 и 27 потоков) умножение многомерных матриц. Таким образом, для трехмерных матриц выполнялось (1, 1)-свернутое произведение, а для четырехмерных – (2, 1)-свернутое произведение. Программно-аппаратные комплексы создавались как виртуальные машины Microsoft Azure на основе процессора Xeon E5-2673. Использовались конфигурации с восьмью и шестнадцатью ядрами.

Результаты эксперимента, приведенные на рисунке 1, показывают, что с увеличением размерности индексов возрастает эффективность параллельного алгоритма.

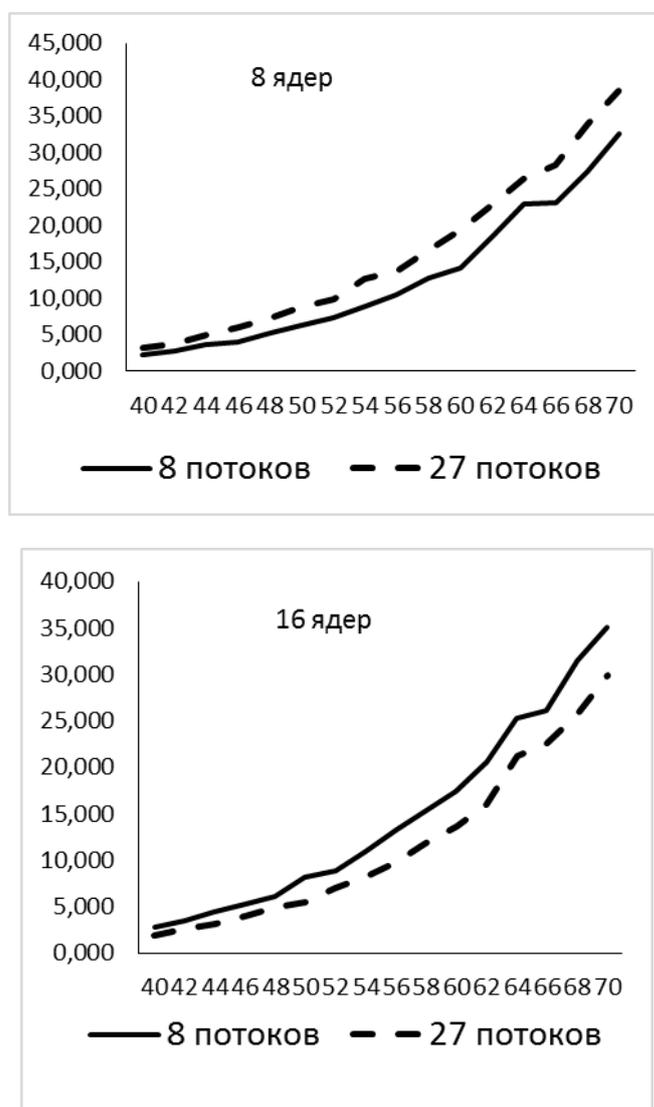


Рис. 2. Зависимость производительности алгоритма от числа вычислителей

На рисунке 2 приведены результаты анализа производительности алгоритма параллельного умножения многомерных матриц в

зависимости от соотношения числа потоков и числа вычислителей (ядер).

Результаты эксперимента позволяют утверждать, что предложенный алгоритм обеспечивает высокую производительность при умножении многомерных матриц.

### Литература

1. Мунерман В.И. Многомерно-матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2012. – Т. 8, № 3. – С. 19–22.

2. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Параллельная реализация обработки интенсивно используемых данных на основе алгебры многомерных матриц // Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных: XVII Международная конференция DAMDID/RCDL'2015 (Обнинск, 13 – 16 октября 2015 года, Россия): труды конференции – Обнинск: ИАТЭ НИЯУ МИФИ, 2015. – С. 217–223.

3. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Параллельный алгоритм умножения многомерных матриц // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2015. – Т. 2, № 11. – С. 384–391.

4. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2014. – Т. 10, № 4. – С. 3–16.

## ТЕХНОЛОГИЯ MACHINE LEARNING ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ

**П.В. ПЕТРОВ, Т.А.САМОЙЛОВА**

Смоленский государственный университет  
e-mail: moysosh17@mail.ru, tatsam@hotmail.ru

УДК:004:896

*Ключевые слова: мультиклассовая классификация, Azure Machine Learning, алгоритмы прогнозирования, эксперимент, информативные признаки, уровни обученности.*

*В работе предложено использовать средства Microsoft Azure Machine Learning для решения задачи мультиклассовой классификации педагогических данных. Представлены результаты параллельного эксперимента по прогнозированию уровня обученности школьников средствами алгоритмов Multiclass Decision Forest и Multiclass Decision Jungle. Приводятся результаты прогноза для конкретной выборки.*

Технологии измерения и оценки уровня знаний являются важными в практике обучения. В основу отечественных разработок положен уровневый системный подход описания достижений учащихся, который позволяет группировать результаты обучения, выполняя их

классификацию [1, 2]. В связи с появлением новых сетевых информационных ресурсов для решения подобных задач программный инструментарий этих разработок может быть с успехом обновлен. В работе рассмотрена возможность использования сетевых средств машинного обучения Microsoft Azure Machine Learning [3] для прогнозирования уровня обученности учащихся с использованием алгоритмов мультиклассовой классификации.

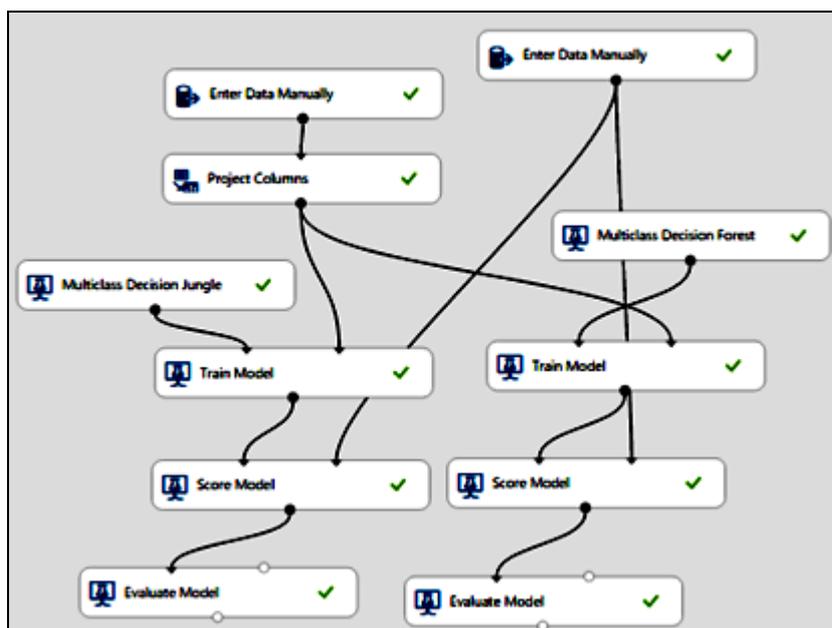


Рис. 1. Эксперимент прогнозирования уровня обученности

В машинном обучении задача мультиклассовой классификации подразумевает наличие обучающей выборки, в которой объекты некоторым образом разделены на классы и которая используется для последующей классификации новых данных. Объекты, чьи классы известны, называются размеченными объектами. По ним алгоритм классификации обучается определять класс произвольного объекта. В процессе обучения классификатора строится разделяющая поверхность (граница) между объектами указанных классов из обучающей выборки. При этом целевая функция должна иметь множество дискретных значений. Классовая принадлежность объектов из второй выборки не известна. Такие объекты называются неразмеченными, именно для них и необходимо определить класс их принадлежности – прогноз. Результатом обучения алгоритма является прогнозируемая модель. В рамках Azure Machine Learning (ML) задачу мультиклассовой классификации решают алгоритмы Multiclass Logistic regression, Multiclass Decision Forest, Multiclass Decision Jungle, Multiclass Neural Network. На рисунке 1 представлен пример Azure ML-эксперимента, включающий два работающих параллельно алгоритма:

джунгли решений (Multiclass Decision Jungle) и лес решений (Multiclass Decision Forest).

rows 5		columns 10							
Номер	Имя	Успеваемость	Типкласса	Восприятие	Уровень Scored Labels	Scored Probabilities for Class "Базовый"	Scored Probabilities for Class "Повышенный"	Scored Probabilities for Class "Средний"	
1	Петров	Отлично	Профильный	Звуковой	Повышенный	0	0.75	0.25	
2	Иванов	Хорошо	Обычный	Звуковой	Средний	0	0.125	0.875	
3	Сидоров	Удовлетворительно	Профильный	Зрительный	Базовый	1	0	0	
4	Ивушкин	Хорошо	Профильный	Зрительный	Средний	0	0.25	0.75	
5	Краснухин	Удовлетворительно	Обычный	Звуковой	Базовый	1	0	0	

Рис. 2. Результаты прогноза обученности конкретных учащихся

Исходные данные (Enter Data Manually) представлены двумя CVS-файлами и соответствуют размеченным и неразмеченным объектам с педагогической информацией об уровнях обученности учащихся. Размеченные объекты, предназначенные для обучения модели, содержат информативные признаки (характеристики) учащихся, в том числе влияющие на уровень обученности (логин, имя, успеваемость, результаты выполнения тестовых заданий, тип восприятия учебного материала, тип учебного класса и т.п.). В этих объектах присутствуют известные для каждого учащегося уровни обученности (базовый, средний, повышенный и т.п.). В неразмеченных объектах есть только информативные признаки, а информация об обученности отсутствует или задается лишь предположительно, поскольку именно она и является целевой функцией эксперимента. Блок Project Columns отбирает из обучающей выборки существенные для прогноза данные. Блок "Train Model" выполняет обучение модели, блок "Score Model" формирует прогноз обученности для неразмеченных объектов. Оценку точности предсказания выполняет "Evaluate Model". На рисунке 2 представлены результаты прогноза обученности (уровень – Scored Labels) для нескольких учащихся, полученные в результате запуска модели.

Оценки точности прогноза для двух моделей, участвующих в эксперименте (табл. 1), позволяют выполнить проверку пригодности использования построенного классификатора.

Таблица 1

Сравнение точности прогноза двух моделей

Класс	Точность Decision Jungle	Точность Decision Forest
Повышенный	0.9829	0.9867
Средний	0.9567	0.9676
Базовый	0.9915	0.9836

Необходимо отметить, что массовая информатизация в образовательной сфере и наличие сетевых информационных систем приводят к накоплению огромных объемов педагогических данных. Раньше, когда такой информации на машинных носителях не было, эти задачи либо вообще не ставились, либо решались совершенно другими методами. В данной работе представлен один из новых подходов к решению таких задач средствами прогнозной аналитики применительно к задачам классификации. В качестве примера рассмотрена организация эксперимента в среде Microsoft Azure.

### Литература

1. Козлов С.В. Система индивидуального тестирования «Комплекс измерения обученности» // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции.. – Смоленск: СмолГУ, 2007. – С. 223–225.
2. Бояринов Д.А., Мунерман В.И., Сенькина Г.Е. Проблемы классификации в задачах автоматизации учебного процесса // Системы компьютерной математики и лингвистики: материалы международной конференции.– Смоленск, 2000. – С. 16–17.
3. Machine Learning.ru. Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных. <http://machinelearning.ru/>.

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

**М.А. ПОСЫПКИН**

ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

e-mail: mposypkin@gmail.com

Ключевые слова: *метод ветвей и границ, оптимизация, параллельные вычисления.*

*В работе описана реализация программного комплекса для решения задач оптимизации большой размерности на многопроцессорных вычислительных системах.*

В последнее время значительный интерес и внимание ученых вызывает детерминированная глобальная оптимизация, в рамках которой удастся не только получить решение, но и численно доказать его точность [1]. Такие алгоритмы обычно очень трудоемки в вычислительном отношении. Одним из способов решения проблемы высокой ресурсоемкости алгоритмов, гарантирующих оптимальность

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 16-07-00458 А

решения, является применение методов параллельных и распределенных вычислений.

Разработан программный комплекс для решения задач детерминированными методами, основанными на методе ветвей и границ (МВГ). Параллельная реализация ориентирована на параллельные системы с распределенной памятью и использует MPI [2]. Разделение проблемно-зависимой и независимой составляющих дает возможность легко добавлять новые алгоритмы на основе МВГ, оставляя неизменной параллельную часть.

Основной проблемой при реализации метода ветвей и границ на многопроцессорных системах является обеспечение равномерной загрузки процессоров. Для этого применяются методы балансировки нагрузки, которые перераспределяют эту нагрузку в процессе расчетов. В предлагаемом программном комплексе балансировщик выделен в отдельный модуль, а для описания управления балансировкой применяется формализм конечных автоматов. Это позволяет не только отделить детали реализации численного метода от логики распределения вычислительной нагрузки, но и открывает широкие перспективы по исследованию алгоритмов балансировки методами имитационного моделирования.

Был разработан симулятор параллельной системы [3], который позволяет выполнять алгоритм балансировки нагрузки, имитируя распределенную работу метода ветвей и границ, а также передачу данных между параллельными процессами. Для имитации МВГ используется случайный ветвящийся процесс с вероятностью ветвления, уменьшающейся пропорционально удалению от корня дерева. В основу моделирования положена концепция логических часов. Вместо реального решения подзадачи производится сдвиг логического таймера на заданную величину. Передача данных моделируется аналогично, при этом время на принимающем процессе полагается равным временной метке полученного сообщения. Для облегчения изучения методов балансировки нагрузки разработана графическая среда [4], показывающая загрузку процессоров в разные моменты времени, визуализирующая обмены между ними. С помощью разработанной среды можно изучать как трассы реального выполнения, так и трассы, собранные при помощи симулятора.

## Литература

1. Евтушенко Ю. Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т. 11, №. 6. – С. 1390–1403.

2. Snir M. MPI--the Complete Reference: The MPI core // MIT press. – 1998. – Т. 1.
3. Фомин А. Л. A software simulation tool for the parallel branch and bound method implementation // International Journal of Open Information Technologies. – 2015. – Т. 3, №. 11. – С. 10–15.
4. Орлов Ю. В. Среда комплексного анализа производительности алгоритмов балансировки в параллельном методе ветвей и границ // International Journal of Open Information Technologies. – 2015. – Т. 3, №. 9.

## **СРЕДСТВА MICROSOFT AZURE ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Т.А.САМОЙЛОВА**

Смоленский государственный университет  
e-mail:tatsam@hotmail.ru

УДК 004.896

Ключевые слова: *информационно-аналитические системы, Azure Machine Learning, Storage, база данных, регрессия, алгоритмы прогнозирования, веб-сервис, эксперимент.*

*В статье предлагается методика разработки информационно-аналитических систем на базе средств Microsoft Azure. Рассмотрены источники данных для прогнозных моделей и возможности их параллельной обработки, эксперименты для обучения модели в среде Azure Machine Learning Studio с примером одновременной реализации трех алгоритмов регрессии. Описан процесс преобразования математической модели в веб-сервис, подключение к которому выполняется из мобильных, десктоп и веб-приложений.*

Методы анализа данных для прогнозирования и принятия решений широко применяются в разных предметных областях [1]. Они реализуются информационно-аналитическими системами (ИАС), которые называют прогнозирующими или рекомендательными. Основная задача таких систем – предсказание объектов, которые будут интересны пользователю с учетом его предпочтений. Это направление информатики носит название data intensive domains (DID) и в настоящее время выдвигается на передний план как по развитию инструментальных средств, так и по приложениям. Причиной этому служит создание интегрированных систем баз данных и развитие методов машинного обучения (machine learning), включающих средства интеллектуального анализа данных (data mining) [2]. Процедура прогнозирования включает несколько этапов разработки таких систем. Начальный этап – накопление информации, ее преобразование и ввод в базу данных. Последующие этапы – это построение математической

модели анализа и обучение модели поиску закономерностей. Затем следует этап применения найденных закономерностей для прогнозирования и принятия решений. На заключительном этапе создается веб-сервис анализа данных и пользовательский интерфейс визуализации результатов. Инструментальные средства Machine Learning (ML) наряду с базами данных являются ядром рекомендательных и прогнозирующих систем принятия решений. В настоящее время программы ML от таких ведущих фирм, как Sap, Oracle, IBM, Microsoft, SAS, объединяют в себе методы прикладной статистики, распознавания речи и образов, искусственного интеллекта и пр. Основные проблемы, которые приходится решать разработчику ИАС, – это выбор наиболее эффективных методов хранения данных, выбор математической модели прогнозирования, а также отображение результатов интеллектуального анализа в удобную для восприятия потребителями форму. Проблемы выбора осложняются тем, что сравнение результатов прогнозирования разных математических моделей должно выполняться на больших объемах данных, что требует значительных временных и вычислительных затрат. Для облегчения решения перечисленных проблем целесообразно воспользоваться инструментами платформы Microsoft Azure, содержащей средства параллельной обработки данных. Достоинством платформы являются также простота интеграции источников больших данных с математическими моделями продвинутой аналитики и со средствами управления ими непосредственно из пользовательских приложений. Современные тенденции развития архитектур ИАС базируются на применении интернет-технологий. На рисунке 1 показана архитектура ИАС, выполняющая параллельную обработку данных в Windows Azure.

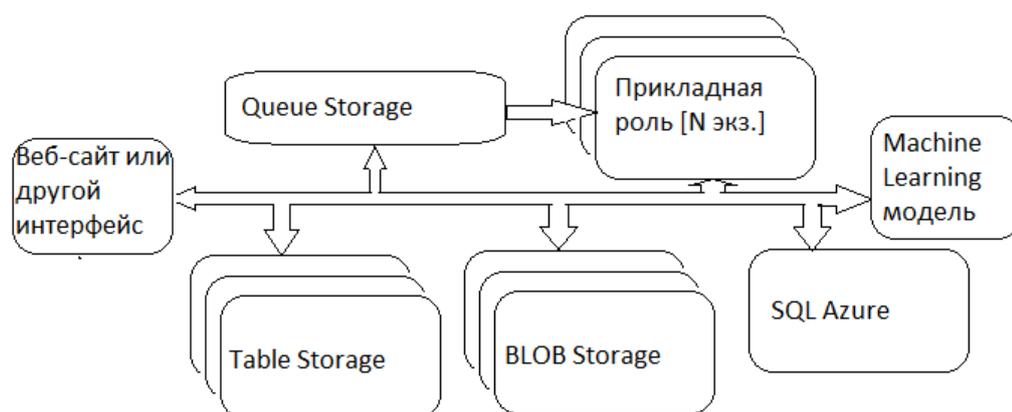


Рис. 1. Архитектура ИАС в Microsoft Azure

Возможности главных для ИАС источников данных Azure:

- SQL Azure – реляционное хранилище с наличием параллельных функций обработки запросов;

- BLOB Storage – позволяет хранить BLOB-данные (обычные файлы) с многопользовательским доступом по протоколу REST;
- Table Storage – позволяет хранить таблицы типа сущностей (это в основном NoSQL), многопользовательский доступ к которым также осуществляется по протоколу REST;
- Queue Storage – позволяет организовать очередь данных для последующей параллельной обработки.

Центральный компонент ИАС – математическая модель прогнозирования, использующая алгоритм анализа данных конкретной предметной области. Разработка такой модели, включающая процесс ее обучения, реализуется средствами среды Azure ML Studio. Одним из преимуществ этой среды для создания моделей машинного обучения является возможность в одном эксперименте попробовать одновременно более одного типа моделей и сравнить результаты. Параллельное выполнение разных алгоритмов анализа данных позволяет провести количественную оценку разных алгоритмов и найти предпочтительный в решении конкретной проблемы. На рисунке 2 представлен пример Azure ML-эксперимента, включающий три работающих параллельно блока прогнозирования: линейную регрессию (Linear Regression), ансамбль регрессионных деревьев решений (Boosted Decision Tree Regression) и регрессию с распределением Пуассона (Poisson Regression). Исходные данные представлены источником BLOB Storage, содержащим коммерческую информацию о ценах продаж автомобилей, имеющих разные характеристики.

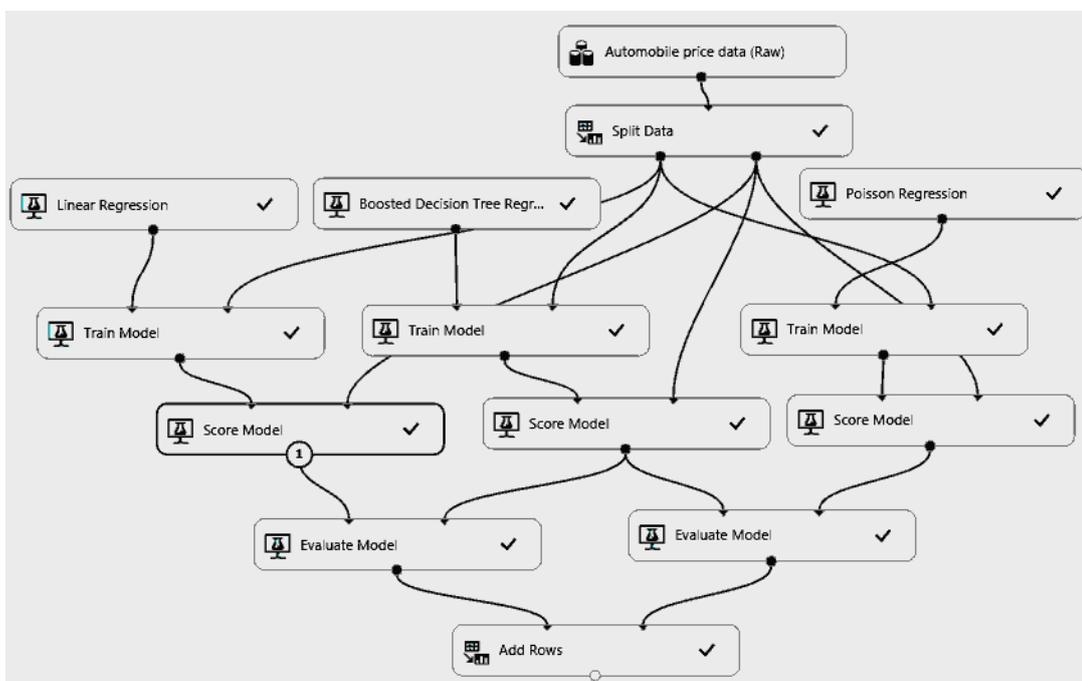


Рис. 2. Параллельное выполнение алгоритмов анализа данных

Построенные и рассчитанные в Azure ML Studio модели прогнозирования разворачиваются в виде масштабируемого и отказоустойчивого веб-сервиса, схема которого приведена на рисунке 3.

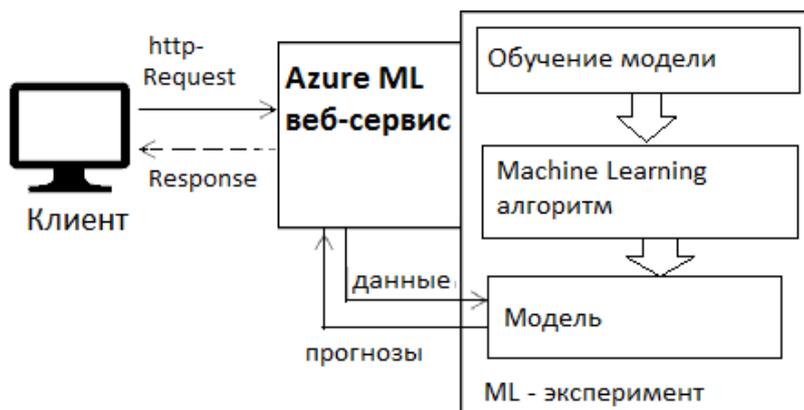


Рис. 3. Схема веб-сервиса прогнозирования

В ML-студии после создания сервиса становится доступна страница документации его API, которая, кроме общего описания сервиса, ожидаемых входных и выходных сообщений, содержит еще и примеры вызова сервиса на C#, Python и R. Сервис работает в двух режимах: пакетный режим (асинхронный ответ от сервиса) и режим Request/Response с низкой задержкой (синхронный ответ). Он получает и отправляет сообщения в формате application/json по протоколу https. Для доступа к сервису выдается API Key – ключ доступа, включаемый в заголовок https-запроса. В Azure есть возможность добавить произвольное количество конечных точек, через которые можно получить доступ к сервису от различных клиентов – мобильных, веб и десктоп.

В заключение необходимо отметить, что сферы применения ИАС постоянно расширяются. Повсеместная информатизация приводит к накоплению огромных объёмов данных в науке, производстве, бизнесе, транспорте, здравоохранении. Раньше, когда таких данных не было, эти задачи либо вообще не ставились, либо решались совершенно другими методами. В данной работе представлен лишь один из подходов к решению таких задач применительно к задачам прогнозирования.

## Литература

1. Machine Learning.ru. Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных. <http://machinelearning.ru/>.
2. Загоруйко Н.Г. Когнитивный анализ данных. – Новосибирск: Академическое изд-во «ГЕО», 2012. – 203 с.

# МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОДХОДА ФОРМАЛИЗАЦИИ СЕМАНТИКИ ЗАДАЧ

**А.А. СИМАКОВА**

Смоленский государственный университет  
e-mail: bessima13@yandex.ru

УДК 004.855.5

Ключевые слова: *семантика задачи, алгебра, алгебраический подход, система интегрированного вида, нейронная сеть, искусственный интеллект.*

*В работе рассмотрены различные способы реализации алгебраического подхода преобразования семантики задачи в алгебру.*

Процесс решения задачи, как правило, включает два этапа: представление задачи и поиск (перебор). Успех решения задачи в значительной мере определяется формой ее представления. Формы представления задачи могут быть различными, при этом алгоритмы решения задач будут схожими.

Например, выбирая маршрут движения, человек может воспользоваться схемным представлением путей перемещения и оценками расстояний между промежуточными пунктами, тогда его путь будет оптимален по затраченному времени, но, возможно, он захочет насладиться своей прогулкой, тогда его маршрут будет проходить через парки, скверы. Второй маршрут не будет оптимален с точки зрения временных оценок, но он будет ему более приятен. Способы решения данной задачи разные, но суть остается неизменной: перемещение из пункта А в пункт В.

Характер человеческого мышления таков, что форма представления задачи не всегда им осознается. Так, шахматист не может четко объяснить форму представления шахматной ситуации, позволяющую ему не перебирать все возможные варианты продолжения при поиске очередного хода. Поэтому этап представления задачи часто выпадает из поля зрения человека, но важность этого этапа осознается сразу при попытке построить программно реализуемый алгоритм решения задачи.

В настоящее время при решении задач в математических пакетах приходится заранее изучить их документацию, ознакомиться с синтаксисом, а затем приступить к поиску решения. Все это потому, что нет единой формы записи условия задачи, человеку приходится изначально обдумать ее решение, а зачастую сначала решить самому, а только потом вводить входные данные в вычислительную систему для обработки. Очевидно, что форма представления задачи, то есть ее

формальная модель, играет важную роль при нахождении решения с применением вычислительных средств.

Одной из форм представления задачи является построение алгебраической системы, в которой решение задачи может быть представлено совокупностью алгебраических выражений. Этапы построения подобной программы были рассмотрены в ранее представленных работах [1; 2]. Далее описаны инструментальные программно-аппаратные системы, которые можно использовать для построения автоматизированных систем формализации семантики задач.

Одной из таких систем является облачная платформа IBM Bluemix, которая предлагает сервисы для разработки и развертывания web-, мобильных и интеграционных приложений, а также предоставляет широкий набор инструментов когнитивной аналитики (Watson), аналитики больших данных, интернета вещей (Internet of Things) и т.д. Именно инструменты IBM Watson дают возможность реализации разработанной нами системы. Фирма IBM сделала возможным открытое использование суперкомпьютера Watson. Он оснащен системой искусственного интеллекта, что делает возможным реализацию нашей системы на их устройстве.

Помимо облачной платформы IBM Bluemix, построение систем интегрированного вида с использованием искусственного интеллекта доступно в облачной платформе Microsoft Azure, а именно в разделе Mashing Learning. Тут мы можем построить данную систему, воспользовавшись различными вариантами построения нейронных сетей, кластерного анализа. Также есть возможность обработки русскоязычных текстов с помощью двух языков для разработки скриптов внутри системы: Python, R.

Также для разработки подобной системы можно использовать MatLab, но его функционал существенно ограничен. Здесь можно воспользоваться функциями пакета Neural Networks Toolbox. В состав пакета входит более 160 различных функций, дающих возможность создавать, обучать и исследовать нейронные сети. Но, к сожалению, в этой системе нет возможности обработки русскоязычных текстов.

Таким образом, рассмотрено несколько систем, в которых можно реализовать поставленную задачу. Для эксперимента было решено воспользоваться программой Visual Studio 2015, подключив в ней хорошо проработанную библиотеку Fast Artificial Neural Network (FANN) для реализации нейронной сети. Эксперимент состоял из следующих этапов:

- этап лингвистической обработки данных (этап формализации и преобразования семантики задач);
- этап машинного обучения (или этап накопления, обработки и принятия решения на основе входных данных).

Подробнее этапы описаны в работах [1; 2].

В итоге получена обученная нейросеть, которую можно дальше тестировать на другой выборке.

### Литература

1. Мунерман В.И., Симакова А.А. Алгебраический подход к формализации семантики задач // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2015. – Т. 2, № 11. – С. 92.
2. Мунерман В.И., Симакова А.А. Преобразование семантики задачи в алгебру // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. – Вып. 16. – С. 88–91.
3. Люгер Дж.Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем. – 4-е издание.: пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003.

## СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ НОРМАЛЬНОЙ СУБОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СОСТОЯНИЯ<sup>1</sup>

И.Н. СИНИЦЫН, Э.Р. КОРЕПАНОВ

ФИЦ ИУ РАН, г. Москва,  
e-mail: sinitsin@dol.ru; ekorepanov@ipiran.ru

УДК 681.3

Ключевые слова: *автокоррелированная стохастическая система, линейная относительно состояния, нормальный фильтр (НФ), субоптимальный фильтр (СОФ), фильтр Липцера-Ширяева (ФЛШ), фильтр Пугачёва (ФП).*

*Разработаны непрерывные нормальные субоптимальные алгоритмы синтеза фильтров для обработки информации в негауссовских стохастических системах, линейных относительно состояния.*

Как известно [1–4], обработка процессов в ряде современных задач статистических научных исследованиях основана на использовании теории нелинейной фильтрации в стохастических системах (СтС),

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-07-02244).

линейных относительно состояния. Для гауссовских СтС первые работы в этом направлении выполнены Липцером и Ширяевым, а для негауссовских СтС на основе нелинейной субоптимальной фильтрации – Пугачёвым и Сеницыным.

В [2] рассмотрены вопросы синтеза алгоритмов нормальных условно-оптимальных фильтров и экстраполяторов Пугачёва (НФЭП) для обработки процессов в непрерывных и дискретных СтС, линейных относительно состояния, на основе метода нормальной аппроксимации (МНА) и метода статистической линеаризации (МСЛ). Особое внимание уделено синтезу НФЭП для СтС при условиях Липцера – Ширяева на базе аппроксимации нормальным субоптимальным квазилинейным НФЭП, основанным на МСЛ для нелинейных функций, зависящих от наблюдений. Для СтС высокой размерности путем выбора структурных функций, отражающих аналитическую природу наблюдаемой системы, синтезированы НФЭП, простые в компьютерной реализации и предназначенные для работы в режиме реального времени. Алгоритмы положены в основу модуля инструментального программного обеспечения (StS-Filter, 2015).

Настоящий доклад посвящен вопросам синтеза НФП для обработки процессов в непрерывных автокоррелированных негауссовских СтС, линейных относительно состояния.

Рассматриваются алгоритмы нормальных фильтров как для СтС с некоррелированными помехами, так и для СтС с автокоррелированными помехами. Полученные алгоритмы положены в основу модуля программного обеспечения (StS-Filter, 2016).

Приводятся результаты аналитического моделирования точности и чувствительности алгоритмов. На примерах показана достаточная точность алгоритмов для оценки безопасности технических систем высокой доступности.

## Литература

1. Сеницын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. – 2-е изд. – М.: Логос, 2007. – 776 с.
2. Сеницын И.Н., Корепанов Э.Р. Нормальные условно оптимальные фильтры Пугачёва для дифференциальных стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и ее применения. – 2015. – Т. 9. Вып. 2. – С. 30–38.
3. Сеницын И.Н., Корепанов Э.Р. Нормальные условно-оптимальные фильтры и экстраполяторы Пугачёва для стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и ее применения. – 2016. – Т. 10. – Вып. 1. – С. 14–32.
4. Сеницын И.Н., Корепанов Э.Р. Нормальные фильтры Пугачёва для автокоррелированных стохастических систем, линейных относительно состояния // Системы и средства информатики. – 2016. – Т. 26, № 2 (в печати).

# СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ ПОСЛЕПРОДАЖНОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ИЗДЕЛИЙ НАУКОЕМКОЙ ПРОДУКЦИИ

**И.Н. СИНИЦЫН, А.С. ШАЛАМОВ, И.В. СЕРГЕЕВ, Э.Р. КОРЕПАНОВ,  
В.В. БЕЛОУСОВ, Е.С. АГАФОНОВ**

ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

e-mail: sinitsin@dol.ru; a-shal5@yandex.ru; isergeev@ipiran.ru;  
ekorepanov@ipiran.ru; vbelousov@ipiran.ru; eagafonov@ipiran.ru

УДК 681.3

*Ключевые слова: жизненный цикл изделий наукоемкой продукции (ЖЦ ИНП), имитационно-аналитическое моделирование (ИАМ), системы послепродажного сопровождения(СППС)*

*Рассмотрены методические и инструментальные программные вопросы стохастического моделирования и оптимизации процессов в СППС на основе методов и средств имитационно-аналитического моделирования.*

Системы послепродажного сопровождения ИНП относятся к классу организационно-техничко-экономически систем (ОТЭС) [1, 2]. ОТЭС – класс крупных систем микроэкономики, соответствующих 5-му технологическому укладу, деятельность которых удовлетворяет современным международным стандартам, но требует их дальнейшего развития и создания более эффективных систем управления на основе учета стохастической динамики процессов, обусловленной действием внутренних и внешних случайных факторов, на протяжении ЖЦ ИНП. Разработана и продолжает развиваться StochasticCALS – методология, включающая в себя информационные технологии (ИТ) ИАМ оптимальной фильтрационной обработки информации, комплексного планирования и управления на основе ИАМ. ИТ базируются на опыте имитационного стохастического моделирования процессов СППС, алгоритмах теории вероятностного аналитического моделирования нелинейных нестационарных динамических систем, подверженных влиянию помех винеровского и пуассоновского типов, теории оптимального оценивания и фильтрации, теории оптимизации стохастических систем.

Специфическими проблемами, присущими СППС, являются:

а) необходимость интеграции имитационного и аналитического подходов к стохастическому моделированию процессов;

б) необходимость совмещения в единой модели режимов, присущих различным этапам ЖЦ ИНП;

в) необходимость совмещения разнородных моделей потоков материальных средств в одном режиме и др.

В настоящее время в РФ решены теоретические и часть прикладных проблем стохастического ИАМ, оптимальной фильтрации процессов СППС на фоне естественных и искусственных помех. Решаются проблемы оптимального управления стохастическими процессами СППС на основе ИАМ. По нашим источникам, на Западе интенсивно используются сугубо имитационные подходы.

### Литература

1. Сеницын И.Н. [и др.]. Методы и средства оптимального планирования параметров процессов в системах послепродажного обслуживания изделий наукоемкой продукции // Системы и средства информатики. – 2014. – Т. 24, № 2. – С. 4–22.

2. Будзко В.И., Сеницын И.Н. Развитие компьютерных информационных технологий «Большие данные» // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV Международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. – Вып. 15. – С. 69–75.

## СИСТЕМА КОМПЛЕКСНОЙ ЗАЩИТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ\*

**И.И. ЧУКЛЯЕВ**

ВА ВПВО ВС РФ, г. Смоленск

e-mail: smolarm@mail.ru

УДК 511.1

Ключевые слова: *информационно-управляющая система, функционально-ориентированные информационные ресурсы, система комплексной защиты.*

*В статье представлена система комплексной защиты функционально-ориентированных информационных ресурсов*

---

\* Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 10-07-97502, 13-07-97518 и грантов Президента Российской Федерации № МК-755.2012.10, МК-3603.2014.10.

*информационно-управляющих систем, ориентированных на комплексную защиту выполнения задач с учетом уровней управления.*

Интеграция информационно-телекоммуникационных технологий в сложных организационно-технических системах (ОТС) актуализирует вопросы обеспечения их защищенности от несанкционированных внешних и/или внутренних воздействий дестабилизирующего характера (НСВ), заключающихся в разрушении или повреждении компонентов, модификации (искажении) данных [1], ведущих к нарушению выполнения задач управления.

В настоящее время предложены разнообразные методы и средства обеспечения защищенности ОТС и циркулирующих данных в условиях НСВ. Однако, как правило, они «локализованы» относительно отдельных совокупностей данных и процессов и не ориентированы на комплексную защиту выполнения задач с учетом уровней управления ОТС [2; 3].

Предлагается система комплексной защиты функционально-ориентированных информационных ресурсов (ФОИР) информационно-управляющих систем (ИУС), которая обеспечивает расширенные возможности по созданию перспективных средств защиты, ориентированных на комплексную защиту выполнения задач с учетом уровней управления.

Информационно-управляющая система (ИУС) включает функциональную, информационную, организационную и техническую подсистемы. Компоненты этих подсистем распределены по уровням управления ИУС.

Функционально-ориентированные информационные ресурсы (ФОИР) ИУС содержат многоаспектную информацию для выполнения всей совокупности задач управления ИУС и представляются в виде [2; 4]:

$$\begin{aligned} \text{ФОИР}_{\text{ИУС}} = \{ \text{ФОИР}_{A_i} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{IR} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Функция} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Право} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{ДЛОУ} \} \triangleright \triangleleft \\ \triangleright \triangleleft \{ \text{Механизм} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Взаимосвязи} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Свойства} \} \triangleright \triangleleft \\ \triangleright \triangleleft \{ \text{Временные параметры} \}; \end{aligned}$$

Функционально-ориентированные информационные ресурсы для решения задач  $i$ -го уровня управления:

$$\begin{aligned} \text{ФОИР}_{A_i} = \{ \text{ФОИР}_{A_j} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Вход}_{\text{Функция}_{nm}^1} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Управление}_{\text{Функция}_{nm}^1} \} \triangleright \triangleleft \\ \triangleright \triangleleft \{ \text{Вызов}_{\text{Функция}_{nm}^1} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Выход}_{\text{Функция}_{nm}^1} \} \triangleright \triangleleft \\ \triangleright \triangleleft \{ \text{Функция}_{nm}^1 \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Право} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{ДЛОУ}_{bc} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{СрАвт} \} \triangleright \triangleleft \\ \triangleright \triangleleft \{ \text{Взаимосвязи} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Свойства} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Временные параметры} \}; \end{aligned}$$

Функционально-ориентированные информационные ресурсы для решения задач  $j$ -го уровня управления:

$$\begin{aligned} \text{ФОИР}_{Aj} = \{N_{IR}\} \triangleright \triangleleft \{ \text{Функция}_{nmkl}^3 \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Право} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{ДЛОУ}_{bcd} \} \triangleright \triangleleft \\ \triangleright \triangleleft \{ \text{Устройства} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Взаимосвязи} \} \triangleright \triangleleft \{ \text{Свойства} \} \triangleright \triangleleft \\ \triangleright \triangleleft \{ \text{Временные параметры} \}, \end{aligned}$$

- где  $\{ \text{ФОИР}_{ИУС} \}$ , – Функционально-ориентированные информационные ресурсы ИУС
- $\{ \text{ФОИР}_{Ai} \}$ , – соответствующих уровней управления;
- $\{ \text{ФОИР}_{Aj} \}$  – взаимосвязи ФОИР ИУС соответствующих уровней управления;
- $\{ \text{Взаимосвязи} \}$  – свойства защищенности, предъявляемые к ФОИР ИУС соответствующих уровней управления;
- $\{ \text{Свойства} \}$  – свойства защищенности, предъявляемые к ФОИР ИУС соответствующих уровней управления;
- $\{ \text{Временные параметры} \}$  – временные параметры, характеризующие изменения показателей ФОИР ИУС соответствующих уровней управления;
- $\triangleright \triangleleft$  – операция агрегирования, характеризующая объединение и укрупнение показателей ФОИР ИУС соответствующих уровней управления.

В качестве основы системы комплексной защиты ФОИР ИУС выступает функциональный комплекс данных многоосновной алгебраической структуры композиционной модели ФОИР ИУС [2, 4], которая отображает структуру, взаимосвязи, а также специфику операций манипулирования и обработки над сложно структурированными данными на различных уровнях управления ИУС, соответствующими модели данных в не первой нормальной форме (*non-first normal form – NFNF*) [5–7]:

$$\langle D_1, D_2, \dots, D_n; R; \Sigma \rangle,$$

- где  $D_1, \dots, D_n$  – заданные множества (остовы) данных, соответствующих уровням управления ФОИР ИУС;
- $R$  – конечный набор функций ФОИР ИУС, определенных на  $D_1, D_2, \dots, D_n$  (характеристика структуры);
- $\Sigma$  – ограничительные условия, накладываемые на множества  $D_1, D_2, \dots, D_n$  и функции данных из  $R$ .

В соответствии с предлагаемым методом построения системы комплексной защиты ФОИР ИУС, разработаны модели комплексного управления риск-ситуациями нарушения защищенности ФОИР ИУС [8–12]:

– композиционная нечеткая модель риск-ситуаций нарушения защищенности ФОИР ИУС;

– нечеткие продукционные модели нарушения защищенности ФОИР ИУС;

– игровая модель формирования стратегий управления риск-ситуациями нарушения защищенности ФОИР ИУС на основе антагонистических смешанных стратегических игр в матричной постановке;

– нейро-нечеткая модель формирования мероприятий управления риск-ситуациями нарушения защищенности ФОИР ИУС.

### Литература

1. Макаренко С. И., Чукляев И. И. Терминологический базис в области информационного противоборства // Вопросы кибербезопасности. – 2014. – № 1 (2). – С. 13–21.

2. Морозов А. В., Борисов В. В., Чукляев И. И. Вычислительные системы боевого управления войсковой ПВО: теоретическое обобщение, развитие, практические результаты. – Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ, 2013. – 448 с.

3. Чукляев И. И. Теоретическое обобщение предметной области «радиоэлектронная борьба». Тенденции развития методов и средств // Научно-технический сборник ОАО «Концерн "Системпром"». – М.: Изд-во ОАО «Концерн "Системпром"», 2015. – Вып. 1(6). – С. 471–486.

4. Чукляев И. И. Информационно-управляющая система в условиях многоуровневого функционально-ориентированного информационного конфликта и подавления // Вестник войсковой ПВО. – Смоленск: Изд-во ВА ВПВО ВС РФ, 2015. – Вып. 13. – С. 183–189.

5. Yemelchenkov Ye.P., Tsalenko M.Sh. Functional dependencies in hierarchical structures of data // Lecture Notes in Computer Science. – 1991. – Т. 495. – С. 258.

6. Емельченков Е.П., Авдеев Д.А., Копаренко Е.М. Большие данные и функциональные комплексы данных // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. – Вып. 15. – С. 80–81.

7. Емельченков Е. П. Базы данных. Современный подход. – Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ. - 2010. - 59 с.

8. Чукляев И. И. Модель и способ выбора мероприятий по обеспечению информационной безопасности на основе нечетких автоматов // Вестник войсковой ПВО. – Смоленск: Изд-во ВА ВПВО ВС РФ, 2014. – Вып. 11. – С. 266–268.

9. Чукляев И. И. Нечеткая оценка взаимосвязей системных факторов информационно-управляющей системы в интересах повышения защищенности информационных ресурсов // Системы управления, связи и безопасности. – 2015. – №1. – С. 4–15. URL: <http://journals.intelgr.com/scs/archive/2015-01/01-Chuklyayev.pdf> (дата обращения: 2.12.2015).

10. Чукляев И. И. Гибридная нечеткая модель оценки рисков защищенности информационно-управляющих систем // Вестник войсковой ПВО. – Смоленск: Изд-во ВА ВПВО ВС РФ, 2014. – Вып. 11. – С. 259–265.

11. Чукляев И.И. Игровая модель обоснования применения средств комплексной защиты информационных ресурсов иерархической информационно-управляющей системы // Т-Сотт: Телекоммуникации и транспорт. – 2015. – № 2. – С. 64–68.

12. Чукляев И. И. Метод и модели управления рисками защищенности в информационно-управляющих системах военного и специального назначения // Вычислительные системы реального времени и цифровые устройства / под ред. Е.С. Новикова. – М: ОАО «Концерн "Моринформсистема-Агат"», 2015. – Вып. 9. – С. 14–33.

## **ОБЪЕКТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БАЗ ДАННЫХ В НЕ ПЕРВОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ**

**Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ<sup>1</sup>, А.И. МАКАРОВ<sup>2</sup>, В.И. МУНЕРМАН<sup>3</sup>**

Смоленский государственный университет

e-mail: <sup>1</sup> ypy1101@gmail.com; <sup>2</sup> al.makarov8@gmail.com; <sup>3</sup> vimoon@gmail.com

УДК 004.652.5

*Ключевые слова: базы данных не первой нормальной формы, объектно-реляционные базы данных, абстрактный тип данных, ссылки.*

*В статье предлагается один из способов реализации баз данных в не первой нормальной форме. Приводится формализация понятия объектная база данных на основе строгого определения абстрактного типа данных.*

В теории реляционных баз данных не нормализованным отношением или отношением в не первой нормальной форме считается отношение, которое содержит хотя бы один не атомарный атрибут. В литературе по базам данных предполагается, «что среди значений домена не могут содержаться значения с видимой структурой, в том числе множества значений, отношения». Вместе с тем понятие «атомарности значения трактуется в том смысле, что с этим значением можно работать только с помощью операций соответствующего типа данных» [1].

Для того чтобы использовать объектный подход нужно отказаться от неформального взгляда на объектные базы данных, сделать попытку дать формальное определение объекта и объектно-реляционной базы данных. Такое определение не обязательно будет общим, учитывающим

все возможные случаи, но оно должно быть достаточно полным для того, чтобы решать практически значимое множество задач. Большинство современных подходов к объектным базам данных основываются на неформальном определении абстрактного типа данных (АТД), впервые сформулированном в [2]. «Абстрактный тип данных определяет класс объектов, который полностью характеризуется операциями возможными над этими объектами. Это означает, что абстрактный тип данных может быть определен описанием операций для этого типа». Однако, попытки формализовать понятие АТД были сделаны задолго до появления этой статьи в работах академика Л.В. Канторовича [3]. Развитие этих взглядов привело к появлению строгого определения АТД.

Абстрактный тип данных – это многоосновная универсальная алгебраическая система [4].

Тогда любая модель данных, в том числе объектно-реляционная, может рассматриваться как базовый абстрактный тип данных, потому что представляет собой универсальную многоосновную алгебраическую систему, в современной терминологии этому соответствует понятие «суперкласс».

Современные языки манипулирования данными (ЯМД), такие как Transact-SQL, можно рассматривать как языки, поддерживающие технологию объектно-ориентированного проектирования и программирования. Далее, следуя терминологии ЯМД, вместо термина «отношение» будет использоваться термин «таблица».

При таком подходе таблицы конкретной базы данных можно разделить на две группы: первая группа содержит таблицы в не первой нормальной форме, а вторая – таблицы, которые могут входить в множества значений атрибутов  $R_{k+1}, \dots, R_n$  таблиц первой группы. В конкретных случаях вторая группа таблиц разделена на подгруппы, каждая из которых и есть домен атрибута  $R$ , входящего в состав схемы одной из таблиц  $R^0$ . Над таблицами, входящими в домены атрибутов  $R_{k+1}, \dots, R_n$ , определены операции реляционной алгебры. Кроме того, над ними могут быть определены предикаты. Например, если таблица  $R_{ij}$  принадлежит домену атрибута  $R_i$  ( $j$  – фиксирует таблицу в домене), то можно определить предикат «число строк в таблице  $R_{ij}$  больше  $L$ ». Такой предикат позволит выбирать таблицы в зависимости от количества строк.

Но в современных ЯМД не поддерживаются домены, включающие в себя другие таблицы. Одним из решений этой проблемы является ссылочный подход. Начиная со стандарта SQL3, для определения связей между строковыми типами и однозначной идентификации строки в таблице могут применяться ссылочные типы [5]. Если же расширить данный тип, помимо идентификации отдельных строк дать возможность

однозначно определять другие таблицы, то будет возможно представлять базы данных в не первой нормальной форме средствами ЯМД.

Таким образом, таблицы конкретной базы данных будут разделяться на две группы: первая, содержащая таблицы в не первой нормальной форме, домены которых включают ссылки на другие таблицы, вторая – таблицы, домены которых не содержат ссылок на другие таблицы.

Так как каждая ссылка однозначно определяет другую таблицу, над ссылками могут выполняться любые операции реляционной алгебры, а именно: унарные операции SELECT и PROJECT, а также бинарные теоретико-множественные операции и операция JOIN. Все эти операции будут выполняться над таблицами, к которым ведут ссылки, что позволит работать с базами данных в не первой нормальной форме как с классическими реляционными базами данных.

**Пример.** Хранимая процедура, которая реализует запрос SELECT, с предикатом, определенным на множестве таблиц.

```
1. CREATE PROCEDURE [Select_NF_Where]
2.   @L int
3.   DECLARE @R1i TABLE (B1 int, B2 int)
4.   DECLARE @A int, @R nchar(255), @row_countR0 int
5.   DECLARE @sql_cmd nchar(255)
6.   DECLARE @i int
7.   DECLARE cursorR0 CURSOR FOR SELECT * FROM R0
8.   DECLARE cursorR1i CURSOR FOR SELECT * FROM @R1i
9.   DELETE FROM R0Res
10.  OPEN cursorR0
11.  SET @row_countR0=@@CURSOR_ROWS
12.  SET @i=0
13.  WHILE @i<@row_countR0
14.  BEGIN
15.    FETCH NEXT FROM cursorR0 INTO @A, @R
16.    SET @sql_cmd='INSERT INTO @R1i SELECT * FROM'+@R
17.    EXEC (@sql_cmd)
18.    OPEN cursorR1i
19.    IF @@CURSOR_ROWS>@L
20.      INSERT INTO R0Res(A, R) VALUES(@A, @R)
21.    CLOSE cursorR1i
22.  END
23.  CLOSE cursorR0
```

Таким образом, можно сделать вывод о том, что применение строгого формального подхода к определению АТД позволяет рассматривать классическую реляционную модель как объектную модель данных, а использование средств, реализованных в современных СУБД, и, в частности, в их языках манипулирования данными, позволяет реализовать обработку баз данных, содержащих отношения в не первой нормальной форме.

## Литература

1. Кузнецов С.Д. Основы баз данных: учебное пособие – 2-е изд., испр. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 125 с.
2. Liskov B., Zilles S. Programming with abstract data types // ACM SIGPLAN Notices. – 1974. – Vol. 9, Is. 4. – P. 50–59.
3. Канторович Л. В., Петрова А. Т. О математической символике, удобной при вычислениях на машинах // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. – 1956. – Т. II. – С. 151.
4. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки программирование. – Киев: Наукова думка, 1989. – 376 с.
5. Коннолли Т., Бегг К. Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика. – 3-е издание: пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. – С. 1069.

## СЕКЦИЯ 3

### Математика и её приложения

#### О ТЕОРЕМЕ ТИПА ТЕОРЕМЫ ВАН КАМПЕНА ДЛЯ НЕСВЯЗНОЙ КОМПАКТНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

В.М. АДУКОВ

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск  
e-mail: adukovvm@susu.ac.ru

УДК 517.586.62

Ключевые слова: *компактная абелева группа, групповая алгебра, теорема ван Кампена, индекс функции.*

*В докладе получено обобщение теоремы ван Кампена на случай несвязной компактной абелевой группы  $X$ . Найдена группа одномерных целочисленных когомологий  $X$ . Кроме того, предполагается использовать полученную теорему для исследования обобщенной обратимости и нетеровости операторов Винера–Хопфа на дискретной почти линейно упорядоченной абелевой группе с кручением.*

Пусть  $X$  – связная компактная группа,  $f(t) \in C(X)$  и  $f(t) \neq 0$ . Классическая теорема ван Кампена [1] утверждает, что найдется характер  $\chi$  группы  $X$  такой, что  $f(t) = \chi(t) \exp b(t)$ ,  $b(t) \in C(X)$ . Характер  $\chi$  однозначно определяется компонентой связности  $f(t)$  в группе обратимых элементов алгебры  $C(X)$ . Таким образом,  $\chi$  играет роль топологического индекса функции  $f(t)$ . Цель работы – обобщить эти результаты на случай несвязной компактной абелевой группы  $X$ .

Пусть  $G = \hat{X}$  – двойственная к  $X$  группа, состоящая из непрерывных характеров  $X$ .  $G$  – дискретная абелева группа с кручением. Пусть  $V$  – ее периодическая часть, состоящая из всех элементов  $G$  конечного порядка. Если  $X_1$  – связная компонента единицы группы  $X$ , то мы, как обычно, отождествляем  $\hat{X}_1$  с  $G/V$  и  $\hat{V}$  с  $X/X_1$ . Имея в виду дальнейшие применения в теории операторов Винера–Хопфа, получим вначале обобщение теоремы ван Кампена для  $f(t) \in W(X)$ . Здесь  $W(X)$  – алгебра Винера на  $X$ . Поскольку  $W(X)$  плотна в  $C(X)$ , отсюда будет следовать аналогичный результат и для  $C(X)$ . Кроме того, существует изометрический изоморфизм между групповой алгеброй  $\ell^1(G)$  со

сверткой в качестве умножения и алгеброй Винера  $W(X)$ , который ставит в соответствие элементу  $\hat{a}(g) \in \ell^1(G)$  его преобразование Фурье  $a(t) = \sum_{g \in G} \hat{a}(g)t(g) \in W(X), t \in X$ . Поэтому аналог теоремы ван Кампена можно формулировать для алгебры  $\ell^1(G)$ .

**Теорема 1.** Для каждого обратимого элемента  $\hat{a}(g)$  групповой алгебры  $\ell^1(G)$  существуют подгруппа  $G_0$  группы  $G$  вида  $G_0 = H \oplus P$ , где  $H$  – группа без кручения,  $P$  – конечная группа и отображение  $\kappa(\varphi)$  конечной группы  $\hat{P}$  в  $H$ , такие, что

$$\hat{a}(g) = \hat{\varepsilon}(g) * \exp \hat{b}(g).$$

Здесь  $\hat{\varepsilon}(g)$  и  $\hat{b}(g)$  принадлежат  $\ell^1(G)$ , носитель  $\hat{\varepsilon}(g)$  лежит в  $G_0$  и на подгруппе  $G_0 = H \oplus P$  функция  $\hat{\varepsilon}(g)$  имеет вид

$$\hat{\varepsilon}(h + \pi) = \frac{1}{|P|} \sum_{\varphi \in \hat{P}} \overline{\varphi(\pi)} e_{\kappa(\varphi)}(h),$$

где  $e_{\kappa(\varphi)}(h)$  – функция на  $H$ , которая принимает значение 1 при  $h = \kappa(\varphi)$  и 0 при остальных  $h$ .

