

Министерство науки и высшего образования РФ
Смоленский государственный университет

Системы компьютерной математики и их приложения

Материалы XXII Международной научной конференции

Выпуск 22

Смоленск
Издательство СмолГУ
2021

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета СмолГУ*

Редакционная коллегия: *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *С.А. Гомонов*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *Е.П. Емельченков*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Н.М. Тимофеева*, канд. пед. наук, доц.; *И.В. Тихонов*, д-р физ.-мат. наук, проф.

С 409 **Системы компьютерной математики и их приложения:** материалы XXII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2021. Вып. 22. 411 с.
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XXII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 28–29 мая 2021 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

© Авторы, 2021
© Издательство СмолГУ, 2021

СЕКЦИЯ 1

Системы компьютерной математики

А.А. Абдуханов, О.В. Тихонова

Российский технологический университет МИРЭА

УДК 654.02

МОДЕЛИРОВАНИЕ КАНАЛОВ СВЯЗИ РАДИОТЕЛЕМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СБОРА АВАРИЙНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ключевые слова: *радиотелеметрическая система сбора аварийной информации, SIMO канал, математическое моделирование, QAM-16 модуляция.*

В статье анализируется схема построения радиотелеметрической системы, позволяющей получать информацию от подводных гидроакустических аварийных буев. Для анализа предлагаемых технических решений разработаны и протестированы математические модели отдельных элементов системы. Результаты численных экспериментов подтверждают правильность предлагаемого подхода.

Введение

Рассматривается радиотелеметрическая система для сбора аварийной информации с затонувших аварийных авиационных накопителей. Вместо того чтобы организовывать операции по поиску и подъему накопителя со дна, предлагается осуществить передачу информации непосредственно из подводного состояния. Система состоит из надводного и подводного сегментов. Подводный сегмент, где применяется гидроакустический принцип передачи информации, обеспечивает удаленный сбор цифровых данных с глубоководного аварийного передатчика на гидроакустические буи и построен по схеме SIMO (SingleInputMultiplyOutput). Надводный сегмент системы, работающий в радиочастотном диапазоне, сформирован по схеме MISO (MultiplyInputSingleOutput). Он обеспечивает передачу цифровой информации с каждого из радиоакустических буев на общую приемную антенну, установленную на борту самолета или спутника.

Достоверность передаваемых данных и жесткие ограничения, связанные с энергетическим запасом элемента питания подводного гидроакустического передатчика, полосой пропускания, информационной емкостью канала, диапазоном частот, типом антенны, а также возможностью работать в подводной среде на больших глубинах и

над поверхностью открытого океана (в открытом пространстве), определяют основной техникой облик системы:

- максимальная дальность цифрового глубоководного канала связи 20 км;
- мощность гидроакустического передатчика с учетом жесткого ограничения по энергоёмкости элементов питания в пределах 0,5 – 1 Вт;
- объём данных, подлежащих расшифровке, не превосходит 50 Мб.

Записанные в не разрушаемый твердотельный модуль памяти данные с помощью гидроакустического передатчика и пьезоэлектрической антенны, установленных на аварийном регистраторе, модулируются и акустически изотропно излучаются в подводной среде. Сеть радиоакустических буёв, развернутая на поверхности океана (рис. 1) образует пространственно-распределенную «антенную решётку». Каждый буй этой «решетки» принимает подводные гидроакустические сигналы, демодулирует, декодирует, накапливает их в буфер памяти. Затем происходит та же обработка цифровых данных в обратном порядке, только уже в радиочастотном диапазоне с дальнейшей передачей их потребителю – самолет или спутник.

Для оценки возможности построения системы были разработаны модели отдельных подсистем и проведены численные эксперименты.

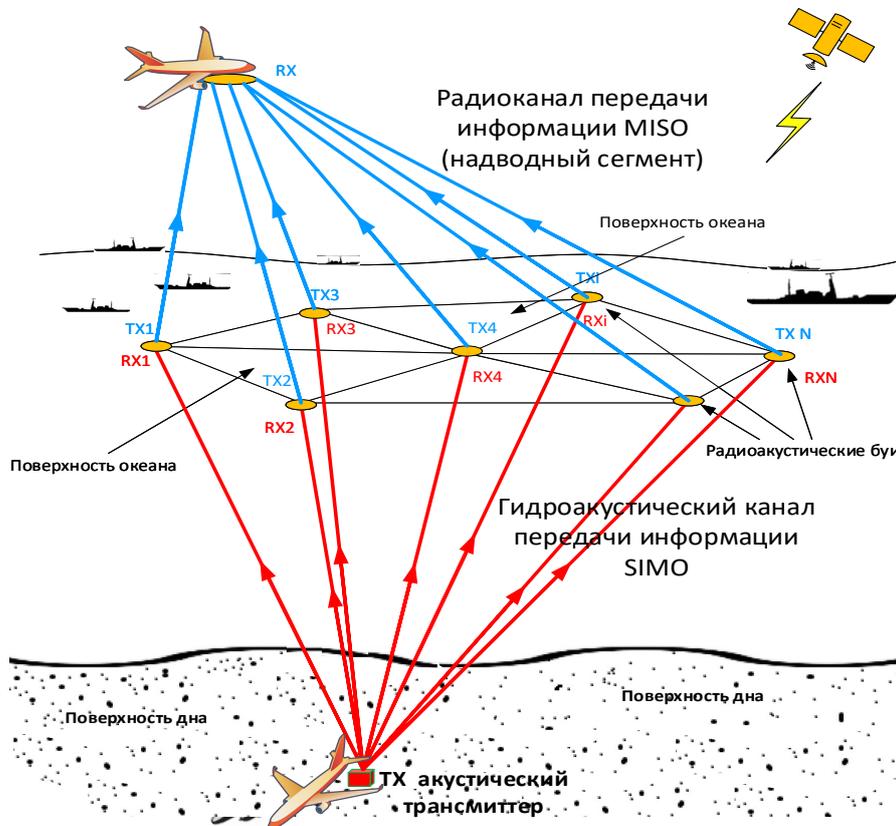


Рис. 1. Радиотелеметрическая система сбора аварийной информации

Модель гидроакустического канала с частотно-селективными замираниями

Глубоководные системы передачи информации являются одними из наиболее проблемных с точки зрения реализуемости, дальности действия и надежности приема – передачи информации. Рассмотрим математическую модель системы связи для подводного гидроакустического канала, входящего в состав радиотелеметрической системы.

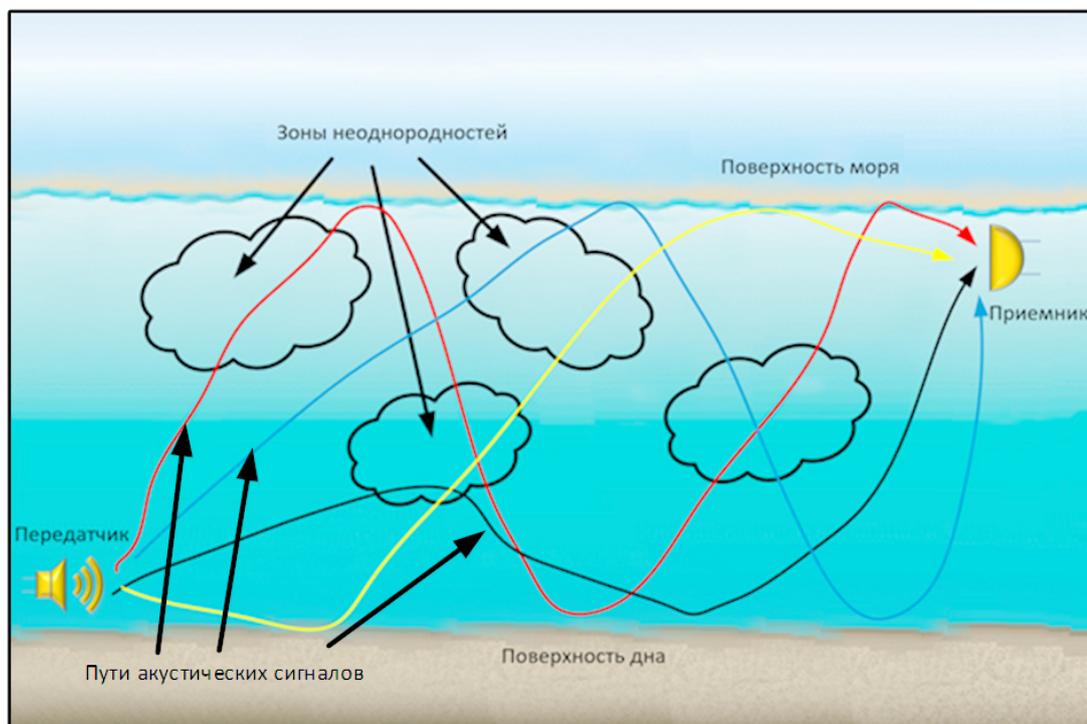


Рис. 2. Канал с частотно-селективным замиранием

Приемник сигнала получает информацию от передатчика по четырем рефрагированным и рассеянным лучам (рис. 2). Вследствие турбулентности и течений в точке приема наблюдается сигнал, изменения которого во времени связаны с интерференцией лучей, отраженных от поверхности океана или дна. При достаточно больших расстояниях в десятки километров такие флуктуации являются причиной нестабильности прямых и отраженных сигналов даже в отсутствие интерференции лучей, отраженных от поверхности моря и дна.

Представим упрощенную схему подводного канала связи с частотно-селективными замираниями (рис. 3), сделав допущение о прямолинейности лучей распространения сигнала, и учтем только их преломления при отражении. Предположим, что дальность такого канала связи 15 км. Как видно в данном примере, красный преломленный луч будет самым длинным путем, желтый – самым коротким. Используя элементарные геометрические расчеты, получим суммарные расстояния,

пройденные сигналом по красному лучу, равными 27 км, по желтому лучу – примерно 17 км.

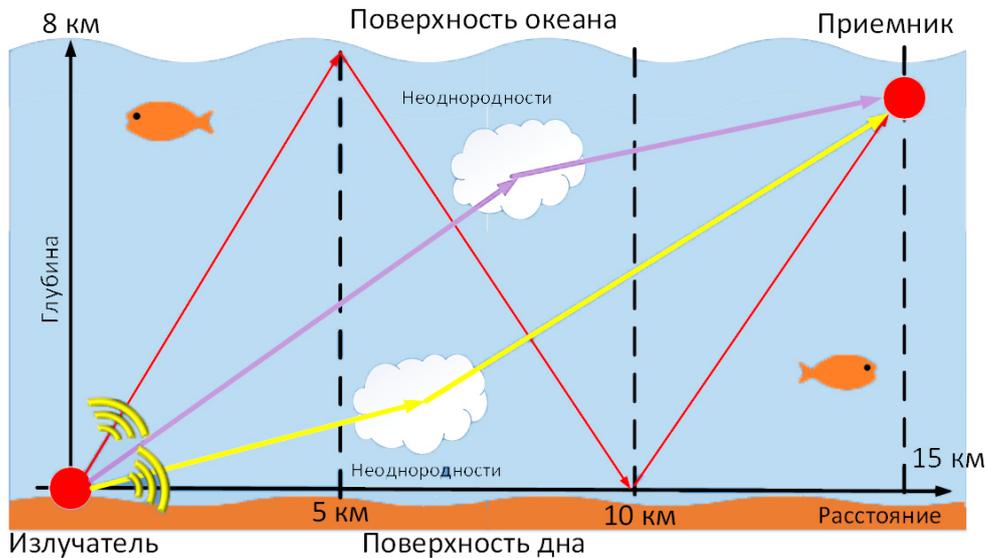


Рис. 3. Упрощенная схема с прямолинейным распространением сигнала

Для измерения профиля интенсивности многолучевого распространения применяют широкополосный тестовый сигнал в виде моноимпульса. Время между приемом первого и последнего луча представляет собой максимальную избыточную задержку распространения, после которой мощность многолучевого сигнала падает ниже порогового уровня относительно самого мощного компонента, например на 10 или 20 дБ ниже уровня самого мощного луча.

Учитывая скорость распространения гидроакустической волны 1,5 км/с, получим время, затраченное на прохождение сигнала по красному лучу = 18 с, по желтому = 11 с. То есть первым к приемнику придет сигнал по желтому лучу, одним из последних, очевидно, придет сигнал по красному лучу. Максимальный избыток задержки сигнала равен 7 с.

Рассмотрим модель такого канала с частотно-селективным замиранием, состоящую из линий задержки с отводами, при этом учитывающую временные задержки, переотражения и коэффициенты отражения по каждому лучу (рис. 4).

На рисунке 5 представлены результаты моделирования канала передачи во временной области.

На двух верхних осциллограммах отображены монохроматический тональный сигнал на входе (верхний график) и сигнал на выходе канала (второй график). На двух нижних графиках показан входной тестовый моноимпульс на входе в многопутевой канал (третий график). На четвертом графике видны принятые многолучевые компоненты тестового моноимпульса на выходе из канала. На осциллограмме можно четко

видеть деструктивное взаимодействие многопутевых компонентов, которые, тем не менее, удастся компенсировать с помощью пространственного разнесения антенн.

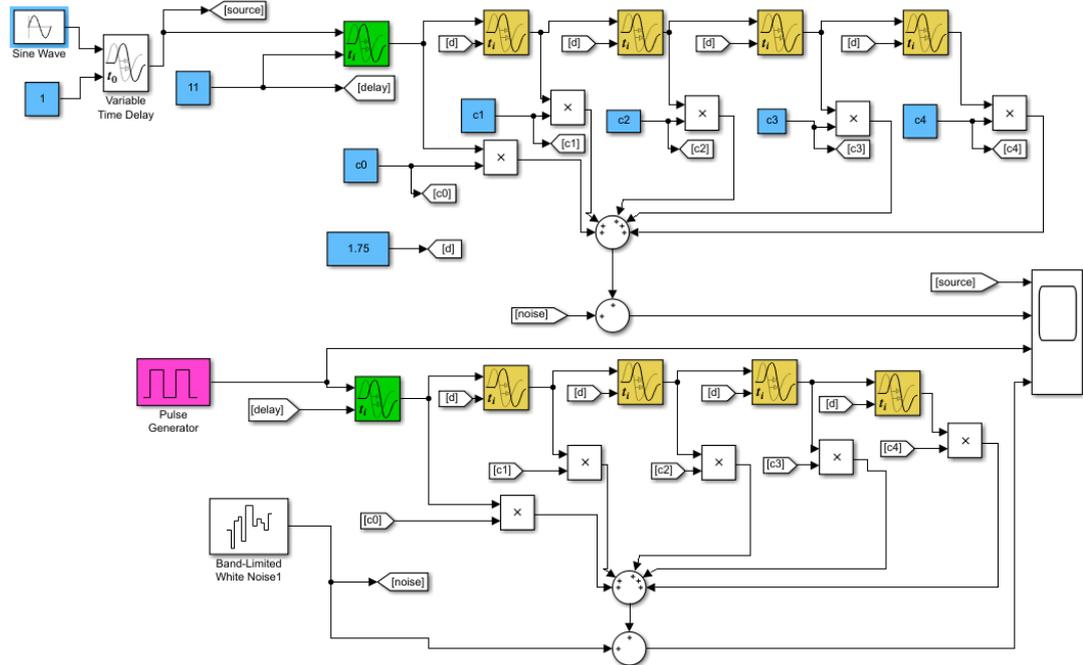


Рис. 4. Схема модели канала с 4 независимыми лучами с Рэлеевскими замираниями

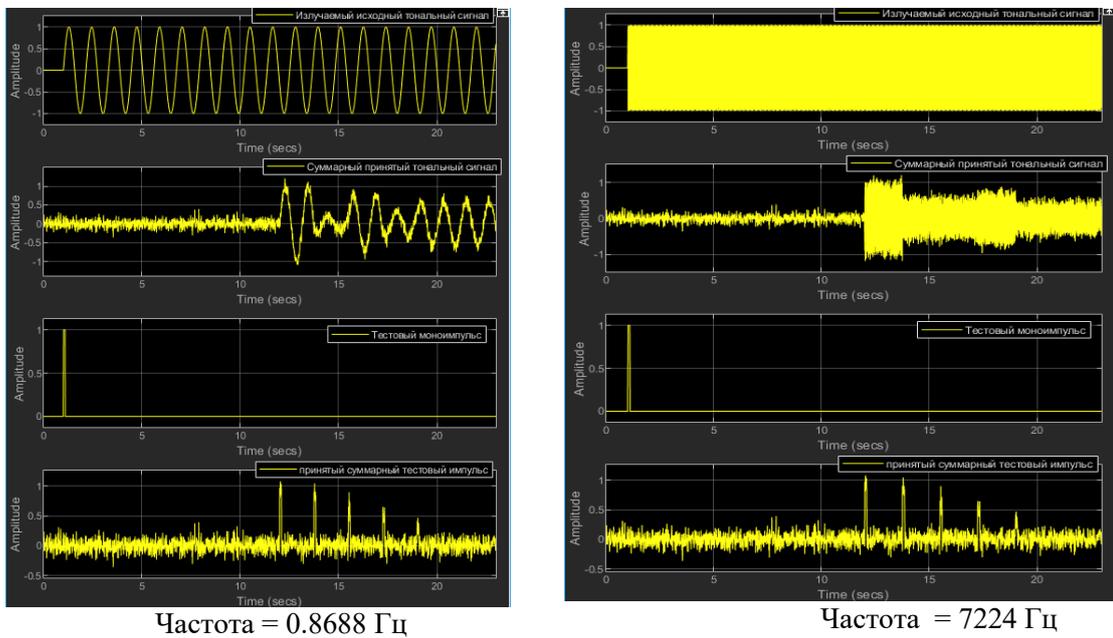


Рис. 5. Коэффициенты ослабления $c_0 = 1$ $c_1=0,85$ $c_2=0,6$ $c_3=0,45$ $c_4=0,3$

Моделирование гидроакустического SIMO-канала передачи информации

Использование пространственного разнесения антенн в системах передачи информации является весьма эффективным средством в борьбе с многолучевыми замираниями.

Промоделируем достоверность принимаемой информации в зависимости от количества разнесенных в пространстве приемных антенн. Рассмотрим систему с частотно-селективными замираниями, используя пространственное разнесение приемных антенн (рис. 6).

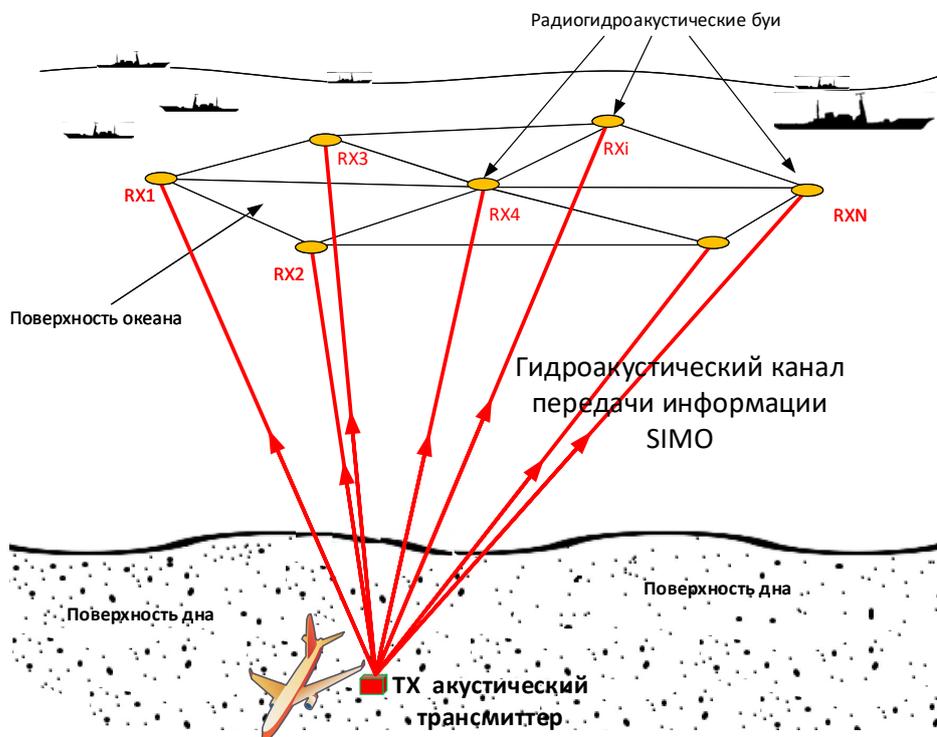


Рис. 6. SIMO канал связи. Подводный сегмент телеметрической системы. RX-приёмные антенны

В среде Симулинк были реализованы пользовательские подпрограммы «MODEL_BPSK», «MODEL_QPSK», «MODEL_8PSK», «MODEL_16QAM» для схем модуляции BPSK, QPSK, 8PSK, 16QAM соответственно.

Промоделируем методом Монте-Карло систему передачи информации в канале с Рэлеевскими замираниями и рассмотрим влияние пространственного разнесения антенн на достоверность принимаемой информации.

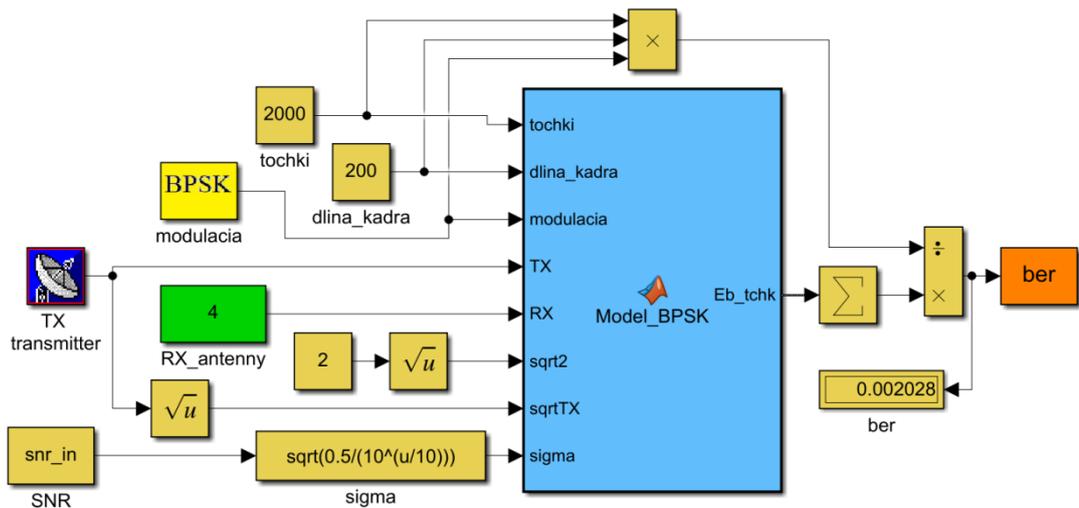


Рис. 7. Схема канала с BPSK модуляцией

На приведенных ниже рисунках представлены результирующие зависимости достоверности принимаемой информации для нескольких пространственно-разнесенных приемных антенн в условиях Рэлеевских замираний сигнала в каждом из лучей многолучевого канала передачи. Можно видеть, что при увеличении числа приемных антенн достоверность информации повышается.

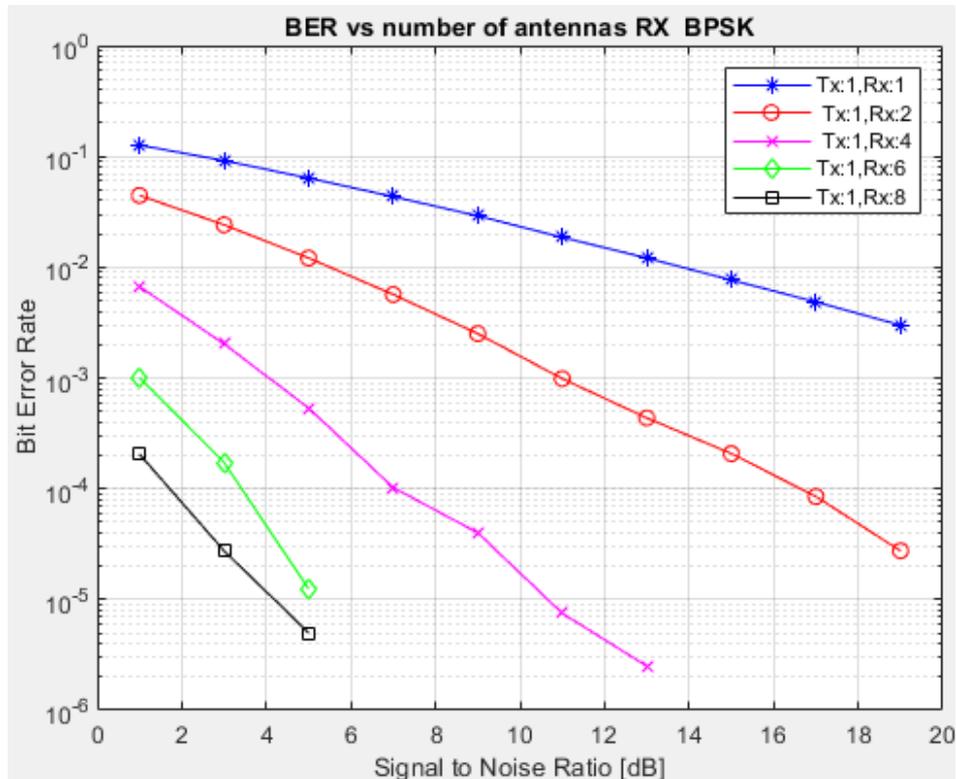


Рис. 8. Достоверность передачи для канала с BPSK модуляцией

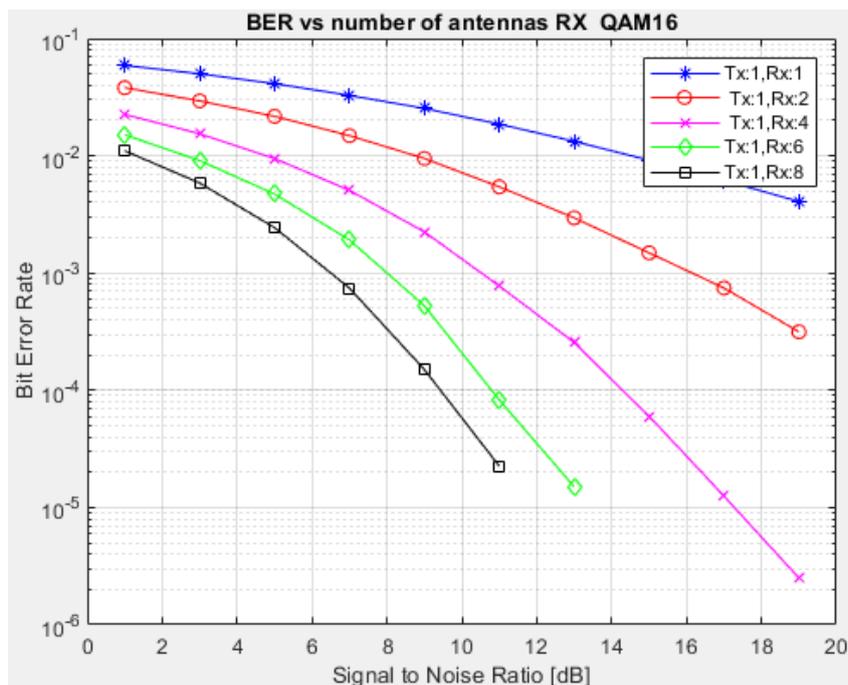


Рис. 9. Достоверность передачи для канала с модуляцией QAM16

Заключение

Результаты моделирования работы отдельных элементов радиотелеметрической системы сбора аварийной информации подтверждают возможность ее построения. Увеличение числа приемных антенн подводного сегмента и использование модуляции QAM16 повышают достоверность получаемых данных.

Литература

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: пер. с англ. Изд. 2-е. М: Издательский дом «Вильямс», 2003. 1104 с.
2. Прокис Джон. Цифровая связь: пер. с англ. / под ред. Д. Д. Кловского. М., Радио и Связь, 2000. 800 с.
3. Дьяконов В.П. Simulink 5/6/7: Самоучитель. М.: ДМК-Пресс, 2008. 784 с.

A.A. Abdukhonov, O.V. Tikhonova
Russian Technological University MIREA

SIMULATION OF RADIOTELEMETRY SYSTEM OF READOUT OF DATA RECORDING COMMUNICATION CHANNELS

Keywords: *RF telemetry readout system, flight data recorders, SIMO channel, simulation, QAM-16 modulation.*

Abstract. *The article analyzes the scheme of constructing a radio telemetry system of radio hydro acoustic buoys for searching and remote reading of information from sunken emergency storage devices . Mathematical modeling results confirm the system's performance.*

НАСТРОЙКА АЛГОРИТМОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ СЕРИЙНЫХ ЗАДАЧ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Ключевые слова: САПР, глобальная оптимизация, параметрическая оптимизация, настройка алгоритмов, суррогатное моделирование, ландшафтный анализ.

Рассматриваем серийную задачу глобальной параметрической оптимизации проектных решений, которая актуальна при проектировании схожих сложных инженерных изделий. Ввиду высокой вычислительной сложности прикладных серийных задач параметрической оптимизации целесообразно использовать методы автоматической настройки алгоритмов решения этих задач, то есть методы отыскания «наилучших» значений свободных параметров (стратегий) алгоритмов с целью повышения их эффективности. Известные методы настройки предполагают применение аппроксимирующей модели индикатора эффективности алгоритма на узком множестве его допустимых стратегий. В работе предложен метод аппроксимации индикатора эффективности, который позволяет отыскивать наилучшие стратегии на множестве их допустимых значений большой мощности. Представлена процедура перекрестной проверки эффективности предложенного метода настройки алгоритма. Проведен вычислительный эксперимент, результаты которого показывают более высокую эффективность стратегий, найденных предложенным методом, при меньших вычислительных затратах на настройку.

Введение. Процесс структурно-параметрического синтеза сложных инженерных изделий включает в себя решение большого числа задач параметрической оптимизации проектных решений. При проектировании различных объектов, близких по конструкции и техническим характеристикам, возникают и многократно решаются «схожие» сложные задачи оптимизации [1; 2]. С точки зрения формальной постановки, эти задачи имеют схожий, в том числе по физической природе, набор варьируемых параметров и критериев оптимальности, но могут отличаться топологией целевой функции. Совокупность задач высокой вычислительной сложности, решаемых многократно, имеющих

«близкую» топологию области поиска и особенности целевой функции, называем *серийной задачей* оптимизации. Задачи оптимизации, которые относятся к данной серийной задаче оптимизации, называем *экземплярами* этой задачи. Ввиду необходимости решения большого числа различных экземпляров данной серийной задачи, целесообразно применение узкоспециализированных алгоритмов оптимизации, разработанных с учетом особенностей этой задачи [3; 4].

После выбора алгоритма оптимизации (например, на основании экспертной оценки) важно правильно *настроить* этот алгоритм, то есть выбрать наилучшие для данной серийной задачи оптимизации значения свободных параметров алгоритма – стратегию алгоритма. Различаем методы настройки на основе прямого поиска наилучшей стратегии и методы на основе прогнозирования наилучшей стратегии с использованием вектора характерных признаков (ХП) решаемой задачи.

Прямой поиск наилучшей стратегии подразумевает выбор наилучшей стратегии на основе результатов решения некоторого числа экземпляров данной серийной задачи с использованием разных стратегий. Найденную наилучшую стратегию фиксируют и используют в процессе эксплуатации алгоритма для решения других экземпляров рассматриваемой серийной задачи оптимизации.

Настройка на основе прогнозирования наилучших стратегий предполагает построение аппроксимирующей модели индикатора эффективности алгоритма на множестве ХП решаемых экземпляров серийной задачи [5]. Используя эту модель в процессе эксплуатации алгоритма, отыскивают наилучшую стратегию для решения данной задачи на основе вектора ХП экземпляра серийной задачи.

Настройку предлагаем выполнять в две стадии – стадию настройки и стадию эксплуатации. Метод построения модели индикатора эффективности алгоритма на стадии настройки называем *одноэтапным* методом аппроксимации индикатора эффективности. Известные одноэтапные методы не учитывают вычислительный бюджет решаемой задачи и не позволяют прогнозировать эффективность алгоритма для большого числа допустимых стратегий алгоритма [6]. Нами предложен *двухэтапный метод* аппроксимации индикатора эффективности на множестве допустимых стратегий с учетом вычислительного бюджета задачи, позволяющий понизить суммарную вычислительную сложность построения аппроксимирующей модели с незначительными потерями точности предсказаний.

1. Постановка задачи и основные определения. Рассматриваем задачу q глобальной безусловной оптимизации

$$\min_{X \in D_X} f(X) = f(\hat{X}) = \hat{f}, \quad (1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_{|X|})$ – $|X|$ -мерный вектор варьируемых параметров (размерность задачи q); $D_X \subset \mathbb{R}^{|X|}$ – область поиска; $f(X) \in \mathbb{R}^1$ – целевая функция; \hat{X}, \hat{f} – искомые оптимальный вектор X и соответствующее значение целевой функции $f(X)$. Найденные алгоритмом оптимизации приближенные вектор варьируемых параметров и соответствующее значение целевой функции обозначаем X^*, f^* .

Результатом оценки особенностей задачи q является вектор *характерных признаков* (ХП) $C(q) = (c_1, c_2, \dots, c_{|C|})$, рассчитанный алгоритмом *ландшафтного анализа* (ЛА) a_C с использованием *ландшафтной выборки* $L(q) = (X_i, f_i)_{i=1}^{N_L}$, где N_L – число точек в выборке. Таким образом, $C(q) = C(q, L, a_C)$.

Назовем *серийной задачей* Q совокупность задач q , векторы ХП $C = C(q)$ которых принадлежат некоторой области $D_C = D_C(Q, a_C)$ пространства ХП, определенной алгоритмом ЛА a_C : $Q = \{q \mid C \in D_C\}$.

Вектор $B = (b_1, \dots, b_{|B|})$ свободных параметров алгоритма $a = a(B)$ называем *стратегией алгоритма*. Стратегия может в общем случае включать как числовые, так и категориальные параметры.

Индикатор эффективности алгоритма $a(B)$ при решении задачи q с вектором ХП $C(q)$ обозначаем $e(a(B), C(q), I) = e(B, C, I)$, где $I \in D_I$ – вычислительный бюджет задачи–время, отведенное на ее решение. Формально определяем вычислительный бюджет I как максимально допустимое число испытаний целевой функции $f(X)$. Обозначаем D_I множество допустимых бюджетов при решении экземпляров серийной задачи Q .

Задачу настройки на основе прогнозирования наилучших стратегий формулируем следующим образом. Отыскать наилучшую стратегию $\hat{B}^*(C, I)$ по аппроксимирующей модели $\hat{e}(B, C, I)$ индикатора эффективности $e(B, C, I)$, построенной на множествах D_B, D_C, D_I , для решения задачи $q \in Q$ с вектором ХП $C \in D_C$ и бюджетом $I \in D_I$:

$$\min_{B \in D_B} \hat{e}(B, C, I) = \hat{e}(\hat{B}^*, C, I) \approx e(B^*, C, I). \quad (2)$$

2. Двухэтапный метод аппроксимации индикатора эффективности алгоритма. Предлагаемая методика настройки включает стадию собственно настройки и стадию эксплуатации алгоритма.

Этапы стадии настройки. На стадии настройки имеем набор настроечных задач $\{q_i\}$ и соответствующих им векторов ХП $\{C_i\}$, полученных выбранным алгоритмом ЛА.

1) Для всех комбинаций стратегий заданного набора $\{B_j\} \subset D_B$ и значений бюджета $\{I_k\} \subset D_I$ решаем задачи $\{q_i\} \subset Q$ и рассчитываем значения индикатора эффективности $e_{i,k}(B_j) = e(B_j, C_i, I_k)$ для каждой стратегии B_j .

2) Для каждой стратегии B_j на основе выборки $\{C_i, I_k, e_{i,k}(B_j)\}$ строим аппроксимирующую модель $\hat{e}(B_j, C, I), C \in D_C, I \in D_I$ индикатора эффективности при решении задач $\{q_i\} \subset Q$ с бюджетами $\{I_k\} \subset D_I$.

Этапы стадии эксплуатации. На стадии эксплуатации имеем задачу q' и вектор ее признаков C' , рассчитанных выбранным алгоритмом ЛА. Прогнозируем эффективную стратегию $\hat{B}^*(C', I')$ для решения этой задачи с использованием вычислительного бюджета I' (рис. 1).

1) Используя аппроксимирующие модели $\hat{e}(B_j, C, I), C \in D_C, I \in D_I$, прогнозируем эффективность $\hat{e}(B_j, C', I')$ каждой стратегии $\{B_j\} \subset D_B$ для заданных значений C' и I' .

2) На основе выборки значений $\{B_j, \hat{e}(B_j, C', I')\}$ строим аппроксимирующую модель $\hat{e}(B, C', I'), B \in D_B$ при решении данной задачи q' с использованием вычислительного бюджета I' .

3) Решаем задачу (2) с использованием модели $\hat{e}(B, C', I'), B \in D_B$ и определяем стратегию $\hat{B}^*(C', I')$.

Основными особенностями метода являются:

- возможность итеративно повышать точность предсказаний аппроксимации $\hat{e}(B, C, I)$ при добавлении дополнительных срезов и построения моделей $\hat{e}(B_j, C, I)$;

- возможность строить модели срезов $\hat{e}(B_j, C, I)$ и контролировать точность их предсказаний независимо друг от друга;

- возможность применять разные техники аппроксимации на стадиях настройки и эксплуатации;

- понижение вычислительных затрат на прогнозирование эффективной стратегии $B^*(C', I')$ за счет построения «локальной» модели $\hat{e}(B, C', I')$ только для заданных значений C' и I' на стадии эксплуатации;

- дополнительные вычислительные затраты на определение эффективной стратегии $B^*(C', I')$ на стадии эксплуатации;

- зависимость точности предсказаний от расположения срезов (т.е. состава набора стратегий $\{B_j\}$) и точности соответствующих аппроксимирующих моделей $\hat{e}(B_j, C, I)$;

- необходимость построения большого числа аппроксимирующих моделей $\hat{e}(B_j, C, I)$ и контроля точности их предсказаний.

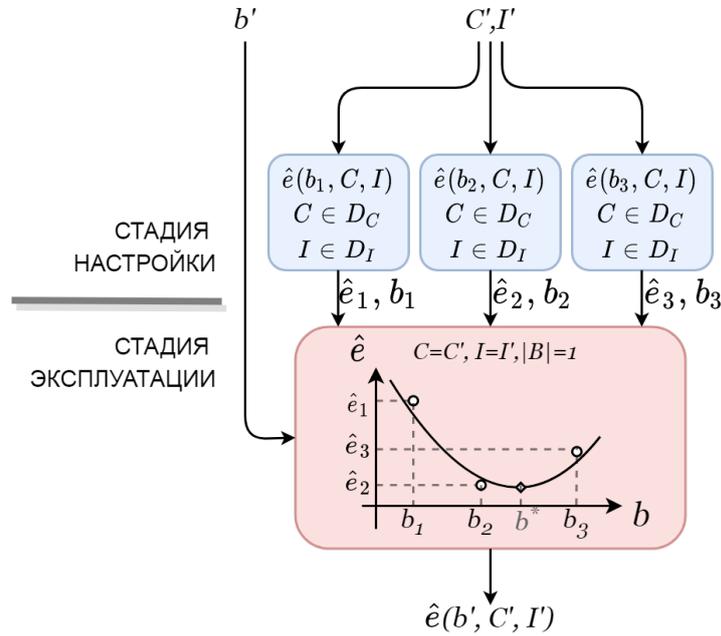


Рис. 1. Схема прогнозирования эффективности некоторой стратегии B' для решения задачи q' , имеющей вектор ХПС', за I' число испытаний: $|B|=1$; $j=1,2,3$

3. Вычислительный эксперимент. Для оценки эффективности двухэтапного метода предлагаем процедуру *перекрестной проверки* точности прогнозирования наилучших стратегий. После формирования набора настроечных задач $\{q_i^t\}$ на основе результатов решения экземпляров q исследуемой серийной задачи Q выполняем следующие шаги процедуры перекрестной проверки (одна итерация r).

- 1) Исключаем из набора настроечных задач $\{q_i^t\}$ одну задачу q_r^t .
- 2) Выполняем стадию настройки с набором задач $\{q_i^t\}, i \neq r$:
 - вычисляем векторы ХП $\{C_i\}$ этих задач выбранным алгоритмом ЛА;
 - решаем задачи $\{q_i^t\}$ с каждой из выбранных стратегий $\{B_j\}$ алгоритма;
 - строим аппроксимирующие модели $\{\hat{e}(B_j, C, I)\}, C \in D_C, I \in D_I$.
- 3) Реализуем стадию эксплуатации с задачей q_r^t и бюджетом I' :
 - вычисляем вектор ХП C_r задачи выбранным алгоритмом ЛА;
 - рассчитываем значения $\hat{e}_j = \hat{e}(B_j, C_r, I')$ и строим аппроксимирующую модель $\hat{e} = \hat{e}(B, C_r, I'), B \in D_B$;

- выбираем наилучшую стратегию $\hat{B}^*(C_r, I')$ путем решения задачи

$$\min_{B \in D_B} \hat{e}(B, C_r, I') = \hat{e}(\hat{B}^*, C_r, I').$$

4) Решаем задачу q_r^t алгоритмом со стратегией \hat{B}^* и умолчательной стратегией B^{def} . Оцениваем эффективность алгоритма.

Процедуру перекрестной проверки с использованием настроечных задач иллюстрирует Рис. 2. Результатами выполнения процедуры являются значения индикатора эффективности алгоритма со стратегией по умолчанию и с предсказанной наилучшей стратегией, а также оценка прироста эффективности алгоритма для каждой из настроечных задач.

Низкая эффективность предсказанных наилучших стратегий может являться следствием следующих ошибок эксперта – лица, принимающего решения на стадии настройки: неправильный выбор алгоритма ЛА и состава вектора ХП задачи; недостаточная точность аппроксимирующих моделей индикатора эффективности алгоритма как на стадии настройки, так и на стадии эксплуатации; низкая эффективность выбранных перспективных стратегий алгоритма для решения данной серийной задачи.

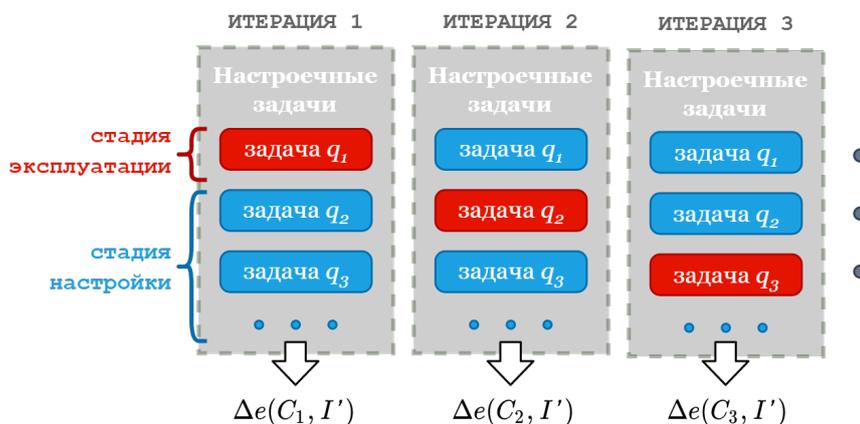


Рис. 2. Схема выполнения итераций процедуры перекрестной проверки

Детали вычислительного эксперимента:

- алгоритм оптимизации $a(B)$ на основе суррогатного моделирования со свободными параметрами $B = (b_1, b_2)$, где b_1, b_2 – параметр, управляющий глобализацией поиска, параметр алгоритма аппроксимации соответственно;

- 50 случайно выбранных настроечных задач оптимизации $\{q_i^t\}$, для каждой из которых сгенерирован набор из 50 ландшафтных выборок $\{L_i^t\}$, используемых для инициализации алгоритма;

- 50 исследуемых стратегий $\{B_j\}$, равномерно заполняющих область D_B ;
- размер ландшафтной выборки фиксирован и равен $N_L = 36$, набор допустимых вычислительных бюджетов $\mathbb{I} = \{16, 32, 48, 64\}$.

На Рис. 3 представлены усредненные значения индикатора эффективности алгоритма при решении каждой из 50 настроечных задач 50 раз со случайной начальной выборкой и с вычислительным бюджетом $I = 64$. По оси ординат отложены нормированные значения индикатора эффективности алгоритма. На оси абсцисс указаны индексы настроечных задач в порядке возрастания нормированного значения индикатора эффективности алгоритма со стратегией по умолчанию B^{def} . Рисунок показывает, что для большинства настроечных задач оптимизации удалось спрогнозировать стратегию алгоритма, при которой его эффективность по рассматриваемому индикатору превосходит эффективность алгоритма со стратегией по умолчанию B^{def} .

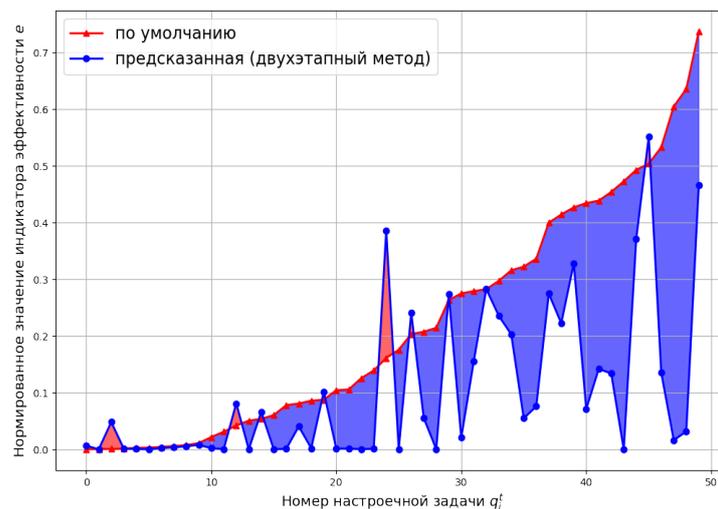


Рис. 3. Сравнение значений индикатора эффективности алгоритма при использовании предсказанной стратегии и стратегии по умолчанию

На Рис. 4 приведен профиль производительности алгоритма на основе значений его эффективности при решении настроечных задач с бюджетом $I = 64$ и следующими стратегиями:

- наилучшая стратегия алгоритма для решения данной настроечной задачи по усредненным результатам 50 запусков алгоритма со случайной стартовой выборкой;
- стратегия алгоритма, полученная предложенным двухэтапным методом аппроксимации с использованием набора аппроксимирующих моделей $\{\hat{e}(B_j, C, I)\}$;

- стратегия алгоритма, предсказанная стандартным одноэтапным методом аппроксимации с использованием одной аппроксимирующей модели $\hat{e}(B, C, I)$;

- стратегия по умолчанию B^{def} алгоритма оптимизации.

На рисунке выделены результаты исследования для значения индикатора эффективности, равного 0,2.

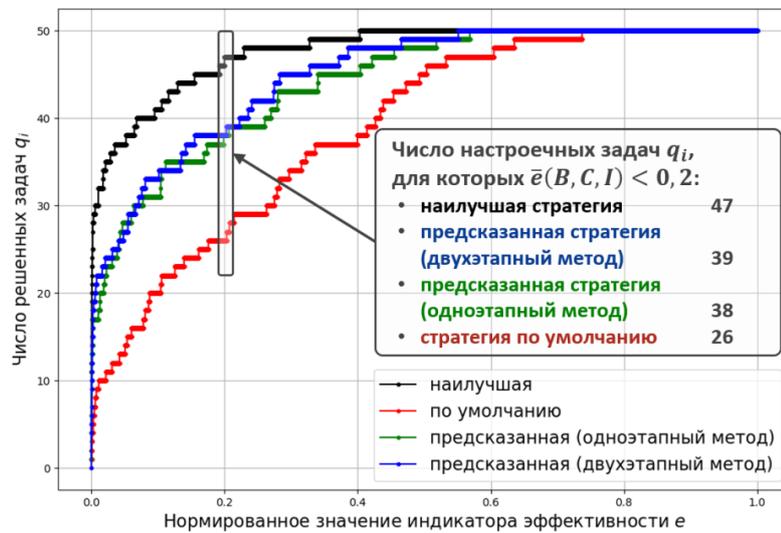


Рис. 4. Профиль производительности алгоритма оптимизации при решении настроечных задач с различными стратегиями

При использовании стратегии по умолчанию B^{def} всего 26 задач были решены с меньшим значением индикатора эффективности. Использование наилучших стратегий, полученных с помощью двухэтапного метода аппроксимации индикатора эффективности, позволило увеличить число решенных задач до 39. Поскольку в качестве оценки эффективности алгоритма используем усредненное значение индикатора эффективности по результатам 50 случайных стартов алгоритма, имеются настроечные задачи, решенные при использовании наилучшей известной стратегии со средним значением индикатора эффективности $\sim 0,4$. Это значение зависит от сложности целевой функции задачи, например, от числа ее локальных экстремумов в области поиска. При высокой сложности целевой функции значительно возрастает дисперсия найденных значений целевой функции по результатам случайных стартов алгоритма, соответственно растет и среднее значение, используемое для сравнения различных стратегий алгоритма.

Заключение. Представленные результаты вычислительного эксперимента показывают, что предложенный двухэтапный метод аппроксимации индикатора эффективности позволяет достичь соизмеримой, а в некоторых случаях и большей точности

прогнозирования наилучших стратегий по сравнению со стандартным одноэтапным методом при меньших вычислительных затратах. Для используемой техники аппроксимации на основе решающих деревьев время работы двухэтапного метода прогнозирования на стадии настройки ~ 1,5 раза меньше, чем время работы одноэтапного метода.

Литература

1. Towards the industrialization of new mdo methodologies and tools for aircraft design / Gazaix A. [et al] // 18th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. 2017. P. 1-25.
2. Grihon S. Structure sizing optimization capabilities at AIRBUS // World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimisation. Springer, Cham. 2017. P. 719-737.
3. An efficient application of Bayesian optimization to an industrial MDO framework for aircraft design / Priem R. [et al] // AIAA AVIATION 2020 FORUM, 2020. P. 1-16.
4. Shan S., Wang G.G. Survey of modeling and optimization strategies to solve high-dimensional design problems with computationally-expensive black-box functions // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2010. Vol. 41. No. 2. P. 219–241.
5. Feature based algorithm configuration: A case study with differential evolution / Belkhir N. [et al] // International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Springer, Cham, 2016. pp. 156-166.
6. Kerschke P., Trautmann H. Automated algorithm selection on continuous black-box problems by combining exploratory landscape analysis and machine learning // Evolutionary computation. 2019. Vol. 27, No. 1. P. 99-127.
7. Dolan E.D., Moré J.J. Benchmarking optimization software with performance profiles // Mathematical programming. Vol. 91, No. 2. P. 201–213.

T.A. Agasiev, A.P. Karpenko
Bauman Moscow State Technical University

AUTOMATIC CONFIGURAGION OF PARAMETRIC OPTIMIZATION ALGORITHMS FOR SOLVING SERIAL PROBLEMS OF COMPUTER-AIDED DESIGN

Keywords: *computer-aided design systems, global optimization, parametric optimization, serial problem, per instance algorithm configuration, parameter tuning, surrogate modeling, landscape analysis.*

Abstract. *The paper considers serial problems of global parametric design optimization, which is solved when designing similar complex engineering products. Since applied serial design optimization problems are of high computational complexity, it is reasonable to use methods of automatic tuning of optimization algorithms for solving such problems, which means finding the «best» values of configurable parameters (strategies) of the algorithm in order to increase its efficiency. The known tuning methods involve the use of an approximation model of the algorithm efficiency indicator built on a limited set of its valid strategies. The paper proposes a method for*

approximating the efficiency indicator, which allows to find the best strategy in a set of valid strategies of greater cardinality. A procedure of cross-validation effectiveness assessment is presented for the proposed method of optimization algorithm tuning. A computational experiment was performed the results of which indicate a higher efficiency of the strategies found by the proposed method with lower computational costs for tuning.

Н.В. Адукова

Южно-Уральский государственный университет

УДК 519.688+517.544.8

ПАКЕТ EXACTMPF ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В СКМ MAPLE

Ключевые слова: *факторизация Винера–Хопфа, матричные многочлены, символьные вычисления, Maple.*

В работе представлен пакет ExactMPF, предназначенный для построения точной факторизации Винера–Хопфа матричных многочленов с помощью символьных вычислений. Предполагается, что элементами заданного матричного многочлена $a(z)$ являются скалярные многочлены с коэффициентами из поля гауссовых комплексных чисел $\mathbb{Q}(i)$ и определитель $a(z)$ допускает точную факторизацию Винера–Хопфа. Эти условия гарантируют, что факторизация $a(z)$ может быть построена символьными методами. Дано описание пакета и его модулей. Предъявлены псевдокоды алгоритмов, по которым работают основные модули пакета.

1. Постановка задачи. Пусть матричный многочлен $a(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k$, $a_k \in C^{p \times p}$ обратим на единичной окружности \mathbb{T} . Известно, что тогда $a(z)$ допускает правую факторизацию Винера–Хопфа, то есть представление вида

$$a(z) = r_-(z) d_r(z) r_+(z), \quad z \in \mathbb{T},$$

где $r_{\pm}(z)$ – матричные многочлены от переменной $z^{\pm 1}$ и все нули скалярного многочлена $\det r_+(z)$ ($\det r_-(z)$) лежат вне (внутри) единичного круга. Средний множитель является диагональной матрицей-функцией вида $d_r(z) = \text{diag}[z^{\rho_1}, \dots, z^{\rho_p}]$. Здесь целые числа ρ_1, \dots, ρ_p ($\rho_1 \geq \dots \geq \rho_p$) называются *правыми частными индексами* $a(z)$. Аналогично определяется левая факторизация Винера–Хопфа:

$$a(z) = l_+(z) d_l(z) l_-(z),$$

где $l_{\pm}(z)$ – матричные многочлены от $z^{\pm 1}$, $d_l(z) = \text{diag}[z^{\lambda_1}, \dots, z^{\lambda_p}]$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$ – левые частные индексы $a(z)$.

Факторизация матриц-функций (краевая задача Римана для вектора) является одной из наиболее востребованных задач комплексного анализа, однако в общем случае отсутствуют методы явного построения факторизации. Приближенные методы не могут быть применены ввиду неустойчивости задачи. Для матричных многочленов имеется явный метод построения факторизации [1], именно его мы будем использовать. Этот метод требует одновременного рассмотрения правой и левой факторизаций. Неустойчивость задачи не позволяет реализовать этот метод численно. Поэтому важно выделить те случаи, когда явный метод можно реализовать символьными методами. Для матричных многочленов над полем гауссовых чисел $\mathbb{Q}(i)$ это можно сделать тогда и только тогда, когда определитель многочлена допускает точную факторизацию. Последнее легко проверить символьными методами. Точное построение факторизации в этом случае производится методом существенных многочленов, предложенным в [2].

Цель данной работы – разработать алгоритмы точной факторизации и имплементировать их в СКМ Maple.

2. Алгоритмы, используемые для построения точной факторизации. Для построения точной факторизации необходимо решить следующие задачи:

1) проверить для данного многочлена, что все его корни лежат внутри единичной окружности;

2) проверить для данного многочлена, что он допускает точную факторизацию Винера–Хопфа и построить ее;

3) для данного матричного многочлена $a(z)$ найти последовательность $c_{-\infty}, \dots, c_0, \dots, c_{\infty}$ из лорановских коэффициентов матрицы-функции $\Delta_-(z)^{-1} a(z)$. Здесь $\det a(z) = \Delta_-(z) z^{\times} \Delta_+(z)$ – точная факторизация Винера–Хопфа $\det a(z)$;

4) для данной матричной последовательности $c_{-\infty}, \dots, c_0, \dots, c_{\infty}$ найти индексы и факторизационные существенные многочлены этой последовательности. Это ключевая проблема в задаче факторизации.

5) построить по теореме 3.2 работы [1] правой и левой факторизации Винера–Хопфа $a(z)$ по индексам и существенным многочленам.

Эти задачи могут быть решены по следующим алгоритмам.

Algorithm 1. Тест Шура (см., например, [3])
Input. Многочлен $q(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q_n z^n$, $q_j \in \mathbb{Q}(i)$.
Output. Результат «true», если все корни $q(z)$ лежат внутри единичной окружности и «false» в противном случае.

```

1. For  $q(z)$ , find  $n := \deg q(z)$ , the constant term  $q_0$ , and the leading coefficient  $q_n$ 
2. if  $n = 0$  then
3.     return Result: = true
4. end if
5. if  $|q_0| \geq |q_n|$  then
6.     return Result: = false
7. end if
8.  $q(z) := \frac{\bar{q}_n q(z) - q_0 q^*(z)}{z}$ 
9. go to step 1

```

Здесь $q^*(z) = \bar{q}_n + \bar{q}_{n-1}z + \dots + \bar{q}_0 z^n$ - число, комплексно-сопряженное с q_j .

Решение задачи 2 осуществляется по следующему алгоритму.

Algorithm 2. Точная факторизация скалярного многочлена

Input. Многочлен $p(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n$, $p_j \in \mathbb{Q}(i)$.

Output. Точная факторизация Винера–Хопфа $p(z) = p_-(z) z^\varkappa r_+(z)$, или текст «The exact factorization is impossible»

```

1. if  $\deg p(z) = 0$  then
2.     return  $p_-(z) := 1$ ,  $\varkappa = 0$ ,  $p_+(z) := p(z)$ 
3. end if
4. By symbolic computation get the factorization  $p(z) = a_0 q_1(z) \dots q_m(z)$ , where
 $q_1(z), \dots, q_m(z)$  are irreducible monic polynomials  $q_1(z), \dots, q_m(z)$ 
5.  $p_1(z) := 1$ ,  $p_2(z) := a_0$ 
6. for  $j = 1, \dots, m$  do
7.     apply Algorithm 1 to the polynomial  $q_j(z)$ 
8.     if Result=true then
9.          $p_1(z) := p_1(z) \cdot q_j(z)$ 
10.    else
11.        apply Algorithm 1 to the polynomial  $q_j^*(z)$ 
12.        if Result = true then
13.             $p_2(z) := p_2(z) \cdot q_j(z)$ 
14.        else
15.            print «The exact factorization is impossible»
16.            stop
17.        end if
18.    end if
19. end do
20. return  $p_-(z) := z^{-\varkappa} p_1(z)$ ,  $\varkappa := \deg p_1(z)$ ,  $p_+(z) := p_2(z)$ 

```

Лорановские коэффициенты вычисляются следующим образом.

Algorithm 3. Последовательность лорановских коэффициентов

Input. Матричный многочлен $a(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_j \in \mathbb{Q}^{p \times p}(i)$.

Output. Последовательность $c_{-\varkappa}, \dots, c_0, \dots, c_{\varkappa}$ лорановских коэффициентов для $\Delta^{-1}(z)a(z)$.

1. compute $\Delta(z) = \det a(z)$
2. apply **Algorithm 2** to compute the factor $\Delta_-(z)$ and \varkappa in the Wiener–Hopf factorization $\Delta(z) = \Delta_-(z)z^{\varkappa}\Delta_+(z)$.
3. compute the Laurent coefficients δ_j at infinity of the function $\Delta_-^{-1}(z)$ for $j = 0, \dots, n + \varkappa$
4. compute the Laurent coefficients c_j for $-\varkappa \leq j \leq \varkappa$
5. **return** $c_{-\varkappa}, \dots, c_0, \dots, c_{\varkappa}$

Algorithm 4 является ключевым в задаче факторизации.

Algorithm 4. Индексы и существенные многочлены последовательности

Input. Последовательность $c_{-\varkappa}, \dots, c_0, \dots, c_{\varkappa}$, $c_j \in \mathbb{Q}^{p \times p}(i)$.

Output. Индексы μ_1, \dots, μ_{2p} и матрицы согласованных факторизационных существенных многочленов $\mathcal{R} := (R_1(z) \cdots R_{2p}(z))$, $\mathcal{L} := \begin{pmatrix} L_1(z) \\ \vdots \\ L_{2p}(z) \end{pmatrix}$.