Теорема 1 может быть применена к исследованию обобщенной обратимости и нетеровости операторов Винера–Хопфа на дискретной почти линейно упорядоченной абелевой группе с кручением точно так же, как теорема ван Кампена используется для исследования этих операторов на линейно упорядоченной группе [2].

Отображение  $\kappa(\varphi)$  не может играть роль топологического индекса  $\hat{a}(g)$ , поскольку оно не определяется единственным образом функцией  $\hat{a}(g)$ . Построим по  $\kappa(\varphi)$  непрерывное отображение  $K(\Phi)$  компактной группы  $\hat{B}$  в дискретную группу  $G/V$  по формуле

$$K(\Phi) = \nu \circ \kappa(\Phi|P).$$

Здесь  $\nu: G \rightarrow G/V$  – канонический гомоморфизм и сужение  $\Phi|P$  характера  $\Phi$  группы  $B$  на подгруппу  $P$  есть, очевидно, характер на  $P$ , причем любой характер  $P$  может быть построен таким образом. Отображение  $K(\Phi)$ , как показывает следующая теорема, играет роль топологического индекса  $\hat{a}(g)$ .

**Теорема 2.** Функция  $K(\Phi)$  однозначно определяется компонентой связности обратимого элемента  $\hat{a}(g)$  групповой алгебры.

В силу известной теоремы Аренса–Ройдена отсюда получаем

**Следствие.** Группа  $H^1(X, Z)$  одномерных целочисленных когомологий несвязной компактной абелевой группы  $X$  изоморфна  $C(X/X_1, G/B)$ .

### Литература

1. Van Kampen E.R. On almost periodic function of constant absolute value // Journal of London Math. Soc. – 1937.– V. 12, № 1. – P. 3–6.
2. Adukov V.M. Wiener–Hopf operators on a subsemigroup of a discrete torsion free abelian group // Integ. Equat. and Oper. Theory. – 1993.– V. 16, № 3. – P. 305–332.

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА РАЗВИТИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ И СПОРТА В РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

С.А. АНТОНОВА<sup>1</sup>, Г.С. ЕВДОКИМОВА<sup>2</sup>

Смоленский государственный университет  
e-mail: antonovasvetlan@mail.ru<sup>1</sup>, kaf-matem@smolgu.ru<sup>2</sup>

УДК 519.237.5

Ключевые слова: *прикладная статистика, развитие физической культуры и спорта, статистические показатели, анализ канонических корреляций.*

*В работе рассмотрен метод анализа канонических корреляций системы статистических показателей, характеризующих развитие физической культуры и спорта в Российской Федерации.*

Изучение закономерностей развития физической культуры и спорта является в настоящее время весьма актуальной проблемой: в центре внимания многих руководителей находится важная задача соизмерения социально-экономического развития с подготовкой высококвалифицированных спортсменов.

В качестве показателей, влияющих на развитие физической культуры и спорта в регионах РФ, были выбраны следующие переменные:  $x_1$  – Спортивные сооружения;  $x_2$  – Население;  $x_3$  – Кадры;  $x_4$  – Численность занимающихся;  $x_5$  – Численность занимающихся в секциях по видам спорта;  $x_6$  – ЕПС;  $x_7$  – Финансирование;  $y_1$  – Массовые разряды;  $y_2$  – Спортивные звания. Обозначим факторные переменные как «Социально-экономические факторы», а результативные – как «Разряды» Практическая реализация метода осуществлялась в математическом пакете Statistica.

Для установления зависимостей между совокупностью факторных и результирующих переменных в данной работе используется метод канонических корреляций. Преимуществом данного анализа является возможность установления корреляционной связи между группами факторов при отсутствии условия необходимости исключения мультиколлинеарности показателей [1].

Представим результаты проведенного статистического анализа. Значение канонической корреляции  $R = 0,9246$  свидетельствует о наличии сильной зависимости между показателями «Социально-экономические факторы» (левое множество) и «Разряды» (правое множество). Статистика  $\chi^2 = 163$  и уровень значимости  $p = 0,001$  показывают значимость данной канонической корреляции. Переменные правого множества объясняют в среднем 65% изменчивости переменных левого множества, а переменные левого множества объясняют в среднем 53% изменчивости переменных правого множества. Таким образом, левое множество более избыточно при заданном правом, чем правое при заданном левом [2].

Проанализируем корреляции внутри и между множествами. Все корреляции между переменными левого множества умеренные, положительные, наибольшая корреляция равна 0,93 между  $x_3$  – Кадрами и  $x_4$  – Численностью населения. Корреляция между переменными правого множества также положительная, умеренная, незначительно больше 0,5.

Анализ переменных левого и правого множества объясняет структуру взаимосвязи между анализируемыми компонентами. Сильная взаимосвязь между «Социально-экономическими факторами» и «Разрядами» является следствием умеренной, близкой к сильной взаимосвязи между такими показателями как:  $x_1$  – Спортивные сооружения (0,64),  $x_3$  – Кадры (0,67),  $x_6$  – ЕПС (0,58) и  $y_1$  – Массовые разряды. Показатель «Спортивные звания» также имеет умеренные взаимосвязи с представленными показателями, но эти взаимосвязи менее выражены, чем взаимосвязь с  $x_2$  – Население (0,77). Следует отдельно выделить высокую взаимосвязь с показателем  $x_7$  – Финансирование (0,89), так как в «Массовых разрядах» она была умеренной.

По результатам проведенного канонического анализа можно сделать следующие выводы: на начальном этапе подготовки юных спортсменов большую роль играет наличие мест проведения тренировок, а также наличие высококвалифицированных специалистов в области физической культуры и спорта. В спорте высших достижений основополагающим фактором развития является финансирование, как бюджетное, так и внебюджетное.

На основе системы статистических показателей, построенной в соответствии с принципами системного анализа и адекватно отражающей состояние и развитие физической культуры и спорта, может быть получена полная и своевременная статистическая информация, которая будет в дальнейшем использована для принятия управленческих решений на уровне региона и его административно-территориальных образований.

### Литература

1. Сошникова Л.А., Тамашевич В.Н. Многомерный статистический анализ в экономике: учебное пособие для вузов. – М.: Юнити-Дана, 1999. – 598 с.
2. Халафян А.А. Statistica 6. Статистический анализ данных. – М.: Бином-Пресс, 2007. – 512 с.

## ТОЖДЕСТВА ГРЕЯ И УПЛОЩАЮЩИЕСЯ 6-МЕРНЫЕ ЭРМИТОВЫ ПОДМНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

М.Б. БАНАРУ, Г.А. БАНАРУ

Смоленский государственный университет  
e-mail: mihail.banaru@yahoo.com

УДК 514.76

Ключевые слова: *почти эрмитова структура, уплощающиеся подмногообразия алгебры октав, тождества Грея, тензор римановой кривизны.*

*Рассматривается вопрос о выполнении тождеств Грея и их конформных аналогов на уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли.*

1. Уплощающиеся 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры октав по своим свойствам очень близки к келеровым подмногообразиям, которые являются их частным случаем [1]. Отметим, однако, что известны примеры отличных от келеровых уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли, причем задача о полной классификации таких подмногообразий в данное время не решена. Келеровы 6-мерные подмногообразия алгебры октав уже давно проклассифицированы В.Ф. Кириченко в работе [2] – одной из самых цитируемых статей по геометрии 6-мерных почти эрмитовых многообразий. В последнее время авторами получен ряд результатов в геометрии 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли (см., например, [3; 4]). В данной заметке рассматриваются вопросы о выполнении тождеств Грея и их конформных аналогов на таких 6-мерных подмногообразиях алгебры октав.

2. Сорок лет назад выдающийся американский геометр Альфред Грей выделил несколько классов (типов) почти эрмитовых многообразий, характеризующихся тождествами [5]:

$$\text{Класс } R1: \langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)JZ, JT \rangle;$$

$$\text{Класс } R2: \langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(JX, JY)Z, JT \rangle + \langle R(JX, Y)JZ, T \rangle + \langle R(JX, Y)Z, JT \rangle;$$

$$\text{Класс } R3: \langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(JX, JY)JZ, JT \rangle.$$

Многообразия класса  $R1$  интенсивно изучались многими математиками, причем обычно под названием паракелеровых многообразий. Позже были введены в рассмотрение различные аналоги классов Грея (конформные, контактные и др.). Например, изучались классы почти эрмитовых многообразий, тензор Вейля конформной кривизны которых удовлетворяет подобным тождествам. В частности, исследовались  $CR1$ -многообразия (или  $C$ -паракелеровы многообразия), то есть почти эрмитовы многообразия, тензор Вейля конформной кривизны которых удовлетворяет тождеству:

$$\langle W(X, Y)Z, T \rangle = \langle W(X, Y)JZ, JT \rangle.$$

(Оно аналогично тождеству, характеризующему  $R1$ -многообразия.)

3. Пусть  $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$  – алгебра Кэли. Как известно [2; 9], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X, Y, Z) = -X(\bar{Y}Z) + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y;$$

$$P_2(X, Y, Z) = -(X\bar{Y})Z + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y.$$

Здесь  $X, Y, Z \in \mathbf{O}$ ;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в  $\mathbf{O}$ ,  $X \rightarrow \bar{X}$  – оператор сопряжения в  $\mathbf{O}$ . При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных.

Пусть  $M^6 \subset \mathbf{O}$  – 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда на нем индуцируется почти эрмитова структура  $\{J_\alpha, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ , определяемая в каждой точке  $p \in M^6$  соотношением:

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

где  $\{e_1, e_2\}$  – произвольный ортонормированный базис нормального к  $M^6$  подпространства в точке  $p$ ,  $X \in T_p(M^6)$  [2]. Подмногообразие  $M^6$  называется эрмитовым, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема [9; 10]. Напомним [2; 9], что точка  $p \in M^6$  называется общей, если  $e_0 \notin T_p(M^6)$ , где  $e_0$  – единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа [9; 10]. Все рассматриваемые далее подмногообразия  $M^6 \subset \mathbf{O}$  подразумеваются подмногообразиями общего типа. 6-мерное подмногообразие  $M^6 \subset \mathbf{O}$  называется уплощающимся, если оно содержится в гиперплоскости алгебры октав.

#### 4. Приведем основные результаты:

1) в терминах спектра тензора римановой кривизны получен критерий принадлежности 6-мерного уплощающегося эрмитова подмногообразия алгебры октав классу  $R1$ -многообразий;

2) в терминах спектра тензора Вейля конформной кривизны получен критерий принадлежности 6-мерного уплощающегося эрмитова подмногообразия алгебры октав классу  $CR1$ -многообразий;

3) доказано, что 6-мерное уплощающееся эрмитово подмногообразие алгебры октав является  $CR1$ -многообразием в том и только том случае, когда оно является многообразием нулевой скалярной кривизны.

В докладе предполагается обсудить данные результаты и их связь с результатами других геометров, полученных в последнее время в обозначенном направлении (например, [11; 12]).

#### Литература

1. Banaru M., Banaru G. About six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Bul. Stin. Univ. Politehnica. – Timisoara. 2001. – Т. 46(60), № 1. – Р. 13–17.

2. Кириченко В.Ф. Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Известия вузов. Математика. –1980. – №8. – С. 32–38.

3. Banaru M.B., Banaru G.A. A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. –2014. – № 1(74). – Р. 23–32.

4. Banaru M.B., Banaru G.A. 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT Journal of Mathematics (Tokyo). – 2015. – V. 51, № 1. – Р. 1–9.

5. Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. – 1976. – V. 28, № 4. – Р. 601–612.

6. Banaru M.B. A note on RK- and CRK-manifolds // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. – 2001. – № 1 (35). – Р. 37–43.

7. Banaru M.B. A note on  $R_2$ - and  $cR_2$ -manifolds // Journal of Harbin Institute of Technology (New Series). – 2002. –V. 9, № 2. – Р. 136–138.

8. Banaru M.B. A note on parakahlerian manifolds // Kyungpook Mathematical Journal. – 2003. – V.43, №1. – Р. 49–61.

9. Банару М.Б. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Математический сборник. – 2002. – Т. 193, №5. – С. 3–16.

10. Banaru M.B. Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Journal of Harbin Institute of Technology (New Series). – 2001. – V. 8, № 1. – Р. 38–40.

11. Di Scala A.J., Vezzoni L. Gray identities, canonical connection and integrability // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2010. –V.53. – Р. 657–674.

12. Bae J., Park J.H., Shin W. Curvature identities on contact manifolds and their applications // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. – 2015. –V. 25, № 3. – Р. 423-435.

# ОБ ОДНОМ СТОЛКНОВЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ШКОЛ

Г.А. БАНАРУ, М.Б. БАНАРУ

Смоленский государственный университет

e-mail: mihail.banaru@yahoo.com

УДК 51.0

Ключевые слова: *геометрия, геометрические методы, метод Картана внешних форм.*

*Рассматривается конфликт между двумя геометрическими школами, имевший место почти пятьдесят лет тому назад.*

1. Столкновения различных мнений, гипотез, подходов, методов и направлений в науке существуют столько же времени, сколько существует сама наука. Разнообразных примеров таких столкновений и конфликтов можно привести сколько угодно – от трагических до комических. Об одном таком столкновении, имевшем место в конце 60-х – начале 70-х годов прошлого века в отечественной геометрии, пойдет речь в данной заметке.

Суть конфликта такова: несколько специалистов в локальной дифференциальной геометрии, представляющих в основном Вильнюс, объявили о том, что многие результаты, полученные представителями другой известной школы, а именно геометрами из Томского государственного университета, являются не вполне корректными. Основными действующими лицами были, с одной стороны, профессора К.И. Гринцевичус и В.Й. Близникас, с другой – заведующий кафедрой геометрии Томского госуниверситета Р.Н. Щербаков.

Конфликт выплеснулся на различных семинарах и других научных форумах, в том числе и на Всесоюзных геометрических конференциях. Более того, этот конфликт был отражен в центральных газетах («Советская Россия», 19.05.1975), в него было вовлечено большое число отечественных геометров.

2. Наиболее активно против методов томской школы выступал молодой профессор из Калининграда В.С. Малаховский, получивший высшее образование и закончивший аспирантуру именно в Томском государственном университете. Не так давно Владислав Степанович Малаховский выпустил небольшую книгу мемуаров [1]. Эта книга вызвала большой интерес в среде геометров на территории бывшего Советского Союза. В этой книге автор делится своими воспоминаниями о своих коллегам-геометрах. Среди прочего, в ней довольно подробно освещен данный конфликт, дана характеристика его участникам (и тем немногочисленным специалистам, которые отказались в нем участвовать). В.С. Малаховский по-прежнему считает свою позицию абсолютно правильной.

3. Авторы в докладе сделают попытку корректно и взвешенно рассказать о данном столкновении двух известных отечественных геометрических школ. Будут приведены мнения Н.В. Степанова, Л.Е. Евтушика, Е.Т. Ивлева и других известных профессоров-геометров о данном предмете. Еще одна цель доклада – проследить последствия (и прямые, и косвенные) данного столкновения.

### Литература

1. Малаховский В.С. Мои воспоминания о геометрах. – Калининград: БФУ, 2013.

## АСИМПТОТИКА РОСТА ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

**Е.В. БАНЮКЕВИЧ**

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

г. Гродно (Беларусь)

e-mail: cheb-alena@mail.ru

УДК 519.6

Ключевые слова: *вейвлет, вейвлет-преобразование, обобщенная функция, пространство Шварца, асимптотика.*

*Объектом исследования являются медленно растущие обобщенные функции, определенные на числовой оси. Целью данной работы является изучение асимптотических свойств вейвлет-преобразования на пространстве медленно растущих обобщенных функций. Доказана теорема об асимптотике роста вейвлет-преобразования.*

Рассмотрим вейвлет-преобразование медленно растущих обобщенных функций. Обозначим  $S$  пространство Шварца – пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих комплекснозначных функций  $f$  на числовой прямой  $\mathbb{R}$ , т.е.

$$S = \left\{ f \in C^\infty : |x^m f^{(k)}(x)| < +\infty \right\},$$

для всех  $k, m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{N}_0$  – множество целых неотрицательных чисел. Пусть  $S'$  – сопряженное пространство, то есть пространство всех медленно растущих обобщенных функций.

Предположим, что вейвлет  $\psi \in S$ . Рассмотрим вейвлет-преобразование обобщенной функции  $f \in S'$ :

$$Wf(a, b) = \left\langle f(x), \psi \left( \frac{x-b}{a} \right) \right\rangle, \quad b \in \mathbb{R}, \quad a > 0. \quad (1)$$

Из определяющего равенства (1) выводим асимптотику роста рассматриваемого вейвлет-преобразования.

**Теорема.** Пусть  $Wf(a, b)$  вейвлет-преобразование функции  $f \in S'$ , определенное равенством (1). Тогда существует такое  $k \in \mathbb{N}_0$ , что

$$Wf(a, b) = O(a^{-2k} |b|^k), \text{ при } a \rightarrow 0;$$

$$Wf(a, b) = O(a^{-2k} (1+a^2)^k |b|^k), \text{ при } |b| \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Пользуясь равенством Парсеваля,  $Wf(a, b)$  можно представить в следующем виде:

$$Wf(a, b) = \left\langle f(x), \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle = 2\pi \left\langle \hat{f}(\omega), e^{i\omega b} \hat{\psi}(a\omega) \right\rangle.$$

Воспользуемся следующей известной теоремой.

Для каждой медленно растущей обобщенной функции  $f \in S'$  существует постоянная  $C$  и число  $k \in \mathbb{N}_0$ , такое, что для любой функции  $\psi \in S$  выполняется неравенство

$$|\langle f, \psi \rangle| \leq C \sup_t |(1+t^2)^k \psi^{(k)}(t)|,$$

где  $0 < C < \infty$  и  $k$  зависят от  $f$ .

Следовательно, существует константа  $C > 0$  и число  $k \in \mathbb{N}_0$ , зависящее от  $f$ , такое, что

$$|Wf(a, b)| \leq C \sup_{\omega} |(1+\omega^2)^k \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} (e^{i\omega b} \overline{\hat{\psi}(a\omega)})|.$$

Применяется формула Лейбница, и получается следующее выражение:

$$C \sup_{\omega} \left| (1+\omega^2)^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} (e^{i\omega b})^{(k-s)} \frac{\partial^s}{\partial \omega^s} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \right| = C \sup_{\omega} \left| (1+\omega^2)^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} (ib)^{k-s} e^{i\omega b} \frac{\partial^s}{\partial \omega^s} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \right|.$$

С использованием замены  $z = a\omega$  последнее выражение примет вид:

$$C \sup_z \left| (a^2 + z^2)^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} b^{k-s} a^{s-2k} \frac{\partial^s}{\partial z^s} \overline{\hat{\psi}(z)} \right|.$$

Применяется формула бинорма Ньютона, и получается следующее:

$$C \sup_z \left| \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^k \binom{k}{s} \binom{k}{r} b^{k-s} a^{s-2k+2k-2r} z^{2r} \frac{\partial^s}{\partial z^s} \overline{\hat{\psi}(z)} \right| = C \sup_z \left| \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^k \binom{k}{s} \binom{k}{r} b^{k-s} z^{2r} \frac{\partial^s}{\partial z^s} \overline{\hat{\psi}(z)} \right| a^{s-2r}.$$

Вводится обозначение  $\gamma_{2r,s}(\hat{\psi}(z)) = \sup_z \left| z^{2r} \frac{\partial^s}{\partial z^s} \hat{\psi}(z) \right|$ , и имеем:

$$C \sup_z \left| \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^k \binom{k}{s} \binom{k}{r} b^{k-s} z^{2r} \frac{\partial^s}{\partial z^s} \overline{\hat{\psi}(z)} \right| a^{s-2r} \leq C \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^k \binom{k}{s} \binom{k}{r} b^{k-s} \gamma_{2r,s}(\hat{\psi}(z)) a^{s-2r} \leq$$

$$\leq C' \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a^{-2r} (a+|b|)^k = C' (1+a^{-2})^k (a+|b|)^k.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы.

# ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРА КОНТАКТА СЛОЕВ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

С.Н. БЕШЕНКОВ<sup>1</sup>, И.С. БЕРЕЗНЯК<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Смоленский филиал МИИТ, <sup>2</sup>Смоленский филиал «РЭУ им. Г.В. Плеханова»  
e-mail: <sup>1</sup>bsn0309@yandex.ru, e-mail: <sup>2</sup>bis1605@mail.ru

УДК 534.1: 539.3

Ключевые слова: *трехслойная пластина, условия контакта слоев, уравнения колебаний, собственные частоты.*

*Получены дифференциальные уравнения одномерных (осесимметричных и по формам цилиндрического изгиба) колебаний трехслойных пластин со скользящим, т.е. исключаяющим только отрыв, контактом слоев. Исследовано отличие их собственных частот колебаний от частот колебаний таких же пластин с жестким, исключаяющим как отрыв, так и проскальзывание контактом слоев.*

Исследованию динамики трехслойных конструкций с непрерывным (жестким) контактом слоев, исключаяющим их отрыв и проскальзывание, посвящено значительное число работ (см., например, обзоры в [1; 2]). Однако он может быть и скользящим, когда исключается только отрыв.

Применительно к задачам распространения свободных волн в трехслойных цилиндрических оболочках и действия на них подвижных нагрузок оба вида контакта рассмотрены в монографии [1]. В данной работе выводятся соответствующие скользящему контакту дифференциальные уравнения одномерных (осесимметричных и по формам цилиндрического изгиба) колебаний трехслойных пластин и исследуется отличие их собственных (резонансных) частот колебаний от частот колебаний таких же пластин с жестким контактом слоев.

Воспользуемся приведенными в [3] уравнениями осесимметричных колебаний однородного слоя при действии на него системы касательных  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и нормальных  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  нагрузок, полученными с привлечением широко используемых гипотез о линейном распределении тангенциальных (радиальных) перемещений по его толщине и несжимаемости в поперечном направлении.

$$\begin{aligned} 2Eh \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + (\tau_2 - \tau_1) &= 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ 2Gh \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r} \right) + (\sigma_2 - \sigma_1) &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ -\frac{2}{3} Eh^3 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r^2} \right) + h(\tau_1 + \tau_2) - 2Gh \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) &= -\frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u(r, t)$  – тангенциальное (радиальное) перемещение в его срединной плоскости;  $\varphi(r, t)$  – функция, определяющая поворот кольцевых сечений;  $w(r, t)$  – поперечное перемещение;  $E = \frac{E'}{1-\nu^2}$ ;  $E'$ ,  $G$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  – упругие константы и плотность материала;  $2h$  – толщина;  $r, z$  – цилиндрические координаты;  $t$  – время.

Выражение для нагрузки  $\sigma_1$ , как это следует из уравнения колебаний тонких пластин, содержащего инерцию вращения поперечных сечений, имеет вид

$$\sigma_1 = \frac{E_1 \delta_1^3}{12} \nabla^2 \nabla^2 w_1 - \frac{\rho_1 \delta_1^3}{12} \nabla^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \rho_1 \delta_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - q_1, \quad (2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}; E_1 = \frac{E'_1}{1-\nu_1^2},$$

а выражение для  $\sigma_2$  получается из (2) заменой  $E_1, \nu_1, \rho_1, \delta_1, q_1$  на  $E_2, \nu_2, \rho_2, -\delta_2, q_2$ .

Здесь  $E'_i$ ,  $\nu_i, \rho_i, \delta_i$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала и толщина верхней ( $i = 1$ ) и нижней ( $i = 2$ ) обшивок;  $q_1, q_2$  – действующие на них нормальные нагрузки.

Подставив разность  $(\sigma_2 - \sigma_1)$  во второе из уравнений (1) и учтя, что при рассматриваемом контакте слоев  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ , приходим к системе дифференциальных уравнений

$$E \frac{\partial}{\partial r} Du - \rho \ddot{u} = 0;$$

$$a_1 \nabla^2 \nabla^2 w - a_2 \nabla^2 \ddot{w} + a_3 \ddot{w} - a_4 \nabla^2 w + a_4 D \varphi = q_1 - q_2;$$

$$a_4 \frac{\partial w}{\partial r} + a_5 \frac{\partial}{\partial r} D \varphi - a_4 \varphi - a_6 \ddot{\varphi} = 0, \quad (3)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{12} (E_1 \delta_1^3 + E_2 \delta_2^3); a_2 = \frac{1}{12} (\rho_1 \delta_1^3 + \rho_2 \delta_2^3); a_3 = (\rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2 + 2\rho h);$$

$$a_4 = 2Gh; a_5 = \frac{2Eh^3}{3}; a_6 = \frac{2}{3} \rho h^3; D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}. \quad (4)$$

Первое из уравнений (3) описывает радиальные колебания заполнителя, а вторые два – совместные поперечные колебания слоев.

Заменяя в (3) дифференциальные операторы на соответствующие производные по координате  $x$ , приходим к уравнениям колебаний пластины-полосы.

Воспользуемся последними и приведенными в [3] уравнениями для анализа влияния характера контакта слоев на собственные частоты её поперечных колебаний при свободном опирании краев.

Опуская общий для всех перемещений временной множитель  $\exp(-i\omega t)$ , решение указанных уравнений будем искать в виде

$$w = w_k \sin \alpha_k x; \varphi = \varphi_k \cos \alpha_k x; \alpha_k = \frac{k\pi}{l}; k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

удовлетворяющем указанным краевым условиям.

Подстановка выражений (5) в соответствующие уравнения колебаний приводит к частотным уравнениям:

а) скользящий контакт слоев

$$\begin{vmatrix} \omega^2(-a_2\alpha_k^2 - a_3) + a_1\alpha_k^4 + a_4\alpha_k^2 & -a_4\alpha_k \\ a_4\alpha_k & a_6\omega^2 - a_5\alpha_k^2 - a_4 \end{vmatrix} = 0; \quad (6)$$

б) жесткий контакт (при  $\delta_1 = \delta_2, \rho_1 = \rho_2, E_1 = E_2$ )

$$\begin{vmatrix} \omega^2 b_2 \alpha_k + b_1 \alpha_k^3 - b_3 \alpha_k & \omega^2 b_5 + b_4 \alpha_k^2 + b_3 \\ \omega^2 (c_2 \alpha_k^2 - a_6) + c_1 \alpha_k^4 + b_3 \alpha_k^2 & \omega^2 b_2 \alpha_k + b_1 \alpha_k^3 - b_3 \alpha_k \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Коэффициенты, входящие в последнее уравнение, вычисляются по формулам [3]

$$b_1 = -hE_1\delta_1^2; b_2 = h\rho_1\delta_1^2; b_3 = -2Gh; b_4 = -\frac{2}{3}Eh^3 - 2h^2E_1\delta_1;$$

$$b_5 = \frac{2}{3}\rho h^3 + 2h^2\rho_1\delta_1;$$

$$c_1 = -\frac{2}{3}E_1\delta_1^3; c_2 = \frac{2}{3}\rho_1\delta_1^3; a_6 = -2\rho h - 2\rho_1\delta_1.$$

В таблице 1 приведены результаты расчета двух первых (с образованием одной и двух полуволн) частот колебаний пластины-полосы шириной  $l = 0,5$  м с алюминиевыми обшивками толщиной  $\delta_1 = \delta_2 = 3 \cdot 10^{-3}$  м и заполнителем с параметрами  $E' = 5 \cdot 10^7 \text{ Нм}^{-2}$ ;  $G = 1,8 \cdot 10^7 \text{ Нм}^{-2}$ ;  $\nu = 0,4$ ;  $\rho = 3 \cdot 10^2 \text{ кгм}^{-3}$ ;  $h = 10^{-2}$  м, а также ряда пластин с каким-то отличным параметром (конструкция 1 и последующие). Значения измененного параметра приведены во второй колонке. Видно, что при непрерывном контакте слоев собственные частоты колебаний лежат значительно выше, чем при скользящем. Это расхождение заметно увеличивается при увеличении жесткости заполнителя и уменьшении толщины обшивок. Значительно меньшее влияние на соотношение частот оказывает изменение толщины и плотности заполнителя.

Таблица 1

Конструкция	Значение изменяемого параметра	Жесткий контакт		Скользящий контакт	
		$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$
1	-	856	1904	166	661
2	$E = 11,9 \cdot 10^7; G = 3,6 \cdot 10^7$	1115	2562	173	694
3	$h = 1,5 \cdot 10^{-2}$	963	2077	173	688
4	$\delta_1 = \delta_2 = 2 \cdot 10^{-3}$	895	1992	115	460
5	$\rho = 4,5 \cdot 10^2$	804	1787	155	621

Отметим также, что увеличение несимметрии строения пластин при постоянной суммарной толщине обшивок сопровождается ростом собственных частот как при жестком, так и при скользящем контакте слоев. Например, во втором случае у конструкции 1 при толщине обшивок  $\delta_1 = 10^{-3}\text{м}$ ,  $\delta_2 = 5 \cdot 10^{-3}\text{м}$  частоты колебаний возрастают до значений  $\omega_1 = 245\text{с}^{-1}$  и  $\omega_2 = 981\text{с}^{-1}$ .

### Литература

1. Горшков А.Г., Пожуев В.И. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1992. – 224 с.
2. Старовойтов Э.И. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
3. Бешенков С.Н., Березняк И.С. Уравнения колебаний трехслойных пластин при совместном действии нормальных и касательных нагрузок // Современные проблемы науки 2011: сборник статей международной научно-практической конференции. – Смоленск: Принт-Экспресс, 2011. – С. 13–16.

## МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ИНТЕГРАЛАМ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СПЛАЙНАХ

Т.К. БИРЮКОВА<sup>1</sup>, В.И. КИРЕЕВ<sup>2</sup>, М.М. ГЕРШКОВИЧ<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, <sup>2</sup>НИТУ МИСиС, г. Москва  
e-mail: <sup>1</sup>yukonta@mail.ru, <sup>2</sup>Vladimir-Kireyev@mail.ru, <sup>3</sup>makmg@mail.ru

УДК 519.65

Ключевые слова: *численное дифференцирование, сплайн, сплайн-метод, интегродифференциальный, численное интегрирование, сеточная функция.*

*В докладе предложены новые методы численного дифференцирования и восстановления значений функции по интегралам на нерегулярном шаблоне, основанные на применении интегродифференциальных сплайнов.*

В развитие исследований по построению квадратурных формул на нерегулярной сетке (шаблоне), основанных на интегродифференциальных сплайнах (ИД-сплайнах) (рассмотренных в докладах авторов на конференциях СКМП-2011 [1] и СКМП-2014 [2]), в данной работе предлагаются новые методы численного дифференцирования и восстановления значений функции по интегралам на нерегулярном шаблоне. Особенностью формул, полученных с помощью ИД-сплайнов, является использование интегралов в составе

базовых функций для дифференциальных и функциональных операторов. В докладе приводятся как явные, так и неявные методики численного дифференцирования и восстановления сеточных функций по значениям определенных интегралов.

**Обобщенная постановка задачи численного дифференцирования.**

Пусть на отрезке  $[a, b]$  в общем случае на неравномерной сетке

$$\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$$

заданы: а) базовые функции в виде значений  $f_i = f(x_i)$  в узлах сетки и

(или) значений определенных интегралов  $I_i^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$  на частичных

отрезках  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;

б) точки  $x_j$  сетки  $\Delta_n$ , в которых требуется найти значения производных;

в) желаемый порядок  $t$  точности (аппроксимации) относительно величины шага.

Требуется получить оператор  $\hat{f}^{(p)}$ , аппроксимирующий  $f^{(p)}(x)$  в точках сетки  $\Delta_n$  с порядком точности не ниже  $t$ , и вычислить (если необходимо) значения  $\hat{f}^{(p)}(x_j)$ ,  $x_j \in \Delta_n$  ( $p = 1, 2, \dots$  – порядок производной).

Функциональную зависимость для явного дифференциального оператора порядка  $p$  в произвольной точке некоторого шаблона  $\Pi_{\gamma, i} = (x_{i-k_1}, \dots, x_i, \dots, x_{i+k_2})$  применительно к функции одной переменной можно записать общей формулой:

$$\hat{f}_{i \pm s}^{(p)} = \hat{f}_{i \pm s}^{(p)}(f_{i-k_1}, \dots, f_i, \dots, f_{i+k_2}). \quad (1)$$

Здесь  $\gamma = k_2 + k_1 + 1$  равно количеству точек, составляющих аппроксимационный шаблон  $\Pi_{\gamma, i}$ , на котором строится формула аппроксимации производной  $p$ -го порядка ( $k_1 \leq s \leq k_2$ ), нижние индексы  $i \pm s$  в обозначении оператора (1) указывают номера узлов сетки, для которых записан оператор.

В данной работе рассматриваются возможности построения операторов численного дифференцирования с помощью ИД-сплайнов, предложенных авторами в [3] и исследованных в [4; 5; 6] и др.

**ИД-сплайн**  $S_{r, \text{ИД}}(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{r, \text{ИД}, i}(x)$  степени  $r$  представляет собой

объединение интегродифференциальных алгебраических многочленов (ИД-

многочленов)  $S_{rИД,i}(x)$ , коэффициенты которых получаются на основе совокупности:

– интегрального условия согласования:

$$\delta S_{rИД,i}^{(-1)}(x_i, x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S_{rИД,i}(x) - f(x)] dx = 0;$$

– дифференциальных условий согласования:

$$\delta S_{rИД,i}^{(p_1)}(x_k) = S_{rИД,i}^{(p_1)}(x_k) - f^{(p_1)}(x_k) = 0 \quad (k = i, i+1)$$

(где  $p_1$  – порядки производных, принимающие целые значения из промежутка  $0 \leq p_1 \leq \mu$  ( $\mu$  – наибольший порядок производной  $S_{rИД}^{(\mu)}(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ ));

– условий стыковки для внутренних узлов  $x_i$  сетки  $\Delta_n$ :

$$S_{rИД,i-1}^{(p_2)}(x) \Big|_{x=x_i} = S_{rИД,i}^{(p_2)}(x) \Big|_{x=x_i}$$

(где  $p_2$  – порядки производных, принимающие целые значения из промежутка  $0 \leq p_2 \leq \mu$ ), при этом для построения сплайна дефекта  $q = r - \mu$  условия согласования и стыковки надо выбирать так, чтобы  $\{p_1\} \cap \{p_2\} = \emptyset$  и  $\{p_1\} \cup \{p_2\} = \{0, 1, 2, \dots, \mu\}$ .

Формулы численного дифференцирования и восстановления значений функции в узлах сетки по значениям определенных интегралов, предлагаемые в данном докладе, получены из условий согласования и стыковки ИД-сплайнов [4; 6].

### **Явные формулы численного дифференцирования, полученные на основе ИД-сплайнов.**

**А. Двухточечный шаблон.** Из анализа параболических локальных ИД-сплайнов [3] получают *интегрально-функциональные* аппроксимационные формулы для первых производных на двухточечном шаблоне  $Ш_{2,i} = (x_{i-1}, x_i)$ :

$$\hat{f}'_{i-1} = \frac{6}{h_i^2} I_{i-1}^i - \frac{2}{h_i} (2f_{i-1} + f_i), \quad \hat{f}'_i = \frac{2}{h_i} (f_{i-1} + 2f_i) - \frac{6}{h_i^2} I_{i-1}^i, \quad (2)$$

где  $h_i = x_i - x_{i-1}$ .

Формулы (2), основанные на функциональных и интегральных базовых функциях, в силу их одноинтервального характера справедливы для нерегулярной сетки при  $h_i = \text{var}$ , если значение интеграла  $I_{i-1}^i$  и значения функции  $f_{i-1}$ ,  $f_i$  либо известны, либо заранее вычислены с точностью не ниже  $O(h_i^4)$  и  $O(h_i^3)$  соответственно. При выполнении указанных условий для операторов  $\hat{f}'_{i-1}$ ,  $\hat{f}'_i$  верны оценки:

$$|\hat{f}'_k - f'_k| \leq \frac{h_i^2}{12} M_{3,i}, \quad k = i-1, i$$

(здесь и далее  $M_{p,i} = \max_{x \in \Pi_{\gamma,i}} |f^{(p)}(x)|$ ,  $\gamma$  – число точек шаблона).

**Б. Трехточечный шаблон.** Из анализа локальных кубических ИД-сплайнов на нерегулярном трехточечном шаблоне  $\Pi_{3,i} = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$  авторами получены следующие *интегрально-функциональные* формулы:  
– для левой, центральной и правой точек вышеуказанного *нерегулярного шаблона* аппроксимационные операторы для *производной первого порядка* имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{f}'_{i-1,v} &= \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[ 4 \left( \frac{h_i}{h_{i+1}^2} I_i^{i+1} + \frac{(2H_i^{i+1} + h_i)}{h_i^2} I_{i-1}^i \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{h_i}{h_{i+1}} f_{i+1} + \frac{3(H_i^{i+1})^2}{h_i h_{i+1}} f_i + \frac{5H_i^{i+1} + h_i}{h_i} f_{i-1} \right) \right], \\ \hat{f}'_{i,v} &= \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[ 4 \left( \frac{h_i}{h_{i+1}^2} I_i^{i+1} - \frac{h_{i+1}}{h_i^2} I_{i-1}^i \right) - \left( \frac{h_i}{h_{i+1}} f_{i+1} + \frac{3(h_i^2 - h_{i+1}^2)}{h_i h_{i+1}} f_i - \frac{h_{i+1}}{h_i} f_{i-1} \right) \right], \\ \hat{f}'_{i+1,v} &= \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[ -4 \left( \frac{(2H_i^{i+1} + h_{i+1})}{h_{i+1}^2} I_i^{i+1} + \frac{h_{i+1}}{h_i^2} I_{i-1}^i \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{5H_i^{i+1} + h_{i+1}}{h_{i+1}} f_{i+1} + \frac{3(H_i^{i+1})^2}{h_i h_{i+1}} f_i + \frac{h_{i+1}}{h_i} f_{i-1} \right) \right] \end{aligned}$$

(здесь и далее  $H_{\alpha i}^{\beta(i+1)} = \alpha h_i + \beta h_{i+1}$ );

– для левой, центральной и правой точек *регулярного шаблона* ( $h = \text{const}$ ) эти операторы принимают более простую форму:

$$\begin{aligned} \hat{f}'_{i-1,c} &= \frac{1}{2h} \left[ \frac{4}{h} (I_i^{i+1} + 5I_{i-1}^i) - (f_{i+1} + 12f_i + 11f_{i-1}) \right] \quad \left( \frac{h^3}{60} M_{4,i} \right); \\ \hat{f}'_{i,c} &= \frac{1}{2h} \left[ \frac{4}{h} (I_i^{i+1} - I_{i-1}^i) - (f_{i+1} - f_{i-1}) \right] = \frac{1}{2h} \left[ \frac{4}{h} \Delta I_i^{i+1} - (\Delta f_i + \Delta f_{i-1}) \right] \quad \left( \frac{h^4}{360} M_{5,i} \right); \\ \hat{f}'_{i+1,c} &= \frac{1}{2h} \left[ -\frac{4}{h} (5I_i^{i+1} + I_{i-1}^i) + (11f_{i+1} + 12f_i + f_{i-1}) \right] \quad \left( \frac{h^3}{60} M_{4,i} \right); \end{aligned}$$

– для левой, центральной и правой точек *нерегулярного шаблона* аппроксимационные операторы для *производной второго порядка* имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{i-1,v}'' &= \frac{6}{H_i^{i+1}} \left[ -4 \left( \frac{1}{h_{i+1}^2} I_i^{i+1} + \frac{H_{2i}^{i+1}}{h_i^3} I_{i-1}^i \right) + \frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} + \right. \\ &+ \left. \frac{H_i^{i+1} (2H_i^{i+1} + h_i)}{h_i^2 h_{i+1}} f_i + \frac{2H_i^{i+1} + h_i}{h_i^2} f_{i-1} \right], \\ \hat{f}_{i,v}'' &= \frac{6}{H_i^{i+1}} \left[ 4 \left( \frac{1}{h_{i+1}^2} I_i^{i+1} + \frac{1}{h_i^2} I_{i-1}^i \right) - \left( \frac{f_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{3H_i^{i+1}}{h_{i+1} h_i} f_i + \frac{f_{i-1}}{h_i} \right) \right], \\ \hat{f}_{i+1,v}'' &= \frac{6}{H_i^{i+1}} \left[ -4 \left( \frac{H_i^{2(i+1)}}{h_{i+1}^3} I_i^{i+1} + \frac{1}{h_i^2} I_{i-1}^i \right) + \frac{2H_i^{i+1} + h_{i+1}}{h_{i+1}^2} f_{i+1} + \right. \\ &+ \left. \frac{H_i^{i+1} (2H_i^{i+1} + h_{i+1})}{h_i h_{i+1}^2} f_i + \frac{f_{i-1}}{h_i} \right];\end{aligned}$$

– для левой, центральной и правой точек регулярного шаблона эти операторы принимают форму:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{i-1,c}'' &= \frac{3}{h^2} \left[ -\frac{4}{h} (I_i^{i+1} + 3I_{i-1}^i) + (f_{i+1} + 10f_i + 5f_{i-1}) \right] && \left( \frac{7}{20} h^2 M_{4,i} \right), \\ \hat{f}_{i,c}'' &= \frac{3}{h^2} \left[ \frac{4}{h} (I_i^{i+1} + I_{i-1}^i) - (f_{i+1} + 6f_i + f_{i-1}) \right] && \left( \frac{1}{20} h^2 M_{4,i} \right), \\ \hat{f}_{i+1,c}'' &= \frac{3}{h^2} \left[ -\frac{4}{h} (3I_i^{i+1} + I_{i-1}^i) + (5f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1}) \right] && \left( \frac{7}{20} h^2 M_{4,i} \right).\end{aligned}$$

В скобках справа от аппроксимационных операторов здесь и далее указываются правые части оценок их погрешностей.

Заметим, что формула для  $\hat{f}'_{i,c}$ , имеющая симметричный вид относительно центральной точки  $x_i$  и содержащая интегральные и функциональные разности, обеспечивает (по сравнению с крайними точками  $x_{i-1}, x_{i+1}$ ) повышенный (четвертый) порядок аппроксимации. Если интегралы для исследуемой функции неизвестны, они должны быть предварительно рассчитаны с порядком, по крайней мере на два превышающим порядок аппроксимации дифференциальных операторов.

В вычислительной практике могут оказаться полезными еще два аппроксимационных оператора  $\hat{f}''_{\mathcal{L}(\Pi),v}$ ,  $\hat{f}''_{i,c}$ :

$$\hat{f}''_{\mathcal{L}(\Pi),v} = \frac{6}{h_{i+1}^2} (f_i + f_{i+1}) - \frac{12}{h_{i+1}^3} I_i^{i+1} \quad \left( \frac{h_{i+1}}{2} M_{3,i} \right), \quad (3)$$

$$\hat{f}''_{i,c} = \frac{3}{2h^2} (f_{i-1} + f_{i+1}) - \frac{3}{2h} I_{i-1}^{i+1} \quad \left( \frac{h^2}{10} M_{4,i} \right). \quad (4)$$

В формулах (3), (4)  $\hat{f}''_{I(I),v}$  – лево- или правосторонний оператор (при  $h = \text{var}$ ), записанный на двухточечных шаблонах, а  $\hat{f}'_{i,c}$  – центральный оператор, записанный на трехточечном шаблоне (при  $h = \text{const}$ ).

**В. Четырехточечный шаблон.** Приведем интегральные и рекуррентные формулы, аппроксимирующие первую производную с порядком  $h^3$  на четырехточечном шаблоне  $III_{4,i+1} = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ , полученные путем анализа кубических ИД-сплайнов [3; 4; 5].

$$\hat{f}'_i = \frac{2}{A} \left\{ \frac{h_i^2 - h_{i+1}^2}{h_{i+2}} I_{i+1}^{i+2} + \frac{3h_{i+1}H_{i+1}^{i+2} + (h_{i+2}^2 - h_i^2)}{h_{i+1}} I_i^{i+1} - \frac{H_{i+1}^{i+2}H_{2(i+1)}^{i+2}}{h_i} I_{i-1}^i \right\},$$

$$\hat{f}'_{i+1} = \frac{2}{A} \left\{ \frac{H_i^{i+1}H_i^{2(i+1)}}{h_{i+2}} I_{i+1}^{i+2} - \frac{3h_{i+1}H_i^{i+1} + (h_i^2 - h_{i+2}^2)}{h_{i+1}} I_i^{i+1} + \frac{h_{i+1}^2 - h_{i+2}^2}{h_i} I_{i-1}^i \right\},$$

$$\hat{f}'_{i-1} = \frac{H_i^{i+1}}{h_{i+1}} \hat{f}'_i - \frac{h_i}{h_{i+1}} \hat{f}'_{i+1}; \quad \hat{f}'_{i+2} = \frac{H_{i+1}^{i+2}}{h_{i+1}} \hat{f}'_{i+1} - \frac{h_{i+2}}{h_{i+1}} \hat{f}'_i,$$

где

$$A = h_{i+1}^2(2h_i + h_{i+1} + 2h_{i+2}) + h_{i+1}(h_i^2 + h_{i+2}^2) + h_i h_{i+2}(h_i + 3h_{i+1} + h_{i+2}).$$

На четырехточечном регулярном шаблоне получаются явные трехинтервальные аппроксимации *интегрального типа*:

$$\hat{f}'_{i-2,c} = \frac{1}{h^2} (-I_i^{i+1} + 3I_{i-1}^i - 2I_{i-2}^{i-1}), \quad \hat{f}'_{i-1,c} = \frac{1}{h^2} (I_{i-1}^i - I_{i-2}^{i-1}),$$

$$\hat{f}'_{i-1,c} = \frac{1}{h^2} (I_{i-1}^i - I_{i-2}^{i-1}), \quad \hat{f}'_{i+1,c} = \frac{1}{h^2} (2I_i^{i+1} - 3I_{i-1}^i + I_{i-2}^{i-1}).$$

Для нерегулярного шаблона интегральная формула, аппроксимирующая  $\hat{f}'_{i,c}$ , имеет вид:

$$\hat{f}'_{i,v} = \frac{2}{H_i^{i+1}} \left( \frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{I_{i-1}^i}{h_i} \right).$$

### Неявный алгоритм численного дифференцирования.

Из условий согласования и стыковки ИД-сплайнов получается следующий неявный алгоритм вычисления производных первого порядка (со вторым порядком аппроксимации) по значениям интегралов путем решения трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом прогонки.

$$h_i \hat{f}'_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) \hat{f}'_i + h_{i+1} \hat{f}'_{i+1} = 6 \left( \frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{I_{i-1}^i}{h_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Замыкающие систему граничные соотношения можно сформировать из приведенных выше явных формул.

### Методы восстановления значений функции по значениям интегралов.

С использованием принципа подобия дифференциальных и интегральных операторов, рассмотренного в [4, 5], получены явные операторы восстановления функции  $y = f(x)$  в различных точках трехточечного и четырехточечного шаблонов (при  $h = const$ ) по значениям интегралов:

$$\hat{f}_{i-1,c} = \frac{1}{2h}(3I_{i-1}^i - I_i^{i+1}), \quad \hat{f}_{i,c} = \frac{1}{2h}(I_i^{i+1} + I_{i-1}^i), \quad (5)$$

$$\hat{f}_{i-2,c} = \frac{1}{6h}(11I_{i-2}^{i-1} - 7I_{i-1}^i + 2I_i^{i+1}), \quad \hat{f}_{i-1,c} = \frac{1}{6h}(2I_{i-2}^{i-1} + 5I_{i-1}^i - I_i^{i+1}), \quad (6)$$

$$\hat{f}_{i,c} = \frac{1}{6h}(-I_{i-2}^{i-1} + 5I_{i-1}^i + 2I_i^{i+1}), \quad \hat{f}_{i+1,c} = \frac{1}{6h}(2I_{i-2}^{i-1} - 7I_{i-1}^i + 11I_i^{i+1}). \quad (7)$$

Формулы (5) имеют второй порядок аппроксимации по  $h$  (записаны на трехточечном шаблоне), а (6)–(7) – третий порядок (записаны на четырехточечном шаблоне).

Предлагается также неявный метод восстановления значений функции по значениям определенных интегралов (с третьим порядком аппроксимации) путем решения СЛАУ:

$$\frac{1}{h_i} \hat{f}_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) \hat{f}_i + \frac{1}{h_{i+1}} \hat{f}_{i+1} = 3\left(\frac{I_{i-1}^i}{h_i^2} + \frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2}\right) \\ (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Замыкающие систему граничные соотношения можно при  $h = const$  сформировать из формул (6), (7), а при  $h = var$  – из формул, получающихся из квадратурной формулы парабол (Симпсона):

$$\hat{f}_0 + \frac{H_1^2}{h_2} \hat{f}_1 = \frac{h_1^2}{H_1^2} \left( \frac{2H_1^2 + h_1}{h_1^3} I_0^1 + \frac{1}{h_2^2} I_1^2 \right) \quad (i = 0),$$

$$\frac{H_{n-1}^n}{h_{n-1}} \hat{f}_{n-1} + \hat{f}_n = \frac{h_n^2}{H_{n-1}^n} \left( \frac{1}{h_{n-1}^2} I_{n-2}^{n-1} + \frac{2H_{n-1}^n + h_n}{h_n^3} I_{n-1}^n \right) \quad (i = n).$$

### Литература

1. Интегродифференциальные сплайны и их применение в прикладных задачах анализа данных в территориально-распределенных информационных системах / Т.К. Бирюкова, В.И. Киреев, М.М. Гершкович, В.И. Сеницын // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XII международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во. СмолГУ, 2011. – Вып. 12. – С. 82–84.

2. Бирюкова Т.К., Гершкович М.М., Киреев В.И. Многошаговые дискретные схемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений на нерегулярном

шаблоне. // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIV международной научной конференции, посвященной 90-летию профессора М.Б. Балка. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – Вып.14. – С. 122–127.

3. Киреев В.И. Интегродифференциальные явные подобные сплайны и их приложения к численному дифференцированию и интегрированию // Деп. ВИНТИ. – 1993. – № 1673- В93. – 37 с.

4. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 2008. – 480 с.

5. Киреев В.И., Гершкович М.М., Бирюкова Т.К. Об аппроксимации и сходимости одномерных параболических интегродифференциальных многочленов и сплайнов // Информатика и ее применения. – 2014. – Т. 8, вып. 1. – С. 118–126.

6. Киреев В.И., Бирюкова Т.К. Интегродифференциальный метод обработки информации и его применение в численном анализе. – М.: ИПИ РАН, 2014. – 267 с.

## **ЗАДАЧА ТИПА КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

**Н.Н. БОГДАНОВА**

Смоленский государственный университет  
e-mail: nadingioia@yandex.ru

УДК 517.968.23

*Ключевые слова: аналитическая функция, бианалитическая функция, четырёхэлементная задача типа задачи Карлемана, интегральное уравнение типа Фредгольма.*

*В сообщении рассматривается одна из основных четырёхэлементных краевых задач типа задачи Карлемана в классах кусочно бианалитических функций. Получены условия разрешимости и конструктивный алгоритм решения исследуемой задачи в случае, когда линия скачков искомым кусочно бианалитических функций ограничивает произвольную область.*

Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область, ограниченная простым замкнутым гладким контуром  $L$ ,  $T^-$  – область, дополняющая  $T^+ \cup L$  до полной комплексной плоскости. Для определённости предположим, что начало координат принадлежит  $T^+$ . Рассматривается следующая краевая задача: *требуется найти все кусочно бианалитические функции  $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$  класса  $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$ , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на линии скачков  $L$  следующим граничным условиям:*

$$A_{11}(t) \frac{\overline{\partial F^+(t)}}{\partial x} + A_{12}(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t) \frac{\overline{\partial F^-(t)}}{\partial x} + G_{12}(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial x} + g_1(t), \quad (1)$$

$$A_{21}(t) \frac{\overline{\partial F^+(t)}}{\partial y} - A_{22}(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} = G_{21}(t) \frac{\overline{\partial F^-(t)}}{\partial y} - G_{22}(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial y} - i g_2(t), \quad (2)$$

где  $A_{kj}(t), G_{kj}(t), g_k(t)$  – заданные на  $L$  комплекснозначные функции, причём  $L \in C_\mu^3$ ,  $A_{kj}(t), G_{kj}(t) \in H^{(3-k)}(L)$ ,  $g_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$  ( $k = 1, 2; j = 1, 2$ );  $\alpha(t)$  – прямой сдвиг контура  $L$ , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \quad (3)$$

при этом  $\alpha'(t) \neq 0$ ,  $\alpha'(t) \in H(L)$ .

Сформулированную задачу будем называть *первой основной четырёхэлементной краевой задачей типа задачи Карлемана в классах бианалитических функций*, или, короче, *задачей  $K_{41}$* .

Кроме того, в дальнейших рассуждениях без ограничения общности будем считать, что выполняется следующее *начальное условие*

$$F^+(0) = 0. \quad (4)$$

При выполнении следующих условий

$$\Delta(t) \neq 0, \Delta_1(t) \neq 0, \Delta_2(t) \neq 0, V(t) \neq 0, \quad (5)$$

где

$$\Delta(t) = A_{11}(t) \overline{G_{11}[\alpha(t)]} - \overline{A_{12}[\alpha(t)]} G_{12}(t), \quad (5a)$$

$$\Delta_1(t) = A_{11}(t) \overline{A_{11}[\alpha(t)]} - \overline{A_{12}[\alpha(t)]} A_{12}(t), \quad (5б)$$

$$\Delta_2(t) = G_{11}(t) \overline{G_{11}[\alpha(t)]} - \overline{G_{12}[\alpha(t)]} G_{12}(t), \quad (5в)$$

$$V(t) = \overline{A_{11}[\alpha(t)]} G_{12}(t) - A_{12}(t) \overline{G_{11}[\alpha(t)]} \quad (5г)$$

имеет место следующее утверждение.

**Теорема.** Если выполняются условия (5), то решение задачи  $K_{41}$  относительно неизвестных кусочно бианалитических функций  $F^\pm(z) = \varphi_0^\pm(z) + \bar{z} \varphi_1^\pm(z)$ ,  $z \in T^\pm$  сводится к последовательному решению обобщённой скалярной задачи Римана относительно кусочно аналитической функции  $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$  и определенного интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода. При этом задача  $K_{41}$  разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы краевая задача Римана и интегральное уравнение.

В сообщении исследуется картина разрешимости рассматриваемой задачи в зависимости от индексов коэффициентов, входящих в краевые условия (1) и (2).

### Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.
3. Богданова Н.Н., Расулов К.М. О решении невырожденной четырёхэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Известия Саратовского университета. Новая серия. – Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, Вып. 2. – С. 6–12.
4. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.

## К ВОПРОСУ О ТЕОРИИ НЕСТАБИЛЬНЫХ РАСПИСАНИЙ

**А.А. БОРОДИН, А.В. ИГНАТЕНКОВ, М.Г. ЛЫСИКОВ,  
А.М. ОЛЬШАНСКИЙ**

ООО «НТЦ ЭЖД», Москва

e-mail: borodincit@gmail.com, a.ignatenkov@gmail.com, m.g.lysikov@gmail.com,  
lexolshans@gmail.com

УДК 51.74+656.22

Ключевые слова: *теория расписаний, темпоральная логика, транспорт.*

*В данной работе вводится понятие нестабильного расписания, рассматриваются основы формализации нестабильного расписания, приёмы работы с ними.*

В современном мире особое место занимают упорядоченные во времени процессы обмена информацией, материальными и энергетическими потоками. Примеры подобных процессов – различные технологические цепочки, расписания, сетевые графики и пр., имеющие потенциальное применение во всех без исключения областях человеческой деятельности.

В настоящей работе предлагается подход к построению расписаний в условиях, при которых на все объекты материального мира действует значительное количество слабоформализуемых факторов, в результате объекты характеризуются повышенной степенью неопределённости своего поведения. Если предположить, что объекты, участвующие в

упорядоченном взаимодействии, меняют свое состояние достаточно часто, то мы сталкиваемся с необходимостью решения задач составления расписания в квазистохастических условиях поведения объектов. Термин «квазистохастический» выбран потому, что в смене состояний объектов задействованы и строго определенные причины. Условимся расписание, составляемое в указанных условиях, называть нестабильным расписанием.

Важно заметить, что под расписанием в настоящей работе понимается не только последовательность цепочек, которые будут выполнены после некоторого момента времени  $t_0$  (подлежат планированию в обычных условиях), но и вся совокупность состояний объектов в прошлые моменты времени, т.е. в нашей будущей модели расписание будет включать в себя ретроспективные и перспективные горизонты времени. Это необходимо для полного учета истории изменения всех состояний объектов.

Рассмотрим множество объектов  $A$ , в которое входят все объекты, участвующие во упорядоченном взаимодействии.

Условимся считать множеством  $B$  множество элементов внешней среды, причем объекты и внешняя среда выбираются таким образом, чтобы  $A \cap B = \emptyset$ .

Введем основное понятие для построения нестабильных расписаний – понятие события.

Событие – это изменение состояния объектов, принадлежащих множеству  $A$  или  $B$ .

Событие будем отображать в виде набора

$$S_i = \{a_i, b_i, \varphi, q\}, \quad (1)$$

где

$S_i$  – событие;

$a_i = \{a_{i1}, TF(a_{i1}), a_{i2}, TF(a_{i2}) \dots\}$  – кортеж объектов, участвующих во взаимодействии,  $i=1,2,\dots$  – количество объектов,  $TF(a_{ik})$  – система перехода объекта  $a_{ik}$  из состояния в состояние, задаваемая дополнительно;

$b_i = \{b_{i1}, TF(b_{i1}), b_{i2}, TF(b_{i2}) \dots\}$  – кортеж элементов внешней среды, строящийся по принципам, по которым строится кортеж объектов  $a_i$ ;

$\varphi = [0; 1]$  – логическая переменная, которая сообщает, началось ли данное событие или уже окончено;

$q$  – некоторая величина, характеризующая степень возможности события.

Уточним, что значение величины  $q$  принимается равным 0, если событие достоверно не возникло до момента рассмотрения или не

возникнет в будущем,  $q$  принимается равным 1, если событие достоверно было в ретроспективе или достоверно состоится в будущем; значение  $q$  в интервале  $(0,1)$  означает, что объект в настоящее время находится в суперпозиции нескольких состояний и его состояние не конкретизировано.

О поведении данной величины можно сказать следующее.

В случае, когда мы анализируем уже существующие и твердо заданные технологические цепочки, эта величина имеет физический смысл вероятности того, что данное событие произойдет. Эта вероятность может быть оценена различными методами, включая искусственный интеллект.

Если же мы ведем речь о разработке нового нестабильного расписания, то поведение величины  $q$  может быть выражено кубитом с двумя базовыми состояниями 0 и 1.

Этот прием позволяет нам вырабатывать нестабильные расписания для системы с очень большим количеством объектов в параллельном режиме.

Размерность модели, выражающей данную постановку задачи, будет ограничена сверху числом  $T * 2^{|A|*|B|}$ , где  $T$  – длительность рассматриваемого периода, поскольку каждый из объектов множества  $A$  может быть либо инцидентен, либо не инцидентен некоторым элементам множества  $B$ .

События  $S_1, S_2, \dots, S_k$  увязаны в технологическую цепочку при помощи операторов темпоральной логики.

Для работы с событиями будут использоваться следующие операторы темпоральной логики:

- 1) оператор  $F$  – Future – «событие  $Q$  случится когда-нибудь в будущем»,  $FQ$ ;
- 2) оператор  $P$  – Past – «событие  $Q$  случилось когда-то в прошлом»,  $PQ$ ;
- 3) оператор  $G$  – Global – «событие  $Q$  всегда будет в будущем,  $GQ$ »;
- 4) оператор  $X$  – NeXt – «событие  $Q$  случится в следующий момент,  $XQ$ »;
- 5) оператор  $U$  – Until – «событие  $Q$  случится в будущем, а до него непрерывно будет событие  $P$ ,  $PUQ$ »;
- 6) оператор  $E$  – Exist – «Событие  $Q$  происходит в системе,  $EQ$ »;
- 7) оператор  $R$  – Release – «Событие  $Q$  освобождает систему из состояния, в которое она была переведена событием  $P$ ,  $QRP$ ».

С помощью указанных операторов, а также традиционных операторов аристотелевой логики будут формироваться высказывания, справедливые для тех или иных изменений, происходящих с объектами.

В подобном представлении оптимальная технологическая цепочка для ряда объектов будет задаваться как поиск оптимального пути на

темпоральном графе, в вершине которого будут находиться события, а переходы – определяться правилами и операторами темпоральной логики.

При этом переход от события к событию будет отражать сущность категории «технологическая операция».

Таким образом, множество интересующих нас объектов и всей внешней среды может быть представлено в трехмерном пространстве, в котором по оси абсцисс отражается набор объектов, по оси ординат – время, по оси аппликат – набор элементов внешней среды. Причем по осям  $X$  и  $Z$  отсчеты дискретны. То есть в реальности мы имеем наборы плоскостей: набор  $(XOY)$ , каждая плоскость (по количеству элементов внешней среды) соответствует одному элементу внешней среды, и набор  $(YOZ)$ , каждая плоскость (по количеству объектов) соответствует одному объекту.

Изменение элемента внешней среды есть перемещение по плоскости  $XOY$  из состояния в состояние.

Изменение объекта есть перемещение по плоскости  $YOZ$  из состояния в состояние.

Тогда «стремление» объекта оказаться в различном состоянии до проведения наблюдения за системой есть решетка некоторой ширины, а после наблюдения – точка на плоскости  $YOZ$  этого объекта.

Если технологическая цепочка отражает несколько состояний в этой плоскости, то расписание есть линия в соответствующей плоскости.

В приведенной нотации процесс «измерения» и коллапсирования волновой функции квантовой величины  $q$  можно смоделировать как проверку различных условий, в том числе, условий факторов, действующих на поезд при отправлении, и выраженных в одной из следующих возможностей:

- поезд отправился вовремя и прибыл вовремя;
- поезд отправился вовремя и прибыл с опозданием;
- поезд отправился с опозданием и прибыл вовремя;
- поезд отправился с опозданием и прибыл с опозданием;

Таким образом, в момент оценки состояния квантовой величины  $q$  мы выбираем одно из четырех планировочных решений для дальнейшего пересчета графика. То есть процесс планирования на транспорте с позиций квантового формализма есть процесс коллапсирования волновой функции многомерного квантового объекта, описывающего каждое из событий.

Оговоримся при этом, что в данной работе термин «квантовый» не следует трактовать как объект, который ведет себя в соответствии с принципами квантовой механики. Точнее было бы употреблять термины «нестабильный объект» или «квазиквантовый».

## Литература

1. Ольшанский А.М., Лысиков М.Г., Игнатенков А.В. О применении темпоральной логики к моделированию железнодорожных станций (тезисы) // Интеллектуальные системы на транспорте: тезисы докладов V международной научно-практической конференции «ИнтеллектТранс-2015». – СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2015. – С. 16.

2. Алтайский М.В., Капуткина Н.Е., Крылов В.А. Квантовые нейронные сети: современное состояние и перспективы развития // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – Дубна: Объединённый институт ядерных исследований, 2014. – Т. 45, вып. 5–6. – С. 1824–1859.

## ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЯ СИСТЕМ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СИСТЕМНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

**Ю.М. ВУВУНИКЯН**

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы  
г. Гродно (Беларусь)  
e-mail: vuv64@mail.ru

УДК 517.98

Ключевые слова: *параллельное соединение систем, последовательное соединение систем, полиномиальный системный оператор, эволюционный оператор, композиция натурального числа, композиция натурального числа с ограничениями, тензорное произведение, тензорная степень.*

*Рассмотрены параллельные и последовательные соединения нелинейных систем, определяемых полиномиальными системными операторами, и доказаны теорема о параллельном соединении и теорема о последовательном соединении.*

При анализе многих сложных систем эффективен метод, когда такую систему представляют как совокупность взаимодействующих более простых подсистем, между которыми имеются связи параллельного или последовательного соединения. Мы будем считать, что каждая нелинейная подсистема задается общим полиномиальным системным оператором, преобразующим входное воздействие на данную подсистему в реакцию этой подсистемы. Отметим, что в работах [1] и [2] был развит метод моделирования сложных нелинейных систем с помощью эволюционных операторов с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками.

Полиномиальным системным оператором степени  $k$ , действующим из векторного пространства  $X$  в векторное пространство  $Y$ , будем называть оператор  $A$ , определяемый равенством

$$Ax = \sum_{n=1}^k A_n x^n \quad (x \in X),$$

где  $A_n$  ( $n=1,2,\dots,k$ ) – мультилинейные операторы степени  $n$ , действующие из пространства  $X^n$  в пространство  $Y$ ,  $x^n$  – прямая  $n$ -ая степень входного воздействия  $x \in X$ .

Пусть подсистемы определяются полиномиальными системными операторами  $A^1$  и  $A^2$  степеней  $k_1$  и  $k_2$ :  $A^j x = \sum_{n_j=1}^{k_j} A_{n_j}^j x^{n_j}$  ( $j=1,2$ ).

Не уменьшая общности, будем считать, что  $k_1 \geq k_2$ . Для параллельного соединения этих подсистем имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Система, являющаяся параллельным соединением подсистем, определяемых полиномиальными системными операторами

$$A^1 x = \sum_{n_1=1}^{k_1} A_{n_1}^1 x^{n_1} \quad \text{и} \quad A^2 x = \sum_{n_2=1}^{k_2} A_{n_2}^2 x^{n_2}, \quad \text{определяется полиномиальным}$$

системным оператором  $Vx = \sum_{n=1}^k B_n x^n$ , где  $k = k_1$ ,

$$B_n = A_n^1 + A_n^2 \quad (n=1,2,\dots,k_2), \quad B_n = A_n^1 \quad (n=k_2+1, k_2+2,\dots,k).$$

Для более сложного последовательного соединения рассматриваемых подсистем имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Система, являющаяся последовательным соединением подсистем, определяемых полиномиальными системными операторами

$$A^1 x = \sum_{n_1=1}^{k_1} A_{n_1}^1 x^{n_1} \quad \text{и} \quad A^2 x = \sum_{n_2=1}^{k_2} A_{n_2}^2 x^{n_2}, \quad \text{определяется полиномиальным}$$

системным оператором  $Vx = \sum_{n=1}^k B_n x^n$ , где  $k = k_1 k_2$ ,

$$B_n x^n = \sum_{m=1}^n \sum_{\alpha \in \Xi_{n,m,k}^*} A_m^2 (A_{n_1}^1 x^{\otimes n_1}, A_{n_2}^1 x^{\otimes n_2}, \dots, A_{n_m}^1 x^{\otimes n_m}), \quad (n=1,2,\dots,k),$$

$\Xi_{n,m,k_1}^*$  – множество всех композиций [3] натурального числа  $n$  с  $m$  частями, каждая из которых не превосходит  $k_1$ ,  $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ ,  $|\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ .

Для доказательства этой теоремы используется теорема о тензорном произведении реакций полиномиальных системных

операторов и ее следствие о тензорных степенях реакции полиномиального системного оператора.

### Литература

1. Вувуникян Ю.М. Обобщенные функции и нелинейные эволюционные операторы. – Гродно: ГрГУ, 2014. – 308 с.
2. Вувуникян Ю.М., Шпак Д.С. Полиномиальные эволюционные операторы. – Гродно: ГрГУ, 2015. – 277 с.
3. Эндриус Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

## О ПАРАДОКСАХ, СОФИЗМАХ И ДРУГИХ НЕПРИЯТНОСТЯХ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКЕ

С.А. ГОМОНОВ

Смоленский государственный университет

УДК 510.2, 510.6

Ключевые слова: *апории Зенона, софизмы, парадоксы теории множеств.*

*В данной статье рассматриваются некоторые проблемы математической науки и ее логического обоснования, идущие от апорий Зенона Элейского.*

1. Зенон из Элей (≈490–430 до н.э.) (Элей или Элея – Южная Италия) – древнегреческий философ, ученик Парменида, представитель Элейской школы. Судьба этого замечательного ученого и его научных трудов сложилась типично для своего времени – о жизни Зенона известно ничтожно мало и ни одного из его сочинений не дошло до нашего времени [1]–[3]. Нам известны только отрывки его работ, встречающиеся в сочинениях других философов, и прежде всего у Платона и его ученика Аристотеля.

А ведь Византийский лексикон Суда называет четыре сочинения Зенона: «Споры», «Толкование Эмпедокла», «Против философов», «О природе». Кроме того, есть у Платона в сочинении «Парменид» упоминание о труде Зенона, в котором он высмеивает оппонентов Парменида и старается показать, что допущение «множества» и «движения» чревато получением «еще более смехотворных выводов» (сохранились сведения, что в этом сочинении Зенон привел около сорока антиномий).

Однако доставшиеся нам в наследство от Зенона его знаменитые «аргументы», или парадоксы, или апории (из греческого: *α* –

отрицательная частица, *poros* – выход; *апория* – дословно – безвыходная ситуация, затруднение, недоумение) внесли в развитие науки до сих пор еще не вполне оцененный вклад. Достаточно сказать, что по мнению современных специалистов (по логике, основаниям математики и теории множеств Г. Кантора) проблемы разрешения заключенных в апориях Зенона Элейского противоречий до сих пор не получили достаточно удовлетворительного истолкования, хотя попыток (более или менее удачных) делалось и делается весьма много [4–7]. Полностью спасти современную науку от неприятностей апорий Зенона пока не удалось.

Однако высочайшая оценка трудов Зенона была высказана еще в античные времена. Аристотель назвал его «изобретателем диалектики». И уже современники Зенона считали, что он своими апориями способствовал созданию новых программ научного исследования (программа Демокрита, о которой мы знаем ничтожно мало, пифагорейская программа, преобразованная с помощью Платона, программа Аристотеля).

2. Прежде чем рассмотреть некоторые из сохранившихся апорий Зенона, напомним о ряде терминов, сопутствующих термину «апория» или даже его заменяющих (пусть и не всегда законно).

Термин «антиномия» (из греческих слов: *αντι* – напротив, наоборот и *νομος* – закон) означает то, что противоположно закону или обычаю.

Термин «парадокс» (часто применяется как синоним терминов «антиномия» или «апория») также является объединением двух греческих слов (*παρα* – около и *δοξα* – мнение, ожидание) и означает именно то, что представляет собой нечто странное и необычное (или то, что кажется таковым).

И наконец, термин «софизм» (от греческого – *sophisma*) – измышление, хитрость, уловка, ухищрение, выдумка, головоломка.

Перечислим теперь апории Зенона, применив некоторую придуманную для них уже в наше время систематизацию.

I. Апория «о месте» (иначе говоря – немыслимость пустоты). Аристотель излагал и истолковывал ее в следующих словах, одновременно предостерегая от использования понятия «бесконечность»: «... если все существующее помещается в известном месте, то ясно, что будет и место места, и так идет в бесконечность», а вот и его разъяснение и предостережение: «ничто же не препятствует, чтобы первичное место было в другом... не обязательно как в месте, а так, например, как здоровье заключается в теплом, как свойство, а теплое в теле, как состояние. Таким образом, нет необходимости идти в бесконечность».

Одним словом, дайте «место месту».

Современная математика учит как из ничего (пустого множества) можно получить натуральный ряд:  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$  и так далее.

А вот и современное возражение против такого мысленного построения: «опасно (даже нельзя) мысленно объединять во множество то, что не существует отдельно друг от друга».

II. Апории множества (иначе говоря – немыслимость множества). К ним относятся: а) «Парадокс делимости»; б) «Парадокс сложения»; в) «Парадокс счисления».

Ограничимся рассмотрением апории II(б). Современным языком говоря, проблема с апорией II(б) возникает в ситуации, когда конечный отрезок (или тело) представляется (складывается) в виде бесконечной совокупности неделимых объектов (точек); эти точки, естественно, представляются как не имеющие измерений. Их «сумма» полагалась имеющей «меру нуль», а значит, и тело, имеющее «измерение», оказывается лишено такового.

Эта апория (парадокс II(б)) – одна из труднейших и не решена и поныне, как и проблема протяженного тела или отрезка времени.

Идея определения меры множества при помощи покрытия его тем, что по отдельности имеет меру (например, покрытие интервалами множества, расположенного на прямой), к сожалению, проблемы апории не решает.

III. Апории движения (иначе говоря – немыслимость движения):

- а) «Ахилл и черепаха»;
- б) «Дихотомия» (деление на две части);
- в) «Стрела» (летающая стрела неподвижна);
- г) «Стадий».

Смысл противоречий, намеченных данными апориями – в трудности понимания «движения», если предполагать неограниченную возможность делимости как пути, так и времени, ну а III(в) и III(г) намечают противоречия при предположениях о неделимости «элементов» пути и времени; говоря современным языком, перед нами проблема квантов пространства и времени.

Парадокс быстрого Ахилла и медлительной черепахи (апория III(а)) хорошо известен: пока Ахилл будет добираться до того места, где находилась черепаха в начале движения, она, хоть и медленно, но отдалится от исходного своего места пребывания и увеличит, хоть и немного, расстояние между собой и догоняющим ее героем; но пока последний будет приближаться к месту, где только что была черепаха, она опять-таки удалится от своего предыдущего места пребывания, а значит, и от Ахилла.

И это движение будет продолжаться бесконечно, и хотя расстояние между героем и пресмыкающимся все более и более будет сокращаться, но никогда не исчезнет полностью. Ахилл никогда не догонит черепаху!

Апория III(б) (по Зенону) выглядит так: Ахиллес, догоняя черепаху, сначала должен пройти половину пути к черепахе, а значит, вначале половину половины пути и т.д., т.е. двигаться он будет столь медленно, что его можно считать неподвижным. То есть движения нет!

Здесь стоит напомнить одно из дошедших до нас «опровержений» апории Зенона циником Антисфеном, который встал и начал ходить перед Зеноном, считая, что действие сильнее всякого словесного возражения.

Эту легенду превратил в известное стихотворение «Движение» А.С. Пушкин, отметив существенный изъян в доказательстве существования движения эмпирическим путем: «Ведь каждый день пред нами Солнце ходит, однако ж прав упрямый Галилей».

Можно сказать, что рационализм в творчестве Евдокса, Евклида, Архимеда и многих других мудрецов-математиков идет от критического рационализма Зенона, однако позднее слишком большая осторожность ученых античных времен сменилась внедрением в математическую науку эмпирических подходов. Как говорил Даламбер: «Идите вперед, и уверенность придет». Тем более что многие проблемы обоснования тех или иных разделов математики (в том числе и анализа) еще ждут своего решения. Полное же решение апорий Зенона упирается в решение проблемы непрерывного и дискретного в устройстве нашей Вселенной, материи и времени.

3. Теперь рассмотрим такое понятие, как софизм, т.е. утверждение, связанное с более или менее удачно замаскированной ошибкой. При этом чаще всего эти ошибки носят следующий характер:

а) семиотические ошибки, т.е. ошибки, порожденные метафоричностью речи или омонимией, а то и просто полисемией слов; в результате нарушается однозначность мысли, смешиваются значения терминов;

б) логические ошибки, т.е. ошибки, возникающие из-за подмены основной мысли чем-то схожим, но побочным, из-за принятия ложных посылок за истинные, из-за применения недопустимых способов рассуждения.

Вот хорошо известные примеры парадоксов (или антиномий).

1) «Рогатый» софизм древних (приписывается Евбулиду): что ты не терял, то имеешь; рога ты не терял, значит, у тебя имеются рога.

2) Современный софизм (весьма сомнительного качества): с возрастом годы жизни становятся на самом деле короче.

Обоснование: каждый год нашей жизни – это ее  $\frac{1}{n}$  часть ( $n \in N$ ), где  $n$  – число прожитых вами лет, но  $n+1 > n$ , значит,  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ .

3). Софизм «куча»: одно зерно – не куча, если  $n$  зерен не куча, то и  $n + 1$  зерен – не куча, значит, любое число зерен – не куча. Этот парадокс – пример софизма, порожденного ситуацией «неразличимости». Существуют достаточно сложные и громоздкие в описании парадоксы, например парадокс Рассела и парадокс Сколема. Однако завершим перечень примеров нематематических парадоксов двумя весьма простыми, но знаменитыми парадоксами.

4) Антиномия «деревенский парикмахер» (вариант парадокса Рассела): «Рассмотрим деревенского парикмахера, который бреет всех тех и только тех жителей деревни, которые не бреются сами. Бреет ли он сам себя?» Простейшее разрешение этого парадокса – признать, что слово «всех» делает предшествующие «закавыченные» фразы бессмысленными.

5). Антиномия Эвбулида (4 век до н.э.) или парадокс лжеца (впрочем его приписывают и Эпимениду): «Некоторый субъект произносит фразу: "высказывание, которое я сейчас произношу, – ложное". Говорит ли он правду или лжет?»

4. Хорошо известны так называемые математические софизмы, когда в процессе доказательства применяется запрещенный прием или используется обман зрения, например, существенным оказывается учет толщины линий чертежа.

Вот простейшие примеры.

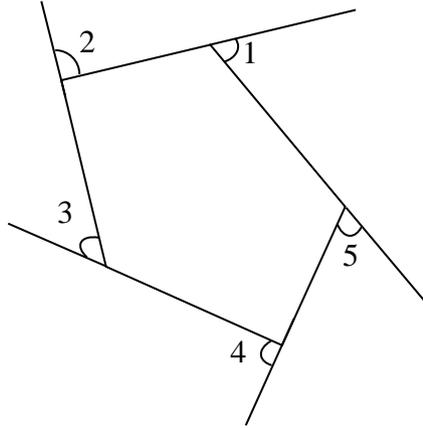
1) Пусть  $a > b$ , т.е. существует  $c > 0$  такое, что  $a = b + c$ , тогда  $a \cdot (a - b) = (b + c) \cdot (a - b)$ , т.е.  $a^2 - ab = ab + a - b^2 - bc$ , т.е.  $a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$ , т.е.  $a(a - b - c) = b(a - b - c)$ , и получаем:  $a = b$ . А проверить, что сокращаем на  $a - b - c$ , равное нулю, забыли!

2) Докажем, что  $3 = 4$ ;  $3 : 3 = 4 : 4$ , значит,  $3(1 : 1) = 4(1 : 1)$ , т.е.  $3 = 4$ . А кто разрешил применять подобный «дистрибутивный» закон?

3) Докажем, что  $-2 = 2$ : так как из равенства  $-2 = 2$  следует, что  $(-2)^2 = 2^2$ , что является истинным равенством (так как  $4 = 4$ ), выводим, что и исходное равенство – истинно. В таких случаях вспоминают старый школьный афоризм: «Если  $2 \times 2 = 5$ , то существуют ведьмы». Иначе говоря, из ложной посылки можно доброкачественными средствами вывести все, что угодно (и ложное, и истинное утверждение).

5. В завершение статьи напомним, что бывают совершенно справедливые заключения, на первый взгляд, противоречащие интуиции. Это, конечно, не софизмы, а просто наш не слишком обширный опыт подсказывает нам не то, что имеет место на самом деле [10–11]:

1) Найдите сумму всех внешних углов выпуклого многоугольника.



*Решение.* Удивительно, но ответ не зависит от числа вершин  $n$ :  $180^\circ \cdot n - 180^\circ(n - 2) = 360^\circ$ , здесь  $180^\circ(n - 2)$  – сумма всех внутренних углов выпуклого  $n$ -угольника.

2) Земной шар стянули обручем по экватору. Затем увеличили длину обруча на 1 метр. Пролезет ли в образовавшийся зазор кошка?

*Решение.* Пусть  $l$  – длина обруча, тогда: 
$$\begin{cases} 2\pi r = l, \\ 2\pi \tilde{r} = l + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2\pi(\tilde{r} - r) = 1, \text{ т.е. } \tilde{r} - r = \frac{1}{2\pi} \text{ (м)} \approx 16 \text{ (см)}.$$

*Ответ.* Кошка пролезет.

3) Бывают задачи с условием-провокацией: три курицы за три дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 9 куриц за 9 дней.

*Ответ.* Неверный – 9 яиц, верный – 27 яиц.

## Литература

1. Гайденко П. История греческой философии и ее связи с наукой. – М.: ПЕР СЭ, СПб: Университетская книга, 2000.
2. Любищев А.А. Линии Демокрита и Платона в истории культуры. – СПб: Алетей, 2000.
3. Фрагменты ранних стоиков / пер. А.А. Столярова. – М.: 1998. – Т. 1. Зенон и его ученики.
4. Большая советская энциклопедия. – М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1976. – Т. 24, кн. 1.
5. Большая Российская энциклопедия. – М.: Изд-во «Большая Российская энциклопедия», 2008. – Т. 10.
6. Новая философская энциклопедия. В 4 т.– М.: Институт философии РАН, 2010, –Т. II.
7. Математическая энциклопедия. Т. 1. – С. 291–296.
8. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1989.
9. Клайн М. Математика. Утрата определенности. – М.: Мир, 1984.
10. Мадера А.Г., Мадера Д.А. Математические софизмы. – М.: Просвещение, 2003.
11. Крачковский С.М. О знакомстве школьников с математическими задачами и результатами, противоречащими интуиции // Математика в школе. – 2012. – №2.

## ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ ЧЕРЕЗ ТЭТА-ФУНКЦИЮ РИМАНА

О.Б. ДОЛГОПОЛОВА, Э.И. ЗВЕРОВИЧ  
Белорусский государственный университет  
e-mail: Dolgopolova@bsu.by, Zverovich@bsu.by

УДК 517.948.32:517.544

Ключевые слова: *краевые задачи, риманова поверхность, базис абелевых дифференциалов, функции Грина, функция Неймана, проблема обращения Якоби, тэта-функция Римана.*

*В работе изучается вопрос о явном выражении функций Грина и Неймана для многосвязных областей с гладким краем через тэта-функцию Римана.*

Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  –  $(m+1)$ -связная область ( $m \in \mathbb{N}$ ) с гладким краем  $\partial D = b_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_m$ , где  $b_0, b_1, \dots, b_m$  – связные компоненты края, причем кривая  $b_0$  охватывает все остальные. Край  $\partial D$  ориентируется стандартно (т.е. оставляет область  $D$  слева). Считаем известными гармонические меры  $\omega_1(z), \dots, \omega_m(z)$  компонент края соответственно, т.е. решения следующих задач Дирихле ( $k = 1, \dots, m$ ):

$$\Delta \omega_k(z) = 0, \quad \omega_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in b_k, \\ 0, & t \in \partial D \setminus b_k. \end{cases}$$

Введем функции  $\tilde{\omega}_k(z)$ , гармонически сопряженные к  $\omega_k(z)$ , и обозначим через  $w_k(z) = \omega_k(z) + i \cdot \tilde{\omega}_k(z)$  «комплексные гармонические меры». Они многозначны, их периоды  $\int_{b_\mu} dw_\nu = i \cdot B_{\mu\nu}$  – чисто мнимые, а числа  $B_{\mu\nu}$  образуют симметричную и положительно определенную матрицу  $(B_{\mu\nu})_{\mu, \nu=1}^m$ . Соединим компоненту  $b_0$  с остальными компонентами  $b_k$  простыми гладкими и попарно непересекающимися линиями  $a_k$ , ориентированными по направлению к кривым  $b_k$ , ( $k = 1, \dots, m$ ). В силу определения функций  $w_k(z)$  имеем:

$$\int_{a_\mu} dw_\nu = \delta_{\mu\nu} + i \cdot \alpha_{\mu\nu}, \quad \alpha_{\mu\nu} \in R, \quad (\mu, \nu = 1, \dots, m).$$

Дифференциалы  $dw_\nu(z)$  – чисто мнимые на  $\partial D$  и потому допускают аналитическое продолжение по принципу симметрии на второй лист дубля  $\mathfrak{R} := D \cup \partial D \cup \tilde{D}$ , где  $\tilde{D}$  – обратная сторона листа  $D$ . Пусть  $z \in D$  и  $\tilde{z} \in \tilde{D}$  – точки дубля, имеющие одну и ту же координату  $z$ . Тогда при  $\tilde{z} \in \tilde{D}$  будет  $dw_\nu(\tilde{z}) = -\overline{dw_\nu(z)}$ ,  $\nu = 1, \dots, m$ . Дифференциалы  $d\zeta_\nu(p) = \frac{1}{2} dw_\nu(p)$ , ( $\nu = 1, \dots, m$ ) (где  $p = z$  при  $p \in D$ , и  $p = \tilde{z}$  при  $p \in \tilde{D}$ ), образуют комплексно нормированный базис абелевых дифференциалов 1-го рода дубля, т.е. они всюду на  $\mathfrak{R}$  аналитичны, а их  $A$ -периоды образуют единичную матрицу, т.е.  $\int_{A_\mu} d\zeta_\nu = \delta_{\mu\nu}$ , где  $A_\mu = a_\mu \cdot \tilde{a}_\mu^{-1}$ . Их  $B$ -периоды таковы:

$$i\Omega_{\mu\nu} = \int_{B_\mu} d\zeta_\nu = \frac{1}{2} \int_{b_\mu} dw_\nu = \frac{i}{2} B_{\mu\nu}, \quad \text{где } B_\mu = b_\mu, \quad \mu, \nu = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Обозначим  $\zeta(z) := {}^t(\zeta_1(z), \dots, \zeta_m(z))$ , где  $\zeta_\nu(z) = \int_{t_0}^z d\zeta_\nu(t)$ ,  $t_0 \in b_0$ , верхний

индекс  $t$  перед вектором означает его транспонирование, а штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования не пересекает линий  $A_1, \dots, A_m$ . Как известно [1], проблема обращения Якоби

$$\sum_{\nu=1}^m \zeta(p_\nu) \equiv \mathbf{e} - \mathbf{k} \quad (\text{по модулю периодов}) \quad (2)$$

безусловно разрешима при любой правой части (где  $\mathbf{e}, \mathbf{k} \in C^m$ ), причем для почти всех правых частей – однозначно. В частности, очевидным решением следующей проблемы обращения Якоби

$$\sum_{\nu=1}^m \zeta(p_\nu) \equiv m\zeta(p) \quad (\text{по модулю периодов}) \quad (3)$$

является дивизор  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m = p^m$ , причем это решение – единственное, если  $p$  не является точкой Вейерштрасса (которых конечное число). Решением проблемы (3) является единственный  $m$ -кратный нуль следующей тэта-функции Римана

$$\theta(\zeta(q) - m\zeta(p) - \mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n} \in Z^m} \exp\{-\pi^t \mathbf{n} \Omega \mathbf{n} + 2\pi^t \mathbf{n}[\zeta(q) - m\zeta(p) - \mathbf{k}]\}, \quad (4)$$

которая отлична от тождественного нуля (нетривиальна) для любых  $p \in \mathfrak{R}$ , отличных от точек Вейерштрасса. В работе [2] показано, что вектор «римановых констант»  $\mathbf{k} = {}^t(k_1, \dots, k_m)$  удовлетворяет условию  $\text{Re } k_\mu \equiv \frac{1}{2}$ , где  $\mu = 1, \dots, m$ . Абелевы интегралы 1-го рода  $\zeta_\nu(p)$  – чисто

мнимые при  $p \in \partial D \setminus B_\nu$  и  $\text{Re } \zeta_\nu(p) = \frac{1}{2}$  при  $p \in B_\nu$ . Отсюда следует, что

если  $p, q \in \partial D$ , то функция (4) – чисто вещественная, так как в этом случае чисто вещественными являются все члены ряда (4). Если же только одна из точек  $p$  или  $q$  лежит на  $\partial D$ , то (4), как функция от другой точки, допускает аналитическое продолжение на второй лист дубля по принципу симметрии, например,

$$\theta(\zeta(\tilde{q}) - m\zeta(p) - \mathbf{k}) = \overline{\theta(\zeta(q) - m\zeta(p) - \mathbf{k})} \quad \text{при } p \in \partial D.$$

Аналогично имеем:

$$\theta(\zeta(q) - m\zeta(\tilde{p}) - \mathbf{k}) = \overline{\theta(\zeta(q) - m\zeta(p) - \mathbf{k})} \quad \text{при } q \in \partial D. \quad (5)$$

Фиксируя точку  $t \in D$ , напомним понятие функции Грина области  $D$ . Так называется гармоническая в  $D \setminus t$  функция  $g(z, t)$ , которая существует, единственна и удовлетворяет условиям:

$$g(z, t) = 0 \quad \text{при } z \in \partial D; \quad (6)$$

$$g(z, t) \sim \ln \frac{1}{|z-t|} \quad \text{при } z \rightarrow t. \quad (7)$$

Важнейшим ее свойством является выражение через нее решения задачи Дирихле:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} u(\xi) \frac{\partial g(\xi, t)}{\partial n_\xi} ds_\xi, \quad t \in D.$$

Если область  $D$  односвязна, то широко известно выражение  $g(z, t) = -\ln|w(z, t)|$  функции Грина через функцию  $w = w(z, t)$ , реализующую конформный гомеоморфизм этой области на круг  $|w| < 1$ ,  $w(t, t) = 0$ . Мы предлагаем здесь некоторый аналог этого выражения для  $(m+1)$ -связной области  $D$ :

$$g(z, t) = \frac{1}{m} \ln \left| \frac{\theta(\zeta(z) + m\overline{\zeta(t)} - \mathbf{k})}{\theta(\zeta(z) - m\zeta(t) - \mathbf{k})} \right| \quad \text{при } z, t \in D. \quad (8)$$

Ее гармоничность по  $z$  следует из аналитичности функции (4) по  $q$ . Выполнение для нее условия (7) вытекает из того, что функция (4) имеет при  $q = p$  нуль кратности  $m$ . Для проверки условия (6) положим в (5)  $q = z \in \partial D$ ,  $p = t \in D$  и учтем, что при этом будет  $\zeta(\tilde{p}) \equiv -\overline{\zeta(p)}$  по модулю 1. Тогда (5) преобразуется к виду

$$\theta(\zeta(z) + m\overline{\zeta(t)} - \mathbf{k}) = \overline{\theta(\zeta(z) - m\zeta(t) - \mathbf{k})}.$$

Подставив это в (8), видим, что условие (6) выполняется.

Добавив к функции (7) гармонически сопряженную к ней по  $z$  функцию, получим выражение для комплексной функции Грина:

$$g(z, t) + i\gamma(t, z) = \frac{1}{m} \ln \frac{\theta(\zeta(z) + m\overline{\zeta(t)} - \mathbf{k})}{\theta(\zeta(z) - m\zeta(t) - \mathbf{k})},$$

которая, очевидно, аналитическая по переменной  $z$  и гармоническая по переменной  $t$ .

Краевая задача Неймана

$$\Delta u(z) = 0, \quad z \in D, \quad \frac{\partial u(t)}{\partial n} = c(t), \quad t \in \partial D$$

разрешима и имеет решение, единственное с точностью до слагаемой константы, при условии  $\int_{\partial D} c(t) ds_t = 0$ , которое предполагаем

выполненным. Ее решение можно построить в квадратурах через функцию Грина и комплексные гармонические меры, а значит, его можно явно выразить через зэта-функцию Римана. С этой целью вводится так называемая *функция Неймана*  $N(z, t)$ , играющая для задачи Неймана ту же роль, что и функция Грина для задачи Дирихле. Она определяется следующими условиями:

- (а)  $N(z, t)$  гармонична по  $z$  в области  $D \setminus t$ ;
- (б)  $N(z, t) \sim \ln \frac{1}{|z-t|}$  при  $z \rightarrow t$ ;
- (в)  $\forall z \in \partial D : \frac{\partial}{\partial n} N(z, t) = \frac{2\pi}{L}$ , где  $L$  – длина края  $\partial D$ .

Этими условиями функция Неймана определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, зависящего от  $t$ . Для ее однозначного определения потребуем, чтобы было  $\int_{\partial D} N(z, t) ds_z \equiv 0$ . Ограничимся

решениями  $u(t)$ , для которых  $\int_{\partial D} u ds = 0$ . Все такие решения представляются в виде

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} c(z) N(z, t) ds_z.$$

Известны ([3] с. 248) следующие соотношения, связывающие производные функций Неймана и Грина:

$$\frac{\partial^2 N(z, t)}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 g(z, t)}{\partial z \partial t} + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu=1}^m \Pi_{\mu\nu} w'_\mu(z) w'_\nu(t),$$

$$\frac{\partial^2 N(z, t)}{\partial z \partial \bar{t}} = -\frac{\partial^2 g(z, t)}{\partial z \partial \bar{t}} - \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu=1}^m \Pi_{\mu\nu} w'_\mu(z) \overline{w'_\nu(t)},$$

где  $\Pi_{\mu\nu}$  – некоторые постоянные. Используя (8), из этих равенств получаем следующие выражения для производных функции Неймана:

$$\frac{\partial^2 N(z, t)}{\partial z \partial t} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \ln \left| \frac{\theta(\zeta(z) + m\bar{\zeta}(t) - \mathbf{k})}{\theta(\zeta(z) - m\bar{\zeta}(t) - \mathbf{k})} \right| + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu=1}^m \Pi_{\mu\nu} w'_\mu(z) w'_\nu(t),$$

$$\frac{\partial^2 N(z, t)}{\partial z \partial \bar{t}} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{t}} \ln \left| \frac{\theta(\zeta(z) + m\bar{\zeta}(t) - \mathbf{k})}{\theta(\zeta(z) - m\bar{\zeta}(t) - \mathbf{k})} \right| - \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu=1}^m \Pi_{\mu\nu} w'_\mu(z) \overline{w'_\nu(t)}.$$

Рассмотрим еще два важных ядра

$$K(z, \bar{t}) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\partial^2 g(z, t)}{\partial z \partial \bar{t}}, \quad L(z, t) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\partial^2 g(z, t)}{\partial z \partial t},$$

первое из которых известно под названием *кern-функция Бергмана*. Опять используя (8), получим выражения этих ядер через тэта-функцию Римана:

$$K(z, \bar{t}) = -\frac{2}{m\pi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{t}} \ln \left| \frac{\theta(\zeta(z) + m\bar{\zeta}(t) - \mathbf{k})}{\theta(\zeta(z) - m\zeta(t) - \mathbf{k})} \right|,$$

$$L(z, t) = -\frac{2}{m\pi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \ln \left| \frac{\theta(\zeta(z) + m\bar{\zeta}(t) - \mathbf{k})}{\theta(\zeta(z) - m\zeta(t) - \mathbf{k})} \right|.$$

### Литература

1. Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций. - М., Едиториал УРСС, 2004. – 396 с.
2. Долгополова О.Б., Зверович Э.И. Построение в явном виде оператора Шварца для многосвязной области // Системы компьютерной математики и приложения: материалы международной научной конференции – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2009. - Вып.10. – С.175 -177.
3. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. - М.: ИЛ, 1953. – 310 с.

## ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

**М.М. ДЫШАЕВ, В.Е. ФЕДОРОВ**

ЧелГУ, г. Челябинск

e-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com, kar@csu.ru

УДК 517.9

*Ключевые слова: нелинейное уравнение Блэка – Шоулса, модель Сиркара – Папаниколау, групповой анализ, инвариантное решение, инвариантная подмодель, ценообразование опционов, динамическое хеджирование.*

*Проведена групповая классификация семейства уравнений Сиркара – Папаниколау со свободным параметром, включающего в себя в простейшем случае уравнение Блэка – Шоулса. С помощью найденной пятимерной группы преобразований эквивалентности такого уравнения осуществлен поиск трехмерного ядра основных алгебр Ли и четырехмерных основных алгебр Ли уравнения в случае двух спецификаций свободного элемента. Для каждой из алгебр найдены оптимальные системы подалгебр и соответствующие этим подалгебрам инвариантные решения или инвариантные подмодели*

уравнения. Вычисленные инвариантные решения включены в более общие многопараметрические семейства решений, инвариантные относительно всей основной алгебры Ли.

Модель Сиркара - Папаниколау [1] разработана на основании модели Блэка – Шоулза [2] для того, чтобы учесть эффекты обратной связи, возникающие при хеджировании:

$$C_t + \frac{1}{2} \left[ \frac{V(1-\rho C_x)U'(V(1-\rho C_x))}{V(1-\rho C_x)U'(V(1-\rho C_x)) - \rho x C_{xx}} \right]^2 \sigma^2 x^2 C_{xx} + r(xC_x - C) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $t$  – время,  $x$  – цена акции,  $C$  – цена опциона,  $\sigma$  – волатильность акции,  $\rho$  – отношение количества хеджируемых опционов к общему числу единиц базового актива в предложении на рынке,  $V$  – обратная функция к функции  $U$ , которая задает в модели функцию спроса  $D$  реферальных трейдеров относительно предложения равенством  $U(y^\delta/x) = D(x, y)$  в предположении, что последняя не зависит от  $t$ .

Нами осуществлена групповая классификация уравнения (1) со свободным элементом  $V$  и вычислен ряд его точных решений методами группового анализа [3; 4].

После замен  $\rho C = u$  и  $V'(1-\rho C_x)/V(1-\rho C_x) = v(u_x)$  получим уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1-xv(u_x)u_{xx})^2} + r(xu_x - u) = 0. \quad (2)$$

**Теорема 1.** *Базис алгебры Ли инфинитезимальных операторов групп преобразований эквивалентности уравнения (2) с функцией  $v$ , не равной тождественно нулю, образуют операторы*

$$Y_1 = \partial_t, \quad Y_2 = x\partial_u, \quad Y_3 = e^r \partial_u, \quad Y_4 = x\partial_x + u\partial_u, \quad Y_5 = x\partial_x + v\partial_v.$$

**Следствие 1.** *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения (2) с функцией  $v$ , не равной тождественно нулю, образуют операторы*  
 $X_1 = \partial_t, \quad X_2 = e^r \partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u.$

**Теорема 2.**

1. *Базис основной алгебры Ли уравнения*

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1-xu_{xx})^2} + r(xu_x - u) = 0$$

*имеет вид*  $X_1 = \partial_t, \quad X_2 = e^r \partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u, \quad X_4 = x\partial_x.$

2. *Базис основной алгебры Ли уравнений*

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2 \left( 1 - \frac{\beta x u_{xx}}{u_x} \right)^2} + r(xu_x - u) = 0, \beta \in R$$

имеет вид  $X_1 = \partial_t$ ,  $X_2 = e^{rt} \partial_u$ ,  $X_3 = x \partial_x$ ,  $X_4 = u \partial_u$ .

3. В случае функции  $v$ , не приводимой к единице и к функциям  $v = \beta u_x^{-1}$ ,  $\beta \in R$  преобразованиями эквивалентности, основная алгебра Ли уравнения

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - xv(u_x)u_{xx})^2} + r(xu_x - u) = 0$$

совпадает с ядром основных алгебр Ли и имеет вид  $X_1 = \partial_t$ ,  $X_2 = e^{rt} \partial_u$ ,  $X_3 = x \partial_x + u \partial_u$ .

Работа выполнена при поддержке лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант Правительства Российской Федерации 14.Z50.31.0020).

### Литература

1. Sircar K.R., Papanicolaou G. General Black – Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies // Appl. Math. Finance. - 1998. - Vol. 5. - P. 45–82.
2. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. - 1973. - V. 81. - P. 637–659.
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400 с.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Г.С. ЕВДОКИМОВА

Смоленский государственный университет  
e-mail: kaf-matem@smolgu.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: система с отказами, пуассоновский поток, экспоненциальный закон, стационарный режим, среднее число отказов за один период.

В статье для системы М/М/1 с параметрами, являющимися периодическими функциями, при заданном среднем числе поступлений

*на интервале требований найдены условия, минимизирующие среднее число отказов.*

Теория массового обслуживания распространила свое влияние последовательно на вопросы организации производства, ядерной физики, транспорта, связи, эксплуатации вычислительных машин, организации медицинского обслуживания и многие другие. Расширение областей применения привело к значительному возрастанию возникающих в ней проблем и к их качественному разнообразию. Например, одной из актуальных задач теории массового обслуживания является изучение систем с переменными параметрами. Действительно, большинство систем массового обслуживания работают в условиях переменной загрузки. Поэтому результаты, полученные для случая постоянных параметров, можно применять к ним лишь с большими натяжками. Зачастую потоки имеют ярко выраженную периодичность. К таким потокам относятся, например, потоки вызовов на телефонную станцию, потоки грузовых судов, потоки вызовов скорой медицинской помощи и т. д. В первом случае существенна периодичность в течение суток, во втором – годовая, в третьем – суточная и на протяжении недели. Поток покупателей в магазины тоже носит четко выраженный периодический характер. Учет этой особенности потоков имеет большое практическое значение, так как позволяет своевременно принять меры для рационального обслуживания клиентов [1].

В настоящей статье рассмотрим задачу управления входящим потоком для одноканальной системы массового обслуживания с отказами в условиях:

1) на вход поступает нестационарный пуассоновский поток требований с интенсивностью  $\lambda(t)$ ;

2) время обслуживания заявки, которое затрачивает прибор, случайное с экспоненциальным законом распределения и параметром  $\mu(t)$ :

$$F(x) = 1 - e^{-\mu(t)};$$

3) длительности обслуживания не зависят друг от друга и входящего потока;

4)  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  заданы на всей временной оси и являются периодическими функциями с периодом  $\tau > 0$ ;

5) задано  $\Lambda = \int_0^{\tau} \lambda(t) dt$  – среднее число требований, поступивших за один период;

б) система находится в периодическом стационарном режиме, т.е.  $p(t+\tau)=p(t)$ , где через  $p(t)$  обозначена вероятность того, что в системе находится требование.

Для вероятности  $p(t)$  можно записать дифференциальное уравнение

$$p'(t)=\lambda(t)[1-p(t)]-\mu(t)p(t), \quad p(0)=p(\tau).$$

Введем функцию  $v(t)$  как решение дифференциального уравнения:

$$v'(t)=\lambda(t)+v(t)[\lambda(t)+\mu(t)], \quad v(0)=v(\tau).$$

Положим

$$g(t)=[1-p(t)]v(t)-p(t).$$

Качество функционирования такой системы можно оценить средним числом отказов за один период:

$$Z = \int_0^{\tau} p(t)\lambda(t)dt.$$

Возникает задача: подобрать в классе периодических с периодом интенсивностей  $\tau > 0$  входящего потока такую функцию, которая бы минимизировала значение этой характеристики. Оказывается, что в этом случае необходимое условие экстремальности

$$\begin{cases} g(t) \leq c; \\ g(t) = c \quad \text{в точках роста } \Lambda(t) \end{cases}$$

единственным образом определяет решение этой задачи, которое имеет вид:

$$\lambda(t) = \mu(t)\Lambda\left(\int_0^{\tau} \mu(x) dx\right)^{-1},$$

т.е. интенсивность входящего потока должна быть пропорциональна интенсивности обслуживания.

### Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2005. – 400 с.

## ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОЛЛИНЕАЦИИ АЕ- СТРУКТУР И Е-АЛГЕБРЫ. III

**Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ**

Смоленский государственный университет

e-mail: уру1101@gmail.com

УДК 514.14 + 514.16

Ключевые слова: *АЕ-структура, Е-алгебра, центральная коллинеация, трансляция.*

Рассматриваются зависимости между наличием в  $AE$ -структурах центральных коллинеаций с центрами на прямой  $y=0$  и наличием трансляций в направлении прямой  $y=0$ . Найден алгебраический эквивалент  $(0, 0)$ -транзитивности  $\Pi_{y=0}$ -транзитивной  $AE$ -структуры.

Сформулирована нерешенная задача.

В работе рассматриваются  $AE$ -структуры  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  - аффинные инцидентностные структуры ( $AI$ -структуры), допускающие координатизацию с помощью  $E$ -алгебр  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  типа  $\langle 3, 0, 0 \rangle$  [1; 2].  $AE$ -структуры являются наиболее общими аффинными инцидентностными структурами, допускающими координатизацию методом Холла [3]. Классу  $AE$ -структур принадлежат известные инцидентностные структуры: аффинные плоскости Сандлера, аффинные плоскости Грозе и аффинные плоскости.

Исследование  $AE$ -структур, допускающих наличие определенных центральных коллинеаций, было начато автором в работе [4; 5]. Ниже мы продолжим изучение таких структур.

**Определение 1.** Алгебра  $\langle A; T, 0, 1 \rangle$  типа  $\langle 3, 0, 0 \rangle$ , удовлетворяющая условиям:

$$|A| \geq 2,$$

$$(\forall a, b \in A) T(a, 0, b) = T(0, a, b) = b,$$

$$(\forall a \in A) T(1, a, 0) = T(a, 1, 0) = a,$$

называется  $E$ -алгеброй [1].

Тернарная операция  $T$   $E$ -алгебры порождает три бинарные операции:

$$a \cdot b = T(a, b, 0);$$

$$a + b = T(1, a, b);$$

$$a \oplus b = T(a, 1, b),$$

через которые сама операция  $T$  может быть выражена в некоторых частных случаях.

Каждая  $E$ -алгебра  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  порождает  $AE$ -структуру  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ , ассоциированную с  $R$ , где:

$P = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$	- множество точек;
$L = \{[m, n] \mid m, n \in A\} \cup \{[a] \mid a \in A\}$	- множество прямых;
$(a, b) I [m, n] \Leftrightarrow T(m, a, n) = b;$ $(a, b) I [c] \Leftrightarrow a = c;$	- отношение инцидентности;
$[a, b] \parallel [c, d] \Leftrightarrow a = c;$ $(\forall a, b \in A) [a] \parallel [b]$	- отношение параллельности.

Отношение параллельности является отношением эквивалентности на множестве прямых  $L$  и делит  $L$  на классы эквивалентности, называемые направлениями. Направление, содержащее прямую  $L$ ,

обозначается  $\Pi_L$ ; прямая из направления  $\Pi_L$ , проходящая через точку  $p$ , обозначается  $p\Pi_L$ .

Ниже для базовых элементов  $AE$ -структур мы будем использовать следующие обозначения [4] (рис. 1):

для точек  $p_0 = (0, 0)$ ,  $p_1 = (0, 1)$ ,  $p_2 = (1, 0)$ ,  $p_3 = (1, 1)$ ;

для направлений  $\Pi_1 = p_0\Pi_{x=0}$ ,  $\Pi_2 = p_0\Pi_{y=0}$ ,  $\Pi_3 = p_0\Pi_{y=x}$ ;

для прямых  $L_1 = p_0\Pi_1$ ,  $L_2 = p_0\Pi_2$ ,  $L_3 = p_0\Pi_3$ ,  $L_4 = p_2\Pi_1$ .

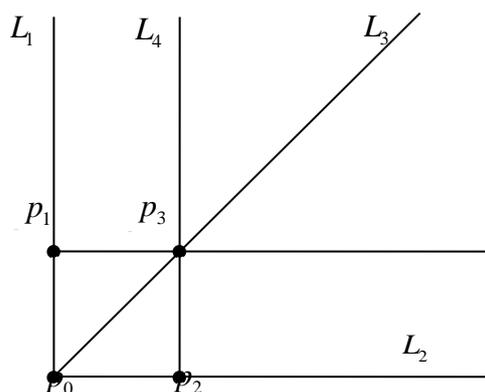


Рис. 1. Базовые элементы  $AE$ -структуры  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$

Геометрические характеристики  $AE$ -структуры  $S_R$  перечислены в [5, свойства (AE1)-(AE6)].

**Определение 2.** Коллинеацией аффинной инцидентностной структуры  $\langle P, L; I, \parallel \rangle$  ( $AI$ -структуры) [2] называется пара биекций  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha_1: P \rightarrow P$  и  $\alpha_2: L \rightarrow L$ , такая, что:

$$(\forall p \in P) (\forall L \in L) (p \parallel L \Leftrightarrow \alpha_1(p) \parallel \alpha_2(L)).$$

Ниже вместо  $\alpha_1: P \rightarrow P$  и  $\alpha_2: L \rightarrow L$  будем писать  $\alpha: P \rightarrow P$  и  $\alpha: L \rightarrow L$  без указания индексов.

**Определение 3.** Коллинеация  $\alpha$   $AE$ -структуры называется невырожденной дилатацией [2], если для любой прямой  $L$ :  $\alpha(L) \parallel L$ .

**Определение 4.** Невырожденная дилатация  $\alpha$   $AE$ -структуры, обладающая инвариантной точкой  $o$ , такой, что любая прямая  $L$ , проходящая через точку  $o$ , также инвариантна, называется центральной коллинеацией, или коллинеацией с центром в точке  $o$ , или  $o$ -коллинеацией.

**Определение 5.**  $AE$ -структура  $S$  называется  $o$ -транзитивной, если для любых двух точек  $p$  и  $q$ , отличных от точки  $o$  и инцидентных прямой, проходящей через точку  $o$ , существует центральная коллинеация  $\gamma$   $AE$ -структуры  $S$  с центром в точке  $o$ , переводящая точку  $p$  в точку  $q$ .

В работе [4] найден алгебраический эквивалент  $(0, 0)$ -транзитивности  $AE$ -структуры  $S$ .

**Теорема 1.** *AE-структура  $S$ , ассоциированная с E-алгеброй  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$ ,  $(0, 0)$ -транзитивна тогда и только тогда, когда E-алгебра  $R$  удовлетворяет условиям:*

- 1)  $T(u, c, v) \cdot a = T(u, c \cdot a, v \cdot a)$ ;
- 2)  $(c + v) \cdot a = c \cdot a + v \cdot a$ ;
- 3) алгебра  $\langle A \setminus \{0\}; \cdot, 1 \rangle$  является группой.