1. form the family of the block Toeplitz matrices $\{T_k\}_{k=-\varkappa}^{\varkappa}$
2. find $d_k := \dim \ker T_k$, $\Delta_k = d_k - d_{k-1}$ for $k = -\varkappa, \dots, \varkappa + 1$
3. find the distinct indices ν_1, \dots, ν_s , their multiplicities $\kappa_1, \dots, \kappa_s$, and the number t such that $\mu_p = \nu_t$
4. form the indices μ_1, \dots, μ_{2p}
5. find the generating polynomials $\tilde{R}_1(z), \dots, \tilde{R}_{\kappa_1}(z)$ for vectors forming a basis of the space $\ker \tilde{T}_{\nu_1+1}$, define the matrix $\mathcal{R} := (z \tilde{R}_1(z) \cdots z \tilde{R}_{\kappa_1}(z))$
6. form the matrix $\sigma_{11} := (\sigma_R \{z^{-\varkappa} \tilde{R}_1(z)\} \cdots \sigma_R \{z^{-\varkappa} \tilde{R}_{\kappa_1}(z)\})$
7. **for** $j = 2, \dots, t$ **do**
8. find a basis $\tilde{Q}_1(z), \dots, \tilde{Q}_{n_j}(z)$ of the space $\tilde{N}_{\nu_j+1} \cong \ker \tilde{T}_{\nu_j+1}$
9. **for** $k = 1, \dots, n_j$ **do**
10. form the matrix $\sigma_2 := (\sigma_{11} \ \sigma_R \{z^{-\varkappa} \tilde{Q}_k(z)\})$
11. **if** $\text{rank } \sigma_2 = \text{rank } \sigma_{11} + 1$ **then**
12. $\sigma_{11} := \sigma_2$
13. $\mathcal{R} := (R \ z \tilde{Q}_k(z))$
14. **end if**
15. **end do**
16. **end do**
17. **if** $\text{rank } \sigma_{11} \neq p$ **then**
18. **print** «The factorization essential polynomials don't construct»
19. **stop**
20. **end if**

```

21. if  $p < \kappa_1 + \dots + \kappa_t$  then
22.     find a basis  $Q_1(z), \dots, Q_{n_t}(z)$  of the space  $\mathcal{N}_{v_t+1} \cong \ker T_{v_t+1}$ 
23.     form the matrix  $\sigma_{22} := (Q_l(0))$ , where  $Q_1(0) = \dots = Q_{l-1}(0) = 0$ ,  $Q_l(0) \neq 0$ 
24.     form the matrix  $\mathcal{R} := (\mathcal{R} \ Q_l(z))$ 
25.     for  $k = l+1, \dots, n_t$  do
26.         form the matrix  $\sigma_3 := (\sigma_{22} \ Q_k(0))$ 
27.         if  $\text{rank } \sigma_3 = \text{rank } \sigma_{22} + 1$  then
28.              $\sigma_{22} := \sigma_3$ 
29.              $\mathcal{R} := (\mathcal{R} \ Q_k(z))$ 
30.         if end if
31.     end do
32.     find a basis  $Q_1(z), \dots, Q_{n_{t+1}}(z)$  of the space  $\mathcal{N}_{v_{t+1}+1} \cong \ker T_{v_{t+1}+1}$ 
33.     for  $k = 1, \dots, n_{t+1}$  do
34.         form the matrix  $\sigma_3 := (\sigma_{22} \ Q_k(0))$ 
35.         if  $\text{rank } \sigma_3 = \text{rank } \sigma_{22} + 1$  then
36.              $\sigma_{22} := \sigma_3$ 
37.              $\mathcal{R} := (\mathcal{R} \ Q_k(z))$ 
38.         end if
39.     end do
40. else
41.     find a basis  $Q_1(z), \dots, Q_{n_{t+1}}(z)$  of the space  $\mathcal{N}_{v_{t+1}+1} \cong \ker T_{v_{t+1}+1}$ 
42.     form the matrix  $\sigma_{22} := (Q_l(0))$ , where  $Q_1(0) = \dots = Q_{l-1}(0) = 0$ ,  $Q_l \neq 0$ 
43.     form the matrix  $\mathcal{R} := (\mathcal{R} \ Q_l(z))$ 
44.     for  $k = l+1, \dots, n_{t+1}$  do
45.         form the matrix  $\sigma_3 := (\sigma_{22} \ Q_k(0))$ 
46.         if  $\text{rank } \sigma_3 = \text{rank } \sigma_{22} + 1$  then
47.              $\sigma_{22} := \sigma_3$ 
48.              $\mathcal{R} := (\mathcal{R} \ Q_k(z))$ 
49.         end if
50.     end do
51. end if
52. for  $j = t+2, \dots, s$  do
53.     find a basis  $Q_1(z), \dots, Q_{n_j}(z)$  of the space  $\mathcal{N}_{v_j+1} \cong \ker T_{v_j+1}$ 
54.     for  $k = 1, \dots, n_j$  do
55.         form the matrix  $\sigma_3 := (\sigma_{22} \ Q_k(0))$ 
56.         if  $\text{rank } \sigma_3 = \text{rank } \sigma_{22} + 1$  then
57.              $\sigma_{22} := \sigma_3$ 
58.              $\mathcal{R} := (\mathcal{R} \ Q_k(z))$ 

```

```

59.     end if
60.     end do
61. end do
62. if rank  $\sigma_{22} \neq p$  then
63.     print «The factorization essential polynomials don't construct»
64.     stop
65. end if
66. form  $D(z) = \begin{pmatrix} z^{\mu_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z^{\mu_{2p}} \end{pmatrix}$ .
67. form the generating matrix function  $c_{-\infty}^{\infty}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j$  of the sequence  $c_{-\infty}^{\infty}$ 
68. decompose  $c_{-\infty}^{\infty}(z) R(z) = \alpha_-(z) D(z) - z^{n+1} \beta_+(z)$ 
69. form the matrix  $B(z) = \begin{pmatrix} R(z) \\ \beta_+(z) \end{pmatrix}$ 
70. if deg det  $B(z) > 0$  then
71.     print «The matrix polynomial  $B(z)$  isn't unimodular. The factorization process is interrupted»
72.     stop
73. end if
74. find  $A(z) = B^{-1}(z)$ 
75. find  $\mathcal{L}_+(z)$  by deleting the first  $p$  columns in  $A(z)$ 
76. find  $\mathcal{L}(z) = z^{-\infty-1} D(z) \mathcal{L}_+(z)$ 
77. return  $\mu_1, \dots, \mu_{2p}, \mathcal{R}(z), \mathcal{L}(z)$ 

```

Ниже приведен заключительный алгоритм.

<p>Algorithm 5. Точная факторизация матричного многочлена</p> <p>Input. Матричный многочлен $a(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_j \in \mathbb{Q}^{p \times p}(i)$, $\det a(z) \neq 0$ on the unit circle \mathbb{T}</p> <p>Output. Точная левая и правая факторизации Винера-Хопфа $a(z) = l_+(z) d_l(z) l_-(z)$, $a(z) = r_-(z) d_r(z) r_+(z)$, или текст «The exact factorization is impossible»</p>
<ol style="list-style-type: none"> 1. apply Algorithm 2 to verify that the factorization problem has the exact solution and to obtain the exact factorization of $\det a(z)$ 2. if ind det $a(z) = 0$ then 3. print «The factorizations are trivial» 4. return $l_-(z) = r_-(z) = I_p$, $d_l(z) = d_r(z) = I_p$, $l_+(z) = r_+(z) = a(z)$ 5. end if 6. apply Algorithm 3 to find the sequence $c_{-\infty}^{\infty}$ 7. apply Algorithm 4 to find the indices and the factorization essential polynomials $c_{-\infty}^{\infty}$ 8. find $\mathcal{R}_1(z)$, $\mathcal{L}_2(z)$, $d_l(z)$, $d_r(z)$ 9. find the matrix polynomial $\mathcal{R}_1^-(z) = z^{-\infty-1} \mathcal{R}_1(z) d_l(z)$ in z^{-1} 10. find $l_-(z)$ from the equation $l_-(z) \mathcal{R}_1^-(z) = \Delta_-(z) I_p$

```

11. find  $r_-(z)$  from the equation  $r_-(z)\mathcal{L}_2(z) = \Delta_-(z)I_p$ 
12. find  $l_+(t) = z^{-\kappa-1}\Delta_-^{-1}(z)a(z)\mathcal{R}_1(z)$ ,  $r_+(z) = \Delta_-^{-1}(z)d_r^{-1}(z)\mathcal{L}_2(z)a(z)$ 
13. return  $l_+(z)$ ,  $d_l(z)$ ,  $l_-(z)$ ,  $r_-(z)$ ,  $d_r(z)$ ,  $r_+(z)$ 

```

3. Имплементация алгоритма. Для имплементации алгоритма была выбрана СКМ Maple. Из этой системы используется лишь пакет LinearAlgebra. Факторизационный алгоритм был реализован в модуле SolverExactMPF, входящем в состав пакета ExactMPF.

Пакет может работать в Maple 11 и в более поздних версиях.

Чтобы загрузить ExactMPF, используются команды

```

> read("ExactMPF.txt");
> with(ExactMPF);
> with(LinearAlgebra);

```

Основные модули пакета: SchurTest, SolverExactPF, ExactMLC, ExactFER, SolverExactMPF. Приведем пример построения точной факторизации.

Пример. Все вычисления осуществлены на домашнем компьютере HP Intel(R) Core(TM)i3-415T CPU, 3.00 GHz, 4G RAM, операционная система Windows 10.

Пусть

$$a(z) = \begin{pmatrix} 2z^2 - z + \frac{1}{2} & -4z^2 + 2z - 1 \\ z & z^3 + z^2 + z + 4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить правую и левую факторизации $a(z)$, запускаем модуль SolverExactMPF с аргументом $a(z)$:

```

> lplus, dl, lminus, rminus, dr, rplus := SolverExactMPF(a);

```

После исполнения программы получаем левую и правую факторизации

```

> lplus; dl; lminus;

```

$$\begin{bmatrix} -4z - \frac{1099}{116} & 2z - \frac{43}{29} \\ z^2 + \frac{93}{58}z + \frac{48}{29} & \frac{2}{29}z + \frac{32}{29} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{29z} & 1 - \frac{35}{58z} \\ 1 + \frac{3}{29z} & \frac{1051}{232z} \end{bmatrix}$$

```

> rminus; dr; rplus;

```

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 + \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} \\ \frac{35}{22} & \frac{3}{2} + \frac{3}{4z} + \frac{4}{z^2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{44}{35} + \frac{121}{140}z + \frac{33}{70}z^2 & \frac{11}{70}z - \frac{11}{35}z^2 + \frac{22}{35}z^3 \\ & -\frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix}$$

Время исполнения – 0.297 сек.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта N 20-41-740024.

Литература

1. Адуков В.М. О факторизации аналитических матриц-функций // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 118, N3. С. 324–336.
2. Adukov V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices // Linear Algebra and Its Applications. 1998. Vol. 274. P. 85–124.
3. Krein M. G., Naimark M. A. The method of symmetric and Hermitian forms in the theory of the separation of the roots of algebraic equations // Linear Multilinear Algebra. 1981. Vol. 10, N 4. P. 265–308.

N.V. Adukova

South Ural State University

EXACTMPF PACKAGE FOR CONSTRUCTING THE EXACT WIENER–HOPF FACTORIZATION OF MATRIX POLYNOMIALS IN SCM MAPLE

Keywords: *Wiener–Hopf factorization, matrix polynomials, symbolic computations, Maple.*

Abstract. *In the paper the ExactMPF package intended for constructing an exact Wiener–Hopf factorization of matrix polynomials using symbolic calculations is presented. It is assumed that the elements of a given matrix polynomial $a(z)$ are scalar polynomials with coefficients from the field of Gaussian complex numbers $\mathbb{Q}(i)$, and the determinant of $a(z)$ admits an exact Wiener–Hopf factorization. These conditions ensure that factorization of $a(z)$ can be constructed by using symbolic methods. A description of the package and its modules is given. Pseudo-codes of algorithms by which the main modules of the package work are presented.*

Т.К. Бирюкова, М.М. Гершкович

Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН

УДК 004.045, 004.931

ОСОБЕННОСТИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ С НЕТОЧНО ИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В МНОГОУРОВНЕВЫХ ТЕРРИТОРИАЛЬНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Ключевые слова: *многоуровневая система, информационный поиск, критерии идентификации, критерии кластеризации, информационно-телекоммуникационная система.*

В статье исследованы особенности обработки потоков информации в многоуровневых территориально-распределенных системах, получающих из различных источников данные о событиях с участием информационных объектов (ИО) с неточно известными параметрами. Информационный объект представляет собой совокупность данных, характеризующих некоторую единую сущность. Эти данные считаются атрибутами ИО.

Сформулированы постановки и указаны методы решения задач идентификации ИО, заключающиеся в подборе критериев слияния и кластеризации ИО с неточно известными параметрами. В результате автоматического объединения в системе формируются подмножества, состоящие из связанных по определенному критерию информационных объектов, с некоторой вероятностью представляющих собой один и тот же ИО. При анализе таких кластеризованных данных используется вся имеющаяся в системе информация об ИО, включая поступившие из разных источников изображения ИО. Таким образом, предоставляется возможность поиска связей и событий для совокупностей ИО как для одного ИО.

1. Введение

В различных сферах общественной жизни, в том числе в области государственного управления в настоящее время, возникает потребность в комплексной обработке информации, источники сбора и места хранения которой являются не только территориально разобщёнными, но и принадлежащими различным государственным и коммерческим структурам. В частности, развиваются информационно-аналитические системы, фиксирующие действия физических лиц (то есть события с определенными атрибутами, порожденные действиями физических лиц) [1-3]. Фиксация многих типов событий производится существующими системами при выдаче документов, удостоверяющих личность, при записи актов гражданского состояния, при совершении операций по миграционному учету, при регистрации автомобилей, при оказании государственных услуг с помощью интернет-ресурсов и др.

В докладе [4] на конференции СКМП-2011 были рассмотрены методы анализа параметров функционирования территориально-распределенных информационных систем с применением разработанных авторами интегродифференциальных сплайнов.

В данной статье в продолжение [4] предлагаются постановки и способы решения задач идентификации информационных объектов в территориально-распределенных информационных системах.

Рассматриваются автоматизированные информационные системы (АИС), в которые из территориально-распределенных источников различных типов поступают данные о событиях, происходящих с

некоторыми информационными объектами, например с физическими лицами. Запись о событии содержит атрибуты события (время возникновения события и др.) и атрибуты участвующих в событии информационных объектов (ИО).

Основу излагаемой методики составляет подбор критериев слияния и кластеризации ИО с учетом того, что параметры объектов известны неточно. Особое внимание в данной работе уделено использованию изображений ИО в процессе идентификации. Изображение считается параметром ИО, по сути своей имеющим искажения.

2. Постановки задач идентификации информационных объектов в многоуровневых территориально-распределенных информационно-телекоммуникационных системах

В информационных системах, обеспечивающих аналитическую работу с данными, прежде всего возникает задача идентификации ИО – выделения множеств ИО, являющихся одним и тем же ИО с некоторой вероятностью. Решение этой задачи далее позволяет осуществить поиск событий, происходящих с ИО, с учетом того, что его параметры могут быть случайно искажены или изменены при выполнении законных действий. Например, фамилия физического лица (ФЛ) может быть как случайно искажена при вводе в информационную систему, так и изменена законным образом при вступлении в брак. Таким образом, биометрические данные ФЛ, в частности фотографии, мало меняющиеся или не меняющиеся на протяжении жизни человека, являются значимыми атрибутами при идентификации ФЛ.

Для эффективного анализа данных в АИС прежде всего должны автоматически решаться следующие частные задачи идентификации:

1) формирование ИО из поступающей информации о происходящих с ИО событиях, в том числе:

а) выделение ИО из входящего потока;

б) слияние ИО (из данных, поступивших в систему из разных источников в разное время), с заданной вероятностью представляющих собой один и тот же ИО;

2) кластеризация: составление «Сложных ИО» – подмножеств, состоящих из «похожих» по некоторому критерию информационных объектов.

Процедура слияния ИО позволяет избежать дублирования информации в системе. Для слияния ИО осуществляется выявление информационных объектов, которые по определенному критерию являются одним и тем же ИО. Далее формируется один ИО с атрибутами, взятыми из всех выбранных ИО (удовлетворяющих критерию слияния).

Автоматическая кластеризация множеств ИО при поступлении данных в систему (и / или при обработке хранящейся в системе информации) значительно расширяет аналитические возможности АИС, в

частности результативность поиска связей между ИО, а также событиями, в которых они участвуют. При кластеризации в системе формируются «Сложные ИО» – подмножества, состоящие из «похожих» по некоторому критерию ИО.

В статье приведены различные критерии слияния и кластеризации ИО, учитывающие специфику параметров, характеризующих ИО.

При автоматическом объединении в кластере данных об ИО, в частности о физическом лице, предоставляется возможность выполнять поиск в системе по всей имеющейся информации об ИО (включая все изображения ИО), поступившей из разнородных систем-источников.

3. Задача выделения информационных объектов из данных, поступающих в АИС

Задача выделения ИО из потока данных, содержащего информацию о событиях, состоит в формировании в базе данных (БД) множеств ИО, участвовавших в событиях. В одном событии могут участвовать ИО различных видов (физические лица, транспортные средства и др.), при этом в БД формируются отдельные множества для каждого типа ИО. Параметры каждого ИО заполняются значениями из данных о событиях.

Однако на практике в АИС с большим потоком информации из разных источников нецелесообразно сохранять в БД данные всех ФЛ-участников событий – тогда в БД накопятся «дубликаты» ФЛ. Аналитическая работа с такой БД неэффективна. Поэтому после выделения ИО из данных о событии необходимо выполнить слияние ИО в БД.

4. Задача слияния информационных объектов в АИС

В докладе с участием авторов [5] приведены преимущества архитектуры территориально-распределенной информационной системы, организованной в виде древовидной иерархической совокупности элементов (узлов), взаимодействующих по каналам связи между собой и с внешними системами. Указано, что в иерархической системе хранилища данных целесообразно пополнять иерархически – так, чтобы каждый вышестоящий по иерархии узел содержал все данные из нижестоящих узлов.

Слияние ИО в иерархической АИС выполняется в каждом узле при получении данных из систем-источников, а также из других узлов.

Для слияния ИО выявляются в БД системы (и/или в потоке событий) информационные объекты, которые по заданному критерию являются одним и тем же ИО. Далее для каждой совокупности таких объектов формируется один ИО с атрибутами, взятыми из всех выбранных ИО (удовлетворяющих критерию слияния).

Пусть в системе имеется K типов информационных объектов (например, если в систему поступает информация из K источников), и k -ый тип имеет набор признаков $Q^k = \{q_1^k, \dots, q_i^k, \dots, q_{t_k}^k\}$ $k = 1, \dots, K$; t_k – количество признаков в наборе Q^k). Выполняется слияние ИО тех типов,

у которых имеются одинаковые признаки, характеризующие ИО и существенно отличающие ИО друг от друга (например, для физического лица – фамилия, имя, номер паспорта, пол, дата рождения). Пусть

$$Q^* = \{q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_t^*\}, Q^* \subset Q^0 = \bigcap_{k=1}^K Q^k - \quad (1)$$

набор важных признаков объекта (являющийся подмножеством пересечения Q^0 наборов признаков Q^k), по которым проводится сравнение ИО (если Q^0 не пусто) (см. рис. 1 (для $k = 2$)).

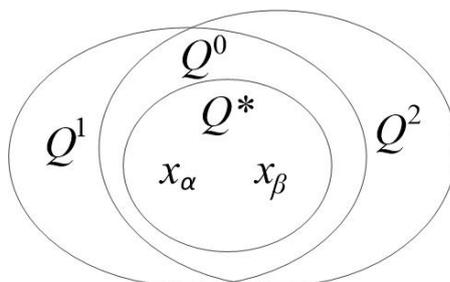


Рис. 1. Пересечение множеств признаков ИО

Идентичность объектов x_α и x_β определяется по некоторому заданному критерию $P(x_\alpha, x_\beta) \geq P_{\text{critical}}$, где $P(x_\alpha, x_\beta)$ – оценка вероятности идентичности объектов x_α и x_β , P_{critical} ($0 \leq P_{\text{critical}} \leq 1$) – заданное критическое значение. Если в задаче важно избежать ошибок второго рода (принятие различных ИО за идентичные), то P_{critical} берут большим, если важнее свести к минимуму ошибки первого рода (не распознать идентичные ИО), то величину P_{critical} уменьшают.

Оценку вероятности $P(x_\alpha, x_\beta)$ – меру близости объектов x_α и x_β – можно вычислить, например, по формуле:

$$P(x_\alpha, x_\beta) = \sum_{i=1}^t w_i \phi_i(\delta_i^\alpha, \delta_i^\beta), \quad (2)$$

где i – номер признака, по которому проводится сравнение;

t – количество признаков в наборе Q^* ;

w_i – вес, приписываемый признаку q_i^* , $\sum_{i=1}^t w_i = 1$;

ϕ_i – функция оценки близости по признаку q_i^* , область значений ϕ_i : $[0;1]$;

$\delta_i^\alpha = q_i^*(x_\alpha)$; $\delta_i^\beta = q_i^*(x_\beta)$ – значения признака q_i^* для x_α и x_β соответственно.

Как правило, при проектировании АИС стараются минимизировать ошибки второго рода при «слиянии» ИО (ошибочное принятие различных ИО за идентичные), поэтому выполняют «слияние» ИО, только если значения всех признаков из множества Q^* равны для ИО.

Схожесть фотографий имеет существенное значение для идентификации ФЛ, однако при «слиянии» критерий сходства по фотографии использовать нецелесообразно, поскольку фото в разных документах одного ФЛ могут совпадать, только если в эти документы в цифровом виде внесена одна и та же фотография. Однако сейчас,

например при оформлении заграничных паспортов, выполняется фотографирование в момент оформления для записи в документ цифровой фотографии. В этом случае внесение одной и той же электронной фотографии в разные документы маловероятно. А если в разных событиях встречается один документ, и анализируется информация из электронного чипа, то другие основные атрибуты кроме фотографии (фамилия, имя, дата рождения) в цифровом виде будут одинаковы, что и покажет идентичность ИО.

5. Задача кластеризации ИО и формирование «Сложных ИО»

В реальности все ИО в системе – это ИО с искажениями. Поэтому в базе данных АИС необходимо уметь объединять ИО без слияния – методом кластеризации и предоставлять возможности выполнения анализа для кластера («Сложного ИО») как для одного ИО (осуществлять поиск событий для «Сложного ИО», связей между «Сложными ИО» и т.п.). Следует отметить, что при формировании «Сложных ИО» определение схожести фотографий играет большую роль.

«Сложный ИО» – это множество ИО, удовлетворяющих определенному критерию сходства. При составлении «Сложного ИО» формируются связи «похожих» по заданному критерию ИО. Таким образом, в АИС «Сложные ИО» – это кластеры ИО (подмножества, состоящие из «похожих» объектов) в множестве ИО, составляющих БД. Информационные объекты, принадлежащие разным кластерам, должны существенно отличаться.

Для выполнения кластеризации в качестве расстояния $\rho(x_\alpha, x_\beta)$ между объектами можно использовать дополнение к вероятностной мере $P(x_\alpha, x_\beta)$, характеризующей идентичность ИО и вычисляемой по формуле (2):

$$\rho(x_\alpha, x_\beta) = 1 - P(x_\alpha, x_\beta). \quad (3)$$

Для формирования «Сложных ИО» набор основных признаков, используемых для сопоставления, может быть расширен относительно множества признаков Q^* (определяемого формулой (1)), по которым проводится слияние объектов. Так, при кластеризации важно сравнивать фотографии.

Далее будем использовать расширенный набор признаков:

$$Q^{*+} = \{q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_t^*, q_{t+1}^*, \dots, q_{t+\tau}^*\}, \quad (4)$$

где в число дополнительных признаков $q_{t+1}^*, \dots, q_{t+\tau}^*$ включены фотографии $q_f^*(t + 1 \leq f \leq t + \tau)$.

Количество кластеров определяется в результате работы алгоритма кластеризации. На рисунке 2 представлено разбиение множества ИО на кластеры.

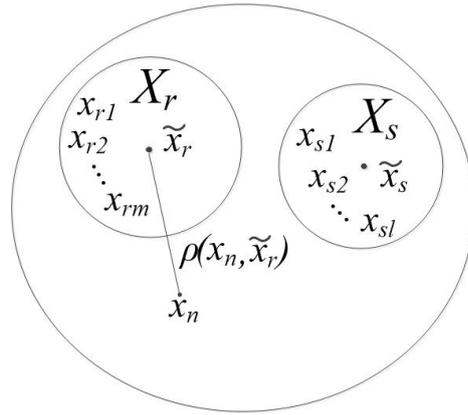


Рис. 2. Разбиение множества ИО на кластеры

Пусть к некоторому моменту в БД содержится R кластеров $X_1, \dots, X_r, \dots, X_R$. Каждый кластер X_r ($r = 1, \dots, R$) представляет собой в общем случае «Сложный ИО», объединяющий «сходные» ИО: $X_r = \{x_{r1}, \dots, x_{rm}\}$.

При поступлении в БД системы объекта x_n предыдущие $n-1$ объектов уже разбиты на R кластеров ($R \leq n-1$). И к этому моменту в каждом кластере X_r выделен его «типичный» представитель – объект \tilde{x}_r , который имеет «лучшие» значения признаков относительно значений тех же признаков у других элементов, образующих кластер. Способ выбора «лучшего» значения следует заранее определить в зависимости от смысла признака. Как правило, «лучшее» означает «чаще всего встречающееся в кластере». Однако, например, «лучший» номер документа – это более новый. (После каждого пополнения кластера его «типичный» ИО вычисляется заново).

Когда в систему поступает новый объект x_n , выполняется сопоставление x_n со всеми «типичными» ИО ранее выделенных кластеров и определяется самый близкий кластер:

$$\rho_{\min} = \min_{1 \leq r \leq R} \rho(x_n, \tilde{x}_r); \quad r(n) = \operatorname{argmin}_{1 \leq r \leq R} \rho(x_n, \tilde{x}_r). \quad (5)$$

Если расстояние ρ_{\min} , вычисленное по формуле (5) (с учетом (3)), удовлетворяет неравенству $\rho_{\min} \leq \rho_{\text{critical}}$, то x_n включают в соответствующий кластер с номером $r(n)$, иначе элемент x_n образует новый кластер X_{R+1} (состоящий из одного элемента) и становится его «типичным» ИО.

Критическое значение ρ_{critical} выбирается исходя из того, какие ошибки наименее желательны – первого или второго рода. Можно принять $\rho_{\text{critical}} = 1 - P_{\text{critical}}$.

Оценку вероятности $P(x_\alpha, x_\beta)$ можно вычислить по формуле, полученной из (2), с учетом того, что вес w_{ij} признака зависит от ситуации $j \in J$ (и используется расширенный набор признаков (4)):

$$P(x_\alpha, x_\beta) = \max_{1 \leq j \leq J} (\sum_{i=1}^{t+\tau} w_{ij} \phi_i(\delta_i^\alpha, \delta_i^\beta)), \quad \text{причем } \forall j \sum_{i=1}^{t+\tau} w_{ij} = 1. (6)$$

С учетом того, что при идентификации физических лиц наиболее значимыми являются признаки: серия и номер паспорта, фамилия, имя, отчество, дата рождения – при равенстве значений параметра q_m^* = «серия и номер паспорта» для объектов x_α и x_β (ситуация 1) можно считать, что x_α и x_β идентичны, и параметру q_m^* можно приписать большой вес w_{m1} . Однако если значения параметра q_m^* = «серия и номер паспорта» для x_α и x_β отличаются, то следует проверить совпадение у x_α и x_β других параметров – фамилии, имени, отчества, даты рождения.

При совпадении (или близости по заданному критерию) имени, отчества и даты рождения у объектов x_α и x_β и отличии номеров паспортов (ситуация 2) можно предположить, что в событии участвовал другой паспорт того же человека или человек сменил фамилию и паспорт при вступлении в брак. Тогда следует взять малое значение веса w_{m2} для параметра q_m^* = «серия и номер паспорта» в формуле (6). В ситуации 2, если в системе имеются фотографии x_α и x_β (признак q_f^*), то целесообразно проверить также схожесть фотографий (методами сравнения фотографий, приведенными в специализированной технической литературе, например в [6]). Признаку q_f^* в этом случае нужно приписать достаточно большой вес w_f .

Целесообразно считать, что текстовые данные поступают в систему с искажениями (вызванными ошибками операторского ввода и т.д.), поэтому при формировании «Сложного ИО» при сравнении фамилий и имен целесообразно использовать их фонетические ключи [7], а даты рождения сравнивать в текстовом виде, а не в числовом (если дата содержит опечатку в один символ, то числовые значения дат могут существенно различаться, а соответствующие строки будут близки при сравнении).

Очень важно, что при формировании «Сложного ИО» из всех данных о событиях, происходивших с ИО, полученных из разных источников (как содержащих, так и не содержащих фотографии), получается «Сложный ИО», объединяющий все фотографии и все данные ФЛ, которые были зафиксированы при его участии в различных событиях в разное время. Отметим, что в процессе составления «Сложного ИО» к данным, которые исходно не содержали фотографий, присоединяются фотографии из других документов ФЛ. Таким образом, при связывании данных из разных источников появляется возможность поиска по информации, отсутствующей в некоторых источниках.

При выборе способов сравнения фотографий необходимо учитывать специфику конкретной задачи и количество данных в системе. Методы поиска по фотографиям для систем с относительно небольшим числом

данных (менее миллиона), содержащих фотографии высокого качества, отличаются от методов для систем, включающих десятки и сотни миллионов фотографий плохого качества.

Способы сравнения атрибутов ИО в системе должны учитывать часто встречающиеся виды искажений – искажения из-за фонетических особенностей языков при вводе оператором данных «со слуха», транскрипционные искажения (возникающие из-за вариативности при записи звуков одного языка буквами другого языка), пропуски символов. В современных АИС все большее распространение получают методы определения сходства информационных объектов с помощью нейронных сетей.

Необходимо подчеркнуть, что при автоматическом объединении в кластере данных об информационном объекте, в частности о физическом лице, предоставляется возможность выполнять поиск в системе по всей имеющейся информации об объекте, в том числе по всем фотографиям и по данным из документов ФЛ, полученных системой в разное время из разных источников. И при определении связей «Сложного ИО» с другими объектами можно его рассматривать как единый ИО.

Таким образом, в АИС с кластерной организацией множеств ИО, когда «Сложные ИО» формируются автоматически при поступлении данных, имеются широкие возможности для создания и поэтапного развития поисково-аналитического функционала.

6. Заключение

В работе рассмотрены особенности идентификации информационных объектов с неточно известными параметрами в многоуровневых территориально-распределенных информационных системах, получающих данные из источников различных типов. Приведены постановки и указаны способы решения задач слияния и кластеризации ИО в иерархически организованных системах на примере данных о физических лицах с учетом того, что параметры объектов априори известны неточно.

Отмечены преимущества автоматически обеспечиваемой кластерной организации множеств ИО в АИС для решения аналитических задач, в частности, для поиска связей между кластерами ИО («Сложными ИО») как между едиными ИО.

Литература

1. Зацаринный А. А., Ионенков Ю. С. К вопросу оценки эффективности автоматизированных систем с использованием метода анализа иерархий // Системы и средства информатики. 2015. Т. 25. № 3. С. 161-178.
2. Зацаринный А. А., Ионенков Ю. С., Козлов С. В. Некоторые вопросы проектирования информационно-телекоммуникационных систем. М.: ИПИ РАН, 2010. 218 с.

3. Белоусов В.В. Современные подходы к развитию интеллектуальных технологий для информационно-управляющих систем // Системы высокой доступности. 2015. № 2. С. 43-49.

4. Бирюкова Т.К., Киреев В.И., Гершкович М.М., Синицин В.И. Интегродифференциальные сплайны и их применение в прикладных задачах анализа данных в территориально-распределенных информационных системах // Тезисы докладов на XII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения». Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. С. 82-84.

5. Гершкович М.М., Бирюкова Т.К., Синицин В.И., Долгополов В.С., Заикин М.Ю., Козлова Л.М. Особенности организации информационного обмена в многоуровневых территориально-распределенных системах // Труды XII Международной научно-технической конференции «Кибернетика и высокие технологии XXI века». Россия, Воронеж, 2011. Т. 1. С. 1-12.

6. Урмаев О.С., Босов А.В. Реализация концепции многофакторной биометрической идентификации в интегрированных аналитических системах // Системы высокой доступности. 2007. Т. 3, № 4. С. 13-23.

7. Гершкович М.М., Бирюкова Т.К. Задачи идентификации информационных объектов в распределенных массивах данных // Системы и средства информатики. 2014. Т. 24, № 1. С. 224-241.

Т.К. Biryukova, M.M. Gershkovich

The Institute of Informatics Problems of the Federal Research
Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of
Sciences

PARTICULARITIES OF PROCESSING THE DATA WITH A PRIORI IMPRECISELY DEFINED PARAMETERS IN MULTILEVEL AREA SPREAD INFORMATION-TELECOMMUNICATION SYSTEMS

Keywords: *multilayer system, informational search, identification criteria, clustering criteria, information-telecommunication system.*

Abstract. *This article examines the particularities of the data flow processing in multilayer area spread data systems that accumulate information from various sources. The data contain informational objects (IO) with a priori imprecisely defined parameters. An IO is an array of data (IO attributes) describing a certain single entity.*

We propose methods for construction of a search tasks and theirs subsequent solution. These methods imply selection of criteria for merging and clustering of IO's with a priori imprecisely defined parameters. Automatic data clustering leads to formulation of subsets consisting of IO's linked one to each other according to a certain criteria. IO's of a single subset with some probability represent the same IO.

Analysis of these clustered data utilizes all available attributes of objects, including IO-images of various origin. The proposed algorithm enables the identification of relationships and events for sets of IO as for a single IO.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЕКОДИРОВАНИЯ СТИРАНИЙ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ СВЯЗИ

Ключевые слова: *системы цифровой связи, помехоустойчивое кодирование, блочное кодирование, код Хэмминга, синдром, декодирование стираний, евклидова метрика.*

В работе приводятся результаты исследования различных алгоритмов, корректирующих ошибки, в основе которых лежит алгоритм декодирования стираний. В работе приведены результаты сравнения исправляющих способностей данных алгоритмов с алгоритмами Хэмминга и Чейза.

1. Введение. Одна из главных задач систем цифровой связи – повышение способности системы сохранять свои функции неизменными или изменяющимися в допустимых пределах при действии помех. Одним из методов, позволяющий достигнуть данной цели, является помехоустойчивое кодирование.

Помехоустойчивое кодирование – это процесс обработки информации, благодаря которому в дальнейшем появится возможность обнаружить и исправить ошибки, которые могут добавиться к сообщению при прохождении через канал связи, содержащий шум.

Блочный кодер делит непрерывную информационную двоичную последовательность, поступающую на его вход, на блоки фиксированной длины. К полученным блокам добавляются проверочные символы, исправляющие возникающие ошибки. Рассматриваемые в данной статье алгоритмы основываются на алгоритме кодирования Хэмминга.

2. Код Хэмминга. Код Хэмминга – это блочный код, позволяющий исправлять одиночные и фиксировать двойные ошибки. При кодировании кодом Хэмминга данные разбиваются на блоки одинаковой длины и к каждому блоку добавляется определённое количество проверочных или контрольных бит, генерирующихся по определённому правилу. Процесс декодирования и исправления ошибок заключается в вычислении вектора синдрома для принятого слова. В случае, если вектор синдрома оказался ненулевым, то по нему можно однозначно определить позицию одиночной ошибки и исправить её. Если вектор синдрома оказался нулевым, то делается вывод об отсутствии ошибок в принятом слове. Все

алгоритмы, рассмотренные ниже, в основе своего кодирования имеют код Хэмминга.

3. Алгоритм Чейза. Декодирование по алгоритму Чейза, исправляющего N ошибок, предполагает перебор $2^N - 1$ возможных комбинаций значений бит, определённых как ошибочные. Для этого вначале задаётся количество ошибок N , которые данный алгоритм может исправить. Общий принцип работы данного алгоритма следующий.

1. В принятом слове, закодированном кодом Хэмминга, определяются биты, в которых возможны ошибки («плохие» биты). Выбор таких бит может происходить разными способами – в самом простом случае при использовании модуляции при передаче сообщений (когда 0 заменяется на -1) когда принятая последовательность представляет из себя не набор нулей и единиц, а вектор, содержащий значения, отличные от единицы и минус единицы, «плохими» будут определены те биты, значения которых имеют наименьший модуль. Всегда определяется столько «плохих» бит, сколько ошибок может исправить данный алгоритм.

2. Генерируются вспомогательные вектора, каждый по длине равный количеству исправляемых ошибок и «плохих» бит. Эти вектора представляют собой все возможные комбинации бит с одним условием – единиц в векторе не может быть больше определённого заранее числа v .

3. На базе вспомогательных векторов генерируются проверочные вектора – вектора, имеющие размерность, равную размерности кодового слова, на позициях, соответствующим «плохим» битам которых ставятся значения вспомогательных векторов. На остальных позициях ставятся нули.

4. Проводится демодуляция принятого вектора, после чего создаётся набор пробных векторов путём сложения демодулированного принятого вектора с каждым из проверочных векторов.

5. К пробным векторам применяется жёсткое решение, т.е. каждый из них декодируется обычным алгоритмом Хэмминга, который исправляет одиночные ошибки. На этом этапе после жёсткого решения к каждому пробному вектору можно добавить дополнительный бит чётности, если этот бит был у принятого кодового слова.

6. Проводится модуляция пробных векторов и последующий поиск ближайшего из них к принятому слову. Критерием схожести может выступать Евклидова метрика между пробным словом (k) и принятым вектором (r):

$$d(k, r) = \sqrt{(k_1 - r_1)^2 + (k_2 - r_2)^2 + \dots + (k_n - r_n)^2}. \quad (1)$$

Выбирается вектор с наименьшей метрикой.

7. Выбранный пробный вектор демодулируется, от него отбрасываются проверочные символы, после чего данный вектор считается словом, которое изначально передавалось.

4. Алгоритм декодирования стираний с выбором. Декодирование стираний так же как алгоритм Чейза, основано на определении в принятом слове, которое закодировано блочным кодом «плохих» бит, на позициях которых ставятся пробелы (стирания). То есть на «плохие» биты ставятся метки, эти биты не принимают значения ни нулей, ни единиц.

Принцип декодирования стираний заключается в том, что сумма бит на позициях принятого слова, соответствующим ненулевым коэффициентам проверочного многочлена, по модулю 2 всегда равна 0. Это позволяет однозначно определять значение «стёртых» бит, находящихся на позициях, соответствующим ненулевым коэффициентам проверочного многочлена. Исправление или запись в «стёртые» биты происходит путём циклического сдвига последовательности. Всего сдвигов должно быть n , либо число, кратное n , где n – длина кодового слова.

Если обычное декодирование исправляет $t = \frac{d-1}{2}$ ошибок (для Хэмминга $t = 1$), то декодирование стираний исправляет $d-1$ стёртых бит, где d – кодовое расстояние ($t = 2$). В случае, если стёртыми окажутся не два, а три бита, возникнет два варианта развития событий. Первый – три стёртых бита будут исправлены с помощью циклического сдвига кодовой последовательности. Второй – три стёртых бита будут составлять такую комбинацию, что на позициях принятого слова, соответствующим ненулевым коэффициентам проверочного многочлена, всегда будут находиться как минимум два стёртых бита из трёх. Это приведёт к невозможности принять однозначное решение при декодировании, и стирания исправлены не будут. Данная комбинация и пример декодирования стираний с выбором были рассмотрены в [4, с. 13]. Общая идея алгоритма декодирования стираний с выбором заключается в том, что генерируются несколько предполагаемых слов, в которых на позиции одного стёртого бита подставляются все возможные значения. Далее каждое предполагаемое слово декодируется стандартным алгоритмом декодирования стираний, после чего из всех предполагаемых слов выбирается наиболее похожее на принятое. Критерием похожести является евклидова метрика, которая вычисляется для каждого предполагаемого слова и принятого вектора.

5. Алгоритм декодирования стираний с выбором и проверкой синдрома. В рамках исследования после алгоритма стираний с выбором, исправляющим три бита, было решено рассмотреть алгоритм, исправляющий большее количество стёртых бит. Для исправления

четырёх бит за основу был взят код Хэмминга (15,11). Сам алгоритм по исправлению четырёх ошибок заключался в том, что слово, содержащее четыре стёртых бита, вначале проходило стандартную процедуру декодирования стираний, в случае если после этого в слове по-прежнему оставались четыре стёртых бита, то на позициях двух из этих четырёх стёртых бит генерировались четыре возможные комбинации нулей и единиц, соответственно появлялось не два, а четыре предполагаемых слова, с которыми в дальнейшем проводились те же операции по стандартному декодированию стираний, после чего по евклидовой метрике выбиралось слово, наиболее похожее на принятое. После алгоритма, исправляющего четыре ошибки, было решено проверить алгоритм, который при тех же исходных условиях (кодирование кодом Хэмминга) может исправлять 5 ошибок. Порядок действий при этом следующий.

1. В принятом слове определяются пять «ненадёжных» бит, которые стираются. Затем, слово со стёртыми битами проходит через стандартный алгоритм стираний.

2. Далее анализируется, сколько стёртых бит осталось после применения стандартного алгоритма стираний: если их осталось четыре или три, то к ним применяются вышеописанные алгоритмы, исправляющие соответственно три и четыре ошибки. В случае, если стёртых бит оказалось пять, применяется алгоритм для исправления пяти стёртых бит – выбирается три стёртых бита и на их позиции ставятся все возможные комбинации двоичных чисел. Каждая комбинация этих чисел вместе с оставшимися битами слова образует предполагаемое слово. Всего предполагаемых слов получится восемь (все комбинации для трёх бит). Далее каждое слово проходит процедуру стандартного декодирования стираний, после чего из предполагаемых слов с помощью евклидовой метрики выбирается наиболее похожее на принятое.

При исследовании данного алгоритма было замечено, что его исправляющая способность практически совпадает с исправляющей способностью алгоритма для четырёх стёртых бит. Оказалось, что при исправлении восьми предполагаемых слов возникают комбинации, которые соответствуют правилу суммы стёртых бит на позициях проверочного многочлена, но при этом не являются кодовыми словами для исходного кода Хэмминга. При этом такие предполагаемые слова могут иметь евклидову метрику меньше, чем кодовое слово Хэмминга. Исходя из данной ситуации, было решено вычислять синдром каждого предполагаемого слова и, если синдром оказывается ненулевым, данное слово исключать из проверки на похожесть с принятым вектором, поскольку оно заведомо не является кодовым. Результаты работы данного алгоритма и сравнение его с вышеперечисленными представлены в разделе «Математическое моделирование».

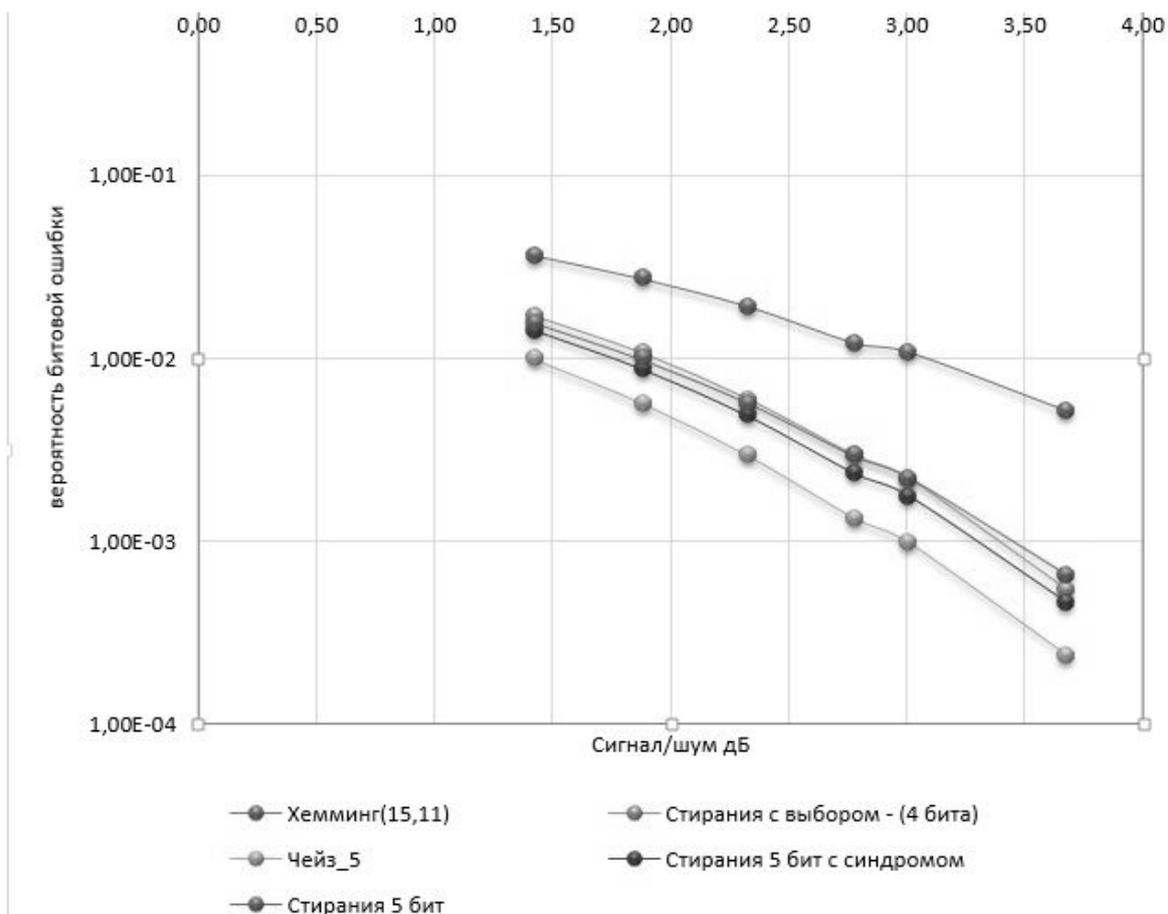


Рис. 1. Кривые помехоустойчивости для различных алгоритмов, основанных на коде Хэмминга (15,11)

7. Математическое моделирование.

Для проверки эффективности различных алгоритмов декодирования был проведен ряд вычислительных экспериментов с использованием математической модели. Ниже приведены результаты математического моделирования для последовательности, закодированной кодом Хэмминга, и пяти алгоритмов декодирования: Хэмминга, декодирования стираний с выбором для четырех бит и пяти бит, декодирования стираний с выбором и проверкой синдрома для пяти бит и алгоритма Чейза, исправляющего пять ошибок.

Как видно из графиков, наиболее выгодным с точки зрения помехоустойчивости является алгоритм Чейза. При вероятности битовой ошибки 10^{-3} он имеет преимущество над кодом Хэмминга более чем на 2 дБ и около 0,25 дБ над алгоритмом декодирования стираний с проверкой синдрома. Что касается алгоритма декодирования стираний с выбором и проверкой синдрома, то он имеет преимущество перед алгоритмом декодирования стираний с выбором для четырех бит и перед декодированием стираний с выбором для пяти бит. Недостатком

алгоритма Чейза является сложность вычислений и перебор большого количества предполагаемых слов (для пяти стёртых бит их будет 31), что скажется на затратах вычислительной мощности и времени обработки данных. Поэтому, выбирая между помехоустойчивостью и вычислительной сложностью алгоритмов, более универсальным является алгоритм декодирования стираний с выбором и проверкой синдрома.

Литература

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: пер. с англ. Изд. 2-е, испр. М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. 1104 с.
2. Кларк Дж., мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987. 392 с.
3. Золотарев В.В., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы: справочник / под ред. Ю.Б. Зубарева. М.: Горячая линия-Телеком, 2004. 126 с.
4. Бондарь А.А. Исследование алгоритма декодирования стираний с выбором // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXI Международной научной конференции. Выпуск 21. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. С. 11–19.

A.A. Bondar

Chair of radio electronic systems and complexes, Institute of Radio Engineering and Telecommunication Systems, RTU MIREA

RESEARCH OF THE ALGORITHM FOR DECODING ERASURES WITH A CHOICE

Keywords: *digital communication systems, noise-resistant coding, block coding, Hamming code, syndrome, decoding erasures.*

Abstract. *This paper analyzes various error-correcting algorithms based on the erasure decoding algorithm. The article presents the findings obtained by comparing the error-correcting capability of the previously mentioned algorithms with that of Hamming codes and the Chase algorithm.*

Р.Р. Вишняков

Российский технологический университет МИРЭА

УДК 51-74

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ТРАКТА ПЕРЕДАЮЩЕГО МОДУЛЯ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ RF SYSTEMS DESIGNER

Ключевые слова: *линейный тракт, передающий модуль, программа, проектирование СВЧ-тракта, моделирование.*

В статье рассматривается разработанный автором программный комплекс RF Systems Designer на примере решения задачи проектирования линейного тракта передающего модуля. Рассматриваемый программный комплекс позволяет автоматически синтезировать и оптимизировать структурные схемы радиоприемных и радиопередающих устройств, а также производить выбор оптимальной схемы по заданному виду целевой функции оптимизации. Рассмотрен алгоритм работы программы, основой которого является системно-ориентированный комбинаторно-мультифакторный подход к проектированию линейных трактов. Отличительной особенностью такого подхода является совмещение возможностей схемного и системного уровней проектирования линейных трактов приемных и передающих радиоустройств.

1. Постановка задачи

Скачок в развитии электроники и вычислительной техники, математических алгоритмов и методов формирования и обработки сигналов позволяет решить гораздо эффективнее по ряду критериев многие из радиотехнических задач (детектирование, эквалайзинг, формирование информационного сигнала и др.) в цифровом виде. В проектировании современных радиоэлектронных систем отчетливо прослеживается тенденция к разделению приемных и передающих модулей на две принципиально разные части – аналоговую и цифровую. Однако существует ряд задач, которые принципиально не могут быть решены в цифровом виде, например, усиление и фильтрация СВЧ-сигнала, обеспечение согласования антенно-фидерных устройств и цепей приемного / передающего устройства, формирование опорных частот, гетеродинное преобразование сигнала и другие. Данный круг задач решается аналоговыми трактами – линейными трактами приемников и передатчиков. К системам, в которых предполагается функционирование данных трактов, предъявляются все более жесткие требования к характеристикам, с одной стороны, с другой – все более обширные, поскольку становится очевидным, что при росте сложности РЭС невозможно отдавать приоритет только одному параметру, поскольку это приводит к нерациональности использования весьма ограниченных ресурсов (частотных, мощностных, временных). В то же время развитие аналоговой электроники и схемотехники предоставляет огромный выбор возможностей построения аналоговой части приемных и передающих устройств.

В сложившейся ситуации многим разработчикам при структурном проектировании рассматриваемой части приемников и передатчиков – линейного тракта, приходится сталкиваться с задачей поиска и выбора

элементной базы, схемных решений и вариантов структурного построения. Методы проектирования с применением САПР различного уровня и назначения являются наиболее перспективным направлением развития методов проектирования РЭС, позволяя снизить стоимость, сократить сроки проектирования, улучшить результаты. К подобным САПР относится программный комплекс RF Systems Designer. Программный комплекс разработан для решения задачи проектирования линейных трактов на системном уровне с возможностями схемного уровня. Основой программного комплекса является метод структурного синтеза, анализа и параметрической оптимизации линейных трактов [1].

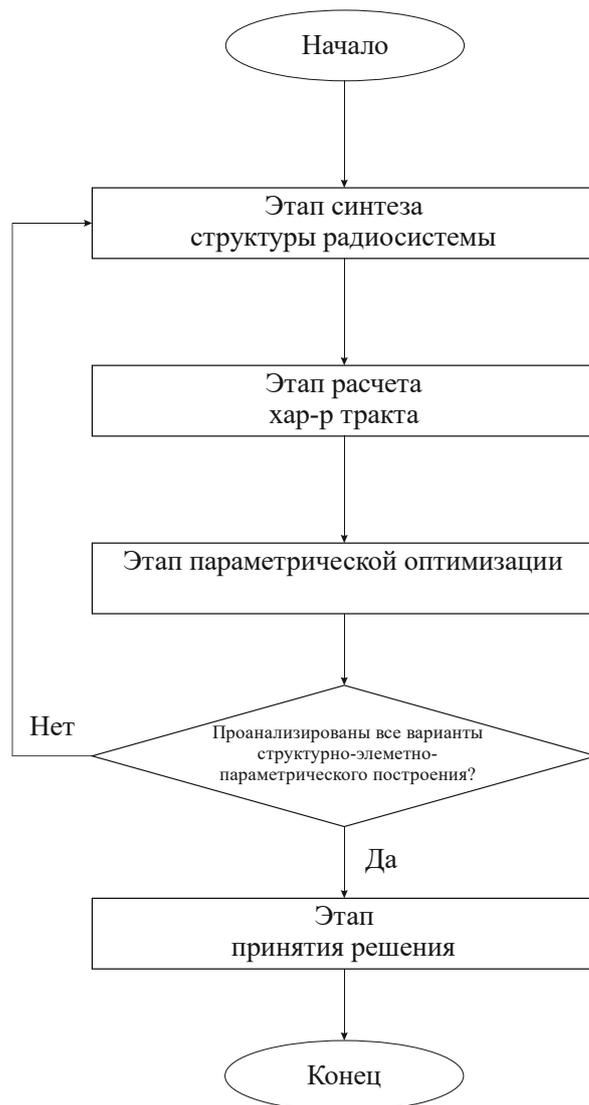


Рис. 1. Блок-схема алгоритма структурного синтеза, анализа и параметрической оптимизации линейных трактов

2. Системно-ориентированный комбинаторно-мультифакторный подход к проектированию

В работе [1] представлен алгоритм структурного синтеза, анализа и параметрической оптимизации линейных трактов, являющийся основой

системно-ориентированного комбинаторно-мультифакторного подхода к проектированию линейных трактов приемных и передающих радиоустройств. Блок-схема данного алгоритма представлена на рисунке 1. Подход к проектированию, отличающийся от метода эмпирического и интуитивного проектирования выработкой критерия оптимальности схемного и структурного облика радиотрактов с учетом комплекса предъявляемых к ним требований, позволяет уменьшить сроки проектирования, увеличить достоверность результатов моделирования и улучшить результаты проектирования. В соответствии с блок-схемой (рис. 1) основными этапами алгоритма являются:

- 1) этап синтеза структурной схемы линейного тракта;
- 2) этап расчета характеристик линейного тракта;
- 3) этап параметрической оптимизации и анализа линейного тракта;
- 4) этап принятия решения о структурно-элементном построении тракта.

Последовательное выполнение шагов алгоритма с применением методов теории параметрической и векторной оптимизации, теории СВЧ-техники и программирования представляет сущность системно-ориентированного комбинаторно-мультифакторного подхода и позволяет сформировать системотехнический метод структурного синтеза, анализа и параметрической оптимизации линейных трактов радиоприемных и радиопередающих устройств. Для повышения автоматизации проектирования представленным методом был разработан программный комплекс RF Systems Designer. Программа представлена онлайн-версией с бесплатным доступом [2]. Алгоритм работы программы представлен на рисунке 2, внешний интерфейс программы – на рисунке 3.

3. Описание работы программы на примере разработки структурной схемы линейного тракта радиопередающего устройства

В соответствии с представленной на рисунке 2 блок-схемой на первом шаге проектирования схемы пользователем определяется элементная база с указанием значений всех характеристик и их функциональных зависимостей. В качестве функциональных узлов в данной задаче будут применены элементы, перечисленные в таблице 1. Данная база может быть не ограничена в количестве элементов, однако для ускорения работы программы объем элементов, из которого производится автоматический синтез, адаптивен. Таким образом, даже при наличии большого количества неподходящих элементов в начальной базе структурных узлов тракта программа автоматически сформирует объем из элементов, потенциально подходящих для формирования структурной схемы линейного тракта на основе требований технического задания по частотному диапазону, току потребления.

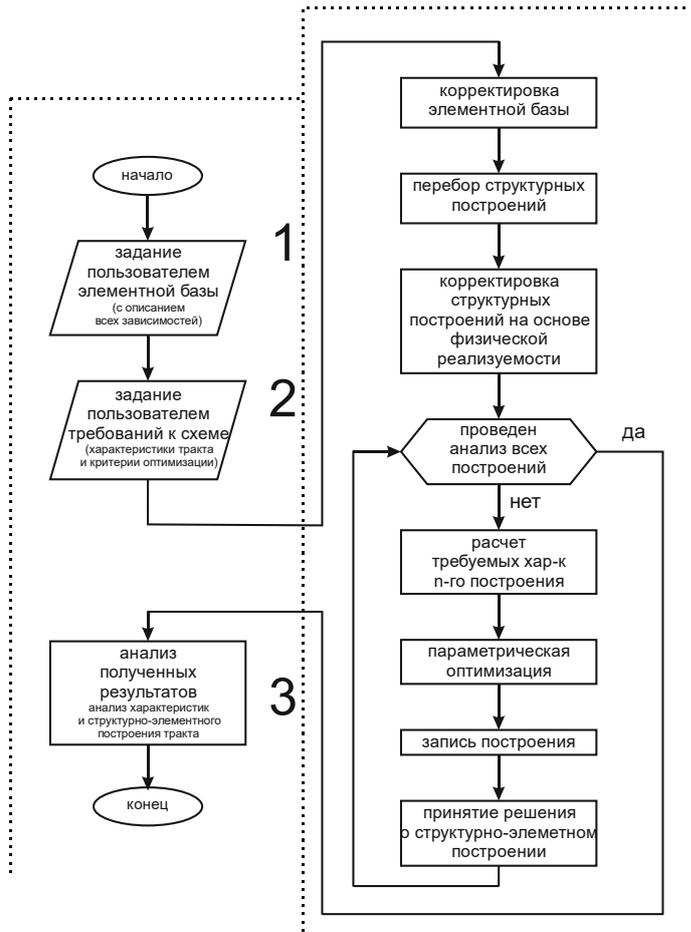


Рис. 2. Алгоритм работы программы RF Systems Designer

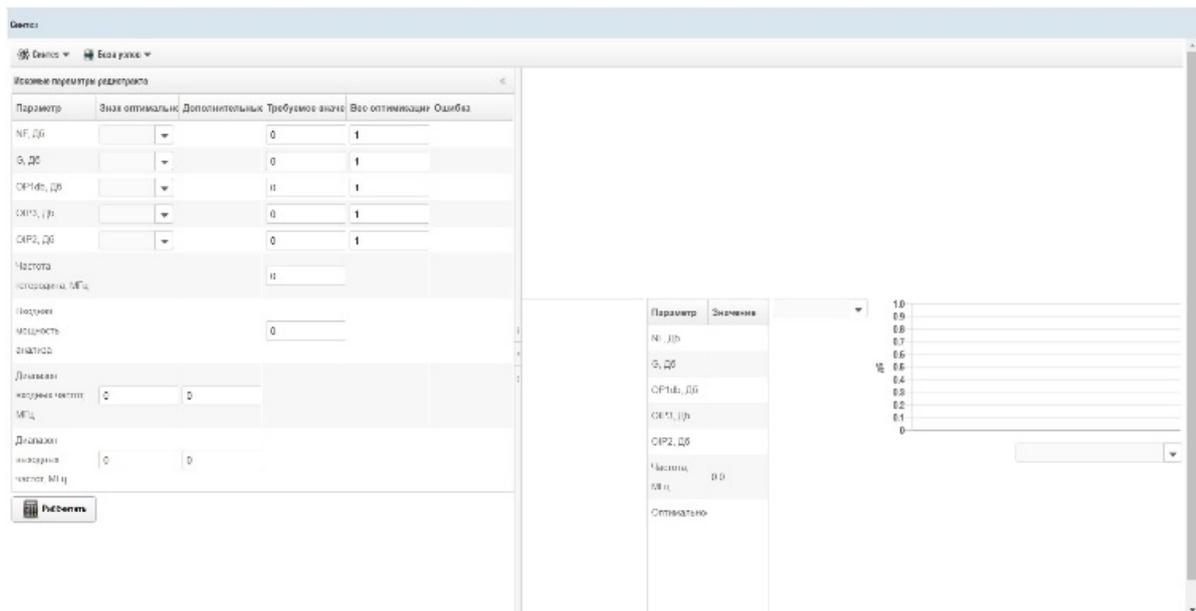


Рис. 3. Интерфейс программы RF Systems Designer

Таблица 1

Элемент	Параметр	Значение	Пределы	Температурный коэффициент
NBB-300	К, дБ	13	12,6 – 13,4	-0.015 дБ/°С
	OP _{1дБ} , дБм	13	12 – 14	-0.008 дБ/°С
	OIP ₃ , дБм	27	26 – 28	-0.0033 дБ/°С
	OIP ₂ , дБм	36	34 – 38	-0.0033 дБ/°С
	NF, дБ	5.1	4,4 – 5,7	0.008 дБ/°С
HMC8410	К, дБ	18	17,4 – 18,65	-0,01 дБ/°С
	OP _{1дБ} , дБм	21	20,5 – 21,5	-0,006 дБ/°С
	OIP ₃ , дБм	34	33 – 35	-0.013 дБ/°С
	OIP ₂ , дБм	44	43 - 45	-0.013 дБ/°С
HMC490LP5E	К, дБ	23	22,5 – 23,4	-0,004 дБ/°С
	OP _{1дБ} , дБм	27	26 – 27,5	0,013 дБ/°С
	OIP ₃ , дБм	34	33 – 34,5	0,013 дБ/°С
	OIP ₂ , дБм	43	42 – 44	0,013 дБ/°С
	NF, дБ	2,5	2,1 – 3,1	0,007 дБ/°С
BFCN-1262+	К, дБ	3,9	3,6 – 4,1	-0,0026 дБ/°С
	NF, дБ	3,9	3,6 – 4,1	-0,0026 дБ/°С
	S ₁₁	-22	-25 - -22	0.08 дБ/°С
	S ₂₂	-21	-26 - -21	0.08 дБ/°С
JID12K8T13K1VM1	К, дБ	0,45	3,6 – 4,1	-0,0026 дБ/°С
	NF, дБ	0,45	3,6 – 4,1	-0,0026 дБ/°С
	S ₁₁	-25	-27 – -24	0.013 дБ/°С
	S ₂₂	-26;	-27 – -25	0.013 дБ/°С
CMD157P3	К, дБ	26	27,6 – 24,5	-0.025 дБ/°С
	OP _{1дБ} , дБм	10,4	9,8 – 11	-0.008 дБ/°С
	OIP ₃ , дБм	22,25	22 – 22,5	-0.0033 дБ/°С
	OIP ₂ , дБм	32	32 – 32,5	-0.0033 дБ/°С
	NF, дБ	1,5	0,98 – 1,98	0.008 дБ/°С

Вторым шагом определяются требования к электрическим характеристикам схемы с указанием цели оптимизации и веса оптимизации характеристик. Указанные входные данные для текущего примера разработки приемного модуля представлены в таблице 2.