В теореме 1 описаны зависимости между наличием в AE-структуре  $S$  всевозможных центральных коллинеаций с фиксированным центром  $o$  и алгебраическими свойствами E-алгебры  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$ , координатизирующей AE-структуру  $S$ . Ниже мы обсудим ряд вопросов, связанных с наличием в AE-структуре центральных коллинеаций с различными центрами.

**Теорема 2.** *Пусть  $S_R$  - AE-структура, ассоциированная с E-алгеброй  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$ . Если AE-структура  $S_R$   $p_0$ -транзитивна ( $p_0 = (0, 0)$ ), то [4, теорема 2]:*

(AE7) *существует точно одна прямая, проходящая через точку  $q \neq p_0$  и точку  $p_0$ .*

**Теорема 3.** *Пусть  $S_R$  - AE-структура, ассоциированная с E-алгеброй  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$ . Если AE-структура  $S_R$   $o$ -транзитивна для любой точки  $o$ , инцидентной прямой  $L_2$  (прямой с уравнением  $y = 0$ ), то:*

(AE10) *существует точно одна прямая, проходящая через произвольную точку  $q$ , инцидентную прямой  $L_1$ , и точку  $p$ , отличную от  $q$ ;*

(AE11) *две произвольные прямые  $M$  и  $N$  из направлений  $P_1$  и  $P_3$  соответственно пересекаются в единственной точке.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из [5].

**Теорема 4.** *AE-структура  $S_R$ , ассоциированная с E-алгеброй  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$ ,  $o$ -транзитивная для любой точки  $o$ , инцидентной прямой  $L_2$ , является  $P_2$ -транзитивной.*

**Замечание 1.** Вопрос «Является ли AE-структура,  $o$ -транзитивная для любой точки  $o$ , инцидентной прямой  $L_2$ ,  $P_1$ -транзитивной?» остается открытым.

## Литература

1. Емельченков Е.П. Геометрии над алгебрами типа  $\langle 3 \rangle$ . Аффинные тернарные структуры. // Известия Смоленского государственного университета. – 2013. - № 3(23).- С. 365 -379.
2. Емельченков Е.П.  $P$ -транзитивные AE-структуры // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной конференции. - Смоленск: СмолГУ, 2014. - Вып. 15. - С. 143-146.
3. Холл М. Теория групп. - М.: ИЛ, 1980. - 467 с.

4. Емельченков Е.П. Центральные коллинеации  $AE$ -структур и  $E$ -алгебры // Известия Смоленского государственного университета. – 2014. - № 4(28). - С. 327-331.

5. Емельченков Е.П.  $AE$ -структуры с центральными коллинеациями с центрами на прямой  $x=0$  и  $E$ -алгебры // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI международной конференции. - Смоленск: СмолГУ, 2015. - Вып. 16. - С. 150 -156.

## **ЛИНЕЙНОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ЗАМКНУТЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ**

**Э.И. ЗВЕРОВИЧ, Л.Н. ГОТИНА**

Белорусский государственный университет, г.Минск

e-mail: Zverovich@bsu.by; Gotina.lyuba@mail.ru

УДК 517.948.32:517.544

*Ключевые слова: замкнутая риманова поверхность, метод аналитического продолжения, задача линейного сопряжения, алгоритм Евклида, алгебраические функции, евклидовы кольца.*

*В работе изучены линейные функциональные уравнения для целых рациональных функций на замкнутых римановых поверхностях.*

Пусть  $\mathbf{R}$  – замкнутая риманова поверхность рода  $h \geq 0$ . Зафиксировав произвольно точку  $Q_0 \in \mathbf{R}$ , условимся считать ее «бесконечно удаленной». Функции, аналитические всюду на  $\mathbf{R}$ , кроме полюса в точке  $Q_0$ , условимся называть «целыми рациональными функциями» на  $\mathbf{R}$  (короче – «целыми»). Очевидно, что такие функции образуют кольцо, которое будем обозначать через  $K$ . Зададим три функции  $a(Q), b(Q), c(Q) \in K$ , предположив, что функции  $a(Q)$  и  $b(Q)$  не имеют общих нулей (взаимно просты). Рассмотрим функциональное уравнение

$$a(Q)f(Q) + b(Q)g(Q) = c(Q), \quad Q \in \mathbf{R} \quad (1)$$

с неизвестными функциями  $f(Q), g(Q) \in K$ . Такие уравнения исследованы на разрешимость и решены, например, в евклидовых кольцах [2]. Эти решения широко используются в теории алгебраических функций [3; 4]. Однако введенное выше кольцо  $K$  (по крайней мере, на римановых поверхностях рода  $h \geq 1$ ) не является евклидовым. Поэтому возникает проблема исследования уравнения (1) в кольце  $K$ .

С этой целью возьмем односвязную область  $D^+$  с простым гладким

краем  $L$ , такую, что  $D \cup L \subset \mathbf{R}$ . Кроме того, пусть все нули функции  $a(Q)$  лежат в  $D^+$ , а все нули функции  $b(Q)$  лежат в области  $D^- : \mathbf{R} \setminus \overline{D^+}$ . Такую область можно построить, например, следующим образом. Сначала надо взять простую гладкую разомкнутую кривую  $\Gamma$ , проходящую через все нули функции  $a(Q)$  и не содержащую нулей функции  $b(Q)$ , а затем эту кривую немного «раздуть». В качестве «раздутия»  $D^+$  кривой  $\Gamma$  можно взять, например, объединение всех открытых кругов достаточно малого радиуса с центрами, лежащими на  $\Gamma$ . Краю  $L$  области  $D^+$  припишем ориентацию, оставляющую эту область слева.

Если функция  $a(Q)$  не имеет на  $\mathbf{R}$  нулей, то она не имеет и полюсов, и по теореме Лиувилля  $a(Q) \equiv \text{const} \neq 0$ . В этом случае уравнение (1) решается элементарно. Положив, например,  $a(Q) = 1$ , можно задать произвольно  $g(Q) \in K$ , и тогда  $f(Q) = c(Q) - b(Q)g(Q) \in K$ .

В случае, когда  $a(Q)$  имеет на  $\mathbf{R}$  нули, сопоставим уравнению (1) следующую задачу линейного сопряжения (Римана) на римановой поверхности  $\mathbf{R}$ .

*Найти все функции  $f^+(Q)$ , аналитические в  $D^+$  и непрерывные в  $D^+$ , и все функции  $f^-(Q)$ , аналитические в  $D^-$  и непрерывные в  $\overline{D^-}$ , кроме полюса порядка не выше  $p$  в точке  $Q_0$ , по следующему краевому условию:*

$$f^+(Q) = -\frac{b(Q)}{a(Q)} f^-(Q) + \frac{c(Q)}{a(Q)}, \quad Q \in L. \quad (2)$$

Применим к этой задаче известную [1] теорию. Индекс ее коэффициента  $-\frac{b(Q)}{a(Q)}$  равен  $\kappa = -n_\alpha$ , то есть взятому со знаком минус числу нулей функции  $a(Q)$  в области  $D^+$ . Согласно теории задачи Римана, дефектные числа  $l$  и  $l'$  задачи (2) связаны равенством  $l - l' = -n_\alpha + p - h + 1$ . Кроме того, при  $-n_\alpha + p > 2h - 2$  будет  $l' = 0$ ,  $l = -n_\alpha + p - h + 1$ . Это означает, в частности, что при  $p > n_\alpha + 2h - 2$  задача (2) безусловно разрешима, а ее общее решение зависит линейно от  $l$  произвольных постоянных. Известную [1] процедуру построения самих решений задачи (2) здесь опускаем.

В случаях разрешимости уравнение (2) можно рассматривать как тождество, и можно применить к нему теорему об аналитическом продолжении через кривую  $L$ . Учитывая, что функция  $a(Q)$  не обращается в нуль на  $\overline{D^-}$ , видим, что  $f^+(Q)$  аналитически продолжима из  $D^+$  на поверхность  $\mathbf{R} \setminus Q_0$  до функции  $f(Q) \in K$ .

Переписывая тождество (2) в виде

$$f^-(Q) = -\frac{a(Q)}{b(Q)}f^+(Q) + \frac{c(Q)}{b(Q)}, \quad Q \in L \quad (3)$$

и учитывая, что функция  $b(Q)$  не обращается в нуль на  $\overline{D^+}$ , аналогично предыдущему заключаем, что функция  $f^-(Q)$  допускает аналитическое продолжение через кривую  $L$  из области  $\overline{D^-}$  в область  $D^+$  до функции  $g(Q) \in K$ .

Таким образом, уравнение (1) равносильно задаче линейного сопряжения (2), или, что то же самое, задаче (3).

В качестве примера решим методом аналитического продолжения уравнение

$$a(z)f(z) + b(z)g(z) = c(z), \quad z \in \mathbf{C} \quad (4)$$

в полиномах  $f(z)$ ,  $g(z)$ , предположив, что  $a(z)$ ,  $b(z)$ ,  $c(z)$  – заданные полиномы, причем  $a(z)$  и  $b(z)$  – взаимно простые.

С этой целью построим простую гладкую замкнутую кривую  $L \in \mathbf{C}$ , разделяющую корни полиномов  $a(z)$  и  $b(z)$ . Кривая  $L$  разбивает плоскость  $\mathbf{C}$  на две области  $D^+$  (ограниченную) и  $D^-$  (неограниченную). Пусть все корни полинома  $a(z)$  лежат в области  $D^+$ , а все корни полинома  $b(z)$  – в области  $D^-$ . Кривую  $L$  ориентируем так, что при ее обходе в положительном направлении область  $D^+$  остается слева. Сопоставим уравнению (4) следующую краевую задачу Римана:

$$f^+(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}f^-(t) + \frac{c(t)}{a(t)}, \quad t \in L. \quad (5)$$

Решим ее методом аналитического продолжения. Пусть точные степени полиномов  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  равны  $p$ ,  $q$ ,  $r$  соответственно. Разделив равенство (5) на  $b(t)$ , получим

$$\frac{f^+(t)}{b(t)} = -\frac{f^-(t)}{a(t)} + \frac{c(t)}{a(t)b(t)}, \quad t \in L. \quad (6)$$

Разложим полиномы  $a(z)$  и  $b(z)$  на линейные множители

$$a(z) = a_0 \prod_v (z - \alpha_v)^{k_v}, \quad b(z) = b_0 \prod_v (z - \beta_v)^{l_v},$$

где  $\sum_v k_v = p$ ,  $\sum_v l_v = q$ . Затем разложим последнее слагаемое в (6) на простейшие дроби:

$$\frac{c(t)}{a(t)b(t)} = P(t) + \sum_v \sum_{\mu=1}^{k_v} \frac{A_{\mu v}}{(t - \alpha_v)^\mu} + \sum_v \sum_{\mu=1}^{l_v} \frac{B_{\mu v}}{(t - \beta_v)^\mu}, \quad (7)$$

где  $\alpha_v \in D^+$ ,  $\beta_v \in D^-$ ,  $A_{\mu v}, B_{\mu v}$  – константы, а  $P(t)$  – полином степени

$r - p - q$ , если  $r \geq p + q$ , и тождественный нуль, если  $r < p + q$ . Подставив разложение (7) в равенство (6), перепишем полученное равенство в следующем виде:

$$\frac{f^+(t)}{b(t)} - \sum_v \sum_{\mu=1}^{l_v} \frac{B_{\mu v}}{(t - \beta_v)^\mu} = -\frac{f^-(t)}{a(t)} + P(t) + \sum_v \sum_{\mu=1}^{k_v} \frac{A_{\mu v}}{(t - \alpha_v)^\mu}, \quad t \in L.$$

Левая часть этого равенства аналитически продолжима в область  $D^+$ , а правая – в область  $D^-$  и допускает полюс в точке  $\infty$ . Применив к последнему равенству теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля, заключаем, что обе его части равны сужению на  $L$  произвольного полинома  $Q(z)$ . Отсюда находим общее решение задачи (5), а вместе с ним и уравнения (4):

$$f(z) = f^+(z) = b(z) \left[ Q(z) + \sum_v \sum_{\mu=1}^{l_v} \frac{B_{\mu v}}{(z - \beta_v)^\mu} \right];$$

$$g(z) = f^-(z) = a(z) \left[ -Q(z) + P(z) + \sum_v \sum_{\mu=1}^{k_v} \frac{A_{\mu v}}{(z - \alpha_v)^\mu} \right].$$

Преимущество этого решения – его явный вид. Известное ([4, с. 18-19]) решение уравнения (4) с помощью алгоритма Евклида, хотя и не имеет явного вида, но зато не требует нахождения корней полиномов  $a(z)$  и  $b(z)$ .

### Литература

1. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи матем.наук. - Т. XXVI, вып. I (157). - С. 113–179
2. Родосский К.А. Алгоритм Евклида. – М.: Наука, 1988. – 240 с.
3. Уокер Р. Алгебраические кривые. – М.: Издательство иностранной литературы, 1952. – 236 с.
4. Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций. – М.: УРСС, 2004. – 364 с.

## ОЦЕНКА НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА I РОДА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ОТ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

**А.М. ЗУЕВ**

Смоленский государственный университет  
e-mail: zueandrej@yandex.ru

УДК 517.98

Ключевые слова: *усреднение интеграла, несобственный интеграл I рода от произведения бесселевых функций, оценка модуля усреднения.*

В работе исследуется интеграл специального вида, взятый по  $[R; +\infty)$ , от произведения функций Бесселя. Ранее в работах автора рассматривался интеграл от той же подынтегральной функции, взятый по  $[0; R]$ .

В работах [1-2] автором была приведена оценка для усреднения интеграла  $\int_0^R r^{j-s-\frac{1}{2}} \cdot J_{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}}(\mu r) \cos\left(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j\right) dr$ .

В данной работе будет рассматриваться несобственный интеграл от той же функции, взятый по  $[R; +\infty)$ .

Напомним, что усреднением функции  $f(R, \dots)$  называется величина

$$D_{R_0} f = \frac{2}{R_0} \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} f dR.$$

Зададим произвольные  $s \geq 0$  и  $\mu > 0$ . Пусть  $\mu_k$  таково, что  $|\mu - |\mu_k|| < \varepsilon$ .

В силу известной оценки  $|J(x)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{x}}$

$$\left| D_{R_0} \int_R^{+\infty} r^{j-s-\frac{1}{2}} \cdot J_{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}}(\mu r) \cos\left(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j\right) dr \right| \leq C_1 D_{R_0} \int_R^{+\infty} r^{j-s-\frac{1}{2}} (\mu r)^{-\frac{1}{2}} dr = C_1 \mu^{-\frac{1}{2}} D_{R_0} \int_R^{+\infty} r^{j-s-\frac{1}{2}} dr.$$

При  $j < s$  этот интеграл сходится, и изучаемый модуль усреднения есть  $O(1) \cdot \mu^{-\frac{1}{2}}$ .

Пусть теперь  $j > s$  и  $|\mu_k| \geq \mu$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| D_{R_0} \int_R^{+\infty} r^{j-s-\frac{1}{2}} \cdot J_{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}}(\mu r) \cos\left(\mu_k r - j \frac{\pi}{2}\right) dr \right| &= \left| D_{R_0} \int_0^R r^{j-s-\frac{1}{2}} \cdot J_{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}}(\mu r) \cos\left(\mu_k r - j \frac{\pi}{2}\right) dr \right| \leq \\ &\leq C_1 D_{R_0} \int_0^R r^{j-s-\frac{1}{2}} \cdot r^{-\frac{1}{2}} dr \cdot \mu^{-\frac{1}{2}} \leq C_2 \cdot \mu^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Пусть, наконец,  $s < j < s+1$  и  $\mu - \varepsilon < |\mu_k| < \mu$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_R^{+\infty} r^{j-s-\frac{1}{2}} \cdot J_{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}}(\mu r) \cos\left(\mu_k r - j \frac{\pi}{2}\right) dr &= \frac{1}{\mu} \int_R^{+\infty} \cos\left(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j\right) r^{j-2s-2} dr^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{s+\frac{3}{2}}}(\mu r) = \\ &= \frac{1}{\mu} \cos\left(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j\right) r^{j-s-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{s+\frac{3}{2}}}(\mu r) \Big|_R^{+\infty} - \frac{1}{\mu} \int_R^{+\infty} J_{\frac{3}{s+\frac{3}{2}}}(\mu r) \cos\left(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j\right) (j-2s-2) r^{j-s-\frac{3}{2}} dr + \\ &+ \frac{\mu_k}{\mu} \int_R^{+\infty} r^{j-s-\frac{1}{2}} \cdot J_{\frac{3}{s+\frac{3}{2}}}(\mu r) \sin\left(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j\right) dr, \end{aligned}$$

что по модулю есть  $O(1) \cdot \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}} + \left| \frac{\mu_k}{\mu} \int_R^{+\infty} r^{j-s-\frac{1}{2}} \cdot J_{s+\frac{3}{2}}(\mu r) \sin\left(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j\right) dr \right|$ .

Интегрируя и далее по частям, получим ряд, оцениваемый как

$$O(1) \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{|\mu_k|}{\mu} \right)^m = O(1) \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\mu - |\mu_k|}.$$

Заметим, что в приведенных рассуждениях использовалась известная формула

$$\int_0^{+\infty} r^{-s-\frac{1}{2}} \cdot J_{s+\frac{1}{2}}(\mu r) \cos(\mu_k r) dr = \frac{\mu^{s-\frac{1}{2}}}{2a(s)} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^s \delta_k(\mu),$$

где  $a(s) = 2^s (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma(s+1)$ ,  $\delta_k(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\mu_k| < \mu, \\ 0 & \text{при } |\mu_k| \geq \mu. \end{cases}$

Дифференцированием по  $\mu_k$   $j$  раз под знаком интеграла получим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r^{j-s-\frac{1}{2}} \cdot J_{s+\frac{1}{2}}(\mu r) \cos\left(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j\right) dr &= (-1)^j \int_0^{+\infty} \frac{d^j}{d\mu_k^j} \left( r^{-s-\frac{1}{2}} J_{s+\frac{1}{2}}(\mu r) \cos \mu_k r \right) dr = \\ &= (-1)^j \frac{\mu^{s-\frac{1}{2}}}{2a(s)} \delta_k(\mu) \frac{d^j}{d\mu_k^j} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^s. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| D_{R_0} \int_R^{+\infty} r^{j-s-\frac{1}{2}} \cdot J_{s+\frac{1}{2}}(\mu r) \cos\left(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j\right) dr \right|$$

есть  $O(1) \cdot \mu^{-\frac{1}{2}}$  при  $j < s$ , а также при  $j > s$  и  $|\mu_k| \geq \mu$ . В случае  $s < j < s+1$  и  $\mu - \varepsilon < |\mu_k| < \mu$  рассмотренный модуль усреднения есть  $O(1) \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\mu - |\mu_k|}$ .

## Литература

1. Зуев А.М. Оценка интеграла специального вида от бесселевых функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. - Вып.15. - С. 150 -151.
2. Зуев А.М. Интеграл от произведения функций Бесселя и его оценка // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. - Вып.16. - С. 160 -163.

# ПРОБЛЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ РАСПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПРИ НАЛИЧИИ КОНКУРЕНЦИИ ЗА ОДИН ПРИБОР ОБСЛУЖИВАНИЯ

А.В. ИГНАТЕНКОВ, А.М. ОЛЬШАНСКИЙ

ООО «НТЦ ЭЖД», г. Москва

e-mail: a.ignatenkov@gmail.com, lexolshans@gmail.com

УДК 656.2+004.852

Ключевые слова: *искусственная нейронная сеть, функция Ляпунова, связи нейронов, обучение нейронной сети.*

*В данной работе рассматривается подход к решению задачи построения расписания с помощью нейронной сети, анализируются связанные с ним вопросы и ставятся проблемы для дальнейшего исследования.*

Актуальность применения нейронных сетей к планированию транспортных процессов подробно рассмотрена в [2].

В 2014-2015 годах авторами разработана нейронная сеть, представляющая собой многослойную сеть с переменной проводимостью сигнала, работающую на принципах мягкой конкуренции нейронов и переменной скорости обучения.

Топология, расчёт её выхода и правила обучения изложены в [1].

Для применения тех же принципов при построении расписания на однопутном графике авторами разработана многослойная сеть с двумя автономными наборами слоёв нейронов и связей с их весами.

Эта сеть предназначена для разрешения конфликтов, возникающих между поездами, следующими по чётному и нечётному направлению на одном перегоне в одно время.

Конфликты бывают двух видов: *встречный*, когда поезда конкурируют за один перегон и идут по противоположным направлениям, и *попутный*, когда один поезд с более высокой скоростью стремится обогнать другой поезд того же направления.

Для разрешения этих конфликтов авторами предложена процедура обнаружения этих конфликтов и такое изменение весов связей, которое направит сигналы между другими нейронами соседних слоёв.

Эти подходы хорошо себя зарекомендовали для случая использования пропускной способности до 60% от наличной. В целях повышения эффективности работы перегонов предполагается использовать другой подход к решению этой задачи.

Для этого необходимо построить функцию, которая будет отражать вид и количество конфликтов, учитывать плотность движения поездов в

сутках в целом, и разработать способы для её изменения в направлении глобального аттрактора (минимума функции энергии).

Необходимо показать, что полученная функция будет положительно определена для нейронной сети и её производная по времени в окрестности некоторого положения равновесия является отрицательно полуопределенной. Кроме того, нужно отметить, что среди положений равновесия существуют такие, в окрестности которых производная по времени найденной функции будет отрицательно определена.

Это означает, что необходимо синтезировать функцию Ляпунова для рассматриваемой нейронной сети. Её поиск является нетривиальной задачей, т.к. характер созданной нейронной сети включает в себя признаки стохастического поведения весов, несводимый к дифференцированию принцип выбора связей, отсутствие чёткой связи между функцией расчёта значения нейронов и ожидаемым выходом сети.

Данные вопросы являются предметом дальнейших исследований авторов.

### **Литература**

1.Игнатенков А.В., Ольшанский А.М.. Применение искусственной нейронной сети для построения расписаний процессов на примере графика движения поездов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. - 2015. – Т. 2, № 11. - С. 50 -55.

2.Игнатенков А.В., Лысиков М.Г., Ольшанский А.М. Интеллектуальные технологии управления движением на железнодорожном транспорте // Известия СНЦ РАН. - 2015. - Т.17, № 2(5). - С. 1010 -1014.

## **ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ РОБЕНА ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

**В.В. КАРАЧИК**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск  
e-mail: karachik@susu.ru

УДК 519.635.1+517.575

Ключевые слова: *бигармоническое уравнение, задача Робена, условия разрешимости, гармонические полиномы.*

*В работе получено условие существования решений обобщенной задачи Робена для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре.*

Пусть  $S = \{x \in R^n : |x| < 1\}$  - единичный шар в  $R^n$ . Рассмотрим следующую краевую задачу для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x \in S, \quad (1)$$

$$L_1 u \equiv a_{00} u + a_{01} \frac{\partial}{\partial \nu} u + a_{02} \Delta u \Big|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad s \in \partial S, \quad (2)$$

$$L_2 u \equiv a_{11} \frac{\partial}{\partial \nu} u + a_{12} \Delta u + a_{13} \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u \Big|_{\partial S} = \varphi_2(s), \quad s \in \partial S,$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  - внешняя нормальная производная к  $\partial S$ , коэффициенты  $a_{0j}$  при  $j=0,1,2$  и  $a_{1j}$  при  $j=1,2,3$  - действительные и постоянные, а  $f(x), \varphi_1(s), \varphi_2(s)$  - заданные функции. Решением задачи (1)-(2) назовем бигармоническую в  $S$  функцию  $u(x)$  из класса  $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$ , удовлетворяющую на границе  $\partial S$  условиям (2).

Задача (1)-(2) обобщает известную задачу Дирихле [1; 2] при  $a_{00} \neq 0, a_{11} \neq 0$ , а все остальные коэффициенты равны нулю, задачу Рикье при  $a_{00} \neq 0, a_{12} \neq 0$ , а все остальные коэффициенты равны нулю, но не обобщает задачу Неймана [3; 4]. В работе [5] получены условия единственности решения краевой задачи (1)-(2).

Пусть  $n \geq 3$  и  $N_0 = N \cup \{0\}$ . Обозначим вектор коэффициентов при нормальной производной в граничных условиях (2) как  $a_1 = (a_{01}, a_{11})^T$ .

**Теорема.** *Решение задачи (1)-(2) из класса  $u \in C^3(\bar{S})$  существует тогда и только тогда, когда функции  $f \in C^1(\bar{S}), \varphi_1 \in C^2(\partial S)$  и  $\varphi_2 \in C^1(\partial S)$  удовлетворяют равенству*

$$\int_{\partial S} (q_1(m)\phi_1(x) + q_2(m)\phi_2(x)) H_m(x) ds_x = \int_S \left( \frac{a_1 \cdot q(m)}{2(2m+n)} (|x|^2 - 1) + a_{13} q_2(m) \right) f(x) H_m(x) dx,$$

при всяком  $m \in N_0$ , таком, что  $\Delta(m) = 0$ , где

$$\Delta(\lambda) = 2a_{00}(a_{11} + na_{12}) + 2(2a_{00}a_{12} + na_{00}a_{13} + na_{01}a_{12} - na_{02}a_{11})\lambda + 2(2a_{00}a_{13} + 2a_{01}a_{12} + na_{01}a_{13} - 2a_{02}a_{11})\lambda^2 + 4a_{01}a_{13}\lambda^3,$$

$H_m(x)$  - произвольный однородный гармонический полином степени  $m$ , а вектор  $q(m) = (q_1(m), q_2(m))^T$  - решение системы алгебраических уравнений

$$(a_{00} + ma_{01})q_1(m) + ma_{11}q_2(m) = 0,$$

$$[a_{00} + (m+2)a_{01} + (4m+2n)a_{02}]q_1(m) + [(m+2)a_{11} + (4m+2n) \times$$

$$\times (a_{12} + ma_{13})]q_2(m) = 0.$$

### Литература

1. Карачик В.В., Антропова Н.А Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 2. – С. 250–254.
2. Карачик В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2014. - Т. 54, № 7. - С. 1149–1170.
3. Карачик В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. - Т. XVI, № 4(56). - С. 61–74.
4. Карачик В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2014. - Т. 50, № 11. – С. 1455–1461.
5. Karachik V. V., Sadybekov M. A., Torebek B. T. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – V. 2015, No.244. –P. 1–9.

## О НЕКОТОРЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ

**Е. КИРЬЯЦКИЙ, Э. КИРЬЯЦКИЙ**

Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса  
e-mail: Eduard.kiriyatzkii@takas.lt, jk@vgtu.lt

УДК 517.54

Ключевые слова: *числовой оператор, циклы, последовательность.*

*В работе рассматриваются свойства некоторых специальных операторов на множестве натуральных чисел. Находятся циклы и неподвижные точки этих операторов, а также их связь с решениями специальных диофантовых уравнений.*

Пусть  $l$  – количество цифр числа  $A$ , записанного в десятичной системе счисления, и  $G(s)$  – множество всех натуральных чисел, для которых  $l \leq s$ . Последовательность  $A_1, A_2, A_3, \dots$  назовем циклической, если она, начиная с некоторого места, содержит цикл,  $[A_j, A_{j+1}, \dots, A_m]$ ,  $j \leq m$ , повторяющийся подряд бесконечно много раз. Если для любого натурального числа  $A_1$  последовательность  $F(A_n) = A_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  является циклической, то числовой оператор  $F$  называется циклическим. Мы говорим, что такой оператор имеет циклы. Введем операторы:

$$F_k(A) = a_1^k + a_2^k + \dots + a_{n-1}^k + a_n^k, \quad F_k^*(A) = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)^k,$$

где  $A = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10 + a_n$  и  $0 < a_1 \leq 9, 0 \leq a_2 \leq 9, \dots, 0 \leq a_n \leq 9$ .

**Теорема 1.** Для любого натурального значения  $k$  числовой оператор  $F_k$  является циклическим. Все его циклы образуются только из тех натуральных чисел, которые принадлежат конечному множеству  $G(k+1)$ , где  $s = k+1$ .

С помощью компьютера найдем циклы оператора  $F_k$ , полагая  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Оператор  $F_1$  имеет циклы [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9].

Оператор  $F_2$  имеет циклы [1], [4; 16; 37, 58, 89, 145, 42, 20].

Оператор  $F_3$  имеет циклы [1], [153], [370], [371], [407], [136; 244], [919; 1459], [55; 250; 133], [160; 217; 352].

Оператор  $F_4$  имеет циклы [1], [1634], [8208], [9474], [2178; 6514], [1138; 4179; 9219; 13139; 6725; 4338; 4514].

**Теорема 2.** Для любого натурального значения  $k$  числовой оператор  $F_k^*$  является циклическим. Все его циклы образуются только из тех натуральных чисел, которые принадлежат конечному множеству  $G(s)$ , где  $s$  – наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству  $10^{s-1} < 9^k s^k$ .

С помощью компьютера найдем циклы оператора  $F_k^*$ , полагая  $k = 2, 3, 4$ .

Оператор  $F_2^*$  имеет циклы [1], [81], [169; 256].

Оператор  $F_3^*$  имеет циклы [1], [512], [4913], [5832], [17576], [19683], [6859; 21952].

Оператор  $F_4^*$  имеет циклы [1], [2401], [243256], [390625], [614656], [1679616], [104976; 531441].

Других циклов операторы  $F_k, F_k^*, k = 1, 2, 3, 4$  не имеют. Аналогичным образом находятся циклы операторов (они всегда существуют) при  $k \geq 5$ . С помощью одноэлементных циклов можно решать некоторые диофантовы уравнения. Например, уравнению  $10^2 x_1 + 10x_2 + x_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$  удовлетворяют только тройки чисел: (0, 0, 1), (1, 5, 3), (3; 7; 0), (3, 7, 1), (4, 0, 7). Уравнению  $10^3 x_1 + 10^2 x_2 + 10x_3 + x_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$  удовлетворяют только четверки чисел: (0, 0, 0, 1), (1, 6, 3, 4), (8, 2, 0, 8), (9, 4, 7, 4). Число  $A$  называется неподвижной точкой оператора  $F$ , если  $F(A) = A$ . Заметим, что, решая уравнения  $F_k(A) = A$  или  $F_k^*(A) = A$ , мы ищем одноэлементные циклы операторов  $F_k, F_k^*$ .

Примеры:

$$F_3(407) = 407, F_4(8208) = 8208, F_3^*(512) = 512, F_4^*(2401) = 2401.$$

## О КОРНЯХ НЕПОЛНОГО МНОГОЧЛЕНА

**Е. КИРЬЯЦКИЙ, Э. КИРЬЯЦКИЙ**

Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса

e-mail: Eduard.kiriyatzkii@takas.lt, jk@vgtu.lt

УДК 571.54

Ключевые слова: комплексные корни, неполный многочлен, угловая область.

*В работе изучается поведение корней неполного многочлена специального вида в угловой области.*

Пусть  $D(\alpha)$  – угловая область комплексной плоскости, ограниченная двумя лучами  $L_1, L_2$ , выходящими из начала координат и образующими между собой угол  $\alpha$ . Замыкание угловой области  $D(\alpha)$  обозначим  $\bar{D}(\alpha)$ . Запишем неполный многочлен в виде

$$F_{k,n}(z) = c_0 + c_{k+1}z^{k+1} + c_{k+2}z^{k+2} + \dots + c_{k+n-1}z^{k+n-1} + c_{k+n}z^{k+n}, \quad c_0 \neq 0, c_{k+1} \neq 0.$$

**Теорема 1.** *Имеют место следующие утверждения:*

1. Пусть  $n \geq 2, k \geq 2$ . Тогда многочлен  $F_{k,n}(z)$  имеет не более  $n$  корней на замыкании  $\bar{D}\left(\frac{2\pi}{k+1}\right)$ .

2. Пусть  $n = 1, k \geq 1$ . Тогда многочлен  $F_{k,1}(z)$  имеет не более двух корней на замыкании  $\bar{D}\left(\frac{2\pi}{k+1}\right)$ .

3. Пусть  $n \geq 1, k = 1$ . Тогда многочлен  $F_{1,n}(z)$  имеет не более  $n$  корней в угловой области  $D(2\pi/k+1)$ . Этот многочлен может иметь  $n+1$  корней  $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$  на замыкании  $\bar{D}\left(\frac{2\pi}{k+1}\right)$  тогда и только тогда, когда корни лежат на лучах  $L_1, L_2$  и  $\xi_1^{-1} + \dots + \xi_{n+1}^{-1} = 0$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – отличные от нуля произвольно взятые точки комплексной плоскости. Тогда для любого натурального  $k$  среди неполных многочленов  $F_{k,n}(z)$  существует единственный многочлен, имеющий  $\xi_1, \dots, \xi_n$  своими корнями.

## О СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

**Е. КИРЬЯЦКИЙ, Э. КИРЬЯЦКИЙ**

Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса

e-mail: Eduard.kiriyatzkii@takas.lt, jk@vgtu.lt

УДК 517.54

Ключевые слова: *симметрическая функция, полуплоскость.*

*В работе рассматривается симметрическая функция многих комплексных переменных специального вида. Находятся те области комплексной плоскости, в которых эта функция отлична от нуля.*

В сообщении устанавливается следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $k$  и  $n$  – произвольно фиксированные натуральные числа. Тогда

$$\Psi_k(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum (z_0^{j_0})^{\frac{2}{k+1}} \cdot \dots \cdot (z_n^{j_n})^{\frac{2}{k+1}} \neq 0$$

*(сумма распространена на все целые неотрицательные числа  $j_0, j_1, \dots, j_n$ , удовлетворяющие условию  $j_0 + j_1 + \dots + j_n = k$ ), где  $z_0, z_1, \dots, z_n$  – любые комплексные числа, расположенные по одну и ту же сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат.*

**Замечание.** При  $k=1$  и любом натуральном  $n$  мы получим хорошо известную лемму Гаусса о сумме комплексных чисел.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Я.И. РИВКИНДА

**Е. КИРЬЯЦКИЙ, Д. КИРЬЯЦКИЙ**

Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса

Вильнюс, ЗАО, «ОРАКУЛАС»

e-mail: jk@vgtu.lt, Dmitr.kir@gmail.com

УДК 517.54

Ключевые слова: *область, контур, последовательность.*

*В работе найдены предельные точки последовательности Ривкинда, построенной на окружности.*

Задача Ривкинда. На плоскости задана выпуклая область  $D$ , ограниченная простым замкнутым контуром  $L$ . Произвольным образом берется точка  $A_1 \in L$ . Двигаясь по  $L$  в положительном направлении,

берем вторую точку  $A_2 \in L$ . Далее движемся по  $L$  от точки  $A_2$  в положительном направлении до тех пор, пока не встретим точку  $A_3 \in L$ , равноудаленную от точек  $A_1$  и  $A_2$ . Продолжая указанный процесс, находим точку  $A_4 \in L$ , равноудаленную от точек  $A_2$  и  $A_3$ . В итоге получаем бесконечную последовательность точек  $A_n$ ,  $n=1,2,3,\dots$ , обладающую свойством: каждая точка  $A_k$ , где  $k \geq 3$ , одинаково удалена от точек  $A_{k-2}$  и  $A_{k-1}$ . Требуется найти предельные точки данной последовательности; рассмотреть случаи окружности, квадрата, треугольника.

Назовем построенную выше последовательность точек последовательностью Ривкинда.

**Теорема.** *Последовательность Ривкинда для окружности имеет три предельные точки, расположенные в вершинах равностороннего треугольника.*

## СРАВНЕНИЕ ПРИЗНАКОВ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д.А. КОМИССАРОВА

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск  
e-mail: darya-komissar@mail.ru

УДК 517.929.2

Ключевые слова: *устойчивость, разностное уравнение.*

*В работе сравниваются известные достаточные условия асимптотической устойчивости линейных разностных уравнений.*

Рассмотрим линейное разностное уравнение порядка  $k$

$$x_n = \sum_{i=1}^k a_i x_{n-i}, \quad (1)$$

где  $a_i \in N$ ,  $a_i \geq 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ).

Под асимптотической устойчивостью уравнения (1) будем понимать асимптотическую устойчивость его нулевого решения.

Для частного случая уравнения (1), а именно уравнения

$$x_n = ax_{n-m} + bx_{n-k}, \quad (2)$$

при  $a=1$ ,  $m=1$  Левиным и Мэем [1] был найден критерий асимптотической устойчивости.

Позднее Куруклис [2] определил область устойчивости уравнения (2) при  $m=1$  в пространстве параметров  $(a,b)$ .

В работах Кука и Дъери 1994 года, Дъери и Хартунга 2001 года получены достаточные признаки устойчивости уравнения (1).

**Теорема 1** (Кук - Дъери, [3]). Если  $a_i \geq 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) и

$$0 < \sum_{i=1}^k ia_i < 1,$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

**Теорема 2** (Дъери - Хартунг, [4]). Если  $a_i \geq 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) и

$$0 < \sum_{i=1}^k ia_i < 1 + \frac{1}{e},$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

В работе Кипниса и Комиссаровой [5] получены следующие признаки устойчивости уравнения (1).

**Теорема 3.** Если  $a_i \geq 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) и

$$0 < \sum_{i=1}^k ia_i \leq \frac{\pi}{2},$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

**Теорема 4.** Если  $a_i \geq 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) и

$$0 < \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{2 \sin \frac{\pi}{2(2i-1)}} < 1,$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Сравним ограничения, накладываемые различными достаточными признаками устойчивости на коэффициенты уравнения (1).

**Теорема 1:**

$$1.000a_1 + 2.000a_2 + 3.000a_3 + 4.000a_4 + 5.000a_5 + \dots < 1.$$

**Теорема 2:**

$$0.731a_1 + 1.462a_2 + 2.193a_3 + 2.924a_4 + 3.655a_5 + \dots < 1.$$

**Теорема 3:**

$$0.637a_1 + 1.273a_2 + 1.910a_3 + 2.546a_4 + 3.183a_5 + \dots \leq 1.$$

**Теорема 4:**

$$0.500a_1 + 1.000a_2 + 1.618a_3 + 2.247a_4 + 2.879a_5 + \dots < 1.$$

Очевидно, что теоремы 3 и 4 являются более сильными достаточными признаками асимптотической устойчивости уравнения (1), чем ранее известные.

### Литература

1. Levin S.A., May R. A note on difference-delay equations // Theor. Pop. Biol. – 1976. – V. 9, № 8. – P. 178-187.
2. Kuruklis S.A. The asymptotic stability of  $x(n+1)-ax(n)+bx(n-k)=0$  // J. Math. Anal. Appl. – 1994. – V. 188, № 3. – P. 719-731.
3. Cooke K.L., Gyori I. Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piecewise constant arguments // Comp. Math. Appl. – 1994. – V. 28. – P. 81-92.
4. Gyori I., Hartung F. Stability in delay perturbed differential and difference equations // Fields Institute Communications. – 2001. – V. 29. – P. 181-194.
5. Kipnis M.M., Komissarova D.A. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations // J. Difference Equ. Appl. – 2007. – V. 13, № 5. – P. 457-461.

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОИСКА РАВНОВЕСИЙ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ

К.Н. КУДРЯВЦЕВ<sup>1</sup>, И.С. СТАБУЛИТ<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск

<sup>2</sup>Челябинский государственный университет, г. Челябинск

<sup>3</sup>Южно-Уральский государственный аграрный университет, г. Челябинск

e-mail: <sup>1</sup>kudrkn@gmail.com, <sup>2</sup>irisku76@mail.ru

УДК 519.833.3

Ключевые слова: *равновесие по Нэшу, оптимальность по Парето, биматричная игра, смешанные стратегии, дифференциальная эволюция.*

*Предложен алгоритм поиска максимального по Парето равновесия по Нэшу в биматричной игре, основанный на построении седловой точки вспомогательной антагонистической игры.*

Основным принципом оптимальности в теории бескоалиционных игр является равновесие по Нэшу (*NE*), определенное в [1]. Однако это понятие имеет серьезный недостаток – оно *внутренне неустойчиво*. А именно в игре может существовать несколько различных ситуаций равновесия по Нэшу, причем выигрыши всех игроков в некоторых из них могут быть больше, чем в других. Избавиться от такого «негатива» можно, выбирая из всех равновесий по Нэшу максимальное по Парето (*PoNE*). Однако все разработанные на настоящий момент численные

методы построения равновесия по Нэшу приводят лишь к какому-нибудь из равновесий и не могут гарантировать его оптимальность по Парето. Известные нам методы поиска *PoNE* сводятся к нахождению множества всех ситуаций равновесия по Нэшу с последующим построением их Парето-границы. Но даже для класса биматричных игр построение множества всех *NE* является NP-сложной задачей.

Предлагаемый алгоритм поиска *PoNE* основывается на работе [2], где для бескоалиционной игры  $N$  лиц были выявлены достаточные условия существования *PoNE* и предложен способ его построения.

Рассмотрим бескоалиционную игру  $N$  лиц в нормальной форме

$$\langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle. \quad (1)$$

В (1) множество игроков  $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ , стратегии  $x_i \in X_i \subseteq R^{n_i}$  ( $i \in \mathbf{N}$ ), ситуации  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ , функция выигрыша  $i$ -го игрока есть  $f_i(x)$ .

Построим гермейеровскую свертку функций выигрыша игры  $\Gamma$

$$\varphi(x, z) = \max \left\{ [f_i(z \| x_i) - f_i(z) \quad (i \in \mathbf{N})], \sum_{r \in \mathbf{N}} f_r(x) - \sum_{r \in \mathbf{N}} f_r(z) \right\}, \quad (2)$$

заданную на  $X \times (Z = X)$ , здесь  $(x \| z_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

Сопоставим игре  $\Gamma$  вспомогательную антагонистическую игру

$$\langle X, Z = X, \varphi(x, z) \rangle. \quad (3)$$

Седловая точка  $(x^0, z^*)$  в игре (3) определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x, z^*) \leq \varphi(x^0, z^*) \leq \varphi(x^0, z) \quad \forall x, z \in X.$$

**Теорема 1** [2] (Достаточные условия существования *PoNE*). *Если в антагонистической игре (3) существует седловая точка  $(x^0, z^*)$ , то минимаксная стратегия  $z^*$  есть *PoNE* в бескоалиционной игре (1).*

Следующий алгоритм построения *PoNE* в бескоалиционной игре (1) диктуется теоремой 1:

*во-первых*, построить по формуле (2) функцию  $\varphi(x, z)$ ;

*во-вторых*, найти седловую точку  $(x^0, z^*)$  функции  $\varphi(x, z)$ .

Тогда найденная ситуация  $z^* \in X$  как раз и будет являться *PoNE* в бескоалиционной игре (1).

Данный алгоритм был реализован для биматричной игры в среде Maple. Для поиска минимаксной стратегии  $z^*$  использовалась модификация метода дифференциальной эволюции [3]. Отметим, что похожий алгоритм может быть использован и для поиска равновесия по Бержу - Парето [4; 5].

## Литература

1. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. - 1950. - V. 36. -P.48-49.

2. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Парето-равновесная ситуация: достаточные условия и существование в смешанных стратегиях // Математическая теория игр и ее приложения. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 74–91.

3. Storn R and Price K Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // Journal of Global Optimization. – 1997. – V. 11. – P.341–359.

4. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Математические основы Золотого правила. I. Статический вариант // Математическая теория игр и ее приложения. – 2015. – Т. 7, № 3. – С. 16–47.

5. Кудрявцев К.Н. О равновесии Бержа-Парето // Наука ЮУрГУ: материалы 67-й научной конференции. Секции естественных наук. – Челябинск: ЮУрГУ, 2015. – С. 167–170.

## О РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО РОДА

**О.Н. КУПРИКОВА**

Смоленский филиал МИИТ

e-mail: onkuprikova@mail.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *квазигармоническая функция, краевая задача с производной, дифференциальное уравнение, единичный круг.*

*В статье разработан конструктивный алгоритм решения одной задачи с производной в краевых условиях в классах квазигармонических функций второго рода в единичном круге.*

**1. Постановка задачи.** Обычно (см., например, [1]) квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$  на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , а  $n$  – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно (см., например, [1]-[3]), что всякую квазигармоническую функцию рода  $n$  в области  $T^+$  можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где  $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi(z)$  – аналитическая в области  $T^+$  функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции  $W(z)$ .

Пусть гладкий контур  $L$  – граница области  $T^+$ . Следуя [1], будем говорить, что квазигармоническая функция  $W(z)$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) принадлежит классу  $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , т.е. аналитическая функция  $\varphi(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число). Рассматривается следующая краевая задача.

**Задача  $A_n$ .** Требуется найти все квазигармонические функции  $W(z)$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ), принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию

$$\frac{\partial W(t)}{\partial \bar{t}} + G(t) \overline{W(t)} = g(t), \quad (3)$$

где  $\frac{\partial W(t)}{\partial \bar{t}} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}}$ , а  $G(t)$  и  $g(t)$  – заданные на  $L$  функции класса  $H(L)$  (т.е. удовлетворяющие на  $L$  условию Гельдера), причем  $G(t) \neq 0$ .

Впервые задача  $A_n$  в случае  $n=1$  и  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  была исследована в работе автора [4]. Основной целью настоящего сообщения является построение метода решения задачи  $A_n$  в классах квазигармонических функций *второго рода* в единичном круге, т.е. когда  $n=2$ ,  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  и  $L = \{t: |t| = 1\}$ .

**2. Метод решения задачи  $A_2$  в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ .** Согласно (2), всякую квазигармоническую второго рода в круге  $T^+$  функцию  $W(z)$ , принадлежащую классу  $\mathcal{Q}_2(T^+) \cap H^{(3)}(L)$ , можно представить в виде

$$W(z) = \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - 6 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right) \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \varphi^+(z), \quad (4)$$

где  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(3)}(L)$ .

С учетом представления (4) краевое условие (3) при  $n=2$  примет вид:

$$-\frac{3}{2} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{3}{t} \varphi^+(t) + G(t) \left( \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} - 3t \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + 3t^2 \cdot \overline{\varphi^+(t)} \right) = g(t), \quad t \in L. \quad (5)$$

Вводя в рассмотрение аналитическую в  $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$  функцию

$$\varphi^-(z) = \overline{\varphi^+ \left( \frac{1}{z} \right)}, \quad z \in T^-, \quad (6)$$

краевое условие (5) перепишем в виде

$$t \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - 2\varphi^+(t) = G_1(t) \left( \frac{d^2 \varphi^-(t)}{dt^2} + \frac{5}{t} \frac{d\varphi^-(t)}{dt} + \frac{3}{t^2} \varphi^-(t) \right) + g_1(t), \quad t \in L, \quad (7)$$

где  $G_1(t) = \frac{2}{3} t^5 G(t)$ ,  $g_1(t) = -\frac{2}{3} t g(t)$ .

Теперь, вводя в рассмотрение две вспомогательные функции

$$\Phi^+(z) = z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - 2\varphi^+(z), \quad z \in T^+, \quad (8)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} + \frac{5}{z} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + \frac{3}{z^2} \varphi^-(z), \quad z \in T^-, \quad (9)$$

где  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ ,  $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(2)}(L)$ , перепишем равенство (7) так:

$$\Phi^+(t) = G_1(t) \Phi^-(t) + g_1(t), \quad t \in L. \quad (10)$$

Но равенство (10) представляет собой краевое условие хорошо известной (см., например, [1, с. 59]) задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ .

Пусть  $\chi_1 = \chi + 5$  - индекс задачи Римана (10), где  $\chi = \text{Ind}G(t)$ . Тогда, как известно (см., например, [1, с. 46]), если  $\chi_1 \geq 0$ , то задача Римана (10) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать формулами:

$$\Phi^\pm(z) = X^\pm(z) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau^n g(\tau)}{X^+(\tau) \tau - z} d\tau + P_\chi(z) \right\}, \quad (11)$$

где  $X(z) = \{X^+(z), X^-(z)\}$  - каноническая функция задачи Римана, а  $P_{\chi_1}(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_{\chi_1} z^{\chi_1}$  - многочлен степени не выше  $\chi_1$  с произвольными комплексными коэффициентами.

Если  $\chi_1 < 0$ , то для разрешимости задачи Римана (10) необходимо и достаточно выполнение  $-\chi - 1$  условий вида

$$\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)} t^{n+k-1} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\chi_1 - 1. \quad (12)$$

При выполнении условий (12) задача (10) имеет единственное решение, которое также задается формулой (111), где нужно положить  $P_{\chi_1}(z) \equiv 0$ .

Предположим, что задача Римана (10) разрешима и уже найдено ее общее решение  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ .

Далее, в классе  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$  решаем линейное дифференциальное уравнение Эйлера вида

$$z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - 2\varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T^+. \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что для разрешимости дифференциального уравнения (13) в классе аналитических функций  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\int_L \frac{\Phi^+(t)}{t^3} dt = 0. \quad (14)$$

**Замечание 1.** Отметим, в случае  $\chi_1 \geq 0$  условие (14) может быть удовлетворено за счет определенного выбора значений произвольных постоянных, входящих в выражение функции  $\Phi^+(z)$ .

При выполнении условия (14) общее решение дифференциального уравнения (13) можно задавать формулой:

$$\varphi^+(z) = z^2 \left\{ A_1 + \int z^{-3} \Phi^+(z) dz \right\}, \quad z \in T^+, \quad (15)$$

где  $\int \frac{\Phi^+(z)}{z^3} dz$  - фиксированная первообразная функции  $\frac{\Phi^+(z)}{z^3}$  в круге  $T^+$ , а  $A_1$  - произвольная комплексная постоянная.

Решаем теперь линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} + \frac{5}{z} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + \frac{3}{z^2} \varphi^-(z) = \Phi^-(z), \quad z \in T^-, \quad (16)$$

в классе функций  $A(T^-) \cap H^{(2)}(L)$ .

Легко проверить, что функции  $\varphi_{10}(z) = \frac{1}{z}$ ,  $\varphi_{20}(z) = \frac{1}{z^3}$  образуют фундаментальную систему решений соответствующего (16) однородного дифференциального уравнения. Далее, решая неоднородное дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных, можно установить, что при выполнении следующих двух условий разрешимости

$$\int_L t^m \Phi^-(t) dt = 0, \quad m = 2, 4, \quad (17)$$

общее решение дифференциального уравнения (16) можно задавать формулой:

$$\varphi^-(z) = \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^3} - \frac{1}{2z} \int z^2 \Phi^-(z) dz + \frac{1}{2z^3} \int z^4 \Phi^-(z) dz, \quad z \in T^-, \quad (18)$$

где  $\int z^2 \Phi^-(z) dz$  и  $\int z^4 \Phi^-(z) dz$  – фиксированные первообразные функций  $z^2 \Phi^-(z)$  и  $z^4 \Phi^-(z)$  соответственно в области  $T^-$ , а  $B_1$  и  $B_2$  – произвольные комплексные постоянные.

Наконец, среди решений дифференциальных уравнений (13) и (16) отбираем лишь те, которые удовлетворяют на  $L$  условию «симметрии»:

$$\overline{\varphi^+(t)} = \varphi^-(t), \quad t \in L. \quad (19)$$

Пусть  $\tilde{\varphi}^+(z)$  – те из решений дифференциального уравнения (13), которые удовлетворяют условию (19). Тогда решение искомой краевой задачи  $A_2$  в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  можно найти по формуле

$$W(z) = \frac{d^2 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^2} - 6 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right) \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} + 12 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \tilde{\varphi}^+(z). \quad (20)$$

## Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013. – 189 с.
2. Расулов К.М. О краевой задаче типа Римана в классах квазигармонических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI междунар. научной конф.. - Смоленск, 2015. – Вып. 16. – С. 201–204.
3. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung  $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. – 1965. – Schriften 23.
4. Куприкова О.Н. Об одной краевой задаче в классах квазигармонических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI междунар. научной конф. – Смоленск, 2015. – Вып. 16. – С. 183–186.

# ОБОБЩЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ТИПА

С.Ю. КУРИЦЫН, К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет  
e-mail: KuritsynSergey@me.com, kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *метааналитическая функция второго типа, обобщенная краевая задача типа Римана, интегральные члены, гладкие кривые.*

*В статье разработан алгоритм решения одной обобщенной краевой задачи Римана в классах метааналитических функций второго типа в случае произвольных односвязных областей с гладкими границами.*

Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым замкнутым гладким контуром  $L \in C_\mu^2$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ .

Обычно (см., например, [1, с. 139] или [2]) *кусочно метааналитической функцией с линией скачков  $L$*  называют функцию  $F(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , которая в двух дополняющих друг друга до расширенной комплексной плоскости областях  $T^+$  и  $T^-$  определяется так:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]\exp\{\lambda_0\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)]\exp\left\{\lambda_0\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (1)$$

или

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z)\exp\{\lambda_1\bar{z}\} + \varphi_1^+(z)\exp\{\lambda_2\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z)\exp\left\{\lambda_1\frac{\bar{z}}{z^m}\right\} + \varphi_1^-(z)\exp\left\{\lambda_2\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varphi_k^\pm(z) \in A(T^\pm)$ ,  $k = 0, 1$ , а  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  – некоторые постоянные ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ),  $m \in \mathbb{N}$  и  $m \geq 2$ , причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

В дальнейшем функцию  $F(z)$ , задаваемую формулой (1), назовем *кусочно метааналитической функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулой (2), – *кусочно метааналитической функцией второго типа*.

Кроме того, кусочно метааналитическую функцию  $F(z)$  вида (1) (или (2)) будем называть *исчезающей на бесконечности*, если  $\prod\{\varphi_k^-, \infty\} \geq k+1$  (или  $\prod\{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1$ ), где  $k=0,1$ .

Наконец, будем говорить, что кусочно метааналитическая функция  $F(z)$  с линией скачков  $L$  принадлежит классу  $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$ , если ее аналитические компоненты  $\varphi_k^\pm(z)$  ( $k=0,1$ ) непрерывно продолжаются на границу  $L$  вместе со своими производными  $\frac{d\varphi_k^\pm(z)}{dz}$  ( $k=0,1$ ), причем так, что граничные значения функций  $\varphi_k^\pm(z)$  ( $k=0,1$ ) и указанных производных удовлетворяют на  $L$  условию Гёльдера.

Рассматривается следующая краевая задача (см. также [2]). *Требуется найти все кусочно метааналитические функции  $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$  класса  $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$ , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на  $L$  следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) + G_1(t)F^-(t) + \int_L A_1(t, \tau)F^+(\tau)d\tau + \int_L B_1(t, \tau)F^-(\tau)d\tau = g_1(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} + G_2(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + \int_L A_2(t, \tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial n_+}d\tau + \int_L B_2(t, \tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial n_-}d\tau = ig_2(t), \quad (4)$$

где  $G_k(t)$ ,  $g_k(t)$  ( $k=1,2$ ) – заданные на  $L$  функции класса  $H^{(1)}(L)$ , причем  $G_k(t) \neq 0$ , а  $A_k(t, \tau)$ ,  $B_k(t, \tau)$  ( $k=1,2$ ) – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу  $H_*^{(1)}(L \times L)$ ,  $\frac{\partial}{\partial n_\pm}$  – производная по внутренней (внешней) нормали к контуру  $L$ .