Таблица 2

Параметр	Обознач./ ед. изм.	Не менее	Не более	Приоритетность
Коэффициент усиления тракта	К, дБ	25.5	27.5	1
Однодецибелльная точка компрессии	OP _{1дБ} , дБм	22		2
Точка пересечения интермодуляций третьего порядка	OIP ₃ , дБм	32		3

Точка пересечения интермодуляций второго порядка	OIP2, дБм	40		4
Коэффициент шума тракта	NF, дБ	<	7	5
Ток потребления	I _{сум.} , мА		300	
Диапазон частот	f ₁ f ₂ , МГц	=	13000	

Далее по представленным входным данным программа выполняет синтез возможных структурных схем. Для этого корректируется элементная база с учетом предъявляемых требований и класса устройства – линейный тракт передающего устройства без преобразования частоты. Корректировка объема элементной базы наряду с ограничениями, накладываемыми на синтезируемую структурную схему по критериям физической реализуемости и целесообразности применения элементной базы и схемных решений, позволяет уменьшить объем требуемых вычислений, ускорить работу программы и сформировать корректные структурные схемы для дальнейшего анализа. После того, как были сформированы все возможные структурно-элементные построения, программой производится анализ и оптимизация каждой схемы. Расчетные соотношения для оценки результирующих характеристик тракта представлены в работах [3-7]. В качестве критериев оптимизации выступают коэффициенты приоритетности, заданные пользователем (табл. 2). На их основе формируется целевая функция оптимизации, которая оптимизируется комбинацией методов многопараметрической оптимизации. В программе используется комбинация метода Монте-Карло и метода покоординатного спуска.

Для принятия решения в данном программном комплексе используется комбинация методов векторной оптимизации – метода свертки критериев и метода последовательных уступок. Комбинация методов позволяет снизить вероятность появления в результатах работы программы нецелесообразного построения схемы, а также упростить выбор схемы и принятие решения об элементном, функциональном и структурном построениях схемы пользователем. Первичная оценка вариантов построения схемы осуществляется с помощью относительного нормированного значения характеристик (с помощью метода последовательных уступок), затем выбор уточняется с помощью абсолютного значения нормированных характеристик тракта (с помощью метода свертки критериев).

Последним шагом в алгоритме работы с программным комплексом (рис. 3) является анализ полученных результатов. Результатом работы программы является структурная схема и ее характеристики, которые выводятся в пользовательском интерфейсе (рис. 4, 5). Расчетные значения синтезированной схемы приведены в таблице 3.

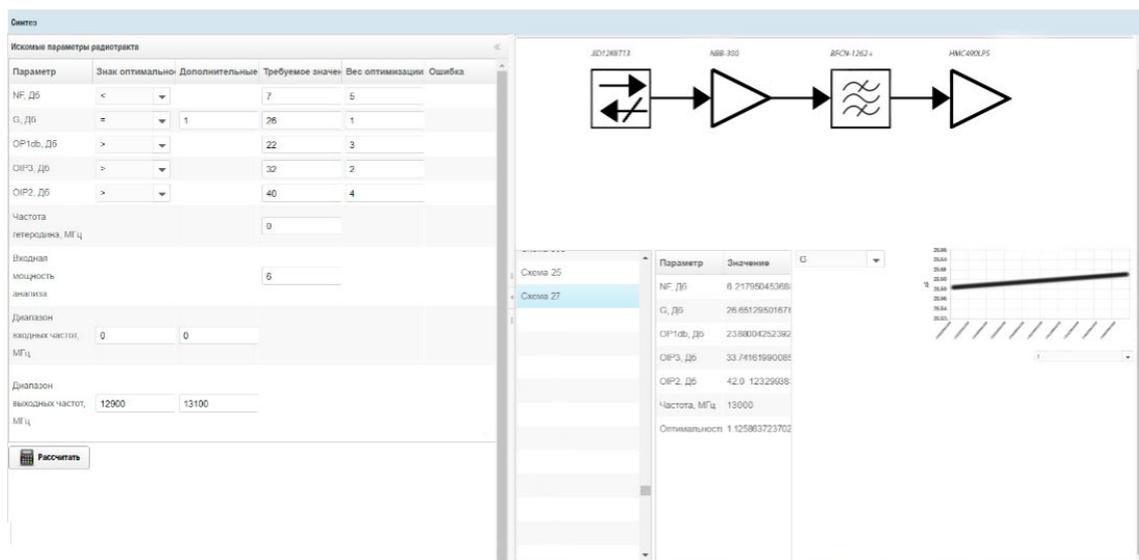


Рис. 4. Результат синтеза и анализа схемы в программе RFSystemsDesigner

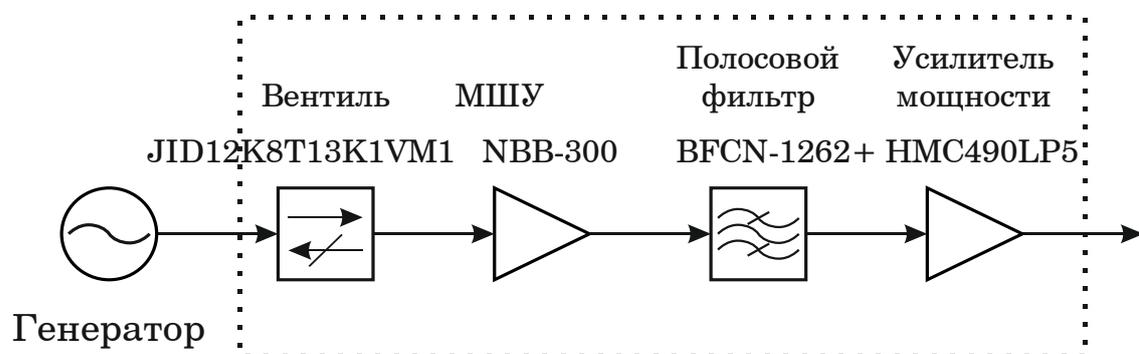


Рис. 5. Синтезированная структурная схема линейного тракта

Таблица 3

Схема	Параметр					
	К, дБ	OP ₁ дБ, дБм	OP ₃ , дБм	OP ₂ , дБм	I, мА	NF, дБ
Расчетные значения характеристик схемы	26,7	23,88	33,74	42,07	257	6,21

Заключение. Представленный в настоящей работе метод проектирования линейных трактов приемных и передающих радиоустройств с применением программного комплекса RF Systems Designer, основанный на системно-ориентированном комбинаторно-мультифакторном подходе, позволяет значительно упростить и оптимизировать по времени и получаемым результатам задачу разработки приемных и передающих устройств [8]. На представленном примере показано, что описываемый метод имеет практическую значимость и актуальность. В качестве отличительных особенностей программного комплекса RF Systems Designer можно выделить следующие.

1. Возможность автоматического синтеза схем. Данная функциональная возможность является наиболее существенной и важной

частью представленного алгоритма, поскольку такая опция не предусматривается ни в одной из современных, наиболее распространенных коммерческих САПР системного уровня проектирования. Возможность учета всех возможных структурных и элементных реализаций позволяет утверждать об оптимальности принимаемых решений, а также существенно упростить задачу составления структурной схемы, поскольку одновременное решение задачи определения структурного облика и элементного состава является сложным итеративным процессом.

2. Возможность многопараметрической оптимизации. В данной ситуации задача многокритериальной оптимизации сводится к поиску решения, наилучшим образом удовлетворяющего распределению ограниченных ресурсов между параметрами в соответствии с заданными значениями приоритетности характеристик тракта.

3. Возможность выбора схемы с помощью векторного критерия принятия решения. Реализация принятия решения о выборе структурного построения позволяет производить сравнение схем не только по электрическим параметрам, но и по любым нормируемым требованиям, например, по числу требуемых технологических операций, ресурсозатратности при изготовлении, стоимости элементной базы. Данная функциональная возможность особенно важна при практической реализации линейных трактов и составляет важную часть общего подхода к проектированию, представляя собой не только инструмент моделирования, но и являясь частью метода разработки линейных трактов приемных / передающих устройств.

4. Программа представляет не только возможность параметрической, но и элементной оптимизации. Так, при наличии автоматически обновляемой базы данных программой могут быть выданы рекомендации по замене тех или иных устройств в тракте на более подходящие аналоги, исходя из результата синтеза и анализа схемы.

5. Бесплатный онлайн доступ к программе RF Systems Designer также можно отнести к одному из преимуществ программы в современных условиях.

Литература

1. Вишняков Р.Р. Метод структурного синтеза линейных трактов приемных и передающих радиоустройств // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Т. 14. № 10. С. 4-16.

2. RF Systems Designer. Онлайн программа структурного синтеза, анализа и параметрической оптимизации линейных трактов радиоустройств / Р. Вишняков. URL: <https://rfsystemsdesigner.com/> (дата обращения 01.03.2021).

3. Caeiro N. J. M. The Receiver Analysis and Design from a System Point of View. Master's thesis. University of Lisbon. Lisbon, 2013. June.

4. Grebennikov A. RF and microwave transmitter design / Ed. K. Chang. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2011. P. 816.

5. Gu Q. RF system design of transceivers for wireless communications. NY.: Springer, USA. 2005. 479 p.
6. Friis H.T. Noise Figure of Radio Receivers // H.T. Friis H.T. Proc. IRE. 1944. July. Vol. 32, P. 419-422.
7. Maas S.A. Third-Order Intermodulation Distortion in Cascaded Stages // S. A. Maas. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol. 5, No. 6, June. P. 189–191.
8. Вишняков Р.Р. Проектирование приемного СВЧ-модуля // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Т. 14. №5. С. 35-45.

R.R. Vishnyakov
Russian Technological University MIREA

DESIGN OF THE RF BLOCK SCHEME OF A TRANSMITTING MODULE USING THE RF SYSTEMS DESIGNER SOFTWARE

Keywords: *RF part, transmitter, program, RF designing, simulating.*

Abstract. *The article is devoted to consider developed by the author the RF Systems Designer software using as example the solution of the RF part of transmitter designing. The above mentioned RF Systems Designer software allows automatically systemizing and optimizing of RF blockschemes of radio transmitting devices. The program also allows to select the optimal RF block scheme for a given type of the optimization function. The program's operating is considered, which is based on a system-oriented multifactor approach to design. A distinguishing feature of this approach is the combination of the possibilities of both scheme and system levels designing of the RF block schemes.*

Н.А. Ворожцова, С.В. Вологдин
*Ижевский государственный технический университет
им. М.Т. Калашникова*

УДК 004.932

ПРИМЕНЕНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССА РАСПОЗНАВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ НА ФОТОИЗОБРАЖЕНИЯХ ПРИБОРОВ УЧЕТА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ¹

Ключевые слова: *обработка изображений, распознавание образов, машинное обучение, интеллектуальная информационная система.*

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова» № БГА/20-28-09, РФФИ в рамках научного проекта 19-011-00761 А.

В статье рассмотрен алгоритм работы программной системы, предназначенной для распознавания фотографий лицевых панелей приборов учета электроэнергии. В настоящее время существует множество методов и алгоритмов распознавания объектов на изображении. В связи с этим возникает необходимость выбора методов и алгоритмов, соответствующих особенностям объекта распознавания. Результатом применения разработанного алгоритма будет являться файл с распознанными показаниями прибора учета. Программная система разрабатывается с целью устранения проблем, возникающих при ручном вводе данных показаний приборов учета электроэнергии. Система состоит из двух подсистем: подсистема обучения нейронной сети и подсистема распознавания показаний приборов учета. Подсистема обучения нейронной сети основана на детекторе Хаара, что позволяет добиться быстрой обработки изображений с использованием библиотеки OpenCV.

1. Введение. ПАО «МРСК Центра и Приволжья» (филиал «Удмуртэнерго») совместно с ИжГТУ им. М.Т. Калашникова планируют к разработке программно-аппаратный комплекс распознавания состояния и показаний приборов учета электроэнергии на основе алгоритмов искусственного интеллекта. В рамках разработки программно-аппаратного комплекса распознавания состояния и показаний приборов учета предполагается разработать инструмент, позволяющий максимально автоматизировать процесс сбора показаний и оценки состояния приборов учета за счет применения технологий компьютерного зрения.

Актуальность темы исследования была выявлена в ходе анализа бизнес-процессов, направленных на детальный мониторинг и учет электроэнергии. Необходимой ежемесячной процедурой является снятие показаний с приборов учета и дальнейшая передача показаний поставщику электроэнергии. Далее сотрудники энергосбытовой компании заносят показания в базу данных. Энергосбытовая компания, получив данные потребителя, высчитывает по определенному тарифу стоимость потраченной электроэнергии и уведомляет потребителя об этом, присылая ему квитанцию об оплате [1]. Автоматизация позволит уменьшить количество бумажного носителя информации. Также будет исключен человеческий фактор, что позволит увеличить точность рассчитываемого потребления энергии, и, следовательно, будет достигнута недопустимость внештатных ситуаций.

2. Программная система распознавания фотографий лицевых панелей приборов учета электроэнергии. Алгоритм детектирования объектов на основе сверточных нейронных сетей по изображению производит идентификацию границы обрамляющего четырехугольника и

классификацию каждого из следующих типов объектов – тип ПУ, номер ПУ, показания ПУ, вид тарифа (у многотарифных ПУ), контрольные пломбы, капсулы с магниточувствительной суспензией.

Ставится задача, чтобы алгоритмы детектирования имели среднюю точность детектирования:

- не менее 95% – для ПУ;
- не менее 90% – для показаний ПУ;
- не менее 80% – для контрольной пломбы и капсулы с магниточувствительной суспензией.

Одним из объектов информации, из которых можно извлекать данные о показаниях приборов учета, является фотография лицевой панели прибора [2]. При использовании фотографии как источника информации встает вопрос об извлечении данных, непосредственно находящихся на изображении. Предварительно на фотографии выделяются области для распознавания (см. рис. 1).

Для этого необходимо использовать методы обработки, то есть распознавание образов. Задача распознавания информации на изображении относится к типу когнитивных задач, свойственных человеческому мозгу, для ее решения необходимо составить систему искусственного интеллекта. Такая система должна решать задачи формирования и накопления знаний, применения этих знаний для решения задач, накопления новых знаний по мере решения задач. Для этого необходимо реализовать функции обучения, представления и рассуждения.



Рис. 1. Выделение объектов для распознавания (пломба, модель, показание, серийный номер, пломба, пломба АМ)

Для решения задачи нахождения показаний на фотографиях приборов учета электроэнергии необходимо разработать программную систему преобразования изображений в текст.

На ранее проанализированных примерах для распознавания показаний приборов учёта электроэнергии стало понятно, что необходимо использовать классические методы распознавания образов с

целью улучшения качества фотографии. Для ускорения разработки подобных алгоритмов существуют готовые библиотеки. Одним из самых популярных и удобных в использовании средств по распознаванию образов является библиотека OpenCV [3]. В качестве признаков, характеризующих объекты, используются признаки, основанные на вейвлетах Хаара [4].

В ходе моделирования процессов разрабатывается комплекс для улучшения качества распознавания. На рисунке 2 продемонстрирована схема процессов, участвующих в обучении новым типам счётчиков.

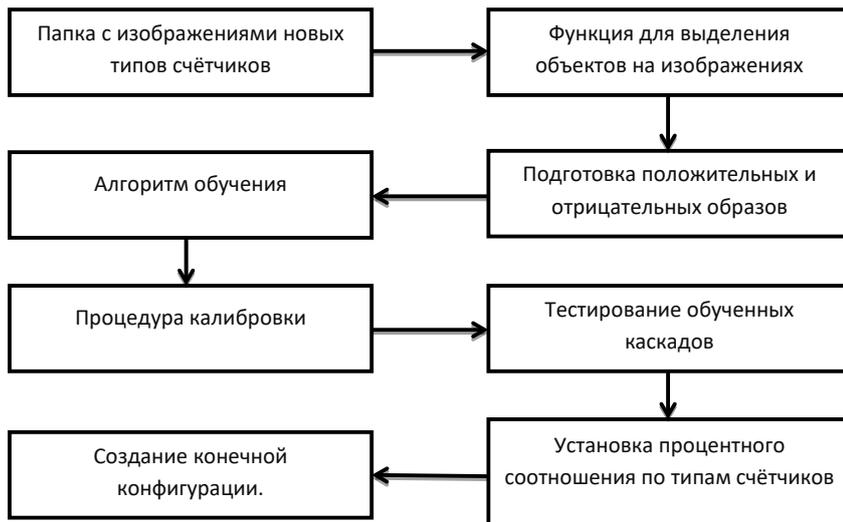


Рис. 2. Схема последовательности выполнения вычислительных процессов

Для решения поставленной задачи были выбраны библиотеки Tesseract [5] и OpenCV. В частности, Tesseract используется для распознавания модели прибора учета, серийного номера, а OpenCV для распознавания показаний. Кроме того, использование библиотеки OpenCV позволит в дальнейшем разработать мобильное приложение для Android.



а)



б)

Рис. 3. а) интерфейс программы, б) обработанная часть изображения с показаниями прибора учета

На рисунке 3а продемонстрирован интерфейс разработанной программы [6] с загруженной фотографией прибора учета, а на рисунке

3б показан результат выполнения операции выделения показаний на фотографии. Работа библиотеки показала высокую эффективность распознавания черного текста на белом фоне, соответственно, был разработан и применен алгоритм преобразования изображения в черно-белое.

3. Заключение. В процессе исследования темы распознавания образов были выделены более эффективные методы и алгоритмы и разработана программная система, состоящая из двух подсистем. Подсистема распознавания показаний позволяет загрузить изображение с компьютера для предварительного просмотра, далее подсистема по команде пользователя обрабатывает изображение, исключая лишние элементы на изображении и переводя его в черно-белый вид. После проведения обработки уже можно приступить непосредственно к распознаванию показаний счетчика. В статье приведен пример работы разрабатываемой программной системы.

Литература

1. Консультант Плюс. URL: <http://www.consultant.ru> / (дата обращения 21.12.2020).
2. Вологдин С.В., Бусыгин Е.К., Шушков И.Д., Рябов П.И., Брицын К.В. Выделение показания прибора учёта электроэнергии методом Виолы-Джонса с помощью библиотеки OPENCVSHARP // Наука и инновации в XXI веке: актуальные вопросы, достижения и тенденции развития. 2016. С. 21-24.
3. Basic thresholding operations. URL: <https://docs.opencv.org/2.4.6/doc/tutorials/imgproc/threshold/threshold.html> (дата обращения 15.01. 2021).
4. Аналитические технологии. URL: <https://basegroup.ru/community/articles/intro-wavelets> (дата обращения 15.01. 2021).
5. Tessnet2 a .NET 2.0. URL: <http://pixel-technology.com> (дата обращения: 20.01.2021).
6. Vorozhtsova N., Shushkov I., Vologdin S. System approach to development of intellectual information mobile system for electric power metering // E3S WEB OF CONFERENCES. electronic edition. 2019. 114. С. 01004.

N.A. Vorozhtsova, S.V. Vologdin

Kalashnikov Izhevsk State Technical University

APPLICATION OF MACHINE LEARNING FOR AUTOMATION OF THE PROCESS OF IMAGE SCRAPING OF ELECTRICITY METERING DEVICES

Keywords: *image processing, pattern recognition, machine learning, intelligent information system.*

Abstract. *The article investigates the operation performances of the developed software system designed to recognize photographs of the front panels of electricity metering devices. Currently, there are many mediums,*

methods and algorithms for objects recognition in an image. In this regard, it becomes necessary to select the convenient methods and algorithms that correspond to the characteristics of the object recognized. The result of applying these methods and algorithms on the application level will be a file with the recognized data fetched from the metering device panel. The software system is being developed in order to eliminate the problems arising from the manual fill in of data from the electricity metering devices. The system consists of two subsystems: a neural network training subsystem and a meter reading recognition subsystem. The neural network training subsystem is based on the Haar detector, which allows for fast image processing using the OpenCV library.

К.А. Кравченко, Г. А. Благодатский, А. Н. Копысов
*Ижевский государственный технический университет
им. М.Т. Калашникова*

УДК: 004.623; 621.371

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА КОНСОЛИДАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРТИЗ ПО МАИ²

Ключевые слова: консолидация, базы данных иерархических параметров, визуализация, усреднение, АНР, запросы, массив, локальный вес, среднее значение, иерархия, экспертиза.

В статье приведен метод автоматизации процесса консолидации баз данных иерархических экспертиз и визуализации результирующих мнений о параметрах системы когнитивного радио. Приведена постановка задачи на автоматизацию процесса консолидации и визуализации. Приведен алгоритм решения этих задач. В ходе работы были решены задачи снижения трудоемкости и повышения надежности объединения экспертных мнений в иерархических экспертизах о параметрах системы когнитивного радио, путем автоматизации процесса консолидации и визуализации результатов в виде настольного приложения.

Введение. Цель исследования состоит в том, чтобы создать модель системы когнитивного радио, т.е. модель, способную получать информацию о среде своей эксплуатации, о географическом положении и реагировать на эту информацию [1; 2]. Решение этой задачи включает в

² Работа выполнена в рамках гранта ФГБОУ ВО «ИжГТУ им. М.Т. Калашникова» БГА/20-28-09.

себя построение иерархической модели, где радиоэлементы оцениваются экспертами по системе Т. Саати [1] совместно с механизмом их применения. Однако, на этапе усреднения локальных весов, которые были рассчитаны экспертами, возникли проблемы, связанные с неправильно подставленными значениями. Возникла задача о автоматизации процесса визуализации, с которым экспертам будет проще работать, так как основные расчёты производятся программой. Для решения данной задачи был предложен алгоритм, приведённый ниже.

Постановка задачи. Имеется база данных со специальной системой присваивания идентификационных ключей по древовидной системе, где имеются поля (id_node, id_parent, id_h, id_e, local_weight).

Таблица 1

Реляционное представление таблицы [Hierarchy]

1. Id_node	2. Id_parent	3. Id_e	4. Id_h	5. Local_weight
6. Корень иерархии	7. null	8. 8	9.	10. 1
11. Родитель 1	12. Корень иерархии	13. 1	14. 120	15. 0,01
16. Элемент 1	17. Родитель 2	18. 2	19. 120	20. 0,6
21. Элемент 2	22. Элемент 1	23. 3	24. 120	25. 0,7
26. Родитель 2	27. Корень иерархии	28. 1	29. 121	30. 0,08
31. Элемент 3	32. Родитель 2	33. 2	34. 121	35. 0,1
36. Элемент 4	37. Элемент 3	38. 3	39. 121	40. 0,2

Таблица 2

Реляционное представление таблицы [Variants]

41. Id_h	42. Name_rez	43. Name_Expert
44. 120	45. 1	46. К
47. 121	48. 2	49. N

Задача заключается в том, чтобы из данной таблицы выбрать local_weight идентичных элементов из разных иерархий и усреднить их по методам, приведённым ниже.

Методы усреднения

1) среднегеометрический метод. Основан на принципе получения среднегеометрического значения, то есть число, которым можно заменить любое число и произведение не изменится. Данный метод используется в программе, так как позволяет определить более точное усреднённое значение локальных весов, данных экспертами.

$$F = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}; \quad (1)$$

2) среднеарифметический метод, то есть сумма всех чисел, делённая на их количество:

$$F = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (2)$$

Этот метод в данной программе не используется.

Проблема, которая возникла, когда проводилась выборка данных из массива информации. В ходе разработки программы необходимо решить задачу «кратных» элементов иерархии. Было принято решение построить интерактивную иерархию в памяти ЭВМ. Для обрабатываемого элемента иерархии формируется цепочка (последовательность) ключей типов родительских элементов. Это позволило отслеживать позицию элемента в иерархии и усреднять между собой только веса тех элементов, последовательность ключей типов родительских элементов для которых является идентичной.

В ходе решения поставленной задачи в таблицу с иерархической структурой показателей добавлен новый атрибут, который несёт в себе информацию об идентификации эксперта. Это позволило снизить сложность алгоритма выборки локальных весов из массива данных.

Алгоритм программы для выборки и визуализации данных экспертизы. Подходя к сути, появляется вопрос: как выбрать и визуализировать данные? Для этого потребуется среда разработки MSVS 17, Access, язык C# и язык запросов SQL.

1) В диалоговом окне пользователем выбирается из CheckListBox'ов информация (Какой элемент, какой номер режима, какое имя эксперта, массив режимов иерархий) и записывается в массивы: ElMass (массив элементов), mass (массив номеров иерархии), ExMass (массив имён экспертов), massHier (массив режимов иерархий).

2) Далее начинается программная работа приложения. Создаётся цикл for (переменная i2), который перебирает массив элементов, а в нём создаются два вложенных цикла, один из которых перебирает массив номеров режимов (переменная i0), а другой цикл перебирает массив имён экспертов (переменная i).

3) После начинается прохождение циклов. И первым делом строится интерактивная иерархия, то есть находится промежуточный элемент. Для этого запросом SELECT № 1 из таблицы [Variants] выбирается режим иерархии, где номер режима = mass [i0], имя эксперта = ExMss [i]. Значение записывается в переменную U1.

4) Запросом SELECT № 2 выбирается id_parent из таблицы [Hierarchy], у которого id_h (режим иерархии) = U1, id_e (элемент) = ElMass [i2]. Значение записывается в переменную U2.

5) Запросом SELECT № 3 из таблицы [Hierarchy] находится id_e, у которого id_node (идентификатор потомка) = U2. Был найден промежуточный элемент (U3) в дереве иерархии, то есть имеется возможность для построения интерактивной модели.

6) Пункты 3, 4, 5 больше не повторяются в цикле. Так как эталонная (интерактивная) схема иерархии у всех элементов одна.

7) Далее в циклах запросом SELECT № 4 из таблицы [Hierarchy] выбирается id_node, где id_h = massHier[i], id_e = U3. Значение записывается в переменную U4.

8) Последним запросом SELECT № 5 из таблицы [Hierarchy] находится id_node, у которого id_p = U4, id_e = ElMass [i2]. Полученное значение записывается в переменную dfr (для визуализации в таблице) и умножается на, изначально равную 1, dfr_sq (для нахождения среднегеометрического значения).

9) цикл, который перебирает массив имён экспертов, заканчивается командой break, но предварительно переменная его счётчика i увеличивается на единицу. Это было сделано для упрощения работы с выборкой значений.

10) В цикле, который перебирает номера режимов иерархий, последним действием будет запись переменной dfr в график. Далее цикл начинает перебирать следующий номер режима.

11) После перебора всех номеров режимов по одному элементу, находится среднегеометрическое значение одного элемента, по всем выбранным иерархиям и записывается в новое поле («среднегеометрическое»). Начинается перебор цикла по следующему элементу.

Ниже продемонстрирована таблица, и цветом отмечены запросы, которые выносят определённые значения:

Таблица 3

Представление запросов из таблицы [Hierarchy]

50. Id_node	51. Id_parent	52. Id_e	53. Id_h	54. Local_weight
55. Корень иерархии	56. null	57. 8	58.	59. 1
60. Родитель 1	61. Корень иерархии	62. 1	63. 120	64. 0,01
65. Элемент 1	66. Родитель 2	67. 2	68. 120	69. 0,6
70. Элемент 2	71. Элемент 1	72. 3	73. 120	74. 0,7
75. Родитель 2	76. Корень иерархии	77. 1	78. 121	79. 0,08
80. Элемент 3	81. Родитель 2	82. 2	83. 121	84. 0,1
85. Элемент 4	86. Элемент 3	87. 3	88. 121	89. 0,2

Таблица 4

Представление запросов из таблицы [Variants]

90. Id_h	91. Name_rez	92. Name_Expert
93. 120	94. 1	95. К
96. 121	97. 2	98. N

Запрос № 1, Запрос № 2, Запрос № 3, Запрос № 4, Запрос № 5.

Визуализация результата. В таблицу записываются программно полученные веса показателя. На графике показывается динамика среднегеометрического значения. В CheckListBox'ах справа можно выбирать элементы (сверху) и иерархии (снизу), интересующие эксперта.

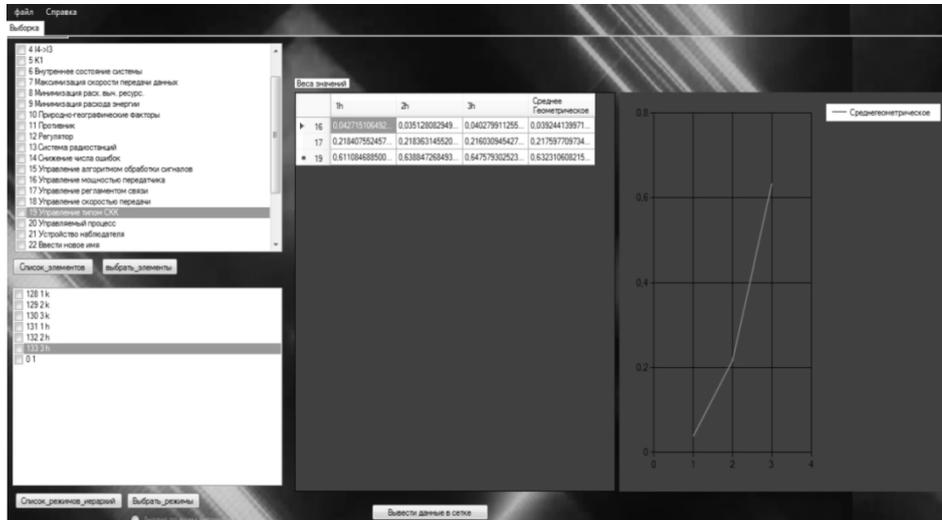


Рис. 1. Программа для визуализации

Заключение. В результате работы решена задача расчета единого мнения по группе экспертов при анализе параметров в системе когнитивного радио. Разработан инструмент для автоматизации процессов визуализации и консолидированных данных экспертиз. Инструмент позволяет решить ряд задач:

- 1) увеличение продуктивности работы экспертов. Результаты суждений экспертов по параметрам системы когнитивного радио обрабатываются автоматически. Эксперту доступна визуализация результата его решения в режиме ONLINE. Эксперт может произвести оценку и коррекцию своих суждений за меньшее время в сравнении со временем, затрачиваемым экспертом без применения программы;
- 2) исключение случайных ошибок при объединении данных (уменьшение влияния «человеческого фактора»). Программа выбирает и рассчитывает веса элементов по методу решающих матриц, поэтому эксперт не может допустить ошибку в расчётах;
- 3) визуализация результатов экспертизы. Графическое представление результатов обработки мнений позволяет визуально оценить границы изменения влияния параметров системы когнитивного радио и сравнить с результирующим мнением, полученным по методу (1).

Литература

1. Благодатский Г.А., Копысов А.Н., Хворенков В. В., Батулин И.С. Анализ иерархической модели автоматизированной системы управления параметрами радиолиний когнитивной радиосистемы. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36776104>.
2. Уэлдон, Дж.-Л. Администрирование баз данных. М.: Финансы и статистика, 1984. 207 с.

3. Яргер Р.Дж., Риз Дж., Кинг Т. MySQL и mSQL: Базы данных для небольших предприятий и Интернета. М.: СПб: Символ-Плюс, 2000. 560 с.
4. Абрамян М. Visual C# на примерах. М.: БХВ-Петербург, 2016. 436 с.
5. Албахари Джозеф, Бен Албахари. C# 3.0. Справочник М.: БХВ-Петербург, 2015. 499 с.
6. Вагнер Билл. C# Эффективное программирование. М.: ЛОРИ, 2017. 320 с.
7. Гросс Кристиан. C# 2008 и платформа .NET 3.5 Framework. М.: Вильямс, 2016. 480 с.
8. Дейтел П. Как программировать на Visual C# 2012. М.: Питер, 2016. 312 с.
9. Зиборов В.В. Visual C# 2012 на примерах. М.: БХВ-Петербург, 2015. 480 с.
10. Кариев Ч.А. Разработка Windows-приложений на основе Visual C# (+ CD-ROM). М.: Интернет-университет информационных технологий, Бином. Лаборатория знаний, 2015. 501 с.
11. Культин Никита. Основы программирования в Microsoft Visual C# 2010. М.: БХВ-Петербург, 2017. 389 с.
12. Джейсон Прайс, Майк Гандэрлой. Visual C# 2.0. Полное руководство. М.: Век +, Корона-Век, Энтроп, 2015. 569 с.
13. Роу Сандара. Геометрические упражнения с куском бумаги. 2-е изд. Одесса: Матезис, 1923.
14. Благодатский Г.А., Копысов А.Н., Хворенков В.В., Батулин И.С. Алгоритм управления режимами работы системы когнитивного радио. URL: [https://www.elibrary.ru/item.asp?id=\(\)41503553](https://www.elibrary.ru/item.asp?id=()41503553).
15. Кравченко К.А., Благодатский Г.А., Копысов А.Н. Разработка схемы и автоматизация консолидации баз данных, включающих алгоритм эффективного управления системой когнитивного радио // Информационные технологии в науке, промышленности и образовании. Ижевск, 2020.
16. Blagodatsky G.A, Kopysov A.N., Khvorenkov V.V., Baturin I.S. Research and development of hierarchical models of automated control systems for the parameters of the radio-line of the cognitive radio system. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41505351>.

K.A. Kravchenko, G.A. Blagodatsky, A.N. Kopysov
Izhevsk State Technical University

AUTOMATION OF THE PROCESS OF CONSOLIDATION OF THE RESULTS OF EXAMINATIONS FOR MAY

Keywords: *consolidation, hierarchical parameter databases, visualization, averaging, ARP, queries, array, local weight, average, hierarchy, expertise.*

Abstract. *The article presents a method for automating the process of consolidating databases of hierarchical expertise and visualizing the resulting opinions about the parameters of the cognitive radio system. The problem statement for automating the consolidation and visualization process is given. An algorithm for solving these problems is given. In the course of the work, the tasks of reducing the complexity and increasing the reliability of combining expert opinions in hierarchical examinations on the parameters of the*

cognitive radio system were solved by automating the consolidation process and visualizing the results in the form of a desktop application.

В.Р. Кристалинский

Смоленский государственный университет

В.Н. Борисов

ВА ВПВО ВС РФ

УДК 519.688

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ В СИСТЕМЕ WOLFRAM MATHEMATICA

Ключевые слова: *система Wolfram Mathematica, задачи классификации, радиолокационный дальностный портрет.*

Данная работа посвящена решению задач классификации в системе Wolfram Mathematica. В настоящее время развитие многих систем компьютерной математики включает в себя возможности реализации в этих системах алгоритмов машинного обучения. Необходимость в этом вызвана большим количеством прикладных областей, в которых требуется использование этих алгоритмов и широкое распространение систем компьютерной математики как средства проведения фундаментальных и прикладных исследований. В частности, алгоритмы машинного обучения реализованы в системе Wolfram Mathematica. В статье приведены примеры решения соответствующих задач в системе Mathematica и показаны возможности ее использования при решении этих задач на практике и в учебном процессе гражданских и военных вузов. В частности, рассмотрено применение системы Mathematica к решению задачи распознавания воздушной цели по ее радиолокационному дальностному портрету.

Как известно, под классификацией понимается задача отнесения входящих данных к одному из чётко выделенных классов. Эта задача возникает в бизнес-аналитике при распознавании образов, при обработке результатов экспериментальных исследований и социологических опросов. Ввиду широкого распространения таких задач очевидна необходимость их решения при обучении студентов гражданских и военных вузов, причем при этом желательно использовать ранее хорошо известные им вычислительные средства. То же самое относится и к решению задач классификации в научных исследованиях и при решении различных прикладных задач.

При программировании задач классификации и распознавания образов обычно используются библиотеки, являющиеся расширениями языков программирования (например, библиотека Accord, являющаяся расширением языка C#). Однако использование этих библиотек требует достаточно глубоких знаний языков и технологий программирования, что затрудняет их использование пользователями, не являющимися профессиональными программистами. Таким образом, возникает противоречие между необходимостью решения в ходе научных исследований и при обучении студентов и курсантов задач классификации и распознавания образов и высоким уровнем входа для решения этих задач средствами известных языков программирования. Одним из путей разрешения этого противоречия, в особенности для случаев, когда число классов относительно невелико, является использование систем компьютерной математики, в частности, системы Wolfram Mathematica.

В последних версиях системы Wolfram Mathematica имеются средства решения задачи классификации на основе формирования тренировочного множества и последующего построения классификатора. Особенно эффективным является использование данных возможностей для распознавания графических образов. Метод построения классификатора выбирается системой автоматически, исходя из характеристик данных.

Рассмотрим вначале пример распознавания системой типа автомобиля по его изображению. Эта задача относится к числу задач, для которых использование системы Mathematica эффективно, поскольку число классов относительно невелико.

Пусть построено тренировочное множество, содержащее несколько изображений «ВАЗ-2101» и «Шевроле-Нива».



Создаем классификатор

`c = Classify [trainingset].`

Далее осуществим классификацию нового объекта и найдем вероятности принадлежности этого объекта к выбранным классам.



Таким образом, система правильно классифицировала образ, причем вероятность его отнесения к правильному классу оказалась равной единице при обучающем множестве, содержащем всего лишь по три элемента каждого класса. При этом на построение классификатора было затрачено около 2 с, на распознавание нового образа – около 0,14 с.

В практике войсковой ПВО встречается ряд задач, связанных с необходимостью распознавания образов. Одной из таких задач является распознавание воздушных целей по их радиолокационным дальностным портретам. Решению этой задачи посвящен целый ряд работ (см. например, [1; 2]). Число возможных классов, к одному из которых должен быть отнесен портрет (число типов воздушных целей) также относительно небольшое. Поэтому для решения этой задачи как при обучении курсантов, так и на практике могут использоваться возможности системы Mathematica.

Радиолокационный дальностный портрет воздушной цели (см. например, [2]), формируемый в виде одномерного пространственного распределения интенсивности поля обратного рассеяния электромагнитной волны в сантиметровом или миллиметровом диапазонах длин волн, позволяет получить информацию не только о длине, но и о форме протяженной цели. Использование таких портретов для распознавания воздушных целей связано с тем, что переотраженный сигнал от различных точек на поверхности воздушной цели состоит из ряда дискретных сигналов, не перекрывающихся во времени. Расположение таких сигналов на временной оси и их количество устойчиво и соответствует геометрической форме облучаемого объекта и его ракурсу относительно РЛС. Это образ цели, который содержит в себе информацию об ее индивидуальных характеристиках цели и может служить для распознавания. Радиолокационные дальностные портреты

собирают опытным путем, собирают в специальные базы данных. Они играют основную роль в распознавании воздушных целей, несмотря на ряд недостатков, присущих этому методу (в частности, его высокую чувствительность к помехам). При реализации этого метода естественным образом возникает задача отнесения полученного портрета воздушной цели к одному из известных классов, поскольку этот портрет может быть во-первых, сильно искажен помехами, а во-вторых, цель может находиться под ракурсом, под которым ее образ отсутствует в имеющейся библиотеке. Первые публикации, посвященные распознаванию воздушных целей с помощью их радиолокационных дальностных портретов, появились в 60-е годы XX века. Однако подход к решению этой проблемы, связанный с использованием технологий искусственного интеллекта начал развиваться лишь в последние годы (см., например, [1]).

Применим к дальностным портретам, рассматриваемым в [3], алгоритм классификации графических образов, реализованный в системе Mathematica. В качестве тренировочного множества для алгоритма классификации возьмем дальностные портреты самолетов Б-52 и Ту-16 для близких условий наблюдения (курсовой угол $\gamma = 5,45^\circ$).



Запускаем построение функции-классификатора

`c = Classify [trainingset].`

Применим эту функцию к дальностному портрету неизвестной воздушной цели (курсовой угол $\gamma = 6^\circ$).



Ту-16

Результат совпал с результатом, приведенным в [4]. Таким образом, можно эффективно использовать систему Mathematica для распознавания воздушных целей по их радиолокационным дальностным портретам. Эту возможность можно использовать как при ознакомлении курсантов с современными алгоритмами распознавания образов при изучении ими

соответствующих дисциплин, так и на практике при распознавании реальных воздушных целей. Обучение курсантов основам искусственного интеллекта будет, очевидно, значительно более эффективным, если на занятиях будут рассматриваться реальные задачи военно-прикладного характера.

Включение в состав систем компьютерной математики алгоритмов машинного обучения – новый шаг в их развитии. Это дает возможность применять эти системы при проведении научных исследований, связанных с необходимостью распознавания образов в случае, если коллектив исследователей хорошо знаком с системой Mathematica. Таким образом, система Wolfram Mathematica становится еще более полезным инструментом в науке, образовании и при решении прикладных задач в различных областях.

Литература

1. Филимонов А. Б., Кыонг Ф. Ф. Динамическое распознавание воздушных целей по радиолокационным дальностным портретам // INFORMATION TECHNOLOGIES. 2016. Т. 22, №. 6. С. 423.
2. Небабин В.Г., Сергеев В.В. Методы и техника радиолокационного распознавания. М.: Радио и связь. 1984. 152 с.
3. Орленко В.М., Ширман Я.Д. Нейрокомпьютерное распознавание радиолокационных целей с учетом мешающих факторов // Радиолокация и радиометрия. 2000. № 2. Вып. III. – С. 82–85.
4. Кыонг Фам Фыонг. Анализ и идентификация радиолокационных дальностных портретов воздушных целей на основе технологий вычислительного интеллекта: дис. ...канд. тех. наук. М., 2017. 146 с.

V.R. Kristalinskiy

Smolensk State University

V.N. Borisov

Military Academy of the anti-aircraft defense systems of the Armed Forces of the Russian Federation

ON THE SOLVING CLASSIFICATION PROBLEMS IN THE WOLFRAM MATHEMATICA SYSTEM

Keywords: *Wolfram Mathematica system, classification problems, radar range portrait.*

Abstract. *This paper is devoted to solving classification problems in the Wolfram Mathematica system. Currently, the development of many computer mathematics systems includes the possibility of implementing machine learning*

algorithms in these systems. The need for this is caused by a large number of applied areas in which the use of these algorithms is required and the widespread use of computer mathematics systems as a means of conducting fundamental and applied research. In particular, machine learning algorithms are implemented in the Wolfram Mathematica system. The article provides examples of solving the corresponding problems in the Mathematica system and shows the possibilities of its use in solving these problems in practice and in the educational process of civil and military universities. In particular, the application of the Mathematica system to solving the problem of recognizing an air target by its radar range portrait is considered.

В.Ю. Медведева, Е.А. Ровба

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы

УДК 519.65

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ
РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ $|x|^\alpha$
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПОЛИНОМАМИ
ПО УЗЛАМ ЧЕБЫШЕВА**

Ключевые слова: *интерполирование, численная проверка результатов, система компьютерной математики Maple.*

В статье приведены две теоремы, относящиеся к рациональной интерполяции функции $|x|^\alpha$ по узлам Чебышева–Маркова первого и второго рода. Приведена численная иллюстрация полученных результатов в полиномиальном случае средствами универсальной математической системы Maple.

В теории интерполирования представляет интерес реализация полученных результатов с помощью специальных систем компьютерной математики и визуализация численных экспериментов.

В настоящее время существуют различные средства компьютерной математики, которые обеспечивают максимально комфортную и быструю подготовку алгоритмов и программ для решения математических задач любой сложности, при этом с высокой степенью визуализации всех этапов решения. В результате собственного анализа авторами была выбрана универсальная математическая система Maple, которая позволяет выполнять как численные, так и аналитические расчеты; строить двух- и трехмерные графики и анимации [1].

Рассмотрим некоторые теоретические аспекты работы.

Пусть $m_{2n}(x)$ – косинус дробь Чебышева – Маркова

$$m_{2n}(x) = \cos \mu_{2n}(x), \quad (1)$$

где

$$\mu_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x}$$

и пусть $u_{2n+1}(x)$ – синус дробь Чебышева – Маркова

$$u_{2n+1}(x) = \frac{\sin \mu_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2)$$

где

$$\mu_{2n+1}(x) = 2 \arccos x + \sum_{k=1}^{2n} \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x}.$$

В обоих случаях a_1, a_2, \dots, a_{2n} – чисто мнимые числа либо нули, $k = 1, 2, \dots, 2n$, причем

$$\text{а) } a_{n+k} = -a_k, \quad \text{Im } a_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\text{б) } a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0, \quad r = \left[\frac{\alpha}{2} \right] + 1, \quad n > r. \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что $m_{2n}(x)$ является четной рациональной функцией и имеет $2n$ простых симметричных нулей на интервале $(-1, 1)$:

$$-1 < x_{2n}^{(1)} < x_{2n-1}^{(1)} < \dots < x_{n+1}^{(1)} < 0 < x_n^{(1)} < \dots < x_2^{(1)} < x_1^{(1)} < 1; \quad (4)$$

$$x_{2n-k+1}^{(1)} = -x_k^{(1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\mu_{2n}(x_k^{(1)}) = (2k-1) \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n.$$

Функция $u_{2n+1}(x)$ является же нечётной рациональной функцией и имеет $2n+1$ простых симметричных нулей на интервале $(-1, 1)$:

$$-1 < x_{2n}^{(2)} < x_{2n-1}^{(2)} < \dots < x_{n+1}^{(2)} < x_n^{(2)} = 0 < x_{n-1}^{(2)} < \dots < x_1^{(2)} < x_0^{(2)} < 1; \quad (5)$$

$$x_{2n-k}^{(2)} = -x_k^{(2)}, \quad k = 0, 1, \dots, n;$$

$$\mu_{2n+1}(x_k^{(2)}) = \pi(k+1), \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Для функции $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$, построим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа

$$L_{2n}^{(j)}(x, f) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k^{(j)}) l_k^{(j)}(x), \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

1) с узлами в точках (4) и в точке $x_0^{(1)} = 0$ и

$$l_k^{(1)}(x) = \frac{xm_{2n}(x)}{(x-x_k^{(1)})(xm_{2n}(x))'_{x=x_k^{(1)}}}, \quad k=0, 1, \dots, 2n; \quad (7)$$

2) с узлами в точках (5) и

$$l_k^{(2)}(x) = \frac{u_{2n+1}(x)}{(x-x_k^{(2)})(u_{2n+1}(x))'_{x=x_k^{(2)}}}, \quad k=0, 1, \dots, 2n. \quad (8)$$

Для оценки остатка интерполирования введем следующие величины:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}^{(j)}(x, a) &= |x|^\alpha - L_{2n}^{(j)}(x, f), \quad x \in [-1, 1]; \\ \varepsilon_{2n}^{(j)}(a) &= \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \varepsilon_{2n}^{(j)}(x, a) \right|, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Теорема 1. Для приближений функции $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$, на отрезке $[-1, 1]$ интерполяционными рациональными функциями Лагранжа (6) и (7) при условиях (3) справедливы соотношения:

$$1) \quad \varepsilon_{2n}^{(1)}(x, a) = \frac{4x^2}{\pi} \sin \frac{\pi\alpha}{2} m_{2n}(x) \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{x^2(1-u^2)+u^2} \frac{du}{\psi_n(u) + \psi_n^{-1}(u)}; \quad (10)$$

$$2) \quad \varepsilon_{2n}^{(1)}(a) \leq \frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{|\psi_n(u)| du}{1 + \psi_n^2(u)}, \quad (11)$$

где $x \in [-1, 1]$, $\psi_n(u) = \prod_{k=1}^n \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}$, $\beta_k = \frac{1}{\sqrt{1 + |a_k|^2}}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $n > \frac{\alpha}{2}$.

Причем, если полюсы функции $L_{2n}^{(1)}(x, f)$ имеют чётную кратность, то оценка (11) является точной, имеет место знак равенства в точках $x = \pm 1$.

Данный результат представлен в работе [2].

Теорема 2. Для приближений функции $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$, на отрезке $[-1, 1]$ интерполяционными рациональными функциями Лагранжа (6) и (8) при условиях (3) справедливы соотношения:

1)

$$\varepsilon_{2n}^{(2)}(x, a) = \frac{4x}{\pi} \sin \frac{\pi\alpha}{2} u_{2n+1}(x) \int_0^1 \frac{u^\alpha}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{1}{x^2(1-u^2)+u^2} \frac{du}{\frac{1-u}{1+u}\psi_n(u) - \frac{1+u}{1-u}\psi_n^{-1}(u)}; \quad (12)$$

2)

$$\varepsilon_{2n}^{(2)}(a) \leq \frac{8 \left(1 + \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + |a_k|^2} \right)}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \int_0^1 \frac{u^\alpha}{(1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \frac{1-u}{1+u} |\psi_n(u)| du \frac{1}{1 - \left(\frac{1-u}{1+u} \psi_n(u) \right)^2}, \quad (13)$$

где $x \in [-1, 1]$, $\psi_n(u) = \prod_{k=1}^n \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}$, $\beta_k = \frac{1}{\sqrt{1 + |a_k|^2}}$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, $n > \frac{\alpha}{2}$.

Оценка (13) является точной в том смысле, что если полюсы функции $L_{2n}^{(2)}(x, f)$ имеют чётную кратность, то имеет место знак равенства, причём оно достигается в точках $x = \pm 1$.

С точки зрения численной реализации в компьютерной системе Maple авторам интересен полиномиальный случай оценок (11) и (13), то есть когда все числа $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, и $\psi_n(u) = \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^n$. Тогда можно показать, что справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^\alpha \varepsilon_{2n}^{(1)}(0) = \frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t + e^{-t}} dt, \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+2)^\alpha \varepsilon_{2n}^{(2)}(0) = \frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - e^{-t}} dt. \quad (15)$$

Заметим, что асимптотические равенства (14) и (15) получаются из оценок (11) и (13), соответственно, с помощью метода Лапласа [3]. Причём равенство (14) было получено явным методом ранее в [4], по поводу равенства (15) см. там же.

С помощью разработанной последовательности процедур можно получить численные значения оценок. В таблицах 1 и 2 для различного количества узлов и различных α приведены значения, иллюстрирующие равенства (14) и (15).

Таблица 1.

Значение левой части, стоящей под знаком предела в (14), и его правой части

n \ α		0.1	0.3	0.5	1	1.5	2.5
10	I	1,019	1,049	1,064	0,997	0,687	1,129
	2	1,0195	1,0499	1,0654	1	0,6898	1,1353
	Δ	$40 \cdot 10^{-5}$	$90 \cdot 10^{-5}$	$160 \cdot 10^{-5}$	$310 \cdot 10^{-5}$	$450 \cdot 10^{-5}$	$560 \cdot 10^{-5}$
30	I	1,0194	1,0498	1,0653	0,9997	0,6994	1,1346
	2	1,0195	1,0499	1,0655	1	0,6898	1,1353
	Δ	$9,5 \cdot 10^{-5}$	$9,5 \cdot 10^{-5}$	$19 \cdot 10^{-5}$	$30 \cdot 10^{-5}$	$1400 \cdot 10^{-5}$	$62 \cdot 10^{-5}$
50	I	1,0194	1,0499	1,0654	0,9999	0,6897	1,1351
	2	1,0195	1,0499	1,0655	1	0,6898	1,1353
	Δ	$9,5 \cdot 10^{-5}$	0	$19 \cdot 10^{-5}$	$10 \cdot 10^{-5}$	$14 \cdot 10^{-5}$	$18 \cdot 10^{-5}$

Пояснение: **1** – значение величины $(2n)^\alpha \varepsilon_{2n}^{(1)}(0)$; **2** – значение величины $\frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t + e^{-t}} dt$; Δ – относительная погрешность.

Таблица 2.

Значение левой части, стоящей под знаком предела в (15), и его правой части

$n \backslash \alpha$		0.1	0.3	0.5	1	1.5	2.5
10	1	1,06999	1,2115	1,3479	1,5734	1,327	3,114
	2	1,06997	1,211	1,3474	1,5707	1,322	3,073
	Δ	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$14 \cdot 10^{-5}$	$39 \cdot 10^{-5}$	$170 \cdot 10^{-5}$	$410 \cdot 10^{-5}$	$1300 \cdot 10^{-5}$
30	1	1,07	1,2114	1,3475	1,5711	1,3222	3,077
	2	1,07	1,2113	1,3474	1,5708	1,3217	3,073
	Δ	$0,19 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$22 \cdot 10^{-5}$	$54 \cdot 10^{-5}$	$100 \cdot 10^{-5}$
50	1	1,07	1,2114	1,3475	1,5709	1,3219	3,086
	2	1,07	1,2114	1,3474	1,5708	1,3217	3,073
	Δ	$0,053 \cdot 10^{-5}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$7,2 \cdot 10^{-5}$	$11 \cdot 10^{-5}$	$420 \cdot 10^{-5}$

Пояснение: **1** – значение величины $(2n+2)^\alpha \varepsilon_{2n}^{(2)}(0)$; **2** – значение величины $\frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right| \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - e^{-t}} dt$; Δ – относительная погрешность.

Стоит отметить, что более наглядным способом проверить результаты практической реализации аналитически полученных оценок является графическая интерпретация.

Во-первых, построим график интерполируемой функции. В нашем случае приближается функция $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$ (рис. 1).

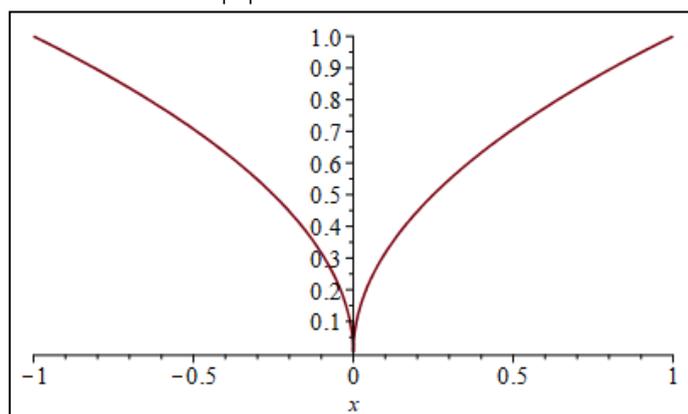


Рис. 1. График интерполируемой функции $|x|^\alpha$ при $\alpha = 0,5$

Во-вторых, изобразим полиномы Чебышева первого и второго рода (рис. 2).

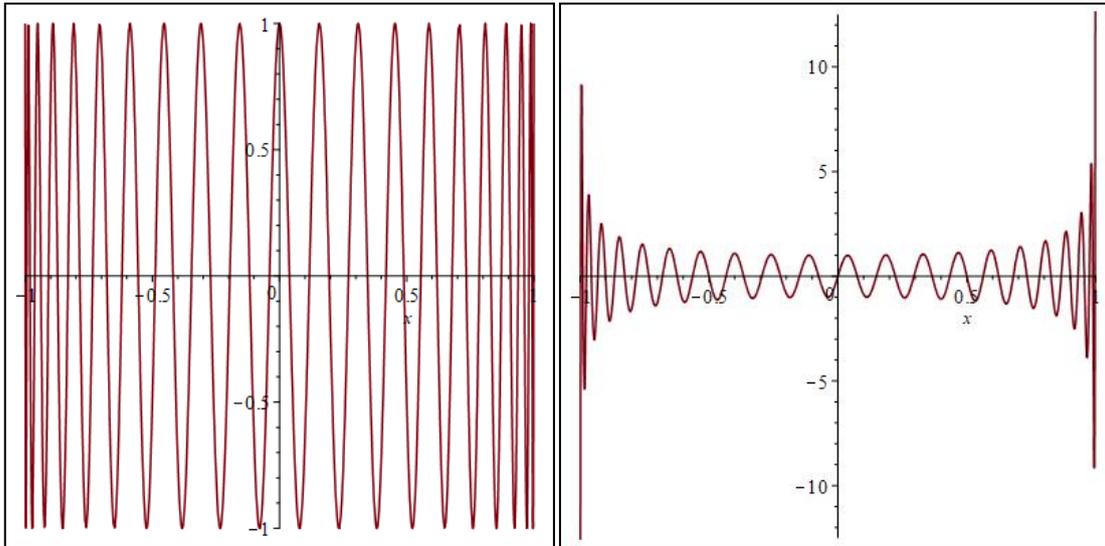


Рис. 2. Полиномы Чебышева первого и второго рода, соответственно, при $\alpha = 0,5$ и $n = 20$

В-третьих, отобразим вид интерполяционной функции Лагранжа при различных значениях параметра α и количестве узлов n (рис. 3).

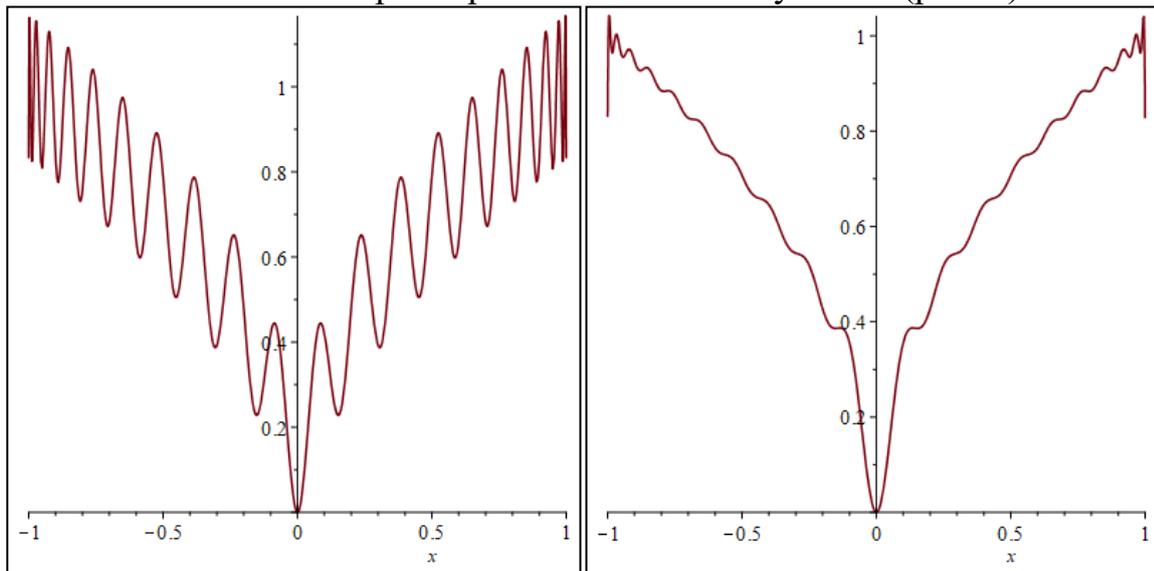


Рис. 3. Интерполяционная рациональная функция Лагранжа (6) при условиях (7) и (8), соответственно, при $\alpha = 0,5$ и $n = 20$

Далее сделаем графическое сравнение значения величины $\left| \varepsilon_{2n}^{(j)}(x, 0) \right|$, $j = 1, 2, x \in [-1, 1]$ с теоретически вычисленным представлением остатка интерполирования (см. (14), (15)) (рис. 4).

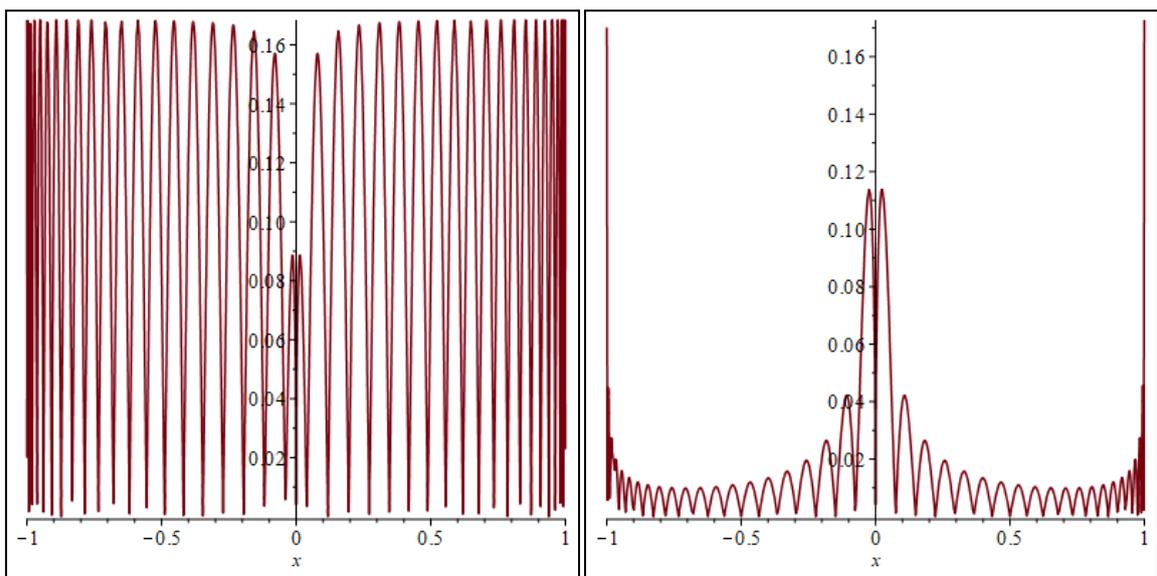


Рис. 4. Графическая интерпретация величин $\left| \varepsilon_{2n}^{(1)}(x, 0) \right|$ и $\left| \varepsilon_{2n}^{(2)}(x, 0) \right|$,
соответственно

Таким образом, становится понятно, что при использовании возможностей специальных математических систем равенства (14) и (15) наглядно иллюстрируются. У исследователей появляется возможность наглядной интерпретации полученных результатов, что может использоваться в преподавании специальных курсов.

Литература

1. Maple. URL: <http://www.maplesoft.com> (дата доступа: 26.02.2021).
2. Ровба, Е.А., Медведева В.Ю. О рациональной интерполяции функции $|x|^\alpha$ по расширенной системе узлов Чебышева – Маркова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2019. Т. 55, № 4. С. 391–405.
3. Евграфов, М.А. Асимптотические оценки и целые функции. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. Ganzburg, M.I. The Bernstein Constant and Polynomial Interpolation at the Chebyshev Nodes // J. Approx. Theory. 2002. Vol. 119, № 2. P. 193–213. <https://doi.org/10.1006/jath.2002.3729>.

V.J. Medvedeva, E.A. Rovba
Yanka Kupala State University, Grodno

COMPUTER SIMULATION OF NUMERICAL RESULTS OF APPROXIMATION OF THE FUNCTION $|x|^\alpha$ BY INTERPOLATION POLYNOMIA ON THE CHEBYSHEV NODES

Keywords: *interpolation, numerical verification of results, Maple computer mathematics system.*

Abstract. *The article presents two theorems related to the rational interpolation of a function $|x|^\alpha$ by Chebyshev – Markov nodes of the first and second kind. A numerical illustration of the results obtained in the polynomial case by means of the Maple universal mathematical system is given.*

А.В. Суворов, А.М. Андрианов, К.С. Николаев, И.Е. Постоев
*Национальный исследовательский университет
«Московский институт электронной техники»*

УДК 004.93.12

ПРИМЕНЕНИЕ ИНС ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ПАТОЛОГИЧЕСКИХ ПАТТЕРНОВ НА ЭЭГ ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Ключевые слова: *искусственная нейронная сеть, эпилепсия, электроэнцефалограмма, генерация данных.*

Описывается проблемная ситуация с автоматизацией распознавания эпилептических паттернов на электроэнцефалограмме (ЭЭГ). Приводится вариант формализации таких паттернов, как спайк и спайк-волна. Предложен метод генерации данных, в основе которого лежит формализованный сигнал. Сгенерированные данные использованы для первичного обучения искусственной нейронной сети (ИНС).

1. Введение. Эпилепсия – это хроническое заболевание головного мозга, для которого характерны повторяющиеся непровоцированные приступы с различными клиническими проявлениями [1]. По оценкам [2], эпилепсией разной формы тяжести страдают до 1% человечества. Причины возникновения эпилепсии до сих пор не выяснены, а лечение является достаточно сложным и продолжительным.

Электроэнцефалография – метод регистрации биоэлектрической активности головного мозга [3]. При использовании этого метода врачи анализируют записи электроэнцефалограммы (ЭЭГ). Расшифровка ЭЭГ состоит в распознавании и оценке определенных закономерностей в биоэлектрической активности головного мозга – паттернов [4]. Отдельно выделяют эпилептиформную активность на ЭЭГ.

Эпилептиформная активность – это термин, обозначающий определенные типы колебаний, характерные для людей, страдающих эпилепсией [5]. Одними из видов эпилептических паттернов (ЭП) на ЭЭГ [5] являются спайк и спайк-волна (рис.1).

2. Проблемная ситуация. Процесс расшифровки ЭЭГ, включающей более двух десятков графиков, является трудоемким и занимает 3-4 часа,

при длительности записи в 8-10 часов и сильно утомляет врачей. Автоматизация процесса распознавания ЭП (РЭП) позволит выделить для врачей время для помощи большему количеству пациентов и поиск причин эпилепсии.

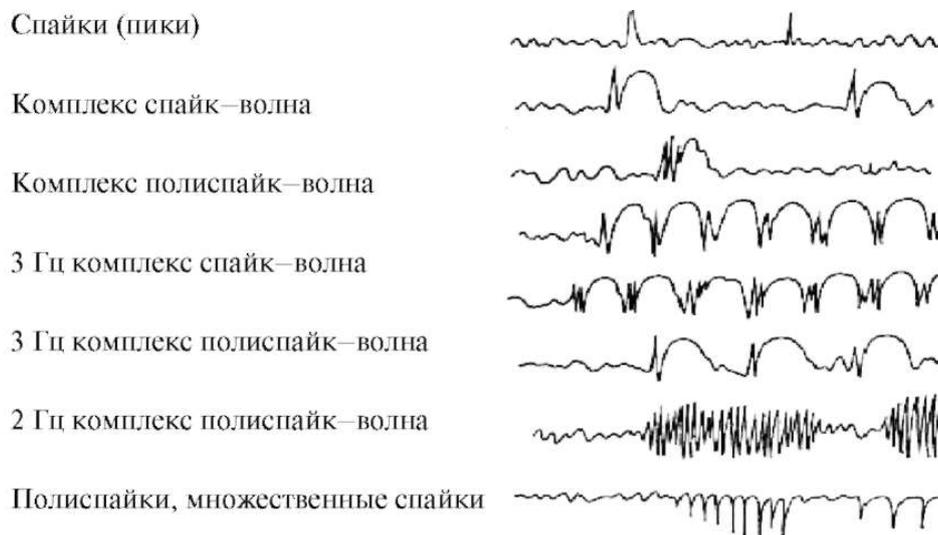


Рис. 1. Основные виды эпилептиформной активности.

Существующие решения автоматизированного РЭП (АРЭП), заявляемые производителями оборудования для электроэнцефалографии, как импортных (NihonKohden, Grass-Telefacor и др.), так и отечественных (Нейрософт и др.), обладают рядом недостатков, наиболее существенными из которых являются их не универсальность (работают только с фирменным оборудованием) и недостаточная надежность (большое количество ложных срабатываний).

Задачу создания решения для АРЭП осложняют: отсутствие открытых наборов данных, трудоемкость разметки данных для обучения искусственной нейронной сети (ИНС). Поэтому решение АРЭП, обходящее эти ограничения, актуально и востребовано.

3. Постановка задачи. В статье рассматривается только паттерн спайк-волна, который с вероятностью более 90% диагностирует наличие эпилепсии. Спайк-волна (спайк-медленная волна, СМВ) – комплекс, возникающий от комбинации спайка с медленной волной [6].

Спайком (СП) является сигнал, имеющий временные и амплитудные характеристики, приведенные на рисунке 2 [7].

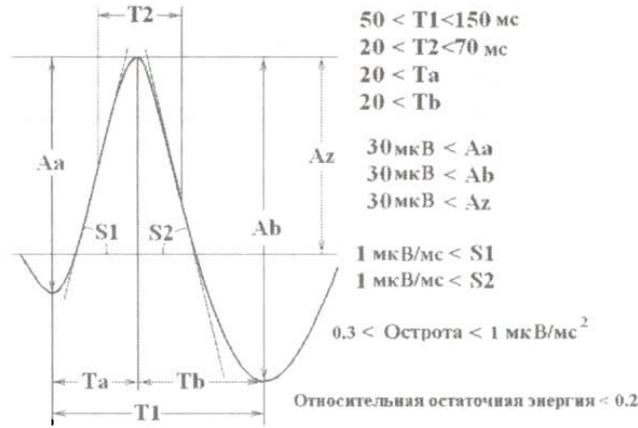


Рис. 2. Временные и амплитудные характеристики спайка.

Таким образом, СП – это сигнал вида:

$$spike(t) = \begin{cases} -s \cdot psn(t, x_1, y_1, w_1, h_1), & x_1 \leq t \leq x_1 + w_1; \\ s \cdot psn(t, x_2, y_2, w_2, h_2), & x_2 < t \leq x_2 + w_2; \\ -s \cdot psn(t, x_3, y_3, w_3, h_3), & x_3 < t \leq x_3 + w_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $x_i, y_i, w_i, h_i, s = const, i \in \{1, 2, 3\}$ – параметры соответствующих дуг СП: (x_i, y_i) – координаты начала дуги, $w_i > 0, h_i > 0$ – ширина и высота дуги, $s \in \{-1, 1\}$ – направление СП (-1 – вниз, 1 – вверх);

$$psn(t, x, y, w, h) = h \cdot \sin\left(\frac{\pi}{w}(t-x)\right) + y, \quad x \leq t \leq x + w. \quad (2)$$

Медленная волна (МВ) – это волна длительностью более $1/8$ с [8]. Таким образом, МВ – это сигнал вида:

$$wave(t) = s \cdot parp(t, x_4, y_4, w_4, h_4, a), \quad x_4 < t \leq x_4 + w_4, \quad (3)$$

где $x_4, y_4, w_4, h_4, a, s = const$ – параметры МВ: (x_4, y_4) – координаты начала, $w_4 > 0, h_4 > 0$ – ширина и высота МВ, $a \geq 2$ – «прямоугольность» МВ (степень параболы), $s \in \{-1, 1\}$ – направление МВ (-1 – вниз, 1 – вверх);

$$parp(t, x, y, w, h, a) = -h \cdot \left| 2 \frac{t-x}{w} - 1 \right|^a + y + h, \quad x \leq t \leq x + w. \quad (4)$$

По итогу, комплекс СМВ является непрерывным сигналом вида:

$$sw(t) = \begin{cases} spike(t) & 0 \leq t \leq T_s; \\ wave(t) & T_s < t \leq T_s + T_w, \end{cases} \quad (5)$$

где T_s, T_w – продолжительность СП и МВ в комплексе соответственно.

Требуется создать бинарный классификатор, который по входному сигналу $U(t)$ определит наличие или отсутствие в нем сигнала $sw(t)$.

4. Метод решения. В качестве классификатора для АРЭП задействована ИНС. Преимуществами ИНС являются способность к самостоятельному выделению признаков и высокая точность. Однако, ИНС требовательна к объему обучающей выборки, что, как было указано выше, является «узким местом» в разработке АРЭП.

Для решения этой проблемы предлагается построить генератор данных. Выходной сигнал генератора – искусственный комплекс СМВ (5), который затем складывается с фрагментом реальной фоновой активности головного мозга. Генерация СМВ будет производиться путем подбора случайных параметров СП (1) и МВ (3), удовлетворяющих условиям непрерывности СМВ и характеристикам СП и МВ.

Качество обученной ИНС как бинарного классификатора определяется следующими метриками [9]:

$$accuracy(a) = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}; \quad (6)$$

$$precision(a) = \frac{TP}{TP + FP}; \quad (7)$$

$$recall(a) = \frac{TP}{TP + FN}, \quad (8)$$

где $a(X)$ – классификатор, X – элемент выборки; TP, TN – количества верно предсказанных объектов положительного и отрицательного классов соответственно, FP, FN – количества неверно предсказанных объектов положительного и отрицательного классов соответственно; $accuracy$ – доля правильно классифицированных объектов; $precision$ – точность, $recall$ – полнота.

5. Реализация. Программная реализация задействует язык программирования Python. Для работы с многомерными массивами использована библиотека NumPy. Для работы с нейронными сетями и их обучения – фреймворк TensorFlow и библиотека Keras. Для визуализации и построения графиков – библиотека Matplotlib. Для чтения файлов ЭЭГ в формате EDF задействована библиотека PyEDFlib.

Программная реализация модуля генерации искусственных комплексов СМВ дает на выходе схожие по внешнему виду с реальными комплексами СМВ сигналы (рис. 3).

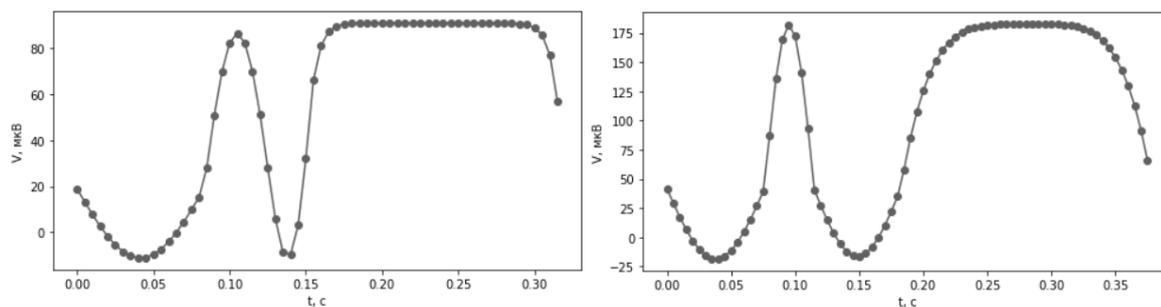


Рис. 3. Сгенерированные комплексы СМВ.

После сложения с реальной фоновой активностью на выходе получаются следующие сигналы (рис. 4):

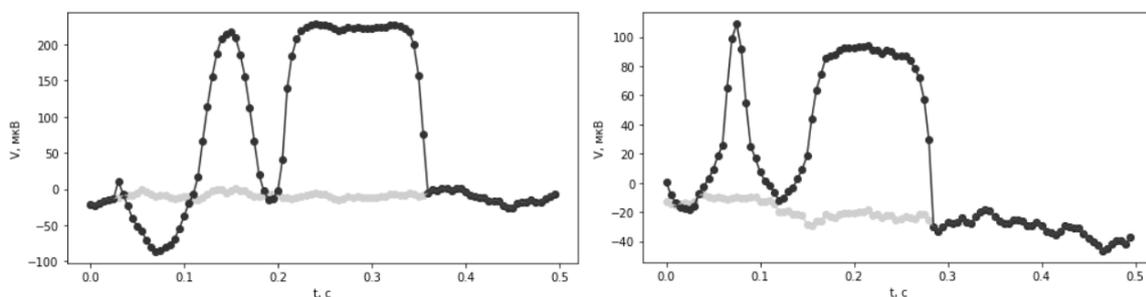


Рис. 4. Сгенерированные комплексы СМВ (светлым отмечена фоновая активность; темным – сгенерированная СМВ, сложенная с фоновой активностью).

Сгенерированный сигнал имеет продолжительность, равную 500 мс. Частота дискретизации файла EDF равна 200 Гц. Соответственно, сигнал является вектором с длиной, равной 100. Было сгенерировано 30000 сигналов. Сигналы нормируются, случайным образом перемешиваются и разбиваются на тестовую и обучающую выборки. Размер тестовой выборки равен 25% от общего количество сгенерированных объектов.

Архитектура ИНС: входной слой (100 нейронов), ReLU (64 нейрона), Dropout (вероятность 0,3), ReLU (32 нейрона), Dropout (вероятность 0,3), Sigmoid (1 нейрон). Параметры обучения: алгоритм обучения – Adam; минимизируемый функционал – бинарная кросс-энтропия; размер порции (batch-size) – 128; количество эпох – 10.

Тестирование ИНС: доля правильно классифицированных объектов составила 0,988; точность – 0,997; полнота – 0,980.

6. Заключение. Созданный классификатор ИНС показал высокую точность на данных, сгенерированных на основе реальной фоновой активности мозга и математическом представлении ЭП. Поэтому можно ожидать, что предложенная методика позволит за небольшое число итераций на ограниченном количестве реальных тестовых данных,

достичь необходимого уровня точности АРЭП. Это является предметом дальнейшего исследования.

Литература

1. Официальный сайт Научного центра неврологии: Эпилепсия. URL: <https://www.neurology.ru/simptomu-i-zabolevaniya/epilepsiya> (дата обращения: 27.02.2021).
2. НаПоправку — медицинский онлайн-сервис: Эпилепсия, эпилептический приступ: симптомы, причины и лечение. URL: <https://lib.napopravku.ru/diseases/epilepsiya/> (дата обращения: 27.02.2021).
3. Официальный сайт Научного центра неврологии: ЭЭГ. URL: <https://www.neurology.ru/epileptologicheskiiy-centr/eeg> (дата обращения: 27.02.2021).
4. СMI Brain Research: Паттерны ЭЭГ. URL: <https://cmi.to/ээг/расшифровка-ээг-2/паттерны-ээг/> (дата обращения: 27.02.2021).
5. СMI Brain Research: Эпилептиформная активность на ЭЭГ. URL: <https://cmi.to/ээг-активность/эпилептиформная-активность/> (дата обращения: 27.02.2021).
6. СMI Brain Research: Спайк-волна ЭЭГ. URL: <https://cmi.to/спайк-волна/> (дата обращения: 27.02.2021).
7. СMI Brain Research: Спайк ЭЭГ. URL: <https://cmi.to/спайки/> (дата обращения: 27.02.2021).
8. СMI Brain Research: Волна ЭЭГ. URL: <https://cmi.to/волна/> (дата обращения: 27.02.2021).
9. Китов В.В., Оценка моделей: МГУ им. Ломоносова, ф-т ВМиК, кафедра ММП. 2015. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/images/5/54/Kitov-ML-05-Model_evaluation.pdf (дата обращения: 27.02.2021).

A.V. Suvorov, A.M. Andrianov, K.S. Nikolayev, I.E. Postoev
National Research University of Electronic Technology

APPLICATION OF ANNS FOR RECOGNIZING PATHOLOGICAL PATTERNS ON EEG IN DEFICIENCY OF INITIAL DATA

Keywords: *artificial neural network, epilepsy, electroencephalogram, data generation.*

Abstract. *The problematic situation with the automation of recognition of epileptic patterns on the electroencephalogram (EEG) is described. A variant of formalization of such patterns as spike and spike-wave is given. A data generation method based on a formalized signal is proposed. The generated data was used for the primary training of an artificial neural network (ANN).*

ПРИМЕНЕНИЕ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Ключевые слова: кластерный анализ, эффективный инвестиционный портфель, доходность, агломеративный иерархический алгоритм.

В данной работе предложено применение кластерного анализа акций, входящих в состав индекса ММВБ с целью построения эффективного инвестиционного портфеля. Кластерный анализ по агломеративному иерархическому алгоритму классификации был выполнен в системе Mathcad.

В данной работе предложено предварительное разбиение финансовых активов на кластеры для диверсификации инвестиционного портфеля. Под диверсификацией портфеля понимается снижение его риска за счет включения в портфель различных финансовых активов. Диверсификация портфеля в некотором роде способствует созданию эффективного портфеля. Эффективным является портфель, обеспечивающий его максимальную доходность при заданном уровне риска или минимальный риск при заданном уровне доходности.

Для формирования инвестиционного портфеля автором ранее была разработана экспертная система нечеткого вывода [1]. Некоторые вопросы формирования инвестиционного портфеля рассмотрены также в [2; 3; 4].

Кластерный анализ был выполнен в программе Mathcad. В качестве финансовых активов были взяты следующие акции компаний, входящие в состав индекса ММВБ: Лукойл, АЛРОСА, Аэрофлот, Газпром, АФК «Система», Магнит, Норникель, Транснефть (прив.), Полюс Золото, ФосАгро. ММВБ представляет собой фондовый индекс, рассчитываемый Московской межбанковской валютной биржей. В настоящее время в данный индекс входят около 50 акций.

Доходность по данным акциям была рассчитана по формуле (1):

$$d = \frac{p_1 - p_0}{p_0} \cdot 100, \quad (1)$$

где p_1 , руб. – цена закрытия; p_0 , руб. – цена открытия.

Были использованы ежедневные данные по ценам акций. Пропуски значений дополнены значениями за предыдущий день. Средняя доходность за год по дневным данным рассчитана как средняя геометрическая по формуле (2):

$$\bar{d} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n d_i}, \quad (2)$$

где d_i – доходность за день i , n – число дней.

Сформированная матрица доходностей в системе Mathcad представлена на рисунке 1.

$$\text{doh} := \begin{pmatrix} 0.175 & 0.062 & -0.100 \\ 0.117 & -0.049 & -0.116 \\ -0.106 & -0.021 & -0.015 \\ 0.100 & 0.201 & -0.082 \\ -0.270 & 0.085 & 0.024 \\ -0.305 & -0.107 & 0.117 \\ 0.136 & 0.175 & -0.101 \\ 0.032 & 0.089 & -0.118 \\ 0.102 & 0.065 & 0.062 \\ -0.014 & -0.065 & 0.025 \end{pmatrix} \quad \text{Матрица доходностей}$$

Рис. 1. Матрица доходностей в системе Mathcad

Показатель доходности можно считать нормированным показателем, поэтому предварительную нормировку данных для кластерного анализа производить не требовалось. Кластерный анализ был произведен по принципу «ближайшего соседа» и применен агломеративный иерархический алгоритм классификации.

Расстояние между объектами было рассчитано по формуле (3), как обычное евклидово расстояние.

$$r_{jk} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (d_{ji} - d_{ki})^2}, \quad (3)$$

где i – номер года, d_{ij} – доходность для j -ой акции, года i .

На рисунке 2 представлена сформированная матрица расстояний между объектами.

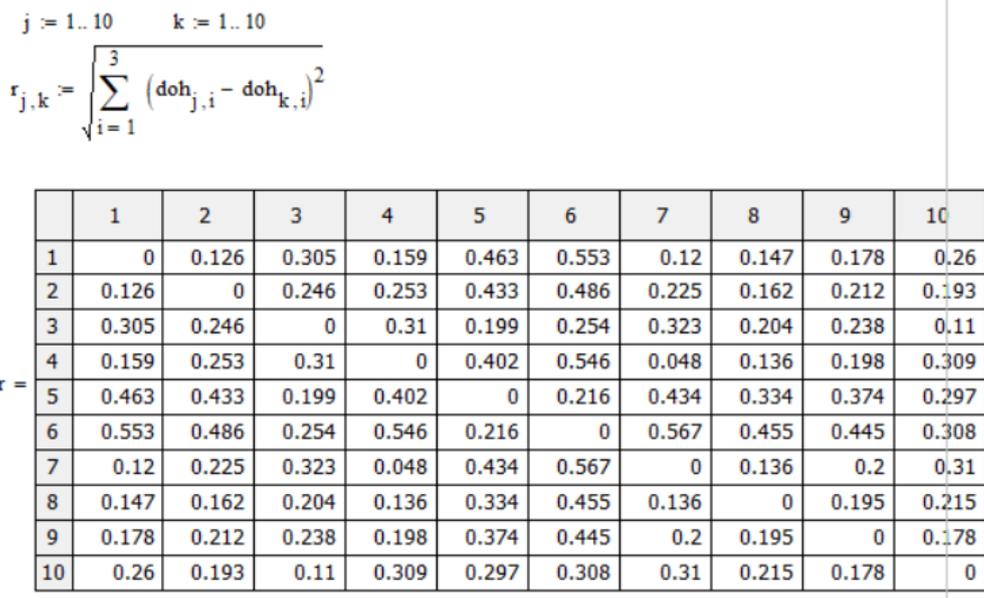


Рис. 2. Матрица расстояний между объектами в Mathcad

Данный алгоритм кластерного анализа предполагает поиск наименьших расстояний между объектами или кластерами и объединение таких объектов в один кластер. Программный модуль поиска наименьшего расстояния в матрице расстояний представлен на рисунке 3.

```

nn := 10  mm := 10
mat_min(x) :=
  m ← max(x)
  for j ∈ 1..nn
    for k ∈ 1..mm
      if xj,k < m  if j ≠ k
        m ← xj,k
        l1 ← j
        l2 ← k
  (
    m
    l1
    l2
  )
mat_min(r) = (
  0.048
  4
  7
)
mat_min(r)2 = 4      Номер строки с минимальным расстоянием
mat_min(r)3 = 7      Номер столбца с минимальным расстоянием
mat_min(r)1 = 0.048  Минимальное расстояние

```

Рис. 3. Программный модуль определения наименьшего значения в матрице расстояний, а также номера строки и номера столбца, на которых находится наименьшее расстояние в системе Mathcad

На первом этапе создания кластеров в один кластер были объединены акции Газпрома (4-ый объект в матрице расстояний) и акции Норникеля (7-ой объект в матрице расстояний). Расстояние между этими объектами, равное 0,048, являлось наименьшим, как это следует из рисунка 3. Процесс объединения вышеуказанных объектов представлен на рисунке 4.

$$\begin{aligned}
 & j := 1..3 \quad k := 1..3 \quad r1_{j,k} := r_{j,k} \\
 & j := 1..4 \quad r1_{j,4} := \min(r_{j,4}, r_{j,7}) \quad r1_{4,j} := \min(r_{4,j}, r_{7,j}) \\
 & j := 1..6 \quad k := 5..6 \quad r1_{j,k} := r_{j,k} \quad r1_{k,j} := r_{k,j} \\
 & j := 1..8 \quad k := 7..9 \quad r1_{j,k} := r_{j,k+1} \quad r1_{k,j} := r_{k+1,j}
 \end{aligned}$$

$$r1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.126 & 0.305 & 0.12 & 0.463 & 0.553 & 0.147 & 0.178 & 0.26 \\ 0.126 & 0 & 0.246 & 0.225 & 0.433 & 0.486 & 0.162 & 0.212 & 0.193 \\ 0.305 & 0.246 & 0 & 0.31 & 0.199 & 0.254 & 0.204 & 0.238 & 0.11 \\ 0.12 & 0.225 & 0.31 & 0 & 0.402 & 0.546 & 0.136 & 0.198 & 0.309 \\ 0.463 & 0.433 & 0.199 & 0.402 & 0 & 0.216 & 0.334 & 0.374 & 0.297 \\ 0.553 & 0.486 & 0.254 & 0.546 & 0.216 & 0 & 0.455 & 0.445 & 0.308 \\ 0.147 & 0.162 & 0.204 & 0.136 & 0.334 & 0.455 & 0.136 & 0 & 0.31 \\ 0.178 & 0.212 & 0.238 & 0.198 & 0.374 & 0.445 & 0.2 & 0.195 & 0.215 \\ 0.26 & 0.193 & 0.11 & 0.309 & 0.297 & 0.308 & 0.31 & 0.215 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 4. Объединение 4-го и 7-го объектов в один кластер в системе Mathcad

В результате дальнейшего объединения объектов в кластеры в один кластер вошли акций компаний Лукойл, АЛРОСА, Газпром, Норникель, Транснефть (прив.). Этот кластер, таким образом, составили наиболее надежные и высокодоходные акции.

Еще один кластер образовали акции компаний Аэрофлот, ФосАгро. Акции оставшихся трех компаний АФК «Система», Магнит и Полус Золото составили отдельные кластеры.

Результаты данного исследования можно использовать для формирования эффективного портфеля, если включать в портфель акции из каждого полученного кластера, что должно способствовать снижению риска такого портфеля. Для получения же наибольшей доходности лучше брать все акции, вошедшие в первый кластер. Данное исследование можно расширить, если рассмотреть все акции, входящие в состав, в данном случае индекса ММВБ, а также если сравнить сформированные портфели по показателям их доходностей и риска.

Литература

1. Суханова А.Г. Нечетко-множественный подход к выбору инвестиционного портфеля в системе Mathcad // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16. С. 38 – 41.

2. Голиков С.Д. Формирование и управление портфелем ценных бумаг на развивающихся рынках капитала // Экономика и социум. 2014. № 4 – 2 (13). С. 624 – 626.

3. Клитина Н.А. Формирование портфелей ценных бумаг для различных типов инвесторов // Инвестиционная политика. 2011. № 23 (65). С. 9 – 14.

4. Крицкий О.Л., Бельснер О.А. Оптимизация портфеля финансовых инструментов // Финансы и кредит. 2013. № 36 (564). С. 35 – 40.

A.G. Sukhanova
Smolensk State University

APPLICATION OF CLUSTER ANALYSIS FOR THE FORMATION OF AN EFFECTIVE INVESTMENT PORTFOLIO IN THE MATHCAD SYSTEM

Keywords: *cluster analysis, effective investment portfolio, profitability, agglomerative hierarchical algorithm.*

Abstract. *In this paper, we propose the use of cluster analysis of the stocks included in the MICEX index in order to build an effective investment portfolio. Cluster analysis using the agglomerative hierarchical classification algorithm was performed in the Mathcad system.*

Хоанг Ван Зунг, А.А. Парамонов
Российский технологический университет МИРЭА

УДК 621.391

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ OFDM В СИСТЕМАХ РАДИОСВЯЗИ С ППРЧ В УСЛОВИЯХ ДЕСТРУКТИВНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРЕДНАМЕРЕННЫХ ПОМЕХ

Ключевые слова: *псевдослучайная перестройка рабочей частоты, преднамеренная помеха, помехоустойчивость, мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов.*

Рассматриваются вопросы совместного использования метода модуляции OFDM (мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов) и метода передачи с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты при воздействии преднамеренной сосредоточенной по спектру помехи.

Технология OFDM благодаря своей высокой спектральной эффективности широко используется в современных высокоскоростных

системах передачи информации различного назначения. При модуляции методом OFDM передача высокоскоростного потока цифровой информации производится путем его разделения на большое число низкоскоростных потоков, каждый из которых передается в своем частотном канале (на своей поднесущей частоте) [1]. Достаточное близкое расположение частот соседних поднесущих позволяет обеспечить высокую спектральную эффективность данной технологии. При этом OFDM-сигнал представляет собой сумму поднесущих гармонических колебаний, каждое из которых модулируется своим потоком передаваемых битов с использованием ФМ, КАМ и т.д.

При OFDM высокоскоростной поток информации разделяется на большое число более низкоскоростных потоков, каждый из которых передается в своем частотном канале (на своей поднесущей частоте $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{K-1}$), как показано на рисунке 1.

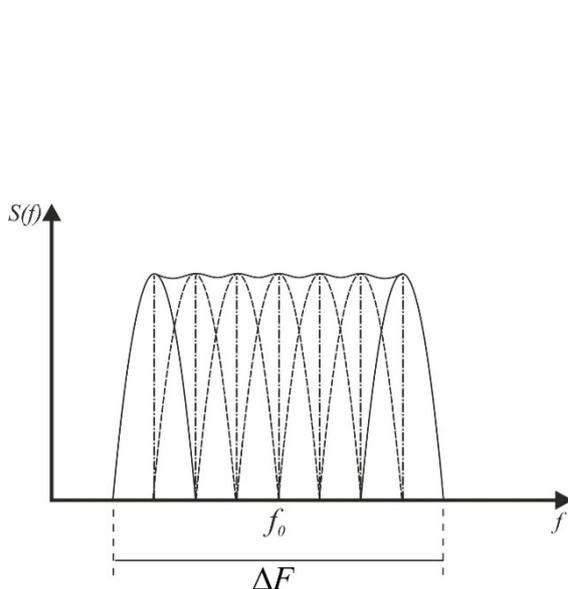


Рис. 1. Спектр OFDM сигнала

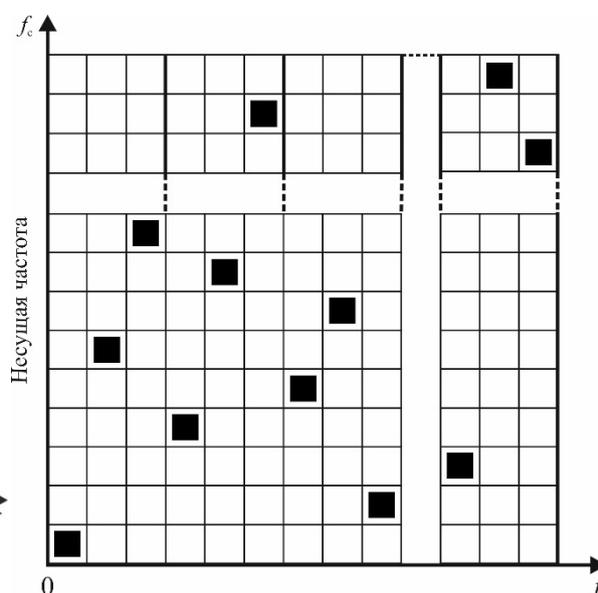


Рис. 2. Частотно-временная матрица с ППРЧ

Однако из-за широкополосности сигнала OFDM невозможно маневрировать частотами поднесущих для ухода от сосредоточенных по спектру помех. Чтобы избежать такой ситуации, целесообразно использовать применение метода псевдослучайной перестройкой рабочей частоты ППРЧ, являющегося эффективным способом повышения помехозащищенности радиолинии в условиях воздействия преднамеренных помех. Особенность данного метода заключается в возможности «ухода» от воздействия помехи путем перестройки рабочей частоты по псевдослучайному коду (программе перестройки частот), неизвестному постановщику помех, как это показано на рисунке 2. Это заставляет постановщика с ограниченным энергетическим ресурсом

искать оптимальную стратегию постановки помех системам радиосвязи (СРС) с ППРЧ, чтобы эффективно и рационально использовать свой энергетический ресурс. Помеха, обеспечивающая это требование, является сосредоточенной по спектру (шумовой помехой в части полосы рабочих частот СРС) [2]. При постановке данной помехи постановщик выставляет помеху не по всему частотному диапазону работы СРС, а только на ρ -й его части. Спектральная плотность мощности данной помехи имеет вид

$$N_{II} = \begin{cases} P_{II}/\rho\Delta F & \text{в полосе } \rho\Delta F \\ 0 & \text{в полосе } (1-\rho)\Delta F \end{cases},$$

где ρ – доля полосы частот, занимаемой помехой, ($0 \leq \rho \leq 1$).

При воздействии данной помехи частотные элементы сигнала с ППРЧ будут поражены помехой с вероятностью ρ , а вероятность того, что эти же частотные элементы сигнала не поражены помехой, равна $(1-\rho)$.

Предполагается, что передача на каждой поднесущей сигнала OFDM производится сигналом фазовой манипуляции BPSK с последующим когерентным приемом. При дальнейшем изложении частотная и временная синхронизация не рассматриваются, а считается, что они обеспечены с достаточной высокой степенью точности. Также примем, что при воздействии шумовой помехи в части полосы сигнала весь сигнал OFDM полностью находится в пределах воздействия помехи, т.е. все K поднесущих будут поражены помехой с равной вероятностью ρ .

Предаваемый n -й OFDM сигнал после ОБПФ имеет вид:

$$x_i[n] = IFFT\{X_i[k]\} = \sum_{k=0}^{N-1} x_i(k) \exp\left(\frac{j2\pi kn}{K}\right), n \leq K-1. \quad (1)$$

Комплексная огибающая принятого сигнала:

$$y(k) = x(k) + g(k), \text{ в отсутствие помехи,}$$

$$y(k) = x(k) + j(k) + g(k), \text{ при наличии помехи,}$$

где $g(k)$ – собственные шумы приемника, $j(k)$ – преднамеренная сосредоточенная шумовая помеха в части полосы.

Важно отметить, что при умножении на комплексную экспоненту статистические свойства случайной величины $y(k)$ не изменяются и оказываются одинаковыми нормальными для всех поднесущих.

$$Y(k) = \sum_{k=0}^{K-1} y(k) \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{K}\right) = \sum_{k=0}^{K-1} [\lambda(k) + V(k)] = \hat{\lambda}(k) + \hat{V}(k), \quad (2)$$

где $V_i = [j(k) + g(k)] \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{K}\right)$.

Математические ожидания случайных величин, входящих в (2):

$$\langle \hat{\lambda} \rangle = K \langle \lambda(k) \rangle = K \sqrt{2P_s}, \quad \langle \hat{V} \rangle = K \langle V(k) \rangle = \langle [g(k) + j(k)] \rangle = 0. \quad (3)$$

Учтем некоррелированность шумов и помех на разных выборках принятого сигнала. Дисперсия нормированных шума и помех на k -й поднесущей:

$$\begin{aligned} \langle |V(k)|^2 \rangle &= \langle |g(k) + j(k)|^2 \rangle = \sigma_k^2, \\ \langle |\hat{V}(k)|^2 \rangle &= \langle \sum_{k=0}^{K-1} |V(k)|^2 \rangle = K\sigma_k^2. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом (3) и (4) условная вероятность битовой ошибки приема сигналов OFDM/BPSK определяется выражением

$$P_b(k) = Q \left(\sqrt{\frac{\langle \hat{\lambda}(k) \rangle}{\langle |\hat{V}(k)|^2 \rangle}} \right),$$

где $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.

Будем считать, что при поражении помехой сигнала OFDM, передающегося на некоторой частоте, эта помеха присутствует на всех его поднесущих. В этой связи условная вероятность битовой ошибки приема сигнала OFDM/BPSK, усредненная по K , имеет вид:

$$P_e = \rho Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0 + N_n/\rho}} \right) + (1-\rho) Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right). \quad (5)$$

Здесь E_b – энергия сигнала, приходящаяся на один бит передаваемой информации, а N_0 – спектральная плотность мощности собственного шума приемника.

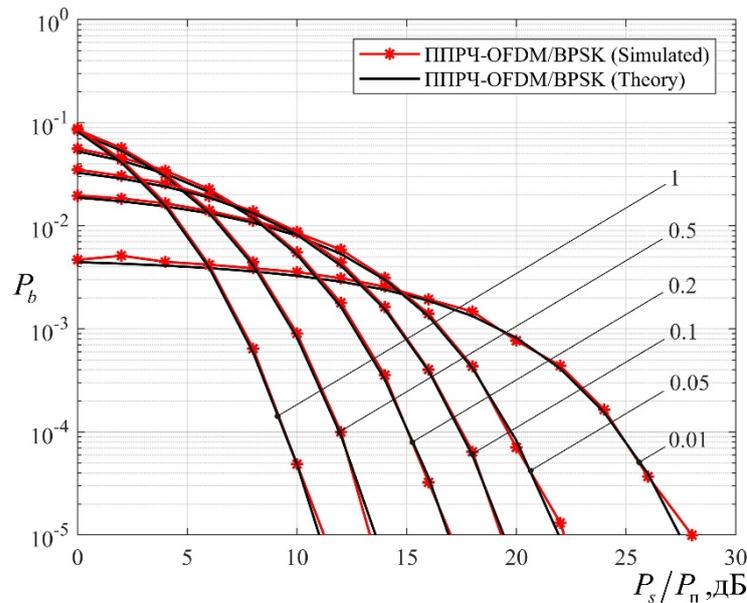


Рис. 3. Зависимость вероятности битовой ошибки P_b для СРС с ППРЧ-OFDM / BPSK при воздействии сосредоточенной по спектру помехи

На рисунке 3 представлены зависимости средней вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/помеха для СРС с ППРЧ-OFDM/BPSK в условиях воздействия шумовой помехи в части полосы частот. Здесь в качестве параметра выступает доля подавляемой помехой полосы частот, занимаемой сигналом OFDM с ППРЧ. Кривые построены по аналитическому выражению (5), а также по результатам математического моделирования методом Монте-Карло для заданного значения отношения сигнал/собственный шум приемника 15дБ.

Анализ графиков позволил оценить эффективность воздействия шумовой помехи в части полосы частот (сосредоточенной по спектру помехи) СРС с ППРЧ-OFDM. Постановка заградительной шумовой помехи целесообразна при малом значении отношения сигнал/помеха (мощной помехе по сравнению с полезным сигналом). Однако при ограниченной мощности помехи (область с большим значением отношения сигнал/помеха) целесообразно выставлять помехи в части полосы частот. Например, при воздействии заградительной помехи ($\rho = 1$) требуется отношение сигнал/помеха 11 дБ для заданной вероятности ошибки на бит 10^{-5} . Однако для обеспечения такой же вероятности битовой ошибки в случае воздействия шумовой помехи в части полосы с долей подавляемой полосы ($\rho = 0,1$) требуется около 19 дБ. При этом энергетические проигрыш (выигрыш для постановщиков помех) составляет около 8 дБ. Это значит, что требуется разработка более эффективных методов для борьбы с данной помехой.

Литература

1. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шлома А.М., Шумов А.П. Технология OFDM: учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия – Телеком, 2015. 360 с.
2. Борисов В.И. Зинчук В.М. Лимарев А.Е. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов методом псевдослучайной перестройки рабочей частоты / под ред. В.И. Борисова. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: РадиоСофт, 2008. 512 с.

Hoang Van Dung, A.A. Paramonov
Russian Technological University

NOISE IMMUNITY OF TRANSMISSION OF OFDM SIGNALS IN RADIO COMMUNICATION SYSTEMS WITH AFHSS IN CONDITIONS OF DESTRUCTIVE INFLUENCE OF INTENTIONAL INTERFERENCE

Keywords: *frequency hopping spread spectrum, intentional interference, orthogonal frequency-division multiplexing, noise immunity.*

Abstract. *The issues of joint use of the OFDM modulation method (multiplexing with orthogonal frequency division of channels) and the transmission method with pseudo-random frequency hopping under the influence of intentional spectrum-focused interference spectrum under the influence of the worst noise interference in a part of the frequency band are considered.*

Ю.В. Ямченко, Д.С. Дубровкин
МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 004.8

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРНЫХ ПРИЗНАКОВ КЛАВИАТУРНОГО ПОЧЕРКА

Ключевые слова: *клавиатурный почерк, машинное обучение, кластерный анализ, корреляционный анализ, метод главных компонент, метод K-средних.*

В работе приведена методология сбора данных и кластерного анализа временных характеристик клавиатурного почерка (КП) пользователей информационной системы с использованием методов машинного обучения. Исследованы взаимосвязи между значениями характеристик КП различных пользователей. В финальной части работы представлены результаты кластеризации пользователей, проведенной в соответствии с описанной методологией на данных сотрудников IT-компаний.

1. Постановка задачи. Пусть данные пользователей произвольной информационной системы представлены в формате

$$D_i = \{R_j^{(i)} \mid R_j^{(i)} = \{t_j^{(i)}, c_j^{(i)}, e_j^{(i)}\}, t_j^{(i)} < t_{j+1}^{(i)}, 0 \leq j \leq M_i\}, 0 \leq i \leq N, \quad (1)$$

где D_i – цепочка событий i -того пользователя; $t_j^{(i)}$ – временная метка, соответствующая j -тому событию i -того пользователя; $c_j^{(i)}$ – цифровой код клавиши в событии j для i -того пользователя; $e_j^{(i)} \in \{UP, DOWN\}$ – тип I -того события (нажатие/отжатие клавиши) для i -того пользователя; M_j – число событий в цепочке событий i -того пользователя; N – число пользователей.

Множество векторов характерных признаков (ВХП), полученных на основании собранных данных (1), обозначим как

$$V = \{V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(N)}\}.$$

Здесь $V^{(i)} = f(D_i)$, $0 \leq i \leq N$ – ВХП i -того пользователя;

$f : D_i \rightarrow V^{(i)}$ – функция преобразования данных пользователя в ВХП.

Тогда задача кластеризации пользователей, каждый из которых представлен ВХП $U^{(i)}$, будет иметь вид

$$Q(f^*, C, \rho) = \min_f Q(f, C, \rho), \quad (2)$$

$$C_i = \{V^{(j)} \in V, f(V^{(j)}) = i\}, C_i \cap C_k = \emptyset,$$

где $f : V \rightarrow Y$ – функция преобразования ВХП в номер кластера; $\rho(V^{(i)}, V^{(j)})$ – функция расстояния между ВХП пользователей; $C = \{C_1, C_2, \dots, C_M, M < N\}$ – множество кластеров; $Q(f^*, C, \rho)$ – критерий качества кластеризации.

2. Методология сбора данных и кластеризации. Для организации процесса сбора данных разработан программный комплекс, включающий клиентскую и серверную части. Клиентская часть представляет собой приложение для сбора данных на рабочих машинах сотрудников и отправки их на центральный сервер. Сервер агрегирует данные всех сотрудников в базе данных и предоставляет *API* для доступа к ним.

На основании собранных данных производится расчет ХП клавиатурного почерка (КП) пользователей. Правила построения ХП КП описаны в работах [1; 2]. Затем выполняем фильтрацию значений признаков от выбросов по правилу

$$F_{25\%}^i - 1,5 * IQR \leq f_j^{(i)} \leq F_{75\%}^i + 1,5 * IQR,$$

где

$$IQR = F_{75\%}^i - F_{25\%}^i, f_j^{(i)} \in F^i \subset R^{|F|}, 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq |F^i|.$$

Здесь $F^i \subset F$ – множество значений признаков i -того пользователя; F – пространство признаков; $F_{25\%}^i, F_{75\%}^i$ – 25-й и 75-й перцентили множества F^i соответственно; IQR – межквартильный размах.

На основании значений признаков, полученных после фильтрации, для каждого пользователя строим вектор характерных признаков (ВХП)

$$V^{(i)} = \{U_0^{(i)} \cup \dots \cup U_{|F|}^{(i)} \mid U_j^{(i)} = \{\mu_j^{(i)}, \sigma_j^{(i)}\}, j \in [0; |F|]\}, 0 \leq i \leq N,$$

где $\mu_j^{(i)}$ – среднее арифметическое элементов множества $F_j^i \subset F^i$; $\sigma_j^{(i)}$ – дисперсия элементов множества F^i ; F_j^i – множество значений j -того признака i -того пользователя.

Таким образом, для каждого сотрудника получаем множество ВХП.

Затем исследуем возможность сокращения размерности ВХП путем выявления и отсеивания сильно коррелирующих компонентов. В качестве метода сокращения размерности может быть использован один из методов, представленных в [3–5]. Получим множество ВХП в редуцированном пространстве $R^{|U|}$

$$U = \{U_1, U_2, \dots, U_{|U|}\}, \quad |U| < |F|.$$

Решим задачу (2) с применением одного из методов кластеризации, описанных в [6; 7].

3. Вычислительный эксперимент. Эксперимент выполнен для сотрудников одной из российских ИТ-компаний. В эксперименте приняли участие 70 человек (34 мужчины и 36 женщин), для которых в течение одной рабочей недели накапливались данные КП. В исследовании установлено ограничение снизу на размер данных. Поэтому обработке подвергнуты результаты только 43 сотрудника (20 мужчин, 23 женщины), для которых размер цепочки событий (1) насчитывал минимум 100 элементов.

Для эксперимента выбраны тринадцать временных характерных признаков из [4–5]. Пространство признаков включает: время удержания клавиши, время ввода (*dwelt time*) би/три-грамм, время между нажатиями (*flight time*) би/три-грамм, продолжительность ввода (*duration*) би/три-грамм, время между отпусканиями клавиш (*up-duration*) би/три-грамм, скорость набора (*typing speed*) в 60-секундном интервале.

Анализ матрицы корреляций данных показал сильную взаимосвязь между средними значениями и значениями стандартных отклонений большинства признаков за исключением признаков *dwelt time* и *timespeed*.

Учитывая наличие корреляций в исходном признаковом пространстве, применим метод *РСА* для сокращения размерности ВХП пользователей. Метод позволяет выделить $|F|$ ортогональных независимых друг от друга векторов (главных компонент), вдоль которых выборочная дисперсия данных будет максимальной. Метод также позволяет оценить прирост информации, получаемый с добавлением в базис каждого из векторов.

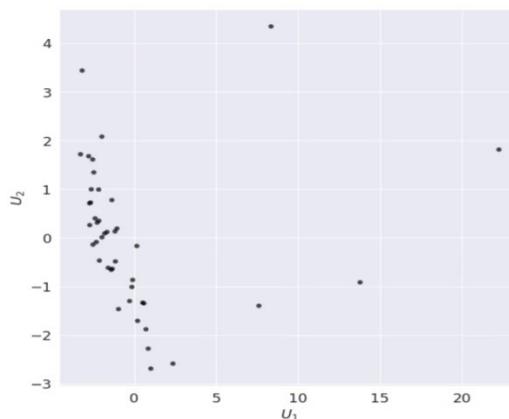


Рис. 1. Векторы сотрудников в базисе U

Для дальнейшего анализа выбрано множество из двух главных компонент метода *РСА*, объясняющих 93% вариабельности данных.

На рисунке 1 изображено представление ВХП пользователей в пространстве, образованном главными компонентами $U = \{U_1, U_2\}$.

Видно, что большинство ВХП сгруппированы в один большой кластер и расположены вдоль некоторой прямой. Однако часть ВХП расположена в отдалении от остальных и представляет собой кластеры из одного элемента ВХП. Выполняем повторный расчет, исключив эти векторы ВХП из матрицы V . На рисунке 2 приведены результаты повторного применения метода PCA в базисе главных компонент $\tilde{U} = \{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3\}$, объясняющих более 90% вариабельности данных.

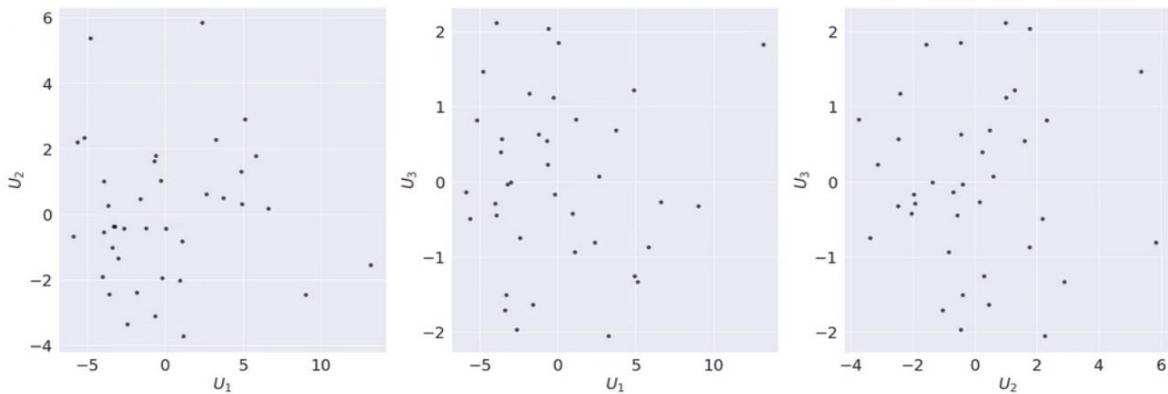


Рис. 2. Проекция векторов ХП сотрудников на плоскости, образованные векторами главных компонент \tilde{U}

Решим задачу кластеризации (2) методом K -средних (K -Means) с выбором числа кластеров по методу «каменистой осыпи». Для оценки качества кластеризации K -Means используем метрику

$$Q(f^*, C, \rho) = \sum_{k=1}^K \sum_{i \in C_k} \rho(U^{(i)}, \eta_k), \quad (3)$$

где η_k – центроид кластера C_k .

Поскольку минимум функционала (3) достигается при числе кластеров равном числу элементов в выборке, для определения числа кластеров часто используют эвристическое правило

$$D(k) = \frac{|Q(f^*, C^{(k)}, \rho) - Q(f^*, C^{(k+1)}, \rho)|}{|Q(f^*, C^{(k-1)}, \rho) - Q(f^*, C^{(k)}, \rho)|} \rightarrow \min_k,$$

где $C^{(l)}$ – множество кластеров мощностью l , полученное на текущей итерации алгоритма. В качестве функции оценки расстояния между объектами принимаем евклидову норму

$$\rho(Z^{(i)}, Z^{(j)}) = \|Z^{(i)} - Z^{(j)}\|_2.$$

В ходе анализа результатов исследования исходное множество из 43 сотрудников было разбито на 16 кластеров, 8 из которых содержат по одному элементу.

В исследовании показано, что с использованием ХП КП пользователей информационной системы можно разбить на ряд групп, обладающих некоторым набором схожих характеристик.

Методология, представленная в данной работе, может быть использована для организации процесса сбора данных КП пользователя информационной системы, построения ВХП пользователей и проведения кластерного анализа на основании собранных данных. Результаты данной работы будут использованы в дальнейших исследованиях, касающихся оценки эмоциональных состояний и типов личности пользователей на основании характерных признаков КП.

Литература

1. Ямченко Ю.В., Дубровкин Д.С., Палецкий А.Н. Обзор методов определения эмоционального состояния пользователей информационных систем по клавиатурному почерку // Системы высокой доступности. 2020. № 1. С. 65-80.
2. Ямченко Ю.В. Методы решения задач аутентификации и идентификации пользователя на основе анализа клавиатурного почерка // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2020. № 1 (130). С. 124-139.
3. Priaynka J., Dharmender K. A Review on Dimensionality Reduction Techniques // International Journal of Computer Applications. 2017. Vol. 173(2). P. 42-46.
4. Sorzano C., Vargas J., Pascual-Montano A. A survey of dimensionality reduction techniques // arXiv.org. 2014. Дата обновления: 12.03.2014. URL: <https://arxiv.org/abs/1403.2877> (дата обращения: 05.01.2021).
5. Chao G., Luo Y., Ding W. Recent advances in supervised dimension reduction: A survey // Machine Learning and Knowledge Extraction. 2019. Vol. 1(1). P. 341-358.
6. Omran M., Engelbrecht A., Salman A.A. An overview of clustering methods // Intelligent Data Analysis. 2007. Vol. 11 (6). P. 583-605.
7. Singh S., Srivastva S. Review of Clustering Techniques in Control System // Procedia Computer Science. 2020. Vol. 173. P. 272-280.

Y.V. Yamchenko, D.S. Dubrovkin
Bauman Moscow State Technical University

USERS CLUSTERING THROUGH TIME-BASED KEYSTROKE DYNAMICS CHARACTERISTICS ANALYSIS

Keywords: *keystroke dynamics, machine learning, clustering, correlation analysis, PCA, K-Means.*

Abstract. *The paper presents the methodology of user keystroke dynamics (KD) data collection and cluster analysis using machine learning algorithms. We also investigate correlations between KD feature values of different users. The final part of the work shows the results of the cluster analysis carried out in accordance with the described methodology on the data of the IT company employees.*

СЕКЦИЯ 2

Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

П.В. Беляков

Смоленский государственный университет

УДК 004.021

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ АНТЕННЫХ РЕШЁТОК ДЛЯ ПЕЛЕНГАЦИИ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Ключевые слова: цифровые антенные решётки, радиолокация, акустические системы, беспилотные летательные аппараты, диаграмма направленности.

В статье рассматриваются преимущества применения цифровых антенных акустических решёток для пеленгации объектов, а также те проблемы, которые могут возникнуть при разработке подобных систем, и пути их устранения.

Актуальность. Развитие радиолокации имеет существенную историю. С момента получения первого отражённого сигнала в радиодиапазоне ведётся постоянная борьба между системами обнаружения и противодействия локации. В итоге радиолокация существенно разрослась методами и подходами, однако и средства защиты от обнаружения не стоят на месте. В современном обществе помимо наращивания методов борьбы появился новый метод эффективной защиты от обнаружения – малые беспилотные летательные аппараты. Достаточно сложно достоверно утверждать, летит ли это птица или же малый беспилотник. На принятие решения может уйти время, которого будет достаточно для выполнения цели беспилотника. Для устранения данной бреши всё чаще, помимо усложнения методов принятия решений на базе радиолокации, в систему локации включают иные методы обнаружения и принятия решений, например, визуальные средства обнаружения и принятия решений, например, визуальные средства обнаружения и акустические системы [1]. Но оба этих подхода в привычном виде имеют существенные минусы: визуальный ограничен разрешающей способностью камер, к тому же изображения сложны для обработки. Акустические же системы очень зашумлены фоновыми звуками, что усложняет их применение. В данной статье упор делается на акустические

системы и их улучшение с целью применения в пеленгации, в частности, создание акустических направленных цифровых решёток.

1. Классификации и проблемы. Существует три основных класса радиолокационных систем: через параметр относительной широкополосности спектра сигнала, через разрешающую способность по дальности и через отношение размера проекции апертуры антенны к размеру элемента разрешения по дальности [2]. Акустические антенные решётки можно рассматривать в качестве приемлемой системы пеленга и локации только в третьем классе, однако для этого необходимо, чтобы проекция апертуры антенны была значительна по сравнению с одним элементом, что смещает выбор в сторону многоэлементных решёток. Этот выбор, в свою очередь, создаёт необходимость синхронного цифрового управления входного сигнала с разных элементов, что приводит нас к цифровым акустическим системам. Несмотря на теоретические преимущества и простоту данного вида решёток, на данный момент не существует серийной модели подобного типа, что говорит о возможных сложностях при разработке. В первую очередь это сложности именно в синхронизации сигналов, поскольку входной сигнал на микрофоне имеет сильную зашумлённость, что усложняет калибровку системы.

2. Основной математический аппарат синхронизации сигналов. Основой при работе с цифровыми антенными решётками является построение диаграммы направленности, которое позволяет обеспечить пеленг и локацию. Для формирования диаграммы направленности следует выполнить синтез диаграммы направленности в режиме приёма. Для этого необходимо вычислить значения согласно формуле:

$$G = \frac{4 \cdot \pi \cdot S_A}{\lambda^2}, \quad (1)$$

где S_A — эффективная площадь, которая рассчитывается по формуле:

$$S_A = \frac{\pi \cdot d_A^2}{4}, \quad (2)$$

где d — протяжённость апертуры антенны. Формулы (1) и (2) связаны с диаграммой направленности следующим соотношением:

$$\theta_A = \frac{\lambda}{d_A}, \quad (3)$$

где θ_A — ширина диаграммы направленности по половинной мощности, λ — длина волны [3]. Как видно из формул (1, 2, 3), для увеличения коэффициента усиления следует увеличить эффективную площадь антенной решётки. Этого можно добиться и через увеличение размеров приёмного элемента, однако данный метод имеет физические ограничения, поскольку большая эффективная площадь одного элемента требует больших затрат на создание, сложна в производстве и её размеры получаются больше, чем размеры цифровых антенных решёток при том же коэффициенте усиления [4]. Конечно, цифровые системы также имеют

свои проблемы, например, их тяжело настраивать и они чувствительнее в эксплуатации. Однако второе решается различными средствами повышения износостойкости оборудования, а первое стало значительно проще с развитием компьютеров. То, что раньше занимало много ресурсов и времени и показывало себя неэффективно, сейчас можно легко распараллелить, что приводит к увеличению скорости обработки, вплоть до одновременной обработки всех частей антенной решётки [2].

3. Применение параллельной обработки сигнала для построения цифровой антенной решётки. Возьмём цифровую антенную решётку из 8 элементов. Конфигурация элементов в решётке не столь важна, но для определённости возьмём 8 подряд идущих элементов, расположенных в одну линию. Пусть за каждым элементом закреплён свой поток на процессоре компьютера. Тогда вычисление диаграммы направленности можно проводить одновременно, работая сразу в 8 потоках. Это даёт, помимо увеличения скорости обработки, заметные преимущества в обработке сигнала. Так, например, можно управлять независимо каждым элементом решётки, включая и выключая его из решётки, что увеличивает отказоустойчивость системы. Можно задавать программные задержки между элементами в потоках, что позволяет создавать «виртуальные» повороты диаграммы направленности без изменения физического положения решётки. Также одновременная обработка позволяет повысить чувствительность всей системы за счёт сокращения цикла приёма сигнала до минимально возможного. Однако с применением подобной системы могут возникнуть некоторые проблемы.

4. Проблемы применения цифровых антенных решёток с параллельной обработкой. Среди проблем описанных выше систем можно указать повышение требований ресурсной базы для запуска системы. Кроме того, стоит упомянуть, что создание и эксплуатация подобного оборудования требует высокой квалификации от пользователя, что также повышает стоимость системы. Математический аппарат подобных систем недостаточно проработан, что может привести к ошибкам в эксплуатации и увеличению сроков разработки оборудования. Конечно же, большую часть этих проблем можно решить в ближайшее время.

5. Решение проблем применения цифровых антенных решёток с параллельной обработкой. Указанные выше проблемы уже сейчас имеют несколько вариантов решения. Так, усложнение элементной базы можно решить переносом части обработки на приёмные элементы, такие как ПЛИС, что сократит нагрузку на вычислительные мощности компьютера и приведёт к увеличению скорости обработки. Вопрос создания и эксплуатации требует создания подробной документации к оборудованию и обучению кадров, которые будут работать с оборудованием, что требует от разработчиков обеспечения поддержки всей системы. Разработка

математического аппарата является на данный момент слабым местом подобных систем, которое зачастую заставляет сделать выбор в пользу стандартного аналогового подхода, но уже сейчас можно заметить положительную тенденцию в работе над этим вопросом, который в скором времени может изменить подход к созданию подобных систем и даст преимущество перед иными типами антенных решёток как на рынке, так и в лабораторных исследованиях.

6. Вывод. Цифровые антенные решётки имеют существенные преимущества перед аналоговыми, однако сложность в разработке, повышенные ресурсные требования и недостаточно развитый математический аппарат не дают им в полной мере раскрыть свой потенциал. Сейчас с применением многоядерных процессоров для обработки сигнала появилась возможность существенно продвинуть данное направление радиолокации. Использование нескольких потоков позволяет полноценно раскрыть потенциал систем, использовать те возможности, которые недоступны аналоговым решёткам либо их реализация в рамках аналогового подхода слишком сложна и ресурсозатратна. Включение параллелизма в создание и эксплуатацию цифровых антенных систем позволяет решить часть проблем, которые стояли перед ними до этого, но также добавляет ещё несколько и не решает часть из тех, что были до этого. Однако сейчас наблюдается положительная тенденция к работе над подобными системами, что может в скором времени привести к существенному положительному сдвигу в данном направлении.