Сформулированную выше краевую задачу будем называть *второй основной обобщенной краевой задачей типа Римана в классах метааналитических функций*, или, короче, *задачей  $GR_{2,M}$* , а соответствующую однородную задачу ( $g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$ ) – *задачей  $GR_{2,M}^0$* .

Отметим, что в классе функций вида (1) метод решения задачи  $GR_{2,M}$  был предложен в работе авторов [2]. Основной целью настоящего сообщения является разработка общего метода решения задачи  $GR_{2,M}$  в классе функций вида (2).

Установлен следующий основной результат.

**Теорема 1.** *Если  $L \in C_\mu^2$ , то решение задачи  $GR_{2,M}$  в классе кусочно метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению следующих двух обобщенных задач Римана относительно неизвестных кусочно аналитических функций  $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$  и  $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$ :*

$$\varphi_1^+(t) - G_{21}(t)\varphi_1^-(t) + \int_L A_{21}(t, \tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \int_L B_{21}(t, \tau)\varphi_1^-(\tau)d\tau = Q_2(t) \quad (5)$$

и

$$\varphi_0^+(t) - G_{11}(t)\varphi_0^-(t) + \int_L A_{11}(t, \tau)\varphi_0^+(\tau)d\tau + \int_L B_{11}(t, \tau)\varphi_0^-(\tau)d\tau = Q_1(t), \quad (6)$$

где функции  $G_{k1}(t)$  ( $k=1, 2$ ) и фредгольмовы ядра  $A_{k1}(t, \tau)$ ,  $B_{k1}(t, \tau)$  ( $k=1, 2$ ) вполне определенным образом выражаются через коэффициенты  $G_k(t)$ ,  $g_k(t)$  ( $k=1, 2$ ) краевых условий (3), (4).

При этом обобщенная задача Римана (5) не зависит от  $\varphi_0^\pm(z)$ , а в свободный член  $Q_1(t)$  краевого условия задачи Римана (6) входят граничные значения функций  $\varphi_1^\pm(z)$ .

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 344 с.
2. Курицын С.Ю., Расулов К.М. Обобщенная задача типа Римана для метааналитических функций в случае произвольных односвязных областей // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. / СмолГУ. - Смоленск, 2015. – Вып. 16. – С. 186–191.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЕЛ БЕССЕЛЯ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Р.М. МАВЛЯВИЕВ, И.Б. ГАРИПОВ**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань  
e-mail: mavly72@mail.ru, ilnur\_garipov@mail.ru

УДК 517.956.2

Ключевые слова: числа Бесселя, полигармоническое уравнение, ядра потенциалов.

*В работе изучен вопрос представления ядер потенциалов для полигармонического уравнения с помощью чисел Бесселя.*

В  $n$ -мерном евклидовом пространстве дана односвязная область ограниченная достаточно гладкой границей  $\Gamma$ . Через граничную точку  $P$  проведена внешняя нормаль  $\nu$ . Пусть  $\theta$  – угол между векторами  $\nu$  и  $r$ , где  $r$  – радиус вектор точки  $P$  относительно внутренней точки  $M$  области  $D$ .

Обозначим через

$$\Delta \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1)$$

$n$ -мерный оператор Лапласа.

Для полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = 0 \quad (2)$$

можно поставить различные внутренние и внешние краевые задачи. Одним из классических способов решения краевых задач является метод потенциалов. В работе [1] для уравнения (2) построены ядра потенциалов

$$K_{m,\mu}(P, M) = \frac{\cos^{2m-\mu} \theta}{r^{n-m}}, \quad (\mu = \overline{1, m}). \quad (3)$$

Ядра (3) можно записать в виде линейной комбинации нормальных производных фундаментальных решений уравнения (2)

$$\frac{\cos^{2m-\mu} \theta}{r^{n-m}} = \sum_{i=\left[\frac{\mu+1}{2}\right]}^m c(m, \mu, i) \frac{\partial^{2i-\mu} r^{2i-n}}{\partial v^{2i-\mu}}. \quad (4)$$

Отыскание нормальных производных и дальнейший подбор коэффициентов  $c(m, \mu, i)$  при больших значениях  $m$  приводят к громоздким вычислениям.

Целью настоящей работы является частичное преодоление этих трудностей.

В работе [2] доказана формула

$$\frac{\partial^q r^l}{\partial v^q} = r^{l-q} \sum_{j=0}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{q! \prod_{t=0}^{q-j-1} (1-2t)}{j!(q-2j)!2^j} \cos^{q-2j} \theta. \quad (5)$$

Как известно из области дискретной математики [3], формулой

$$B(a, b) = \frac{a!}{(a-b)!(2b-a)!2^{a-b}} \quad (6)$$

задаются так называемые числа Бесселя. Из (6) при значениях параметров  $a = q$  и  $b = q - j$  получаем

$$B(q, q-j) = \frac{q!}{j!(q-2j)!2^j}. \quad (7)$$

С учетом (7) перепишем формулу (5)

$$\frac{\partial^q r^l}{\partial v^q} = r^{l-q} \sum_{j=0}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \left( B(q, q-j) \prod_{t=0}^{q-j-1} (1-2t) \cos^{q-2j} \theta \right).$$

Приравняв  $l = 2i - n$  и  $q = 2i - \mu$ , запишем формулу (4) с использованием чисел Бесселя

$$\frac{\cos^{2m-\mu} \theta}{r^{n-m}} = \sum_{i=\left[\frac{\mu+1}{2}\right]}^m \left( c(m, \mu, i) r^{\mu-m} \sum_{j=0}^{\left[\frac{i-\mu}{2}\right]} \left( B(2i-\mu, 2i-\mu-j) \prod_{t=0}^{2i-\mu-j-1} (1-2t) \cos^{2i-2j-\mu} \theta \right) \right).$$

Таким образом, наличие готовых алгоритмов для вычисления значений специальных чисел при различных параметрах в прикладных программах позволяет упростить построение потенциалов для полигармонических уравнений высоких порядков.

Для нахождения чисел  $c(m, \mu, i)$  составляются и решаются  $m$  систем с треугольной матрицей коэффициентов. Вопрос о представлении чисел  $c(m, \mu, i)$  через параметры  $m$ ,  $\mu$  и  $i$  остается пока открытым.

### Литература

1. Мейман Н.Н. Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений // ДАН СССР. – 1941. – Т.33, № 4. – С. 275–278.
2. Рекуррентная формула для нормальных производных фундаментальных решений эллиптического уравнения высшего порядка с младшими членами / Р.М. Мавлявиев, И.Б. Гарипов, С.М. Нураиева, Э.Д. Хусаинова // Изв. ТулГУ. – Естественные науки. – 2012. – Вып.3. – С.29–40.
3. Choi, J.Y., Smith J.D.H. On the unitadality and combinatorics of Bessel numbers // Discrete Mathematics. – 2003. – № 264. – P. 45–53.

## МАКСИМАЛЬНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

**В.И. МАТЮХИН**

Средняя школа Центро, г. Вильнюс, Литва  
e-mail: valentin.matiuchin@mail.ru

УДК 512.71

Ключевые слова: *кольцо целых чисел, матричная группа, разрешимая подгруппа, неприводимая подгруппа, примитивная подгруппа, квадратичное расширение кольца, мультипликативная группа.*

*Работа посвящена изучению разрешимых подгрупп матричных  $2 \times 2$  групп над кольцом  $Z$ . Доказывается, что всяким вещественным квадратичным кольцом  $R$  определяется  $h$  классов сопряжённых в  $GL(2, Z)$  максимальных примитивных разрешимых подгрупп  $GL(2, Z)$ , где  $h$  – число классов идеалов в кольце  $R$ .*

**Теорема 1.** *С точностью до сопряжённости в  $GL(2, Z)$  группа двенадцатого порядка*

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

будет единственной максимальной примитивной разрешимой подгруппой конечного порядка группы  $GL(2, Z)$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $Z(\theta)$  – вещественное квадратичное расширение кольца  $Z$ .

**Теорема 2.** *Максимальные примитивные разрешимые подгруппы группы  $GL(2, Z)$ , у которых максимальный абелев нормальный делитель  $H$  совпадает с группой единиц вещественного квадратичного расширения кольца  $Z$  корнем неприводимого над полем рациональных чисел полинома  $x^2 + \alpha x + \beta$ , имеют вид*

$$\Gamma = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{array} \right]; H \right\}.$$

**Теорема 3.** *В группе  $GL(2, Z)$  имеется бесконечно много несопряжённых в  $GL(2, Z)$  максимальных примитивных разрешимых подгрупп. Всяким вещественным квадратичным кольцом  $R$  определяется  $h$  классов сопряжённых в  $GL(2, Z)$  максимальных примитивных разрешимых подгрупп  $GL(2, Z)$ , если  $h$  – число классов идеалов в кольце  $R$ .*

Рассмотрим пример бесконечных максимальных разрешимых подгрупп группы  $GL(2, Z)$ .

Определим максимальные примитивные неприводимые разрешимые группы из  $GL(2, Z)$ , связанные с расширением кольца  $Z$  корнем полинома  $x^2 - x - 1$ . Группа

$$\Gamma = \left\{ -E_2; \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right]; \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \right\} = (-E_2)^k \cdot \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right]^s \cdot \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right]^n$$

будет единственной максимальной неприводимой разрешимой подгруппой группы  $GL(2, Z)$ , у которой максимальный абелев нормальный делитель совпадает с группой единиц кольца  $Z(\sqrt{5})$ .

Из приведенного примера видно, что задача построения максимальной примитивной разрешимой подгруппы  $\Gamma$  группы  $GL(2, Z)$ , у которой максимальный абелев нормальный делитель совпадает с мультипликативной группой кольца  $Z(\sqrt{d})$ ,  $d > 0$ , сводится к отысканию основной единицы этого расширения.

### Литература

1. Матюхин В.И. Разрешимые и нильпотентные матричные группы над кольцами // Известия Смоленского государственного университета. – 2009. – № 2(6). – С. 160–166.
2. Матюхин В.И. Неприводимые нильпотентные подгруппы полной линейной группы над кольцом целых чисел // Вестник Воронежского государственного университета. – Серия: Физика. Математика. – 2012. – №2. – С. 177–183.

## О НУЛЬМЕРНЫХ CDH-ПРОСТРАНСТВАХ

С.В. МЕДВЕДЕВ

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: medvedevsv@susu.ru

УДК 515.124.3

Ключевые слова: *CDH-пространство,  $\lambda$ -пространство, пространство первой категории,  $h$ -однородное пространство.*

*Описано несколько случаев, когда сепарабельное  $h$ -однородное пространство является CDH-пространством.*

Ниже рассматриваются только сепарабельные метризуемые пространства.

Пространство  $X$  называется *счётно плотно-однородным* (кратко – *CDH-пространством*), если для любых двух счётных всюду плотных подмножеств  $A$  и  $B$  пространства  $X$  существует гомеоморфизм  $f: X \rightarrow X$ , отображающий множество  $A$  на  $B$ , т.е.  $f(A) = B$ . Фактически это понятие появилось около ста лет назад (см. [1]), когда Фреше и Брауэр доказали (независимо друг от друга), что обычное евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  является CDH-пространством. Следующая важная теорема показывает, что сравнительно просто устроенные CDH-пространства гомеоморфны полным метрическим пространствам.

**Теорема 1** [1]. *Любое борелевское CDH-пространство метризуемо полной метрикой.*

Из теоремы 1 следует, что поиск других CDH-пространств нужно вести среди более сложно устроенных множеств, чем борелевские подмножества полных метрических пространств.

Мы ограничимся нульмерными CDH-пространствами. В ходе исследования CDH-пространств оказалось, что они тесно связаны с так называемыми  $\lambda$ -пространствами, которые были первоначально изучены К. Куратовским. Сепарабельное пространство  $X$  называется  *$\lambda$ -пространством*, если любое счётное подмножество из  $X$  является  $G_\delta$ -множеством в  $X$ . Можно доказать, что любое несчётное полное метрическое пространство содержит несчётное  $\lambda$ -пространство. Напомним, что пространство  $X$  называется пространством *первой категории*, если его можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств.

В теоремах 2 и 4 описаны ещё два класса CDH-пространств. Нульмерное пространство называется  *$h$ -однородным*, если любое его непустое открыто-замкнутое подмножество гомеоморфно всему пространству. Теорема 2 усиливает результат из статьи [3].

**Теорема 2.** Пусть дано  $h$ -однородное несчётное пространство  $X$ . Тогда  $X$  есть  $\lambda$ -пространство тогда и только тогда, когда  $X$  является CDH-пространством первой категории.

Отметим любопытное свойство  $h$ -однородных  $\lambda$ -пространств.

**Теорема 3.** Пусть дано  $h$ -однородное несчётное  $\lambda$ -пространство  $X$ . Тогда для любого счётного множества  $A \subset X$  пространство  $X$  гомеоморфно своему подпространству  $X \setminus A$ .

Недавно Медини [4] доказал, что если взять  $\lambda$ -подмножество  $A$  из канторова совершенного множества  $C$ , то счётная степень  $(C \setminus A)^\omega$  будет  $h$ -однородным пространством. Следующая теорема усиливает этот результат.

**Теорема 4.** Пусть дано  $h$ -однородное пространство  $X$ , содержащее всюду плотное подмножество, метризуемое полной метрикой. Тогда  $X$  является CDH-пространством тогда и только тогда, когда для любого счётного множества  $A \subset X$  найдётся метризуемое полной метрикой подмножество  $G \subset X$ , которое содержит множество  $A$ .

### Литература

1. Hrusak M, Zamora-Aviles B. Countable dense homogeneity of definable spaces. – Proc. Amer. Math. Soc. – V. 133, is. 11. – 2005. – P. 3429–3435.
2. Hernandez-Gutierrez R., Hrusak, J. van Mill M. Countable dense homogeneity and  $\lambda$ -sets. – Fund. Math. – V. 226, is. 2. – 2014. – P. 157–172.
3. Kunen K., Medini A., Zdomskyy L. Seven characterizations of non-meager P-filters. – Fund. Math. – V. 231, is. 2. – 2015. – 189–208.
5. Medini A. Countable dense homogeneity in powers of zero-dimensional definable spaces. – arxiv 1408.2137v1, 2014.

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ БЕССЕЛЯ, ФРЕЙМЫ, БАЗИСЫ РИССА И ВОСПРОИЗВОДЯЩИЕ ЯДРА

Г.А. МЕЛЬНИЧЕНКО

Литовский эдукологический университет, Вильнюс  
e-mail: gmelnichenko@gmail.com

УДК 517.5

Ключевые слова: гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, ортонормированный базис, последовательность Бесселя, фрейм, базис Рисса.

Предлагается описание последовательностей Бесселя, фреймов, базисов Рисса с использованием гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром.

Ортонормированные базисы играют важную роль в теории

гильбертова пространства. Их обобщение – последовательности Бесселя, фреймы и базисы Рисса [1; 2; 3]. Отметим, что фреймы получили широкое распространение в различных приложениях. Например, в квантовой механике фреймы представляют когерентные состояния, в цифровой обработке сигналов фреймы используют для борьбы с шумами, анализа звуковых сигналов и изображений.

Фреймы занимают промежуточное положение между последовательностями Бесселя и базисами Рисса. Естественной является задача сравнения последовательностей Бесселя, фреймов и базисов Рисса. Теоремы 1, 2 и 3 (см. ниже) дают такое сравнение с использованием гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром [4; 5].

**Определение 1.** Функция  $K: T \times T \rightarrow \mathbb{C}$  называется воспроизводящим ядром гильбертова пространства  $\mathcal{H}(K)$ , состоящего из некоторых комплекснозначных функций, определенных на произвольном множестве  $T$ , если

- а)  $K_t \equiv K(t, \cdot) \in \mathcal{H}(K)$  для любого  $t \in T$ ,
- б)  $f(t) = \langle f, K_t \rangle$  для любого  $t \in T$ , в частности  $K(t, s) = K_t(s) = \langle K_t, K_s \rangle$ .

**Определение 2.** Функция  $K(t, s)$  называется неотрицательно определённой на  $T \times T$ , если

$$\sum_{i,j}^k c_i \bar{c}_j K(t_i, t_j) \geq 0 \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in T, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}.$$

**Определение 3.** Для двух неотрицательно определённых функций  $K_1(t, s)$  и  $K_2(t, s)$  запись  $K_1(t, s) \ll K_2(t, s)$  означает, что функция  $K_2(t, s) - K_1(t, s)$  также неотрицательно определена.

Согласно теореме Мура-Ароншайна [4; 5], любая неотрицательно определённая функция  $K(t, s)$  будет воспроизводящим ядром гильбертова пространства  $\mathcal{H}(K)$  комплекснозначных функций.

Пространство квадратично суммируемых последовательностей  $l_2$  можно рассматривать как пространство дискретных функций, определив для каждой последовательности  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l_2$  функцию  $f(n) = c_n, n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $l_2$  – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром  $K(n, k) = \delta(n, k), n, k \in \mathbb{N}$ , где  $\delta(n, k)$  – дельта-функция Кронекера. Следовательно,  $\mathcal{H}(\delta) = l_2$  и дельта-функция Кронекера  $\delta$  обладает воспроизводящим свойством  $f(n) = \langle f, \delta(n, \cdot) \rangle$ . При этом семейство функций  $\{\delta(n, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  – ортонормированный базис в  $\mathcal{H}(\delta) = l_2$ .

Пусть  $\mathcal{H}$  – комплексное гильбертово пространство. Если  $\{x_t\}_{t \in T}$  – семейство элементов в  $\mathcal{H}$ , где  $T$  – некоторое множество, то функция двух аргументов  $K(t, s) = \langle x_t, x_s \rangle$  неотрицательно определена.

Действительно,  

$$\sum_{i,j}^k c_i \bar{c}_j K(t_i, t_j) = \sum_{i,j}^k c_i \bar{c}_j \langle x_{t_i}, x_{t_j} \rangle = \langle \sum_{i=1}^k c_i x_{t_i}, \sum_{j=1}^k \bar{c}_j x_{t_j} \rangle \geq 0.$$

Поэтому если  $T = \mathbb{N}$ , то для семейства элементов  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  в  $\mathcal{H}$  функция  $K(n, k) = \langle x_n, x_k \rangle$  неотрицательно определена и  $K(n, k)$  – воспроизводящее ядро пространства  $\mathcal{H}(K)$ .

**Теорема 1.** Следующие условия эквивалентны:

- a) семейство  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – последовательность Бесселя;
- b)  $\mathcal{H}(K) \subset \mathcal{H}(\delta) = l_2$ ;
- c)  $K \ll \delta$ .

**Теорема 2.** Следующие условия эквивалентны:

- a) семейство  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – фрейм;
- b)  $\mathcal{H}(K) \subset \mathcal{H}(\delta) = l_2$ , где  $\mathcal{H}(K)$  – замкнутое подпространство в  $l_2$ .

**Теорема 3.** Следующие условия эквивалентны:

- a) семейство  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – базис Рисса;
- b)  $\mathcal{H}(K) = \mathcal{H}(\delta) = l_2$ ;
- c)  $\delta \ll K \ll \delta$ .

### Литература

1. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 613 с.
2. Neil C. A Basis Theory Primer, Expanded Edition, – Boston: Birkhauser, 2011. – 535 с.
3. Christensen O. Frames and bases. An introductory course. – Boston: Birkhauser, 2008. – 326 с.
4. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 401 с.
5. Aronszajn N. Theory of Reproducing Kernels. Trans. Amer. Math. Soc. – 1950. – Vol. 68, № 3. – P. 337–404.

## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**К.В. ОСИПЯН, К.М. РАСУЛОВ**

Смоленский государственный университет

e-mail: kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *метааналитическая функция, модельная краевая задача типа задачи Гильберта, односвязная область, единичный круг.*

В статье для одной обобщенной краевой задачи типа задачи Гильберта в классах метааналитических функций разработан конструктивный алгоритм её решения в произвольных односвязных областях.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым замкнутым гладким контуром Ляпунова  $L$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ .

Напомним (см., например, [1, с. 139] или [2]), что метааналитическими функциями в области  $T^+$  называются регулярные решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + A_1 \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + A_0 F(z) = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  дифференциальный оператор Коши-Римана, а  $A_0, A_1$  – некоторые комплексные числа.

Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0$ . Тогда, как известно (см. [1-3]), всякую метааналитическую в круге  $T^+$  функцию  $F(z)$  можно представить в виде

$$F(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] e^{\lambda_0 \bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \quad (2)$$

или

$$F(z) = \varphi_0^+(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} + \varphi_1^+(z) e^{\lambda_2 \bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (3)$$

где  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$  – аналитические в  $T^+$  функции. Обычно функции  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$  называются *аналитическими компонентами* метааналитической функции  $F(z)$ .

В дальнейшем функции вида (2) будем называть *метааналитическими функциями первого типа*, а функции вида (3) – *метааналитическими функциями второго типа*.

Следуя [1], будем говорить, что метааналитическая в  $T^+$  функция  $F(z)$  вида (2) или (3) принадлежит классу  $M_2(T^+) \cap H(L)$ , если ее аналитические компоненты  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур  $L$  (т.е. функции  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$  принадлежат классу  $A(T^+) \cap H(L)$ ).

Рассматривается следующая краевая задача.

**Задача  $\Gamma_M$ .** Требуется найти все метааналитические в области  $T^+$  функции  $F(z)$  класса  $M_2(T^+) \cap H(L)$ , удовлетворяющие на  $L$  краевым условиям:

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)}F^+(t) + \int_L M_0(t, \tau)F^+(\tau)d\tau\} = q_0(t), \quad (4)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{h_1(t)}\left(\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} - \lambda F^+(t)\right) + \int_L M_1(t, \tau)\left(\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial \bar{\tau}} - \lambda F^+(\tau)\right)d\tau\right\} = q_1(t), \quad (5)$$

где  $F^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} F(z)$ ,  $\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}}$ ,  $\lambda$  - какой-нибудь корень характеристического уравнения  $\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0$ , а  $h_k(t)$  и  $q_k(t)$  ( $k = 0, 1$ ) - заданные на  $L$  функции, удовлетворяющие условию Гельдера, причем  $|h_k(t)| = 1$ ,  $t \in L$  ( $k = 0, 1$ );  $M_k(t, \tau)$  ( $k = 0, 1$ ) - заданные на  $L \times L$  фредгольмовы ядра.

Сформулированную задачу будем называть *модельной задачей типа Гильберта для метааналитических функций*, или, короче, *задачей  $G\Gamma_{2,M}$* , а соответствующую однородную задачу ( $q_k(t) \equiv 0, k = 0, 1$ ) - *задачей  $G\Gamma_{2,M}^0$* .

Важно отметить, что в частном случае, когда  $\lambda = 0$  и  $M_k(t, \tau) \equiv 0$  ( $k = 0, 1$ ), задача  $G\Gamma_{2,M}$  впервые была поставлена в работе В.И. Жегалова [4]. В случае, когда  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  и  $M_k(t, \tau) \equiv 0$  ( $k = 0, 1$ ), задача  $G\Gamma_{2,M}$  исследована в работе [5]. Основной целью настоящего сообщения является разработка общего метода решения задачи  $G\Gamma_{2,M}$  в классах метааналитических функций.

**2. Метод решения задачи  $G\Gamma_{2,M}$  в классе метааналитических функций первого типа.** Будем искать решения задачи  $G\Gamma_{2,M}$  в виде (2). Ясно, что в данном случае в краевом условии (5) нужно положить  $\lambda = \lambda_0$ . Так как

$$\frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]e^{\lambda_0\bar{z}} = \varphi_1^+(z)e^{\lambda_0\bar{z}} + \lambda_0 F^+(z),$$

то

$$\frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} - \lambda_0 F^+(z) = \varphi_1^+(z)e^{\lambda_0\bar{z}}. \quad (6)$$

Следовательно, в силу формул (2) и (6) краевые условия (4) и (5) можно переписать соответственно в виде

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)}[\varphi_0^+(t) + \bar{t}\varphi_1^+(t)]e^{\lambda_0\bar{t}} + \int_L M_0(t, \tau)[\varphi_0^+(\tau) + \bar{\tau}\varphi_1^+(\tau)]e^{\lambda_0\bar{\tau}}d\tau\} = q_0(t), \quad (7)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{h_1(t)}\varphi_1^+(t)e^{\lambda_0\bar{t}} + \int_L M_1(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)e^{\lambda_0\bar{\tau}}d\tau\right\} = q_1(t), \quad (8)$$

где

$$h_k(t) = a_k(t) + ib_k(t), \quad k = 0, 1. \quad (9)$$

**Замечание 1.** Здесь важно заметить, что равенства (7) и (8) в совокупности представляют собой краевые условия хорошо известной обобщенной векторно-матричной задачи Гильберта (см., например, [6, с. 345] или [7, с. 332]) относительно неизвестного аналитического в

области  $T^+$  вектора  $\varphi^+(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0^+(z) \\ \varphi_1^+(z) \end{pmatrix}$ :

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{h(t)}\varphi^+(t) + \int_L M(t,\tau)\varphi^+(\tau)d\tau\right\} = q(t), \quad (10)$$

где приняты обозначения:

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_0(t)e^{\lambda_0 t} & \overline{th_0(t)}e^{\lambda_0\bar{t}} \\ 0 & h_1(t)e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}, \quad M(t,\tau) = \begin{pmatrix} M_0(t,\tau)e^{\lambda_0\bar{\tau}} & \overline{\tau}M_0(t,\tau)e^{\lambda_0\bar{\tau}} \\ 0 & M_1(t,\tau)e^{\lambda_1\bar{\tau}} \end{pmatrix}, \quad q(t) = \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Поскольку матрица  $h(t)$  является невырожденной (т.е.  $\det h(t) \neq 0$ ) и имеет треугольный вид, то для решения краевой задачи  $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}$  в классе метааналитических функций первого типа можно применить следующий алгоритм.

1. Решая обобщенную скалярную задачу Гильберта (8) (в случае её разрешимости), находим аналитическую в области  $T^+$  функцию  $\varphi_1^+(z)$ , а затем переходим к пункту 2. Если же задача Гильберта (9) неразрешима, то и исходная задача  $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}$  не имеет решений, и на этом заканчивается алгоритм решения.

2. Подставляя в краевое условие (7) вместо  $\varphi_1^+(t)$  граничные значения найденной в пункте 1 аналитической функции  $\varphi_1^+(z)$ , получаем следующую скалярную обобщенную краевую задачу Гильберта относительно аналитической в области  $T^+$  функции  $\varphi_0^+(z)$ :

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{h_0(t)}\varphi_0^+(t)e^{\lambda_0\bar{t}} + \int_L M_0(t,\tau)e^{\lambda_0\bar{\tau}}\varphi_0^+(\tau)d\tau\right\} = q_{10}(t), \quad (12)$$

где

$$q_{10}(t) = q_0(t) - \operatorname{Re}\left\{\overline{h_0(t)}[\overline{t}\varphi_1^+(t)]e^{\lambda_0\bar{t}} + \int_L M_0(t,\tau)[\overline{\tau}\varphi_1^+(\tau)]e^{\lambda_0\bar{\tau}}d\tau\right\}. \quad (13)$$

3. Решая обобщенную скалярную задачу Гильберта (12) (в случае её

разрешимости), находим аналитическую в области  $T^+$  функцию  $\varphi_0^+(z)$  и переходим к пункту 4. Если же задача Гильберта (12) неразрешима, то и исходная задача  $G\Gamma_{2,M}$  не имеет решений, и на этом заканчивается алгоритм решения.

4. По формуле

$$F(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]e^{\lambda_0\bar{z}}, \quad (14)$$

где  $\varphi_0^+(z)$  и  $\varphi_1^+(z)$  - решения краевых задач (12) и (8) соответственно, находим решение исходной задачи  $G\Gamma_{2,M}$ .

Таким образом, получили следующий результат.

**Теорема 1.** *Решение задачи  $G\Gamma_{2,M}$  в классе метааналитических функций первого типа сводится к последовательному решению двух обобщенных скалярных задач Гильберта (8) и (12) относительно аналитических функций  $\varphi_1^+(z)$  и  $\varphi_0^+(z)$  соответственно. При этом задача  $G\Gamma_{2,M}$  разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы задачи краевые Гильберта (8) и (12).*

**3. О решения задачи  $G\Gamma_{2,M}$  в классе метааналитических функций второго типа.** В данном случае будем искать решения задачи  $G\Gamma_{2,M}$  в виде (3). Тогда, полагая в краевом условии (5), например,  $\lambda = \lambda_1$ , и учитывая, что

$$\frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\varphi_0^+(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \varphi_1^+(z)e^{\lambda_2\bar{z}}]e^{\lambda_0\bar{z}} = \lambda_1\varphi_0^+(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \lambda_2\varphi_1^+(z)e^{\lambda_2\bar{z}}, \quad (15)$$

краевые условия (4) и (5) можно переписать соответственно в виде

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)}[\varphi_0^+(t)e^{\lambda_1\bar{t}} + \bar{t}\varphi_1^+(t)e^{\lambda_2\bar{t}}] + \int_L M_0(t,\tau)[\varphi_0^+(\tau)e^{\lambda_1\bar{\tau}} + \bar{\tau}\varphi_1^+(\tau)e^{\lambda_2\bar{\tau}}]d\tau\} = q_0(t), \quad (16)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{h_1(t)}(\lambda_2 - \lambda_1)\varphi_1^+(t)e^{\lambda_2\bar{t}} + \int_L M_1(t,\tau)(\lambda_2 - \lambda_1)\varphi_1^+(\tau)e^{\lambda_2\bar{\tau}}d\tau\right\} = q_1(t). \quad (17)$$

**Замечание 2.** Отметим, что равенства (16) и (17) в совокупности представляют собой краевые условия *обобщенной векторно-матричной задачи Гильберта* относительно неизвестного аналитического в области

$$T^+ \text{ вектора } \varphi^+(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0^+(z) \\ \varphi_1^+(z) \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{h(t)}\varphi^+(t) + \int_L M(t,\tau)\varphi^+(\tau)d\tau\right\} = q(t), \quad (18)$$

где приняты обозначения:  $q(t) = \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \end{pmatrix}$ ,

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_0(t)e^{\bar{\lambda}_1 t} & t \cdot h_0(t)e^{\bar{\lambda}_2 t} \\ 0 & \overline{(\lambda_2 - \lambda_1)h_1(t)e^{\bar{\lambda}_2 t}} \end{pmatrix}, \quad M(t, \tau) = \begin{pmatrix} M_0(t, \tau)e^{\lambda_1 \bar{\tau}} & \bar{\tau}M_0(t, \tau)e^{\lambda_2 \bar{\tau}} \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)M_1(t, \tau)e^{\lambda_1 \bar{\tau}} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Далее, рассуждая точно так же, как и в предыдущем пункте, получаем следующий результат.

**Теорема 2.** *Решение задачи  $GF_{2,M}$  в классе метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению относительно аналитических функций  $\varphi_1^+(z)$  и  $\varphi_0^+(z)$  соответственно следующих двух обобщенных скалярных задач Гильберта вида (17) и*

$$\operatorname{Re} \left\{ \overline{h_0(t)} \varphi_0^+(t) e^{\lambda_1 \bar{t}} + \int_L M_0(t, \tau) e^{\lambda_1 \bar{\tau}} \varphi_0^+(\tau) d\tau \right\} = q_{20}(t), \quad (20)$$

где

$$q_{20}(t) = q_0(t) - \operatorname{Re} \left\{ \overline{h_0(t)} [\bar{t} \varphi_1^+(t)] e^{\lambda_2 \bar{t}} + \int_L M_0(t, \tau) [\bar{\tau} \varphi_1^+(\tau)] e^{\lambda_2 \bar{\tau}} d\tau \right\}.$$

При этом задача  $GF_{2,M}$  разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы краевые задачи Гильберта (17) и (20).

## Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. - Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 344 с.
2. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ. - Серия Совр. пробл. матем. Фунд. напр. - 1991. - Т. 85. - С. 187 - 246.
3. Расулов К.М. Об одной краевой задаче типа Дирихле для обобщенных метааналитических функций в круге // Известия СмолГУ. - 2014. - № 3(27). - С. 305-311.
4. Жегалов В.И. О задачах с производными в краевых условиях // Тр. Семинара по краевым задачам / Казанск. ун-т. - 1973. - Вып 10. - С. 38-52.
5. Расулов К.М., Шитиков Д.А. О краевой задаче типа Гильберта для метааналитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. / СмолГУ. - Смоленск, 2011. - Вып. 12. - С. 238-241.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
7. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. - М.: Наука, 1970. - 379 с.

# ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н.Р. ПЕРЕЛЬМАН

Смоленский государственный университет

e-mail: nataly@mannel.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *краевая задача, бианалитическая функция, сдвиг Карлемана.*

*В статье исследован один из случаев явного решения трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в ситуации, когда рассматриваемая задача не редуцируется к двухэлементным.*

Пусть  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ ,  $L = \{t : |t| = 1\}$ . Рассматривается следующая краевая задача, сформулированная К.М. Расуловым (см. [3, с. 288]).

*Требуется найти все бианалитические функции  $F(z)$  класса  $A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , удовлетворяющие на  $L$  краевым условиям:*

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t) \overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}} + G_{12}(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + g_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} = -G_{21}(t) \overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}} + G_{22}(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial y} + ig_2(t), \quad (2)$$

$G_{kj}(t), g_k(t)$  ( $k=1, 2; j=1, 2$ ) – заданные на  $L$  комплекснозначные функции класса  $H^{(1)}(L)$ , причем  $G_{k1}(t) \neq 0$  на  $L$ ,  $\alpha(t)$  – прямой или обратный сдвиг контура  $L$ , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t \quad (3)$$

*и такой, что  $\alpha'(t) \neq 0, \alpha(t) \in H(L)$ .*

Следуя [3], сформулированную задачу назовем *первой трехэлементной задачей типа Карлемана для бианалитических функций*, или, короче, *задачей  $K_{1,2}$* .

Будем говорить, что задача  $K_{1,2}$  *вырождена*, если она редуцируется к двухэлементным краевым задачам, а если такая редукция невозможна, то назовем задачу  $K_{1,2}$  *невырожденной*.

В данной работе задача  $K_{1,2}$  изучается в невырожденном случае.

В дальнейшем будем говорить, что задача  $K_{1,2}$  решается в *явном виде*, если ее общее решение удастся построить, используя только формулы Ф. Д. Гахова для решения двухэлементной задачи Римана для аналитических функций, а также решая конечное число систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в явном виде (в квадратурах).

С учетом результатов статей [1] и [2], можно утверждать, что задача  $K_{1,2}$  будет решаться в явном виде, если ее коэффициенты и свободный член  $G_{kj}(t), g_k(t)$  ( $k = 1, 2; j = 1, 2$ ) являются рациональными функциями, а функция сдвига является дробно-линейной.

### Литература

1. Перельман Н.Р. Об одном случае явного решения трехэлементной задачи типа Карлемана для аналитических функций // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. – Саратов, 2016. – С. 207-209.
2. Перельман Н.Р., Расулов К.М. Трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. – Серия Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т.12. — Вып. 2. – С. 18–27.
3. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 345 с.

## КОМБИНАТОРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛИНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

**М.А. ПЕТРОСОВА, И.В. ТИХОНОВ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ**  
МПУ, ВМК МГУ, НИЯУ МИФИ, г. Москва  
e-mail: petrosova05@mail.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

УДК 517.518.82

Ключевые слова: *комбинаторные тождества, полиномы Бернштейна, симметричный отрезок.*

*Изучается задача о явной алгебраической записи для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке  $[-1,1]$ . Указаны выражения, регулирующие образование коэффициентов. Установлены новые комбинаторные тождества, связанные со специальными «трапециями Паскаля».*

Настоящая работа развивает идеи из предыдущих заметок [1; 2]. Речь идет о явной алгебраической записи полиномов Бернштейна на симметричном отрезке  $[-1, 1]$ , где возникают существенные отличия от случая стандартного отрезка  $[0, 1]$  (ср. [3–5]).

Для функции  $f \in C[-1, 1]$  полиномы Бернштейна определяют формулой

$$B_n(f, x) \equiv 2^{-n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Здесь  $x$  – вещественная переменная, а  $C_n^k$  – биномиальные коэффициенты.

Ясно, что полином  $B_n(f, x)$  имеет степень  $\leq n$  и допускает явную алгебраическую запись

$$B_n(f, x) = \sum_{m=0}^n a_{n,m}(f) x^m, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Требуется указать точный закон образования коэффициентов  $a_{n,m}(f)$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C[-1, 1]$  с полиномами Бернштейна  $B_n(f, x)$ . Тогда коэффициенты  $a_{n,m}(f)$  в явной алгебраической записи полиномов  $B_n(f, x)$  выражаются в виде

$$a_{n,m}(f) = 2^{-n} C_n^m \sum_{k=0}^n D_{n,m}^k f\left(1 - \frac{2k}{n}\right), \quad n \in \mathbf{N}, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

со значениями

$$D_{n,m}^k \equiv \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j}.$$

Возникает вопрос о выявлении арифметических свойств чисел  $D_{n,m}^k$ , фигурирующих в записи коэффициентов  $a_{n,m}(f)$ . При  $m=0$  получаем элементы  $D_{n,0}^k = C_n^k$  обычного треугольника Паскаля. Следующая теорема показывает, что при любом другом фиксированном  $m \in \mathbf{N}$  числа  $D_{n,m}^k$  образуют своеобразные «трапеции Паскаля», построенные по своим начальным и краевым условиям.



Отметим одно ключевое соотношение, которое показывает, что порождающей функцией для чисел  $D_{n,m}^k$  будет *бибином* (двойной бином) вида  $R_{n,m}(x) \equiv (1-x)^m (1+x)^{n-m}$ . Справедливо разложение бибинома

$$(1-x)^m (1+x)^{n-m} = \sum_{k=0}^n D_{n,m}^k x^k, \quad m, n \in \mathbf{N}, \quad n \geq m.$$

Отсюда без труда получаются разнообразные тождества для чисел  $D_{n,m}^k$ , напоминающие известные формулы с биномиальными коэффициентами. Приведем несколько примеров:

$$\sum_{k=0}^n D_{n,m}^k = 0, \quad n \geq m \geq 1;$$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k D_{m,m}^k = 2^m, \quad m \geq 1; \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k D_{n,m}^k = 0, \quad n > m \geq 1.$$

Первая формула следует из равенства  $R_{n,m}(1) = 0$ ; две другие получаются при подстановке в бибином значения  $x = -1$ .

Элементарные соображения, связанные с дифференцированием бибинома, дают формулы:

$$\sum_{k=1}^n k D_{n,1}^k = -2^{n-1}, \quad n \geq 1; \quad \sum_{k=1}^n k D_{n,m}^k = 0, \quad n \geq m \geq 2;$$

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) D_{n,1}^k = -(n-1) 2^{n-1}, \quad \sum_{k=2}^n k(k-1) D_{n,2}^k = 2^{n-1}, \quad n \geq 2;$$

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) D_{n,m}^k = 0, \quad n \geq m \geq 3.$$

Общий результат такого рода

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} D_{n,m}^k = (-1)^m \binom{p}{m} \binom{n-m}{p-m} 2^{n-p}, \quad n \geq p \geq m,$$

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} D_{n,m}^k = 0, \quad n \geq m \geq p+1,$$

записывается через *символ Похгаммера*:  $(\alpha)_0 = 1$ ,  $(\alpha)_1 = \alpha$ ,  $(\alpha)_2 = \alpha(\alpha-1)$ ,  $(\alpha)_j = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)$  при  $j \in \mathbf{N}$ ,  $j \geq 3$ .

Проинтегрировав по отрезку  $[-1,1]$  базовое разложение бибинома  $R_{n,m}(x)$  и вычислив интеграл с помощью бета-функции, придем к формуле

$$\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2j+1} D_{n,m}^{2j} = \frac{2^n}{(n+1)C_n^m}, \quad n \geq m \geq 1,$$

которая при  $m=0$  переходит в известную сумму

$$\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2j+1} C_n^{2j} = \frac{2^n}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Интересно, что внешне «более простые» суммы

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} D_{n,m}^k, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} C_n^k,$$

по-видимому, не имеют универсальных замкнутых выражений. Нам также неизвестна краткая формула, дающая представление чисел  $D_{n,m}^k$  при всех возможных значениях  $n, m, k$ , наподобие формулы биномиальных коэффициентов.

Отметим в заключение еще один специальный факт, характерный для трапеций Паскаля при всех  $m \geq 1$ . Справедливы равенства

$$D_{2m,m}^{2j} = (-1)^j C_m^j = D_{m,m}^j, \quad j=0, \dots, m; \quad D_{2m,m}^{2j-1} = 0, \quad j=1, \dots, m.$$

Это означает, что в трапеции с номером  $m \in \mathbf{N}$  строка, стоящая на позиции  $n=2m$ , выглядит как строка при  $n=m$ , только «прореженная» нулями. Отсюда извлекается следующее неожиданное свойство, действующее в явной записи полиномов Бернштейна.

**Теорема 3.** Пусть  $f \in C[-1,1]$  с полиномами Бернштейна  $B_n(f, x)$ , записанными в явном виде как

$$B_n(f, x) = \sum_{m=0}^n a_{n,m}(f) x^m, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Тогда

$$a_{2m,m}(f) = 2^{-m} C_{2m}^m a_{m,m}(f), \quad m \in \mathbf{N}.$$

Это соотношение выполняется для всех функций  $f \in C[-1,1]$  и не имеет аналогов на стандартном отрезке  $[0,1]$ . Используя отмеченную связь между коэффициентами  $a_{m,m}(f)$  и  $a_{2m,m}(f)$ , можно установить

неизбежный экспоненциальный рост при  $m \rightarrow \infty$  коэффициентов  $a_{2m,m}(f)$  на классе функций  $f \in C[-1,1]$  с заданным модулем непрерывности. Данный факт представляет интерес не только сам по себе, но и в связи с вопросом о максимальном допустимом росте коэффициентов при равномерных полиномиальных аппроксимациях (см. [6; 7]).

### Литература

1. Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Случай симметричного отрезка в теории классических полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV Международной научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2014. – Вып. 15. – С. 184–186.

2. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Явные выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на симметричном отрезке // Материалы научной конференции «Герценовские чтения-2015». Некоторые актуальные проблемы современной математики и математич. образования. – СПб.: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 121–124.

3. Wigert S. Réflexions sur le polynome d'approximation

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \varphi\left(\frac{\nu}{n}\right) x^{\nu} (1-x)^{n-\nu}$$

// Arkiv för matematik, astronomi och fysik. 1927. Bd. 20. Häfte 2. – S. 1–15.

4. Davis P. J. Interpolation and approximation. – N.Y.: Dover. 1975. – xvi+394 p.

5. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // Материалы научной конференции «Герценовские чтения-2015». Некоторые актуальные проблемы современной математики и математич. образования. – СПб.: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 115–121.

6. Stafney J. D. A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to  $C[0,1]$  // Duke Math. Journal. – 1967. – Vol. 34, No 3. – P. 393–396.

7. Roulier J. A. Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials // Journal of Approximation Theory. – 1970. – Vol. 3, No 2. – P. 117–122.

## О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

**А.Е. ПОПКОВ, К.М. РАСУЛОВ**

Смоленский государственный университет  
e-mail: a.e.popkov@yandex.ru, kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, квазигармоническая функция, краевая задача Дирихле, аналитическая кривая, единственность решения, круговые области.

В статье доказана единственность решения задачи Дирихле для квазигармонических функций первого рода в любом круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , где  $r > 0$  и  $r \neq 1$ .

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная гладким замкнутым контуром  $\Gamma$ .

Напомним [1], что квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$  называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , а  $n$  – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1–3], что всякую квазигармоническую функцию рода  $n$  в области  $T^+$  можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где  $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z)$  – аналитическая в области  $T^+$

функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции  $W(z)$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что квазигармоническая функция  $W(z)$  принадлежит классу  $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap E_1^{(m)}$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi^+(z)$  принадлежит классу Смирнова  $E_1$  (см. [4] или [5]) вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

**Задача  $D_n$ .** Требуется найти все квазигармонические функции рода  $n$  ( $n \geq 1$ ), принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap E_1^{(n)}$ , угловые граничные значения которых почти всюду на  $\Gamma$  удовлетворяют условию

$$W(t) = g(t), \quad (3)$$

где  $g(t)$  – заданная функция класса  $L_1(\Gamma)$  (т.е.  $g(t)$  – интегрируемая в смысле Лебега на  $\Gamma$  функция).

В дальнейшем сформулированную выше задачу  $D_n$  будем называть задачей Дирихле для квазигармонических функций рода  $n$ . Соответствующую  $D_n$  однородную задачу ( $g(t) \equiv 0$ ), будем называть задачей  $D_n^0$ .

Поскольку краевая задача  $D_n$  является линейной, то (в случае её разрешимости) общее решение этой задачи представляется в виде

$$W(z) = W_0(z) + W_1(z), \quad (4)$$

где  $W_0(z)$  – общее решение соответствующей однородной задачи  $D_n^0$ , а  $W_1(z)$  – какое-нибудь частное решение рассматриваемой неоднородной задачи  $D_n$ . Следовательно, для единственности решения неоднородной задачи  $D_n$  необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача  $D_n^0$  не имела нетривиальных (ненулевых) решений.

Основной целью настоящего сообщения является установление единственности решения задачи  $D_n$  в любом круге  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ , где  $r > 0$  и  $r \neq 1$ . Ради краткости ограничимся рассмотрением задачи  $D_n$  в классе квазигармонических функций первого рода, т.е. в случае  $n = 1$ .

Напомним также (см., например, [1; 4]), что гладкая кривая  $\Gamma$ , заданная параметрически уравнением

$$z = t(s) = x(s) + iy(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (5)$$

называется аналитической кривой, если функции  $x(s)$  и  $y(s)$  являются аналитическими функциями действительной переменной  $s$  на некотором интервале  $(\alpha_1, \beta_1) \supset [0, l]$ , т.е. функции  $x(s)$  и  $y(s)$  в окрестности каждой точки  $s_0 \in [0, l]$  разлагаются в степенные ряды:

$$x(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (s - s_0)^n \quad \text{и} \quad y(s) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (s - s_0)^n.$$

Хорошо известно (см., например, [1], [6], [7]), что для всякой простой аналитической кривой  $\Gamma$  существует (единственная) функция  $S(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$ , которая является аналитической в некоторой окрестности  $\Delta(\Gamma)$  кривой  $\Gamma$ , и такая, что

$$\bar{z} = S(z), \quad z \in \Gamma. \quad (6)$$

Следуя [6],  $S(z)$  будем называть *функцией Шварца* аналитической кривой  $\Gamma$ , а уравнение (5) – *уравнением Шварца* этой кривой. Например, уравнение Шварца окружности  $\Gamma_r = \{z: |z| = r\}$  имеет вид:

$$\bar{z} = \frac{r^2}{z}. \quad (7)$$

**2. О решении однородной задачи Дирихле  $D_1^0$  в круговых областях.** Пусть  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , где  $r > 0$ , граница которого  $\Gamma_r$ .

Рассмотрим *однородную краевую задачу Дирихле  $D_1^0$*  для *квазигармонических функций рода  $n=1$* , т.е. задачу, состоящую в отыскании *всех квазигармонических функций первого рода  $W(z)$ , принадлежащих классу  $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap E_1^{(1)}$  и удовлетворяющих следующим условиям:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{2}{(1 + z\bar{z})^2} W = 0, & z \in T^+, \\ W(t) = 0, & t \in \Gamma, \end{cases} \quad (8)$$

где  $W(t)$  – *угловые граничные значения* искомой *квазигармонической функции*.

Сразу отметим, что поскольку решения задачи  $D_1^0$  ищутся в классе  $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap E_1^{(1)}$ , то в случае  $n=1$  представление (2) принимает вид:

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \varphi^+(z), \quad (9)$$

где  $\varphi^+(z) \in E_1$  и  $\frac{d\varphi^+(z)}{dz} \in E_1$ .

**Определение 2.** Пусть  $T^+$  – область с аналитической границей  $\Gamma$ , уравнение Шварца которой имеет вид (6), где  $S(z)$  – *мероморфная* в области  $T^+$  функция. Мероморфную в области  $T^+$  функцию вида

$$W_\Gamma(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2S(z)}{1 + zS(z)} \varphi^+(z), \quad (10)$$

которая получается из (12), заменой  $\bar{z}$  на  $S(z)$ , будем называть *согласованной на кривой  $\Gamma$*  с квазигармонической функцией (12).

Нетрудно проверить, что угловые граничные значения квазигармонической функции  $W(z)$ , задаваемой формулой (9), и согласованной с ней функции  $W_\Gamma(z)$  совпадают. Значит, если  $W(t) = 0$ ,  $t \in \Gamma$ , то  $W_\Gamma(t) = 0$ . Тогда, в силу граничной теоремы единственности для мероморфных функций (см., например, [5, с. 292]), имеем:  $W_\Gamma(z) \equiv 0$ ,  $z \in T^+$ , т.е.

$$\frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2S(z)}{1+zS(z)}\varphi^+(z) = 0, \quad z \in T^+. \quad (11)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $T^+$  – область с аналитической границей  $\Gamma$ , уравнение Шварца которой имеет вид  $\bar{z} = S(z)$ , где  $S(z)$  – мероморфная в области  $T^+$  функция. Тогда аналитическая компонента  $\varphi^+(z)$  любого решения однородной задачи Дирихле  $D_1^0$  в области  $T^+$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению вида (11).

Нетрудно проверить, что если область  $T^+$  есть круг  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ , то уравнение (14) принимает вид:

$$\frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2r^2}{(1+r^2)z}\varphi^+(z) = 0, \quad z \in T^+. \quad (12)$$

Но все решения линейного дифференциального уравнения (12) задаются так:

$$\varphi^+(z) = Cz^{\frac{2r^2}{1+r^2}}, \quad (13)$$

где  $C$  – произвольная комплексная постоянная. Однако функции вида (13) будут аналитическими (голоморфными) в круге  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$  тогда и только тогда, когда  $r = 1$ , т.е. в случае круга единичного радиуса.

Таким образом, если  $r = 1$ , то все аналитические в единичном круге  $T_1^+ = \{z : |z| < 1\}$  решения дифференциального уравнения (12) задаются формулой

$$\varphi^+(z) = Cz, \quad (14)$$

где  $C$  – произвольная комплексная постоянная. Наконец, подставив аналитическую в круге  $T_1^+ = \{z : |z| < 1\}$  функцию вида (14) в правую часть формулы (9), получаем общее решение однородной задачи Дирихле  $D_1^0$  в единичном круге (см. также [1; 2]):

$$W_0(z) = C \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad (15)$$

где  $C$  – произвольная комплексная постоянная.

Если же  $r \neq 1$ , то линейное дифференциальное уравнение (12) не имеет *нетривиальных* аналитических в круге  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$  решений. Тогда, согласно лемме 1, однородная краевая задача Дирихле  $D_1^0$  также не имеет нетривиальных (ненулевых) решений.

Итак, установлена справедливость следующего утверждения.

**Теорема.** *Если  $r \neq 1$ , то однородная задача Дирихле (8) в круге  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$  не имеет нетривиальных (ненулевых) решений. Если же  $r = 1$ , то однородная задача Дирихле (8) в единичном круге  $T_1^+ = \{z : |z| < 1\}$  имеет нетривиальные решения, которые задаются по формуле (15).*

### Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.
2. Расулов К.М. О решении краевой задачи Дирихле в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ. – 2014. – № 1(25). – С. 402–409.
3. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung  $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. – 1965. – Schriften 23.
4. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
5. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций – М.–Л., 1950. – 337 с.
6. Davis P. The Schwarz functions and its applications. – Washington, 1974. – 219 p.
7. Mathurin C. Fonction caracteristique d'un contour algebrique simple. Applications a l'equations de l'elasticite plan // Publ. scient. et techn. Ministere aire. Notices techn. – 1962. – № 105. – P. 1–83.

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ КОДИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТУРБОКОДА ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ОСНОВАННОГО НА КОДЕ ХЕММИНГА

**М.И. ПОТАПОВ**

МИРЭА, г. Москва

e-mail: potapovm90@gmail.com

УДК 004.942

Ключевые слова: *турбокод произведение (Turbo Product Codes, TPC), кодирование, код Хемминга.*

*В статье рассматриваются проблемы, возникающие при проектировании сложных систем цифровой передачи и обработки сигнала при выборе типа кодирования. Дается оценка сверхэффективности турбокода произведения на основе кода Хемминга и приводится пример применения данного способа к индивидуальным требованиям системы цифровой связи. Методика описывает один из подходов к оценке эффективности кодирования и может оказаться полезной для разработчиков систем связи.*

При изучении вопросов, затрагивающих блочное кодирование информации с помощью турбокодов произведений (Turbo Product Code, TPC) с высокой исправляющей способностью, выявился ряд недостатков, связанных с поиском и восстановлением ошибок в принимаемом сообщении, проявляющихся при декодировании [1]. В этой статье описывается метод оценочного определения эффективности кодирования информации при использовании турбокода произведения на основе кода Хемминга с помощью вычисления выходной вероятности ошибок канального кодирования. Данный расчет является обобщением информации, связанной с кодированием, и не содержит подробного описания самого процесса кодирования информации с помощью применяемого вида блочного кода [2].

Рассмотрим схему цифровой системы связи, где для кодирования информации был применен турбокод произведения (рис. 1). Структурно TPC строится следующим образом: готовое к передаче информационное слово формируется в квадратный информационный блок – матрицу (*D-матрица* на рисунке 2), в которой каждая строка – отдельное информационное слово, а сама процедура кодирования информационного блока заключается в последовательном кодировании кодом Хемминга сначала строк матрицы (*добавление блока  $D_1$* ), а затем столбцов (*добавление блока  $D_2$  и  $D_D$* ). Таким образом, на выходе кодера TPC формируется кодовый блок. Для повышения качества связи в блоках кодера и декодера был выбран код Хемминга, относящийся к блоковым кодам. К достоинствам этого кода можно отнести его невозрастающую избыточность с увеличением информационного блока сообщения [3], а также то, что помимо гарантированного исправления однокбитовых ошибок код Хемминга позволяет определить все конфигурации из двух ошибок в информационном блоке при декодировании [1], что является полезным свойством для кодов такого типа.