Литература

1. Виноградов А.Д., Михин А.Ю., Подшивалов Г.В. Методика проектирования эквидистантных кольцевых антенных решёток широкодиапазонных фазочувствительных радиопеленгаторов // Антенны. 2012. № 4 (179). С. 11–21.
2. Зайцев А.В. Теоретические основы расчета нестационарных электромагнитных полей. Смоленск, ВА ВПВО ВС РФ, 2011. 201 с.
3. Слюсар В.И. Схемотехника цифрового диаграммообразования. Модульные решения // Электроника: наука, технология, бизнес. 2002. № 1. С. 46–52.
4. Слюсар В.И. Точность измерений угловых координат линейной цифровой антенной решеткой при неидентичностях приемных каналов // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. 1999. Т. 42, № 1. С. 18.

P.V. Belyakov

Smolensk State University

APPLICATION OF DIGITAL ANTENNA ARRAYS FOR DIRECTION FINDING OF UNMANNED AERIAL VEHICLES

Keywords: *digital antenna arrays, radar, acoustic systems, unmanned aerial vehicles, radiation pattern.*

Abstract. *The article discusses the advantages of using digital acoustic antenna arrays for the direction finding of objects, as well as the problems that may arise in the development of such systems and ways to eliminate them.*

В.В. Борисов

Филиал Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске

УДК 004.8

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ТЕХНОЛОГИИ МОНИТОРИНГА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ГОРОДСКОЙ СРЕДЫ¹

Ключевые слова: интеллектуальные методы и технологии, мониторинг и прогнозирование, состояние городской среды.

Охарактеризованы проблемы мониторинга и прогнозирования состояния объектов городской среды. Рассмотрены возможности интеллектуальных методов и моделей для решения задач мониторинга и прогнозирования состояния городской среды. Описаны предложенные методы и модели: анализа воздействия климатических явлений на уязвимости городской среды; мониторинга динамики изменения кластеров городской среды; многомерного прогнозирования состояния городской среды; оценки готовности и управления городскими службами.

Одними из основных проблем мониторинга и прогнозирования состояния городской среды, обуславливающих целесообразность использования для решения этих задач интеллектуальных методов, моделей и технологий, являются следующие:

- разнородность объектов и процессов, происходящих в городской среде, разнотипность взаимосвязей между этими объектами;
- сложность формализованного представления и анализа состояния городской среды в рамках единой модели;
- сложность учета влияния и неопределенность воздействия различных явлений и факторов на уязвимости объектов городского хозяйства;
- затратность и трудоемкость получения качественной и оперативной информации о состоянии объектов городской среды;

¹ *Работа выполнена в рамках государственного задания, проект № FSWF-2020-0019, а также при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-29-03088_мк.*

- информация об объектах городской среды и происходящих в них процессах зачастую может быть представлена либо в виде экспертных данных, либо в виде эвристик;

- сложность применения традиционных методов, моделей и технологий для анализа таких объектов и происходящих в них процессов [1-5].

Указанные выше проблемы позволяют для решения задач мониторинга и прогнозирования состояния объектов городской среды обосновать целесообразность использования интеллектуальных методов, моделей и технологий, обладающих следующими возможностями:

- формализация и анализ не только системы, но и отдельных проблемных ситуаций с обеспечением требуемого уровня достоверности моделирования;

- единство представления и анализа событий, системных параметров, внешних факторов, целевых функций и ограничений за счет их грануляции;

- обеспечение единого подхода к анализу объектов городской среды;

- мультимодальное представление и использование разнородной информации о состоянии объектов городской среды;

- наглядность и хорошие интерпретационные свойства промежуточных и итоговых результатов мониторинга и прогнозирования состояния объектов городской среды;

- адекватный учет различных типов неопределенности в рамках реализации единого подхода к мониторингу и прогнозированию состояния объектов городской среды [6].

В работе рассматривается следующая совокупность предложенных методов и моделей для комплексного решения задач мониторинга и прогнозирования состояния городской среды:

- гибридная байесовская модель и способ анализа многофакторных климатических явлений анализа воздействия явлений на уязвимости городской среды [7];

- метод мониторинга динамики изменения кластеров объектов городской среды [8];

- модель и метод многомерного прогнозирования состояния городской среды [9];

- модель и метод оценки готовности и управления городскими службами [10].

Разработанная *гибридная байесовская модель* и основанный на ней способ позволяют оценивать влияние многофакторных климатических явлений на уязвимости городской среды, позволяя анализировать не только воздействие всей совокупности факторов, но также и учитывать их «персонифицированное» взаимодействие для различных наборов этих

факторов, причем гибко и оперативно изменяя структуру и параметры модели [7].

Предложенная гибридная байесовская модель обеспечивает возможность достоверного анализа многофакторных явлений и процессов, характеризующиеся высокой степенью неопределенностью. Предложен алгоритм, обеспечивающий удобство формирования таблиц условных вероятностей. Результаты анализа, полученные с использованием разработанной модели, востребованы для последующего решения задач решения задач мониторинга динамики изменения кластеров объектов и многомерного прогнозирования состояния городской среды.

Задачу мониторинга динамики изменения кластеров городской среды предлагается реализовать на основе *сочетания нечеткого когнитивного подхода и методов динамической кластеризации* [11; 12].

При этом нечеткий когнитивный подход предоставляет конструктивные возможности единообразного формализованного описания взаимозависимостей между внешними факторами, событиями и объектами городской среды на основе оценки нечетких отношений взаимовлияния и, таким образом, позволяет применить аппарат нечеткой каузальной алгебры для предварительного анализа характеристик городской среды и оценки ее устойчивости [13].

Результаты данного предварительного анализа используются, в том числе, для выбора и обоснования системных показателей (основанных на нечетких отношениях взаимовлияния объектов городской среды) с целью последующего мониторинга динамики изменения кластерной структуры городской среды.

Мониторинг динамики изменения кластерной структуры городской среды осуществляется с использованием метода нечеткой кластеризации, оценивающего степени принадлежности объектов городской среды к соответствующим выявленным кластерам [14]. К задачам мониторинга динамики кластерной структуры относятся следующие: анализ изменения положения центров и границ кластеров; ликвидация и образование кластеров; слияние и расщепление кластеров. Одновременно с задачей мониторинга динамики изменения кластеров городской среды решается и задача оценки степени устойчивости этих «кластерных образований». В докладе решение задач мониторинга динамики изменения кластерной структуры проиллюстрировано на примере энергетической системы Смоленского региона [8].

Для многомерного прогнозирования состояния городской среды предложена оригинальная разновидность *нечетко-нейросетевой когнитивной темпоральной модели*, а также основанный на ней метод. Предложенная разновидность этих интеллектуальных моделей ориентирована на многомерный анализ и прогнозирование состояния городской среды в условиях неопределенности, нелинейности

взаимовлияния, рассогласованности и взаимозависимости факторов и объектов городской среды [9].

Созданные нечетко-нейросетевые когнитивные темпоральные модели включают в себя множества концептов (соответствующих внешним факторам и объектам городской среды), которые реализуют нечеткие темпоральные преобразования. Эти концепты связаны совокупностями нечетких степеней влияния, которые хронологически упорядочены с учетом временных задержек влияния концептов друг на друга. Для осуществления нечетких темпоральных преобразований используются разработанные нейро-нечеткие *RecANFIS*-модели (*Recurrent Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System*), которые, в том числе, осуществляют идентификацию и учет соответствующих нечетких тенденций изменения при прогнозировании состояния соответствующих объектов. Использование предложенных нечетко-нейросетевых когнитивных темпоральных моделей, в свою очередь, потребовало реализации оригинального подхода и разработки нового способа структурно-параметрической настройки этих моделей, состоящего: из, во-первых, задания структурных взаимосвязей модели (в виде временных задержек взвешенных нечеткими значениями влияния концептов друг на друга; во-вторых, параметрической настройки *RecANFIS*-моделей; в-третьих, согласования между собой всех *RecANFIS*-моделей для обеспечения максимальной точности прогнозирования состояния каждого объекта городской среды.

Метод многомерного прогнозирования состояния городской среды, основанный на использовании предложенной модели, позволяет выполнять не только прогнозную оценку состояния каждого объекта городской среды для произвольных моментов времени, но и осуществить моделирование изменения их состояний при различных сценарных воздействиях на значения концептов и на отношения влияния между ними.

В работе приведены результаты экспериментальных исследований применения предложенного метода на примере задачи многомерного прогнозирования состояния городской среды г. Москвы, а также итоги его сравнительной оценки с другими методами, обосновывающими повышение точности прогноза в условиях малых выборок и неопределенности [9].

В качестве еще одной важной задачи, востребованной не только при мониторинге и прогнозировании, но и для управления состоянием городской среды в целом, является задача оценки готовности и управления городскими службами. Для решения этой задачи в работе предлагается *метод оценивания и обоснования мероприятий по повышению готовности городских служб*, базирующийся на разработанной композиционной гибридной нечеткой модели для анализа взаимовлияния факторов и оценки готовности городских служб.

Метод включает в себя: во-первых, анализ взаимовлияния факторов, воздействующих на уровень готовности городских служб; во-вторых, оценку степени готовности городских служб; в-третьих, обоснование и группирование мероприятий по обеспечению требуемого уровня готовности городских служб; в-четвертых, моделирование динамики изменения степени готовности городских служб; в-пятых, выбор мероприятий по обеспечению требуемого уровня готовности городских служб в течение всего времени выполнения их задач по назначению; в-шестых, оценку степени реализации выбранных мероприятий и выработку рекомендаций по результатам моделирования. Метод базируется на разработанной композиционной модели, включающей в себя: во-первых, нечеткую когнитивную модель для анализа взаимовлияния факторов, воздействующих на степень готовности городских служб; во-вторых, нечеткую оценочную модель готовности городских служб. В статье также обоснована модель системной динамики и описаны методики обоснования мероприятий по обеспечению требуемого уровня готовности городских служб; моделирования, оценки и выбора мероприятий по обеспечению требуемого уровня готовности городских служб [10].

Предложенная совокупность методов и моделей объединена в сквозную интеллектуальную технологию мониторинга и прогнозирования состояния городской среды.

Литература

1. Savaget P., Geissdoerfer M., Kharrazi A., Evansa S. The theoretical foundations of sociotechnical systems change for sustainability: A systematic literature review // Journal of Cleaner Production. 2019. Vol. 206(1). P. 878-892.
2. Borrás S., Edler J. (Eds) The Governance of Socio-Technical Systems: Explaining Change. Cheltenham: Edward Elgar Publishing, 2014.
3. Nemtinov V., Zazulya A., Kapustin V., Nemtinova Y. Analysis of decision-making options in complex technical system design // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1278(1), p. 012018.
4. Klimenko V.V., Klimenko A.V., Tereshin A.G., Beznosova D.S., Andreychenko T.N. Changing Pattern and Amount of the Residential and Commercial Energy Consumption in Response to Economic and Climatic Factors // Thermal Engineering. 2012. Vol. 59, No. 11. P. 807-815.
5. Arzhanov M.M., Eliseev A.V., Klimenko V.V., Mokhov I.I., Tereshin A.G. Estimating Climate Changes in the Northern Hemisphere in the 21st Century under Alternative Scenarios of Anthropogenic Forcing // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2012. Vol. 48, No. 6. P. 573-584.
6. Борисов В.В. Систематизация нечетких и гибридных нечетких моделей // Мягкие измерения и вычисления. 2020. Т. 29, № 4. С. 98-120.
7. Borisov V., Lufarova E. Analysis of the multifactorial phenomena based on fuzzy Bayesian model // Russian Advances in Artificial Intelligence: selected contributions to the 8-th International Conference on Fuzzy Systems, Soft Computing and Intelligent

Technologies (FSSCIT-2020), 2020. June 29 – July 1. Smolensk, Russia. P. 48-58. http://ceur-ws.org/Vol-2782/paper_07.pdf.

8. Арбузов А.Д., Борисов В.В., Дли М.И. Мониторинг кластеров социотехнических систем на основе нечеткого когнитивного подхода и методов динамической кластеризации // Мягкие измерения и вычисления. 2020. Т. 33, № 8. С. 26-37.

9. Borisov V., Luferov V. Neuro-Fuzzy Cognitive Temporal Models for Predicting Multidimensional Time Series with Fuzzy Trends // Computación y Sistemas. 2020. Vol. 24, No. 3. P. 1165-1177.

10. Борисов В.В., Здиорук Д.А. Метод оценивания и обоснования мероприятий по обеспечению готовности формирований МЧС на основе нечетких когнитивно-логических моделей // Мягкие измерения и вычисления. 2020. Т. 33, № 8. С. 75-88.

11. Angstenberger L. Dynamic fuzzy pattern recognition with applications to finance and engineering. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001.

12. Гимаров В.А., Дли М.И., Битюцкий С.Я. Задачи нестационарной кластеризации состояния нефтехимического оборудования // Известия вузов. Химия и химическая технология. 2004. Т. 47, № 8. С. 143-147.

13. Силов В.Б. Принятие стратегических решений в нечеткой обстановке. М.: ИНПРО–РЕС, 1995.

14. Geva A.B., Steinberg Y., Bruckmair S., Nahum G. A Comparison of Cluster Validity Criteria for a Mixture of Normal Distributed Data // Pattern Recognition Letters. 2000. Vol. 21(6-7). P. 511-529.

V.V. Borisov

Branch of the National Research University
«Moscow Power Engineering Institute» in Smolensk

INTELLIGENT METHODS AND TECHNOLOGIES FOR MONITORING AND FORECASTING THE STATE OF THE URBAN ENVIRONMENT

Keywords: *intelligent methods and technologies, monitoring and forecasting, the state of the urban environment*

Abstract. *The problems of monitoring and forecasting the state of urban environment objects are characterized. The possibilities of intelligent methods and models for solving problems of monitoring and forecasting the state of the urban environment are considered. The proposed methods and models are described: analysis of the impact of climate phenomena on the vulnerability of the urban environment; monitoring the dynamics of changes in urban clusters; multidimensional forecasting of the state of the urban environment; assessment of readiness and management of urban services.*

ЭВОЛЮЦИЯ КРУПНЕЙШИХ ФАЙЛООБМЕННЫХ СЕТЕЙ: РОСТ И ЗАБВЕНИЕ

Ключевые слова: *торрент, фазовое пространство, эволюция, принцип предпочтительного присоединения.*

В статье рассматривается экспериментальное исследование развития крупнейших русскоязычных торрент-трекеров за прошедшие десять лет. Описывается методика измерения, используемые инструменты, полученные результаты. Рассматриваются основные тенденции развития и разработка динамической модели на основе полученных данных.

1. Постановка задачи. Распространение информации в настоящее время немыслимо без протокола BitTorrent [1], позволяющего пользователям обмениваться файлами напрямую, не создавая нагрузки на сервер. Тем не менее сервер (торрент-трекер) необходим для координации информационного обмена. Часто под понятием торрент-трекера для краткости объединяют всю файлообменную сеть подобной структуры.

На заре развития Рунета (конец 80-х гг. — 90-е гг.), когда сеть состояла из множества локальных сетей, соединённых между собой тонкими и дорогими каналами, внутри каждой локальной сети имелся собственный файлообменный ресурс, и чаще всего это был именно торрент-трекер.

На рубеже тысячелетий начался активный переход к новым сетевым технологиям. У провайдеров получили распространение безлимитные тарифы, увеличилась скорость соединения с глобальной сетью, разделение трафика на локальный и внешний для пользователей всё чаще исчезало. К середине 2010-х гг. практически завершилось формирование единого пространства Рунета, при этом ещё сохранялось множество локальных торрент-трекеров.

Рассмотрим, какими же путями шла эволюция этих торрент-трекеров в последующее десятилетие – в 2010–2020-е гг.

2. Источники данных. На главной странице некоторых торрент-трекеров присутствует блок с заголовком «Статистика», включающий текущие характеристики трекера (в дальнейшем, следуя терминологии предметной области, будем называть эти характеристики статистикой торрент-трекера). К сожалению, ни один торрент-трекер не предоставляет данные об изменении характеристик в прошлом.

Для ретроспективного анализа доступны следующие источники:

- 1) непосредственные копии данных статистики торрент-трекера, доступные через сервис Internet Wayback Machine проекта Internet Archive;
- 2) новости торрент-трекера и их копии в Internet Wayback Machine;
- 3) сторонние обсуждения и статьи.

К сожалению, данные из всех трёх источников нерегулярны и неполны (запросы Internet Archive выполняются крайне нерегулярно, причём иногда статистика доступна только зарегистрированным пользователям и не видна на копии главной страницы; новости и сторонние обсуждения далеко не всегда содержат конкретные величины), но их совместное рассмотрение позволяет выявить основные тенденции эволюции торрент-трекеров и построить в первом приближении динамическую модель их эволюции.

3. Фазовые переменные. Статистика различных торрент-трекеров включает разные величины. Перечислим основные из них:

1) количество зарегистрированных пользователей торрент-трекера. Это одна из основных характеристик торрент-трекера, приводящаяся практически на всех трекерах, имеющих статистику (будем в дальнейшем обозначать её n);

2) количество сидеров (обладающих полной копией файла и предоставляющих доступ к нему пользователи [2]) на всех раздачах в момент формирования статистики. При этом, если пользователь сидирует несколько раздач одновременно, он будет учтён пропорционально несколько раз, так что количество сидеров может превышать n ;

3) количество личеров (не обладающих полной копией файла и скачивающих его у других пользователей) на всех раздачах в момент формирования статистики (аналогично);

4) количество пиров (участников информационного обмена; сидеров и личеров в сумме) торрент-трекера в настоящий момент (будем в дальнейшем обозначать его m);

5) количество зарегистрированных раздач (торрентов) торрент-трекера (будем в дальнейшем обозначать его w);

6) количество активных в момент формирования статистики (живых) раздач торрент-трекера (будем в дальнейшем обозначать его v).

В новостях торрент-трекеров и сторонних обсуждениях чаще всего упоминаются количество зарегистрированных пользователей торрент-трекера n и количество зарегистрированных раздач w .

4. Сравнительная смертность торрент-трекеров. В статье [3] рассматриваются адреса 221 русскоязычных (российских, украинских и белорусских), а также 29 англоязычных торрент-трекеров.

В настоящее время из 221 русскоязычного трекера сохранились 37 (при этом многие из сохранившихся поменяли адрес). Из 29 англоязычных

сохранились 10. Таким образом, за девять лет исчезло 84% русскоязычных и 66% англоязычных торрент-трекеров.

Рассмотренные в статье [3] торрент-трекеры можно разделить на несколько групп: крупные универсальные торрент-трекеры (на момент написания статьи таких трекеров было 6), небольшие — новые на момент написания статьи либо принадлежащие той или иной локальной сети торрент-трекеры (соответственно 31 и 43 трекера), а также торрент-трекеры, поддерживаемые коллективом авторов для распространения создаваемого ими контента. Среди каждой из этих групп процент смертности существенно отличается от средней: в настоящее время закрыты 50% крупных, 90% новых, 91% локальных в 2011 году трекеров и 50% авторских трекеров.

Таким образом, пониженную смертность имеют две группы торрент-трекеров: авторские, где распространяется уникальный контент, и крупные универсальные.

В статье [4] подробно рассмотрены именно крупные торрент-трекеры: для десяти крупнейших в 2009 г. российских торрент-трекеров указано приближённое количество пользователей n и раздач w . Из них в настоящее время существует четыре и ещё один закрылся в процессе исследования, потеряв большую часть активных пользователей.

Сравнивая данные [4] с текущими значениями n и w сохранившихся торрент-трекеров, можно сделать вывод, что, хотя все сохранившиеся трекеры увеличили n и w , разрыв между крупными и чуть меньшими за прошедшие одиннадцать лет значительно увеличился.

Таким образом, крупные торрент-трекеры растут быстрее. Это соответствует принципу предпочтительного присоединения, введённому в известной модели Барабаши—Альберт, то есть новый пользователь, выбирая между несколькими торрент-трекерами G_i , с большей вероятностью выберет более крупный торрент-трекер, чем ещё более увеличит количество его пользователей: $p_i \sim n_i$.

5. Эволюция торрент-трекера в фазовом пространстве. Исходя из данных Internet Archive и сторонних обсуждений, удалось восстановить эволюцию четырёх торрент-трекеров (рис. 1).

Торрент-трекеры рисунка 1 отличаются тем, что предоставляют статистику с n и w на протяжении всего времени существования. Два из них — рис. 1, а) и рис. 1, б) — крупнейшие торрент-трекеры, описанные в статье [4].

Как видно из рисунка 1, каждая траектория складывается из нескольких участков, на каждом из которых тенденции развития свои. Границы между участками, как можно проследить по обсуждениям, соответствуют тем или иным значимым событиям, связанным с трекером. В частности, переход от росту к убыли n связан с блокировкой трекера в той или иной подсети.

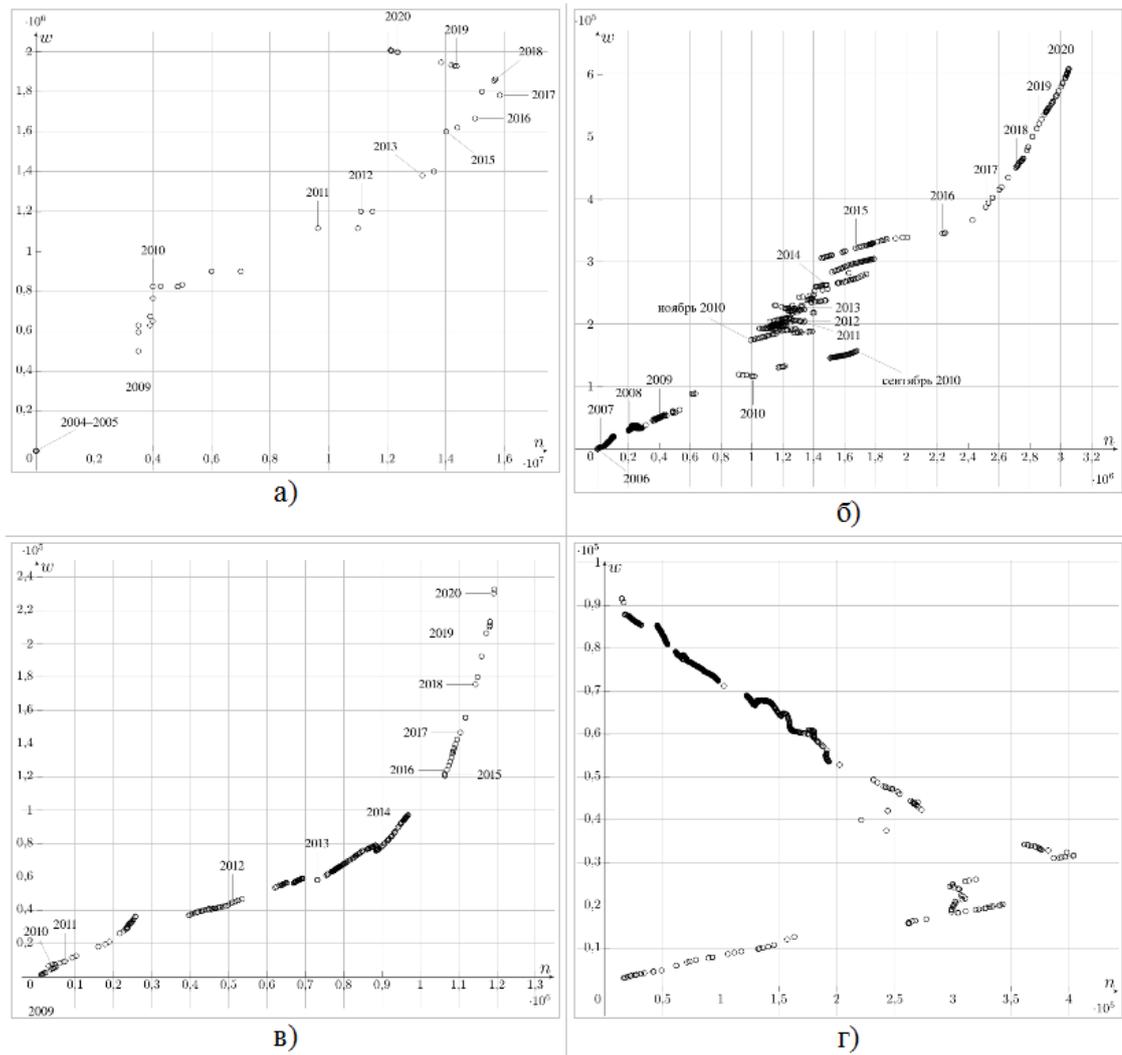


Рис. 1. Эволюция торрент-трекеров в фазовом пространстве:
 а) гигантский трекер, б) крупный, в) средний, г) малый

Видно, что участки роста либо близки к линейным (исключая случайные отклонения), либо выпуклы вниз. Участки убыли n , напротив, либо линейны, либо выпуклы вверх.

Анализ полученных данных позволил сделать следующие **выводы**:

- темпы роста n определяются текущими значениями n и w (крупные трекеры растут быстрее);
- темпы роста w определяются текущим значением n ;
- темпы убыли n и w определяются текущим значением соответствующей переменной (можно провести аналогию с радиоактивным распадом).

По полученным данным построена динамическая модель изменения n и w — вначале жёсткая [5], затем смягчённая [6].

Литература

1. Морозов Е. Как работает протокол BitTorrent // https://www.iguides.ru/main/other/kak_rabotaet_protokol_bittorrent/. 2017.
2. Кононова А. И. Динамическая модель процессов информационных обменов в пиринговой сети // Моделирование и анализ информационных систем (ВАК, WoS). 2018. Т. 25, № 4. С. 421–434.
3. Полный список русских торрент-трекеров. <https://www.liveinternet.ru/users/2389938/post176166559>.
4. Рейтинг трекеров рунета. <https://habr.com/ru/post/79835/>. 2010.
5. Арнольд В. И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2008. 32 с.
6. Кононова А. И., Гагарина Л. Г. Динамическая модель развития пиринговой файлообменной сети // Модел. и анализ информ. систем (ВАК, WoS). 2019. Т. 26, No 3. С. 351–359.

L. G. Gagarina, A. V. Gorodilov, A. I. Kononova
National Research University of Electronic Technology

EVOLUTION OF THE LARGEST FILE-SHARING NETWORKS: GROWTH AND OBLIVION

Keywords: torrent, phase space, evolution, preferred attachment principle.

***Abstract.** The article considers an experimental study of the development of the largest Russian-language torrent trackers over the past ten years. The measurement method, the tools used, and the results obtained are described. The main development trends and the development of a dynamic model based on the obtained data are considered.*

Е.И. Гончаров

Смоленский государственный университет

УДК 004.021

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ СВЕРТОК МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

Ключевые слова: алгебра многомерных матриц, свертывание многомерной матрицы, многомерные многоканальные свертки.

В статье приводится определение операции μ -свертывания многомерной матрицы. Показывается, что это частный случай центральной операции алгебры многомерных матриц – (λ, μ) -свернутого произведения. Приводится пример решения практической задачи с

использованием μ -свертывания многомерной матрицы. Учитывая, что операции алгебры многомерной матрицы легко распараллеливаются, делается вывод о возможности решения большого спектра задач с использованием программно-аппаратного комплекса, реализующего алгебру многомерных матриц.

Элементы алгебры многомерных матриц. Определения многомерной матрицы, операции ее транспонирования и (λ, μ) -свернутого произведения предложенные Н.П. Соколовым [1] неоднократно приводились в работах [2; 3]. Приведем определение операции свертывания многомерной матрицы A .

Пусть A – многомерная матрица размерности $\kappa + \mu$. Тогда результатом свертывания многомерной матрицы A станет многомерная матрица, элементы которой вычисляются по формуле: ${}^{\mu}A = \left\| \sum_c a_{ic} \right\|$ [1].

Число всевозможных свернутых матриц размерности $p - 2^p - 1$. Пусть B – многомерная матрицы размерности μ одного порядка с A , все элементы которой 1. Тогда ${}^{(0,\mu)}(A \times B) = \left\| \sum_c a_{ic} b_c \right\| = \left\| \sum_c a_{ic} \right\| = {}^{\mu}A$. То есть операция μ -свертывания многомерной матрицы является частным случаем (λ, μ) -свернутого произведения. Тем не менее разные вариации операций дискретных сверток эффективно решают самые разные задачи из теории сигналов, искусственного интеллекта и многие другие. Поэтому операции свертки (в разных их вариациях) заслуживают отдельного внимания.

Брак. Любое производство невозможно без брака. С ростом масштабов производства неизбежно растет и брак (в абсолютных величинах). В какой-то момент времени его становится так много, что сами собой появляются задачи корректного учета брака, классификации, и пр. Пусть имеется n производственных участков: $\{q_1, q_2, \dots, q_n\} = Q$. Каждый такой участок может выпустить бракованную деталь. Так как производство серийное, то на одной детали могут оказаться браки из нескольких производственных участков. Для каждого q_i ($i = 1, \dots, n$) участка характерны $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iz_i}$ типы брака. Брак может случиться на каждом из этих a участков. С каждой бракованной деталью свяжем двумерную матрицу $R = \left\| r_{k_1 k_2} \right\|$ из n строк, i – тая строка имеет u_i столбцов. Если на участке q_i был сделан брак u_{ij} , то $r_{ij} = 1$, иначе 0. Составленную таким образом матрицу будем называть матрицей брака детали (см. пример матрицы брака детали рис. 1).

Производственные участки	Лакирование	Пузыри	Кратеры	Песок	0	0	0
	Сверловка	Пробитые отверстия	Сколы от присадки	Смещение присадки	0	1	1
	Раскрой	Деталь не в размере			1		
	Покраска	Черные точки	Пятна, белесина		0	1	
	Упаковка	Сколы			0		

Рис. 1. Пример матрицы брака

Детали, в том числе и бракованные, хранятся на поддонах по t штук. Таким образом их плоские матрицы брака R_1, R_2, \dots, R_t образуют многомерную матрицу брака $J = \parallel R_1, R_2, \dots, R_t \parallel = \parallel j_{k_1 k_2 k_3} \parallel$, где $k_1 = 1, 2, \dots, t$ – номер детали в паллете, $k_2 = 1, 2, \dots, n$ – участок производства, $k_3 = 1, 2, \dots, z_i$ – тип брака.

Пример применения свертывания многомерной матрицы, (λ, μ) -свернутого произведения. Рассмотрим примеры получения осмысленного результата при применении операции свертки.

а) ${}^3 J = \parallel j_{c_1 c_2 c_3} \parallel = \parallel j_c \parallel = \sum_{(c)} j_c$ – суммирование всех элементов

многомерной матрицы брака. Результатом этой операции станет общее число дефектов при изготовлении паллеты.

б) ${}^2 J = \parallel j_{l_1 c_1 c_2} \parallel = \parallel j_{lc} \parallel = \parallel \sum_{(c)} j_{lc} \parallel$ – суммирование всех элементов

матрицы брака для каждой детали. Результатом этой операции станет вектор размера t , i -тый элемент которого – число дефектов на i -той детали.

в) ${}^1 J = \parallel j_{l_1 l_2 c_1} \parallel = \parallel j_{lc} \parallel = \parallel \sum_{(c)} j_{lc} \parallel$ – построчное суммирование всех

элементов матрицы брака для всех производственных участков для каждой детали. Результатом этой операции станет матрица размера $t \times n$, элемент, стоящий на пересечении i -той строки и j -ого столбца которой показывает число дефектов в i -той детали, сделанных на j -том производственном участке.

г) Пусть $J' = \parallel j_{k_2 k_1 k_3} \parallel = \parallel j'_{k_1 k_2 k_3} \parallel$ – многомерная матрица, полученная

транспонированием J . ${}^2 J' = \parallel j'_{l_1 c_1 c_2} \parallel = \parallel j'_{lc} \parallel = \parallel \sum_{(c)} j'_{lc} \parallel$ – суммирование

дефектов по производственным участкам при изготовлении всех деталей. Результатом этой операции станет вектор размера n , i -тый элемент которого – число дефектов на i -той производственной линии при изготовлении паллеты деталей.

д) Пусть для реставрации i -ого дефекта на j -том производственном участке необходимо f_{ij} времени, материалов, денежных единиц или прочих ресурсов. f_{ij} образует реставрационную матрицу F . Тогда результатом ${}^{0,2}(J \times F)$ – $(0, 2)$ -свернутого произведения станет вектор размера t , i -тый элемент которого – необходимая сумма для реставрации i -той детали.

е) Более полную информации о стоимости реставрации даст $(1,1)$ -свернутое произведение. ${}^{1,1}(J \times F)$ – прямоугольная матрица $t \times n$, элемент стоящий на пересечении i -той строки и j -ого столбца которой показывает затраты на реставрации у i -той детали дефектов с j -того производственного участка.

Из вышеизложенного следует, что за счет возможности выбора λ и μ в разбиении индексов многомерных матриц получилось вычислить самые разные осмысленные результаты в практических задачах.

Тривиальные операции на алгебре многомерных матриц (умножение на скаляр, сложение) не менее полезны и популярны, но в силу их простоты ситуации с примерами их употреблений были опущены.

Обоснование уместности использования. Пример подобран так, что небольшое число измерений матриц, участвующих в нем делают его очевидным. Безусловно, вышеописанные результаты можно получить и без использования многомерных матриц и операций с ними. Однако это будет громоздко. С увеличением размерностей многомерных матриц, которыми нужно оперировать, это станет практически невозможно. Н.П. Соколов уже приготовил для нас мощнейший инструмент, позволяющий быстро и эффективно работать с многомерными структурами данных.

Параллельная реализация операций алгебры многомерных матриц. Для полноценного использования алгебры многомерной матрицы ее операции должны вычисляться быстро. В [3; 4] приводится описание параллельной реализации (λ, μ) -свернутого произведения. В целом все операции алгебры многомерных матриц, являясь обобщением операций на плоских матрицах, легко сводятся к параллельно выполняемым последовательностям операций линейной алгебры.

Выводы. Разные варианты операции дискретных сверток сейчас очень востребованы для решения самых разных задач. Было приведено определение их аналога в терминах алгебры многомерных матриц – свертывание многомерной матрицы. Для иллюстрации возможностей его применения была сформулирована и решена задача обработки данных по

бракам. Рассмотренная выше операция является одной из центральных в алгебре многомерных матриц. Выбор алгебры в общем и набора операций в ней в частности диктуются условиями задачи [2]. Возможности выбора λ и μ делают алгебру многомерных матриц очень гибкой, позволяя решать с ее помощью широкий спектр задач. Так как операции алгебры многомерной матрицы естественным образом распараллеливаются, то можно говорить о создании программно-аппаратного комплекса, способного решать самые разные задачи.

Литература

1. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев: Изд-во «Наукова Думка», 1972.
2. Мунерман В.И. Архитектура программно-аппаратного комплекса для массовой обработки данных на базе многомерно-матричной модели // Системы высокой доступности. 2015. Т. 11, №. 2. С. 13-18.
3. Гончаров Е.И., Ильин П.Л. Сравнение реализаций блочного алгоритма умножения многомерных матриц // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 102-109.
4. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Параллельный алгоритм умножения многомерных матриц // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2, №. 11.

E.I. Goncharov
Smolensk State University

EXAMPLE OF APPLICATION OF CONVOLUTION OF MULTI-DIMENSIONAL MATRICES IN PRODUCTION

Keywords: *multidimensional matrix algebra, multivariate matrix convolution, multivariate multichannel convolution.*

Abstract. *In the article is the operation of μ -convolution of a multidimensional matrix was defined. It is shown that this is a special case of the central operation of the algebra of multidimensional matrices – the (λ, μ) - convolution product. An example of solving a practical problem using μ -convolution of a multidimensional matrix was given. Taking into account that the operations of the algebra of a multidimensional matrix are easily parallelized, the conclusion is drawn that it is possible to solve a wide range of problems using a software and hardware complex that implements the algebra of multidimensional matrices.*

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЭМУЛЯТОРА КВАНТОВОГО КОМПЬЮТЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ХММ РЕГИСТРОВ

Ключевые слова: *квантовые вычисления, квантовый параллелизм, векторный процессор.*

В статье рассматривается возможность разработки эмулятора квантового компьютера на основе ХММ регистров. Необходимость решения этой проблемы вытекает из того факта, что человечество находится на пороге перехода от обычных компьютеров к их квантовым аналогам. На данный момент эмуляторы развиты недостаточно хорошо для свободной работы над квантовыми алгоритмами. Однако потребность в построении квантовых алгоритмов растёт с каждым новым шагом в разработке полноценного общедоступного квантового компьютера. В статье предлагается метод построения эмулятора квантового сумматора на основе ХММ регистров.

Введение. В статье обсуждается возможность построения эффективного средства эмуляции операций квантового компьютера. На данный момент в науке наблюдается тенденция формирования сложных квантовых алгоритмов, таких как умножение и свёртка многомерных матриц. После работы над одним из таких алгоритмов стало очевидно, что использование существующих на данный момент эмуляторов не позволяет в полной мере получить представление об эффективности предложенного алгоритма. Особенности квантовых алгоритмов наталкивают на мысль о возможности применения ХММ регистров в эмуляции поведения кубита и, как следствие, эмуляции квантового алгоритма без использования огромных экономических и энергетических ресурсов и сложных структур, используемых в квантовых компьютерах.

Принцип построения эмулятора квантового векторного сумматора. Предложенный подход основан на использовании пары «связанных» ХММ регистров в качестве представления одного кубита. Такой подход позволяет приближённо, с достаточно высокой точностью реализовать координаты одного кубита. Следует лишь наложить ограничение на числа, записанные в регистр так, чтобы сумма их квадратов равнялась единице. Сохраним в эту пару регистров координаты нормализованного вектора единичной окружности и продублируем эту пару столько раз, сколько пар регистров доступно для работы. Определим операцию измерения для сложившейся последовательности пар регистров,

измерим их, в результате чего получим данные для нахождения суммы векторов. Это открывает возможность одновременной обработки единичных векторов аналогично квантовому компьютеру. Далее расширим алгоритм для работы с матрицами регистров. Это позволит перейти к векторной модели вычислений [1].

Описание квантового алгоритма, реализованного на ХММ регистрах. Возьмём два вектора a и b , такие что: $a \in Q^2, b \in Q^2$.

Нормы этих векторов будем считать равными r : $\|a\| = \|b\| = r$.

Пусть: $a' = a/r, b' = b/r$.

Получим нормализованные вектора.

В случае квантового сумматора первая координата первого вектора записывается в первую координату первого кубита как $\sqrt{a'}$. В нашем случае занесём обе координаты первого вектора в связанную пару ХММ регистров, олицетворяющих кубит. Аналогично поступим и со вторым вектором.

Далее в схемах будем использовать обозначение:

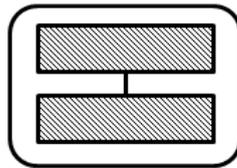


Рис 1. Эмулированный кубит

Здесь заштрихованные прямоугольники – это ХММ регистры, связанные между собой вертикальной линией. Будем считать верхний ХММ регистр первым, а нижний – вторым. Прямоугольник со скруглёнными краями обозначает, что данную связанную пару ХММ регистров рассматриваем как единый объект – эмулированный кубит.

Согласно квантовой реализации алгоритма сложения векторов, дублируем имеющиеся пары ХММ регистров ради увеличения точности вычисления и соответствия квантовым операциям. Далее увеличим значение, записанное в первый ХММ регистр каждого эмулированного $2n+1$ -го и $2n$ -ого эмулированного кубита в k^n раз. Теперь проведем одновременное измерение всех полученных эмулированных кубит [2]. В результате мы получим последовательную цепочку нулей и единиц, так называемых базисных состояний кубит. Затем, начиная с номера m , каждые две позиции не будут содержать пары нулей, что позволит полагать, что эмулированный кубит перемещается во второе базисное состояние. Следовательно, мы можем определить произведение первых ХММ регистров пары эмулированных кубитов как:

$$\frac{1}{a' \times b'} = k^{2m} \times \left(1 + \frac{1}{k^2}\right). \quad (1)$$

Знак неравенства квадратов координат изменился, начиная с выбранного нами числа m . Учитывая количество дублирующих пар ХММ регистров и шаг умножения значений k , мы получим пределы определения $a1' * b1'$, затем выберем среднее значение между пределами.

Обозначим правую часть равенства (1) как X .

Аналогично, зная число p , начиная с которого в каждой позиции будет содержаться единица, произведение вторых координат определим как:

$$\frac{1}{1 - (a1' + b1') + a1' \times b1'} = k^{2p} \times (1 + k^2). \quad (2)$$

Правую часть равенства (2) обозначим как Y .

Получаем:

$$a1' + b1' = \frac{1}{X} - \frac{1}{Y} + 1.$$

Аналогично для вторых координат векторов.

Используя полученную формулу, определяем сумму векторов как:

$$a + b = (a' + b') \times r.$$

Таким образом, реализация квантового алгоритма на ХММ регистрах прошла успешно.

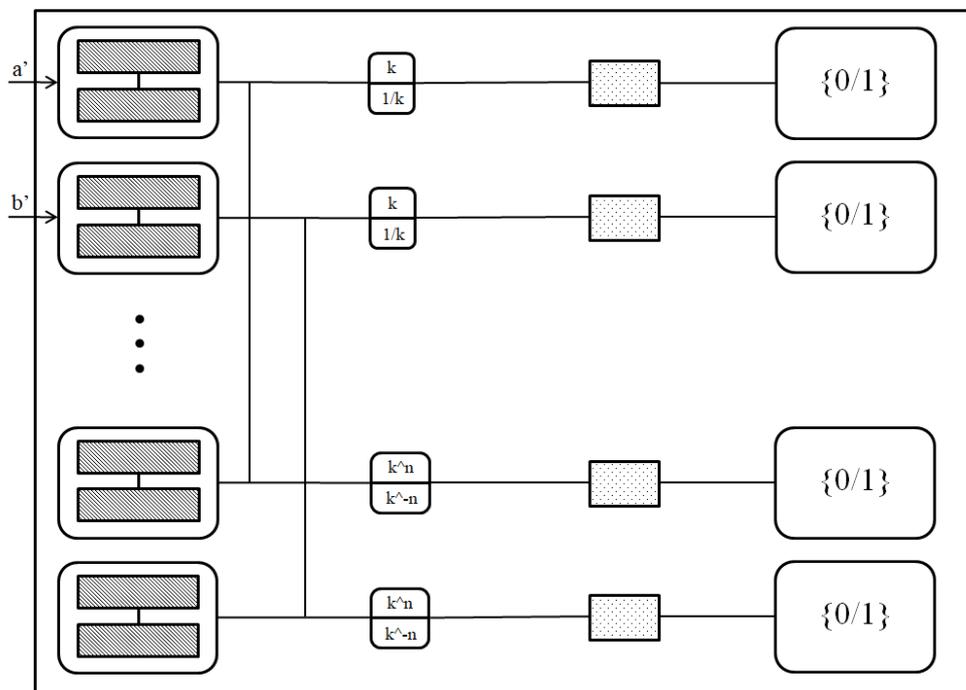


Рис. 2. Схема, описывающая предложенный алгоритм

На рисунке 2:

- Координаты векторов a и b вводятся в соответствующие ХММ регистры.
- Вертикальные отрезки обозначают связь дубликатов эмулированных кубит.
- Далее скруглённый прямоугольник – это процесс увеличения значений ХММ регистров согласно указанным для них величинам.

- После этого точечный прямоугольник – это измерение эмулированной пары, которое результирует в одно из базовых.
- Далее получается последовательность нулей и единиц (белые скруглённые прямоугольники с вариациями значений).
- После обработка последовательности, как описано выше.

Заключение. Таким образом, эмуляция квантового алгоритма с использованием XMM регистров представляется возможной и реализуемой. Предложенное описание ложится в основу для создания программного эмулятора квантового компьютера. Так как помимо сложения векторов, уже предложены квантовые алгоритмы для произведения и даже (λ, μ) -свёрнутого произведения многомерных матриц [3; 4], предлагаемый эмулятор представляется крайне полезным в использовании, так как открывает пространство для обработки таких сложных структур с применением квантового алгоритма без использования самого квантового компьютера.

Литература

1. Аффифи А., Кларк В., Мэй С. Компьютерный многомерный анализ. 4-е изд. Нью-Йорк: CRC Press. 2003.
2. Grigoryeva G. et al. Creating a Vector Processor Based on Quantum Computing // <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8657294>.
3. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев: Наукова Думка, 1972.
4. Мунерман В.И. Архитектура программно-аппаратного комплекса для массовой обработки данных на базе многомерно-матричной модели // Системы высокой доступности. 2015. Т. 11, №. 2. С. 13-18.

G.M. Grigorieva, V.Yu. Khodchenkov
Smolensk State University

ON THE POSSIBILITY OF BUILDING A QUANTUM COMPUTER EMULATOR USING XMM REGISTERS

Keywords: *quantum computing, quantum parallelism, vector processor.*

Abstract. *The article discusses the possibility of developing a quantum computer emulator based on XMM registers. The need to solve this problem stems from the fact that humanity is on the verge of transition from conventional computers to their quantum counterparts. At the moment, emulators aren't developed well enough for open work on quantum algorithms. However, the need to build quantum algorithms grows with each new step in the development of a full-fledged publicly available quantum computer. The article proposes a method for constructing a quantum adder emulator based on XMM registers.*

АНАЛИЗ ТЕХНОЛОГИЙ РАЗРАБОТКИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИХ ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЙ

Ключевые слова: *ASP, ASP.NET MVC Core 2, Java, PHP, Python, JS, PWA, скорость разработки, экономия ресурсов.*

В статье рассмотрены наиболее популярные технологии разработки пользовательских веб-приложений, их преимущества и недостатки, а также дан обзор новым решениям в данной сфере (собственно ASP.NET Core 2 и PWA). Методика анализа представляет собой представление обозреваемых технологий в виде списков с объединением результатов полученных данных в итоговую таблицу. На ее основе и будет дана оценка перспективности использования любой из технологий для конкретных задач.

Введение. На сегодняшний день наблюдается высокая скорость накопления научных знаний во всех сферах жизни, активно изобретаются новые технологии и дорабатываются старые. Эта тенденция не обошла стороной и методы разработки всевозможных приложений. Каждый год разрабатываются новые библиотеки, фреймворки и даже целые языки программирования, а те методы, которыми пользовались программисты, пять – десять лет назад устаревают. Поскольку разнообразие технологий сегодня необычайно велико, для каждого разработчика встает вопрос об определении приоритетного направления в работе. Актуальность данной статьи и обусловлена этой необходимостью. Таким образом, главной целью настоящей работы является обзор некоторых технологий разработки приложений, а также определение их сильных и слабых сторон.

ASP. и ASP.NET Core. Данная технология достаточно нова, и является продолжением уже известной ASP. Обозначим ее преимущества: компилируемый код, а значит, не будет ошибок в написании имен переменных или именах функций, как в PHP и Perl; большее быстродействие как следствие компилируемого кода; широкий набор компонентов и продуманная схема их взаимодействия, скрывающие от программиста ряд прошлых недостатков; улучшенная runtime-library; хорошая совместимость с большинством Windows-сервисов [1].

Далее взглянем на отрицательные стороны Core MVC 2, которые обусловлены новизной данной технологии, вероятно, являются рядом временных недоработок: ряд вещей, таких как Data Access, еще не

переработаны полностью; ASP.NET Core 2 – это не просто обновление предшествующей версии, но и полностью новая платформа, что может затруднить переход от одного метода к другому; также были объединены WebApi и ASP.NET Core MVC, что создаст ряд трудностей взаимодействия, поскольку некоторые библиотеки еще дорабатываются.

Исходя из данных моментов, можно сделать вывод, что новая технология пока не может иметь однозначной оценки, однако является очень перспективной.

Java. Развитие данного языка программирования продолжается и сегодня, а значит, его нельзя обойти стороной и необходимо дать оценку его возможностям в современных условиях. К преимуществам Java можно отнести следующие: это не только язык программирования, но и целый набор инструментов, включающий в себя практически все, что может понадобиться при программировании (JDK, JRE, IDE); данная технология используется практически во всех сферах программирования, являясь, к примеру, одним из основных языков для разработки на Android [2]; кроссплатформенность и гибкость при работе также являются достоинствами Java; АММ-система автоматического управления памятью. Все вышперечисленные качества делают данную технологию достаточно удобной для работы, но нельзя не отметить и некоторые недостатки: относительно низкая производительность, что обусловлено компиляцией и использованием абстракции посредством виртуальной машины; минусом является отсутствие нативного дизайна, что может усложнять работу с данным языком программирования; достаточно длинный и сложный код в целом, что будет вызывать сложности как у новичков, так и у опытных разработчиков. Для сравнения приведем Python (Листинг 1):

```
public class Main {
    public static String reverseString(String str) {
        StringBuilder reverse = new StringBuilder();
        for (int idx = hello.length() - 1; idx >= 0; idx--) {
            reverse.append(hello.charAt(idx));
        }
        return reverse.toString();
    }

    public static void main(String[] args) {
        String hello = "Hello world!";
        System.out.println(hello);
    }
}

hello = "Hello world!"
print(hello[::-1])
```

Java
Python

Листинг 1. Сравнение кода для вывода сообщения на Java и Python

Отдельно стоит отметить, что, несмотря на разницу в размере кода, это не означает, что код, написанный на Python, будет исполняться быстрее.

Таким образом, можно сказать, что Java остается на заслуженном месте среди технологий создания приложений, несмотря на определенные недостатки.

PHP. Говоря о данном языке, следует сразу отметить, что он изначально создавался для веб-разработки. К плюсам PHP можно отнести: для PHP существует большое количество библиотек, баз данных и фреймворков; высокая совместимость с серверами, из-за чего данный язык часто используется для написания бэкенда [3]; прост в освоении, а это является несомненным плюсом при подготовке будущих специалистов.

Однако нельзя не указать и на явные отрицательные стороны данной технологии: гибкость и простота кода имеют обратную сторону – без достаточных знаний и понимания функционала языка довольно просто ошибиться, а в масштабах большого проекта это создает ряд сложностей; PHP обладает сравнительно низкой производительностью, производительность падает пропорционально общему размеру кода; определенные проблемы с безопасностью, что вызвано как тем, что код существует в открытом доступе, так и вероятным наличием в нем багов, которые могут использовать злоумышленники.

Конкретный результат как перспективного языка в случае с PHP дать затруднительно, однако он способен занять свою нишу, например, при разработке небольших сайтов, особенно посредством фреймворков и «коробок» и как хороший язык для ознакомления.

Python. В оценке данной технологии можно провести аналогию с Java, так как Python также является многоцелевым языком программирования. Итак, определим сильные и слабые стороны данного языка: его можно использовать как хороший вариант для создания сценариев оболочки, в этом случае зачастую также удастся сократить размер кода в целом и упростить программу; все версии языка, как и в PHP, находятся в свободном доступе, что упрощает работу с ним и распространение технологии в целом; хорошая техподдержка от разработчиков и от опытных пользователей языка [4]; кроссплатформенность, достигаемая за счет переносимости ANCIС.

Но также необходимо назвать слабые стороны данной технологии: достаточно низкая производительность языка Python, и при его использовании в системах, требующих быстрого ответа, он уступит ряду других языков; динамическая типизация приводит к конфликту программы на уровне систем типов. Большая часть таких ошибок появляется лишь на этапе запуска готового приложения, что усложняет отладку; низкая возможность статистического анализа кода как такового вследствие особенностей, связанных с динамическими параметрами формирования имен и классов.

Исходя из вышесказанного, приходим к выводу о том, что оценку Python можно оставить на одном уровне с PHP, поскольку количество и качество преимуществ у обоих уравнивается недостатками.

JavaScript. Данный язык программирования, разумеется, имеет как свои явные преимущества, так и слабости, которые будут рассмотрены ниже: незаменим для веб-разработки в целом, поскольку поддерживается большинством браузеров; интеграция с системами верстки страниц (HTML, CSS) [5]; куда более быстр и производительен, чем большинство аналогов, может частично обрабатывать веб-страницы без доступа к серверу.

Обладая существенными достоинствами, JavaScript не лишен и минусов, рассмотрим их: изначально нет возможности чтения и загрузки файлов, данное ограничение действует со стороны клиента и обусловлено политикой безопасности; открытый код, что в случае с JavaScript позволяет встраивать вредоносные фрагменты; нестрогая типизация, что приводит к ошибкам на этапе запуска проекта.

Таким образом, JavaScript является хорошим решением для разработки как небольших, так и крупных проектов. Хотя язык в целом и более сложен, чем, к примеру, PHP или Python, но он более функционален.

PWA. Последней рассматриваемой в статье технологией является Progressive Web Application. Ниже рассмотрим ее особенности, а также положительные и отрицательные качества. К преимуществам данной технологии относятся: кроссплатформенность; более низкие затраты на ввод в эксплуатацию нового сервиса относительно нативных приложений; поддержка офлайн работы с помощью механизма Service Worker; PWA индексируются и улучшают SEO-показатели, что улучшает шансы этой технологии в продвижении на рынке. Такая ситуация обусловлена политикой ряда браузеров (например Google); способность трансформировать сайт в приложение, при этом такое приложение имеет небольшой размер, тратит меньше ресурсов, а загружается быстрее.

Главным и самым «массовым» конкурентом для PWA являются нативные приложения. К общим проблемам Web приложений можно отнести: доступ к операционной системе и аппаратным возможностям устройства пользователя; работа с контактами и календарем на устройстве пользователя; отправка / получение SMS, совершение осуществления телефонных звонков напрямую из приложения. Взаимодействие с SIM картой телефона; работа со вспышкой и нестандартными датчиками, такими как датчик давления, измеритель пульса и др.; низкоуровневая работа с системой управления приложениями, системными настройками, полный доступ к хранилищу [6]; регистрация приложения в качестве приложения по умолчанию для открытия какого-либо типа файлов или типа ссылок.

Таким образом, полученные результаты можно представить в виде таблицы (табл. 1).

Таблица 1

Сравнение систем разработки приложений

Технология	Быстродействие	Кроссплатформенность	Простота синтаксиса	Эффективность на крупных проектах	Эффективность на небольших проектах
ASP	+	-	+	?	?
Java	-	+	-	+	+
PHP	-	+	+	-	+
Python	+	+	+	-	+
JS	+	+	-	+	+
PWA	+	+	-	?	?

Заключение. Рассмотренные в статье методы разработки веб-приложений показывают разные подходы к программированию в целом, а также обозначают их положительные и отрицательные качества. Исходя из данных, представленных в таблице, можно сделать вывод, что такие языки, как Python и JavaScript будут более предпочтительны и универсальны, нежели, Java и PHP. Отдельно отметим технологии ASP и PWA, поскольку в контексте данной статьи им сложно дать однозначную оценку. Данная ситуация объясняется относительной новизной технологий, а значит, им еще предстоит показать свои возможности в будущем.

Литература

1. Фримен А. ASP.NET Core MVC 2 с примерами на C# для профессионалов, 2019.
2. Коузен К. Современный Java: рецепты программирования, 2018.
3. Tatroe K. MacIntyre P. Programming PHP: Creating Dynamic Web Pages, 2013.
4. Гринберг М. Разработка веб-приложений с использованием Flask на языке Python, 2016.
5. Хавербеке М. Выразительный JavaScript. Современное веб-программирование, 2019.
6. HUMED. A. Progressive Web Apps, 2017.

N.A. Gridchin
Smolensk State University

ANALYSIS OF TECHNOLOGIES FOR DEVELOPING CUSTOM WEB APPLICATIONS

Keywords: ASP, ASP.NET MVC Core 2, Java, PHP, Python, JS, PWA, development speed, resource saving.

Abstract. *The article discusses the most popular technologies for developing custom web applications, their advantages and disadvantages and also provides an overview of new solutions in this area (ASP.NET Core 2 and PWA itself). The analysis technique is a presentation of the reviewed technologies in the form of lists with the combination of the results of the obtained data into a summary table. On its basis, an assessment of the prospects of using any of the technologies for specific tasks will be given.*

В.Н. Захаров

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук

УДК 004.89

ОБ УТОЧНЕНИИ ПОНЯТИЯ «ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ» И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯХ

Ключевые слова: искусственный интеллект, представление знаний, интеллектуальный процесс, интеллектуальная система, ДСМ-метод, ИС-ДСМ.

В статье кратко рассматривается история возникновения научно-практической области, называемой искусственным интеллектом. Обсуждается эволюция самого понятия «искусственный интеллект». Кратко излагаются идеи и методы, развиваемые школой профессора В.К. Финна. В частности, формулируются 13 интеллектуальных способностей, характеризующих интеллектуальный процесс, присущий естественному интеллекту. Кратко излагаются основные положения ДСМ-метода автоматизированной поддержки исследований, приводятся примеры его использования в ИС-ДСМ.

1. Введение. В последнее время словосочетание «Искусственный интеллект» регулярно звучит на различных уровнях, часто упоминается в прессе. Ярко выраженным показателем внимания к проблеме искусственного интеллекта (ИИ) стал принятый в октябре 2019 г. Указ Президента РФ «О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации», которым была утверждена «Национальная стратегия развития искусственного интеллекта на период до 2030 года» [1]. Однако под этими словами понимаются самые разные понятия, зачастую совершенно не стыкующиеся между собой. Представляется полезным попытаться несколько уточнить основные понятия, относящиеся к этой области.

2. Исторический экскурс. Началом направления, позднее названного искусственным интеллектом (ИИ), стала проведенная в 1956 г.

конференция в Дартмуте, США. В этой конференции приняли участие Джон Маккарти и Марвин Минский, сыгравшие в дальнейшем важную роль в становлении ИИ [2]. Начало официального существования понятия «Искусственный интеллект» (ИИ) часто связывают [3] с проведением первой конференции IJCAI (International Joint Conference for Artificial Intelligence), которая состоялась в г. Вашингтоне, США в 1969 году. До этого исследования в областях, которые стали относить к ИИ, в СССР проводились под флагом Кибернетики, а за рубежом – под флагом Computer Science. Существенную роль в популяризации исследований в СССР в области ИИ сыграло проведение 4-ой конференции IJCAI в г. Тбилиси в сентябре 1975 г. В ней наряду с учеными из разных организаций и городов СССР приняли участие многие ведущие зарубежные ученые в области ИИ.

В становлении ИИ как научного направления важнейшую роль сыграли два однофамильца – Гермоген Сергеевич Поспелов и Дмитрий Александрович Поспелов, работавшие в Вычислительном центре АН СССР. В январе 1974 г. был образован Совет по проблеме «Искусственный интеллект» в рамках Комитета по системному анализу Президиума АН СССР. Председателем совета стал Г.С. Поспелов, а его заместителем – Д.А. Поспелов. Первым крупным научным мероприятием, организованным новым советом, было проведение в Тбилиси 4-6 июня 1974 г. 7-го всесоюзного симпозиума по кибернетике – первого в нашей стране представительного форума, целиком посвященного проблемам ИИ. На пленарном заседании состоялся совместный доклад Г.С. и Д.А. Поспеловых «Основные проблемы искусственного интеллекта» [4].

Гермоген Сергеевич (избранный в 1984 г. действительным членом АН СССР) был главной организационной и пробивной силой, продвигавшей направление ИИ и его применения, а профессор Дмитрий Александрович был неутомимым идеологом и генератором идей, а также и весьма активным и эффективным организатором. В 1989 г. была учреждена Советская ассоциация искусственного интеллекта, председателем координационного совета которой был избран Г.С. Поспелов. На основе Советской ассоциации искусственного интеллекта в октябре 1992 г. была зарегистрирована Российская ассоциация искусственного интеллекта (РАИИ). Её президентами были Д.А. Поспелов (с 1989 по 1996 г.), профессор Осипов Геннадий Семёнович (с 1996 по 2020 г.), в настоящее время – профессор Борисов Вадим Владимирович.

Важным этапным шагом явилось создание при Президиуме АН СССР Научного совета по проблеме «Искусственный интеллект», состав и структура которого были утверждены постановлением бюро Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации АН СССР от 4 декабря 1986 г. В состав совета вошли 119 человек, среди которых довольно много и до настоящего времени работающих учёных.

Председателем Бюро совета был назначен Г.С. Поспелов, его заместителями – В.И. Жильцов (из Минэлектронпрома), Э.В. Попов (из Минрадиопрома) и Д.А. Поспелов.

3. Содержание понятия ИИ. О том, что вкладывалось в само понятие ИИ в то время, и о соответствующих направлениях исследований довольно отчетливо говорит структура этого Научного совета, которая выглядит следующим образом.

СТРУКТУРА

Научного совета по проблеме «искусственный интеллект»

1. Бюро Научного совета
2. Секция представления знаний
(председатель – доктор технических наук Айламазян А.К.)
3. Секция общения с ЭВМ
(председатель - доктор технических наук Попов Э.В.)
4. Секция компьютерной логики
(председатель – член-корреспондент АН СССР Лавров С.С.)
5. Секция компьютерной лингвистики
(председатель – доктор физико-математических наук Успенский В.А.)
6. Секция экспертных систем
(председатель – доктор технических наук Поспелов Д.А.)
7. Секция систем искусственного интеллекта для коллективного решения задач в области планирования и проектирования
(председатель – доктор технических наук Эрлих А.И.)
8. Секция аппаратных методов реализации программных функций в системах искусственного интеллекта
(председатель – кандидат физико-математических наук Задыхайло И.Б.)
9. Секция систем автоматизации проектирования на базе элементов искусственного интеллекта
(председатель – член-корреспондент АН СССР Краснощёков П.С.)
10. Секция прикладных проблем искусственного интеллекта
(председатель – член-корреспондент АН СССР Шипунов А.Г.)
11. Секция теоретических и прикладных проблем восприятия и обработки информации в интеллектуальных системах
(председатель – член-корреспондент АН СССР Журавлев Ю.И.)
12. Секция психологических проблем использования ЭВМ и когнитивная психология
(председатель – кандидат психологических наук Величковский Б.М.)
13. Секция пакетов прикладных программ, использующих развитые планировщики
(председатель – член-корреспондент АН ЭССР Тыугу Э.Х.)

Касаясь содержания направления ИИ, следует отметить, что ещё в 1969 г. Дж. Маккарти и Р. Дж. Хейес писали: «... работа над

искусственным интеллектом, особенно общим интеллектом, пойдет гораздо успешнее, если будет уточнено само понятие интеллекта» [5]. Действительно, много говорится о применениях ИИ, технологиях ИИ, системах ИИ, но о самом содержании понятия интеллект как-то не часто говорят, при этом нередко подразумеваются самые разные вещи. Так, в [1] следующим образом определены основные понятия:

«Искусственный интеллект – комплекс технологических решений, позволяющий имитировать когнитивные функции человека (включая самообучение и поиск решений без заранее заданного алгоритма) и получать при выполнении конкретных задач результаты, сопоставимые, как минимум, с результатами интеллектуальной деятельности человека. Комплекс технологических решений включает в себя информационно-коммуникационную инфраструктуру, программное обеспечение (в том числе в котором используются методы машинного обучения), процессы и сервисы по обработке данных и поиску решений;

Технологии искусственного интеллекта – технологии, основанные на использовании искусственного интеллекта, включая компьютерное зрение, обработку естественного языка, распознавание и синтез речи, интеллектуальную поддержку принятия решений и перспективные методы искусственного интеллекта».

Эти определения являются достаточно общими, они не раскрывают сути того, что же считать, например, «интеллектуальной деятельностью человека». В точное определение понятий, из которых строится базисная структура области ИИ, существенный методологический вклад внёс известный российский учёный в области философии, математической логики и создания систем доктор технических наук профессор Виктор Константинович Финн, вовлеченный в проблематику ИИ после личного знакомства и общения в 1975 г. с Джоном Маккарти. Он определил понятия «познавательный процесс» и «интеллектуальный процесс» следующим образом:

Познавательный процесс (ПП) есть анализ данных, предсказание нового знания, обнаружение эмпирических закономерностей, объяснение и принятие полученных знаний.

Интеллектуальный процесс (ИП) есть взаимодействие мыслительного процесса и познавательного процесса для получения нового знания.

В.К. Финном впервые была сформулирована совокупность из 13 интеллектуальных способностей, характеризующих интеллектуальный процесс, присущий естественному интеллекту [6]:

- (1) обнаружение существенного в данных,
- (2)* порождение последовательности «цель – план – действие»,
- (3) подбор посылок, релевантных цели рассуждения,
- (4) способность к рассуждению: вывод следствий из посылок,

- (5) способность к аргументированному принятию решений, использующему упорядоченные знания и результаты рассуждений, соответствующие поставленной цели,
- (6)* рефлексия – оценка знаний и действий,
- (7) способность к объяснению – ответ на вопрос «почему?»),
- (8) аргументация при принятии решений,
- (9) познавательное любопытство и способность к распознаванию (ответ на вопрос «что такое?»),
- (10) способность к обучению и использование памяти,
- (11)* способность к интеграции знаний для образования концепций и теорий,
- (12)* способность к уточнению неясных идей – преобразование их в понятия,
- (13)* способность к изменению системы знаний при получении новых знаний и изменений познавательных ситуаций.

Существенным является тот факт, что (1), (3) – (5), (7) – (10) реализуются в автоматическом режиме компьютерных систем, тогда как интеллектуальные способности (2)*, (6)*, (11)* – (13)* реализуемы в интерактивном режиме с участием человека. Это разбиение способностей на две группы соответствует фундаментальному различению И. Канта [7] между **рассудком** и **разумом**. В интеллектуальном процессе **рассудок** является результатом функционирования **интеллектуальных способностей** (1), (3) – (5), (7) – (10), а **разум** реализуется посредством интеллектуальных способностей (2)*, (6)*, (11)* – (13)*, ибо рассудок – образование суждений посредством рассуждений, а разум – порождение принципов, методологии исследований и обобщений результатов рассуждений, включающих образование новых понятий и коррекцию теорий.

4. Интеллектуальные системы. Далее изложение следует в основном в соответствии с материалами, содержащимися в [8]. На основе сформулированных интеллектуальных способностей дается следующее определение интеллектуальной системы:

Интеллектуальная система (ИС) есть компьютерная система такая, что она имеет определенную ниже архитектуру и реализует в автоматическом и интерактивном режимах интеллектуальный процесс (ИП), представленный интеллектуальными способностями (1) – (13): ИС = (БФ, БЗ) – Решатель задач – комфортный интерфейс, где БФ – база фактов, БЗ – база знаний, а Решатель задач имеет три модуля – Рассуждатель, Вычислитель и Синтезатор. **Рассуждатель** реализует рассуждения, содержащие амплиативные (правдоподобные) выводы, которые формализуют взаимодействие процедур интеллектуального процесса в двух режимах – автоматическом и интерактивном, **Вычислитель**

реализует вычислительные процедуры, а **Синтезатор** осуществляет выбор стратегий решения задач и взаимодействие Рассуждателя и Вычислителя.

Целью научных исследований является получение нового знания, для получения которого могут применяться ИС. Таким образом, ИС является **партнерской человеко-машинной системой**, представляющей автоматизированного **познающего субъекта**. Так как «мозгом» ИС является Решатель задач, а главное его «полушарие» – **Рассуждатель**, то применимость Решателя задач определяется его соответствием предметной области – объекту познания. Можно выделить три типа предметных областей (миров познания): W_1 – мир случайных событий, W_2 – мир фактов с отношением причинности, W_3 – мир событий с отношениями причинности и случайными влияниями, объединяющий W_1 и W_2 .

В областях W_1 исследования проводятся методами теории вероятностей и математической статистики, а для объектов познания типа W_2 и W_3 применимы ИС, имитирующие и усиливающие интеллектуальные способности. А именно к базам фактов и базам знаний для получения нового знания могут применяться автоматизированные рассуждения. Правдоподобные выводы, аргументация, обучение на расширяемых данных, объяснение результатов, полученных применением синтеза познавательных процедур, реализуемых в ИС, могут учитывать слабую формализованность знаний в W_2 и W_3 , а также возможность структурирования данных (фактов) для обнаружения их сходства и различия, порождения гипотез о причинах и гипотез о предсказаниях исследуемых эффектов. Примерами областей применения, соответствующих указанным свойствам, являются науки о жизни и социальном поведении и сфера их компетенции, включающая медицину, экологию и управление.

В начале 1980-х В.К. Финном с учениками был разработан метод автоматического порождения и принятия гипотез и основанный на нем класс интеллектуальных компьютерных систем, получивших название «ДСМ-метода» и «ИС-ДСМ» [9]. Эти системы названы в честь английского философа и логика середины XIX века Джона Стюарта Милля, сформулировавшего правила индуктивного вывода. Над развитием ДСМ-метода и в настоящее время продолжают активную работу В.К. Финн и его ученики, сами ставшие известными и авторитетными учёными. Последняя на данный момент версия ДСМ-метода автоматизированной поддержки исследований (АПИ) имеет средства обнаружения эмпирических закономерностей (их извлечение из последовательностей расширяемых баз фактов порождает **новое знание**, формирующее базы знаний интеллектуальных систем типа ДСМ – ИС-ДСМ).

Условиями применимости класса ИС-ДСМ являются существование в базе фактов (БФ) позитивных фактов ((+)-фактов) и негативных фактов

((-)-фактов, существование в БФ в неявном виде (+)- и (-)- эмпирических зависимостей причинно-следственного типа, а также возможность формализовать сходство (+)- и (-)-фактов. ИС-ДСМ обеспечивает формирование и коррекцию Баз Знаний из Баз Фактов за счет обнаружения (в Базах Фактов) эмпирических закономерностей, в том числе при анализе расширяющихся Баз Фактов. В ИС-ДСМ реализована специальная процедурная конструкция генерации гипотез и оценки их качества.

К настоящему времени создано семейство программных средств ИС-ДСМ, которые успешно применены в следующих предметных областях:

- фармакология (в том числе – распознавании токсичности веществ),
- медицина (диагностика, анализ клинических данных),
- социология (качественный анализ социологических данных для ряда задач),
- криминалистика (почерковедческая экспертиза),
- техническая диагностика.

По тематике ДСМ-метода В.К. Финном, его учениками и последователями опубликованы десятки статей, с использованием ДСМ-метода подготовлены и защищены 3 докторские и более 10 кандидатских диссертаций.

4. Заключение. В [1] написано: «Фундаментальные научные исследования должны быть направлены на создание принципиально новых научных результатов, в том числе на создание универсального (сильного) искусственного интеллекта, включая реализацию следующих приоритетов:

а) алгоритмическая имитация биологических систем принятия решений, в том числе распределенных коллективных систем, таких как пчелиный рой или муравейник;

б) автономное самообучение и развитие адаптивности алгоритмов к новым задачам;

в) автономная декомпозиция сложных задач, поиск и синтез решений.

Представляется, что не вполне правомерным является часто проявляемый акцент на изучение и моделирование человеческого мозга как главного направления исследований в области ИИ. Деятельность мозга – это не только модели в виде нейронных сетей, но ещё и множество сложных физико-химических взаимодействий, до познания которых еще очень далеко. В то же время представляются весьма перспективными исследования, основанные на формализации и алгоритмизации **феноменологии** интеллектуальных процессов.

Таким образом приходим к определению: **ИИ** есть научно-практическая область имитации и усиления **интеллектуального процесса** и **рационального поведения** человека посредством систем ИИ, интеллектуальных систем (ИС) и ИИ-роботов; эти имитации и усиления интеллектуального процесса реализуют принципы, используемые в ИС-

ДСМ, на основе которых осуществляется **интеллектуальный анализ данных**: моделирование предметной области, обнаружение эмпирических закономерностей и принятие обоснованных решений, использующих эвристики получения нового знания.

Литература

1. О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации. Указ Президента Российской Федерации от 10.10.2019 г. № 490. <http://www.kremlin.ru/acts/bank/44731>.
2. Поспелов Д.А. История искусственного интеллекта до середины 80-х годов // Новости искусственного интеллекта. 1994, №4. С.74-90.
3. Стефанюк В.Л. Роль Д.А. Поспелова в российском ИИ // Политехнические чтения: сб. тр. Вып. 7. Искусственный интеллект – проблемы и перспективы. М., 2006. С 14 -23.
4. Поспелов Г.С., Поспелов Д.А. Искусственный интеллект // Вестник АН СССР, №10, 1975. С. 26-36.
5. Маккарти Дж., Хейес Р. Дж. Некоторые философские проблемы в задаче построения искусственного интеллекта // Кибернетические проблемы бионики. – М.: Изд-во «МИР», 1972. С. 40-88; McCarthy J., Hayes P.J. Some Philosophical Problems from the Standpoint of Artificial Intelligence // Machine Intelligence, 1969. №4, P. 463 – 502.
6. Финн В.К. К структурной когнитологии: феноменология сознания с точки зрения искусственного интеллекта // Вопросы философии. 2009. № 1. С. 88-103.
7. Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1964. Т.3.
8. Финн В.К. Искусственный интеллект: методология, применения, философия. 2-е изд. М.: URSS, 2021.
9. Забежайло М.И., Авидон В.В., Блинова В.Г., Катамадзе Т.Г., Бодягин Д.А., Рабинков А.А., Финн В.К. Об экспериментах с базой данных с неполной информацией посредством ДСМ-метода порождения гипотез // Научно-техническая информация. Сер. 2: Информационные системы и процессы. 1983. №2. С.28-32.

V.N. Zakharov

Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS)

ON REFINING THE CONCEPT OF «ARTIFICIAL INTELLIGENCE» AND ITS APPLICATIONS

Keywords: *Artificial Intelligence, knowledge representation, intellectual process, intelligent system, JSM-method, IS-DSM.*

Abstract. *The article briefly examines the history of the emergence of a scientific and practical field called artificial intelligence. The evolution of the very concept of "artificial intelligence" is discussed. The ideas and methods developed by the school of Professor V.K. Finn are briefly mentioned. In particular, 13 intellectual abilities are formulated that characterize the intellectual process inherent in natural intelligence. The main provisions of the JSM-method of automated research support are briefly stated, examples of its use in the IS-JSM are given.*

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ ПО СТАНКАМ

Ключевые слова: *эвристический алгоритм, задача оптимизации, планирование производства.*

В статье рассматривается эвристический алгоритм распределения деталей по станкам. Показано, что невозможно получить точное решение данной задачи полиномиальным алгоритмом, но можно получить достаточно хорошее решение с помощью эвристики. В вычислительном эксперименте будет показано, что полученное решение слабо отличается от оптимального.

Введение

Задача планирования производства является главной задачей, которая решается на любом предприятии. Если владелец хочет получать высокую прибыль, он должен задуматься об оптимизации производственного процесса, контролировать обработку и выпуск продукции. Таким образом, грамотное планирование производства является ключом к успеху любого предприятия.

Проблема распределения деталей по станкам является подзадачей производственного планирования. Грамотное распределение позволяет максимизировать выпуск, минимизируя затрачиваемые ресурсы.

Данная проблема имеет множество формулировок, зависящих от конкретных задач и входных условий, например, максимизировать выпуск продукции со станков в единицу времени [1], максимально нагрузить производственные мощности в фиксированные временные рамки [2] и т.д. Эта задача является классической задачей дискретной оптимизации. В решении подобных задач есть множество подходов [3–9].

В данной статье будет рассмотрена конкретно поставленная задача распределения деталей по станкам. Все приведенные ограничения диктуются либо здравым смыслом, либо заказчиком. Будет показано, что поставленная задача с некоторыми допущениями может быть сведена к задаче 0-1 целочисленного линейного программирования, но, учитывая все ограничения, такая задача не может быть сведена к чему-либо еще.

Так как мы не можем производить не целое число деталей, мы не можем решить эту задачу в действительных числах и округлить до ближайшего целого. Во-первых, округленное решение может быть далеким от оптимального. Во-вторых, округленное решение может даже

не удовлетворяют поставленным ограничениям.

Для получения точного решения можно использовать переборный алгоритм. Главным его минусом является, очевидно, высокая вычислительная сложность, что ведет к экспоненциальному увеличению времени выполнения.

Покажем, что данная задача может быть быстро и эффективно решена с помощью эвристики. Будет дано сравнение полученного эвристически решения с точным решением, что станет доказательством его эффективности.

Постановка задачи

Пусть даны m станков $s = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ и n типов деталей $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, которые должны быть произведены. $a_i \subseteq d$ типов деталей могут быть произведены на каждом из m станков ($i = 1, 2, \dots, m$). Сложность производства детали типа d_j на станке s_i есть t_{ij} , и если $d_j \notin a_i$, то $t_{ij} = \infty$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Положим, что для наименее производительного станка $a_i = d$. Для каждой детали типа d_j указано необходимое количество, нужное к производству, равное c_j .

Назовём деталь типа d_j деталью кратности k_v ($v = 1, 2, \dots, q$), если возможно произвести общую обработку c_j таких деталей, объединенных в группы по k_v за $\frac{c_j}{k_v}$ проходов, и отправить на доработку на другие станки в количестве c_j . Значит, $k = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$. Заказчиком установлено, что детали должны обрабатываться в кратном виде (то есть $k_v > 1$), если их возможно обработать в таком виде и если число $\frac{c_j}{k_v} \geq 70$. Заказчиком также установлено, что $k = \{1, 2, 3, 4, 8\}$.

Из потребностей производства следует условие комплектности:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = c_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Для не кратных деталей заказчиком установлено условие целостности: $x_{lj} = c_j$, ($l = 1, 2, \dots, m$). Из этого следует, что $x_{ij} = 0$, $i \neq l$. Данное условие сильнее, чем условие комплектности, поэтому последнее может быть опущено при решении.

Для каждой детали d_j установлен временной лимит p_j , в течение которого деталь типа d_j должна быть произведена в количестве c_j .

Необходимо произвести детали типа в количестве c_j , учитывая все

вышеприведенные ограничения так, чтобы время производства не превышало временной лимит p_j и чтобы загрузка оборудования была наиболее равномерной.

Решение задачи

Составим множество кортежей $G = \{g_j\}$, где $g_j = \{d_j, c_j, p_j\}$. Упорядочим G по p_j . Определим на G отношение эквивалентности «иметь одинаковый временной лимит». Определение отношения эквивалентности индуцирует фактор-множество G/p . Таким образом, множество G разбивается на непересекающиеся подмножества, называемые классами эквивалентности. Для каждого класса эквивалентности временной лимит обозначим через p , учитывая, что для каждого класса эквивалентности он, вообще говоря, различен. Дальнейшие рассуждения будем проводить для каждого класса эквивалентности отдельно.

Назовем матрицу $X = x_{ij}$ удовлетворительной, если

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \times t_{ij} \leq p, (i = 1, 2, \dots, m).$$

Назовем матрицу $X = x_{ij}$ оптимальной, если X удовлетворительная и разность $\max_i \sum_{j=1}^n x_{ij} \times t_{ij} - \min_i \sum_{j=1}^n x_{ij} \times t_{ij}$ принимает наименьшее значение.

Рассмотрим последнюю разность в качестве целевой функции. Тогда исходная задача сводится к минимизации этой целевой функции

$$z = \max_i \sum_{j=1}^n x_{ij} \times t_{ij} - \min_i \sum_{j=1}^n x_{ij} \times t_{ij}, (i = 1, 2, \dots, m),$$

без учета кратности деталей.

Данную задачу можно свести к задаче 0-1 целочисленного линейного программирования. Действительно, опустим условие кратности. Если деталь типа d_j производится на станке s_i , то $x_{ij} = 1$, а остальные $m - 1$ $x_{ij} = 0, i \neq l$. Рассматривая систему ограничений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \times c_j \times t_{ij} \leq p, (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, (j = 1, 2, \dots, n), \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \end{cases}$$

мы получаем задачу 0-1 целочисленного линейного программирования.

Как известно, такие задачи принадлежат к NP-полным задачам (как и другие задачи комбинаторной оптимизации) [10]. Рассматриваемая

целевая функция и условие кратности превращают данную задачу в нелинейную. Оптимальное решение может быть получено методом полного перебора. Однако использовать данный подход на реальных данных затруднительно в силу высокой сложности перебора.

Вернемся к решению задачи. Установим соответствие между элементами x_{ij} матрицы X и коэффициентами k_{ij} , обозначающими, что деталь типа d_j обрабатывается на станке s_i в количестве $\frac{c_j}{k_{ij}}$. Составим матрицу $K = k_{ij}$. Таким образом, получили взаимно-однозначное соответствие между элементами матриц K и X . Также имеем соответствие между столбцами и строками этих матриц. Соответствие показано графически на рисунке 1.

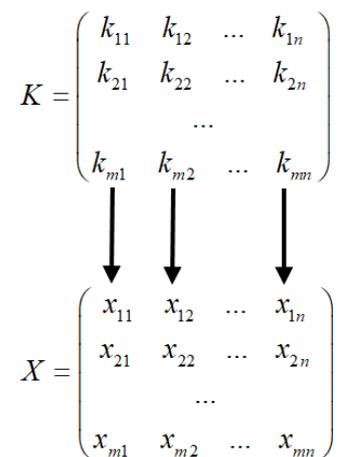


Рис 1. Соответствие между столбцами матриц K и X

Зная все t_{ij} , можно рассчитать коэффициент производительности w_i для всех станков. Далее необходимо упорядочить все станки по убыванию w_i . Тогда самым малопродуктивным станком будет s_m , а самым высокопродуктивным будет s_1 .

Положим $x_{mj} = 1$, ($j = 1, 2, \dots, n$). Пусть есть деталь кратности k_v . Положим все $k_{mj} = k_v$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $v = 1, 2, \dots, q$). Совершим перестановку столбцов матрицы $K = k_{ij}$ так, чтобы условия $k_{mj} \geq k_{mj+1}$, ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) выполнялись. Совершим аналогичную перестановку столбцов матрицы X .

Пусть теперь $b = 1$. Вычислим значение $\max_j \{x_{mj} \times t_{mj}\}$. Положим $x_{bj} = 1$ и $x_{mj} = 0$. Если $k_{mj} = 1$, мы также должны положить $k_{bj} = k_{mj}$ и $k_{mj} = 0$. Если же $k_{mj} > 1$, то $k_{bj} = k_{mj}$ и $k_{mj} = 1$. Если это невозможно ввиду того, что $d_j \notin a_b$, то мы должны принять $b = (b + 1) \bmod m$ и снова вычислить $\max_j \{x_{mj} \times t_{mj}\}$.

После каждого такого шага, необходимо вычислить

$\sum_{j=1}^n x_{ij} \times t_{ij}$, ($i=1,2,\dots,m$) и проверить условия:

$$x_{mj} \times t_{mj} \geq x_{ij} \times t_{ij}, (i=1, 2, \dots, m-1) \quad (1)$$

Если они выполняются, то алгоритм продолжается. Если нет, то алгоритм останавливается.

Иными словами, каждый раз мы находим наиболее долгую в производстве партию деталей и перемещаем ее на другой станок, учитывая необходимую кратность и возможность производства каждого типа деталей на конкретном станке.

Иногда алгоритм может остановиться даже при выполнении всех условий (1). Например, при $|a_i| \ll |d|$, ($i=1, 2, \dots, m-1$). То есть алгоритм может остановиться, если мы больше не можем совершить ни одного перемещения деталей со станка на станок.

Данный алгоритм являет собой развитие идей, предложенных авторами в [11].

Сложность данного алгоритма есть $O(n^3)$. Значит, он пригоден для распределения достаточно больших партий деталей.

Заключение

Из всего вышесказанного можно сделать следующие выводы:

- Задача планирования производства имеет подзадачу распределения деталей по станкам. В общем случае эта подзадача может быть очень тяжелой для решения. Точное решение не всегда возможно получить за приемлемое время, так как может не существовать полиномиального алгоритма для его получения. Однако всегда есть возможность прибегнуть к эвристике.

- Был проведен вычислительный эксперимент, показавший эффективность данного подхода.

- Алгоритм эвристического распределения деталей по станкам может стать частью высокоэффективной системы производственного планирования [14].

Литература

1. <http://libraryno.ru/8-3-zadacha-ob-optimal-nom-raspredelenii-detaley-po-stankam-matmodosipkina/>.
2. <https://infopedia.su/2x7d47.html>.
3. Allen-Zhu Z. et al. Near-optimal discrete optimization for experimental design: A regret minimization approach // Mathematical Programming. 2020. С. 1-40.
4. Zhang W. et al. Discrete optimization algorithm for optimal design of a solar/wind/battery hybrid energy conversion scheme // International Journal of Low-Carbon Technologies. 2020.
5. Yang X.S. Nature-inspired optimization algorithms. Academic Press, 2020.
6. Al-Madi N., Faris H., Mirjalili S. Binary multi-verse optimization algorithm for

global optimization and discrete problems // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. 2019. Т. 10, №. 12. С. 3445-3465.

7. Lalwani S. et al. A survey on parallel particle swarm optimization algorithms // Arabian Journal for Science and Engineering. – 2019. – Т. 44. – №. 4. – С. 2899-2923.

8. Hussien A.G. et al. New binary whale optimization algorithm for discrete optimization problems // Engineering Optimization. 2020. Т. 52, №. 6. С. 945-959.

9. Tilahun S.L., Ngnotchouye J.M.T. Firefly algorithm for discrete optimization problems: A survey // KSCE Journal of civil Engineering. 2017. Т. 21, №. 2. С. 535-545.

10. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. 1991.

11. Мунерман В.И., Мунерман Д.В. Анализ алгоритма оптимального распределения // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. –Т. 15, №. 3.

12. Wu G., Say B., Sanner S. Scalable planning with deep neural network learned transition models // Journal of Artificial Intelligence Research. 2020. Т. 68. С. 571-606.

P.L. Iljin

Smolensk State University

RECURSIVE COMPUTATION OF THE MULTIDIMENSIONAL MATRIX DETERMINANT

Keywords: *recursive algorithm, multidimensional matrix, determinant, number system.*

Abstract. *In this paper, one heuristic algorithm of the details distribution by machines is considered. It will be shown, that there is no polynomial algorithm which can give us an exact solution, but there is a polynomial heuristic algorithm, which can provide us good solution. In the computational experiment it will be shown that this solution differs little or does not differ from the optimal one.*

А.В. Кирикова, А.И. Миронов

Смоленский государственный университет

УДК 004.22:004.27

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ХЕШ-ИНДЕКСНОГО ПОДХОДА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАПРОСОВ

Ключевые слова: *параллельное программирование, деревья, хеш, понятие веса, кластеризация, распределение, цепочки запросов, join, индексы.*

В статье рассматривается способ повышения эффективности выполнения сложных запросов в современных СУБД. В основу метода положены использование древовидных структур, хеш-кодов ключа, а также возможность оптимизации на основе разбиения. В качестве дополнительного аспекта оптимизации описан метод параллельной работы предложенного метода.

1. Введение. В статье рассматривается возможность применения древовидных структур и нормы для дополнительной оптимизации последовательности сложных запросов к базам данным (Big Data). В настоящее время данная проблема не теряет актуальности, поскольку с ростом объема данных, а также ростом сложности структуры этих данных современные СУБД все больше нуждаются в повышении производительности для удовлетворения потребностей систем, в которые они включены.

Первая часть предложенного метода основана на использовании «равномерного» двоичного дерева. Для объяснения рассмотрим данный алгоритм на примере одной операции INNER. Предположим, имеются две таблицы TableL и TableR значимых размеров. Каждая таблица обладает большим набором полей. Будем рассматривать случай, когда операция JOIN проводится по нескольким полям, поскольку он представляет наибольший интерес. Положим, что для осуществления операции у нас имеются таблицы метаданных $MTableL(k,c,nu)$ и $MTableR(k,c,nu)$ содержащие ключи из обеих таблиц, номер первого элемента такого ключа и количество элементов, соответствующих данной последовательности столбцов. Здесь k подразумевает совокупность значений последовательности столбцов.

Первая часть алгоритма осуществляется следующим образом: возьмем таблицу метаданных левой таблицы и начнем разбивать ее на подмножества. Будем считать, что всевозможные векторы такого же типа, как и представленные в таблице столбцы, образуют дискретную гиперплоскость. Разобьем такую гиперплоскость на две равные полуплоскости, считая их центры (векторы, находящиеся усреднением координат краев плоскости) точками. Так мы получим два элемента того же типа, что имеются в таблице метаданных, как совокупность ключей – центры полуплоскостей.

Будем относить каждый элемент таблицы метаданных левой таблицы к правой или левой полуплоскостям (вообще разбиение можно проводить по большему количеству) таким образом, чтобы тот центр, к полуплоскости которого мы отнесем элемент, находился ближе к этому элементу по одной из выбранной метрик или мер близости. Для простоты объяснения возьмем евклидову метрику.

Таким образом, каждую совокупность ключей мы отнесем к одной из двух полуплоскостей, центр которой ей ближе, – в итоге получим кластеризацию метаданных первой таблицы.

Повторим разбиение для каждой из получившихся выборок по аналогичной схеме. Эту операцию будем повторять, пока в результирующем разбиении в каждом конечном множестве не останется некоторого малого количества L элементов таблицы метаданных либо же вообще одного элемента. После разбиения таблицы метаданных левой таблицы похожую операцию произведем с таблицей метаданных правой таблицы. Однако при данном разбиении будем придерживаться правила: если в получившейся в результате разбиения полуплоскости на каком-либо шаге отсутствуют элементы левой таблицы, то все элементы, попавшие в эту таблицу, перестают участвовать в операции JOIN.

Таким образом, в листьях получившейся древовидной структуры будут получены множества из ключей левой и правой таблиц, близкие друг к другу по значениям [1]. Внутри этих множеств и должны проводиться проверки на равенство последовательности ключей двух таблиц – вторая часть операции. Вообще говоря, разбиения можно проводить до момента, когда в множествах остаются только два элемента – по одному из каждой таблицы метаданных. Нужно отметить и то, что центром последнего множества могут выступать результаты из первой таблицы в случае разбиения второй.

Поскольку цепочка ключей таблицы может быть достаточно длинной, разумно использовать на каждом шаге не только метрику для определения близости, но и метод, основанный на весе ключей [2], каковым будет второй шаг оптимизации. А именно, необходимо хранить или же считать на этапе создания таблиц метаданных вес нормированной совокупности столбцов целевых таблиц. Весом [2] будем называть сумму значения столбца, отсчитанного от минимального значения и нормированного по каждому столбцу для исключения перевешивания одним столбцом других. Основываясь на показателе веса как совокупности столбцов, так и центров полуплоскостей на каждой итерации сравнения элементов с центрами, можно будет отбросить заведомо варианты, которые точно удалены от центра, сравнивая их веса по модулю [2]. А также в случае разбиения второй таблицы становится возможным на каждой итерации отбросить элементы, которые даже после разбиения внутри полуплоскости не смогут участвовать в join, сравнивая их вес с граничными (минимальным и максимальным) весами совокупностей ключей в этой выборке.

2. Оценка. Оценим эффект от применения такого алгоритма. Для оценки рассмотрим подробнее сложность производимых манипуляций. Пусть таблицы метаданных имеют соответственно n и m элементов, фактически это количество уникальных совокупностей выбранных для

операции ключей. При разбиении на каждом шаге элементы попадут в одну из двух полуплоскостей (вообще можно иметь другое количество); в среднем на каждом шаге количество элементов в результирующем множестве будет уменьшаться вдвое. Тогда для таблицы метаданных левой таблицы имеем количество шагов p для разбиения до L элементов в результате, то есть

$$\frac{n}{2^p} = L, \quad (1)$$

$$p = \text{Log}_2\left(\frac{n}{L}\right), \quad (2)$$

в случае, если $L = 1$ (до одного элемента),

$$p = \text{Log}_2(n). \quad (3)$$

Оценим количество сравнений между элементами и центрами полуплоскостей. На каждом шаге количество элементов не меняется, значит, при разбиении на каждом шаге нужно сравнение n элементов – для каждого уровня с двумя центрами. Таким образом, для разбиения одной таблицы метаданных будет произведено операций в количестве

$$2 * n * (\text{Log}_2(n)). \quad (4)$$

Аналогично для метаданных правой таблицы будет произведено операций в количестве

$$2 * m * (\text{Log}_2(m)) \quad (5)$$

и в сумме для общего разбиения операций не более, чем

$$m * (2 * \text{Log}_2(m)) + n * (2 * \text{Log}_2(n)). \quad (6)$$

Нужно понимать, что на каждом шаге также будет происходить отбрасывание элементов за счет веса ключей – однако эти расчеты зависят часто от самих данных.

После разбиения элементы внутри листьев из разных таблиц метаданных сравниваются между собой. Так, если принять что в листьях содержатся количества элементов

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_d, \quad (7)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \dots + n_d = n \quad (8)$$

и аналогично для второй таблицы

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_t, \quad (9)$$

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \dots + m_t = m, \quad (10)$$

где m_i и n_j очень малы вплоть до единиц, то количество итоговых сравнений можно считать не превышающим:

$$n_1 * m_1 + n_2 * m_2 + \dots + m_j * n_j. \quad (11)$$

Очевидно, что для некоторых элементов в листьях не будет соседей, что естественным образом ещё больше уменьшит итоговое количество сравнений – причем для этих значений больше никаких операций не последует.

Можно видеть, что

$$n_1 * m_1 + n_2 * m_2 + \dots + m_j * n_j < m * n, \quad (12)$$

если

$$\sum(m_i) = m, \quad (13)$$

$$\sum(n_i) = n. \quad (14)$$

Таким образом, удастся снизить сложность сравнения ключей при выполнении операций JOIN.

3. Применение метода для расчета результатов. Описанный выше метод позволяет не только эффективно найти равные последовательности ключей. Используя подобный алгоритм, можно достаточно быстро определять размер итогового результата соединения таблиц без нахождения самого результата – а значит, фактическую сложность процесса слияния таблиц.

Для нахождения размерности результирующей таблицы необходимо применить указанный метод к таблицам метаданных. После последнего шага – сравнения ключей в листьях – необходимо найти сумму произведений количества записей в таблицах для равных последовательностей ключей, которые хранятся в таблицах метаданных каждой таблицы.

Причем нужно понимать, что величины m и n в таблицах метаданных для имеющихся таблиц много меньше количества записей в них. А значит, по формуле можем видеть, что время подсчета незначительно по сравнению с получением результирующей таблицы в памяти. Это позволяет использовать данный подход многократно во время цепочки запросов JOIN, в том числе для реализации третьего шага оптимизации цепочки операций типа JOIN.

Пусть имеется цепочка операций join – select, тогда очевидно, что основную сложность в такой цепи представляют операции join. Как известно, операции соединения представима в виде произведений элементов матричной алгебры, а значит, цепочка таких запросов – это произведение большого количества матриц. Для оптимизации запроса можно переставить последовательность произведений таким образом, чтобы суммарный объем операций был минимален. Данную задачу

возможно решить за полиномиальное время (от числа операндов запроса) с помощью методов линейного программирования – для этого необходимо знать количество операций на каждом шаге перемножения таблиц. Эту информацию можно почерпнуть из вышеописанного подхода.

Таким образом, удастся значительно минимизировать количество операций, уходящих на запрос в общем, что приведет к значительному росту производительности системы.

4. Заключение

- За счет использования метаданных можно существенно повысить производительность выполнения цепочек сложных операций.
- Использование древовидных структур позволяет сократить время сравнения ключей.
- Оптимизация за счет веса ключей может эффективно применяться для оптимизации сравнения элементов.
- На основе вышеизложенного алгоритма возможно рассчитывать стоимость операций для вывода эффективной последовательности исполнения запроса методами динамического программирования.

Литература

1. Kirikova A., Mironov A., Munerman V. The Method of Composition Hash-functions for Optimize a Task of Searching Images in Dataset // 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). IEEE, 2020. С. 1983-1986.
2. Zakharov V. et al. Architecture of Software-Hardware Complex for Searching Images in Database // 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). IEEE, 2019. С. 1735-1739.

A.V. Kiricova, A.I. Mironov
Smolensk State University

HASH INDEX APPROACH TO OPTIMIZE THE QUERY SEQUENCE

Keywords: *parallel programming, trees, hash, concept of weight, clustering, distribution, query chains, join, indexes.*

Abstract. *The article discusses a way to improve the efficiency of complex queries in modern DBMS. The method is based on the use of tree structures, key hash codes, and the possibility of optimization based on partitioning. As an additional aspect of optimization, the method of parallel operation of the proposed method is described.*

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО СЕКМЕНТИРОВАНИЯ В CLUSTERIX-ПОДОБНЫХ СИСТЕМАХ

Ключевые слова: *хеширование, динамическая сегментация, Clusterix-N, распределенные вычисления, распределение данных*

Обработка больших массивов данных требует применения вычислительных кластеров и распределения данных по их узлам. За распределение данных в Clusterix-подобных системах отвечает функция динамического сегментирования, основанная на остатке от деления ключа отношения на количество ядер в кластере. Такая функция позволяет получить идеальное распределение для последовательных данных, но в иных случаях может быть чрезвычайно неэффективной. В статье обсуждается применение различных хеш-функций для распределения данных. Демонстрируются карты распределения данных по ядрам кластера.

1. Введение. Данные небольшого объема (<10 ГБ) легко обрабатываются на маломощных серверах или персональном компьютере/ноутбуке. Более объемные данные (≤ 100 ГБ) для своевременной обработки требуют мощных серверов. Большие данные (>100 ГБ) не всегда могут быть обработаны за обозримое время на одном очень мощном сервере. Решение для обработки больших данных кроется в их разделении на наборы «малых» данных. Такое решение реализовано с помощью MapReduce [1] в Apache Hadoop и Spark. Оно позволяет обрабатывать данные объемами, исчисляемыми десятками и сотнями терабайт на сотнях и тысячах маломощных серверов.

В Clusterix-подобных системах для распределения данных по узлам в процессе работы применяется функция динамического сегментирования. Ее назначение – разделение данных на сегменты в динамике работы по узлам, ядрам или иным компонентам кластерной системы. Определение принадлежности данных к сегменту производится с помощью хеш-функции, которая осуществляет преобразование массива входных данных произвольной длины в (выходную) битовую строку установленной длины, выполняемое определенным алгоритмом. В зависимости от качества хеш-функции можно получить различные распределения данных по узлам.

2. Постановка задачи. В ранее выполненных исследованиях [2] было установлено, что во время выполнения представительского теста (ПТ), состоящего из запросов без операций записи теста ТРС-Н, данные не всегда распределяются равномерно по узлам и ядрам кластера. Обусловлено это функцией хеширования (MOD), применяемой для динамической сегментации [3]:

$$\text{hash} = ((\text{key1} \bmod M) + (\text{key2} \bmod M) + \dots + (\text{keyP} \bmod M)) \bmod M,$$

где P – количество полей в первичном ключе; M – основание деления по модулю; \bmod – операция деления по модулю.

Согласно функции MOD данные циклически распределяются по M секциям. Что подтверждается картой распределения данных по ядрам в процессе выполнения ПТ (рис. 1), где каждая строка соответствует одному отношению, а каждый столбец – ядру CPU, белые ячейки – ядра без данных, темные ячейки – ядра с данными, серые ячейки – ядра с меньшим объемом данных по отношению к остальным. Однако можно выделить два случая плохого распределения. Во-первых, если M меньше числа ядер кластера, то данные будут распределены только по первым узлам (рис. 1, запросы 2, 5, 7, 8, 9, 10, 11). Во-вторых, если хешируемые ключи не являются последовательными числовыми рядами, то вероятно возникновение перекосов или распределения с пропуском некоторых секций (рис. 1, запросы 3, 5, 7, 8, 9, 10, 13).

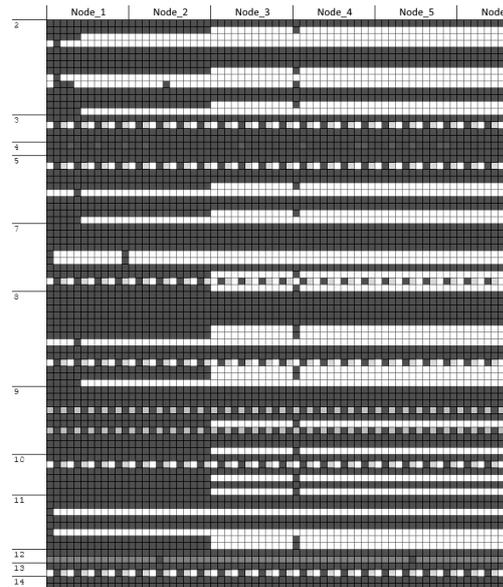


Рис. 1. Динамическое распределение с функцией MOD

Разработано великое множество хеш-функций [4]. Поэтому вместо разработки новой хеш-функции ограничимся лишь ее поиском. Дабы оставить для рассмотрения несколько хеш-функций из всего их многообразия, введем некоторые ограничения:

- результат хеш-функции – целое число (int16, int32, int64);
- результат хеш-функции должен быть равномерно распределен на всем множестве принимаемых значений;
- минимальный объем данных для хеширования – 1 байт;
- сложность вычисления хеш-функции не должна быть высокой.

Под установленные ограничения попадает группа хеш-функций Cyclic redundancy checks (CRC) [5] и множество не криптографических функций

[4]: MurmurHash2, MurmurHash3, CityHash, FarmHash, PJW hash и др. Из группы CRC выберем хеш-функцию CRC-32 как наиболее подходящую по размерности результата. Из не криптографических функций – MurmurHash2, так как она применяется в Apache Spark SQL [6] и отличается хорошим равномерным распределением хешированных данных.

Все эксперименты проведены на платформе GPU-кластера, состоящего из 7 узлов. Параметры узлов: 2 six-core E5-2640 CPU/2,5GHz/DDR3 128GB. Дисковая подсистема узла – RAID 10 из 4 WD1000 DHTZ/ 1TB суммарным объемом (за вычетом «зеркала») 2 ТВ. Операционная система – Windows Server 2012 R2. Интерконнект между узлами – GigabitEthernet с 24-портовым коммутатором SSE G24-TG4. Объем БД – 120 GB. ПТ – первая перестановка TPC-H Throughput Test без операций записи.

3. Динамическое сегментирование. В Clusterix-подобных системах динамическое сегментирование работает до и между этапами JOIN (выполнения операций соединения). Каждый узел применяет хеш-функцию к результату работы с предыдущего этапа и передает данные другим узлам. Поскольку данные представляются массивами байт, а хеш-функция MOD принимает только целые числа, требуется выполнять раскрытие хешируемых ключей из данных. Под раскрытием будем понимать процесс преобразования массива байт данных в массив данных с целочисленным ключом.

Рассматриваемые хеш-функции (CRC-32 и MurmurHash2) принимают массивы байт, поэтому для них выполнять раскрытие ключей не обязательно. Достаточно лишь выделить байты ключа из общего массива. Раскрытие ключей может положительно сказаться на распределении данных после хеширования. Следовательно, следует рассмотреть эти хеш-функции в двух вариантах: с раскрытием и без.

CRC-32 и MurmurHash2 возвращают результат хеширования как целое число размером 32 бита. Чтобы спроецировать результат хеширования на номера ядер кластера, к нему применяется операция $\text{mod } M$.

В результате проведенных экспериментов получены визуализации карт распределения данных после выполнения ПТ для всех случаев. Они представлены на рисунке 2. Из них видно, что применение хеш-функций CRC-32 или MurmurHash2 показывает лучшее распределение данных по узлам, чем MOD. Распределение CRC-32 с раскрытием (рис. 2а) отличается от CRC-32 без раскрытия (рис. 2в) только большей концентрацией данных на последних двух узлах. Распределение MurmurHash2 с раскрытием (рис. 2б) отличается от MurmurHash2 без раскрытия (рис. 2г) более значительно. Для некоторых запросов (2, 8, 11) вариант без раскрытия показывает более равномерное распределение. С другой стороны, MurmurHash2 с

раскрытием показывает распределение по большему числу процессорных ядер (запросы 2, 7, 8 10).

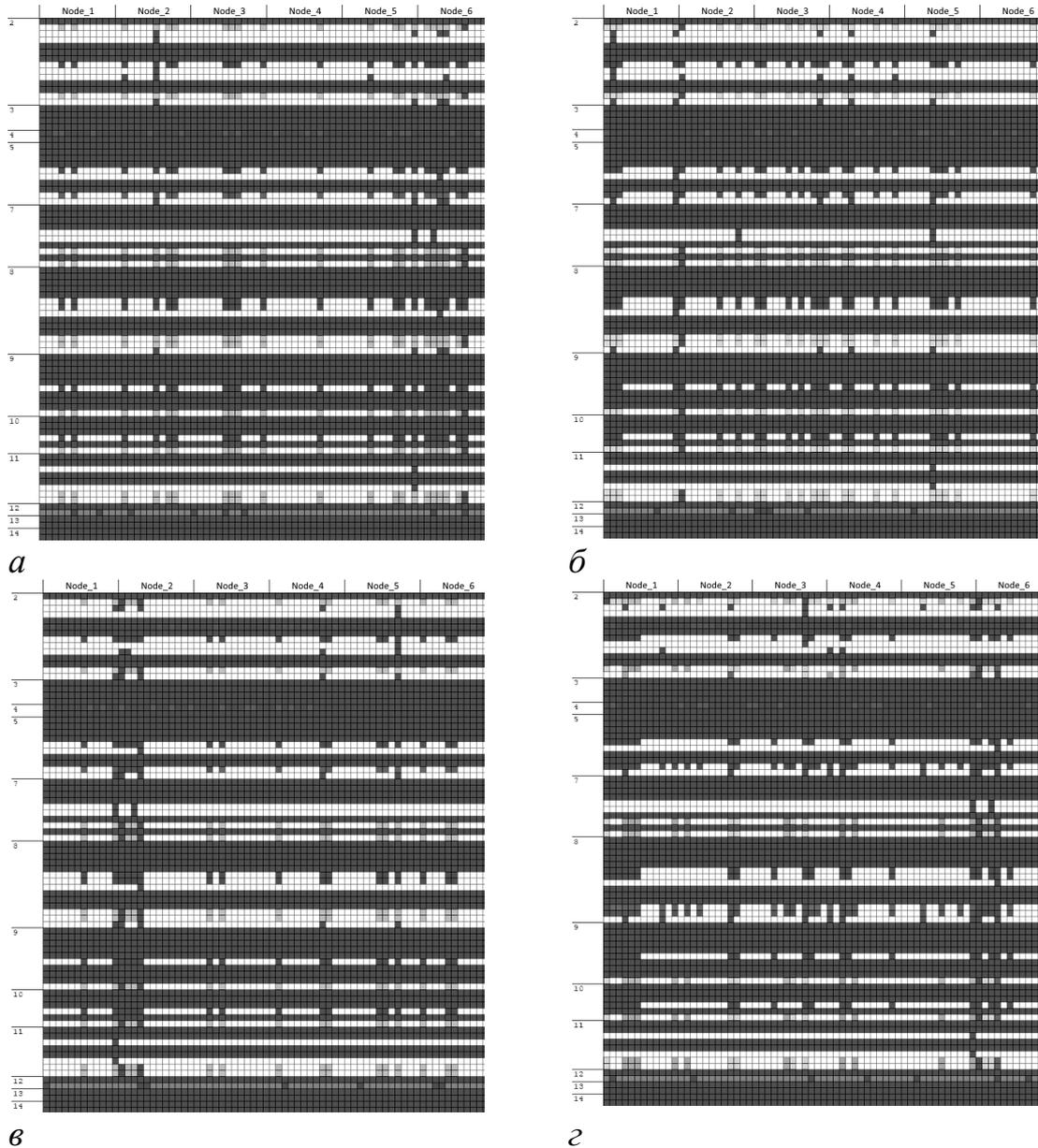


Рис. 2. Карты распределения данных по ядрам для а – CRC32 с раскрытием, б – MurmurHash с раскрытием, в – CRC32 без раскрытия, г – MurmurHash без раскрытия

4. Заключение. В результате рассмотрения двух функций хеширования удалось установить следующее:

1. Хеш-функции CRC-32 и MurmurHash2 показывают лучшее распределение по сравнению с MOD.

2. Для динамического сегментирования лучшие результаты показаны хеш-функцией MurmurHash2, так как данные оказались распределены по узлам кластера более равномерно, чем для CRC-32 и MOD.

3. Поскольку CRC-32 и MurmurHash2 используются для хеширования массива байт, теперь возможно выполнение операции JOIN по строкам, а не только целым числам.

Литература

1. Lämmel Ralf. Google's MapReduce programming model – Revisited // Science of Computer Programming. 2008. Vol. 70, No 1. P. 1-30. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167642307001281>.

2. Классен Р.К. Улучшение оценок для консервативной СУБД класса BigData с регулярным планом обработки запросов // Материалы XXI Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения». Смоленск, 2020. Вып. 21. С. 154-161.

3. Martin J. Computer database organization. Second Edition Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1977. 713 p.

4. List of hash functions. // Wikipedia. 2020. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_hash_functions&oldid=1007164677 (дата обращения 28.12.2020).

5. Циклический избыточный код // Википедия. 2020. URL: <https://ru.wikipedia.org/?curid=15571&oldid=112389930> (дата обращения: 28.12.2020).

6. Hash Partitioning // The Internals of Spark SQL. URL: <https://jaceklaskowski.gitbooks.io/mastering-spark-sql/content/spark-sql-HashPartitioning.html> (дата обращения: 28.12.2020).

R.K. Klassen

Kazan National Research Technical University
named after A. N. Tupolev – KAI

COMPARISON OF DIFFERENT DYNAMIC SEGMENTATION FUNCTIONS IN CLUSTERIX-LIKE SYSTEMS

Keyword: *hashing, dynamic segmentation, Clusterix-N, distributed computing, data distribution, sharding.*

Abstract. *To process large amounts of data, it is required to use computational clusters and distribute data across its nodes. The dynamic segmentation function is responsible for distributing data in Clusterix-like systems. It based on the remainder of a relation key divided by the number of cores in the cluster. This function allows you to get the ideal distribution for sequential data, but in other cases can be extremely ineffective. This article discusses the use of various hash functions for data distribution. The data distribution maps on the cluster cores are demonstrated.*

О СООТВЕТСТВИИ МОДЕЛЕЙ ДАННЫХ И МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Ключевые слова: алгебра многомерных матриц, реляционная алгебра, программно-аппаратный комплекс, параллельная обработка данных.

В статье рассмотрен один метод построения эффективных программно-аппаратных комплексов. В основу метода положена установка изоморфного или гомоморфного соответствия между моделью данных, построенной в результате системного анализа предметной области и постановки задачи, и моделью вычислений, реализованной в выбранном программно-аппаратном комплексе. Приведено доказательство изоморфизма алгебры матриц и реляционной алгебры при решении задачи поиска путей в графе, а также доказательство гомоморфизма алгебры логических многомерных матриц и реляционной алгебры по операциям (λ, μ) -свернутого произведения и операции JOIN. Показано, что установление такого соответствия позволит повысить производительность программно-аппаратного комплекса посредством выбора модели вычислений, обеспечивающей эффективное решение задачи за счет эффективного распределения данных и параллельного выполнения алгоритмов, реализующих алгебраические операции.

Введение. В [1] говорится, что «для всех конкретных параллельных вычислительных систем степень согласованности структуры алгоритмов с архитектурой систем играет самую важную роль в достижении наивысших скоростей». В статье подробно рассматривается решение задачи достижения этой согласованности на основе алгебраического подхода. Его сущность заключается в том, что для решения задачи средствами вычислительной техники обрабатываемые данные и операции их обработки формализуются посредством универсальной, как правило многоосновной, алгебраической системы [2]. Далее эта формализация будет называться моделью данных. Затем выбирается вычислительный комплекс и рассматривается его модель вычислений – алгебраическая система, которая реализована программно-аппаратными средствами. Завершающий этап состоит в том, что устанавливается соответствие между моделью данных и моделью вычислений, то есть в доказательстве того, что

это соответствие есть изоморфизм или гомоморфизм [2; 3]. Тогда цель рассмотренного в статье исследования состоит в следующем.

Алгебраическая система, в которой формализована решаемая задача, и модель вычислений (алгебраическая система, реализованная в системе команд вычислительной системы или комплекса) должны в наибольшей степени соответствовать друг другу. Эти алгебраические системы должны быть по крайней мере гомоморфными, а в идеальном случае, когда достигается полное соответствие, – изоморфными.

Алгебраический подход и объектно-ориентированное программирование. Считается, что первой работой, в которой было введено понятие абстрактного типа данных АД (класса или объекта в терминологии большинства современных систем программирования), стала статья [4]. В ней определение этого понятия дается в интуитивной форме посредством перечисления и описания свойств АД. Несмотря на то, что все эти свойства подробно описаны в литературе по программированию, понять, что они собой представляют, и тем более использовать их при разработке программ затруднительно. Не исключено, что появившаяся в интернете критика объектно-ориентированной технологии программирования связана именно с этими трудностями. По мнению авторов, эти негативные явления объясняются недостаточным пониманием математических, а точнее алгебраических, основ объектно-ориентированного подхода к разработке программ.

Вместе с тем нельзя не отметить тот факт, что еще в 50-е годы XX века в работах академика Л.В. Канторовича, его учеников и сотрудников [5; 6] был разработан строгий алгебраический подход, который, несомненно, является предтечей как теории структуризации данных [7], так и теории объектно-ориентированного программирования. Последняя точка в вопросе формализации понятия АД была поставлена в книге [8]. Здесь АД определяется как *универсальная многоосновная алгебраическая система*.

Действительно, из определения многоосновной алгебраической системы $U = \langle M; \Omega; \Pi \rangle$, где $M = (M_1, \dots, M_n)$ – система основных множеств; $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ – сигнатура операций (множество частичных функций, определенных на подмножествах M и принимающих значения в одном из множеств, принадлежащем M); $\Pi = \{\pi_1, \dots, \pi_r\}$ – сигнатура предикатов (множество частичных функций, определенных на подмножествах M и принимающих значения в множестве $\{0, 1\}$) [2], непосредственно следуют все свойства АД.

Абстрагирование. Если рассмотреть алгебраическую систему моноид, то присущие ему абстрактные свойства могут быть реализованы в различных реальных моделях, например, в системе с основным множеством R^+ и операцией $\min(x, y)$ и в системе с основным множеством строк и операцией конкатенации.

Инкапсуляция. Это одно из самых противоречивых свойств АД. В литературе приводятся нечеткие описания инкапсуляции. Существует целое направление критики объектного подхода, приверженцы которого утверждают, что именно данное свойство приводит к многим проблемам ненадежности программных средств, разработанных в объектно-ориентированной технологии. Действительно, реализация инкапсуляции в системах программирования далека от совершенства. На самом деле инкапсуляция достигается только тогда, когда программист понимает, что операции в АД, как правило, частичные функции и, следовательно, необходимо при вводе и инициализации данных проверять их соответствие областям определения этих функций. Например, если в АД имеется операция вычисления площади треугольника по формуле Герона, необходима проверка неравенства треугольника. Если АД реализует умножение матриц, то обязательна проверка размерностей матриц-операндов на совместимость по умножению.

Наследование. Это свойство естественно для всех алгебраических систем. Если рассмотреть алгебраические структуры от группоида до поля, то каждая последующая структура наследует все свойства предыдущей. А такие структуры, как кольцо и поле, наследуют свойства сразу двух структур. Причем это фактически соответствует множественному наследованию контейнерным методом, который реализован практически во всех объектно-ориентированных языках программирования.

Полиморфизм. Это свойство также реализовано в алгебраических системах. При «расширении» основного множества знаки операций остаются прежними, при том что алгоритмы операций существенно изменяются. Данное свойство известно из курса математики начальной школы. При переходе от неотрицательных целых чисел ко всему множеству целых чисел, а затем к рациональным числам в виде обыкновенных дробей алгоритмы операции сложения изменяются, но знак операции «плюс» остается неизменным.

Из сказанного можно сделать следующий вывод: если модель вычислений реализована посредством объектно-ориентированной технологии, то реализуемая задача предметной области должна быть формализована средствами универсальной алгебраической системы гомоморфной или изоморфной модели вычислений и запрограммирована с использованием той же технологии.

Соответствие алгебраических систем. Далее рассматриваются две соответствующие друг другу алгебраические системы, которые могут выступать в роли как моделей данных, так и моделей вычислений. Это алгебра логических многомерных матриц [9; 10] и реляционная алгебра.

Многомерная матрица $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$ называется логической многомерной матрицей (ЛММ), если ее элементы принадлежат множеству

$\{0, 1\}$ и над ними определены аддитивная операция дизъюнкции и мультипликативная операция конъюнкции.

Далее будет рассмотрена только операция (λ, μ) -свернутого произведения $C = \overset{\lambda, \mu}{\smile}(A \times B)$. Индексы матриц A и B разбиваются на четыре группы $l, s, c,$ и m , содержащие соответственно k, λ, μ и ν индексов. Элементы матрицы C вычисляются по правилу: $c_{lsm} = \bigvee_{(c)} a_{lsc} \wedge b_{scm}$.

В реляционной алгебре рассматривается только операция InnerJoin, причем в форме $X \text{ Inner Join } Y \text{ ON } X.K=Y.K$.

Следует отметить, что реляционная модель данных, согласно сказанному ранее, также является объектной моделью, вопреки установившимся представлениям по этому вопросу. Действительно, в соответствии с определением реляционная алгебра есть АТД (в практикуемой сейчас терминологии *суперкласс*). Схема конкретной базы данных (схемы таблиц и запросы) – это также АТД (*класс*). Тогда БД, наполненные реальными данными, – это экземпляры соответствующего класса (*объекты*).

Утверждение 1. *Каждой таблице БД во второй или третьей нормальной форме по составному ключу $K = \{K_1, \dots, K_p\}$, соответствует единственная ЛММ.*

В этом случае таблицу X_K можно рассматривать как множество строк, строго упорядоченных по ключу $K = \{K_1, \dots, K_p\}$. Поскольку множества значений ключей конечные, можно пронумеровать все значения каждого ключа и тем самым поставить в соответствие каждому ключу K_α индекс $i_\alpha = (1, \dots, n_\alpha)$. Тогда каждому фиксированному значению ключа $K^* = \{K_1^*, \dots, K_p^*\}$ соответствует один и только один набор значений индексов (i_1^0, \dots, i_p^0) . Это означает, что между совокупностью всех значений ключа K таблицы X_K и совокупностью всех наборов значений индексов (i_1, \dots, i_p) установлено взаимно однозначное соответствие. Далее предполагается, что если в таблице X_K отсутствует реальная запись, соответствующая значению ключа $K^* = \{K_1^*, \dots, K_p^*\}$, то считается, что в ней присутствует универсальная неопределенная запись Θ с этим значением ключа. Пусть набору значений ключа $K^* = \{K_1^*, \dots, K_p^*\}$ соответствует набор значений индексов (i_1^0, \dots, i_p^0) . Тогда записи X_{K^*} можно поставить в соответствие элемент ЛММ $X = \|x_{i_1^0 \dots i_p^0}\|$, значение которого определяется по

формуле: $x_{i_1^0 \dots i_p^0} = \begin{cases} 0, & \text{если } X_{K^*} = \Theta, \\ 1, & \text{если } X_{K^*} \neq \Theta. \end{cases}$ Следовательно, при таком методе

построения ЛММ каждой таблице соответствует единственная ЛММ. Однако возможна ситуация, при которой нескольким различным файлам,

содержащим данные из различных предметных областей, будет соответствовать одна и та же ЛММ. То есть построенное отображение множества строго упорядоченных файлов на множество ЛММ – однозначное.

Утверждение 2. Пусть X_L и Y_M – таблицы во второй или третьей нормальной форме по составным ключам $L = \{L_1, \dots, L_p\}$ и $M = \{M_1, \dots, M_q\}$, причем выполняется условие $L \cap M \neq \emptyset$, и пусть $K = \{K_1, \dots, K_r\}$, ($r < p, r < q$) – составной ключ, связанный с ключами L и M соотношениями: $K \subseteq L \cup M$, $K \cap L = K \cap M \neq \emptyset$. Тогда таблицы X_K и Y_K можно рассматривать как нестрогое упорядоченные множества по этим ключам, или фактор-множества. В таком случае классы эквивалентности X_{K^*} и Y_{K^*} могут содержать либо не менее одной реальной записи, либо единственную универсальную неопределенную запись Θ . Результат операции Inner Join в этом случае определяется как $Z_K = \bigcup_{(K)} X_{K^*} \times Y_{K^*}$ или

$Z_K = \bigcup_{(K)} G(X_{K^*} \times Y_{K^*})$, где G – функция, реализующая групповую операцию.

Если $A = \|a_{i_1 \dots i_r}\|$ и $B = \|b_{i_1 \dots i_r}\|$ – ЛММ, соответствующие таблицам X_L и Y_M ($\varphi(X_L) = A$ и $\varphi(Y_M) = B$), то таблице Z_K – результату операции X Inner Join Y ON $X.K=Y.K$ – соответствует единственная многомерная матрица $C = \|c_{i_1 \dots i_r}\| = {}^{\lambda, \mu}(A \times B)$.

Пусть L' – ключи, принадлежащие множеству $L \setminus K$, а M' – ключи, принадлежащие множеству $M \setminus K$. При построении операции ${}^{\lambda, 0}(A \times B)$ можно считать, что ключам подмножеств L' и M' соответствуют свободные индексы ЛММ A и B (индексы разбиений l и m), а ключам подмножества K – скоттовы индексы ЛММ A и B (индексы разбиения s). Класс эквивалентности $Z_{K^*} \neq \Theta_{K^*}$ только в том случае, когда соответствующие ему классы эквивалентности $X_{K^*} \neq \Theta$ и $Y_{K^*} \neq \Theta$. Тогда элементы ЛММ A и B , соответствующие этим классам эквивалентности, имеют значение 1. А значит, результат конъюнкции этих элементов также будет иметь значение 1. То есть соответствующий этому элементу класс эквивалентности $Z_{K^*} \neq \Theta_{K^*}$.

Если функция $G(X_{K^*} \times Y_{K^*})$ реализует групповую операцию, то запрос, включающий операцию Inner Join содержит групповую операцию. Если групповая операция выполняется по всему составному ключу K , то выполняется операция, соответствующая ${}^{0, \mu}(A \times B)$, то есть ключ K будет отсутствовать в таблице-результате. Если она выполняется по части

ключей, составляющих ключ K , то получается общий случай (λ, μ) -свернутого произведения.

Таким образом, установлен гомоморфизм между алгеброй логических многомерных матриц и реляционной алгеброй. Для построения изоморфизма необходимо в каждом конкретном случае разработать алгебру кортежей для вычисления кортежей составленных из неключевых атрибутов.

В качестве примера рассмотрена задача поиска кратчайших путей между всеми вершинами графа. Один из методов решения этой задачи – алгоритм Флойда–Уоршелла – имеет матричную форму (транзитивное замыкание матрицы весов ребер графа). В том случае, когда матрица имеет высокую размерность и при этом содержит большое число нейтральных элементов, вычисление кратчайшего пути может выполняться много времени. Как правило, в этом случае используются сложные и трудно распараллеливаемые алгоритмы умножения разреженных матриц. Для упрощения решения данной задачи можно использовать реляционную алгебру. Действительно, пусть $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{jk})$ – совместимые по умножению матрицы. Им соответствуют таблицы $A(i, j, w)$ и $B(j, k, w)$. Поскольку умножение плоских матриц есть $(0, 1)$ -свернутое произведение, то этой операции будет соответствовать запрос `SELECT A.i, B.k, MIN(A.w + B.w) FROM A Inner Join ON A.j = B.j GROUP BY A.i, B.k`. В данном случае матричная модель данных изоморфна реляционной модели вычислений.