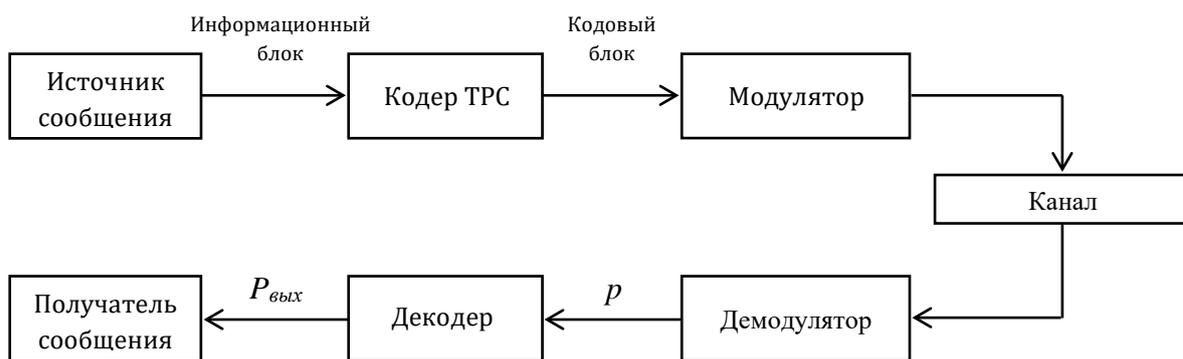


Рис. 1. Обобщенная схема цифровой системы связи

В этой его исключительной особенности определения двух ошибок в информационном блоке и выявился недостаток. Если в кодовом блоке присутствуют ошибки после передачи, расположенные на перекрестии и образующие внутри матрицы прямоугольник с ошибками в его вершинах (рис. 3), то в такой ситуации турбокод производства на основе кода Хемминга вместо исправления либо добавляет ошибку, либо попросту ее пропускает.

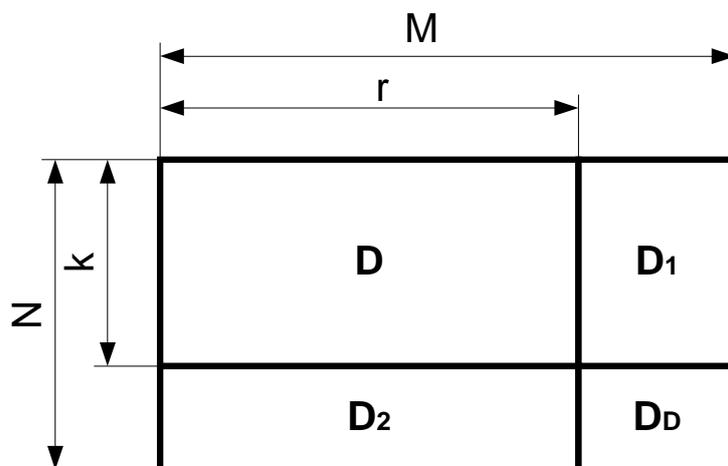


Рис. 2. Вид кодового слова

Рассмотрим такую ситуацию и проанализируем выходную вероятность ошибок после процедуры декодирования  $P_{\text{вых}}$ .

$$P_{\text{вых}} = P_{\text{вых}}(N, M, p), \quad (1)$$

где  $N, M$  – размерность кодового блока, в котором присутствуют ошибки расположенные в вершине прямоугольника (рис.3);  $p$  – вероятность появления ошибок в кодовом блоке при прохождении по каналу передачи информации (рис. 1).

На рисунке 3 изображена произвольная ситуация (сплошная линия), при которой ТРС на основе кода Хемминга теряет исправляющую способность, и вид кодового блока с ошибками. Крестом здесь обозначены места ошибочных символов.

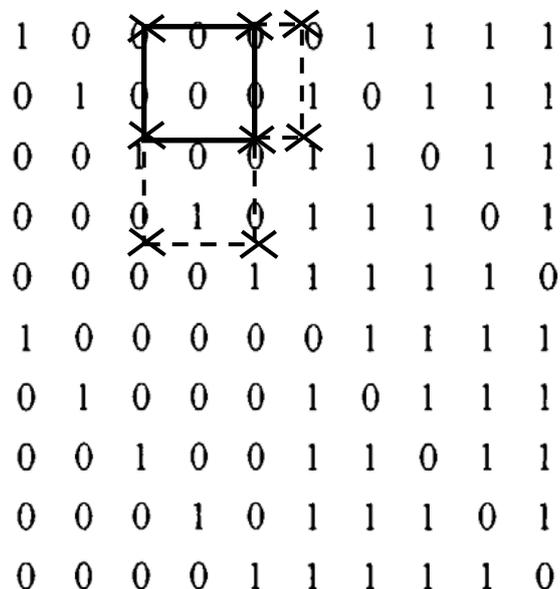


Рис. 3. Вид кодового блока с ошибками

Проанализировав разные ситуации возможного расположения ошибок в кодовом блоке, нас будут интересовать только две из них: когда ошибки располагаются в вершинах четырехугольника (сплошная линия) и «шестиугольника», образованного добавлением к одной из сторон четырехугольника двух дополнительных вершин (пунктирная линия), по своему виду также являющемуся прямоугольником, но с двумя мнимыми вершинами на его ребрах. Все другие возможные комбинации и виды расположения ошибок, прежде всего, будут получаться из сочетания вышеуказанных фигур с добавлениями пары вершин, а чем сложнее получается такая фигура, тем меньше вероятность их возможного разового появления в кодовом блоке и, соответственно, ими можно пренебречь. Как видно из рисунка, рассматриваются ситуации с четным количеством ошибок. Возникновение нечетного количества ошибок будет при любых ситуациях сводиться к исправлению одной из них, исходя из свойств кода Хемминга, и возникновению неопределенности для двух других. Из этого следует, что для оценки эффективности и пригодности выбранного типа кодирования информации для системы цифровой связи достаточно вычислить выходную вероятность только для двух случаев, а чтобы получить общую выходную вероятность ошибки  $P_{\text{вых}}$ , необходимо просуммировать вероятности ошибок для возможных комбинаций

ошибок в кодовом блоке, которые создают неопределенность для TRC кода.

Задача сводится к следующему: необходимо вычислить выходную вероятность  $P_{\text{вых}}$ , когда в блоке содержатся 4 и более ошибок расположенных в вершинах прямоугольника. Опять же, исходя из свойств кода Хемминга, который является четным, в случае нечетного числа ошибок код гарантированно исправляет одну из них, поэтому все нечетные комбинации исключаются. Образование прямоугольника из 8 и более ошибок также получается очень маловероятным, так как с увеличением числа ошибок вероятность разового возникновения такого сложного рода ситуаций относительно общего числа символов в кодовом блоке будет стремиться к бесконечно малой величине. Следовательно, расчет выходной вероятности ошибок сводится только к вычислению выходной вероятности ошибки для случаев из 4 и 6 фиксированных ошибок, расположенных в вершинах прямоугольника.

Итак, вероятность ошибки в пересчете на 1 бит информации, при которой ошибки в кодовом блоке расположатся в вершинах прямоугольника, будет определяться следующим образом:

$$P_4 = C_4 \cdot P_{\text{вх.}|4 \text{ ош.}}, \quad (2)$$

где  $P_4$  – вероятность ошибки, вносимой при декодировании, на 1 бит информации для 4 ошибок;  $P_{\text{вх.}|4 \text{ ош.}}$  – входная вероятность того, что в кодовом блоке сообщения 4 ложных/испорченных символа данных;  $C_4$  – общее возможное количество прямоугольников в кодовом блоке размерностью  $N \times M$ .

Здесь  $P_{\text{вх.}|4 \text{ ош.}}$  определяется как:

$$P_{\text{вх.}|4 \text{ ош.}} = p^4 \cdot (1 - p)^{M \cdot N - 4}, \quad (3)$$

где  $p^4$  – вероятность того, что в каждом из четырех символов содержится ошибка;  $(1 - p)^{M \cdot N - 4}$  – вероятность того, что все остальные символы не содержат ошибок.

Определим функцию  $C_4$ , подсчитывающую общее число возможных прямоугольников в блоке размерностью  $N \times M$ . Для вычисления данной функции требуется знание только размерности кодового блока, а само вычисление сводится к определению площади прямоугольника с единственной лишь разницей, что вместо длин сторон используется размерность кодового блока. Поскольку необходимо вычислить число прямоугольников, которое возможно вписать в

кодový блок, то необходимо просуммировать все комбинации из таких прямоугольников (размером не более  $N \times M$ ).

$$C_4 = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} (n \cdot m). \quad (4)$$

Данная формула справедлива для всех  $N, M \geq 2$ .

Таким образом, вероятность ошибки на бит информации с учетом четырех ошибок в кодовом блоке, расположенных в вершинах прямоугольника, определяется умножением входной вероятности того, что в блоке содержатся ровно 4 ошибки, при этом все остальные являются безошибочными, на количество возможных прямоугольников в кодовом блоке размерностью  $N \times M$ .

Теперь вычислим вероятность ошибки в пересчете на 1 бит информации для прямоугольника, к которому добавляются еще две вершины. Причем абсолютно все равно, с какой стороны добавятся эти две вершины к четырехугольнику.

Вероятность для 6 ошибок будет иметь следующий вид:

$$P_6 = C_4 \cdot P_{\text{вх.}|6 \text{ ош.}} \cdot [(N - 2) + (M - 2)] \cdot \frac{1}{3}. \quad (5)$$

Здесь  $P_{\text{вх.}|6 \text{ ош.}}$  определяется как:

$$P_{\text{вх.}|6 \text{ ош.}} = p^6 \cdot (1 - p)^{M \cdot N - 6}, \quad (6)$$

где  $p^6$  – вероятность того, что в каждом из шести символов содержится ошибка;  $(1 - p)^{M \cdot N - 6}$  – вероятность того, что все остальные символы не содержат ошибок.

$[(N - 2) + (M - 2)]$  – член, определяющий расположение двух дополнительных ошибок, образующих дополнительный прямоугольник (пунктирная линия на *рис. 3*) с основным (сплошная линия на *рис. 3*);  $1/3$  – служит для того, чтобы не учитывать одни и те же прямоугольники по несколько раз).

Чтобы получить оценку сверху общей выходной вероятности ошибки  $P_{\text{вых}}$ , нужно теперь сложить все вероятности ошибок, полученных для разных случаев.

$$P_{\text{вых}} = \sum_{i=4}^{N \cdot M} P_i. \quad (7)$$

В результате получилась универсальная аналитическая модель для определения вероятности появления перекрестных ошибок, наиболее значимая для турбокодов произведения на основе кода Хемминга [4]. Данная модель позволяет оценить эффективность кодирования в случае появления ошибок, расположенных в вершинах прямоугольника, что является немаловажным для знания особенностей кода и объяснения возможных причин сбоев и ухудшения качества приема передаваемых сообщений.

В данной статье, как уже говорилось ранее, используется оценочный подход эффективности кодирования, необходимый для принятия решения о выборе нужного типа кодирования перед началом проектирования и когда важно знать оценочные параметры заранее. Это требуется для того, чтобы правильно подобрать тип кода и размеры блока для блока кодирования и декодирования информации с целью обеспечения заданных заказчиком при проектировании сложной системы связи параметров.

*Пример.* Требуется обеспечить выходную вероятность порядка  $10^{-6} \dots 10^{-8}$  для системы передачи информации со скоростью передачи 100 Мбит/с при известной входной вероятности ошибки при прохождении через канал передачи данных  $p = 10^{-2}$  при применении кодера/декодера, построенного на коде Хемминга. В системе используется блочный принцип передачи кодового сообщения размерностью  $32 \times 32$  символа.

Исходя из заданных параметров, вычислим вероятности  $P_4$  и  $P_6$  при помощи формул (2) – (7).

Подставим все данные в формулы (2) – (7) и получим следующее:

$$\begin{aligned} P_4 &= 8,7 \cdot 10^{-8} \\ P_6 &= 1,8 \cdot 10^{-10} \\ P_{\text{вых}} &= 8,7 \cdot 10^{-8} + 1,8 \cdot 10^{-10} = 8,7 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Умножим  $P_{\text{вых}}$  на скорость передачи информации 100 Мбит/с, получим количество  $N \approx 9$  ошибок в секунду при прохождении по каналу передачи данных. Здесь мы рассматриваем самый проблемный случай для турбокода произведения на основе кода Хемминга, который может приводить к появлению новых ошибок. В нашем случае этого результата достаточно для того чтобы обеспечивать выходную

вероятность ошибок порядка  $10^{-6} \dots 10^{-8}$ , что соответствует требованиям, предъявляемым к системе передачи информации (1–100 ошибок за секунду).

### Литература

1. Голяницкий И. А. Математические модели и методы в радиосвязи / под ред. Ю. А. Громакова. – М. : Эко-Трендз, 2005. – 440 с.
2. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / пер. с англ. – 2-е изд., испр. – М.: Вильямс, 2003. – 1104 с. : ил.
3. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки / пер. с англ. Л. Е. Филипповой; под ред. Р.Л. Добрушина. – М.: Мир, 1964. – 339 с.
4. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука / пер. с англ.; под ред. Е.К. Масловского. – М.: Мир, 1978. – 418 с.

## ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КЛАССАХ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**А.В. РАСТОРГУЕВА, К.М. РАСУЛОВ**  
Смоленский государственный университет,  
kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *комплексная плоскость, бианалитическая функция, модельная краевая задача, задача Гильберта, разрывные коэффициенты, единичный круг.*

*В статье для одной модельной краевой задачи типа задачи Гильберта в классах бианалитических функций разработан конструктивный алгоритм её решения в единичном круге в случае, когда коэффициенты краевых условий испытывают разрывы 1-го рода в конечном числе точек единичной окружности.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  – единичный круг на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , границей которого служит окружность  $L = \{t: |t| = 1\}$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ .

Напомним (см, напр., [1, с. 11] или [2–3]), что функция  $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  комплексного переменного  $z = x + iy$  называется *бианалитической* в  $T^+$ , если она имеет в этой области непрерывные частные производные по  $x$  и  $y$  до второго порядка включительно и

удовлетворяет там дифференциальному уравнению  $\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} = 0$ , где

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  – дифференциальный оператор Коши-Римана.

Хорошо известно (см. [1–3]), что всякую бианалитическую в круге  $T^+$  функцию  $F(z)$  можно представить в виде

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z), \quad (1)$$

где  $\varphi_0^+(z)$  и  $\varphi_1^+(z)$  – аналитические (голоморфные) в  $T^+$  функции, называемые соответственно *нулевой* и *первой* аналитическими компонентами бианалитической функции  $F(z)$ .

Следуя [4], обозначим через  $H_*^\alpha(L)$  класс *кусочно-гельдеровых функций*  $q(t)$ , заданных на  $L$  и имеющих конечное число точек разрыва 1-го рода, а на замкнутых дугах с концами в этих точках удовлетворяющих условию Гельдера.

**Определение 1.** Будем говорить, что аналитическая в круге  $T^+$  функция  $\varphi(z)$  принадлежит классу  $A(T^+) \cap h_m(L)$ , если её граничные значения  $\varphi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} \varphi(z)$  имеют в окрестности  $m$  точек  $t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_m} \in L$  интегрируемые особенности, а в остальных точках ограничены.

**Определение 2.** Будем говорить, что бианалитическая функция  $F(z)$  вида (1) принадлежит классу  $A_2(T^+) \cap h_{|m|}(L)$ , если в представлении (1) аналитические компоненты  $\varphi_j(z) \in A(T^+) \cap h_{m_j}(L)$  ( $j = 0, 1$ ), где  $|m| = m_0 + m_1$ .

Рассмотрим следующую краевую задачу: *требуется найти все бианалитические в круге  $T^+$  функции  $F(z)$  класса  $A_2(T^+) \cap h_{|m|}(L)$ , удовлетворяющие на  $L$  следующим условиям:*

$$\operatorname{Re} \left\{ \overline{\lambda_0(t)} F^+(t) \right\} = q_0(t), \quad (2)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \overline{\lambda_1(t)} \frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} \right\} = q_1(t), \quad (3)$$

где  $\lambda_0(t) = a_0(t) + ib_0(t)$  и  $\lambda_1(t) = a_1(t) + ib_1(t)$  – заданные на  $L$  функции класса  $H_*^\alpha(L)$ , т.е.  $\lambda_0(t)$  и  $\lambda_1(t)$  удовлетворяют условию Гельдера соответственно на дугах  $[\gamma_{k,0}, \gamma_{k+1,0}]$  и  $[\gamma_{k,1}, \gamma_{k+1,1}]$  окружности  $L$  и имеют разрывы 1-го рода в точках  $t_{k,j} = e^{i\gamma_{k,j}}$  ( $j = 0, 1; k = \overline{1, n_j}$ ), причем  $|\lambda_j(e^{i\gamma})| \neq 0, \gamma \in [0, 2\pi]$ , а  $q_0(t)$  и  $q_1(t)$  – заданные на  $L$  функции

класса  $H_*^\alpha(L)$ , которые не имеют точек разрыва, отличных от точек разрыва функций  $\lambda_0(t)$  и  $\lambda_1(t)$  соответственно.

Сформулированную выше задачу назовем *модельной кусочно-непрерывной краевой задачей типа задачи Гильберта для бианалитических функций в круге* или, короче, *задачей  $\Gamma_{M,2}$* , а соответствующую однородную задачу ( $q_0 \equiv q_1 = 0$ ) – *задачей  $\Gamma_{M,2}^0$* .

**2. Метод решения задачи  $\Gamma_{M,2}$ .** Будем искать решение задачи  $\Gamma_{M,2}$  в виде

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), \quad (4)$$

где  $\varphi_j(z) \in A(T^+) \cap h_{m_j}(L)$  ( $j = 0, 1$ ). С учетом формулы (1) и того, что

$$\frac{\partial \varphi_j^+(z)}{\partial \bar{z}} = 0, \quad z \in T^+ \quad (j = 0, 1),$$

краевые условия (2) и (3) можно переписать так:

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda_0(t)}[\varphi_0^+(t) + \bar{t}\varphi_1^+(t)]\} = q_0(t), \quad t \in L, \quad (5)$$

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda_1(t)}\varphi_1^+(t)\} = q_1(t), \quad t \in L. \quad (6)$$

Равенство (6) представляет собой краевое условие известной задачи Гильберта относительно аналитической функции  $\varphi_1^+(z)$  в круге  $T^+$  в *кусочно-непрерывной постановке* (см., например, [4, с. 40] или [5, с. 466]).

Далее, решая задачу Гильберта (6), например, методом, предложенным в [4], находим (в случае разрешимости задачи (6)!) аналитическую функцию  $\varphi_1^+(z)$  класса  $A(T^+) \cap h_{m_1}(L)$ . Наконец, подставив в левую часть равенства (5) вместо  $\varphi_1^+(t)$  граничные значения найденной аналитической функции  $\varphi_1^+(z)$ , получим

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda_0(t)} \cdot \varphi_0^+(t)\} = Q_0(t), \quad t \in L, \quad (7)$$

где

$$Q_0(t) = q_0(t) - \operatorname{Re}\{\overline{\lambda_0(t)} \cdot \varphi_1^+(t)\}, \quad t \in L. \quad (8)$$

Но равенство (7) есть краевое условие задачи Гильберта относительно неизвестной аналитической в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  функции  $\varphi_0^+(z)$  в *кусочно-непрерывной постановке*.

Теперь, решая задачу Гильберта (7), например, методом, предложенным в [4], находим (в случае её разрешимости)

аналитическую функцию  $\varphi_1^+(z)$  класса  $A(T^+) \cap h_{m_0}(L)$ .

В случае разрешимости обеих задач Гильберта (6) и (7), решение исходной краевой задачи  $\Gamma_{M,2}$  получаем по формуле (1), где  $\varphi_1^+(z)$  и  $\varphi_0^+(z)$  – решения задач Гильберта (6) и (7) соответственно.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

**Теорема.** *Решение краевой задачи  $\Gamma_{M,2}$  в классах  $A_2(T^+) \cap h_{|m|}(L)$  бианалитических функций сводится к последовательному решению двух скалярных задач Гильберта (6) и (7) относительно неизвестных аналитических функций  $\varphi_0^+(z)$  и  $\varphi_1^+(z)$  соответственно. Для разрешимости задачи  $\Gamma_{M,2}$  необходимо и достаточно, чтобы были одновременно разрешимы задачи Гильберта (6) и (7).*

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения //Итоги науки и техники ВИНТИ. Серия Совр. пробл. матем. Фунд. напр –Т. 85. – М.:ВИНИТИ, 1991. – С. 187–246.
3. Расулов К.М., Клименко Д.А. Об основных краевых задачах типа Римана для метааналитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Вып. 16. / СмолГУ. – Смоленск, 2015. – С. 206–209.
4. Монахов В.Г. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977. – 420 с.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

## О КАРТИНЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет  
e-mail: kahrیمانr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, кусочно квазигармоническая функция, краевая задача типа Римана, единичная окружность, картина разрешимости.*

В статье рассматривается однородная краевая задача типа задачи Римана в классах квазигармонических функций. Установлено, что если носителем краевого условия является единичная окружность, то рассматриваемая задача допускает полное описание картины её разрешимости.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная гладким замкнутым контуром  $L$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ . Для определенности будем считать, что точка  $z = 0$  принадлежит области  $T^+$ .

Многие физические задачи (см. [1, с. 490]), связанные, например, с диффузией газа при наличии распада и при цепных реакциях, приводятся к дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число,  $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  – неизвестная функция.

Ясно, что при  $n = 0$  регулярные решения уравнения (1) в области  $T^+$  являются гармоническими функциями в этой области. Поэтому при любом фиксированном  $n \in N$  регулярные в области  $T^+$  решения дифференциального уравнения (1) будем называть *квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$*  (см. также [2–3]).

Известно [2–4], что всякую квазигармоническую функцию рода  $n$  в области  $T^+$  можно представить в виде

$$W^+(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где  $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z) \in A(T^+)$ , т.е.  $\varphi^+(z)$  – аналитическая в области  $T^+$  функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции  $W^+(z)$ .

**Определение 1.** Функцию  $W(z)$  будем называть *кусочно квазигармонической рода  $n$  с линией скачков  $L$* , если она в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях  $T^+$  и  $T^-$  определяется выражениями  $W^+(z)$  и  $W^-(z)$ :

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z), & z \in T^+, \\ W^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (3)$$

где  $W^+(z)$  определяется по формуле (2), а

$$W^-(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k}, \quad \varphi^-(z) \in A(T^-), \quad (4)$$

причем в каждой точке  $t \in L$  существуют пределы:  $W^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t} W^\pm(z)$ .

Всюду в дальнейшем будем говорить, что кусочно квазигармоническая функция  $W(z)$  *ограничена (исчезает) на бесконечности*, если аналитическая функция  $\varphi^-(z)$  в представлении (4) *ограничена (исчезает) на бесконечности*.

Наконец, будем говорить, что кусочно квазигармоническая рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) функция  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  с линией скачков  $L$  принадлежит классу  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(m)}(L)$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , т.е. аналитическая функция  $\varphi^+(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число), а в представлении (4) функция  $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(m)}(L)$ .

Одной из основных краевых задач в классах кусочно квазигармонических функций рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) является следующая **задача  $R_n$** : *требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно квазигармонические функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) с линией скачков  $L$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию*

$$W^+(t) = W^-(t)G(t) + g(t), \quad (5)$$

где  $G(t)$ ,  $g(t)$  – заданные на  $L$  комплексные функции, причем  $G(t) \neq 0$  на  $L$ .

В дальнейшем сформулированную выше задачу  $R_n$  будем называть *задачей типа задачи Римана (или задачей сопряжения) для квазигармонических функций рода  $n$* . Соответствующую  $R_n$  однородную задачу ( $g(t) \equiv 0$ ) назовем *задачей  $R_n^0$* .

Сразу заметим, что в силу представлений (2) и (4) краевое условие (5) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} = G(t) \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k} + g(t), \quad t \in L. \quad (6)$$

Но равенство (4) есть краевое условие известной (см., например, [5, с. 365; 6, с. 265]) *обобщенной (дифференциальной) краевой задачи Римана* относительно кусочно аналитической функции  $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ .

Таким образом, по сути, задача  $R_n$  равносильна обобщенной задаче Римана с краевым условием вида (6) относительно кусочно аналитической функции  $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ .

**Замечание 1.** Здесь важно отметить, что краевая задача  $R_n$  является *неформальной моделью* обобщенной (дифференциальной) краевой задачи Римана для аналитических функций.

Хорошо известно (см., например, [5; 6]), что в общем случае обобщенная краевая задача Римана с краевым условием вида (6) решается *методом интегральных уравнений* и её картина разрешимости не допускает точного описания (обычно в таких случаях говорят, что краевая задача *не решается в замкнутой форме*). Поэтому для краевых задач вида (6) актуальной является проблема, состоящая в установлении частных случаев достаточно общего характера, когда рассматриваемая задача решается конструктивно и допускает точное описание картины её разрешимости.

В связи со сказанным выше примем следующее определение.

**Определение 2.** Будем говорить, что краевая задача  $R_n$  допускает *явное решение*, если её общее решение удастся построить, используя только формулы Ф.Д. Гахова для решения обычной скалярной задачи сопряжения (задачи Римана) для аналитических функций, а также решая конечное число линейных дифференциальных уравнений и (или) систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в явном виде (в квадратурах).

**2. О картине разрешимости однородной задачи  $R_n^0$  в единичном круге.** Пусть  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  и  $L = \{t: |t| = 1\}$ . Поскольку в точках окружности  $L = \{t: |t| = 1\}$  выполняется тождество  $\bar{t} = \frac{1}{t}$ , то краевое условие (6), где  $g(t) \equiv 0$ , можно переписать так:

$$\sum_{k=0}^n \frac{A_k^n}{2^{n-k}} t^k \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} = G(t) \sum_{k=0}^n \frac{A_k^n}{2^{n-k}} t^k \frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k}, \quad t \in L. \quad (7)$$

Далее введем в рассмотрение вспомогательную кусочно аналитическую функцию  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  с линией скачков  $L = \{t: |t| = 1\}$ , где

$$\Phi^{\pm}(z) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k^n}{2^{n-k}} z^k \frac{d^k \varphi^{\pm}(z)}{dz^k}, \quad z \in T^{\pm}, \quad (8)$$

а  $\varphi^{\pm}(z)$  – аналитические компоненты искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ .

С учетом (8) краевое условие (7) можно записать в виде

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L, \quad (9)$$

где  $\Phi^{\pm}(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} \Phi^{\pm}(z)$ .

Так как решения задачи  $\rho_n^0$  ищутся в классе  $Q_n(T^{\pm}) \cap H^{(n)}(L)$ , то равенство (9) есть краевое условие *обычной* однородной краевой задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  (см., например, [5, с. 109]).

Как известно (см., например, [2, с. 46; 5, с. 110]), если индекс  $\chi \geq 0$ , то общее решение однородной задачи Римана (9) можно задавать формулой:

$$\Phi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z)P_{\chi}(z), \quad (10)$$

где  $X(z) = \{X^+(z), X^-(z)\}$  – каноническая функция однородной задачи Римана (9), которая определяется следующими формулами

$$X^+(z) = \exp\{\gamma^+(z)\} \quad \text{и} \quad X^-(z) = z^{-\chi} \exp\{\gamma^-(z)\},$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\chi} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \gamma^+(z), & z \in T^+, \\ \gamma^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (11)$$

а  $P_{\chi}(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_{\chi} z^{\chi}$  – многочлен степени не выше  $\chi$  с произвольными комплексными коэффициентами.

Если же  $\chi < 0$ , то однородная задача Римана (9) в рассматриваемом классе функций имеет лишь нулевое решение, т.е.  $\Phi^{\pm}(z) \equiv 0$ .

Предположим, что  $\chi \geq 0$  и уже найдено решение  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  однородной задачи Римана (9) по формуле (10). Тогда в силу (8) получаем:

$$\sum_{k=0}^n \frac{A_k^n}{2^{n-k}} z^k \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} = X^+(z)P_{\chi}(z), \quad z \in T^+, \quad (12)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{A_k^n}{2^{n-k}} z^k \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k} = X^-(z)P_{\chi}(z), \quad z \in T^-. \quad (13)$$

Таким образом, если  $\chi \geq 0$ , то аналитические компоненты  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  должны удовлетворять линейным неоднородным дифференциальным уравнениям  $n$ -го порядка вида (12) и (13) соответственно.

Далее, сначала построим все аналитические в круге  $T^+$  решения дифференциального уравнения вида (12), а затем получим аналитические в области  $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$  решения дифференциального уравнения вида (13).

Для построения общего решения неоднородного дифференциального уравнения вида (12) в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  в первую очередь найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\sum_{k=0}^n \frac{A_k^n}{2^{n-k}} z^k \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} = 0, \quad z \in T^+. \quad (14)$$

Равенство (14) есть линейное однородное дифференциальное уравнение Эйлера  $n$ -го порядка (см., например, [7, с. 136]). Легко проверить, что система функций  $\varphi_{k0}(z) = z^{2k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) образует фундаментальную систему аналитических в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  решений уравнения Эйлера (14). Следовательно, общее решение однородного уравнения (14) можно задавать формулой

$$\varphi_0^+(z) = \sum_{k=1}^n C_k z^{2k-1}, \quad (15)$$

где  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – произвольные комплексные постоянные.

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (12) в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  будем искать методом вариации произвольных постоянных, т.е. в виде

$$\varphi_1^+(z) = \sum_{k=1}^n C_k(z) z^{2k-1}, \quad (16)$$

где  $C_k(z)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – пока неизвестные мероморфные в круге  $T^+$  функции комплексного переменного  $z$ , для которых выражение  $\sum_{k=1}^n C_k(z) z^{2k-1}$  есть аналитическое решение дифференциального уравнения (12) в этом круге, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающееся на окружность  $L$  вместе со своими производными до  $n$ -го порядка



где

$$D_{km} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{X^+(\tau)}{\tau^{2k-m}} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; m = 0, 1, \dots, \chi. \quad (23)$$

**Замечание 1.** Пусть  $r = \text{rank} \|D_{km}\|$  - ранг матрицы  $\|D_{km}\|$ , при этом ясно, что  $0 \leq r \leq \min(n, \chi)$ . Тогда при выполнении условий (22), из  $\chi + 1$  параметров  $\mu_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, \chi$ ) произвольными будут лишь  $\chi - r + 1$ .

При выполнении условий (22) с помощью интегрирования из (18) получаем

$$C_k(z) = \frac{\alpha_k}{2^{n-1}(k-1)!} \int \frac{X^+(z)P_\chi(z)}{z^{2k}} dz \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (24)$$

где  $\int z^{-2k} X^+(z)P_\chi(z) dz$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) - фиксированные первообразные функций  $z^{-2k} X^+(z)P_\chi(z)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) в круге  $T^+$ .

Итак, в силу (16) и (24), в случае  $\chi \geq 0$  частное решение неоднородного дифференциального уравнения (12) в круге  $T^+$  можно задавать в виде

$$\varphi_1^+(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^n z^{2k-1} \frac{\alpha_k}{(k-1)!} \int z^{-2k} X^+(z)P_\chi(z) dz. \quad (25)$$

Поскольку решения задачи  $\rho_n^0$  ищутся в классе  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(n)}(L)$ , то функция (25) должна быть непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающейся на контур  $L$  вместе со своими производными до  $n$ -го порядка включительно. В силу известной теоремы Харди и Литтлвуда (см., например, [8, с. 397]) для этого необходимо и достаточно, чтобы в круге  $T^+$  выполнялись неравенства:

$$\left| \frac{d^k \varphi_1^+(z)}{dz^k} \right| \leq \frac{M_k}{(1-|z|)^{1-\rho_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1, \quad (26)$$

где  $M_k, \rho_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n+1$ ) - некоторые положительные постоянные, причем  $0 < \rho_k \leq 1$ .

**Замечание 2.** В случае  $\chi \geq 0$  некоторые из условий (26) можно удовлетворять за счет определенного выбора значений произвольных постоянных, входящих в выражение функции (25).

Таким образом, если  $\chi \geq 0$  и выполняются условия (22) и (26), то все аналитические в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  решения линейного дифференциального уравнения (12), принадлежащие классу  $A(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ , можно задавать так:

$$\varphi^+(z) = \sum_{k=1}^n C_k z^{2k-1} + \varphi_1^+(z), \quad (27)$$

где  $C_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) – произвольные комплексные постоянные, а  $\varphi_1^+(z)$  – функция, определяемая по формуле (22).

**Замечание 3.** В силу замечаний 1 и 2 нетрудно заметить, что при  $\chi \geq 0$  выражение функции, задаваемой формулой (27), линейно зависит не более чем от  $n + \chi - r + 1$  произвольных комплексных постоянных.

Наконец, методом степенных рядов легко проверить, что нетривиальных аналитических в области  $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$  решений однородное линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^n \frac{A_k^n}{2^{n-k}} z^k \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k} = 0, \quad z \in T^-, \quad (28)$$

не имеет. Значит неоднородное уравнение (13) (в случае его разрешимости в рассматриваемом классе функций) будет иметь единственное решение. Найдём это решение.

Предположим, что разложение аналитической функции  $\Phi^-(z) = X^-(z)P_\chi(z)$  в области  $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$  имеет вид:

$$\Phi^-(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{z^m}. \quad (29)$$

Тогда нетрудно проверить, что решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (13) в области  $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$  можно найти по формуле

$$\varphi^-(z) = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m+1)(m+3) \dots (m+2n-1) \cdot z^m}. \quad (30)$$

Таким образом, при  $\chi \geq 0$  аналитические компоненты  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомых кусочно квазигармонических функций  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  определяются по формулам (27) и (30) соответственно. Тогда (в силу представлений (2) и (4)) при  $\chi \geq 0$  общее решение однородной задачи типа Римана  $\rho_n^0$  можно задавать так:

$$W(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, & z \in T^+, \\ \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (31)$$

где аналитические функции  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  определяются по формулам (27) и (30) соответственно.

**Замечание 4.** Здесь важно отметить, что в силу замечания 3 при  $\chi \geq 0$  решение однородной задачи  $R_n^0$ , задаваемое формулой (31), линейно зависит не более чем от  $n + \chi - r + 1$  произвольных комплексных постоянных, где  $r$  – ранг матрицы системы (22).

Остановимся далее на решении однородной задачи  $R_n^0$  в случае  $\chi < 0$ . Поскольку при  $\chi < 0$  однородная задача Римана (9) имеет лишь нулевое решение  $\Phi^\pm(z) \equiv 0$ , то в силу (8) в данном случае аналитические компоненты  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  должны удовлетворять линейным однородным дифференциальным уравнениям  $n$ -го порядка вида (14) и (28) соответственно. Но из приведенных выше рассуждений видно, что общее решение уравнения (14) задается формулой (15), а однородное дифференциальное уравнение (28) не имеет нетривиальных аналитических в области  $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$  решений. Следовательно, при  $\chi < 0$  решение однородной задачи  $R_n^0$  можно задавать так:

$$W(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi_0^+(z)}{dz^k}, & z \in T^+, \\ 0, & z \in T^-, \end{cases} \quad (32)$$

где  $\varphi_0^+(z)$  – аналитическая в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  функция, которая определяется формулой (15), причем выражение функции  $\varphi_0^+(z)$  линейно зависит ровно от  $n$  произвольных комплексных постоянных  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

В дальнейшем индекс задачи Римана (9), т.е. число  $\chi = \text{Ind}G(t)$ , будем также называть индексом краевой задачи  $R_n^0$ .

Приведенные выше рассуждения устанавливают справедливость следующего утверждения.

**Теорема.** Пусть  $L = \{t: |t|=1\}$  и  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ . Тогда если индекс  $\chi \geq 0$ , то для разрешимости однородной задачи  $R_n^0$  в классе квазигармонических функций рода  $n$  необходимо и достаточно, чтобы функция  $G(t)$  удовлетворяла условиям (21) и (26). При выполнении указанных условий общее решение задачи  $R_n^0$  можно задавать формулой (31) и оно линейно зависит не более чем от  $n + \chi - r + 1$  произвольных

комплексных постоянных, где  $r$  – ранг основной матрицы системы (22). Если же индекс  $\chi < 0$ , то однородная задача  $\mathbf{R}_n^0$  безусловно разрешима и её общее решение, задаваемое формулой (32), линейно зависит ровно от  $n$  произвольных комплексных постоянных.

### Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.
3. Расулов К.М. О краевой задаче типа Римана в классах квазигармонических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Вып. 16. / СмолГУ. - Смоленск, 2015. - С. 201-204.
4. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung  $(1+z\bar{z})^2 W_{zz} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. – 1965. – Schriften 23.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
7. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.
8. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. – 628 с.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ, ОТЛИЧНЫХ ОТ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

**К.М. РАСУЛОВ, Т.И. ТИМОФЕЕВА**

Смоленский государственный университет  
e-mail: kahrimanr@yandex.ru, tat.timopheeva@gmail.com

УДК 517.968.23

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, квазигармоническая функция, краевая задача Гильберта, круговые области.

*В статье разработан конструктивный метод решения классической краевой задачи Гильберта в классах квазигармонических функций первого рода в круговых областях, отличных от единичного круга.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова  $L$ .

Напомним [1; 2] что *квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$*  называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , а  $n$  – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1–4], что всякую квазигармоническую функцию рода  $n$  в области  $T^+$  можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где  $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi(z)$  – аналитическая в области  $T^+$  функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции  $W(z)$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что квазигармоническая функция  $W(z)$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) принадлежит классу  $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , т.е. аналитическая функция  $\varphi(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

**Задача  $\Gamma_n$ .** Требуется найти все квазигармонические функции  $W(z)$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ), принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию

$$\operatorname{Re} \left\{ \overline{h(t)} \cdot W(t) \right\} = q(t), \quad (3)$$

где  $h(t) = a(t) + ib(t)$  и  $q(t)$  – заданные на контуре  $L$  функции класса  $H(L)$  (т.е. удовлетворяющие на  $L$  условию Гельдера).

Следуя [2], сформулированную выше задачу  $\Gamma_n$  будем называть *задачей Гильберта для квазигармонических функций рода  $n$* , а соответствующую  $\Gamma_n$  однородную задачу ( $q(t) \equiv 0$ ) назовем *задачей  $\Gamma_n^0$* .

Сразу заметим, что в силу представления (2) краевое условие (3) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re} \left( \overline{h(t)} \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi(t)}{dt^k} \right) = q(t), \quad t \in L. \quad (4)$$

В свою очередь, равенство (4) есть краевое условие хорошо известной (см., например, [5, с. 245]) *обобщенной (дифференциальной) краевой*

задачи типа Гильберта относительно аналитической в области  $T^+$  функции  $\varphi(z)$ .

Таким образом, по сути, задача  $\Gamma_n$  равносильна дифференциальной задаче типа Гильберта (4) для аналитических функций.

В настоящее время известны различные подходы к решению краевых задач вида (4) (см., например, [1; 5]), которые в общем случае состоят в том, что решение обобщенной задачи Гильберта вида (4) приводится к решению определенного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

Ранее в работе [2] в случае единичного круга  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  и произвольного  $n$  было установлено, что решение задачи  $\Gamma_n$  в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  сводится к решению *обычной* краевой задачи Гильберта в классе аналитических функций и одного линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. Но так как граничное поведение квазигармонических функций в круге единичного радиуса существенным образом отличается от граничного поведения этих функций в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , где  $r \neq 1$  (см., например, [4]), становится актуальной проблема, состоящая в установлении картины разрешимости краевой задачи  $\Gamma_n$  в случае неединичного круга, т.е. когда носителем краевого условия (5) является окружность  $L_r = \{t: |t| = r\}$ , где  $r \neq 1$ . Поэтому основной целью настоящего сообщения является разработка метода решения и описание картины разрешимости задачи  $\Gamma_n$  в случае, когда область  $T^+$  есть круг  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  и  $L_r = \{t: |t| = r\}$ , где  $r \neq 1$ .

**2. Метод решения задачи  $\Gamma_n$  в случае  $n=1$  и  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , где  $r \neq 1$ .** Заметим, что в случае  $n=1$  представление (2) принимает вид:

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi^+(z), \quad (5)$$

где  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ .

Так как в точках окружности  $L_r = \{t: |t| = r\}$  выполняется тождество  $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ , то краевое условие (4) при  $n=1$  можно переписать так:

$$\operatorname{Re} \left\{ t^{-1} \overline{h(t)} \left( t \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - \frac{r^2}{1+r^2} \varphi^+(t) \right) \right\} = q(t), \quad t \in L_r. \quad (6)$$

Введем теперь в рассмотрение вспомогательную аналитическую  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  функцию:

$$\Phi^+(z) = z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2r^2}{1+r^2} \varphi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (7)$$

где  $\varphi^\pm(z)$  – аналитические компоненты искомой квазигармонической функции  $W(z)$ . С учетом (7) равенство (6) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}\{t^{-1}\overline{h(t)}\Phi^+(t)\} = q(t), \quad t \in L_r, \quad (8)$$

где  $\Phi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} \Phi^+(z)$ . Но равенство (8) есть краевое условие хорошо известной задачи Гильберта относительно аналитической в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  функции  $\Phi^+(z)$  (см., например, [1; 3]).

В дальнейшем индекс задачи Гильберта (8) (см., например, [1; 2]), т.е. число  $\chi = 2(m+1)$ , где  $m = \operatorname{Ind}h(t)$ , будем также называть индексом исходной задачи  $\Gamma_1$ .

Как известно (см., например, [1, с. 91]), если индекс  $\chi \geq 0$ , то задача Гильберта (8) безусловно разрешима и ее общее решение линейно зависит ровно от  $2\chi+1$  произвольных действительных постоянных. Если же  $\chi < 0$ , то (при выполнении  $-\chi-1$  условий разрешимости) задача (8) имеет единственное решение.

Далее предположим, что задача Гильберта (8) разрешима и уже найдено ее решение  $\Phi(z)$ . Тогда в силу (6) получаем

$$z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2r^2}{1+r^2} \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_r^+. \quad (9)$$

Таким образом, аналитическая компонента  $\varphi(z)$  искомой квазигармонической функции  $W(z)$  должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка вида (9).

Легко проверить, что однородное дифференциальное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (9), не имеет в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  нетривиальных (ненулевых) решений, принадлежащих классу  $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$ . Следовательно, в случае разрешимости решение неоднородного дифференциального уравнения (9) при  $\chi < 0$  будет единственным, а при  $\chi \geq 0$  решение уравнения (9) может содержать не более чем  $2\chi+1$  произвольных действительных постоянных.

Предположим, что дифференциальное уравнение (9) в классе функций  $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$  разрешимо, и уже найдено его решение  $\tilde{\varphi}^+(z)$ . Тогда в силу (5) решение искомой задачи Гильберта  $\Gamma_1$  можно задавать формулой:

$$W(z) = \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} \tilde{\varphi}^+(z), \quad (10)$$

где  $\tilde{\varphi}^+(z)$  – решение линейного дифференциального уравнения (9), принадлежащее классу  $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$ .

Итак, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если индекс  $\chi \geq 0$ , то для разрешимости неоднородной задачи Гильберта  $\Gamma_1$  в классе квазигармонических функций первого рода в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $r \neq 1$ , необходимо и достаточно, чтобы линейное дифференциальное уравнение (9) было разрешимо в классе функций  $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$  и при этом общее решение задачи Гильберта  $\Gamma_1$ , задаваемое формулой (10), линейно зависит не более чем от  $2\chi + 1$  произвольных действительных постоянных. Если же индекс  $\chi < 0$ , то для разрешимости задачи Гильберта  $\Gamma_1$  в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $r \neq 1$ , необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы и задача Гильберта (8) относительно аналитической функции  $\Phi^+(z)$ , и линейное дифференциальное уравнение (9) в классе функций  $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$ , причем в этом случае задача  $\Gamma_1$  будет иметь единственное решение.

### Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.
2. Расулов К.М. Краевая задача Гильберта в классах квазигармонических функций в круге // Известия СмолГУ. – 2014. – № 4(28). – С. 395–401.
3. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung  $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. – 1965. – Schriften 23.
4. Попков А.Е., Расулов К.М. О единственности решения задачи Дирихле для квазигармонических функций в круговых областях // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII междунар. научной конф. – Смоленск, 2016, Вып. 17. – С. 182–187.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М: Наука, 1977. – 640 с.

## О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ НЕЕДИНИЧНОГО РАДИУСА

**К.М. РАСУЛОВ, Ш.С. ХАНКИШИЕВА**  
Смоленский государственный университет  
e-mail: kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, кусочно квазигармоническая функция, краевая задача Римана, окружность неединичного радиуса.

В статье разработан конструктивный алгоритм решения краевой задачи типа задачи Римана в классах кусочно квазигармонических функций первого рода в случае, когда носителем краевых условий является окружность не единичного радиуса.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная гладким замкнутым контуром  $L$ , а  $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$ . Для определенности будем считать, что точка  $z = 0$  принадлежит области  $T^+$

Напомним [1], что квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$  называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , а  $n$  – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1–3], что всякую квазигармоническую функцию рода  $n$  в области  $T^+$  можно представить в виде

$$W^+(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где  $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z) \in A(T^+)$ , т.е.  $\varphi^+(z)$  – аналитическая в области  $T^+$  функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции  $W^+(z)$ .

**Определение 1.** Функцию  $W(z)$  будем называть *кусочно квазигармонической* рода  $n$  с линией скачков  $L$ , если она в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях  $T^+$  и  $T^-$  определяется выражениями  $W^+(z)$  и  $W^-(z)$ :

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z), & z \in T^+, \\ W^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (3)$$

где  $W^+(z)$  определяется по формуле (2), а

$$W^-(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k}, \quad \varphi^-(z) \in A(T^-), \quad (4)$$

причем в каждой точке  $t \in L$  существуют пределы:  $\lim_{z \rightarrow t} W^\pm(z)$ .

Всюду в дальнейшем будем говорить, что кусочно квазигармоническая функция  $W(z)$  *ограничена (исчезает) на бесконечности*, если аналитическая функция  $\varphi^-(z)$  в представлении (4) *ограничена (исчезает) на бесконечности*.

Наконец, будем говорить, что кусочно квазигармоническая функция рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) функция  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  с линией скачков  $L$  принадлежит классу  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(m)}(L)$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , т.е. аналитическая функция  $\varphi^+(z)$ , непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число), а в представлении (4) функция  $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(m)}(L)$ .

Одной из основных краевых задач в классах кусочно квазигармонических функций рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) является следующая **задача  $\mathbf{R}_n$** : *требуется найти все кусочно квазигармонические функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) с линией скачков  $L$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию*

$$W^+(t) = W^-(t)G(t) + g(t), \quad (5)$$

где  $G(t)$ ,  $g(t)$  – заданные на  $L$  комплексные функции, причем  $G(t) \neq 0$ .

Следуя [2], сформулированную выше задачу  $\mathbf{R}_n$  будем называть *задачей типа Римана для квазигармонических функций рода  $n$* , а соответствующую  $\mathbf{R}_n$  *однородную задачу* ( $g(t) \equiv 0$ ) назовем *задачей  $\mathbf{R}_n^0$* .

Сразу заметим, что в силу представлений (2) и (4) краевое условие (5) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} = G(t) \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k} + g(t), \quad t \in L. \quad (6)$$

Но равенство (4) есть краевое условие хорошо известной (см., например, [4, с. 365]) *обобщенной (дифференциальной) краевой задачи типа задачи Римана* относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ .

Таким образом, по сути, задача  $\mathbf{R}_n$  равносильна дифференциальной задаче типа Римана (6) относительно кусочно аналитической функции  $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ .

В настоящее время известны различные подходы к решению краевых задач вида (6) (см., например, [5]), которые в общем случае состоят в том, что решение обобщенной (дифференциальной) задачи Римана вида (6) сводится к решению достаточно сложного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Поэтому такие подходы не всегда являются конструктивными.

В работах [2–3] одного из авторов в случае единичного круга  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  и произвольного  $n$  разработан эффективный метод решения задачи  $\mathbf{R}_n$ , суть которого состоит в сведении решения этой

задачи к решению *обычной* краевой задачи Римана (задачи сопряжения) в классе аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка. Но поскольку граничное поведение квазигармонических функций в круге единичного радиуса существенным образом отличается от граничного поведения этих функций в круговых областях неединичного радиуса (см., например, [5]), то актуальным становится проблема, состоящая в установлении картины разрешимости краевой задачи  $R_n$  в случае, когда носителем краевого условия (5) является окружность  $L_r = \{t : |t| = r\}$ , где  $r \neq 1$ . Поэтому основной целью настоящего сообщения является описание картины разрешимости задачи  $R_n$  в случае, когда область  $T^+$  есть круг  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ , где  $r \neq 1$ .

2. О методе решения задачи  $R_n$  в случае  $n = 1$  и  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ , где  $r \neq 1$ . В силу (2)–(4) всякую кусочно квазигармоническую функцию  $W(z)$  первого рода с линией скачков  $L_r = \{t : |t| = r\}$  можно представить в виде

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z), & z \in T^+, \\ W^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$W^\pm(z) = \frac{d\varphi^\pm(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi^\pm(z), \quad (8)$$

причем  $\varphi^\pm(z) \in A(T_r^\pm) \cap H^{(1)}(L_r)$ .

Поскольку в точках окружности  $L_r = \{t : |t| = r\}$  выполняется тождество  $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ , то краевое условие (6) можно переписать так:

$$t \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - \frac{2r^2}{1+r^2}\varphi^+(t) = G(t) \left( t \frac{d\varphi^-(t)}{dt} - \frac{2r^2}{1+r^2}\varphi^-(t) \right) + t \cdot g(t), \quad t \in L_r. \quad (9)$$

Далее введем в рассмотрение вспомогательную кусочно аналитическую функцию  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  с линией скачков  $L_r = \{t : |t| = r\}$ , где

$$\Phi^\pm(z) = z \frac{d\varphi^\pm(z)}{dz} - \frac{2r^2}{1+r^2}\varphi^\pm(z), \quad z \in T_r^\pm, \quad (10)$$

где  $\varphi^\pm(z)$  – аналитические компоненты искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ . С учетом (10) равенство (9) можно записать в виде

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^+(t) + tg(t), \quad t \in L_r, \quad (11)$$

где  $\Phi^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} \Phi^\pm(z)$ .

Так как решения задачи  $R_1$  ищутся в классе  $Q_1(T_r^\pm) \cap H^{(1)}(L_r)$ , то равенство (9) есть краевое условие *обычной* краевой задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  (см., например, [4, с. 106]).

В дальнейшем *индекс задачи Римана* (11), т.е. число  $\chi = \text{Ind}G(t)$ , будем также называть *индексом исходной краевой задачи  $R_1$* .

Как известно (см., например, [1, с. 46; 5, с. 112]), если индекс  $\chi \geq 0$ , то задача Римана (11) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать формулами:

$$\Phi^\pm(z) = X^\pm(z) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{\tau g(\tau)}{X^+(\tau) \tau - z} d\tau + P_\chi(z) \right\}, \quad (12)$$

где  $X(z) = \{X^+(z), X^-(z)\}$  — *каноническая функция*, а  $P_\chi(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_\chi z^\chi$  — *многочлен степени не выше  $\chi$  с произвольными комплексными коэффициентами*.

Если  $\chi < 0$ , то для разрешимости задачи Римана (11) необходимо и достаточно выполнение  $-\chi - 1$  условий вида

$$\int_{L_1} \frac{g(t)}{X^+(t)} t^{n+k-1} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\chi - 1. \quad (13)$$

При выполнении условий (13) задача (11) имеет единственное решение, которое также задается формулой (12), где нужно положить  $P_\chi(z) \equiv 0$ .

Предположим, что задача Римана (11) разрешима и уже найдено ее решение  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ . Тогда в силу (10) получаем:

$$z \frac{d\varphi^+(z)}{dt} - \frac{2r^2}{1+r^2} \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (14)$$

$$z \frac{d\varphi^-(z)}{dt} - \frac{2r^2}{1+r^2} \varphi^-(z) = \Phi^-(z), \quad z \in T_r^-. \quad (15)$$

Таким образом, аналитические компоненты  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  должны удовлетворять линейным дифференциальным уравнениям 1-го порядка вида (14) и (15) соответственно.

Нетрудно проверить, что соответствующие (14) и (15) однородные дифференциальные уравнения не имеют нетривиальных (ненулевых) решений в соответствующих классах аналитических функций.

Следовательно, в случае их разрешимости решение неоднородных дифференциальных уравнений (14) и (15) будет *единственным*.

Предположим, что оба дифференциальных уравнения (14) и (15) разрешимы в классах функций  $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$  и  $A(T_r^-) \cap H^{(1)}(L_r)$  соответственно и уже найдены их решения  $\tilde{\varphi}^+(z)$  и  $\tilde{\varphi}^-(z)$ . Тогда решение искомой задачи типа Римана  $\mathbf{R}_1$  можно задавать так:

$$W(z) = \begin{cases} \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\tilde{\varphi}^+(z), & z \in T_r^+, \\ \frac{d\tilde{\varphi}^-(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\tilde{\varphi}^-(z), & z \in T_r^-, \end{cases} \quad (16)$$

где  $\tilde{\varphi}^+(z)$  и  $\tilde{\varphi}^-(z)$  – решения дифференциальных уравнений (14) и (15) в классах функций  $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$  и  $A(T_r^-) \cap H^{(1)}(L_r)$  соответственно.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** *Если индекс  $\chi \geq 0$ , то для разрешимости неоднородной задачи  $\mathbf{R}_1$  в классе квазигармонических функций первого рода в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $r \neq 1$ , необходимо и достаточно, чтобы линейные дифференциальные уравнения (14) и (15) были разрешимы в классах функций  $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$  и  $A(T_r^-) \cap H^{(1)}(L_r)$  соответственно. Если же индекс  $\chi < 0$ , то для разрешимости задачи  $\mathbf{R}_1$  в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $r \neq 1$ , необходимо и достаточно, чтобы функции  $G(t)$  и  $g(t)$ , наряду с разрешимостью дифференциальных уравнений (14) и (15), удовлетворяли еще  $-\chi - 1$  условиям вида (13). При выполнении указанных условий общее решение задачи  $\mathbf{R}_n$  можно задавать формулой (16).*

## Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.
2. Расулов К.М. Об одном методе решения краевой задачи типа Римана в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ, 2015. - №2/1.- С.
4. Расулов К.М. О краевой задаче типа Римана в классах квазигармонических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI междунар. научной конф.. - Смоленск, 2015, Вып. 16. - С. 201-204.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М: Наука, 1977. – 640 с.
6. Попков А.Е., Расулов К.М. О единственности решения задачи Дирихле для квазигармонических функций в круговых областях // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII междунар. научной конф.. - Смоленск, 2016, Вып. 17. - С.