Заключение. Предложенный в статье метод установления соответствия между моделями данных и моделями вычислений позволяет решить проблему повышения производительности программно-аппаратных комплексов. Каждый такой комплекс реализует ту модель вычислений, которая обеспечивает наиболее эффективное решение некоторого класса задач. Метод соответствия моделей позволяет формализовать решение задачи из предметной области таким образом, чтобы можно было выбрать наиболее эффективное аппаратное программное обеспечение для реализации данного решения. В приведенном примере показано, что замена операции умножения разреженных матриц операцией Join над реляционными образами этих таблиц позволяет повысить производительность за счет реализованного в СУБД параллелизма указанной операции и использования симметричного горизонтального распределения таблиц-операндов.

Литература

1. Воеводин В.В. Вычислительная математика и структура алгоритмов. М.: Изд-во МГУ, 2006. 112 с.

2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970.
3. Гастев Ю.А. Гомоморфизмы и модели. Логико-алгебраические аспекты моделирования. М.: Наука, 1975.
4. Liskov B., Zilles S. Programming with abstract data types. – ACM SIGPLAN Notices. 1974. Vol. 9, Is. 4. P. 50 – 59.
5. Канторович Л.В. Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машинах // Доклады АН СССР. 1957. Т. 113, № 4. С. 738–741.
6. Канторович Л.В., Петрова Л.Т., Фет Я. И. Комплексный подход к реализации массовых вычислений // Оптимизация. 1974. Вып. 13(30). С. 5–11.
7. Dahl O.J., Dijkstra E.W., Hoare C.A.R. (ed.). Structured programming. Academic Press Ltd., 1972.
8. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наукова думка, 1989. 376 с.
9. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев: Наукова Думка, 1972.
10. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, №. 4. С. 3-16.

V. I. Munerman, D. V. Munerman
Smolensk State University

ABOUT THE CORRESPONDENCE OF DATA MODELS AND CALCULATION MODELS

Keywords: *multidimensional matrix algebra; relational algebra, software and hardware complex, parallel data processing.*

Abstract. *The article discusses one method for constructing effective hardware and software systems. The method is based on the installation of an isomorphic or homomorphic correspondence between the data model, built as a result of the system analysis of the subject area and the formulation of the problem, and the computation model, implemented in the selected software and hardware complex. The proof of the isomorphism of matrix algebra and relational algebra in solving the problem of finding paths in a graph is given. Also, a proof of the homomorphism of the algebra of logical multidimensional matrices and relational algebra with respect to operations ((λ , μ)-convolution product and JOIN operation) is given. solution of the problem due to efficient data distribution and parallel execution of algorithms that implement algebraic operations.*

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ДЛЯ УЗКОНАПРАВЛЕННОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Ключевые слова: *алгоритм, функция, редактор меню терминалов, цифровая подстанция.*

В данной статье рассматривается пример алгоритма, созданного для редактора меню терминалов программного комплекса САПР «Сириус». Дается объяснение, для чего нужна данная среда, а также описывается принцип работы данного алгоритма. Приведены результаты выполненной работы.

Введение. В статье рассматривается пример алгоритма, созданного для редактора меню терминалов – одного из редакторов узкоспециализированной среды «Система автоматического проектирования Сириус» (САПР «Сириус»). Данный программный комплекс необходим для создания программного обеспечения цифровой подстанции [1, с. 193-194].

Согласно [2], цифровая подстанция (ЦПС) – подстанция с высоким уровнем автоматизации, в которой практически все процессы информационного обмена между элементами подстанции и управление ее работой осуществляются в цифровом виде на основе стандартов из серии МЭК 61850.

Разработка терминалов и их интерфейса (меню терминалов) предназначена для автоматизации на высоковольтных линиях, линиях электропередач, другими словами, в сфере электроэнергетики, где наличие человеческого фактора может привести к различным неблагоприятным ситуациям – от порчи оборудования до гибели на производстве [4, с. 57]. За использование терминала отвечает меню терминала, позволяющее собирать статистику о работе как устройства, так и всей подстанции (под подстанцией подразумевается электроустановка, предназначенная для приема, преобразования и распределения электрической энергии [3]).

Описание проекта. Редактор меню терминалов предназначен, как следует из названия, для разработки меню терминалов. Меню терминала представляет собой древовидную структуру, состоящую из пунктов, содержащих информацию о типе данных оперативного контроля и порядке их вывода на экран терминала. Редактор позволяет как создавать описание меню терминала «с нуля», так и импортировать описания из файлов. Созданное описание меню также можно экспортировать. Последние

используются для генерации кода меню на языке С, который затем компилируется и загружается в терминалы [5].

Описание использованных программных средств. Редактор создан в среде Microsoft Visual Studio Professional 2012 на языке программирования С#. Использование устаревшей на текущий момент версии среды разработки объясняется тем, что для работы с САПР ЦПС необходимо постоянное подключение к Интернету, что требует соответствующего кода, несовместимого с разными версиями сред разработки. Использование языка С# обосновано требованиями, выдвигаемыми на предприятии по отношению к сотрудникам, в данном случае к инженерам-программистам.

Задача. Для оптимальной работы проекта и для облегчения поиска ошибок в созданных редакторах рекомендуется регистрация действий пользователя [1]. Регистрация нужна для последующего проигрывания, то есть возможности воспроизведения пользовательских действий в автоматическом режиме для будущего поиска ошибок в цифровой подстанции, одним из редакторов которой является редактор меню терминалов. Следовательно, необходимо, чтобы проигрывание точно повторяло ручные действия [1].

Описание алгоритма. Алгоритм регистрирует действия пользователя при вырезании, копировании или вставке объектов «Меню терминалов» и «Пункт меню терминалов» в ходе работы в нескольких проектах одновременно либо при вырезании, копировании или вставке объекта «&» в одном или нескольких проектах одновременно (служебный символ «&» указывает на вывод значения переменной, связанной с полем, в котором он расположен, в указанном формате [5]). Как следует из названия, функции вырезания, копирования и вставки объектов позволяют вырезать или скопировать объект из одного проекта и вставить его в другой. Также возможны вырезание, копирование и вставка нескольких пунктов меню терминала.

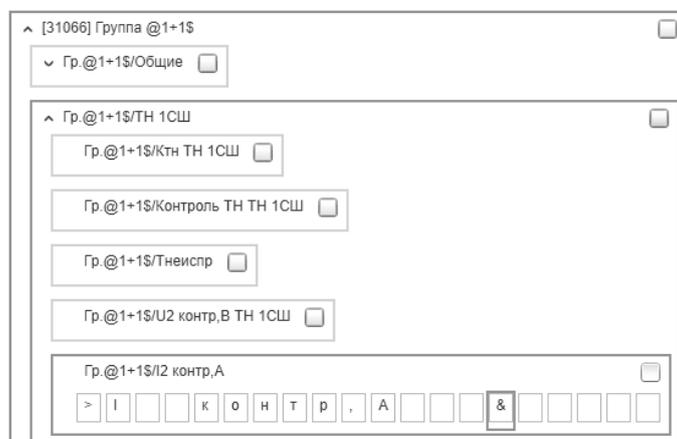


Рис. 1. Фрагмент проекта в редакторе меню терминалов

Алгоритм реализован в виде трех функций, осуществляющих вырезание, копирование или вставку объекта соответственно. Функции принимают на вход следующие параметры: параметр `aAutomation` типа `double`, определяющий включение автоматического режима; объект `aObj`, по умолчанию прописанный как `null`; целочисленный индекс ячейки `aCellIndex`, по умолчанию `null`, и логическую переменную `aRegisterInTimeMachine`, по умолчанию `true`, указывающую на выполнение отмены или возврата пользовательского действия, при этом параметр отсутствует в функции копирования в силу отсутствия необходимости отменять и повторять копирование. Наличие «пустых» входных данных создано для работы с разными объектами; для меню и пункта меню терминалов они не нужны, но для амперсанда их наличие позволяет сохранить его уникальные свойства, о чем ранее говорилось в [1].

Далее приведены операции, выполняемые при работе с объектом-амперсандом.

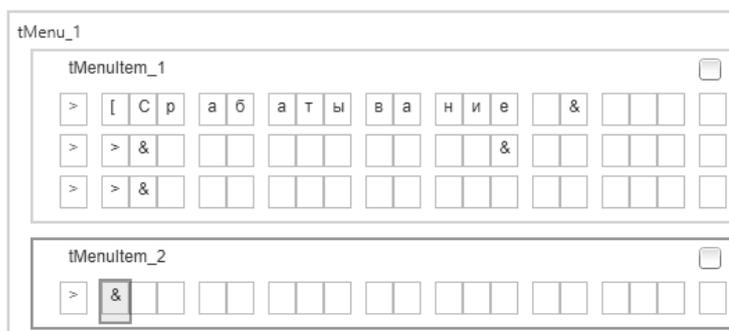


Рис. 2. Амперсанд до вырезания (снизу)

Если пользователь работает с редактором меню терминалов вручную, то при входе в функцию осуществляется так называемое логирование – запись в лог-файл информации о действиях, совершенных пользователем. Далее функция создает объект-ячейку, в котором будут храниться все данные об объекте, с которым ведет работу алгоритм.

```
SProc=[TMECut] at=27.02.2021 21:47:35
  Params=2: < (|tMenuItem_3|0,64)> <1> // for TMECut
EProc=[TMECut] at=27.02.2021 21:47:35
SProc=[DiagramControlCellTextGotFocus] at=27.02.2021 21:47:36
  Params=3: < (|tMenuItem_3|0,64)> <tMenuItem_3> <2> // for DiagramControlCellTextGotFocus
EProc=[DiagramControlCellTextGotFocus] at=27.02.2021 21:47:36
SProc=[TMEPaste] at=27.02.2021 21:47:38
  Params=2: < (|tMenuItem_3|0,64)> <2> // for TMEPaste
EProc=[TMEPaste] at=27.02.2021 21:47:38
```

Рис. 3. Фрагмент лог-файла

После этого функция проверяет, какие объекты приняты на вход и каково их число. Если объект является объектом-ячейкой, то функция создает два ее родительских объекта, из которых записывается родитель ячейки. Причины этого были описаны в [1].

Далее, если проигрывания нет, то функция логирует объект-пункт меню терминала и индекс ячейки; в противном случае эти параметры позволяют найти записанную ячейку с заданным номером ключа.

После этого если пользователь не отменил или не повторил действие, другими словами, не была использована машина времени, то свойства объекта записываются в специальный новый объект tObj, необходимый для корректной работы операций отмена и повтора. Как говорилось ранее, этот код используется только для операций вырезания и вставки объектов.

Дальнейшая работа алгоритма зависит от задачи, выполняемой функцией. Если пользователь копирует объект, то функция просто клонирует графические данные объекта (например, объект-ячейка является графическим объектом, а его отдельные свойства – нет). То же самое происходит и при вырезании амперсанда из ячейки, только его свойство «Text» перезаписывается как пустая строка. При вставке объекта в ячейку свойства объекта перезаписываются на свойства, принятые функцией на входе. После этого функция в случае ручного воспроизведения действий пользователя фиксирует в логе завершение функции.



Рис. 4. Вырезанный и вставленный в соседнюю ячейку амперсанд (снизу)

Если говорить о таких объектах, как меню терминала и пункт меню терминала, то работа с ними осуществляется по другой схеме. В отличие от амперсандов [1], эти объекты не являются временными, поэтому запоминать их и индекс ячейки не имеет смысла. Для работы с вырезанием и копированием используется функция экспортирования, позволяющая не только вырезать и копировать меню терминала и пункты меню терминала соответственно, но и экспортировать содержимое проекта в файлы формата «*.tmd» и «*.mbr». Эти файлы отличаются содержанием информации о проекте и могут быть использованы для импорта и генерации кода на языке С [5]. То же можно сказать и о функции импортирования, позволяющей загрузить проект из файлов «*.tmd» или «*.mbr».

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИСКАЖЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА КАЧЕСТВО СИСТЕМ ВЕРИФИКАЦИИ ЛИЦ

Ключевые слова: *глубокая нейронная сеть, искажение изображений, сжатие, шум, яркость, оттенки серого, метрики качества, алгоритм деревьев решений, Python, пакет deepface.*

В данной работе проводится исследование влияния искажения изображений лиц на их верификацию средствами глубоких моделей сверточных нейронных сетей: DeepFace, FaceNet, OpenFace, VGGFace. Предлагаются приемы искажения изображений средствами Python с применением библиотек для сжатия, шума, яркости, оттенков серого. Разработана методика верификации, основанная на алгоритме деревьев решений. Приведены результаты экспериментов по вычислению метрик качества моделей при наличии искажений.

Введение. Подходы, основанные на глубоких сверточных нейронных сетях (CNN), являются современными в решении различных задач компьютерного зрения, включая верификацию лица. Значительные исследовательские усилия в настоящее время направлены на дальнейшее улучшение глубоких CNN путем сосредоточения внимания на более мощных архитектурах моделей и более совершенных методах обучения. Тем не менее экспериментальные исследования, изучающие влияние качества изображений на существующие глубокие модели для верификации лиц, все еще относительно скудны в литературе [1]. В настоящей статье сделана попытка заполнить этот пробел и изучить влияние различных свойств изображений на эффективность реализации четырех глубоких моделей CNN: DeepFace, FaceNet, OpenFace, VGGFace. В частности, исследовано влияние факторов, имеющих отношение к качеству изображений (сжатия JPEG, шума, яркости), и проанализирована их связь с верификацией. На основе экспериментов выявлены сильные и слабые стороны моделей глубокого обучения. Полученные результаты показывают, что высокие уровни шума и яркости оказывают вредное влияние на эффективность верификации для всех моделей, тогда как влияние степени сжатия и преобразования в оттенки серого весьма ограничено.

Глубокие модели CNN. Модели, рассмотренные в этой работе, выступают представителями наиболее часто используемых сегодня архитектур CNN и были выбраны из-за их популярности в области распознавания [2]. С другой стороны, связанные с качеством факторы

искажения изображений – явления, обычно встречаемые в реальной жизни, которые, как известно, в значительной степени влияют на технологию верификации. Особенность участвующих в проведенных экспериментах моделей в том, что все они используют однократное обучение – одно из последних достижений в области верификации. При таком обучении сравниваемые изображения преобразуются в компактные вектора, дистанция между которыми соответствует мере схожести лиц. Для оценки схожести используется специальная ошибка – функция потерь Triplet Loss. Она минимизирует дистанцию между похожими лицами и максимизирует дистанцию для непохожих. Название происходит от использования трех сравниваемых изображений по следующему алгоритму. Вначале оценивается, насколько одно изображение лица ближе к одному человеку, другое – к другому. Затем сравнивается, насколько похожи эти два человека между собой. После чего добавляется третий человек и оценивается, к кому он ближе – к первому или ко второму. Исходя из этой близости еще раз корректируется ошибка верификации. Сеть, обученная таким образом, называется сиамской. В ходе экспериментов рассматриваются следующие четыре сиамские нейронные сети.

DeepFace – система распознавания лиц с глубоким обучением, созданная исследовательской группой в Facebook. Фактически именно эта технология, представленная пользователям в начале 2014 года, стала поворотным моментом для извлечения черт лица. Она использует девятиуровневую нейронную сеть, обученную на четырех миллионах изображений, загруженных пользователями Facebook. Сеть не похожа на предыдущие поколения программного обеспечения для распознавания, которые следуют стандартным шагам: обнаружение => выравнивание => представление => классификация. Она использует сложное трехмерное моделирование лица, чтобы применить кусочно-аффинное преобразование и получить представление лица в виде нейронной сети. Эта глубокая сеть включает более 120 миллионов весов соединений с использованием нескольких локально связанных слоев без разделения веса, а не стандартных сверточных слоев.

FaceNet – нейронная сеть распознавания лиц, разработанная в 2015 году исследователями Google. Для обучения используется очень большой исчерпывающий набор данных (260 миллионов). Набор данных слишком велик по размеру, и его трудно обрабатывать. Чтобы преодолеть это, модель не обучается с нуля, а берется уже предварительно обученная. Общее время обучения – 1–2 тысячи часов. Преимущество модели в том, что в качестве входных данных можно использовать изображения малого объема.

OpenFace (Carnegie Mellon University) также создана на основе исследований Google. Это облегченная модель распознавания лиц, включает не более 3,7 миллиона параметров, первый инструмент с

открытым исходным кодом, способный определять характерные черты лица, оценивать позу головы, распознавать действия и оценивать взгляд. Для формирования этих лицевых ориентиров существует технология «patch experts», благодаря чему алгоритмы компьютерного зрения, составляющие ядро сети, демонстрируют самые современные результаты в решении всех перечисленных выше задач. Кроме того, инструмент способен работать в режиме реального времени даже с простой веб-камерой. В 2018 году создается OpenFace 2.0 (2018) – расширение набора инструментов с еще более лучшим распознаванием лицевых ориентиров. Вес OpenFace составляет 14 МБ (вес VGG-Face – 566 МБ, а вес Facenet – 90 МБ), что обеспечивает сети хорошее быстродействие. Поэтому OpenFace можно развернуть на мобильном устройстве.

VGG-Face (Visual Geometry Group из Оксфорда). Последняя модель, используемая в проводимых экспериментах, имеет 16 сверточных слоев. Модель имеет более глубокую сверточную архитектуру, чем OpenFace, и использует сверточные слои, объединенные в блоки. За каждой серией сверточных слоев следует слой максимального объединения в блок, за исключением последнего, после которого идут два соединенных в блок слоя, аналогичных OpenFace. Последний слой – классификатор, к которому принадлежит отдельный класс лица. Выход последнего слоя представляет дескриптор изображения VGG. Модель обучена на огромном наборе данных, содержащем 2,6 млн изображений лиц более 2,6 тыс. человек.

Подготовка набора данных. Для экспериментов оценки качества алгоритмов верификации был выбран набор данных [3] из нескольких групп цветных изображений лиц разрешением от 480*675 до 1536*2173 пикселей (рис. 1).



Рис.1. Фрагмент исходной базы данных изображений

Каждая группа представляет 2–3 изображения одного и того же человека. Изображения соединены в 278 пар, половина из которых включает пары разных людей, половина – одинаковых. Особенности подготовленной базы – разный угол наклона головы, цвет лица, фон,

степень освещенности, то есть все, что приближает эксперимент к реальным условиям.

Приемы искажения изображений. Для оценки влияния искажения изображений на эффективность рассматриваемых глубоких моделей применены следующие приемы.

Сжатие изображения кодируется с помощью алгоритма JPEG с различными наборами параметров качества. Это один из самых мощных алгоритмов сжатия с потерями, который отбрасывает «лишнюю» информацию для экономии места. Основан на дискретном косинусоидальном преобразовании – DCT (Discrete-Cosine Transform). Более низкие значения параметра сжатия соответствуют более агрессивному квантованию коэффициентов DCT и низкому качеству изображений. Оперирует алгоритм областями 8x8, на которых яркость и цвет меняются сравнительно плавно. Таким образом, сжатие в JPEG осуществляется за счет плавности изменения цветов. Средствами функции `random_noise` библиотеки `skimage.util` набор изображений модифицируется с установками качества 10%, 20%, 30%, 40% для анализа влияния сжатия.

Шум – случайное изменение яркости или цвета пикселей изображения, имеющее функцию плотности вероятности, равную функции нормального распределения. Чтобы выяснить, как шум влияет на возможность верификации лиц глубокими моделями, в изображение добавляется аддитивный шум, распределенный по Гауссу. Интенсивности пикселей меняются до допустимого динамического диапазона [0; 255]. Помимо гауссова шума, в изображение добавляется шум соли и перца, который заменяет случайные пиксели на 0 или 1. Изображение, содержащее шум соли и перца, будет иметь темные пиксели в светлых областях и яркие пиксели в темных областях. Средствами функции `random_noise` библиотеки `skimage.util` набор изображений модифицируется с установкой доли пикселей (`amount`) изображения, которые нужно заменить шумом, равной 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5. На рисунке 2 показан фрагмент базы данных с установленным значением `amount = 0,3`.



Рис. 2. Фрагмент зашумленных изображений.

Яркость представляет собой характеристику, определяющую, насколько сильно цвета пикселей отличаются от черного цвета (#000000). Для изменения яркости изображения использована модель цветового пространства HSV (каналы Hue, Saturation, Value – тон, насыщенность, значение). Каналы HSV имеют тип `uint8`, диапазон значений оттенков –

[0, 179]. С целью изменить яркость изображения выполняется разбиение преобразованного в HSV изображения на отдельные каналы, а затем уменьшение (темнее) или увеличение (светлее) V-канала по сравнению с исходным. Средствами функции COLOR_HSV2BGR библиотеки CV2 набор изображений модифицируется с установкой доли изменения V-канала, равной 0.4, 0.6, 0.8 (< 1, темные) и 1.2, 1.4, 1.6 (>1, светлые). На рисунке 3 показан фрагмент базы данных со значением V-канала, равным 0,6 (темные).



Рис. 3. Фрагмент изображений с низкой яркостью

Оттенок серого устанавливается в случае равенства всех палитр цветов, поэтому ему соответствует среднее арифметическое всех трех палитр цвета. Для этого изображение модифицируется средствами функции COLOR_BGR2GRAY библиотеки CV2.cvtColor.

Методика эксперимента верификации. Чтобы оценить качество выбранных глубоких моделей CNN в процессе верификации, для каждой пары изображений, находящихся в базе данных и подвергнутых определенному искажению (сжатие, шум, яркость, оттенок серого), находим расстояние между лицами. При этом используем характеристические выходные данные модели в качестве дескриптора лица. Дескриптор, представляющий кодировку лица, вычисляем средствами python – пакета deerface, в котором кодирование – это способ представления лица с использованием набора из N компьютерных измерений (вектор из 128 чисел). Модель вычисляет расстояние между двумя «закодированными» лицами по одной из трех указанных метрик: евклидово расстояние, косинусное сходство и L2-нормированное евклидово расстояние.

После того как расстояния для всех пар лиц, находящихся в базе данных, сгенерированы, обрабатываем их классификатором машинного обучения. Каждая запись набора данных для классификатора включает имена двух файлов сравниваемых изображений, двоичную метку «да» – «нет», соответствующую одинаковости, и вычисленное нейронной сетью значение расстояния.

В роли классификатора выбрана представленная Microsoft высокопроизводительная платформа с градиентным ускорением LIGHTGBM, выполняющая классификацию на основе алгоритма дерева принятия решений. Для оценки качества модели классификатора используем технику кросс-валидации. Классификатор обучается

определять схожесть лиц, используя расстояния между ними и значения меток изображений обучающей выборки, и затем предсказывает схожести в тестовых наборах, принимая верификационное решение «да, это один и тот же человек», если значение расстояния ниже определенного порогового значения.

Результаты эксперимента. В этом разделе описаны результаты проведенного эксперимента, направленные на оценку качества выбранных глубоких моделей для чистых и искаженных изображений. В таблице 1 представлены полученные метрики.

Таблица 1.

**Метрики оценки качества моделей верификации
для разных приемов искажения изображений**

model	no distortion	compress	brightness	noise	Color gray
VGGFace	Accuracy: 100.0 % F1 score 100.0 % Precision: 100.0 % Recall: 100.0 % Threshold= 0.71 auc= 1.0	Accuracy: 95.23% F1 score 95.1% Precision: 92.85% Recall: 97.5 % Threshold= 0.54 auc= 0.98	Accuracy: 94.04% F1 score 94.11% Precision: 88.88% Recall: 100.0 % Threshold= 0.65 auc= 0.97	Accuracy: 66.66% F1 score 66.66% Precision: 63.63% Recall: 70.0 % Threshold= 0.67 auc= 0.80	Accuracy: 96.42% F1 score 96.3% Precision: 93.02% Recall: 100.0 % Threshold= 0.90 auc= 0.97
FaceNet	Accuracy: 98.80 % F1 score 98.76 % Precision: 97.5 % Recall: 100.0 % threshold= 0.58 auc= 0.99	Accuracy: 98.75 % F1 score 98.66 % Precision: 97.5 % Recall: 100.0 % threshold= 0.6 auc= 0.99	Accuracy: 97.61 % F1 score 97.43 % Precision: 100.0 % Recall: 95.0 % threshold= 0.49 auc= 1.0	Accuracy: 60.71 % F1 score 65.97 % Precision: 56.14 % Recall: 80.0 % threshold= 0.52 auc= 0.71	Accuracy: 97.61 % F1 score 97.43 % Precision: 100.0 % Recall: 95.0 % threshold= 0.32 auc= 0.99
OpenFace	Accuracy: 80.95% F1 score 82.22% Precision: 74.0 % Recall: 92.5 % Threshold= 0.50 auc= 0.87	Accuracy: 77.38% F1 score 74.66% Precision: 80.0 % Recall: 70.0 % Threshold= 0.66 auc= 0.84	Accuracy: 75.0 % F1 score 76.40% Precision: 69.38% Recall: 85.0 % Threshold= 0.53 auc= 0.82	Accuracy: 55.95% F1 score 57.47% Precision: 53.191% Recall: 62.5 % Threshold= 0.44 auc= 0.53	Accuracy: 80.95% F1 score 81.3% Precision: 76.08% Recall: 87.5 % Threshold= 0.66 auc= 0.87
DeepFace	Accuracy: 71.42 % F1 score 68.42 % Precision: 72.22 % Recall: 65.0 % Threshold= 0. auc= 0.71	Accuracy: 61.904% F1 score 56.756% Precision: 61.76% Recall: 52.5 % Threshold= 0.70 auc= 0.64	Accuracy: 69.04% F1 score 69.04% Precision: 65.9% Recall: 72.5 % Threshold= 0.55 auc= 0.71	Accuracy: 67.85% F1 score 68.96% Precision: 63.829% Recall: 75.0 % Threshold= 0.54 auc= 0.71	Accuracy: 69.04% F1 score 64.86% Precision: 70.58% Recall: 60.0 % Threshold= 0.29 auc= 0.7625

Результат исследования показал, что качество выбранных моделей зависит от степени искажения тестовых изображений, так как доля правильных ответов алгоритма (accuracy) их работы падает с ростом искажений. Так, для модели VGGFace процент ошибок при уменьшении яркости, по сравнению с аналогичной метрикой на чистых тестовых изображениях, снизился на 5,96% и составил accuracy = 94,04%. При преобразовании изображения в оттенки серого точность модели упала на 3,68%. Более всего точность падает при зашумлении моделей. К примеру,

для модели VGGFace шум снизил точность прогноза на 33,33%, для модели FaceNet – на 38,09%, для модели OpenFace – на 25%, для модели DeepFace – на 3,57%. Падает точность и при изменениях яркости. Доля действительно принадлежащих одному лицу пар изображений относительно всех пар, которые система отнесла к одному лицу (Precision), снизилась на 11,2% для модели VGGFace, на 6,32% для модели DeepFace и на 5,38% для модели OpenFace. И только модель FaceNet оказалась устойчива к изменениям яркости сравниваемых лиц. Все модели показали хорошую полноту классификации (recall, долю найденных алгоритмом пар изображений одного лица от всех пар изображений одного лица в тестовой выборке) при ухудшении качества за счет сжатия и представления оттенками серого. Значение полноты этих моделей снизилось всего на величину от 3 до 7%. Они имеют хорошее значение показателя F1 (гармоническое среднее между точностью и полнотой), и только для яркости и шума значение F1 изменяется на величину от 5 до 33%.

На рисунке 4 представлены ROC-кривые (receiver operating characteristic) ошибок рассмотренных моделей верификации лиц для чистых изображений и изображений, подвергнутых искажениям. Графики позволяют оценить падение качества, поскольку в случае идеальной модели график ROC-кривой проходит через точку (0,1) и площадь под ним (AUC, Area Under Curve) максимальна и равна 1.

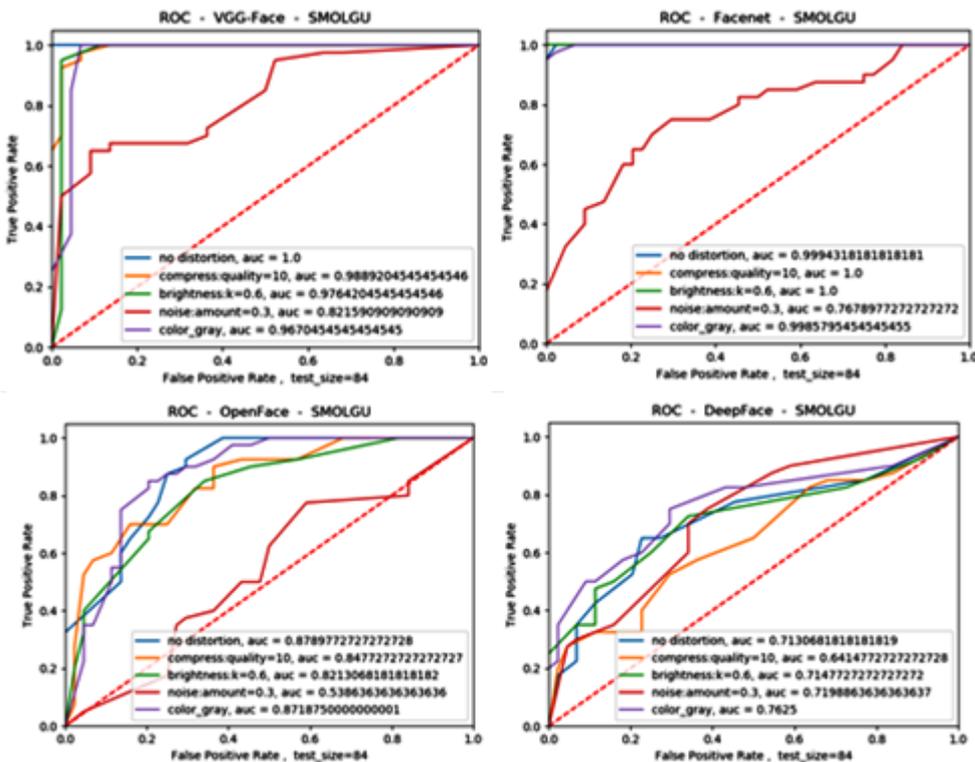


Рис. 4. Кривые ошибок моделей верификации лиц

Заключение

Высокую устойчивость к искажениям изображений продемонстрировали все рассмотренные нейронные сети. Модели верификации, обученные с использованием алгоритмов типа FaceNet, VGGFace, OpenFace и DeepFace, при сжатии тестовых изображений в 10 раз, значительном уменьшении яркости и переводе изображений в оттенки серого показали максимальное уменьшение значения AUC на 0%, 3%, 5%, 7% соответственно. При зашумлении цифровых изображений уровень правильной верификации моделей, построенных на основе FaceNet, VGGFace и OpenFace, в среднем упал на 20%. Однако для модели DeepFace добавление в обучающую базу зашумленных данных не изменило показатель AUC. Это говорит о том, что модель обладает хорошей обобщающей способностью и может работать в условиях шума.

Литература

1. Wiley V., Lucas T. Computer Vision and Image Processing: A Paper Review // International Journal Artificial Intelligence Research. 2018. Vol. 2, No.1, P. 29-36.
2. Parkhi O.M., Vedaldi A., Zisserman A. Deep Face Recognition // British Machine Vision Conference, 2015.
3. Serengil S.I. Face Verification. URL: <https://github.com/serengil/deepface/tree/master/tests/dataset> (дата обращения: 25.01.2021).

T.A. Samoilova

Smolensk State University

RESEARCH THE INFLUENCE OF IMAGE DISTORTION ON QUALITY FACE VERIFICATION SYSTEMS

Keywords: *deep neural network, image distortion, compression, noise, brightness, grayscale, quality metrics, decision tree algorithm, Python, deepface package.*

Abstract. *In this paper, we study the influence of facial image distortions on their verification using deep models of convolutional neural networks: DeepFace, FaceNet, OpenFace, VGGFace. Techniques for distorting images using Python using libraries for compression, noise, brightness, grayscale are proposed. A verification technique based on the decision tree algorithm has been developed. The results of the carried out experiments on calculating the quality metrics of models in the presence of distortions are presented.*

И.Н. Сеницын, В.И. Сеницын, Э.Р. Корепанов, Т.Д. Конашенкова
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук

УДК 621

ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПО СЛОЖНО-СТАТИСТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ

Ключевые слова: *вейвлет разложение (ВЛР), вейвлет каноническое разложение (ВЛКР), инструментальное программное обеспечение (ИПО), стохастическая система (СтС), стохастический процесс (СтП).*

Рассматривается инструментальное программное обеспечение «ССК-Синтез-ВЛ» вейвлет оптимального синтеза по сложно-статистическому критерию (ССК) существенно нестационарных систем. Под ССК понимается критерий, зависящий только от вероятностных моментов первого и второго порядков. В основу обеспечения положены вейвлеты Хаара. Приводится пример.

1. Постановка задачи. Вопросам оптимального синтеза СтП по критерию минимума средней квадратической ошибки (с.к.о.) на основе вейвлет разложений (ВЛР) и вейвлет канонических разложений (ВЛКР) посвящен цикл работ авторов. Обзор этих работ приведен в [1]. В [2] дано развитие теории синтеза оптимальных линейных систем с применением вейвлет технологий на случай ССК, зависящих только от первых двух вероятностных моментов, получены необходимые и достаточные вейвлет условия ССК оптимальности для скалярного случая и построен вейвлет ССК оптимальный линейный оператор в случае линейной зависимости СтП от параметров и аддитивной помехи.

Рассмотрим обобщение [1] алгоритма построения вейвлет ССК оптимального линейного оператора в случае линейной зависимости СтП от негауссовских параметров и аддитивной помехи. Этот алгоритм положен в основу ИПО "ССК-Синтез-ВЛ".

2. Алгоритмическое обеспечение синтеза вейвлет ССК оптимальных систем в случае линейной зависимости процессов от параметров и аддитивной помехи. Основываясь на [2], рассмотрим сначала алгоритмическое обеспечение на базе ВЛР и ВЛКР. Для скалярного действительного СтП Z_t сложно-статистический критерий записывается в виде [2; 3]

$$f_{ск} = f_{ск}(m_z(t), D_z(t)) = \min, \quad (1)$$

где $m_z(t) = MZ(t)$, $D_z = M|Z^0(t)|^2$, $Z^0(t) = Z(t) - m_z(t)$. Критерий минимума вероятности попадания вектора ошибки в заданную область является частным случаем критерия (1) при условии, что распределение вектора ошибки процесса $Z(t)$ определяется математическим ожиданием $m_z(t)$ и дисперсией $K_z(t)$. Частным случаем критерия (1) является критерий минимума величины, которую с заданной вероятностью не превзойдет модуль вектора ошибки.

Пусть действительный наблюдаемый сигнал $Z(t)$ и сигнал $W(s)$, подлежащий воспроизведению, представимы в виде суммы известных функций со случайными коэффициентами и помехи:

$$Z(t) = \sum_{r=1}^N U_r \xi_r(t) + X(t), t \in T, W(s) = \sum_{r=1}^N U_r \zeta_r(s) + Y(s), s \in S. \quad (2)$$

Здесь $X(t), Y(s)$ – СтП с нулевыми математическими ожиданиями, описывающие случайные помехи и случайные нестационарные воздействия; $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t), \zeta_1(s), \dots, \zeta_N(s)$ – заданные структурные функции; U_1, \dots, U_N – негауссовские случайные величины (СВ), не коррелированные со СтП $X(t), Y(s)$. Требуется найти такой оператор A_t , чтобы СтП $W^*(s) = A_t Z(t)$ был ССК оптимальной линейной оценкой сигнала $W(s)$.

Необходимое и достаточное условие ССК оптимальности имеет вид [3]:

$$A_t K_X(t, \tau) = K_{YX}(s, \tau) + \sum_{p, q=1}^N \gamma_{pq} (\zeta_p(s) - A_t [\xi_p(t)]) \xi_q(\tau) + \nu \sum_{q=1}^N m_q \xi_q(\tau), \quad (3)$$

где ν – некоторый параметр, $K_X(t, \tau) = M[X(t)X(\tau)]$, $K_{YX}(s, \tau) = M[Y(s)X(\tau)]$, $\gamma_{pq} = M[U_p U_q]$, $m_p = M U_p$.

Сигналы $Z(t)$ и $W(s)$ определим на отрезках T и S , поэтому в качестве ортонормированных вейвлет базисов возьмем базисы, порожденные вейвлетами с конечными носителями [4]. Пусть $T \in [t_0, t_1]$, $S \in [s_0, s_1]$. В пространстве $L^2(T)$ определим ортонормированный базис вейвлетов с конечными носителями вида

$$\{\varphi_{00}^t(t), \psi_{jk}^t(t)\}, \quad (4)$$

где $\varphi_{00}^t(t) = \varphi^t(t)$ – масштабирующая функция, $\varphi_{jk}^t(t) = \sqrt{2^j} \varphi^t(2^j t - k)$, $\psi_{00}^t(t) = \psi^t(t)$ – материнский вейвлет, $\psi_{jk}^t(t) = \sqrt{2^j} \psi^t(2^j t - k)$; $j = 1, 2, \dots, J^t$; $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$; J^t – максимальный уровень разрешения, который выбирается с учетом того, что точность аппроксимации любой функции

$f(t) \in L^2(T)$ соответствующим ВЛР пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{2^{J^t}}}$ и постоянному

шагу $h^t = \frac{t_1 - t_0}{2 * 2^{J^t}}$ разбиения области T на $L^t = 2 * 2^{J^t}$ равных интервалов.

Аналогично в пространстве $L^2(S)$ определим ортонормированный базис вейвлетов с конечными носителями вида

$$\{\varphi_{00}^s(s), \psi_{jk}^s(s)\} \quad (5)$$

где $\varphi_{00}^s(s) = \varphi^s(s)$ – масштабирующая функция; $\varphi_{jk}^s(s) = \sqrt{2^j} \varphi^s(2^j s - k)$;
 $\psi_{00}^s(s) = \psi^s(s)$ – материнский вейвлет; $\psi_{jk}^s(s) = \sqrt{2^j} \psi^s(2^j s - k)$;
 $j = 1, 2, \dots, J^s$; $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$; J^s – максимальный уровень разрешения, который выбирается с учетом того, что точность аппроксимации любой функции $f(t) \in L^2(S)$ соответствующим ВЛР пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{2^{J^s}}}$ и

постоянному шагу $h^s = \frac{s_1 - s_0}{2 * 2^{J^s}}$ разбиения области S на $L^s = 2 * 2^{J^s}$ равных интервалов.

Пусть $K_X(t, \tau) \in L^2(T \times T)$ и $K_{YX}(s, \tau) \in L^2(S \times T)$. Чтобы представить функцию $K_X(t, \tau)$ в виде сходящегося ВЛР, определим двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (4) в случае, когда масштабирование по обоим переменным происходит одинаково:

$$\begin{aligned} \Phi_{00}^{tA}(t_1, t_2) &= \varphi_{00}^t(t_1) \varphi_{00}^t(t_2), \quad \Psi_{jkn}^{tH}(t_1, t_2) = \varphi_{jk}^t(t_1) \psi_{jn}^t(t_2), \\ \Psi_{jkn}^{tB}(t_1, t_2) &= \psi_{jk}^t(t_1) \varphi_{jn}^t(t_2), \quad \Psi_{jkn}^{tD}(t_1, t_2) = \psi_{jk}^t(t_1) \psi_{jn}^t(t_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где $j = 1, 2, \dots, J^t$; $k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1$. Тогда двумерное вейвлет разложение $K_X(t, \tau)$ имеет вид:

$$K_X(t, \tau) = a^t \Phi_{00}^{tA}(t, \tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} [h_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tH}(t, \tau) + b_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tB}(t, \tau) + d_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tD}(t, \tau)], \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} a^t &= \int_T \int_T K_Z(t_1, t_2) \Phi_{00}^{tA}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad h_{jkn}^t = \int_T \int_T K_Z(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tH}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ b_{jkn}^t &= \int_T \int_T K_Z(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tB}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad d_{jkn}^t = \int_T \int_T K_Z(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tD}(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Чтобы представить функцию $K_{YX}(s, \tau)$ в виде сходящегося ВЛР, определим двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (4) и (5) в случае, когда масштабирование по обоим переменным происходит по-разному:

$$\Phi_{00}^{sA}(s, t) = \psi_{00}^s(s) \varphi_{00}^t(t), \Psi_{00}^{sH}(s, t) = \varphi_{00}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(t),$$

$$\Psi_{j_1 k}^{sB}(s, t) = \psi_{j_1 k}^s(s) \varphi_{00}^t(t), \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, t) = \psi_{j_1 k}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(t), \quad (9)$$

где $j_1 = 1, 2, \dots, J^s$; $k = 0, 1, \dots, 2^{j_1} - 1$; $j_2 = 1, 2, \dots, J^t$; $n = 0, 1, \dots, 2^{j_2} - 1$. Тогда функция $K_{YX}(s, \tau)$ имеет ВЛР:

$$K_{YX}(s, \tau) = a^s \Phi_{00}^{sA}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{j^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jk}^s \Psi_{jk}^{sH}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{j^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \Psi_{jk}^{sB}(s, \tau) +$$

$$+ \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^s \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, \tau), \quad (10)$$

где $a^s = \int_S \int_T K_{YX}(s, \tau) \Phi_{00}^{sA}(s, t) dt ds$, $h_{jk}^s = \int_S \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{jk}^{sH}(s, t) dt ds$,

$b_{jk}^s = \int_S \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{jk}^{sB}(s, t) dt ds$, $d_{j_1 k j_2 n}^s = \int_S \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, t) dt ds$.

Будем считать, что

1) функции $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t) \in L^2(T)$ и имеют ВЛР вида:

$$\xi_p(t) = a_p^\xi \varphi_{00}^t(t) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{pjk}^\xi \psi_{jk}^t(t) \quad (p=1, \dots, N),$$

где $a_p^\xi = \int_T \xi_p(t) \varphi_{00}^t(t) dt$, $d_{pjk}^\xi = \int_T \xi_p(t) \psi_{jk}^t(t) dt$;

2) функции $\zeta_1(s), \dots, \zeta_N(s) \in L^2(S)$ и имеют ВЛР вида:

$$\zeta_p(s) = a_p^\zeta \varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{pjk}^\zeta \psi_{jk}^s(s) \quad (p=1, \dots, N),$$

где $a_p^\zeta = \int_S \zeta_p(s) \varphi_{00}^s(s) ds$, $d_{pjk}^\zeta = \int_S \zeta_p(s) \psi_{jk}^s(s) ds$;

3) ССК оптимальный линейный оператор A_t задается набором правил утверждения 1 по построению ССК оптимального линейного оператора [2] на основе функций $A_t[\varphi_{jk}^t(t)]$ и $A_t[\psi_{jk}^t(t)]$ ($j=1, 2, \dots, J^t$; $k=0, 1, \dots, 2^j-1$) в виде сходящихся ВЛР:

$$A_t[\varphi_{jk}^t(t)] = u_{jk}(s) = a_{jk}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^u \psi_{in}^s(s), \quad (11)$$

$$A_t[\psi_{jk}^t(t)] = v_{jk}(s) = a_{jk}^v \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^v \psi_{in}^s(s), \quad (12)$$

где

$$a_{jk}^u = \int_S u_{jk}(s) \varphi_{00}^s(s) ds, \quad d_{jkin}^u = \int_S u_{jk}(s) \psi_{in}^s(s) ds,$$

$$a_{jk}^v = \int_S v_{jk}(s) \varphi_{00}^s(s) ds, \quad d_{jkin}^v = \int_S v_{jk}(s) \psi_{in}^s(s) ds. \quad (13)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов ВЛР функций $u_{00}, v_{00}, u_{jk}, (j=1, \dots, J^t; k=0, 1, \dots, 2^j - 1)$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с постоянными коэффициентами [2]:

$$a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v\} a_q^\xi + \nu \sum_{q=1}^N m_q a_q^\xi, \quad (14)$$

$$h_{000}^t a_{00}^u + d_{000}^t a_{00}^v = h_{00}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v\} d_{q00}^\xi + \nu \sum_{q=1}^N m_q d_{q00}^\xi, \quad (15)$$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t a_{jk}^u = h_{jn}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v\} d_{qjn}^\xi + \nu \sum_{q=1}^N m_q d_{qjn}^\xi, \quad (j=1, \dots, J^t; n=0, 1, \dots, 2^j - 1), \quad (16)$$

$$a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{00il}^v = b_{il}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{00il}^v\} a_q^\xi \quad (i=0, \dots, J^S; l=0, 1, \dots, 2^i - 1); \quad (17)$$

$$h_{000}^t d_{00ij}^u + d_{000}^t d_{00il}^v = d_{il00}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{00il}^v\} d_{q00}^\xi \quad (i=0, \dots, J^S; l=0, 1, \dots, 2^i - 1) \quad (18)$$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t d_{jkil}^u = d_{ijn}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{00il}^v\} d_{qjn}^\xi \quad (i=1, \dots, J^S; l=0, 1, \dots, 2^i - 1; j=1, \dots, J^t; n=0, 1, \dots, 2^j - 1). \quad (19)$$

Оценка качества ССК оптимального оператора определяется в виде математического ожидания ошибки ε и начального момента ошибки η [2]:

$$\varepsilon(s) = \sum_{r=1}^N m_r (a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s) - \zeta_r(s)), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \eta = & \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) (\zeta_q(s) - a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s)) + K_Y(s, s) - \\ & - \left\{ (a^s \varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \psi_{jk}^s(s)) u_{00}(s) + h_{00}^s \varphi_{00}^s(s) v_{00}(s) \right\} + \\ & + \nu \sum_{q=1}^N m_q (a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s)). \end{aligned} \quad (21)$$

При выводе формулы ССК оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ применялось ВЛКР $X(t)$ [2]:

$$X(t) = \sum_{v=1}^{J^t} V_v x_v(t) = \sum_{v=1}^{J^t} V_v \left\{ \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} (a_{vjk}^x \varphi_{jk}^t(t) + d_{vjk}^x \psi_{jk}^t(t)) \right\}. \quad (22)$$

Здесь негауссовские СВ V_v имеют нулевые математические ожидания и дисперсии D_v , координатные функции $x_v(t)$ представлены в виде ВЛР по базису (8): $x_v(t) = \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} (a_{vjk}^x \phi_{jk}^t(t) + d_{vjk}^x \psi_{jk}^t(t))$. Дисперсии D_v и коэффициенты ВЛР $x_v(t)$ выражаются рекуррентными формулами через коэффициенты ВЛР ковариационной функции $K_X(t, \tau)$ вида (7) [2].

Формула для вычисления ССК оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ имеет вид

$$W^*(s) = \sum_{r=1}^N U_r (a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s)) + \sum_{v=1}^L V_v \left\{ d_{v00}^x v_{00}(s) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{vjk}^x u_{jk}(s) \right\}. \quad (23)$$

3. Инструментальное программное обеспечение «ССК-Синтез-ВЛ». На основе методических результатов раздела 2 разработано ИПО «ССК-Синтез-ВЛ» в среде MATLAB, которое реализует алгоритм построения вейвлет ССК оптимального линейного оператора в случае линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи. Оно осуществляет:

1) ввод исходных данных: набор подпрограмм-функций, задающих структурные функции $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t), \zeta_1(s), \dots, \zeta_N(s)$; $m_p = MU_p$ – математические ожидания СВ U_p ($p=1, \dots, N$); $\gamma_{pq} = M[U_p U_q]$ ($p, q=1, \dots, N$) – смешанные начальные моменты СВ U_p ($p=1, \dots, N$); ковариационные функции $K_X(t, \tau)$ и $K_{YX}(s, \tau)$; область определения T наблюдения СтП $Z(t)$ в виде отрезка $[t_0, t_1]$; область определения S оценки СтП $W(t)$ в виде отрезка $[s_0, s_1]$; максимальные уровни вейвлет разложения J^t и J^s ; параметр ν ;

2) одномерное ВЛР структурных функций $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t), \zeta_1(s), \dots, \zeta_N(s)$ по вейвлет базису Хаара с применением стандартной функции `wavedec`;

3) двумерное ВЛР ковариационных функций $K_X(t, \tau)$ и $K_{YX}(s, \tau)$ по вейвлет базису Хаара с применением стандартной функции `wavedec2`;

4) автоматическое составление и решение СЛАУ для вычисления параметров $a_{00}^u, d_{00in}^u, a_{00}^v, d_{00in}^v, a_{jk}^u, d_{jkin}^u$ ($i=1, \dots, J^s; k=0, 1, \dots, 2^i-1; j=1, \dots, J^t; k=0, 1, \dots, 2^j-1$);

5) вывод результатов в числовом виде.

Исходные данные для ИПО задаются в числовом виде:

- начальный момент времени наблюдения сигнала $T0 = t_0$;
- конечный момент времени наблюдения сигнала $T = t_1$;
- начальный момент времени оценки сигнала $S0 = s_0$;
- конечный момент времени оценки сигнала $SS = s_1$;
- максимальные уровни вейвлет разложения $Jt = J^t, Js = J^s$;

- количество базисных вейвлет функций $Nt = 2 \cdot 2^{Jt}$, $Ns = 2 \cdot 2^{Js}$;
- параметр $par = \nu$;
- вектор математических ожиданий СВ U_p ($p = 1, \dots, N$):
 $MU(p) = m_p$ ($p = 1, \dots, N$);
- матрица начальных смешанных моментов СВ U_p ($p = 1, \dots, N$):
 $GMU(p, q) = \gamma_{pq}$ ($p, q = 1, \dots, N$).

Исходные данные для ИПО задаются в аналитическом виде посредством пользовательских функций-подпрограмм:

- 1) набор функций-подпрограмм $fksi1, \dots, fksiN$ для задания структурных функций $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)$;
- 2) набор функций-подпрограмм $fdzet1, \dots, fdzetN$ для задания структурных функций $\zeta_1(s), \dots, \zeta_N(s)$;
- 3) подпрограмма-функция $fcov$ для задания ковариационной функции $K_X(t, \tau)$;
- 4) подпрограмма-функция $fcovYX$ для задания ковариационной функции $K_{YX}(s, \tau)$.

Подпрограммы-функции имеют синтаксис вызова: $cov = fcov(t1, t2)$; $covYX = fcovYX(s, t)$; $ksi = fksii(t)$ ($i = 1, \dots, N$); $dzet = fdzeti(s)$ ($i = 1, \dots, N$).

Все вычисления осуществляются в подпрограмме-функции $SSKSYNTHESISWL1$, которая имеет синтаксис вызова:

$[WOt, net] = SSKSYNTHESISWL1 (Jt, Nt, T0, T, Js, Ns, S0, SS, NS, par)$.

Выходные данные выдаются в матричном виде:

- 1) $WOt(NS)$ – вектор значений ССК оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ в точках $s_j = S0 + (j - 1)$ для $j = 1, 2, \dots, NS$;
- 2) $eps(NS)$ – вектор значений математического ожидания ошибки ε в точках $s_j = S0 + (j - 1)$ для $j = 1, 2, \dots, NS$;
- 3) $nett(NS)$ – вектор значений ССК оптимальной оценки η качества ССК оптимального линейного оператора A_t в точках $s_j = S0 + (j - 1)$ для $j = 1, 2, \dots, NS$.

При вычислениях используется подпрограмма-функция $KRWL1$ для построения ВЛКР процесса $X(t)$ на основе двумерного вейвлет разложения ковариационной функции $K_X(t, \tau)$ по вейвлетам Хаара [1].

4. Пример. Найти ССК оптимальную линейную систему для воспроизведения сигнала

$$W(s) = U_1 + U_2 s \quad (24)$$

по результатам наблюдения суммы этого сигнала и некоррелированной помехи

$$Z(t) = U_1 + U_2 t + X(t). \quad (25)$$

Наблюдения производятся в течение интервала времени длительностью T , предшествующего данному моменту $s (s \geq T)$. Период наблюдения сигнала $W(s)$ равен $S (s \in S)$. Параметр $t \in [s-T, s]$. Стохастический процесс $X(t)$ задан математическим ожиданием, равным 0, и ковариационной функцией $K_X(t, \tau) = D \exp(-\alpha |t - \tau|)$, где U_1, U_2 – СВ, не коррелированные со СтП $X(t)$, $M[U_p] = m_p$, $M[U_p U_q] = \gamma_{pq}$ ($p, q = 1, 2$).

Построим ССК оптимальный линейный оператор A_t для воспроизведения сигнала $W(s)$, заданного формулой (24), со смещением ν

$$W^*(s) = U_1 + U_2 s + \nu \quad (26)$$

по результатам наблюдения сигнала $Z(t)$, заданного формулой (25). В этом случае математическое ожидание ошибки $\varepsilon(s) = M[W^*(s) - W(s)] = \nu$ и начальный момент ошибки $\eta(s) = M\left[[W^* - W(s)]^2\right]$. При вычислениях будем использовать ортонормированный базис вейвлетов Хаара. Перейдем от переменной $t \in [s-T, s]$ к переменной $\bar{t} \in [0, 1]$ с помощью замены переменной $\bar{t} = \frac{t - (s-T)}{s - (s-T)} = \frac{t - (s-T)}{T}$. Далее для простоты записи будем считать, что $\bar{t} = t$, $\bar{\tau} = \tau$.

Уравнение для ССК оптимального линейного оператора A_t в силу (3) имеет вид

$$A_t K_X(t, \tau) = \sum_{p,q=1}^2 (\gamma_{pq} - m_p m_q) (\zeta_p(s) - A_t[\xi_p(t)]) \xi_q(\tau) + \nu \sum_{q=1}^2 m_q \xi_q(\tau). \quad (27)$$

При этом СЛАУ для определения неизвестных функций $u_{00}(s), v_{00}(s), u_{jk}(s)$ ($j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$) для S имеет вид:

$$a^t u_{00}(s) + b_{000}^t v_{00}(s) = \sum_{p,q=1}^2 (\gamma_{pq} - m_p m_q) \lambda_p a_q^\xi + \nu \sum_{q=1}^2 m_q a_q^\xi, \quad (28)$$

$$h_{000}^t u_{00}(s) + d_{000}^t v_{00}(s) = \sum_{p,q=1}^2 (\gamma_{pq} - m_p m_q) \lambda_p d_{q00}^\xi + \nu \sum_{q=1}^2 m_q d_{q00}^\xi, \quad (29)$$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t u_{jk}(s) = \sum_{p,q=1}^2 (\gamma_{pq} - m_p m_q) \lambda_p d_{qjn}^\xi + \nu \sum_{q=1}^2 m_q d_{qjn}^\xi, \quad (j = 1, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \quad (30)$$

$$\lambda_p = \zeta_p - a_p^\xi u_{00}(s) - d_{p00}^\xi v_{00}(s) \quad (p = 1, 2). \quad (31)$$

Начальный момент ошибки η вычисляется по формуле:

$$\eta(s) = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \zeta_p(s) (\zeta_q(s) - a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s)) + \nu \sum_{q=1}^2 m_q (a_q^\xi u_{00}(s) + d_{q00}^\xi v_{00}(s)), \quad (32)$$

где $\zeta_1(s) = 1, \zeta_2(s) = s$.

Таким образом, ССК оптимальная оценка $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ определяется формулой:

$$W^*(s) = \nu + \sum_{r=1}^2 U_r (a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s)) + \sum_{\nu=1}^L V_\nu \left\{ d_{\nu 00}^x v_{00}(s) + \sum_{j=0}^{J'} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{\nu jk}^x u_{jk}(s) \right\}, \quad (33)$$

где негауссовские СВ V_ν имеют нулевые математические ожидания и дисперсии D_ν .

На основе (28) – (33) вычисления выполнялись с применением ИПО «ССК-Синтез-ВЛ» для вейвлет базиса Хаара с максимальным уровнем разрешения $J' = 2$ при $t \in [s-T, s]$. При вычислениях использовались исходные данные: $\alpha = 1, T = 8, s \in [16, 23]$; СВ U_p ($p = 1, 2$) не коррелированы между собой; $M[U_p] = m_p = 0,5$; $M[(U_p - m_p)^2] = 1$ ($p = 1, 2$). Результаты вычислений приведены на рисунках 1-8.

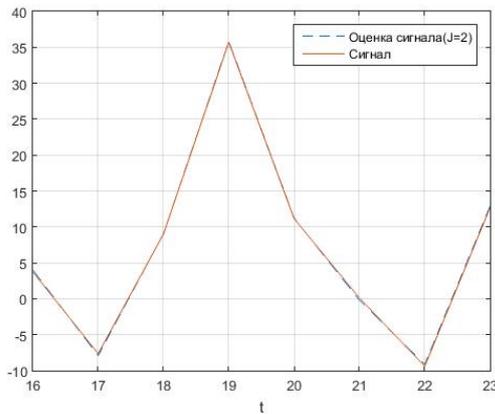


Рис. 1. Реализация сигнала $W(s)$ и его оценка $W^*(s)$ ($m_p = 0,5$; $\nu = 0$)

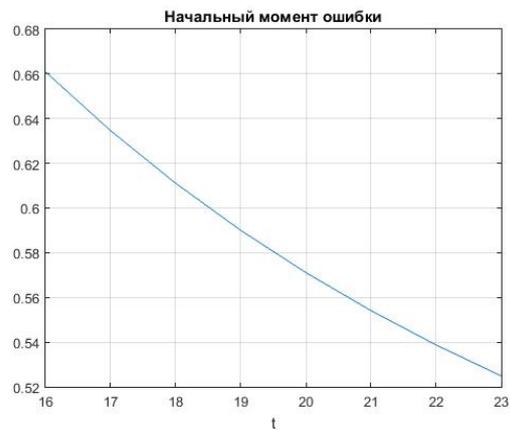


Рис. 2. График начального момента ошибки η ($m_p = 0,5$; $\nu = 0$)

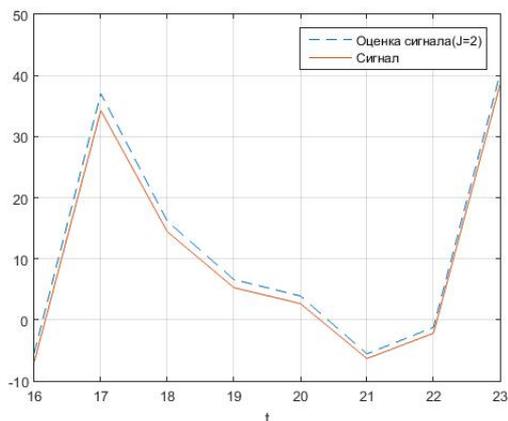


Рис. 3. Реализация сигнала $W(s)$ и его оценка $W^*(s)$ ($m_p = 0,5$; $\nu = 1$)

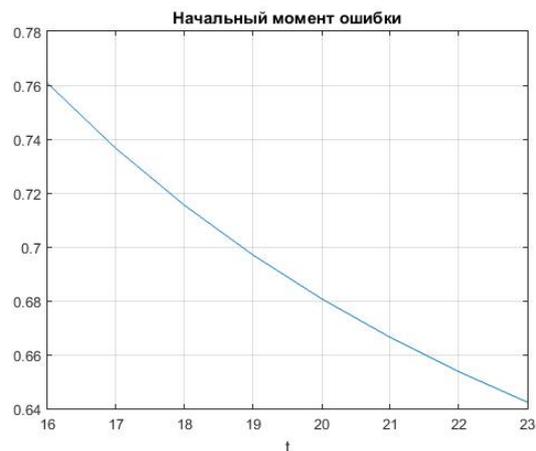


Рис. 4. График начального момента ошибки η ($m_p = 0,5$; $\nu = 1$)

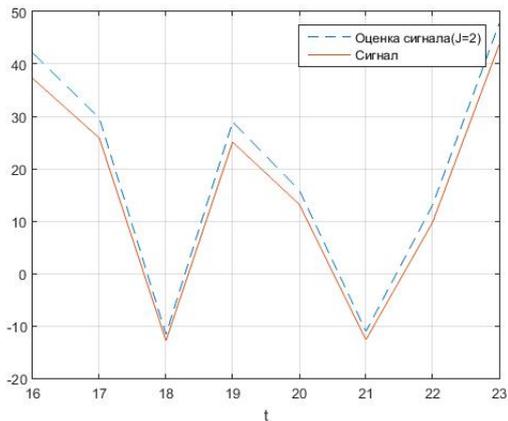


Рис. 5. Реализация сигнала $W(s)$ и его оценка $W^*(s)$ ($m_p = 0,5$; $\nu = 2$)

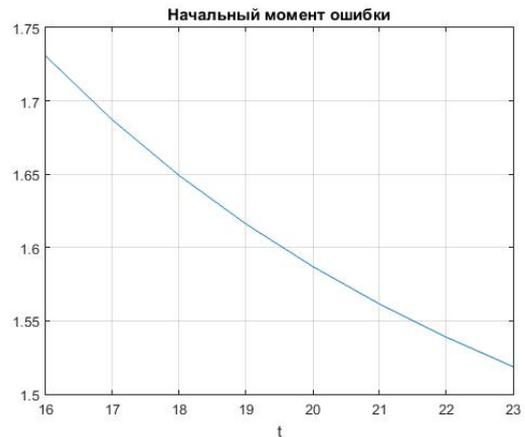


Рис. 6. График начального момента ошибки η ($m_p = 0,5$; $\nu = 2$)

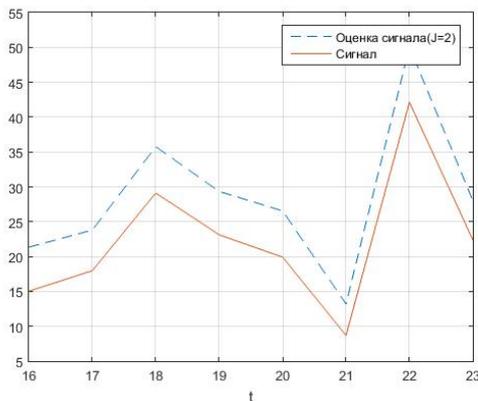


Рис. 7. Реализация сигнала $W(s)$ и его оценка $W^*(s)$ ($m_p = 0,5$; $\nu = 4$)

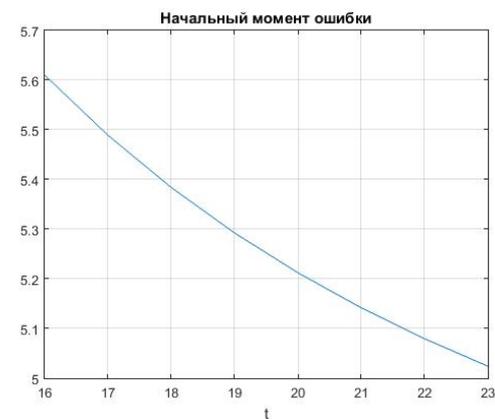


Рис. 8. График начального момента ошибки η ($m_p = 0,5$; $\nu = 4$)

5. Основные выводы. Разработано алгоритмическое и инструментальное программное обеспечение для ССК оптимального синтеза линейных существенно нестационарных систем на основе ВЛР Хаара в среде MATLAB. Результаты нашли применение в задачах анализа, моделирования и калибровки систем в условиях ударных воздействий.