# О КОНСТАНТЕ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО РАЦИОНАЛЬНОГО ПРОЦЕССА С УЗЛАМИ ЧЕБЫШЕВА-МАРКОВА

Е.А РОВБА, Н.Ю. КОЗЛОВСКАЯ

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы  
г. Гродно (Беларусь)  
e-mail: rovba.ea@gmail.com, Kozlowskaya\_Natalya@tut.by

УДК 513.51

Ключевые слова: *рациональная функция, интерполяционный рациональный процесс, узлы интерполирования, функция Лебега, константа Лебега.*

*Исследуется поведение функции Лебега интерполяционного рационального процесса с узлами Чебышева–Маркова на отрезке  $[-1, 1]$  в частном случае, когда имеются только два полюса и два узла. Найдена оценка константа Лебега этого интерполяционного процесса.*

Пусть  $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_n$  – действительные числа, тогда они принадлежат интервалу  $(-1, 1)$ , либо комплексно сопряженные. Определим косинус-дробь Чебышева–Маркова  $M_n(x) = \cos \mu_n(x)$ , где  $\mu_n(x) = \sum_{k=0}^n \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}$ . Обозначим через  $x_k, k = 0, 1, \dots, n$  нули функции  $M_n(x)$ ,  $-1 < x_n < \dots < x_0 < 1$ . Для всякой функции  $f(x)$ , определенной на отрезке  $[-1, 1]$ , можно построить интерполяционную рациональную функцию Лагранжа  $L_n(x, f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x)$ , где  $l_k(x) = \frac{M_n(x)}{M_n'(x_k)(x-x_k)}, k = 0, 1, \dots, n$ .

Определим функцию Лебега  $L_n(x) = \sum_{k=0}^n |l_k(x)|, x \in [-1, 1]$  и константу Лебега

$$L_n = \max_{x \in [-1, 1]} L_n(x), n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим случай, когда  $a_0 = 0, a_1 = a, a \in [0, 1)$ . В этом случае  $M_1(x) = \frac{(1+b)x^2 + ax - b}{1+ax}$ , где  $b = \sqrt{1-a^2}$ . Если обозначить  $D = 1 + 4b + 3b^2$ , то  $x_0 = \frac{-a + \sqrt{D}}{2(1+b)}, x_1 = \frac{-a - \sqrt{D}}{2(1+b)}$ . Для функции Лебега найдем следующее

представление  $L_1(x) = \frac{1+b}{1+ax} \left( \frac{|x-x_1|}{|M_1'(x_0)|} + \frac{|x-x_0|}{|M_1'(x_1)|} \right)$ . Далее, имеем

$$M_1'(x) = \frac{\sin \mu_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} \left( 1 + \frac{b}{1+ax} \right). \quad (1)$$

Исследовав поведение функции Лебега на отрезке  $[-1,1]$ , можно доказать, что она достигает своего максимального значения либо в точке 1, либо в точке -1. К тому же, верно равенство

$$\frac{1+ax_1}{|M_1'(x_0)|} = \frac{1+ax_0}{|M_1'(x_1)|}. \quad (2)$$

Воспользовавшись формулой (2), получим, что  $L_1(-1) = \frac{2(1+b)+a}{(1+ax_0)|M_1'(x_0)|}$ ,  $L_1(1) = \frac{2(1+b)-a}{(1+ax_0)|M_1'(x_0)|}$ . Тогда  $L_1(-1) \geq L_1(1)$ . Таким образом, для константы Лебега  $L_1$  верно равенство  $L_1 = L_1(-1)$ .

Рассмотрим константу Лебега  $L_1$  как функцию переменной  $a$ ,  $a \in [0,1)$ ,  $L_1 = L_{1,a}$ . Из равенств (1) и (2) получим, что  $L_{1,a} = \frac{(2(1+b)+a)\sqrt{1-x_0^2}}{1+b+ax_0}$ . Исходя из этого равенства, можно найти

$$\frac{dL_{1,a}}{da} = \frac{1}{(1+b+ax_0)^2 \sqrt{1-x_0^2}} \left( \frac{(2+a+2b)((1+b)x_0+a)}{x_0(1+b)\sqrt{D}} + \frac{(1+b)(1-x_0^2)(1-2x_0)}{b} \right)$$

и показать, что  $\frac{d}{da} L_{1,a} > 0$ ,  $a \in [0,1)$ , т.е. функция  $L_{1,a}$  является возрастающей как функция переменной  $a$  на промежутке  $[0,1)$ .

Можно показать, что  $\lim_{a \rightarrow 1-0} L_{1,a} = \sqrt{3}$ ,  $L_{1,0} = 2$  (полиномиальный случай). Таким образом, справедлива следующая оценка

$$\sqrt{2} \leq L_1 < 3. \quad (3)$$

Оценка (3) дополняет известные ранее результаты в этом направлении (см., например, [1–2]) и является неожиданной. Все полученные ранее оценки сверху оценки константы Лебега зависят от положения полюса, и верхняя граница оценки является бесконечной, когда полюс приближается к концам отрезка  $[-1, 1]$ .

### Литература

1. Старовойтов А.П. О рациональной интерполяции с фиксированными полюсами // Изв. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук – 1983. – № 6. – С. 105–106.
2. Ровба Е.А., Диврук Е.В. О константе Лебега интерполяционных рациональных процессов Лагранжа по узлам Чебышева–Маркова // Весці Нац. Акад. навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2015. – № 4. – С. 25-31

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА В ОДНОМЕРНОМ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

В.С. СТЕПАНИЩЕВА, И.В. ТИХОНОВ

ВМК МГУ, г. Москва

e-mail: stepanischeva.vika@gmail.com, ivtikh@mail.ru

Ключевые слова: обратная задача, уравнение теплопроводности, функции экспоненциального роста.

Для одномерного уравнения теплопроводности на полупрямой рассмотрена линейная обратная задача о нахождении неизвестной функции источника. В качестве дополнительной информации задано значение температуры в финальный момент времени. Для поставленной обратной задачи изучен вопрос единственности решения в классах функций экспоненциального роста. Предложен конструктивный алгоритм восстановления решения на основе явных разрешающих формул.

Одномерное уравнение теплопроводности на полупрямой имеет важные физические приложения (см. [1; 2]). На выбранном конечном промежутке времени  $[0, T] \subset \mathbf{R}$  рассмотрим следующую задачу со стационарным источником

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + p(x), & x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Если непрерывная функция  $p(x)$  задана и не слишком быстро растет на бесконечности, то решение задачи (1) представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sqrt{\frac{t}{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[ \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{4t}\right) \right] p(s) ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[ |x+s| \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{|x+s|}{\sqrt{4t}}\right)\right) - |x-s| \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{|x-s|}{\sqrt{4t}}\right)\right) \right] p(s) ds, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\operatorname{erf}(z)$  – функция ошибок. Формула (2) получается элементарными преобразованиями известного интеграла [1, с. 250] (см. также [3, с. 36]) с учетом того, что правая часть  $p(x)$  не зависит от времени  $t$ .

Предположим теперь, что функция источника  $p(x)$  неизвестна (как часто бывает в практических задачах). Для восстановления  $p(x)$  зададим дополнительное условие

$$u(x, T) = u_1(x), \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Условие (3) выражает значение температуры в финальный момент времени  $t = T$  и называется *финальным переопределением*. Поставленная задача (1), (3) относится к классу *обратных задач* (см. [4; 5]). Она представляет особый интерес из-за имеющейся связи с вопросом о влиянии радиоактивного распада на температуру земной коры [6] (см. также [1, с. 259-264]). Полное исследование обратной задачи (1), (3) можно провести по схеме, предложенной в [7–10]. Наметим краткий план такого исследования.

*Решением* обратной задачи (1), (3) будем называть пару функций  $u \in C^{2,1}([0, \infty) \times [0, T])$ ,  $p \in C([0, \infty))$ , для которых выполнены все соотношения (1), (3). При этом предполагаем, что функция  $u_1(x)$  в условии (3) задана так, что  $u_1 \in C^2([0, \infty))$  и  $u_1(0) = 0$ . Изучим сначала вопрос о единственности решения обратной задачи (1), (3) при том или ином выборе функции  $u_1(x)$ . По соображениям линейности можно ограничиться случаем  $u_1(x) \equiv 0$ .

Рассмотрим однородную обратную задачу

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + p(x), & x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, T) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, что задача (4) имеет тривиальное решение  $u_1(x) \equiv 0$ ,  $p(x) \equiv 0$ . Методом разделения переменных можно получить целую серию новых, нетривиальных решений

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{\exp(2\omega_k i t) - 1}{2\omega_k i} \operatorname{sh}(\sqrt{\omega_k}(1+i)x), \\ p(x) = \operatorname{sh}(\sqrt{\omega_k}(1+i)x), \end{cases}$$

где  $\omega_k = k\pi/T$ ,  $k \in \mathbf{N}$   $i^2 = -1$ . Отсюда извлекаются вещественные элементарные решения вида

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{\sin(2\omega_k t)}{2\omega_k} \operatorname{sh}(\sqrt{\omega_k}x) \cos(\sqrt{\omega_k}x) - \frac{1 - \cos(2\omega_k t)}{2\omega_k} \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_k}x) \sin(\sqrt{\omega_k}x), \\ p(x) = \operatorname{sh}(\sqrt{\omega_k}x) \cos(\sqrt{\omega_k}x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,t) = \frac{\sin(2\omega_k t)}{2\omega_k} \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_k} x) \sin(\sqrt{\omega_k} x) + \frac{1 - \cos(2\omega_k t)}{2\omega_k} \operatorname{sh}(\sqrt{\omega_k} x) \cos(\sqrt{\omega_k} x), \\ p(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_k} x) \sin(\sqrt{\omega_k} x). \end{cases}$$

Итак, поставленная обратная задача имеет бесконечно много нетривиальных решений. Но все эти решения экспоненциально растут на бесконечности. Следующая теорема восходит к [7–9] и дает точное условие единственности решения обратной задачи.

**Теорема.** Пусть пара функций  $u = u(x,t)$ ,  $p = p(x)$  является решением однородной обратной задачи (4), причем

$$|u(x,t)| \leq M \exp(\sigma x), \quad x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

с показателем  $\sigma < \sqrt{\pi/T}$  и некоторой константой  $M > 0$ . Тогда  $u(x,t) \equiv 0$  в  $[0, \infty) \times [0, T]$  и  $p(x) \equiv 0$  на  $[0, \infty)$ .

Из теоремы следует, что в классе ограниченных функций  $u(x,t)$  исходная обратная задача (1), (3) имеет не более одного решения при любом выборе соответствующей функции  $u_1(x)$ .

Опишем алгоритм восстановления такого решения. Достаточно указать правило для нахождения неизвестной функции источника  $p(x)$ . Рассматриваем исходную задачу (1), (3) с заданной, достаточно гладкой и ограниченной функцией  $u_1(x)$ , вторая производная от которой также ограничена. Кроме того, предполагаем, что  $u_1(0) = 0$ . С помощью преобразования Фурье устанавливаем разрешающую формулу

$$p(x) = \frac{1}{T} \int_0^{+\infty} (g_T(s-x) - g_T(s+x)) u_1(s) ds - u_1''(x), \quad x \geq 0, \quad (5)$$

где  $g_T(x)$  – специальная функция Грина

$$g_T(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2 T}{\exp(\xi^2 T) - 1} \exp(i\xi x) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 T}{\exp(\xi^2 T) - 1} \cos(\xi x) d\xi.$$

Функция  $g_T(x)$  элементарно выражается в виде

$$g_T(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} g_1\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

через частный случай  $g_1(x)$ , отвечающий значению  $T = 1$ . Использование точных выражений функции Грина в разрешающей формуле (5) приводит к вычислительным трудностям. Поэтому с практической точки зрения удобны приближенные выражения для  $g_1(x)$ , найденные в работе [10] в виде

$$\tilde{g}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(k + \frac{1}{2}\right) \zeta\left(k + \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (6)$$

$$\tilde{g}_1(x) = -\sqrt{2\pi} \exp(-\sqrt{\pi} x) \sin\left(\sqrt{\pi} x + \frac{\pi}{4}\right), \quad a \leq x \leq \infty,$$

где  $\zeta = \zeta(s)$  – классическая  $\zeta$ -функция Римана. В результате численного моделирования функции Грина установлены значения  $a = 6$ ,  $N = 40$ , при которых происходит точная сшивка указанных формул. Поскольку погрешность приближения  $|\tilde{g}_1(x) - g_1(x)|$  оказывается ничтожной, а скорость вычислений сильно увеличивается, то при численном решении обратной задачи вместо аналитической формулы  $g_1(x)$  используем ее приближенное представление  $\tilde{g}_1(x)$ .

На основе перечисленных формул разработан алгоритм решения обратной задачи (1), (3) в случае полуограниченной среды. Проведен ряд вычислительных экспериментов по восстановлению неизвестной функции источника. Получено хорошее согласование результатов работы алгоритма с предсказанными значениями  $p(x)$ .

## Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
3. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса / Полянин А.Д. [и др.]. – М.: Факториал, 1998. – 368 с.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.
5. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. – NY, Basel: Marcel Dekker, 2000. – 744 p.
6. Тихонов А.Н. О влиянии радиоактивного распада на температуру земной коры // Изв. АН СССР-ОМОН. Сер. геогр. и геофиз. – 1937. – № 3. – С. 461–479.
7. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 8. – С. 1132–1133.
8. Попов А.Ю., Тихонов И.В. Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 389, № 4. – С. 465–467.
9. Попов А.Ю., Тихонов И.В. Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 3. – С. 396–405.
10. Попов А.Ю., Тихонов И.В. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Математический сборник. – 2005. – Т. 196, № 9. – С. 71–102.

# О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.М. ТИМОТИН

ООО Конкорд, г. Смоленск

e-mail: antej82@yandex.ru

УДК 517.968.23

*Ключевые слова:* краевая задача, бианалитическая функция, сдвиг Карлемана, краевая задача Римана, контур Ляпунова.

*Статья посвящена нахождению некоторых достаточных условий разрешимости одной четырехэлементной краевой задачи типа Римана со сдвигом Карлемана для бианалитических функций.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $L$  – произвольный простой гладкий замкнутый конечный контур на полной плоскости  $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$  комплексной переменной  $z = x + iy$ , ограничивающий внутреннюю область  $T^+$ , содержащую начало координат, и внешнюю область  $T^-$ , содержащую бесконечно удалённую точку  $z = \infty$ . Положительным направлением обхода контура  $L$  будем считать то, которое оставляет область  $T^+$  слева.

Далее в основном будем использовать термины и обозначения, принятые в монографиях [1] и [2].

Рассмотрим следующую задачу. *Требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно бианалитические функции  $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$  класса  $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$ , граничные значения производных которых удовлетворяют на  $L$  следующим условиям:*

$$A_1(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + B_1(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} + C_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + D_1(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial x} = f_1(t), \quad (1)$$

$$A_2(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial y} + B_2(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} + C_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + D_2(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial y} = i \cdot f_2(t), \quad (2)$$

где  $L \in C_\mu^2$ ;  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$ ,  $C_k(t)$ ,  $D_k(t)$ ,  $f_k(t)$  ( $k = 1, 2$ ) – заданные функции класса  $H^{(3-k)}(L)$ ;  $\alpha(t)$  – функция прямого или обратного сдвига контура  $L$ , принадлежащая классу  $H^{(2)}(L)$  и удовлетворяющая условию Карлемана  $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ ,  $t \in L$ ;  $i$  – мнимая единица, введенная для удобства в дальнейших обозначениях.

Следуя [3], сформулированную краевую задачу будем называть первой четырёхэлементной краевой задачей типа Римана со сдвигом

Карлемана для бианалитических функций или, короче, задачей  $\mathbf{RG}_{41}$ , а соответствующую ей однородную задачу ( $f_1(t) = f_1(t) \equiv 0$ ) – задачей  $\mathbf{RG}_{41}^0$ .

Для определённости постановки задачи  $\mathbf{RG}_{41}$  искомые функции  $F^+(z)$  подчиним дополнительному условию (см. также [1, с. 85]):

$$F^+(0) = 0. \quad (3)$$

Основной целью настоящего сообщения является построение конструктивного алгоритма решения задачи  $\mathbf{RG}_{41}$ , когда  $\alpha(t)$  обратный сдвиг, а коэффициенты краевых условий (1) и (2) удовлетворяют на  $L$  следующим дополнительным условиям:

$$\Delta_{k1}(t) = C_k(t)C_k[\alpha(t)] - D_k(t)D_k[\alpha(t)] \equiv 0, \quad (4)$$

$$\Delta_{k2}(t) = A_k(t)A_k[\alpha(t)] - B_k(t)B_k[\alpha(t)] \equiv 0, \quad (5)$$

$$\Delta_k(t) = B_k(t)D_k[\alpha(t)] - A_k[\alpha(t)]C_k(t) \neq 0, \quad (6)$$

$$(k = 1, 2).$$

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
3. Расулов К.М., С.В. Троценкова. О решении некоторых четырёхэлементных краевых задач со сдвигом Карлемана для бианалитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы науч. конф. / Смоленский гос. пед. ун-т. – Смоленск, 2004. – С. 159–165.

## КОМПЬЮТЕРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ АТТРАКТОРОВ ДЛЯ НУЛЕЙ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

**И.В. ТИХОНОВ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ, Д.Г. ЦВЕТКОВИЧ**  
ВМК МГУ, НИЯУ МИФИ, МПГУ, г. Москва  
e-mail: ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, dianacve@inbox.ru

УДК 517.518.82+519.65

Ключевые слова: *полиномы Бернштейна, аттракторы нулей, компьютерная математика.*

*Обсуждаются задачи, связанные с поведением нулей полиномов Бернштейна в комплексной области. Приведены новые результаты, полученные средствами компьютерной математики.*

Для функции  $f \in C[0,1]$  полиномы Бернштейна комплексной переменной  $z \in \mathbb{C}$  вводят формулой

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где  $C_n^k$  - обычные биномиальные коэффициенты. Основные факты классической теории для полиномов (1) изложены в [1–4].

Недавно установлено (см. [5; 6]), что нули полиномов Бернштейна от кусочно линейных функций образуют регулярные структуры на комплексной плоскости. При  $n \rightarrow \infty$  большинство нулей полиномов (1) стягивается к специальным подмножествам в  $\mathbb{C}$ , геометрия которых определяется точками излома порождающей функции  $f$ . Будем называть такие «притягивающие» подмножества *аттракторами нулей*.

Теоретическое изучение аттракторов нулей требует тонких аналитических построений. Истинные закономерности глубоко спрятаны в формуле (1) и отнюдь не очевидны. Нам удалось добиться полной ясности лишь на примере  $f(x) = |2x-1|$ ,  $x \in [0,1]$ , обладающем особой спецификой (см. [6]). В более сложных случаях на помощь приходят современные системы компьютерной математики. Численные расчеты позволяют достаточно точно находить нули полиномов Бернштейна даже для больших номеров, классифицируя возникающие аттракторы и формулируя соответствующие гипотезы.

Рассмотрим для примера функцию

$$f(x) = |4x-1| + |2x-1| + |5x-4|, \quad x \in [0,1], \quad (2)$$

с изломами в точках

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{4}{5}. \quad (3)$$

Множество нулей полинома  $B_{600}(f, z)$ , вычисленного для функции (2), представлено на рисунке 1. Аттрактор нулей («жук») состоит из «тела» и «усиков». Основное «тело» образовано фрагментами трех лемнискат

$$\left| \frac{256}{27} z(1-z)^3 \right| = 1, \quad |4z(1-z)| = 1, \quad \left| \frac{3125}{256} z^4(1-z) \right| = 1. \quad (4)$$

Лемнискаты (4) определяются соответствующими точками излома (3).

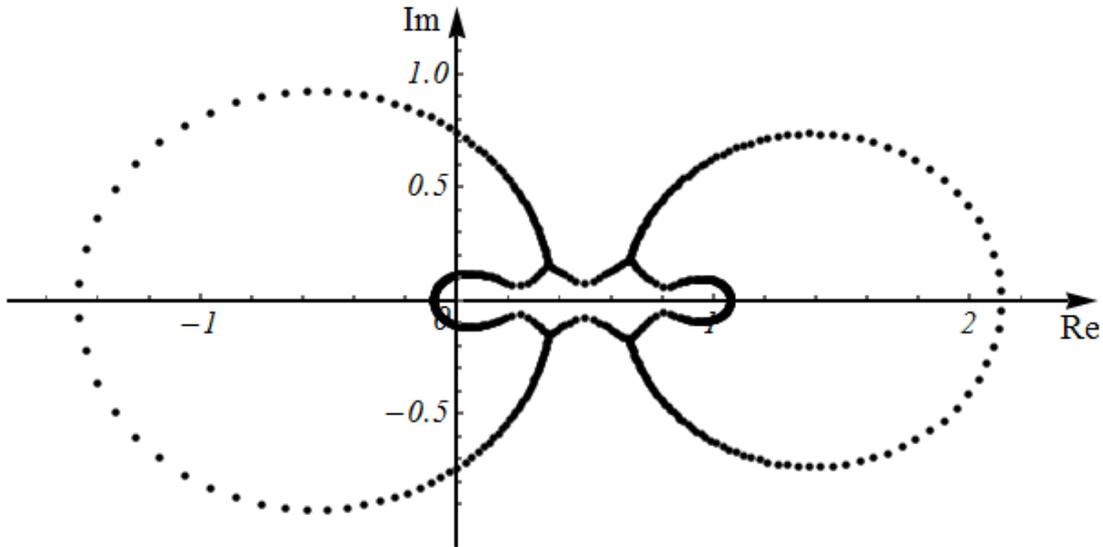


Рис. 1. Нули полинома  $B_{600}(f, z)$  для функции  $f(x) = |4x-1| + |2x-1| + |5x-4|$

На стыках лемнискат возникают «усики», образованные большими дугами окружностей. В примере (2) уравнения окружностей имеют вид

$$(x + 0,54123)^2 + y^2 = 0,834152, \quad (x - 1,38248)^2 + y^2 = 0,52876 \quad (5)$$

(параметры выписаны приближенно). Представленная картина является типичной.

Сформулируем теперь базовые правила, характеризующие аттракторы нулей полиномов Бернштейна. Считаем, что порождающая функция  $f(x)$  является кусочно линейной на  $[0, 1]$  с рациональными абсциссами точек излома.

**Правило 1.** При наличии у функции  $f(x)$  излома в точке  $x = c \in (0, 1)$  в аттрактор включается фрагмент лемнискаты

$$\left| \frac{z}{c} \right|^c \left| \frac{1-z}{1-c} \right|^{1-c} = 1. \quad (6)$$

Этот фрагмент проводится до пересечения с другими лемнискатами, порожденными соседними точками излома.

**Правило 2.** При наличии у функции  $f(x)$  двух последовательных изломов в точках  $x = c_1$  и  $x = c_2$ ,  $c_1, c_2 \in (0, 1)$ ,  $c_1 < c_2$ , в аттрактор включается большая дуга окружности

$$\left( x - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{\sigma}{|\sigma^2 - 1|} \right)^2, \quad \sigma \equiv \left[ \frac{c_2^{c_2} (1 - c_2)^{(1 - c_2)}}{c_1^{c_1} (1 - c_1)^{(1 - c_1)}} \right]^{\frac{1}{c_2 - c_1}}. \quad (7)$$

Если  $c_1 + c_2 = 1$ , то  $\sigma = 1$ , и окружность (7) вырождается в прямую  $x = 1/2$  - серединный перпендикуляр к отрезку  $[0, 1]$ .

Формулы (4) и (5), отмеченные для частного примера (2), являются прямыми следствиями общих правил (6) и (7).

Оба правила не являются абсолютными – они лишь отражают основные закономерности в случае «общего положения». В процессе исследований нам удалось установить ряд особых ситуаций, когда в сформулированные правила надо вносить поправки, подчиненные своим закономерностям. Впрочем, эти особые ситуации оказываются неустойчивыми, и при малых возмущениях распределение нулей возвращается к случаю «общего положения».

Точнее говоря, поправки в правила 1 и 2 надо вносить при обращении в тождественный нуль порождающей функции  $f(x)$  на том или ином участке отрезка  $[0, 1]$ . Например, если  $f(x) \equiv 0$  на промежутке  $[0, c]$  с изломом в точке  $x = c$ , то левая петля нулей, «тяготеющая» к лемнискате (6), «сжимается» в один кратный нуль, размещенный в точке  $z = 0$ . Если же  $f(x) \equiv 0$  между изломами в точках  $x = c_1$  и  $x = c_2$  внутри  $[0, 1]$ , то из «тела» аттрактора нулей пропадают фрагменты двух лемнискат, «нависающие» над  $[c_1, c_2]$ , а соответствующий «усик» замыкается в полную окружность (7). Имеется ряд более специальных эффектов, связанных с поведением отдельных изолированных нулей.

Системы компьютерной математики позволяют наглядно наблюдать все отмеченные закономерности.

## Литература

1. Виденский В.С. Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1990. – 64 с.
2. Lorentz G.G. Bernstein Polynomials. – Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. – x+130 p.
3. DeVore R.A., Lorentz G.G. Constructive Approximation. – Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer-Verlag, 1993. – 450 p.
4. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1: Исследования по математическому анализу. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. – С. 126-175.
5. Новиков И.Я. Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. – 2002. Т. 71. - Вып. 2. – С. 239-253.
6. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г. Задача о нулях полиномов Бернштейна на модельном примере симметричного модуля // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 18-й междун. Саратовской зимней школы. – Саратов: ООО Издательство «Научная книга», 2016. – С. 271-275.

# УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ВЫРОЖДЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ

В.Е. ФЕДОРОВ, Р.Р. НАЖИМОВ

ЧелГУ, г. Челябинск,  
e-mail: kar@csu.ru, goldenboy454@mail.ru

УДК 517.9

Ключевые слова: *дробная производная Римана – Лиувилля, вырожденное эволюционное уравнение, дробная модель Кельвина – Фойгта, начально-краевая задача.*

*Получены условия однозначной разрешимости одной начальной задачи для линейного неоднородного уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при дробной производной Римана – Лиувилля. Результаты использованы при исследовании начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей динамику дробной вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта.*

Пусть  $L$  – линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства  $U$  в банахово пространство  $V$ , имеющий нетривиальное ядро  $\ker L \neq \{0\}$ ,  $M$  – линейный замкнутый оператор с плотной в  $U$  областью определения  $D_M$ , действующий в  $V$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t) + f(t), \quad t \in [0, T), \quad (1)$$

где  $D_t^\alpha$  – дробная производная Римана – Лиувилля [1] порядка  $\alpha > 0$ ,  $f : [0, T) \rightarrow V$ ,  $T \in (0, \infty]$ . Его решением будем называть функцию  $u \in C([0, T); D_M)$ , для которой существует  $D_t^\alpha Lu \in C([0, T); V)$  и при каждом  $t \in [0, T)$  выполняется равенство (1).

Оператор  $M$  называется  $(L, \sigma)$ -ограниченным [2; 3], если при некотором  $a > 0$  для всякого комплексного  $\mu$ , по модулю большего  $a$ , существует непрерывный оператор  $(\mu L - M)^{-1} : V \rightarrow U$ . В таком случае определим проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=a+1} (\mu L - M)^{-1} L d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=a+1} L (\mu L - M)^{-1} d\mu$$

подпространства  $U^0 = \ker P$ ,  $U^1 = \operatorname{im} P$ ,  $V^0 = \ker Q$ ,  $V^1 = \operatorname{im} Q$  и сужения операторов  $L_k = L|_{U^k}$ ,  $M_k = M|_{D_{M_k}}$ ,  $D_{M_k} = D_M \cap U^k$ . Известно [2], что при этом  $L_k : U^k \rightarrow V^k$ ,  $M_k : D_{M_k} \rightarrow V^k$ , операторы  $L_0$ ,  $M_1$  непрерывны,  $L_1$  непрерывен и непрерывно обратим,  $M_0$  замкнут и непрерывно обратим.

Если оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен, а оператор  $H \equiv M_0^{-1}L_0$  нильпотентен степени  $p$ , то оператор  $M$  будем называть  $(L, p)$ -ограниченным.

Обозначим через  $m$  наименьшее натуральное число, не превосходящее числом  $\alpha > 0$ . Через  $J_t^\beta$  обозначим дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка  $\beta > 0$  [1].

**Теорема 1.** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен,  $f \in C([0, T]; V)$ ,  $(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I - Q)f \in C([0, T]; V)$ ,  $k=0, 1, \dots, p$ . Тогда для любых  $u_0, u_1, \dots, u_{m-1} \in U^1$  существует единственное решение задачи

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} J_t^{m-\alpha} Pu(t) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} D_t^{\alpha-m+k} Pu(t) = u_k, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (2)$$

для уравнения (1).

Используем эту теорему при рассмотрении начально-краевой задачи

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} J_t^{m-\alpha} v(x, t) = v_0(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} D_t^{\alpha-m+k} Pv(x, t) = v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (3)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T), \quad (4)$$

в ограниченной области  $\Omega \subset R^n$  с гладкой границей  $\partial\Omega$  для системы уравнений в частных производных

$$D_t^\alpha (1 - \kappa\Delta)v(x, t) = v\Delta v(x, t) - \nabla p, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T), \quad (5)$$

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T), \quad (6)$$

в линейном приближении моделирующей динамику некоторых вязкоупругих жидкостей Кельвина – Фойгта [4]. Подобраны банаховы пространства, в которых задача (3) – (6) принимает вид (1), (2), при этом получившийся оператор  $M$  является  $(L, 0)$ -ограниченным. Это позволяет утверждать об ее однозначной разрешимости.

*Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант Правительства Российской Федерации 14.Z50.31.0020).*

### Литература

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. – San Diego, Boston: Academic Press, 1999. – xxiv+340 p.
2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – vii+216 p.
3. Федоров В.Е., Гордиевских Д.М., Плеханова М.В. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 10. – С. 1367-1375.

4. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology // The European Physics Journal, Special Topics. – 2011. – Vol.193. – P. 133–160.

## ГОМОМОРФНЫЕ ОБРАЗЫ *АН*-ПЛОСКОСТЕЙ

Н.Л. ШАТОХИН

Смоленский государственный университет  
e-mail: nik-shatohin@jandex.ru

УДК 514.74

Ключевые слова: *отношение смежности, аффинная ельмслевова плоскость, АН-плоскость, АН-морфизм, гомоморфизм.*

*В докладе приводится обзор основных свойств гомоморфизмов аффинных ельмслевова плоскостей (АН-плоскостей), позволяющих произвести их классификацию по наличию гомоморфных образов.*

*АН-плоскости* были введены в статьях [2; 3; 4] в которых показано существование содержательной теории аффинных плоскостей, имеющих неоднозначно соединимые, так называемые «смежные» точки.

В дальнейшем *АН-плоскости* были подвергнуты детальному изучению. В частности были исследованы и *АН-морфизмы* таких плоскостей [1; 5].

Однако наиболее полное и общее исследование *АН-морфизмов АН-плоскостей* стало возможным лишь после их координатизации с помощью *АН-тернарнов* («битернарных колец» [6]).

В результате был получен ряд важных результатов, проясняющих строение таких геометрических структур [7].

Было доказано следующее.

1. Всякий гомоморфизм  $f$  *АН-плоскости*  $\mathbf{H}$  на плоскость  $\mathbf{H}'$  является невырожденным *АН-морфизмом*.

2. Всякий невырожденный *АН-морфизм*  $f: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$  является гомоморфизмом тогда и только тогда, когда:

1)  $f$  сюръективен на множестве точек, инцидентных некоторой прямой *АН-плоскости*  $\mathbf{H}'$ ;

2)  $f$  сюръективен хотя бы для одного направления  $\Pi'$  *АН-плоскости*  $\mathbf{H}'$ .

3. Всякий гомоморфизм  $f$  *АН-плоскости*  $\mathbf{H}$  на *АН-плоскость*  $\mathbf{H}'$  сохраняет смежность и несмежность как точек, так и прямых.

4. Пусть  $f_1$  и  $f_2$  – гомоморфизмы  $AH$ -плоскости  $\mathbf{H}$  на  $AH$ -плоскости  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ . Тогда, если полные прообразы совпадают хотя бы для одной пары точек  $p_1 \in \mathbf{H}_1$  и  $p_2 \in \mathbf{H}_2$ , то плоскости  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  изоморфны.

5. Пусть  $f_1$  и  $f_2$  – гомоморфизмы  $AH$ -плоскости  $\mathbf{H}$  на  $AH$ -плоскости  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ , соответственно. Тогда существует по крайней мере один из гомоморфизмов  $f_{12}: \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$  или  $f_{21}: \mathbf{H}_2 \rightarrow \mathbf{H}_1$ .

6. Всякий гомоморфизм  $f: \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$   $AH$ -плоскости  $\mathbf{H}_1$  на  $AH$ -плоскость  $\mathbf{H}_2$  индуцирует биективное изотонное отображение  $\varphi$  отношений конгруэнтности  $\tau$  плоскости  $\mathbf{H}_1$ , для которых  $\tau_f \subseteq \tau \subseteq \sim$ , на отношения конгруэнтности плоскости  $\mathbf{H}_2$ .

7.  $AH$ -плоскость уровня  $n$  [1] имеет ровно  $n$  гомоморфных образов.

9. Пусть  $f: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$  гомоморфизм  $AH$ -плоскости  $\mathbf{H}$  на  $AH$ -плоскость  $\mathbf{H}'$ . Тогда если  $\mathbf{H}$  – однородная  $AH$ -плоскость, то и  $AH$ -плоскость  $\mathbf{H}'$  однородна.

### Литература

1. Artmann B. Hjelmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaftsrelationen // Math. Z. - 1969. - №112. - S. 163 – 180.
2. Hjelmslev J. Die naturliche Geometrie // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1923, № 2. - P. 1–36.
3. Hjelmslev J. Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre // Danske Ved. Selsk., mat.-fys. Medd., 1929, 8:11; 1929, 10:1; 1942, 19:12; 1945, 22:6, 13; 1949, 25:10.
4. Klingenberg W. Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen // Math. Z. 1954. Vol. 160. S. 384–406.
5. Törner G. Homomorphismen von affine Hjelmslev-Ebenen // Math. Z. - 1975.-№141. - S. 159 – 167.
6. Шатохин Н.Л. О координатизации аффинных ельмслевых плоскостей // Труды семинара по инцидентностным структурам. Деп. в ВИНТИ, № 5402-85 ДЕП. С. 42 – 53.
7. Шатохин Н.Л. Невырожденные гомоморфизмы аффинных ельмслевых плоскостей. Смоленск, 1978. Деп. в ВИНТИ, № 2189–78 ДЕП. С. 1 - 11.

## ПОСТРОЕНИЕ ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ПО ДАННОЙ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ

Н.А. ШЕРСТНЁВА

Смоленский государственный университет

УДК 517.518.36

Ключевые слова: ортогонализация, ортонормированная система, алгоритмы построения ортонормированной системы.

*В работе проанализированы два метода построения ортонормированной системы функций по данной линейно независимой системе функций и доказана их эквивалентность.*

Теория приближения функций сегодня является одним из наиболее интенсивно разрабатываемых направлений в науке. Она берёт своё начало от работ выдающегося русского математика XIX века П.Л. Чебышева (1821-1894). Также существенный вклад в решение проблемы о приближённом представлении функций сложной природы функциями более простой природы внесли исследования учеников П.Л. Чебышева: А.Н. Коркина (1837-1908), Е.И. Золотарёва (1847-1878), А.А. Маркова (1856-1922).

Наиболее часто встречающейся и хорошо изученной аппроксимационной задачей является задача о приближении функций алгебраическими многочленами  $\sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$  или тригонометрическими

полиномами  $a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$ . Фундаментальные

классические результаты в этом направлении получены немецким математиком К. Вейерштрассом (1815-1897) и венгерским учёным Л. Фейером (1880-1959), занимавшимися равномерным приближением непрерывной на отрезке функции. Во многих инженерно-технических приложениях, а также в вопросах статистики и теории вероятностей ценность представляет приближение в среднем, которое целесообразно использовать, если данная непрерывная функция имеет на отрезке резкие колебания. Данная задача сводится к нахождению частичной суммы ряда Фурье по некоторой ортогональной (ортонормированной) системе функций.

В связи с последним замечанием встаёт вопрос о нахождении в пространстве непрерывных функций ортогональных (ортонормированных) систем.

**Определение 1. Ортогональной системой** в евклидовом пространстве  $R$  называется множество  $\{x_\alpha\}$  ненулевых элементов этого пространства такое, что  $(x_\alpha, x_\beta) = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ .

**Определение 2. Ортонормированной системой** в евклидовом пространстве  $R$  называется множество  $\{x_\alpha\}$  ненулевых элементов из  $R$  такое, что  $(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{при } \alpha = \beta. \end{cases}$

(Иначе: **ортонормированная система** – это ортогональная система, состоящая из элементов, норма которых равна единице.)

Очевидно, что если  $\{x_\alpha\}$  - ортогональная система, то  $\left\{ \frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|} \right\}$  -

ортонормированная система.

Понятие ортогональности элементов связано с понятием линейной независимости.

**Определение 3.** Элементы  $x, y, \dots, w$  линейного пространства называется **линейно независимыми**, если из равенства  $\alpha x + \beta y + \dots + \lambda w = 0$  вытекает, что  $\alpha = \beta = \dots = \lambda = 0$ .

**Определение 4.** Бесконечная система элементов  $x, y, \dots$  линейного пространства называется **линейно независимой**, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Справедливы следующие *утверждения*: 1) если элементы  $\{x_\alpha\}$  ортогональны, то они линейно независимы; 2) любую линейно независимую систему элементов евклидова пространства можно преобразовать так, чтобы она стала ортогональной (ортонормированной).

**Определение 5.** Алгоритм построения для данной линейно независимой системы элементов в евклидовом пространстве ортогональной системы называется **процессом ортогонализации**.

Рассмотрим два из возможных методов построения ортонормированной системы и докажем их эквивалентность.

*1 метод.* Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  - линейно независимая система элементов в евклидовом пространстве. Тогда в этом пространстве существует система элементов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) система  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  - ортонормированная;
- 2) каждый элемент  $\varphi_n$  есть линейная комбинация элементов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ :  $\varphi_n = a_{n1} f_1 + \dots + a_{nn} f_n$ , причем  $a_{nn} \neq 0$ ;
- 3) каждый элемент  $f_n$  представим в виде:  $f_n = b_{n1} \varphi_1 + \dots + b_{nn} \varphi_n$ , причем  $b_{nn} \neq 0$ .

Каждый элемент системы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  определяется условиями 1)- 3) однозначно с точностью до множителя  $\pm 1$ .

$$\text{При этом: } \varphi_1 = \pm \frac{1}{\|f_1\|} f_1;$$

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}} = \frac{h_n}{\|h_n\|}, \quad h_n = f_n - (f_n, \varphi_1)\varphi_1 - \dots - (f_n, \varphi_{n-1})\varphi_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

(Доказательство в [1]).

2 метод. Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  - линейно независимая система элементов в евклидовом пространстве  $R$ . Построим в  $R$  систему попарно ортогональных ненулевых элементов  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ , таких, что для любого номера  $n$  каждый из элементов  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  является линейной комбинацией элементов  $f_1, f_2, \dots, f_n$  и наоборот, каждый из элементов  $f_1, f_2, \dots, f_n$  является линейной комбинацией элементов  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ . Система элементов  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$  может быть последовательно определена с помощью соотношений (доказательство в [2]):

$$\psi_1 = f_1, \quad \psi_n = \begin{vmatrix} (f_1, \psi_1) & (f_1, \psi_2) & \dots & (f_1, \psi_{n-1}) & f_1 \\ (f_2, \psi_1) & (f_2, \psi_2) & \dots & (f_2, \psi_{n-1}) & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_n, \psi_1) & (f_n, \psi_2) & \dots & (f_n, \psi_{n-1}) & f_n \end{vmatrix} \quad \text{при } n \geq 2.$$

Положив теперь для каждого номера  $n$   $\Phi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$ , получим ортонормированную систему  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$ .

Итак, по данной линейно независимой системе  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  элементов евклидова пространства ортонормированная система, составленная из линейных комбинаций данных элементов, существует. Покажем теперь, что эта ортонормированная система единственна, т.е. указанные процессы ортогонализации эквивалентны.

Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  - линейно независимая система элементов в евклидовом пространстве. С помощью двух процессов ортогонализации были получены ортонормированные системы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  и  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$ , состоящие из линейных комбинаций данных элементов. Докажем, используя метод математической индукции, что ортонормированные системы совпадают с точностью до знака, т.е.  $\varphi_n = \pm \Phi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

$$1) n=1: \left. \begin{array}{l} \varphi_1 = \pm \frac{1}{\|f_1\|} f_1 \\ \Phi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|} = \frac{f_1}{\|f_1\|} \end{array} \right| \Rightarrow \varphi_1 = \pm \Phi_1$$

2)  $n = k \geq 1$ . Допустим, что  $\varphi_k = \pm \Phi_k$ .

3)  $n = k + 1$ . Докажем, что  $\varphi_{k+1} = \pm \Phi_{k+1}$ :

$$\varphi_{k+1} = \underbrace{a_{k+1,1}f_1 + \dots + a_{k+1,k}f_k}_{*} + a_{k+1,k+1}f_{k+1} = a_{k+1,k+1}f_{k+1} + \sum_{i=1}^k d_i \varphi_i$$

(\* - воспользовались тем, что каждый из элементов  $f_1, f_2, \dots, f_k$  является линейной комбинацией элементов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ ).

$(\varphi_{k+1}, \varphi_s) = 0$  при  $s \leq k$  (так как система  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  - ортогональная).

С другой стороны  $(\varphi_{k+1}, \varphi_s) = a_{k+1,k+1} (f_{k+1}, \varphi_s) + d_s$ , так как

$(\varphi_1, \varphi_s) = \dots = (\varphi_{s-1}, \varphi_s) = (\varphi_{s+1}, \varphi_s) = \dots = (\varphi_k, \varphi_s) = 0$ ,  $(\varphi_s, \varphi_s) = 1$  в силу ортонормированности системы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$

Откуда,  $d_s = -a_{k+1,k+1} (f_{k+1}, \varphi_s)$  ( $s = 1, 2, \dots, k$ ).

$$\text{Тогда, } \varphi_{k+1} = a_{k+1,k+1} \left[ f_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_{k+1}, \varphi_i) \varphi_i \right].$$

$$\|\varphi_{k+1}\| = 1 = |a_{k+1,k+1}| \cdot \left\| f_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_{k+1}, \varphi_i) \varphi_i \right\|, \quad a_{k+1,k+1} = \pm \frac{1}{\left\| f_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_{k+1}, \varphi_i) \varphi_i \right\|}.$$

$$\text{Окончательно получаем: } \varphi_{k+1} = \pm \frac{f_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_{k+1}, \varphi_i) \varphi_i}{\left\| f_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_{k+1}, \varphi_i) \varphi_i \right\|}. \quad (1)$$

$$\Phi_{k+1} = \frac{\psi_{k+1}}{\|\psi_{k+1}\|} = \frac{\tilde{a}_{k+1,1}f_1 + \dots + \tilde{a}_{k+1,k}f_k + \tilde{a}_{k+1,k+1}f_{k+1}}{\|\psi_{k+1}\|} = c_{k+1,1}f_1 + \dots + c_{k+1,k}f_k + c_{k+1,k+1}f_{k+1},$$

$$\text{где } c_{k+1,j} = \frac{\tilde{a}_{k+1,j}}{\|\psi_{k+1}\|} \quad (j = 1, 2, \dots, k, k+1).$$

Так как каждый из элементов  $f_1, f_2, \dots, f_k$  является линейной комбинацией элементов  $\psi_1 = \Phi_1 \|\psi_1\|$ ,  $\psi_2 = \Phi_2 \|\psi_2\|$ ,  $\dots$ ,  $\psi_k = \Phi_k \|\psi_k\|$ ,

$$\text{то } \Phi_{k+1} = c_{k+1,k+1} f_{k+1} + \sum_{i=1}^k e_i \Phi_i.$$

Так как система  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$  - ортонормированная, то

$$(\Phi_{k+1}, \Phi_s) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k),$$

$$(\Phi_1, \Phi_s) = \dots = (\Phi_{s-1}, \Phi_s) = (\Phi_{s+1}, \Phi_s) = \dots = (\Phi_k, \Phi_s) = 0, \quad (\Phi_s, \Phi_s) = 1.$$

Тогда  $0 = (\Phi_{k+1}, \Phi_s) = c_{k+1,k+1} (f_{k+1}, \Phi_s) + e_s$ ,  $e_s = -c_{k+1,k+1} (f_{k+1}, \Phi_s)$  ( $s = 1, \dots, k$ ).

$$\text{Получим, что } \Phi_{k+1} = c_{k+1,k+1} \left[ f_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_{k+1}, \Phi_i) \Phi_i \right].$$

$$\|\Phi_{k+1}\| = 1 \Rightarrow c_{k+1,k+1} = \pm \frac{1}{\left\| f_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_{k+1}, \Phi_i) \Phi_i \right\|}.$$

$$\text{Окончательно: } \Phi_{k+1} = \pm \frac{f_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_{k+1}, \Phi_i) \Phi_i}{\left\| f_{k+1} - \sum_{i=1}^k (f_{k+1}, \Phi_i) \Phi_i \right\|}. \quad (2)$$

Согласно индуктивному предположению и с учетом  $\varphi_1 = \pm \Phi_1$  имеем:  $\varphi_i = \pm \Phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Тогда  $(f_{k+1}, \varphi_i) \varphi_i = (f_{k+1}, \pm \Phi_i)(\pm \Phi_i) = (f_{k+1}, \Phi_i) \Phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).  
Значит, в силу (1) и (2)  $\varphi_{k+1} = \pm \Phi_{k+1}$ .

Итак, согласно методу математической индукции ортонормированные системы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  и  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$  эквивалентны.

Таким образом, доказано, что для данной линейно независимой системы  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  элементов в евклидовом пространстве ортонормированная система, составленная из линейных комбинаций этих элементов, существует и единственна (с точностью до знака).

### Литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2 т. – М.: Наука, 1980. - Т.2.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.И. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 2004.

## РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРВОГО ПОРЯДКА АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБРАТНОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА

Д.С. ШПАК  
ГрГУ им. Я.Купалы, Гродно  
e-mail: d.s.shpak@grsu.by

УДК 517.98

Ключевые слова: *импульсная характеристика, полиномиальный эволюционный оператор, асимптотически обратный эволюционный оператор.*

В работе изучен вопрос о построении импульсных характеристик первого порядка асимптотически обратных эволюционных операторов и реализации данной задачи на языке C#.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$L(D)x + dx^2 = f(t) \quad (1)$$

с квадратичной нелинейной частью.

Уравнению (1) можно поставить в соответствие полиномиальный эволюционный оператор второй степени  $Ax = a_1 * x + S_2(a_2 * x^{\otimes 2})$  с обобщенными импульсными характеристиками  $a_1 = \delta^{(m)} + c_{m-1}\delta^{(m-1)} + c_{m-2}\delta^{(m-2)} + \dots + c_1\delta' + c_0\delta$ ,  $a_2 = d\delta^{\otimes 2}$ , где  $\delta$  – дельта-функция Дирака, определяемая равенством  $\delta(x) = x(0)$  [1].

Вид обобщенной импульсной характеристики первого порядка  $b_1$  асимптотически обратного нелинейного эволюционного оператора  $B$  для различных корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  характеристического уравнения для (1) определим, представив характеристику  $b_1$  как сумму ее составляющих, т.е.  $b_1 = b_1^1 + b_1^2 + b_1^3 + b_1^4$ , где выражения  $b_1^1(t)$ ,  $b_1^2(t)$ ,  $b_1^3(t)$ ,  $b_1^4(t)$  зависят от характера корней характеристического уравнения. Введем следующие обозначения:

- 1)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – простые вещественные корни однородного характеристического уравнения;
- 2)  $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+k}$  – кратные вещественные корни кратностей  $j_1, \dots, j_k$  однородного характеристического уравнения;
- 3)  $\lambda_{n+k+1}, \dots, \lambda_{n+k+r}$  – комплексно-сопряженные корни уравнения;
- 4)  $\lambda_{n+k+r+1}, \dots, \lambda_{n+k+r+s}$  – кратные комплексно-сопряженные корни кратностей  $j_1, \dots, j_s$  уравнения. Заметим, что  $n + k + r + s = m$ .

Исходя из введенных обозначений, составляющие  $b_1^1(t)$ ,  $b_1^2(t)$ ,  $b_1^3(t)$ ,  $b_1^4(t)$  обобщенной импульсной характеристики первого порядка оператора  $B$  будут иметь вид

$$b_1^1(t) = \theta(t) \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} e^{\lambda_i t}, \quad (2)$$

где  $n$  – количество простых вещественных корней уравнения;

$$b_1^2(t) = \theta(t) \sum_{l=1}^k t^{j_l - 1} e^{\lambda_l t}, \quad (3)$$

где  $k$  – количество кратных вещественных корней с кратностями  $j_i$ ;

$$b_1^3(t) = \theta(t) \sum_{p=1}^r e^{\alpha_p t} \sin \beta_p t, \quad (4)$$

где  $r$  – количество комплексно-сопряженных корней, кратное 2;

$\alpha_p$ ,  $\beta_p$  – действительная и мнимая части комплексно-сопряженных корней;

$$b_1^4(t) = \theta(t) \sum_{i=1}^s \sum_{h=0}^j C_h^1 t^{2h} e^{\alpha_i t} \sin \beta_i t + C_h^2 t^{2h-1} e^{\alpha_i t} \cos \beta_i t, \quad (5)$$

где  $C_h^1, C_h^2$  – биномиальные коэффициенты, причем  $C_0^2 = 0, j = (j_i - 1) / 2$  при  $j_i$  – нечетной кратности комплексно-сопряженных корней, а  $C_0^2 = C_{\frac{j_i}{2}}^1 = 0, j = \frac{j_i}{2}$  при  $j_i$  – четной кратности [1].

Решая характеристическое квадратное уравнение, находят его корни и, в зависимости от найденных корней, строят импульсные характеристики в различный момент времени  $t$ . Таким образом, в зависимости от вычисленного дискриминанта квадратного уравнения получаем три случая.

На примере третьего случая: имеем комплексно-сопряженные корни, и, следовательно, импульсная характеристика первого порядка вычисляется по формуле (4). Реализация данного случая представлена следующей функцией.

```
private void menshe(Complex x1, Complex x2)
{ List<double> x = new List<double>(), y = new List<double>();
  dataGridView1.ColumnCount = 2; dataGridView1.RowCount = 21;
  int rowIndex = 0; for (double t = 0; t <= 1.0001; t = t + 0.05)
  { double B = Math.Exp(x1.Real * t) * Math.Sin(x1.Imaginary * t);
    dataGridView1[0, rowIndex].Value = t;
    dataGridView1[1, rowIndex].Value = Math.Round(B, 4);
    x.Add(t); y.Add(B); rowIndex++; }
  chart1.Series[0].Points.DataBindXY(x, y); }
```

## Литература

1. Вувуникян Ю.М, Шпак Д.С. Полиномиальные эволюционные операторы: монография. – Гродно: ГрГУ, 2015. – 277 с.

## ХЕШИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ РЯДОВ ФАРЕЯ

**М.Ю. ЯСТРЕБОВ**

Государственный университет морского и речного  
флота имени адмирала С.О. Макарова, г. Санкт-Петербург  
e-mail: rectorat@gma.ru

УДК 004.424.47

Ключевые слова: *хеширование, поиск, ряды Фарея.*

*Предложен метод хеширования, использующий ряды Фарея.*

Ряд Фарея  $F_n$  порядка  $n$  содержит  $t(n) = \sum_{j=2}^n \varphi(j) + 2$  членов – несократимых дробей со знаменателями  $j \in \{1, \dots, n\}$  ( $\varphi$  – функция Эйлера):  $F_n = \{f_1, \dots, f_{t(n)}\}$ . Для хеширования [1] массива из  $N = t(n)$  элементов с ключом поиска  $K \in \{1, 2, \dots, N\}$  выбирается ряд Фарея порядка  $t(n)$ . Пусть  $r(K) = \{K/n\}$  – дробная часть. Если  $f_i = u_i/v_i \leq r(K) < f_{i+1} = u_{i+1}/v_{i+1}$ , то задаём хэш-функцию:

$$h(K) = \begin{cases} \min(v_i, v_{i+1}) \text{ при } u_i \leq \alpha u_{i+1}, \\ h(K) = \max(v_i, v_{i+1}) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь учитывается, что бóльшие знаменатели в среднем встречаются чаще. Параметр  $\alpha > 1$  настраивается в ходе машинного эксперимента.

Назовём сопряжённой к функции  $h$  хэш-функцию  $\hat{h}$ , для которой  $r(K) = \{n/K\}$ . Машинный эксперимент показывает, что оба варианта приемлемы с точки зрения частоты коллизий. Коэффициент сжатия равен  $n/t(n)$ , что, например, при  $n = 40$ ,  $t(n) = 500$  даёт значение 0.08.

При другом способе устранения разночастотности знаменателей  $h(k) = v_i$  при  $v_i \leq [n/2]$  и  $h(k) = n - v_i$  при  $v_i > [n/2]$  с коэффициентом сжатия  $n/2t(n)$ .

С более общей точки зрения знаменатели ряда Фарея, как и параметры, формируемые в алгоритме поиска Фибоначчи [2], можно рассматривать как «реперные точки», с использованием которых формулируется алгоритм перемешивания.

## Литература

1. Алгоритмы: построение и анализ / Кормен Т. [и др.]. – М.-СПб.-Киев: Изд. дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.
2. Ястребов М.Ю. Поиск Фибоначчи – обоснование, система счисления и хеширование // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета - 2013, № 3 (174). - С. 53-58.

# ONE MODIFICATION OF F. AND M. RIESZ LEMMA ON PEAK SETS AND ALGEBRAS GENERATED BY A UNITARY OPERATOR IN PONTRYAGIN SPACE

**VIADIMIR STRAUSS**

Department of Mathematics University of Antofagasta, Antofagasta, Chile &  
Uliyanovsk State Pedagogical University, Uliyanovsk, Russia  
e-mail: vstrauss@mail.ru

Keywords: *F. and M. Riesz Lemma, peak sets, weakly closed algebra, Pontryagin space.*

*The article is devoted to the original F. and M. Riesz Lemma on peak sets for the disc algebra modification for a Pontryagin space.*

The original F. and M. Riesz Lemma on peak sets for the disc algebra can be find in, for instance, Garnett [1], Part III, Page 125. This lemma issued, in particular, for a functional description of the weakly closed algebra generated by a single unitary operator and the identity in a Hilbert space. If we pass from a Hilbert space to a Pontryagin one (see the definition in [2]) then there are some difficulties related with spectral peculiarities typical for operators in this space (see, for instance [3] and [4]). We prove the following modification of F. and M. Riesz Lemma on peak set (here  $\mathbb{D}$  and  $\mathbb{T}$  are the open unit disk on the complex plain and its border respectively):

**Lemma 1.** *Let  $\mathcal{E} \subset \mathbb{T}$  be a compact set with the Lebesgue measure equal to zero, let  $\{v_j\}_1^m \subset \mathbb{T}$  be a set of pairwise different points such that  $\mathcal{E} \cap \{v_j\}_1^m = \emptyset$ . Then there is a regular on  $\mathbb{D}$  and continue until the border  $\mathbb{T}$  complex valued function  $\varphi(\xi)$ , such that:*

- |   |   |
|---|---|
| a) $\varphi(\xi) = 1$ for $\xi \in \mathcal{E}$ ;   | } |
| b) $ \varphi(\xi)  < 1$ for $\xi \in \mathbb{T} / \mathcal{E}$ ;                                  |   |
| c) the function $\varphi(\xi) / \prod_{j=1}^m (\xi - v_j)$ is uniformly bounded on $\mathbb{D}$ . |   |

and use it for a description and studies of some properties of the weakly closed algebra with the identity operator generated by a unitary operator in a Pontryagin space. The latter description is given in terms of a model representation similar to one used in [4].

## Bibliography

1. Garnett J.B. Bouded Analytic Functions. – New York–London–Toronto–Sydney - San Francisco: Academic Press, 1981.

2. Azizov T.Ya., Iokhvidov I.S. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с. (Russian); Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric. - New York: Wiley, 1989. – 318 p. (English).
3. Strauss V.A. On an analog of the Wold decomposition for a  $\pi$ -semi-unitary operator and its model representation. – Contemporary Mathematics (USA: AMS). – 1995. – V. 189. – P.473-484.
4. V. Strauss V.A. Models of function type for commutative symmetric operator families in Krein spaces // *Abst. and Appl. Analysis* - **2008**. - Article ID 439781. - 40 p.

## СЕКЦИЯ 4

### Новые информационные и педагогические технологии в образовании

#### КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРЕЗЕНТАЦИЯ С ИНТЕРАКТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

**Н.В. АССОНОВА**

Смоленский государственный университет

e-mail: assonova@mail.ru

УДК 378.147

Ключевые слова: *электронный образовательный ресурс, интерактивность, формат вычисляемых документов, параллельное проектирование.*

*В докладе представлен опыт создания и использования компьютерной презентации для изучения параллельного проектирования будущими учителями начальных классов. Основой для интерактивных элементов презентации стали адаптированные для русскоязычных студентов свободные англоязычные ресурсы формата вычисляемых документов.*

На психолого-педагогическом факультете Смоленского государственного университета в настоящее время реализуются две программы бакалавриата по подготовке учителей начальных классов. Первая соответствует профилю «Начальное образование и информатика» направления «Педагогическое образование», вторая – профилю «Психология и педагогика начального образования» направления «Психолого-педагогическое образование». Обе программы нацелены на приобретение студентами компетенций, обеспечивающих владение понятийным аппаратом начального курса математики. Умение правильно изображать основные объёмные тела – одна из частей названных компетенций. В первом случае формированию компетенций служит предмет «Математика», во втором – «Теория начального математического образования».

Изучение элементов стереометрии, несомненно, нуждается в достаточном наглядном подкреплении. На наших занятиях используются модели тел, в том числе деревянные, из специального учебного набора. Применяется магнитный конструктор, используются электронные образовательные ресурсы, о чём писалось в работе [1].

На сайте федерального центра информационно-образовательных ресурсов имеется электронный образовательный ресурс информационного характера «Параллельное проектирование. Ортогональное проектирование. Проекция. Изображение пространственных фигур. Ортогональная проекция многоугольника и ее площадь. И1» [2]. Он дополняется практическими ресурсами: П1 с таким же названием, «Параллельное проектирование. Ортогональное проектирование. П2» и контролирующим ресурсом «Параллельное проектирование. Ортогональное проектирование. Ортогональная проекция многоугольника и ее площадь. К1». Описанный модуль удобно использовать для быстрой актуализации студентами школьных знаний по теме «Параллельное проектирование». Однако его применение ограничивают проблемы математического контента. Так, в пятом задании части И1 истинным считается утверждение: «Параллельные проекции непараллельных прямых, лежащих в одной плоскости, могут быть параллельными», а ложным считается утверждение: «Параллельные проекции скрещивающихся прямых на некоторую плоскость могут быть параллельными». Подобные ошибки, к сожалению, нередко встречаются в ресурсах, предлагаемых на федеральном образовательном портале, о чём уже писалось в статье [4].

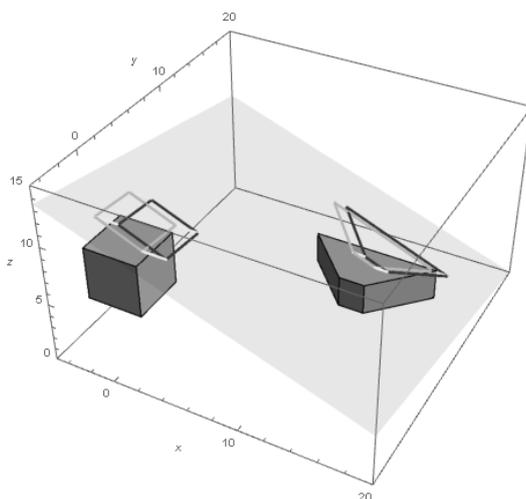


Рис. 1

Часть И1 рассматриваемого модуля состоит из необходимых теоретических сведений о параллельном проектировании и качественных чертежей – иллюстраций. Все ресурсы И1, П1, П2, К1 содержат вопросы с одним или несколькими вариантами ответов, с

возможностью получить подсказку и просмотреть статистику работы с ресурсом. Наличие тестовой части, состоящей из геометрических вопросов и задач, обеспечивает определённый уровень интерактивности модуля. По классификации В.А. Осина [3], этот уровень, вероятно, можно охарактеризовать как «активные формы» и «деятельностные формы».

В данной работе представлена компьютерная презентация «Параллельное проектирование» для студентов – будущих учителей начальных классов. Кроме того, она может быть полезна и сильным учащимся средней школы. Помимо теоретических сведений с необходимыми чертежами в презентации имеются манипуляторы, повышающие её интерактивность до уровня «исследовательские формы» [3].

Презентация создана при помощи предоставленной фирмой Wolfram Research системы компьютерной математики Mathematica. Предлагаемый ресурс представляет собой файл с расширением cdf и имеет формат вычисляемых документов, о котором писалось в [1]. Для работы с презентацией достаточно установить на компьютер свободно скачиваемый cdf-проигрыватель [5].

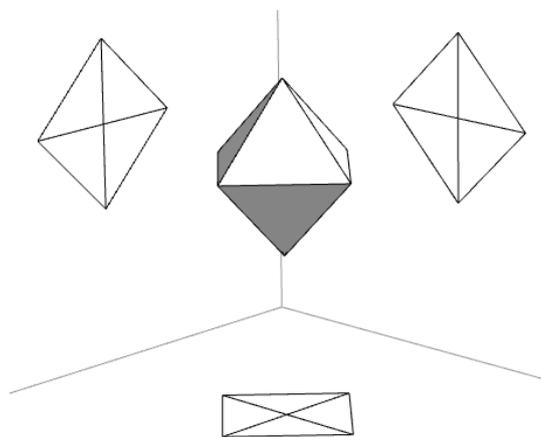


Рис. 2

Основу для интерактивных элементов ресурса составили англоязычные демонстрации [6-11]. Они полностью переведены на русский язык.

Манипулятор «Ортогональное проектирование куба и прямой призмы с равнобокой трапецией в основании на плоскость, положение которой можно изменять» (рис. 1) позволяет просматривать, как изменяются параллельные проекции многогранников на плоскость при изменении положения плоскости и размеров самих многогранников.

Демонстрация «Ортогональное проектирование некоторых многогранников на координатные плоскости» (рис. 2) даёт возможность исследовать параллельные проекции 52 многогранников на

координатные плоскости. В данном манипуляторе набор многогранников изменён по сравнению с оригиналом [8].

Манипулятор «Другие виды проектирования. Стереографическое проектирование» знакомит студентов с новым для них видом проектирования.

Работа с подобными манипуляторами носит не репродуктивный, а исследовательский характер. Она способствует расширению кругозора студентов, развитию их пространственного мышления.

Предлагаемая презентация была нами успешно апробирована на лекционных занятиях. В дальнейшем планируется её применение и на практических занятиях. Она доступна для свободного скачивания по ссылке [12].

### Литература

1. Асонова Н.В. Использование динамических манипуляторов при изучении многогранников будущими учителями начальных классов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIV Международной научной конференции, посвящённой 90-летию профессора М.Б. Балка. - Смоленск: СмолГУ, 2013. - Вып.14. - С. 188-190.

2. Параллельное проектирование. Ортогональное проектирование. Проекция. Изображение пространственных фигур. Ортогональная проекция многоугольника и ее площадь. И1 // URL: <http://fcior.edu.ru/card/5793/parallelnoe-proektirovanie-ortogonalnoe-proektirovanie-proekcii-izobrazhenie-prostranstvennyh-figur-ortogonalnaya-proekciya-mnogougolnika-i-ee-ploshchad-i1.html> (дата обращения здесь и далее: 15.03.2016).

3. Осин А.В. Открытые образовательные модульные мультимедиа системы. - М.: Агентство «Издательский сервис», 2010. – С. 68–72.

4. Асонова Н.В. О проблемах математического контента некоторых свободных электронных образовательных ресурсов // Информатика и образование. 2014. - № 4. - С. 53-61.

5. <http://www.demonstrations.wolfram.com/download-cdf-player.html>.

6. <http://www.demonstrations.wolfram.com/OrthographicProjectionOfParallelepiped/s/>.

7. <http://www.demonstrations.wolfram.com/OrthogonalProjectionOfARectangularSolid/>.

8. <http://www.demonstrations.wolfram.com/ThreeOrthogonalProjectionsOfPolyhedra/>.

9. <http://www.demonstrations.wolfram.com/InverseStereographicProjectionOfSimpleGeometricShapes/>.

10. <http://www.demonstrations.wolfram.com/GlassCut/>.

11. <http://www.demonstrations.wolfram.com/DrawingAnEllipseUsingCirclesAndLines/>.

12. [http://community.wolfram.com/groups?p\\_auth=s0qX6ZjT&p\\_p\\_id=19&p\\_p\\_lifecycle=1&p\\_p\\_state=exclusive&p\\_p\\_mode=view&p\\_p\\_col\\_id=column-1&p\\_p\\_col\\_pos=1&p\\_p\\_col\\_count=3&\\_19\\_struts\\_action=%2Fmessage\\_boards%2Fget\\_message\\_attachment&\\_19\\_messageId=823652&\\_19\\_attachment=Paral.cdf](http://community.wolfram.com/groups?p_auth=s0qX6ZjT&p_p_id=19&p_p_lifecycle=1&p_p_state=exclusive&p_p_mode=view&p_p_col_id=column-1&p_p_col_pos=1&p_p_col_count=3&_19_struts_action=%2Fmessage_boards%2Fget_message_attachment&_19_messageId=823652&_19_attachment=Paral.cdf).

# «GENERAL EDUCATION MAPS» В КОНТЕКСТЕ ЛИЧНОСТНО ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ

Д.А. БОЯРИНОВ

Смоленский государственный университет

УДК 37.01:004

Ключевые слова: *лично ориентированное обучение, индивидуальные образовательные траектории, образовательные карты.*

*В статье рассматриваются проект разработки «General Education Maps» применительно к лично ориентированному обучению, в частности к построению индивидуальных образовательных траекторий. Рассматриваются пять базовых принципов построения «карт общего образования».*

Проблематика лично ориентированного обучения является весьма актуальной для современной отечественной педагогики, хотя единого, общепринятого определения лично ориентированного образовательного процесса к настоящему моменту не существует. Опираясь на работы современных авторов, можно выделить основные черты лично ориентированного обучения [1, с. 73]:

- 1) ученик изначально является субъектом процесса обучения; оно строится с максимальной опорой на субъективный опыт ребенка;
- 2) в лично ориентированном образовательном процессе особую роль играет этап самостоятельной познавательной деятельности и выработки отношения к знанию;
- 3) учащийся в определённой степени превращается в учителя самого себя;
- 4) во главу угла ставится личность ребенка, ее самооценку;
- 5) в ходе лично ориентированного образовательного процесса учащийся решает собственные, лично значимые проблемы.

Существенную роль в лично ориентированном учебном процессе играет индивидуальная траектория обучения как форма учёта личностных особенностей учащегося, что отмечалось многими исследователями [2; 3]. В некоторых отраслях знания, в частности в математике и физике, понятие «траектория» тесно связано с более общим понятием «пространство». Естественно возникает вопрос, что можно рассматривать в таком качестве применительно к индивидуальным траекториям обучения в педагогике. Интересным в данном контексте представляется современный опыт зарубежных стран. Начиная с 2013 года Ассоциация американских колледжей и университетов (Association of American Colleges and Universities) реализует программу применения инновационных технологий в

образовании, включающую в себя создание General Education Maps (GEMS). Термин «General Education Maps» можно перевести на русский язык как «Карты общего образования». Основная цель создания таких карт – обеспечение взаимосвязи между отдельными учебными курсами, преодоление фрагментации, некогерентности знаний и порождённой ими фрустрации [4, р. 7].

В основу проекта «General Education Maps» положены пять базовых принципов [4, р. 17]. К ним относятся: определённость постановки целей обучения (колледжи и университеты должны обеспечить четкое описание желаемых результатов обучения для всех студентов); помощь в самостоятельной постановке целей обучения (выбор компетенций, необходимых в профессиональной деятельности и повседневной жизни, выбор путей их развития и реализация этих путей осуществляется всеми студентами самостоятельно, при необходимости – с помощью и поддержкой образовательного учреждения); интегративное и проблемно-ориентированное обучение; справедливость (учебные заведения должны понимать и решать проблемы неравенства студентов, обусловленного в том числе физическими и материальными ограничениями); прозрачность (обучающиеся должны чётко понимать, какие компетентности вырабатываются на тех или иных этапах обучения и каким образом подтверждается их наличие при прохождении процедур контроля).

Таким образом, можно констатировать, что идеология, заложенная создателями в проект «General Education Maps», в определённой степени близка к современной отечественной трактовке личностно ориентированного обучения. Это проявляется в трёх из пяти принципов (при этом остальные принципы отражают значительное влияние технологического подхода, что вполне естественно для США). Мы полагаем, что рассмотрение «образовательных карт» как пространства возможных индивидуальных траекторий обучения, перспективно и с точки зрения разработки алгоритмов построения таких траекторий, и с точки зрения проектирования обобщенных групповых траекторий обучения.

### Литература

1. Бояринов Д.А. Информационное образовательное пространство личностного развития учащихся: монография. – Смоленск; Изд-во СмолГУ, 2014. – 144 с.
2. Вдовина С.А., Кунгурова И.М. Сущность и направления реализации индивидуальной образовательной траектории // Электронное научное издание «НАУКОВЕДЕНИЕ». URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/40PVN613.pdf> (дата обращения: 01.03.2016).
3. Информационное образовательное пространство: модели и технологии / Емельченков Е.П. [и др.]. - Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. – 216 с.
4. General Education Maps and Markers: Designing Meaningful Pathways to Student Achievement. – NW, Washington, DC: Association of American Colleges and Universities, 2015. – 44 p.

# ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**А.В. ДЮНДИН**

Смоленский государственный университет

e-mail: avdyndin@yandex.ru

УДК 372.853

Ключевые слова: *дистанционное обучение, физика, решение задач.*

*В работе рассматривается вопрос об организации и техническом обеспечении обучения решению задач по физике в системах дистанционного обучения.*

Дистанционное обучение в соответствии с [7] определяется как «образовательные технологии, реализуемые в основном с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном (на расстоянии) взаимодействии обучающихся и педагогических работников». К настоящему времени довольно большое количество педагогических учреждений (частных или государственных) предлагают услуги по организации обучения в дистанционной форме, однако чаще всего это предложения по подготовке к ЕГЭ и ОГЭ.

Одной из проблем дистанционного обучения является обучение решению задач и контроль результатов. Мы останавливались на некоторых аспектах этой проблемы в процессе подготовки к ЕГЭ [1], однако полное ее решение в доступных источниках нами не обнаружено.

Вопрос обучения решению физических задач очень подробно исследован в отечественной литературе, например в [2; 4], поэтому проблем с подбором дидактического материала для организации обучения решению задач в системе дистанционного обучения нет.

Опираясь на работу Е.С. Полат [3], мы считаем возможным организовать процесс обучения решению задач в системе дистанционного обучения в соответствии с авторской технологией Р.Г. Хазанкина, основы которой изложены в [6]. Данная авторская технология как нельзя лучше подходит к реализации в системе дистанционного обучения, так как предусматривает лекционное изложение теоретического материала, рассмотрение решения «ключевых» задач, проведение консультаций и зачетов.

Изложение теоретического материала и решение «ключевых» задач следует организовать в форме видео лекций, причем желательно в кабинете физики с хорошей доской, четко проработанной последовательностью изложения материала, рисунками и демонстрациями. Этот материал обязательно дополняется ссылками на

учебно-методические пособия, материалы сети и размещаемые в системе документы. В качестве базы для подбора «ключевых» задач имеет смысл использовать материалы [6].

Организация индивидуальных или групповых консультаций по физике требует выполнять решения задач и давать пояснения к ним в режиме реального времени, для чего используются ресурсы для проведения видеоконференций с возможностью демонстрировать изображение с экрана. К сожалению, очень часто преподаватели ограничиваются устными пояснениями или демонстрируют готовые решения. Для объяснения логики решения задачи следует использовать графические редакторы и строить изображения с использованием планшета или специальной «мыши».

Контроль за выполнением самостоятельного решения задач осуществляется с помощью электронной почты, тестирование следует использовать в качестве дополнительной формы контроля.

Таким образом, для организации работы по обучению решению задач по физике следует с помощью специального программного обеспечения разместить в сети видео лекции, записи необходимых опытов по физике, тестовые материалы и тексты задач и организовать общение по обсуждению материалов с помощью специальных программ. Поэтому важно обеспечить техническую подготовку преподавателя и организовать вспомогательную структуру для быстрого решения технических и организационных проблем.

## Литература

1. Дюндин А.В. Дистанционная подготовка к ЕГЭ по физике // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2014. – Вып. 15. – С. 246–248.

2. Каменецкий С.Е., Орехов В.П. Методика решения задач по физике в современной школе: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1971. – 448 с.

3. Полат Е.С. Дистанционное обучение. // Педагогические и информационные технологии в образовании. Научно-методический журнал. - url: [http://scholar.urfu.ac.ru/ped\\_journal/numero4/pedag/polat.html](http://scholar.urfu.ac.ru/ped_journal/numero4/pedag/polat.html) (дата обращения: 13.03.2016).

4. Савченко Н.Е. Задачи по физике с анализом их решения. – М.: Просвещение, 2000. – 320 с.

5. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии. – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.

6. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». Открытый банк заданий ЕГЭ. - url: <http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege> (дата обращения: 13.03.2016).

7. Федеральный закон от 29.12.2012 N 273-ФЗ (редакция от 23.07.2013) «Об образовании в Российской Федерации».

## О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

А.В. КОНАШЕНКО, Н.А. ШЕРСТНЕВА  
Смоленский государственный университет

УДК 372.851

Ключевые слова: задачи с параметрами, функциональный метод, монотонность.

*В докладе рассматриваются функциональные методы решения задач с параметрами. Более подробно освещено использование монотонности функций в решении параметрических задач. Рассмотрено несколько конкретных примеров.*

Задачи с параметрами, благодаря тому что при их решении приходится применять навыки настоящего серьезного исследователя, прочно вошли в практику олимпиад различных технических и классических вузов (МФТИ, МИФИ, МГУ, СПбГУ и др.), они также являются существенной частью второго блока профильного ЕГЭ по математике. Поэтому внимание к таким задачам, а также подходам и методам их решения вполне естественно. В одном из вариантов классификации методов решения задач с параметрами можно выделить следующие основные направления: 1) аналитический метод; 2) графический (геометрический) подход; 3) функциональный метод; 4) применение особых приемов (например, рассмотрение ОДЗ, перебор отдельных точек, равноправие переменных и т.д.).

Подробнее остановимся на функциональном методе, основная идея которого состоит в применении к решению задачи различных свойств функций, в нее входящих, например монотонности, ограниченности, четности, периодичности. Благодаря этому сложные и громоздкие на первый взгляд задачи могут быть быстро и относительно просто решены. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих сказанное.

$$1. \text{ Решить систему уравнений } \begin{cases} x - y + 2a = 3^y - 9^a \cdot 3^x \\ y = x^2 + x. \end{cases}$$

$$\text{Перепишем эту систему так: } \begin{cases} x + 2a + 3^{x+2a} = y + 3^y \\ y = x^2 + x. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь функцию  $f(t) = t + 3^t$ , которая очевидно непрерывна и монотонно возрастает на всей числовой прямой. Тогда

уравнение  $f(k)=f(m) \Leftrightarrow k=m$ . В данной задаче 1-е уравнение системы можно переписать как  $f(x+2a)=f(y) \Leftrightarrow x+2a=y$ .

Получаем

$$\begin{cases} x+2a=y \\ y=x^2+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2+x \\ x+2a=x^2+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2+x \\ x^2=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ x = \pm\sqrt{2a} \\ y = 2a \pm \sqrt{2a} \end{cases}$$

*Ответ:* при  $a < 0$  нет решений; при  $a \geq 0$   $x = \pm\sqrt{2a}$ ;  $y = 2a \pm \sqrt{2a}$ .

2. Решите уравнение  $\sqrt[3]{a+x} - \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ .

Рассмотрим функцию  $f(x) = \sqrt[3]{a+x} - \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{x-a}$ , которая монотонно возрастает на всей числовой прямой и значит, каждое свое значение принимает в единственной точке. Очевидно, что  $f(a) = \sqrt[3]{2a}$ , как раз правая часть уравнения. Других решений нет. *Ответ:*  $x=a$ .

3. При каких  $a$  уравнение  $1 + \sin^2 ax = \cos x$  имеет единственное решение?

Во-первых очевидно, что  $x=0$  является решением независимо от  $a$ . Значит, мы не должны допустить появления других корней.

Заметим, что функции  $f(x) = 1 + \sin^2 ax$  и  $y(x) = \cos x$  периодичны. Нужно добиться неперiodичности функции  $\varphi(x) = f(x) - y(x)$ . Это может получиться только в том случае, если основные периоды этих функций несоизмеримы. Откуда с необходимостью получается, что  $a$  – число иррациональное. Теперь остается проверить, что при  $a$  иррациональных кроме  $x=0$  нет других решений. Но, так как  $1 + \sin^2 ax \geq 1$ ;  $\cos x \leq 1$ , получаем, что  $\begin{cases} ax = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{n}{2k}$ , что противоречит иррациональности  $a$ . Значит других корней нет.

*Ответ:*  $a$  – любое иррациональное число.

4). При каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет более одного решения  $|x-a| - |x-1| - a - 3|x-3| = 0$ ?

$$\text{Рассмотрим функцию } f(x) = |x-a| - |x-1| - a - 3|x-3|$$

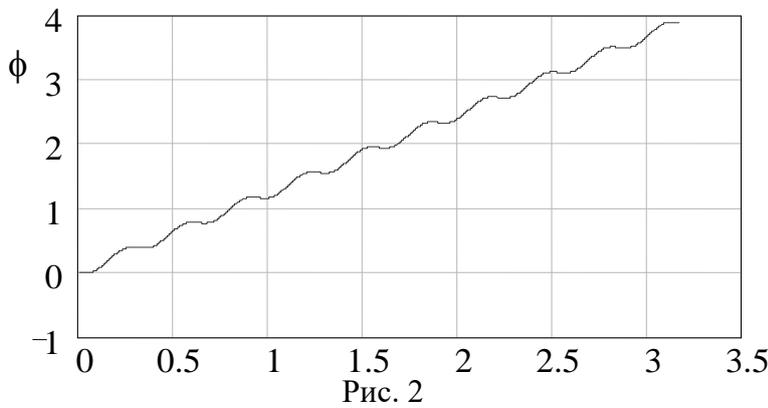
Легко заметить, что при  $x < 3$  независимо от  $a$  данная функция монотонно возрастает, а при  $x > 3$  монотонно убывает. Т.е. точка  $x_0=3$  является точкой максимума данной функции. Т.е. чтобы данное уравнение имело более одного решения (а именно 2), учитывая непрерывность функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $f(3) > 0$ . Получаем  $|3-a| - |2-a| - 0 > 0 \Leftrightarrow |a-3| > |a-2| \Leftrightarrow a < 2,5$  (учитывая геометрический смысл модуля).

*Ответ:*  $(-\infty; 2,5)$ .



Ознакомившись с основными положениями, лежащими в основе теории ([1; 2]), студенты приступают к численному решению взятых из [1] дифференциальных уравнений движения волчка.

Уравнение для угла нутаций имеет смысл лишь в ограниченном интервале значений. Нижняя граница  $q = q_0$  равна начальному углу наклона оси раскрученного волчка. Верхняя граница  $q_1$  зависит от начальной угловой скорости волчка  $\omega_0$  и расстояния  $l$  центра масс от точки опоры. Значение  $q_1$  находится численным решением довольно громоздкого уравнения. Решение дифференциального уравнения для угла нутаций вначале находится для временного интервала, в котором этот угол возрастает. Из этого решения конструируется вся временная



зависимость  $q(t)$ , и на этой основе интегрируются уравнения для угла собственного вращения  $j(t)$  и угла прецессии  $f(t)$ .

Все полученные временные зависимости выводятся в виде графиков. Один из таких

графиков представлен на рисунке 2. На рисунках 3 и 4 представлены трехмерные графики траекторий одной из точек оси волчка.

Студенты исследуют с помощью выводимых компьютером графиков движение волчка при различных угловых скоростях собственного вращения  $\omega_0$ , различных расстояниях  $l$  от центра масс до точки опоры, различных начальных углах наклона оси волчка  $q_0$  и сообщенной ей вначале угловой скорости вокруг вертикальной оси.

Результаты исследований сравниваются с выводами приближенной теории быстрого волчка.

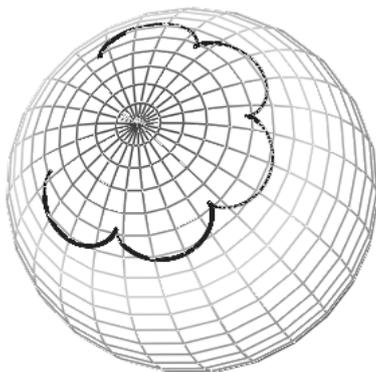


Рис. 3.

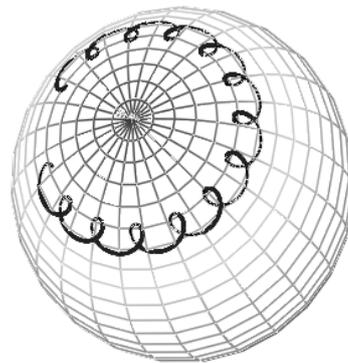


Рис. 4.

## Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1: Механика. - М.: Наука, 1988. - 216 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1: Механика. – М.: Физматлит, 2006.- 560 с.

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ «ПЕРЕВЕРНУТЫЙ УРОК» В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ В ВУЗЕ

Г.Е. СЕНЬКИНА

Смоленский государственный университет

УДК 37.02

Ключевые слова: *технология «перевернутый урок», обучение в вузе, информационные технологии.*

*Статья посвящена актуальной технологии обучения «перевернутый урок», используемой в школьном обучении. Рассматриваются возможности применения ее в вузе в так называемом «смешанном обучении», в условиях сочетания очной формы обучения и электронного обучения.*

Идеи использования информационных технологий в обучении стремительно меняют традиционную систему обучения как в вузе, так и в школе.

Традиционное обучение в вузе или школе укладывается в схему «лекция / урок - домашняя работа – лекция / урок - домашняя работа - экзамен», тогда как современные технологии позволяют как бы «перевернуть» процесс обучения. В школе ученики тратят строго определенное время на изучение предмета, а затем идут дальше, причем отстающие рискуют отстать навсегда. Но было замечено, что обучающимся удобнее поменять порядок – прорабатывая лекции и решая задачи дома (используя, например, видеолекции или тексты лекций, предоставленные преподавателем), а на занятиях обсуждая сложные места с преподавателем в небольших группах, а то и вовсе индивидуально. При этом преподаватель становится тьютором, сопровождающим учебный процесс, а не основным источником «знаний под запись». Отведенное на учебу время тратится более эффективно, не говоря уже о том, что подобная система обучения максимально далека от того, что можно было бы называть «элитарным» образованием, поскольку позволяет каждому в своем темпе прорабатывать теоретический материал.

Для организации обучения в технологии «перевернутый урок» наработано огромное количество ресурсов в сети Интернет: банки

видеолекций по различным темам, классам, предметам и уровням образования, которые имеются на различных языках. Международные корпорации типа Google подключились к процессу формирования контента для подобного обучения, которое иногда называют «смешанным».

Под **смешанным обучением** понимается образовательная технология, реализуемая в условиях сочетания очной формы обучения и электронного обучения. Это смешение традиционной классно-урочной системы и современного цифрового образования [1; 2].

В условиях понижения уровня подготовки выпускников общеобразовательных школ, снижения мотивации их поступления и обучения на педагогических направлениях университетов становится весьма актуальным овладение будущими учителями технологией смешанного обучения методом «погружения». Тем самым студенты постигают особенности смешанного обучения в школе в условиях смешанного обучения в вузе, используя платформы для дистанционного обучения типа MOODLE. Такая возможность предусмотрена Законом «Об образовании» РФ, разрешающим использовать дистанционную форму обучения в образовательных организациях [3].

Особенно важно при этом то, что преподаватель помогает студентам вырабатывать приемы эффективной подготовки к занятиям, формирует у них полезные навыки организации самостоятельной работы, используя образовательные ресурсы Интернета.

В практике обучения студентов физико-математического факультета по профилю «Математика и информатика» педагогического направления бакалавриата нами применяется рассматриваемая технология в преподавании учебной дисциплины «Методика обучения математике».

Необходимо отметить, что в целом применение современных технологий активного обучения с использованием информационных ресурсов вызывает заинтересованность у студентов. Так, они с удовольствием проводят «рекламу» школьных учебников математики в роли авторов, издателей, учителей в форме презентаций, интервью, видеороликов, овладевая при этом приемами логико-структурного, логико-математического, методического анализа содержания школьных учебников математики.

Технология «перевернутый урок» также заинтересовала студентов, выявила их слабые места в организации самостоятельной работы в процессе подготовки к практическим занятиям, помогла скорректировать систему подготовки к обучению математике в школе.

Необходимо отметить также, что полный переход на такую технологию в обучении математике пока маловероятен, поскольку

требует достаточно высокого уровня мотивации и математической подготовки обучающихся.

### Литература

1. Бергманн Дж., Семс А. Обучение наоборот: Как научить любого ученика в любом классе в любой момент // ISTE and ASCD, 2012. – <https://www.getabstract.com/ru> (дата обращения: 28.03.2016)
2. Malinina I. Blended Learning of the English Language: Combining Online and Face-to-Face Teaching // Infonomic Society. – London, 2012. – P. 247-251.
3. Федеральный закон об образовании в Российской Федерации. – [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_law\\_140174/lfnf](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_law_140174/lfnf) (дата обращения: 28.03.2016).

## РАЗРАБОТКА СЕТЕВЫХ ПРОЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ТЕХНОЛОГИИ THINGLINK FOR EDUCATION

**Н.М. ТИМОФЕЕВА**

Смоленский государственный университет  
e-mail: nat.timopheeva@yandex.ru

УДК 004.4'27

Ключевые слова: *мультимедиа технологии, визуализация графической информации, web-сервис ThingLink, сетевая проектная деятельность.*

*В статье рассматриваются возможности web-ресурса ThingLink for Education и алгоритм создания на его основе сетевых проектов для разработки иллюстративного материала культурной направленности.*

Использование мультимедиа технологий придает информационному контенту интерактивность, наглядность с точки зрения визуализации, делает его легко усваиваемым. Большую информационную насыщенность текстовой информации могут добавить графические иллюстрации, видео, а графической – использование специального инструментария web-сервиса ThingLink.

ThingLink for Education позволяет создавать уникальные мультимедийные образовательные материалы любой тематики (интерактивные плакаты, технологические карты, карты путешествий, викторины и т.п.) за счет:

- поддержки загрузки по URL фото, видео, звука с популярных хостингов;
- вставки текстовых комментариев и ссылок на сторонние сервисы;

- предоставления возможности совместной работы с изображением даже без регистрации;
- распространения интерактивных изображений через социальные сети в виде ссылки и через вставку кода на сайт [1].

Готовое интерактивное изображение ThingLink выглядит как обычная картинка. При наведении на неё указателя мыши появляются метки и всплывающие над ними окна с текстовой и/или мультимедийной информацией.

Интуитивная ясность и понятность интерфейса, минимум функционала ThingLink позволяет без труда работать с ним даже начинающему пользователю.

Алгоритм работы в ThingLink выглядит следующим образом.

1. *Предварительная подготовка:* выбор фонового изображения; подбор текстового материала, картинок, фотографий, видео, гиперссылок, иллюстрирующих фоновое изображение.

2. *Регистрация / вход в личный кабинет на [thinglink.com/edu](http://thinglink.com/edu).* Имеется возможность регистрации через аккаунты на Google, в Facebook или Twitter либо через заполнение регистрационной формы.

3. *Загрузка фонового изображения.* Имеется возможность выбрать изображение на компьютере, по прямой ссылке в Интернет, из сети Facebook или с сервиса Flickr.

4. *Установка меток.* Метки устанавливаются щелчком левой кнопки мыши по выбранному фрагменту фонового изображения и указанием URL-адреса видео, картинки, презентации в Интернете и др. и/или написанием текстового комментария в появляющемся диалоговом окне метки.

5. *Сохранение созданного изображения.* Технология ThingLink – облачная технология. Это означает, что все создаваемые с её помощью материалы хранятся в защищенном интернет-хранилище, они доступны с любого компьютера, подключенного к Интернету и имеющего стандартный браузер.

6. *Предоставление доступа к созданному интерактивному изображению.* Сервис дает возможность встраивания созданного изображения путем копирования его URL-адреса или html-кода. Настройки доступа позволяют сделать изображение личным или публичным, а также редактировать его всем желающим даже без регистрации.

В рамках работы над поддержанным грантом конкурсом «Православная инициатива 2014-2015», направление «Образование и воспитание», для разработки иллюстративных мультимедийных материалов виртуального музея на основе технологии ThingLink for Education была организована сетевая проектная деятельность школьников по созданию интерактивных плакатов, посвященных

православным храмам Смоленского региона. Примеры сетевых проектов, связанных с культурным наследием родного края, можно найти на сайте виртуального музея «Православные храмы Смоленщины» по адресу [sites.google.com/site/chramysmolensk](http://sites.google.com/site/chramysmolensk).

Web-сервис ThingLink является простым и эффективным инструментом визуализации графической информации, что делает его возможным для использования в сфере образования.

### Литература

1. Информационные технологии в сетевой и проектной деятельности. Учебное пособие для преподавателей / Г.Е. Сенькина [и др.]: отв. ред. Сенькина Г.Е. – Смоленск: Изд-во «Универсум», 2015.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА ПО ФИЗИКЕ

Е.А. ЦАРЕВА

Смоленский государственный университет  
e-mail: elean@inbox.ru

УДК 532.1, 372.016

*Ключевые слова: физика, лабораторный практикум, решение задач, компьютерное моделирование физических процессов, использование информационных технологий в образовании.*

*В статье рассматриваются пути оптимизации лабораторного практикума на основе использования информационных технологий как при проведении натурального эксперимента в его традиционном виде, так и при физическом моделировании процессов.*

Переход на новые стандарты высшего образования и сокращение числа аудиторных занятий по физике потребовали разработки нового подхода к проведению физического лабораторного практикума.

Работа студента в лаборатории носит исследовательский характер и формирует не только экспериментальные, но и исследовательские навыки. Лабораторные работы создают благоприятные условия для разъяснения непонятных вопросов, осмысления теоретических знаний и показа их практической значимости. Они учат будущих учителей физики правильно обращаться с демонстрационным и лабораторным оборудованием, применять полученные теоретические знания при постановке и выполнении экспериментальных исследований, развивают их творческие способности.

Современные информационные технологии открывают новые возможности физического практикума. Они позволяют моделировать физические процессы и получать кардинально новые результаты, которые не могут быть достигнуты в условиях применения стандартного физического оборудования.

Кроме того, в современной физической лаборатории компьютер давно выполняет функцию устройства, позволяющего автоматизировать процесс получения и обработки экспериментальной информации. Такая автоматизация существенно сокращает время, необходимое для снятия показаний и обработки результатов измерений, а это значит, что увеличивается время для осмысления и интерпретации полученных данных. Студенты получают возможность решения дополнительных задач как вычислительного, так и качественного характера, причем данные для задач могут частично браться из результатов лабораторной работы. Это позволяет студентам лучше понять сущность рассматриваемых явлений и процессов, а также провести самооценку полученных знаний.

Использование задач возможно на всех этапах выполнения лабораторной работы. Например, на этапе подготовки к лабораторной работе, после изучения теоретического материала студентам предлагаются вопросы и качественные задачи для контроля полученных знаний.

Но наибольший эффект дает использование задач при защите лабораторных работ, которые позволяют углубить знания, усилить практическую направленность предложенных задач путем установления связи между элементами задачи и лабораторной работы.

Для осуществления более глубокой связи экспериментального и теоретического материала для каждой лабораторной работы было подобрано несколько конкретных физических задач, имеющих различный уровень сложности и связанных по содержанию с результатами выполняемых лабораторных работ. Это позволяет при оценке выполнения работы проверить не только теоретические знания студентов, их владение методикой эксперимента, но и умение применять полученные знания при решении конкретных задач.

Например, при выполнении лабораторной работы «Определение коэффициента вязкости» можно предложить следующие задания.

- Измерив высоту с которой шарик падает в глицерин, оцените скорость вхождения в жидкость и длину стабилизационного участка.
- Латунный шарик диаметром 0,5 мм падает в глицерине. Определите скорость установившегося движения.
- Смесь свинцовых дробинок диаметром  $d_1 = 1$  мм и  $d_2 = 3$  мм опустили в сосуд с глицерином глубиной  $h = 1$  м. На какое время  $\tau$

дробинки меньшего диаметра достигнут дна сосуда позже, чем дробинки большего диаметра? Динамическая вязкость глицерина  $\eta = 13,9$ , г/(см·с), плотность глицерина  $\rho_{\text{гл}} = 1,2$  г/см<sup>3</sup>, плотность свинца  $\rho_{\text{св}} = 11,3$  г/см<sup>3</sup>.

- При движении шарика радиусом 2,4 мм в касторовом масле ламинарное обтекание наблюдается при скорости шарика, не превышающей 10 см/с. При какой скорости шарика радиусом 1 мм в глицерине обтекание станет турбулентным?

Проведение таких объединенных лабораторно-практических работ и внедрение компьютерных технологий позволяет хоть немного компенсировать нехватку учебного времени, сохраняя традиционный натуральный эксперимент.

## **ПРОБЛЕМЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ОБУЧАЮЩИХ СИСТЕМ. ОПЫТ КОМПАНИИ «УЧИ.РУ»**

**А.Н. ВАХОВ, Е.А. ЗОТОВА, И.В. КОЛОМОЕЦ, А.П. РЫЖОВ, А.Ю. ЩВАРЦ**

ООО “Учи.ру”; МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва  
e-mail: vakhov@uchi.ru; zotova@uchi.ru; kolomoetz@uchi.ru;  
ryjov@mail.ru; shvarts.anna@gmail.com

УДК 004.89

Ключевые слова: обучающие системы, обучение математике, персонализация, адаптация.

*В докладе обсуждаются состояние, тренды и основные проблемы развития компьютерных обучающих систем. Проведённый анализ показывает, что основным вызовом и точкой роста для таких систем является адаптация и персонализация процесса обучения. Основные положения иллюстрируются на примере платформы Учи.ру.*

Понятие компьютерных обучающих систем возникло практически одновременно с понятием искусственного интеллекта и претерпело значительную эволюцию одновременно с развитием компьютерных технологий. В докладе проводится такой исторический экскурс, близкий к обзору [1]; отдельно обсуждаются глобальные изменения, происшедшие в последнее время и происходящие сейчас [2; 3]. Авторы одного из наиболее авторитетных аналитических институтов – McKinsey Global Institute (MGI), изучая влияние более 100 технологий на развитие экономики и общества, пришли к заключению, что технологии автоматизации интеллектуальной деятельности (годовой вклад в экономику 2025 года - от 5,2 до 6,7 триллионов долларов США в текущих ценах) в первую очередь обеспечат новые способы обучения на

базе интеллектуальных систем и big data [3].

Сложившийся к настоящему времени ландшафт направления компьютерных обучающих систем (EdTech в англоязычной терминологии) наиболее полно представлен в [4]. В докладе подробно обсуждаются основные типы таких систем, приводится их классификация. Уникальными или специфическими именно для этого рынка являются системы, помогающие эффективно усваивать необходимый учебный материал. Именно такие системы рассматриваются ниже.

Несоответствие запроса современной экономики на массовое обучение новым специальностям, навыкам, знаниям, вызванное быстрой сменой технологий, с одной стороны, и предложения образовательных институтов – с другой, является главным источником инноваций и роста в этой области. Инструменты обучения практически не менялись со времени начала массового использования книг, то есть на протяжении нескольких веков. Массовая доступность компьютеров и развитие ИТ-технологий (в основном сетевых) создают новую инфраструктуру, сравнимую по своему влиянию на повседневную жизнь с началом массового использования книг и печатной продукции. Поэтому естественным является вопрос: что является необходимыми условиями для использования особенностей новой технологической среды в обучении?

В докладе процесс обучения рассматривается как управление в рамках стандартной кибернетической системы. Формулируются необходимые условия персонификации и оптимизации обучения. Приводится описание моделей персонификации и оптимизации [5], архитектура систем [6], обладающих таким свойством, результаты экспериментов.

### Литература

1. Компьютерные обучающие системы. Интеллектуальные системы / П.А. Алисейчик [и др.]. - 2004. – Т. 8. - С. 5 - 44.
2. A gallery of disruptive technologies. – URL: [http://www.mckinsey.com/assets/dotcom/mgi/slideshows/disruptive\\_tech/index.html#](http://www.mckinsey.com/assets/dotcom/mgi/slideshows/disruptive_tech/index.html#).
3. James Manyika, Michael Chui, Jacques Bughin, Richard Dobbs, Peter Bisson, Alex Marrs. Disruptive technologies: Advances that will transform life, business, and the global economy / J. Manyika [etal.]. - McKinsey Global Institute (MGI), May 2013. 176 p. – URL: [http://www.mckinsey.com/insights/business\\_technology/disruptive\\_technologies](http://www.mckinsey.com/insights/business_technology/disruptive_technologies).
4. Ed Tech Market Map by Flybridge Capital Partners on 25 September 2015. – URL: <https://prezi.com/xguky7u7aur6/ed-tech-market-map/>.
5. Рыжов А.П. Некоторые задачи оптимизации и персонификации социальных сетей. – Saarbrücken: LAP, 2015. - 88 с.
6. Рынок компьютерных обучающих систем: состояние, перспективы, вызовы / А.Н. Вахов [и др.] // International Journal of Open Information Technologies. – 2016. - Vol. 4, No.1. - С. 25 -30.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики</b>	<b>3</b>
<i>Зайцева Н.В.</i> Использование СКМ Maple в решении краевых задач для эллиптических уравнений с оператором Бесселя	3
<i>Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р.</i> Сервисный электронный учебник по основам математической обработки информации с использованием методов математического и компьютерного моделирования в СКМ Maple	4
<i>Кристалинский В.Р., Берестнева А.А.</i> О прогнозировании экономической эффективности модернизации продукции на основе нечеткого моделирования	7
<i>Кристалинский Р.Е.</i> Математика в новых версиях системы Mathematica	10
<i>Кузнецов Р.С.</i> Применение кластерного анализа для оценки уровня жизни населения	14
<i>Нигмедзянова А.М.</i> Приведение поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple	17
<i>Петрова Е.В.</i> Вариант реализации сплайн-интерполяции	19
<i>Подорога А.В.</i> Компьютерное моделирование поля характеристик для квазилинейного уравнения дорожного движения	22
<i>Суханова А.Г.</i> Оптимизация портфеля ценных бумаг методами динамического программирования в системе MATHCAD	24
<i>Тихонова М.И.</i> Определение языка документа при помощи компьютерной языковой модели	28
<i>Тихонова О.В.</i> Оптимизация параметров цифровой системы связи с помощью компьютерного моделирования	29
<i>Шепелин А.В., Шепелин В.А.</i> Распределение вычислительного ресурса информационной системы на базе фермы терминальных серверов	32
<b>СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры</b>	<b>38</b>
<i>Алексеевков Н.С., Самойлова Т.А.</i> Разработка мобильных приложений для сервис-ориентированных информационных систем	38
<i>Борисов В.В., Федюлов А.С.</i> «Совместимые» нечеткие когнитивные карты	41
<i>Данилюк Е.И., Мунерман В.И.</i> Анализ параллельного алгоритма слияния нестрого упорядоченных файлов	44
<i>Емельченков Е.П., Савченков К.П.</i> Объектно-ориентированный подход к представлению баз данных	47
<i>Захаров В.Н., Мунерман В.И.</i> Оптимизация последовательности операций слияния нестрого упорядоченных файлов	49

<i>Ковалёв В.А., Мунерман В.И.</i> Использование многомерных матриц для решения задач нахождения путей в графе	52
<i>Кориунова К.П.</i> Разделение пространства признаков на основе операций оконной обработки	54
<i>Костюхин К.А.</i> Система латентно-семантического полнотекстового поиска	56
<i>Кравченко В.В., Самойлова Т.А.</i> Веб-сервис кластеризации цветных изображений	60
<i>Мунерман В.И., Мунерман Д.В.</i> Параллельная реализация операции слияния нестрого упорядоченных файлов	63
<i>Мунерман В.И., Надэлин А.А.</i> Параллельная реализация операции JOIN средствами технологии CUDA	66
<i>Мунерман В.И., Парфенов Н.В.</i> Анализ параллельного алгоритма умножения многомерных матриц	68
<i>Петров П.В., Самойлова Т.А.</i> Технология Machine Learning для решения задачи классификации педагогических данных	71
<i>Посыпкин М.А.</i> Программный комплекс решения задач оптимизации для многопроцессорных вычислительных систем	74
<i>Самойлова Т.А.</i> Средства Microsoft Azure для разработки информационно-аналитических систем	76
<i>Симакова А.А.</i> Методы реализации алгебраического подхода формализации семантики задач	80
<i>Синицын И.Н., Корепанов Э.Р.</i> Синтез алгоритмов нормальной субоптимальной фильтрации для автокоррелированных стохастических систем, линейных относительно состояния	82
<i>Синицын И.Н., Шаламов А.С., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Агафонов Е.С.</i> Стохастическое моделирование и оптимизация процессов в системах послепродажного сопровождения изделий наукоемкой продукции	84
<i>Чукляев И.И.</i> Система комплексной защиты функционально-ориентированных информационных ресурсов информационно-управляющих систем	85
<i>Емельченков Е.П., Макаров А.И., Мунерман В.И.</i> Объектная реализация баз данных в не первой нормальной форме	89
<b>СЕКЦИЯ 3. Математика и ее приложения</b>	93
<i>Адуков В.М.</i> О теореме типа теоремы ван Кампена для несвязной компактной абелевой группы	93
<i>Антонова С.А., Евдокимова Г.С.</i> Статистический анализ влияния социально-экономических факторов на развитие физической культуры и спорта в Российской Федерации	95

<i>Банару М.Б., Банару Г.А.</i> Тождества Грея и уплощающиеся 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли	97
<i>Банару Г.А., Банару М.Б.</i> Об одном столкновении геометрических школ	100
<i>Банюкевич Е.В.</i> Асимптотика роста вейвлет-преобразования	101
<i>Бешенков С.Н., Березняк И.С.</i> Влияние характера контакта слоев на собственные частоты колебаний трехслойных пластин	103
<i>Бирюкова Т.К., Киреев В.И., Гершкович М.М.</i> Методы численного дифференцирования и восстановления сеточных функций по интегралам, основанные на интегрировании дифференциальных сплайнов	106
<i>Богданова Н.Н.</i> Задачи типа Карлемана в классах бианалитических функций в случае произвольной области	113
<i>Бородин А.А., Игнатенков А.В., Лысиков М.Г., Ольшанский А.М.</i> К вопросу о теории нестабильных расписаний	115
<i>Вувуникян Ю.М.</i> Параллельное и последовательное соединения систем, определяемых полиномиальными системными операторами	119
<i>Гомонов С.А.</i> О парадоксах, софизмах и других неприятностях в математической науке	121
<i>Долгополова О.Б., Зверович Э.И.</i> Явные выражения фундаментальных функций многосвязной области через зэта-функцию Римана	127
<i>Дышаев М.М., Федоров В.Е.</i> Групповая классификация одной нелинейной модели теории финансовых рынков	131
<i>Евдокимова Г.С.</i> Исследование однолинейной системы массового обслуживания с переменными параметрами	133
<i>Емельченков Е.П.</i> Центральные коллинеации АЕ- структур и Е-алгебры. III	135
<i>Зверович Э.И., Готина Л.Н.</i> Линейное функциональное уравнение для целых рациональных функций на замкнутых римановых поверхностях	139
<i>Зувев А.М.</i> Оценка несобственного интеграла I рода специального вида от бесселевых функций	142
<i>Игнатенков А.В., Ольшанский А.М.</i> Проблемы построения искусственной нейронной сети для разработки расписания процессов при наличии конкуренции за один прибор обслуживания	145
<i>Карачик В.В.</i> Об одном обобщении задачи Робена для бигармонического уравнения	146
<i>Кирьяцкий Е., Кирьяцкий Э.</i> О некоторых циклических операторах	148
<i>Кирьяцкий Е., Кирьяцкий Э.</i> О корнях неполного многочлена	150

<i>Кирьяцкий Е., Кирьяцкий Э.</i> О симметрической функции специального вида	151
<i>Кирьяцкий Е., Кирьяцкий Д.</i> Об одной задаче Я.И. Ривкинды	151
<i>Комиссарова Д.А.</i> Сравнение признаков устойчивости линейных разностных уравнений	152
<i>Кудрявцев К.Н., Стабулит И.С.</i> Об одном способе поиска равновесий в биматричных играх	154
<i>Куприкова О.Н.</i> О решении дифференциальной краевой задачи в классах квазигармонических функций второго рода	156
<i>Курицын С.Ю., Расулов К.М.</i> Обобщенная краевая задача Римана для метааналитических функций второго типа	161
<i>Мавляев Р.М., Гарипов И.Б.</i> Использование чисел Бесселя при решении краевых задач для полигармонического уравнения	163
<i>Матюхин В.И.</i> Максимальные разрешимые подгруппы группы матриц второго порядка над кольцом целых чисел	165
<i>Медведев С.В.</i> О нульмерных СДН-пространствах	167
<i>Мельниченко Г.А.</i> Последовательности Бесселя, фреймы, базисы Рисса и воспроизводящие ядра	168
<i>Осиян К.В., Расулов К.М.</i> Об одной модельной краевой задаче типа задачи Гильберта в классах метааналитических функций	170
<i>Перельман Н.Р.</i> Об одном случае явного решения трехэлементной задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге	176
<i>Петророва М.А., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.</i> Комбинаторные соотношения, связанные с полиномами Бернштейна на симметричном отрезке	177
<i>Попков А.Е., Расулов К.М.</i> О задаче Дирихле для квазигармонических функций в круговых областях	182
<i>Потапов М.И.</i> Эффективность кодирования информации при использовании турбокода произведения, основанного на коде Хемминга	187
<i>Расторгуева А.В., Расулов К.М.</i> Об одной краевой задаче типа задачи Гильберта с разрывными коэффициентами в классах бианалитических функций	194
<i>Расулов К.М.</i> О картине разрешимости однородной краевой задачи типа Римана для квазигармонических функций в единичном круге	197
<i>Расулов К.М., Тимофеева Т.И.</i> Краевая задача Гильберта для квазигармонических функций в круговых областях, отличных от единичного круга	207
<i>Расулов К.М., Ханкишиева Ш.С.</i> О краевой задаче типа Римана для квазигармонических функций в круге не единичного радиуса	211
<i>Ровба Е.А., Козловская Н.Ю.</i> О константе Лебега интерполяционного рационального процесса с узлами Чебышева-Маркова	217

<i>Степанищева В.С., Тихонов И.В.</i> Обратная задача восстановления источника в одномерном уравнении теплопроводности на полупрямой	219
<i>Тимотин А.М.</i> О решении одной четырехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана в классах бианалитических функций	223
<i>Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г.</i> Компьютерная классификация аттракторов для нулей полиномов Бернштейна	224
<i>Федоров В.Е., Нажимов Р.Р.</i> Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором при дробной производной Римана–Лиувилля	228
<i>Шатохин Н.Л.</i> Гомоморфные образы АН-плоскостей	230
<i>Шерстнева Н.А.</i> Построение ортонормированной системы функций по данной линейно независимой системе функций	231
<i>Шнак Д.С.</i> Разработка приложения для построения импульсных характеристик первого порядка асимптотически обратного полиномиального эволюционного оператора	236
<i>Ястребов М.Ю.</i> Хеширование на основе рядов Фарея	238
<i>Strauss V.</i> One modification of F. and M. Riesz Lemma on peak sets and algebras generated by a unitary operator in Pontryagin space	240
<b>СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании</b>	242
<i>Ассонова Н.В.</i> Компьютерная презентация с интерактивными элементами для изучения параллельного проектирования	242
<i>Бояринов Д.А.</i> «General Education Maps» в контексте личностно ориентированного обучения	246
<i>Дюндин А.В.</i> Дистанционное обучение решению физических задач	248
<i>Конашенко А.В., Шерстнева Н.А.</i> О функциональном подходе к решению задач с параметрами	250
<i>Селюк Б.В.</i> Волчок	252
<i>Сенькина Г.Е.</i> Применение технологии «перевернутый урок» в процессе обучения в вузе	254
<i>Тимофеева Н.М.</i> Разработка сетевых проектов с использованием возможностей технологии Thinglink for Education	256
<i>Царева Е.А.</i> Оптимизация лабораторного практикума по физике	258
<i>Вахов А.Н., Зотова Е.А., Коломоец И.В., Рыжов А.П., Шварц А.Ю.</i> Проблемы компьютерных обучающих систем. Опыт компании «Учи.ру»	260

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 17

Издательство Смоленского государственного  
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко*

---

Подписано к печати 17.04.2016. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать ризографическая.  
Усл. п. л. 16,75. Уч.-изд. л. 16,75. Тираж 120 экз.  
Заказ №

---

Отпечатано с оригинал-макета авторов в ИТЦ СмолГУ  
214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4.