Теоретический и практический интерес представляют вопросы разработки вейвлет синтеза для векторных систем.

Работа выполнена с использованием инфраструктуры ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН [5].

Литература

1. Оптимизация стохастических систем на основе вейвлет канонических разложений / Сеницын И.Н. [и др.] // Автоматика и телемеханика. 2020. № 11. С. 138–156.
2. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (ХИ) / Сеницын И.Н. [и др.] // Системы высокой доступности. 2021. Т. 17, №1. (в печати).

3. Синицын И.Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009. 768 с.

4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2004. 464 с.

5. Положение о ЦКП «Информатика» // [MATLAB R2019a]. URL: <http://www.frccsc.ru/ckp> (дата обращения 14.01.2020).

I.N. Sinitsyn, V.I. Sinitsyn, E.R. Korepanov, T.D. Konashenkova
FRC CSC of RAS (Moscow)

SOFTWARE TOOL FOR WAVELET SYNTHESIS OF NONSTATIONARY SYSTEMS BY COMPLEX STATISTICAL CRITERIA

Keywords: *complex statistical criteria, software tool, wavelet canonical expansion, wavelet expansion.*

Abstract. *The article is dedicated to software tool for optimal Haar wavelet synthesis by complex statistical criteria of linear nonstationary systems with random Gaussian and non Gaussian parameters. Basic applications: analysis and modeling of Shock systems. Numerical example is give.*

Д.С. Черяпин
Смоленский государственный университет

УДК 658.5.012.7

СРАВНЕНИЕ СИСТЕМ УЧЕТА РАБОЧЕГО ВРЕМЕНИ

Ключевые слова: *KPI, сравнение, статистика, система учета времени, ОС, API.*

В статье рассмотрены особенности различных систем учета рабочего времени и производительности сотрудника, произведен их сравнительный анализ и сделан вывод относительно ситуации на рынке средств контроля труда.

Введение. Учет рабочего времени на производстве может занимать от 10 до 30 минут в день, и, так как существующий рынок подобных систем перенасыщен продуктами, было принято решение заняться анализом продуктов, предлагаемых нам рынком.

В начале работы необходимо определиться с критериями, по которым будут сравниваться продукты. Сравнительный анализ существующих систем проведен по интересующим нас критериям: наличие внешнего API, вывод отчетов, просмотр статистики, работа в многопользовательском режиме, работа без подключения к сети Интернет и цена. Сравнительный анализ проводился по средствам открытой информации (обзоры других пользователей, обзоры демоверсий и т.д.).

Kickidler. В качестве первой системы для сравнения была выбрана Kickidler. Она является самой дешевой в своем сегменте, при этом не уступает по функционалу конкурентам. Принцип её работы довольно прост: на персональный компьютер сотрудника устанавливается скрытый клиент, который осуществляет видеозапись рабочего процесса, а также фиксирует количество кликов мыши и нажатий клавиатуры, плюсом к обширному функционалу является сканирование списка запущенных программ, который формирует работодатель при установке системы. Рабочее окно приложения представляет собой показ мониторов сотрудника. При стоимости 500 рублей в месяц (за одного пользователя) в облаке будут получены: отчеты о посещении сайтов и часто используемых программах, недостаточно информативные, плохо отражающие рабочий график сотрудника; присутствует сортировка и различные фильтры, а также просмотр экранов сотрудников (одновременно поддерживается до 16 экранов). ПО работает с Windows, в качестве БД используют PostgreSQL, также доступна версия под операционную систему Linux. Статистика представляет собой графики по кликам мыши, клавиатуры, скриншоты и записанные видеофайлы, которые просматриваются с помощью программы Viewer. Доступ для просмотра статистики сотрудниками отсутствует. Из плюсов следует отметить наличие многопользовательского режима, так как вход в систему осуществляется вместе со входом в учётную запись пользователя [1].

Минусы: отсутствие внешнего API, а также возможности работать без подключения к Интернету, так как ПО требует доступа к серверу my.kickidler.com.

StaffCop. Это продукт компании «Атом Безопасность». Основная схема работы включает следующую последовательность действий: на персональный компьютер сотрудника устанавливается скрытый клиент, который собирает информацию об активности пользователя и запущенных процессах, посещаемых веб-ресурсах, принятии или отправке файлов, почтовых сообщений, о работе мессенджеров. Также существует функция сохранения регулярных скриншотов с экрана сотрудника. Отображение отчетов происходит с разделением полученных данных: скриншотов, процессов, посещенных сайтов, отправки сообщений мессенджеров и сведений о нажатии клавиатуры; производится сортировка по типам данных и датам. Операционная система – Windows, в качестве БД

используются типизированные текстовые файлы. Наибольшим преимуществом продукта является возможность работать без подключения к Интернету, так как ПО устанавливается на локальный сервер компании, а статистика собирается с компьютеров, подключённых в сеть к этому серверу [2].

Последнее преимущество, бесспорно, велико, но это решение порождает множество проблем, среди которых – отсутствие просмотра статистики (он возможен лишь на сервере), отсутствие многопользовательского режима, сбор статистики с каждого рабочего места независимо от пользователя. К минусам также стоит отнести отсутствие внешнего API и ролей в системе (сотрудник не сможет следить за своей промежуточной статистикой). Но все эти минусы нивелирует весьма низкая цена: 300 рублей за одну машину, без ограничений по времени использования.

ManicTime. Последним был рассмотрен продукт высокой ценовой категории, а именно ManicTime с ценой 67\$ за одного пользователя, без ограничений по времени, либо 9\$ в месяц в «комплектации» Ultimate [3]. Данная утилита предоставляет следующий функционал: запущенный клиент фиксирует данные о работе программ (с графической оболочкой) и web-ресурсов. Также существует функция сохранения регулярных скриншотов с экрана сотрудника.

В качестве плюсов можно отметить наличие внешнего API, что позволит обмениваться данными с другими системами в компании, либо сделать рассылку из программы в удобный мессенджер. ОС стандартна – Windows, в качестве базы данных рекомендуется подключение к SQLite либо MySQL, однако присутствуют драйверы под множество популярных БД: PostgreSQL, MongoDB, DB2, Microsoft Access. Необходимо отметить, что система имеет настраиваемые возможности определения пользователя по логину или по имени компьютера. В дополнение к этому – просмотр общей статистики через web-интерфейс, есть доступ к личной статистике для сотрудников с помощью desktop-клиента, также можно расширить доступ сотрудникам для просмотра статистики.

К минусам можно отнести отчеты, количество которых весьма мало, для удобства они разделены по двум основным показателям: время работы и продуктивность сотрудника, от этих показателей зависит дальнейшая сортировка отображаемых данных. Для корректной работы системы необходим открытый порт 8080 (по умолчанию можно выставить любой свободный), в системе присутствует защита соединения, для этого есть протокол https, использовать можно собственный сертификат либо стандартный.

Все вышеизложенное собрано в таблицу для облегчения сравнения систем между собой, таким образом будет возможно получить итоговую сравнительную характеристику.

Сравнение систем учета рабочего времени

Название.	Kickidler	StaffCop	ManicTime
Источник информации	www.kickidler.com	www.staffcop.ru	www.manictime.com
API	Нет	Нет	Да
Отчеты	Да	Да	Нет
ОС	Windows, Linux.	Windows	Window
БД	PostgreSQL	Текстовая БД	SQLite, MySQL
Много пользовательский (работа разных пользователей за одной машиной)	Да	Нет	Да
Работа без интернет-сети.	Нет	Да	Нет
Получение статистики	Да	Нет	Да
Цена.	500 рублей в месяц	300 рублей за 1 пользователя, без ограничений по времени.	67\$ за одного пользователя, без ограничений по времени.

С точки зрения бизнес-процессов самым важным оказался критерий наличия API, так как целью работы является ускорение процесса учёта времени. Внешнее API позволяет интегрировать систему в другие системы компании для облегченного или полуавтоматического взаимодействия.

Заключение. В данный момент существует явная потребность в удобном и простом для интеграции многофункциональном решении, которое будет иметь доступную цену, интуитивно понятный интерфейс и отличаться надежностью работы, не допускающей некорректного расчета КРП. На основании данных сравнительного анализа продуктов рынка можно сделать вывод о необходимости создания собственного ПО для учёта рабочего времени, удовлетворяющего вышеперечисленным требованиям.

Литература

1. : <https://www.kickidler.com/ru/for-it/docs/> (дата обращения: 20.02.2021).
2. <https://docs.staffcop.ru/> (дата обращения: 23.02.2021).
3. <https://www.manictime.com/support/> (дата обращения: 21.02.2021).

D.S. Cherepin
Smolensk State University

COMPARISON OF WORKING TIME ACCOUNTING SYSTEMS

Keywords: *KPI, comparison, statistics, time tracking system, OS, API.*

Abstract. *The article considers the features of various systems of accounting for working time and employee productivity, on the basis of which their comparative analysis is made and a conclusion is made regarding the situation on the market of labor control tools.*

И.И. Чукляев, Е.А. Чепурной, А.Л. Шевченко, В.П. Пильненкий
ВА ВПВО ВС РФ им. Маршала Советского Союза А.М. Василевского

УДК 004.422.833

СПОСОБЫ И СРЕДСТВА ОБНАРУЖЕНИЯ И ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Ключевые слова: *сложные организационно-технические системы, информационная безопасность, информационно-технические воздействия, средства обнаружения воздействий, средства предотвращения воздействий, международная патентная классификация, динамика изобретательской активности, патентный ландшафт.*

В статье рассмотрены существующие технологии (средства) информационной безопасности и реализованные в них способы, приведены результаты анализа этих систем, определены области их применения. Разработана классификация средств обнаружения и предотвращения воздействий, реализованных в них способов в частности. Показаны динамика изобретательской активности и патентный ландшафт, свидетельствующий о мировых тенденциях развития данных технологий информационной безопасности, в отношении которых наблюдается устойчивая тенденция повышения интереса к их совершенствованию.

В настоящее время особое внимание в области информационного противоборства ведущие страны уделяют модернизации существующих и разработке новых специальных комплексов информационно-технического поражения сложных организационно-технических систем [1].

Организационно-технические системы (ОТС) – это множество взаимосвязанных материальных объектов (технических средств и

персонала, обеспечивающего их функционирование и применение по назначению). ОТС отличается тем, что в ней имеется множество разнородных элементов и различных связей между ними.

Анализ существующих технологий (средств) информационной безопасности (ИБ) и реализованных в них способов, выявление тенденций их развития выполнены на основе результатов патентного анализа объектов интеллектуальной собственности с использованием международной базы данных объектов интеллектуальной собственности *Orbit Intellegence* [3].

К наиболее распространенным и эффективно применяемым технологиям ИБ ОТС относятся [1]: системы обнаружения (СОВ, *Intrusion Detection System, IDS*) информационно-технических воздействий (ИТВ) нарушителей; системы предотвращения (СПВ, *Intrusion Prevention System, IPS*) ИТВ нарушителей. Обобщенно данные средства представляют собой комплекс аппаратных и/или программных средств в составе информационных систем (ИС), предназначенные для выявления нарушения защищенности компонентов системы и предотвращения попыток успешного применения нарушителем ИТВ. Под *информационно-техническим воздействием* понимаются воздействия деструктивного характера нарушителя (противника) на элементы ОТС (в том числе и компоненты ИС), направленные на несанкционированное внесение структурных и функциональных изменений. В качестве ИС рассматриваются системы в составе сложной ОТС, предназначенные для формирования, передачи, хранения, поиска, обработки и представления информации посредством соответствующих ресурсов (аппаратных средств и программного обеспечения) [2].

Системы обнаружения ИТВ

Распределение по классам и подклассам международной патентной классификации (МПК) (рис. 1а) показывает, что наиболее релевантными к исследуемым технологиям (средствам) относятся следующие подклассы [3]: H04L-029 – технические решения, связанные с передачей информации, но не отнесенные к другим разделам МПК; H04L-012 – технические решения, связанные с сетями переключения сигналов (передачи данных); G06F-021 – устройства защиты ИС, их компонентов, программ и информационных потоков данных (ИПД) от несанкционированного доступа.

По результатам поискового запроса в интересах выявления объектов интеллектуальной собственности, связанных с СОВ, с учетом ограничений по подклассам МПК, получена выборка из 3030 объектов интеллектуальной собственности [3]. Для определения мировых тенденций развития перспективных технологий ИБ проведен анализ изобретательской активности в разрезе количества зарегистрированных объектов интеллектуальной собственности по годам публикации.

Динамика изобретательской активности (рис. 1б) показывает, что в течение последних 10 лет в данном направлении наблюдается *устойчивый интерес к совершенствованию действующих и созданию новых систем* [3].

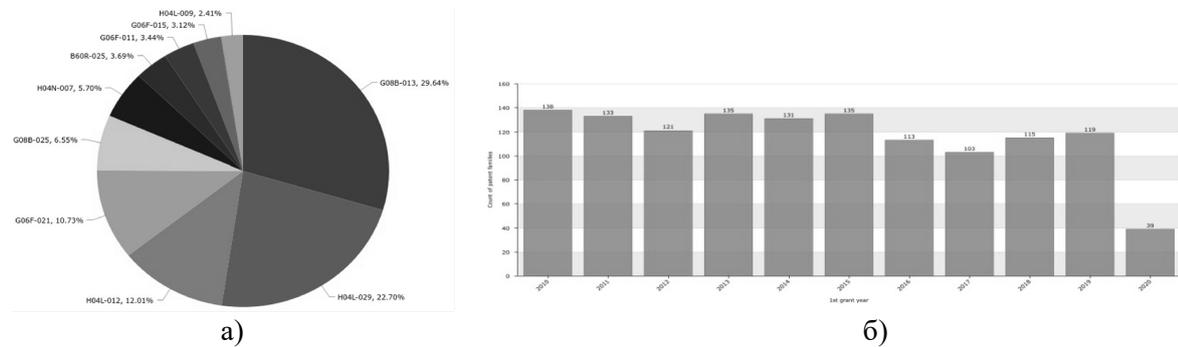


Рис. 1. Распределение по подгруппам МПК объектов интеллектуальной собственности и динамика изобретательской активности в области, связанных с СОВ

На основе результатов анализа выполнена классификация СОВ и реализованных в них способов (рис. 2).



Рис. 2. Классификация средств и способов обнаружения ИТВ

К основным направлениям совершенствования СОВ относятся следующие.

1. *Сетевые СОВ (Network based Intrusion Detection System, NIDS)* – системы, которые, как правило, размещаются на границе защищаемой ИС и предназначены для мониторинга (контроля) ИПД, передаваемых извне в защищаемую систему [1; 4]. По результатам поискового запроса получена выборка из 1058 объектов интеллектуальной собственности. *Динамика изобретательской активности в области совершенствования сетевых СОВ свидетельствует о растущем интересе к их совершенствованию* [3].

2. *Узловые СОВ (Host based Intrusion Detection System, HIDS)* – системы, которые размещаются на отдельных узлах (сегментах) и предназначены для контроля информационных процессов защищаемой системы [1; 4]. По результатам поискового запроса получена выборка из 496 объектов интеллектуальной собственности. *Динамика*

изобретательской активности в области совершенствования узловых СОВ свидетельствует о стабильном интересе к их совершенствованию [3].

По принципу работы СОВ подразделяются на группы.

1. *Сигнатурные СОВ*. В системах данного типа ИПД проверяются на наличие заранее известных последовательностей, называемых сигнатурами. Применяемые способы основаны на однотипности используемых в ИТВ приемов, направленных на разведку или нарушение защищенности ИПД и/или аппаратных и программных средств. Недостатком системы является невозможность выявления ИТВ, использующих новые приемы и уязвимости ИС, не выявленные на этапе создания базы данных [1; 4]. По результатам поискового запроса получена выборка из 276 объектов интеллектуальной собственности [3]. Наиболее приоритетными являются области, связанные с фильтрованием спама в почтовых сообщениях (*Spam Filter*), контролем в области целостности ИПД (*Electronic Document*) и поиском вирусов (*Virus Detection*) [3]. Динамика изобретательской активности в отношении объектов интеллектуальной собственности, связанных с сигнатурными СОВ, постепенно снижается [3].

2. *СОВ, основанные на анализе аномального поведения*. Системы данного типа анализируют ИПД между элементами защищаемой системы со сравнением с определенными параметрами информационного обмена (ИО) и/или анализом возможного влияния на свойства защищаемой системы. Функционирование таких СОВ основано на том, что ИТВ, как правило, тем или иным образом меняют (модифицируют) параметры ИО, что выражается, например, в увеличении ИПД, поступающего от устройства (скомпрометированного) воздействия. Реализация в ИС таких СОВ является более эффективной, чем СОВ, основанных на анализе сигнатур, в силу того что первые позволяют определять ИТВ, использующие неизвестные до этого приемы ИТВ [1; 4]. Такие средства классифицируются на несколько групп и подгрупп в зависимости от способа идентификации аномалии в работе системы [1; 4–9].

3. *Статистические СОВ (Statistical based Intrusion Detection, SID)* непрерывно осуществляют анализ информационной активности в защищаемой системе с целью определения ее нормального состояния. Все изменения в ИПД, не характерные для нормального состояния системы, диагностируются как потенциально опасные [1; 4–9]. По результатам поискового запроса получена выборка из 222 объектов интеллектуальной собственности. Статистические СОВ делятся на несколько типов, различающихся способами сбора данных о защищаемой системе и генерации правил, по которым выявляется наличие в информационных процессах аномалий [1; 4]: однофакторные системы (*Univariate*); многофакторные системы (*Multivariate*); системы, основанные на анализе временных рядов (*Time Series Model*). Динамика изобретательской активности в отношении объектов интеллектуальной

собственности, связанных со статистическими СОВ, показывает *стабильный уровень изобретательской активности* [3].

4. К СОВ, основанным на знаниях (*Knowledge Based Intrusion Detection*), в зависимости от используемых способов относят: системы, основанные на модели конечного автомата (*Finite State Machine, FSM*); системы, основанные на языках описания (*Description Language*); экспертные системы (*Expert System*). *Динамика изобретательской активности* в области СОВ, основанных на знаниях, измеряется 88 объектами интеллектуальной собственности и в целом является *достаточно низкой* [3].

5. СОВ, основанные на машинном обучении (*Machine Learning Based Intrusion Detection, MLID*), – группа способов, направленных на повышение качества обнаружения ИТВ в процессе работы системы за счет множественного решения сходных задач [1; 4–9]. *Динамика изобретательской активности* в области СОВ, основанных машинном обучении, измеряется 305 объектами интеллектуальной собственности и имеет тенденцию к росту, что *показывает перспективность данного метода обнаружения вторжений* [3]. Такие СОВ подразделяются на несколько групп, отличающихся используемыми математическими методами [1; 4–9]: системы, основанные на методах нечеткой логики (*Fuzzy Logic*); системы, основанные на нейронных сетях (*Neural Network*); системы, использующие генетические алгоритмы (*Genetic Algorithm, GA*); системы, использующие алгоритмы кластеризации (*Clustering*); системы, использующие метод опорных векторов (*Support Vector Machine, SVM*); системы, использующие скрытые марковские модели (*Hidden Markov Model, HMM*); системы, использующие байсовские сети (*Bayesian network, BN*). Более детальный анализ этой области показывает, что рассмотренные средства в настоящее время концентрируются в области, для которой характерно использование терминов, таких как *Neural Network, Training Neural Network Optimun*, что *свидетельствует о высокой изобретательской активности в области, связанной с нейронными сетями и процессом их обучения* [3].

Системы предотвращения ИТВ

Распределение объектов интеллектуальной собственности по классам и подклассам МПК в разрезе десяти наиболее часто встречающихся представлено на рисунке 3а [3]. Как видно объекты интеллектуальной собственности, связанные с СПВ, сконцентрированы в тех же группах и подгруппах МПК, что и СОВ.

По результатам поискового запроса по выявлению объектов интеллектуальной собственности, связанных с СПВ, с учетом ограничений по подклассам МПК, получена выборка из 4405 объектов интеллектуальной собственности (рис. 3б) [3].

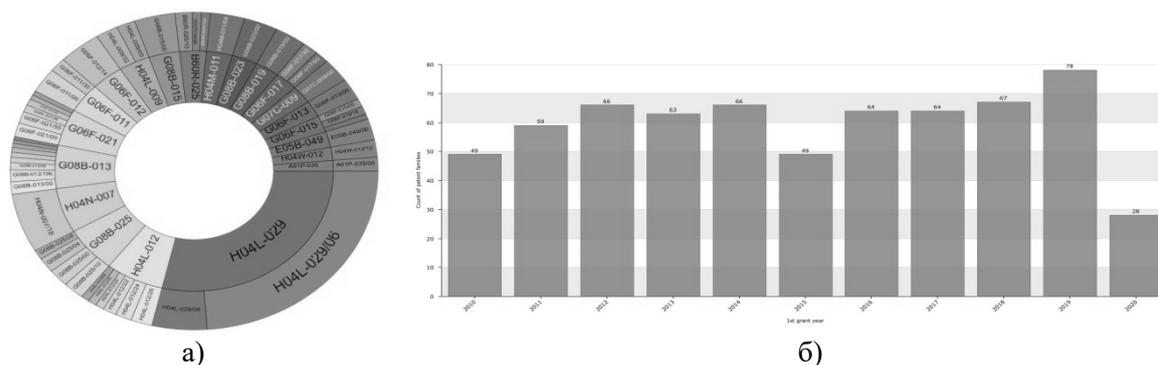


Рис. 3. Распределение по подгруппам МПК объектов интеллектуальной собственности и динамика изобретательской активности в области, связанных с СПВ

Для данной выборки проведен анализ изобретательской активности в разрезе количества зарегистрированных объектов интеллектуальной собственности по годам публикации. Динамика изобретательской активности в области совершенствования СПВ показывает, что в течение последних 10 лет в анализируемом направлении наблюдается устойчивый интерес, с некоторой тенденцией к повышению, к совершенствованию действующих и созданию новых систем СПВ [3].

На основе результатов выполненного анализа текущего состояния развития технологий ИБ сформирована классификация СПВ ИТВ (рисунок 4).

Области применения исследуемых технологий ИБ определены на основе патентного ландшафта, который представляет собой информационно-аналитическое исследование патентной документации, характеризующее в общем виде ситуацию в определенном технологическом направлении либо в отношении патентной активности субъектов инновационной сферы с учетом временной динамики и территориального признака в мировом масштабе [3–4].

Распределение объектов интеллектуальной собственности, связанных с СПВ по областям, проиллюстрировано с помощью патентного ландшафта (рис. 4а). Анализ патентного ландшафта позволяет выделить несколько основных областей применения систем СПВ [3]. Прежде всего, выделяется обширная область, связанная с технологией *Интернета вещей (Internet Of Things)*. Это обусловлено ее высокой уязвимостью для угроз применения ИТВ посредством внедрения устройств, способных к автономной генерации ИТВ на остальные объекты системы. В отдельные группы выделяются объекты интеллектуальной собственности, связанные с беспроводными технологиями, особенно *беспроводными терминалами (Wireless Terminal)*, и с защитой систем хранения данных (*Storage Unit и Storage Medium*). Кроме того, выделены технические области, связанные с авторизацией (*User ID и Unauthorized Intrusion*). Наиболее релевантной объекту поиска является группа, связанная с сетями и защитой

информации в компьютерных сетях (*Network Intrusion Prevention, Local Network, Computer Network Provider*).



Рис. 4. Классификация систем предотвращения информационно-технических воздействий

Проведен патентный поиск с использованием запроса, направленного на выделение отличий между системами СОВ и СПВ. Динамика изобретательской активности в области совершенствования СПВ измеряется 409 объектами интеллектуальной собственности, для которой проведено построение патентного ландшафта (рис. 5б) [3]. Компактная область объектов интеллектуальной собственности, для которых характерно использование терминов *Network Intrusion Prevention, Data Packets* и *Packets Inspection*, подтверждает вывод о том, что применение СПВ преимущественно направлено на сетевой уровень. Так как в общем случае СПВ рассматриваются как подкласс систем СОВ, для них также характерно деление по положению относительно защищаемого объекта на *сетевые (NIPS)* и *хостовые (HIPS)* системы.

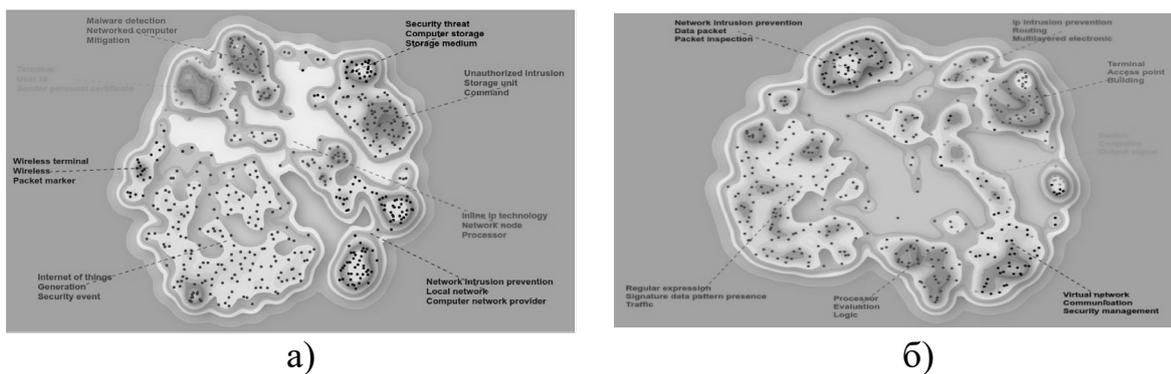


Рис. 5. Патентный ландшафт объектов интеллектуальной собственности, связанных с СПВ

С целью выявления тенденции развития *сетевых* СПВ проведен патентный поиск, выборка объектов интеллектуальной собственности которого составляет 275 объектов [3]. Для данной выборки выполнен анализ изобретательской активности в разрезе количества зарегистрированных

объектов интеллектуальной собственности по годам публикации. *Динамика изобретательской активности* в отношении объектов интеллектуальной собственности, связанных с сетевыми СПВ, показывает, что *интерес к совершенствованию сетевых СПВ остается достаточно стабильным с тенденцией к снижению* [3].

С целью выявления тенденции развития *хостовых* СПВ проведен патентный поиск. В результате анализа получена выборка в составе 118 объектов интеллектуальной собственности [3]. *Динамика изобретательской активности* в отношении объектов интеллектуальной собственности, связанных с узловыми СПВ, показывает, что интерес к совершенствованию этих систем *имеет тенденцию к снижению* [3]. Таким образом, *подтверждается выявленная тенденция рассмотрения СПВ преимущественно в сетевом аспекте*.

Для выявления тенденций в области использования СПВ в *беспроводных сетях* проведен патентный поиск. В результате получена выборка из 544 объектов интеллектуальной собственности [3]. *Динамика изобретательской активности* в отношении объектов интеллектуальной собственности, связанных с использованием СПВ в беспроводных сетях, *показывает рост интереса к данному типу СПВ* [3].

Анализ тенденций развития методов (способов), реализованных в СПВ, показывает, что *по принципу работы СПВ* подразделяются на следующие группы [1; 4–9]: *сигнатурные*, основанные на анализе передаваемой информации с точки зрения ее синтаксиса; *поведенческие*, которые основаны на анализе процессов, происходящих в защищаемой системе с точки зрения поиска аномалий в ее работе. В результате запроса получена выборка из 186 объектов интеллектуальной собственности [3]. Для данной выборки проведен анализ изобретательской активности в разрезе количества вновь поданных заявок на объекты интеллектуальной собственности по годам. *Динамика изобретательской активности* в отношении объектов интеллектуальной собственности, связанных с *сигнатурными СПВ*, показывает, что *интерес к их совершенствованию является достаточно стабильным с некоторой тенденцией к снижению* [3].

Для выявления тенденций развития *поведенческих* СПВ проведен патентный поиск. В результате запроса получена выборка из 199 объектов интеллектуальной собственности [3]. *Динамика изобретательской активности* в отношении объектов интеллектуальной собственности, связанных с поведенческими СПВ, *показывает устойчивую тенденцию к повышению интереса по совершенствованию этих систем* [3].

Таким образом, на основе результатов патентного анализа существующих технологий ИБ с использованием международной базы данных *Orbit Intelligence* представлены наиболее распространенные и эффективно применяемые средства и реализованные в них способы, к которым относятся СОВ и СПВ ИТВ нарушителей. Определены области их

применения, сформирована классификация. Динамика изобретательской активности свидетельствует о мировых тенденциях развития данных технологий ИБ, в отношении которых наблюдается устойчивая тенденция повышения интереса к их совершенствованию [1; 4–9].

Литература

1. Чуляев И.И. Метод и модели комплексного управления рисками нарушения защищенности информационно-управляющих систем. Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ, 2017. 448 с.
2. Макаренко С.И. Справочник научных терминов. СПб.: Научное издание, 2019. 254 с.
3. Международная база данных объектов интеллектуальной собственности Orbit Intellegence (дата обращения: сентябрь 2020).
4. Официальный сайт Федерального института промышленной собственности (Роспатента) (дата обращения: октябрь 2020).
5. Макаренко С.И. Информационное противоборство и радио-электронная борьба в сетевых войнах начала XXI века. СПб.: Научное издание, 2017. 546 с.
6. Добрышин М.М., Гуцын Р.В. Модель разнородных групповых компьютерных атак, проводимых одновременно на различные уровни ЭМВОС узла компьютерной сети связи // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2019. № 10. С. 371–384.
7. Смирнов Г.Е. Актуальные вопросы развития теории и практики аудита информационной безопасности телекоммуникационных сетей специального назначения // Всероссийская межведомственная НТК по теоретическим и прикладным проблемам развития и совершенствования АСУ и связи специального назначения «Наука и АСУ-2020». М.: НИИ ИРС, 2020. С. 174-181.
8. Мамончикова А.С. Анализ известных работ исследования динамического многостороннего информационного конфликта // Техника средств связи. 2020. № 1 (149). С. 64–75.
9. Михайлов Р.Л. Динамическая модель информационного конфликта информационно-телекоммуникационных систем специального назначения // Системы управления, связи и безопасности. 2020. № 3. С. 238–251.

I.I. Chuklyaev, E.A. Chepurny, A.L. Shevchenko, V.P. Pelnenkiy
Military Academy of Military Air Defense Armed Forces of the Russian
Federation them. Marshal of the Soviet Union A.M. Vasilevsky

METHODS AND MEANS DETECTION AND PREVENTION INFORMATION AND TECHNICAL EFFECTS

Keywords: *complex organizational and technical systems, Information Security, information technology impacts, impact detection means, means of preventing impacts, international patent classification, dynamics of inventive activity, patent landscape.*

Abstract. *The article examines the existing technologies (means) of information security and the methods implemented in them, presents the results*

of the analysis of these systems, defines the areas of their application. Detection tools are classified and prevention of impacts implemented in them ways in particular. The dynamics of inventive activity is shown and the patent landscape, testifying to the global trends in the development of these information security technologies, in respect of which there is a steady tendency towards an increase in interest in their improvement.

Г.М. Яковлев

Смоленский государственный университет

УДК 004.02

ВВЕДЕНИЕ В ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В СТИЛЕ ASCII-ART

Ключевые слова: *ascii-art, обработка графики, параллельное программирование.*

Ascii-art – способ стилизации изображения, в котором пиксели, или группы пикселей заменяются на символ из палитры, состоящей из символов кодировки ASCII. В статье рассматривается модификация приема, включающая в себя помимо различных символов цветовую компоненту. Представленный алгоритм может выполняться с использованием различных цветовых пространств и метрик, а относительная простота распараллеливания вычислений и хорошая наглядность позволяют применять его в образовательных целях.

Введение. Процесс преобразования состоит в отображении подматрицы изображения в символ палитры, причем преобразования различных подматриц не зависят друг от друга. Таким образом, алгоритм может эффективно масштабироваться за счет параллельного исполнения в многопоточной среде, особенно с применением SIMT (Single instruction – multiple threads) архитектуры, то есть на современных GPU [1]. В процессе поиска аналогичных реализаций с подходящими критериями (параллельное исполнение, выбор цвета с заданной метрикой и палитрой) ничего найдено не было. Стоит отметить, что рассматриваемая задача не имеет сколь угодно значимого практического смысла, однако хорошо иллюстрирует применение параллельного программирования и обладает хорошей наглядностью, следовательно, может применяться для обучения.

Цветовая компонента. Для отображения используется наперед заданная таблица из символов и компонент цвета. Таким образом, итоговая подматрица, содержащая в себе символ (далее – знакоместо), состоит из символа, цвета фона и цвета символа (рис. 1).



Рис. 1. Модель знакоместа

Палитра. При формировании палитры используется заданный набор из N цветов (в статье $N = 16$) и набор из K символов, формирующих градиент от белого к черному (в статье это “ . : - = + * # % @ ”). Таким образом, количество всех возможных оттенков равно $N^2 * K$. Для упрощения и ускорения процесса преобразования перед выполнением алгоритма составляется палитра знакомест, содержащая в себе все возможные комбинации оттенков. Часть такой палитры представлена на рисунке 2.

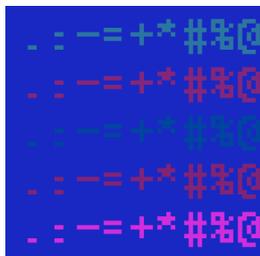


Рис .2. Часть палитры знакомест

Алгоритм. Алгоритм отображения зависит от следующих параметров.

1. Исходное изображение.
2. Конечное цветовое пространство.
3. Метрика, заданная на конечном цветовом пространстве.
4. Палитра цветов.
5. Палитра символов.
6. Палитра знакомест.

При генерации итогового изображения для каждого пикселя из исходной матрицы выполняются следующие шаги.

1. Преобразовать цвет пикселя из исходного цветового пространства в заданное.

2. Выбрать заданную метрику в конечном цветовом пространстве.

3. Для цвета исходного пикселя найти два наиболее близких цвета из палитры. В дальнейшем наиболее близкий цвет используется для цвета фона знакоместа, а второй – для цвета символа.

4. Вычислить позицию символа пропорционально отношению расстояний от исходного цвета до двух наиболее близких из палитры – так достигается плавное смешивание оттенков за счет различной площади символов.

5. В зависимости от трех компонент знакоместа выбрать подходящую подматрицу из палитры знакомест и скопировать ее в конечное изображение.

Стоит заметить, что препроцессинг исходного изображения перед обработкой имеет смысл и может значительно повлиять на результат, но рассмотрение таких методов выходит за рамки статьи.

Цветовое пространство. Предположим, что исходное изображение и палитра знакомест находятся в цветовом пространстве RGB. Тогда каждый оттенок может быть задан как точка в трехмерном пространстве, где координаты x, y, z принимают значения $1, 2, \dots, 255$. В таком случае можно использовать Декартову метрику для определения недостатков. Однако RGB пространство имеет фатальный недостаток в виде линейности. Например, расстояние от любой точки до точек красного $(255, 0, 0)$, синего $(0, 255, 0)$ и зеленого $(0, 0, 255)$ будет всегда одинаковым, что совершенно не совпадает с визуальным восприятием. Поэтому в статье используется цветовое пространство CIE LAB[2], удовлетворяющее критериям задачи.

Метрика. Для нахождения расстояния между оттенками необходима метрика, заданная на выбранном цветовом пространстве. В CIE LAB существует несколько метрик, удовлетворяющих условиям задачи, например, CIE76, CIE94 и CIEDE2000. В статье используется метрика CIE76 в виду простоты и наглядности.

Для двух точек $A(L_1, a_1, b_1)$ и $B(L_2, a_2, b_2)$ расстояние будет вычисляться как $E = \sqrt{(L_2 - L_1)^2 + (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$, причем $E \approx 2,3$ соответствует границе визуальной различимости [3].

Параллельная реализация на CPU. В качестве библиотеки для работы с изображениями (загрузка, выгрузка, изменение размеров, преобразования цветовых пространств и так далее) был выбран фреймворк OpenCV. Реализация сводится к запуску n потоков (число n может быть произвольным, однако в экспериментах максимальная производительность была достигнута при n равном количеству виртуальных потоков CPU). Каждому потоку передается матрица из $\frac{m}{n}$ строк исходного изображения, где m – его высота. Такое разбиение выбрано из-за оптимальной локальности (данные расположены последовательно), то есть с большой вероятностью данные изображения попадут в процессорный кэш, что сильно влияет на производительность. Каждый поток последовательно обрабатывает пиксели и отображает их координаты в координаты знакоместа на конечном изображении.

Параллельная реализация на GPU. Рассматриваемый в статье алгоритм удачно ложится на вычислительную модель современных видеокарт, заточенную под массивное параллельное исполнение. В статье представлена параллельная реализация на GPU с использованием технологии CUDA и фреймворка OpenCV. В отличие от

распараллеливания на CPU, SIMT архитектура GPU подразумевает запуск множества легковесных потоков под каждый пиксель изображения. Согласно модели исполнения алгоритм, запускаемый на видеокарте (так называемое ядро), распределяет все потоки в сетку, состоящую из блоков. Каждый блок запускается на отдельном вычислительном ядре, состоит из n потоков, как показано на рисунке 3 (на современных GPU количество потоков в блоке ограничено 64), и выполняется параллельно, причем каждый блок (то есть каждое ядро) имеет программируемый L1 кэш, разделяемый между всеми потоками внутри блока. Так как палитра цветов имеет малый размер, ее кеширование положительно влияет на скорость работы. Объем палитры знакомест, рассматриваемой в статье, превышает размер L1 кэша, однако имеет смысл ее помещение в так называемую текстурную память GPU, ее особенность заключается в удобном для изображений кешировании. В отличие от основной памяти, где при обращении к ячейке в кэш попадают последовательные элементы, в текстурной памяти кешируются близкие на плоскости элементы, что очень удобно для копирования знакоместа из палитры в конечное изображение. Стоит отметить, что основные задержки в реализации на GPU связаны с трансфером данных из оперативной памяти в видеопамять. При пересылке группы изображений временные затраты на копирование данных становятся менее значительны в пересчете на одно изображение. Таким образом, имеет смысл последовательная обработка видео, если учитывать возможность аппаратного декодирования на GPU.

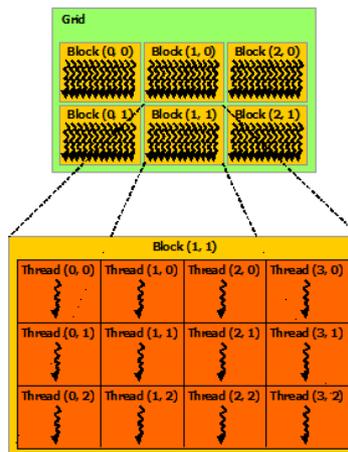


Рис. 3. Вычислительная модель GPU

Примеры работы. Рисунок 4 – фрагмент исходного изображения, рисунок 5 – обработанный результат.



Рис. 4. Оригинальное изображение

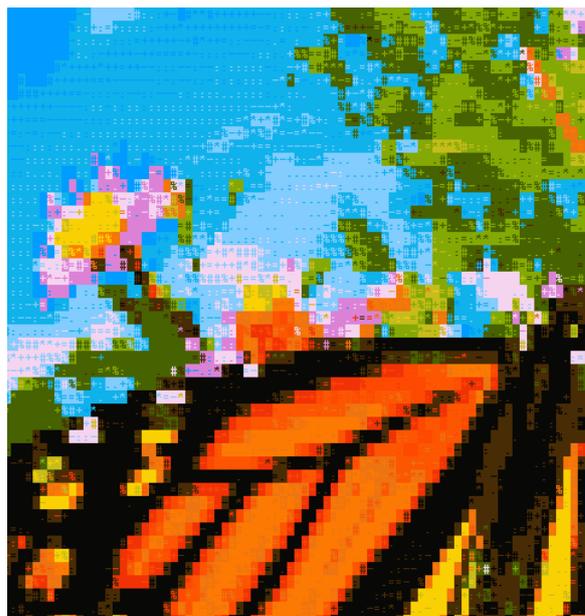


Рис. 5. Обработанный результат

Замер производительности. Процессор: Ryzen 1700x, GPU: Nvidia GTX 1080.

Реализация	Затраченное время на одно изображение (мс)
Однопоточная	684
Многopоточная (CPU)	262
Многopоточная (GPU)	302
Многopоточная (GPU), группа по 64	259
Многopоточная (GPU), группа по 512	211

Выводы.

1. Приведенный алгоритм подходит для исполнения на различных параллельных системах и может быть применен для обучения в силу относительной простоты и наглядности.

2. Использование особенностей архитектуры исполнителя, в частности кэширование, сильно влияет на время исполнения.

3. Использование GPU имеет смысл при большом объеме входных данных.

Литература

1. <https://docs.nvidia.com/cuda/cuda-c-programming-guide/index.html#simt-architecture>.
2. CIE Colorimetry 15 (Third ed.). CIE. 2004. ISBN 3-901-906-33-9.
3. Sharma Gaurav. Digital Color Imaging Handbook (1.7.2 ed.). CRC Press, 2003.

G.M. Yakovlev
Smolensk State University

**AN INTRODUCTION TO APPLYING PARALLEL PROGRAMMING
TO GENERATE IMAGES IN ASCII-ART STYLE**

Keywords: *ascii-art, graphics processing, parallel programming.*

Abstract. *Ascii-art is a way to style an image where pixels, or groups of pixels, are replaced with a character from a palette of ASCII characters. The article uses a modification of the technique, which includes, in addition to various symbols, a color component. Presented algorithm can be performed using various color spaces and metrics, and the relative simplicity of parallelizing computations and good clarity make it possible to be used for educational purposes.*

СЕКЦИЯ 3

Математика и её приложения

В.М. Адуков, Н.В. Адукова
Южно-Уральский государственный университет

УДК 517.544.8

О ГИБРИДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА – ХОПФА

Ключевые слова: факторизация Винера – Хопфа, каноническая факторизация, частные индексы, матричные многочлены, точные вычисления, гибридный метод факторизации.

В работе предложен гибридный метод приближенного построения канонической факторизации строго положительных матриц-функций второго порядка с постоянным определителем. Метод основан на комбинации приближенных и точных вычислений. С помощью численных методов производится аппроксимация заданной матрицы-функции лорановским матричным многочленом, а факторизация последнего строится точными методами. Такой гибридный метод позволяет выяснить, когда заданная матрица-функция допускает каноническую факторизацию, и построить ее приближенную каноническую факторизацию. Поскольку факторизация аппроксимирующего лорановского матричного многочлена строится точно, это позволяет избежать ошибок, связанных с погрешностями в промежуточных вычислениях и ошибками округления. Поэтому приближенную факторизацию можно получить с гарантированной точностью.

1. Постановка задачи. Напомним основные понятия теории факторизации матриц-функций (см. [1–3]). В этой работе мы ограничимся случаем матриц-функций второго порядка.

Обозначим $W(\mathbb{T})$ алгебру Винера, состоящую из всех непрерывных на единичной окружности \mathbb{T} функций, разлагающихся в абсолютно сходящийся комплексный ряд Фурье:

$$W(\mathbb{T}) = \left\{ f(t) \mid f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k t^k, \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k| < \infty \right\}.$$

Снабдим $W(\mathbb{T})$ нормой $\|f\|_W = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k| < \infty$, относительно которой

$W(\mathbb{T})$ становится банаховой алгеброй. Множество матриц-функций

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

с элементами $a_{ij}(t) \in W(\mathbb{T})$ обозначим $W^{2 \times 2}(\mathbb{T})$. Любая матрица-функция $A(t) \in W^{2 \times 2}(\mathbb{T})$ может быть разложена в матричный ряд Фурье $A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k t^k$, $|t|=1$, где матричные коэффициенты Фурье A_k – комплексные матрицы второго порядка. Этот ряд сходится абсолютно относительно любой матричной нормы на множестве матриц второго порядка: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|A_k\| < \infty$. Множество $W^{2 \times 2}(\mathbb{T})$ со стандартными матричными операциями является некоммутативной банаховой алгеброй относительно нормы $\|A(t)\|_W = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|A_k\| < \infty$. При числовых расчетах мы будем использовать в качестве матричной нормы максимальную столбцовую норму $\|\cdot\|_1$.

Пусть

$$W_+(\mathbb{T}) = \left\{ f(t) \in W(\mathbb{T}) \left| f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \right. \right\}, \quad W_-(\mathbb{T}) = \left\{ f(t) \in W(\mathbb{T}) \left| f(t) = \sum_{k=-\infty}^0 f_k t^k \right. \right\}.$$

Это замкнутые подалгебры $W(\mathbb{T})$. Наконец, обозначим $W_{\pm}^{2 \times 2}(\mathbb{T})$ замкнутые подалгебры $W^{2 \times 2}(\mathbb{T})$, состоящие из матриц-функций с элементами из $W_{\pm}(\mathbb{T})$. Единичная матрица I_2 второго порядка является единицей этих подалгебр.

Пусть $A(t) \in W^{2 \times 2}(\mathbb{T})$ и обратима на \mathbb{T} . Известно, что тогда $A(t)$ допускает *правую факторизацию Винера–Хонфа*, то есть представление вида

$$A(t) = A_-(t) D(t) A_+(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (1)$$

где $A_{\pm}(t) \in W_{\pm}^{2 \times 2}(\mathbb{T})$, причем $A_{\pm}^{-1}(t)$ также принадлежат $W_{\pm}^{2 \times 2}(\mathbb{T})$. Средний множитель является диагональной матрицей-функцией вида $D(t) = \text{diag}[t^{\rho_1}, t^{\rho_2}]$. Здесь целые числа ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 \geq \rho_2$) называются *правыми частными индексами* $A(t)$. Ясно, что $\rho_1 + \rho_2 = \text{ind det } A(t)$. Если все частные индексы равны нулю, то факторизация называется *канонической*.

Факторизация матриц-функций имеет многочисленные приложения в различных разделах математики, механики, математической физики и дифференциальных уравнений. Однако ее применение серьезно сдерживается отсутствием в общем случае методов явного построения факторизации и неустойчивостью задачи. Для матричных лорановских многочленов имеется явный метод построения факторизации [4], однако неустойчивость задачи не позволяет реализовать этот метод численно. Проблем с неустойчивостью не возникает, если явный метод можно

реализовать точно, т.е. символьными методами. Оказывается, что для лорановского матричного многочлена над полем гауссовых чисел $\mathbb{Q}(i)$ это можно сделать тогда и только тогда, когда его определитель допускает точную факторизацию. На основе данного факта одним из авторов работы был создан в среде Maple пакет ExactMPF. Все вычисления в статье были проведены с использованием этого пакета.

В предлагаемой работе мы будем рассматривать матрицы-функции вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & 1 + a_{12}(t)a_{21}(t) \end{pmatrix}$$

с элементами из $W(\mathbb{T})$. Факторизация матриц-функций такого типа достаточно часто возникает в приложениях (см. [5–6]). Она изучалась во многих работах (см., например, [7–8] и ссылки там). Нетрудно проверить [7], что факторизация $A(t)$ явно приводится к факторизации матрицы-функции следующего специального вида:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & a(t) \\ b(t) & 1 + a(t)b(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $a(t) \in W_-(\mathbb{T})$, $b(t) \in W_+(\mathbb{T})$.

Основная цель данной работы – опробовать гибридный метод на факторизации матриц-функций вида (2).

2. Гибридный метод канонической факторизации строго невырожденных матриц-функций. Пусть N – произвольное натуральное число, $a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}$, $b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$. Если $a_k, b_k, 0 \leq k \leq N$, – числа, не принадлежащие гауссовому полю $\mathbb{Q}(i)$ комплексных рациональных чисел, то конвертируем их с желаемой точностью в числа $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}(i)$ и обозначим $\alpha(t) = \sum_{k=0}^N \alpha_k t^{-k}$, $\beta(t) = \sum_{k=0}^N \beta_k t^k$. Введем лорановский матричный многочлен $A_N(t)$

$$A_N(t) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha(t) \\ \beta(t) & 1 + \alpha(t)\beta(t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

$A_N(t)$ является лорановским матричным многочленом над полем $\mathbb{Q}(i)$ и $\det A_N(t) = 1$. Следовательно, он допускает точную факторизацию Винера–Хопфа: $A_N(t) = A_N^-(t)D_N(t)A_N^+(t)$, которая может быть построена символьными методами с помощью пакета ExactMPF.

Обозначим $\varepsilon_N = \|A - A_N\|_W$. Построение аппроксимирующего лорановского матричного многочлена $A_N(t)$ и вычисление ε_N производится численными методами.

Предположим, что лорановский матричный многочлен $A_N(t)$ допускает каноническую факторизацию. Тогда существует его окрестность, состоящая из матриц-функций, также допускающих каноническую факторизацию. Если мы найдем условия, при которых исходная матрица-функция $A(t)$ попадает в данную окрестность, то мы установим, что она имеет нулевые частные индексы. В этом и состоит идея гибридного метода.

Теорема. Пусть $A(t)$ – матрица-функция вида (2) и лорановский матричный многочлен $A_N(t)$ построен по формуле (3). Если существует N такое, что $A_N(t)$ допускает каноническую факторизацию

$$A_N(t) = A_N^-(t) A_N^+(t) \quad (4)$$

и выполняется неравенство

$$\varepsilon_N := \|A(t) - A_N(t)\|_W < \frac{1}{\|(A_N^-)^T\|_W \|(A_N^+)^T\|_W}, \quad (5)$$

то $A(t)$ допускает каноническую факторизацию

$$A(t) = A_-(t) A_+(t). \quad (6)$$

Здесь T – знак операции транспонирования матрицы. Нормировав канонические факторизации (4), (6) условием

$$A_N^-(\infty) = A_-(\infty) = I_2, \quad (7)$$

получим следующие оценки

$$\begin{aligned} \|A_N^+ - A_+\|_W &< 4 \|A_N^+\|_W^2 \|(A_N^+)^T\|_W^2 \|(A_N^-)^T\|_W^2 \cdot \varepsilon_N, \\ \|A_N^- - A_-\|_W &< (\|(A_N^+)^T\|_W^2 + 4 \|A_N^-\|_W \|(A_N^+)^T\|_W^2 \|(A_N^-)^T\|_W^2) \cdot \varepsilon_N. \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. Известно, что существование правой канонической факторизации матрицы-функции $A(t) \in W^{2 \times 2}(\mathbb{T})$ эквивалентно обратимости теплицева оператора T_A (см., например, [1–2]). Поскольку оператор T_{A_N} обратим, для обратимости T_A достаточно выполнения условия

$$\|T_A - T_{A_N}\| < \frac{1}{\|T_{A_N}^{-1}\|}. \quad (9)$$

Учитывая, что $\|T_A\| \leq \|A\|_W$, получаем неравенство $\|T_A - T_{A_N}\| \leq \|A - A_N\|_W$. Поэтому оператор T_A будет обратим, если выполняется соотношение

$$\|A - A_N\|_W < \frac{1}{\|T_{A_N}^{-1}\|}.$$

Оценим норму $\|T_{A_N}^{-1}\|$. В силу правой факторизации для оператора T_{A_N} имеем следующее представление: $T_{A_N} = T_{A_N^-} T_{A_N^+}$. Здесь операторы $T_{A_N^-}$, $T_{A_N^+}$ – обратимы и $T_{A_N^-}^{-1} = T_{(A_N^-)^{-1}}$, $T_{A_N^+}^{-1} = T_{(A_N^+)^{-1}}$. Поэтому $T_{A_N}^{-1} = T_{(A_N^+)^{-1}} T_{(A_N^-)^{-1}}$,

$$\|T_{A_N}^{-1}\| \leq \|T_{(A_N^+)^{-1}}\| \|T_{(A_N^-)^{-1}}\| \leq \|(A_N^+)^{-1}\|_W \|(A_N^-)^{-1}\|_W.$$

Поскольку $\det A_N^\pm(t) = 1$, то обратные к матрицам $A_N^\pm(t) = 1$ совпадают

с присоединенными к ним. Значит, $\|(A_N^\pm)^{-1}\|_W = \|(A_N^\pm)^T\|_W$, $\|T_{A_N}^{-1}\| \leq \|(A_N^+)^T\|_W \|(A_N^-)^T\|_W$ и

$$\frac{1}{\|(A_N^+)^T\|_W \|(A_N^-)^T\|_W} \leq \frac{1}{\|T_{A_N}^{-1}\|}.$$

Таким образом, при выполнении условия (5) получаем, что справедливо неравенство (9); оператор T_A обратим; и $A(t)$ допускает каноническую факторизацию.

Нормируем канонические факторизации $A(t)$ и $A_N(t)$ условием (7) и применим результаты работы [9]. Тогда мы получим оценки погрешности от замены факторизационных множителей $A(t)$ на факторизационные множители $A_N(t)$ (см. формулы (8)). *Теорема доказана.*

Пример. Рассмотрим следующую строго невырожденную матрицу-функцию второго порядка:

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2z} \\ e^z & 1 + e^{\frac{2z^2+1}{2z}} \end{pmatrix}.$$

Применить к правой факторизации $A(z)$ известные достаточные признаки существования канонической факторизации не удастся. Легко видеть, что эта матрица-функция не является достаточно близкой к единичной. Можно проверить, что ни действительная, ни мнимая части $A(z)$ не являются дефинитными. $A(z)$ – аналитическая в проколотой комплексной плоскости $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ матрица-функция, однако имеет существенные особые точки в $z=0, \infty$. Это означает, что применить методы явного построения факторизации для матриц-функций, аналитических в областях, нельзя. Таким образом, правые частные индексы $A(z)$ пока неизвестны.

Применим гибридный метод. Возьмем $N=10$ и аппроксимируем $A(z)$ лорановским матричным многочленом $A_N(z)$ вида

$$A_N(z) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha(z) \\ \beta(z) & 1 + \alpha(z)\beta(z) \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha(z) = \sum_{k=0}^N \frac{z^{-k}}{2^k k!}, \quad \beta(z) = \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!}.$$

Вычисления норм, которые понадобятся для дальнейших оценок, дают следующие результаты:

$$\|A_N(z)\|_W = 7.130, \quad \varepsilon_N := \|A(z) - A_N(z)\|_W = 4.508 \cdot 10^{-8}.$$

Точная правая факторизация $A_N(z)$ получена с помощью пакета ExactMPF за 4.97 сек. Оказалось, $A_N(z)$ допускает правую каноническую факторизацию. Привести точные формулы для нормированных факторизационных множителей $A_N^\pm(z)$ не представляется возможным ввиду громоздких выражений для рациональных коэффициентов этих многочленов. Поэтому точные рациональные числа были конвертированы в числа с плавающей запятой. Приведем матричные элементы множителя $A_N^-(z)$:

$$\begin{aligned}
 p_{11}^-(z) &= 1.0 - \frac{0.3899}{z} - \frac{0.8807 \cdot 10^{-1}}{z^2} - \frac{0.1391 \cdot 10^{-1}}{z^3} - \frac{0.1683 \cdot 10^{-2}}{z^4} - \frac{0.1646 \cdot 10^{-3}}{z^5} - \frac{0.1350 \cdot 10^{-4}}{z^6} - \\
 &\quad - \frac{0.9526 \cdot 10^{-6}}{z^7} - \frac{0.5897 \cdot 10^{-7}}{z^8} - \frac{0.3246 \cdot 10^{-8}}{z^9} - \frac{0.1517 \cdot 10^{-9}}{z^{10}}, \\
 p_{12}^-(z) &= \frac{0.3049}{z} + \frac{0.7811 \cdot 10^{-1}}{z^2} + \frac{0.1317 \cdot 10^{-1}}{z^3} + \frac{0.1658 \cdot 10^{-2}}{z^4} + \frac{0.1666 \cdot 10^{-3}}{z^5} + \frac{0.1392 \cdot 10^{-4}}{z^6} + \\
 &\quad + \frac{0.9970 \cdot 10^{-6}}{z^7} + \frac{0.6243 \cdot 10^{-7}}{z^8} + \frac{0.3474 \cdot 10^{-8}}{z^9} + \frac{0.1759 \cdot 10^{-9}}{z^{10}}, \\
 p_{21}^-(z) &= -\frac{0.4852}{z} - \frac{0.1029}{z^2} - \frac{0.1568 \cdot 10^{-1}}{z^3} - \frac{0.1855 \cdot 10^{-2}}{z^4} - \frac{0.1786 \cdot 10^{-3}}{z^5} - \frac{0.1448 \cdot 10^{-4}}{z^6} - \\
 &\quad - \frac{0.1013 \cdot 10^{-5}}{z^7} - \frac{0.6230 \cdot 10^{-7}}{z^8} - \frac{0.3398 \cdot 10^{-8}}{z^9} - \frac{0.1517 \cdot 10^{-9}}{z^{10}}, \\
 p_{22}^-(z) &= 1.0 + \frac{0.3899}{z} + \frac{0.9214 \cdot 10^{-1}}{z^2} + \frac{0.1492 \cdot 10^{-1}}{z^3} + \frac{0.1832 \cdot 10^{-2}}{z^4} + \frac{0.1810 \cdot 10^{-3}}{z^5} + \frac{0.1495 \cdot 10^{-4}}{z^6} + \\
 &\quad + \frac{0.1061 \cdot 10^{-5}}{z^7} + \frac{0.6599 \cdot 10^{-7}}{z^8} + \frac{0.3650 \cdot 10^{-8}}{z^9} + \frac{0.1759 \cdot 10^{-9}}{z^{10}}.
 \end{aligned}$$

Вычисления дают следующие значения для норм A_N^- , $(A_N^-)^T$: $\|A_N^-\| = \|(A_N^-)^T\| = 2.100$. Аналогичным образом могут быть получены нормы $\|A_N^+\| = 4.612$, $\|(A_N^+)^T\| = 5.756$. Отметим, что все эти нормы вычислены точно в виде рациональных чисел, а затем конвертированы в числа с плавающей запятой.

Теперь мы можем проверить выполнимость условия (5) канонической факторизации. Поскольку

$$\varepsilon_N = 4.508 \cdot 10^{-8} < \frac{1}{\|(A_N^-)^T\|_W \|(A_N^+)^T\|_W} = 0.08275,$$

матрица-функция $A(t)$ допускает каноническую факторизацию. Оценки (8) дают следующую гарантированную точность вычисления факторизационных множителей:

$$\|A_N^+ - A_+\|_W < 0.5600 \cdot 10^{-3}, \quad \|A_N^- - A_-\|_W < 0.1893 \cdot 10^{-3}.$$

Увеличение порядка аппроксимации до $N = 20$ увеличивает время работы ExactMPF до 74.59 сек, но зато обеспечивает значительно более высокую гарантированную точность

$$\|A_N^+ - A_+\|_W < 4.19980 \cdot 10^{-16}, \quad \|A_N^- - A_-\|_W < 1.41923 \cdot 10^{-16}.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740024.

Литература

1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов// Успехи математических наук. 1958. Т. 13, Вып. 2(80). С. 3-72.
2. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.
3. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979. 493 с.
4. Адуков В.М. О факторизации аналитических матриц-функций // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 118, № 3. С. 324-336.
5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
6. Хабибуллин И.Т. О задаче линейного сопряжения на окружности // Математические заметки. 1987. Т. 41, № 3. С. 342-347.
7. Adukov V.M. On factorization indices of strictly nonsingular 2×2 matrix function // Integral Equations and Operator Theory. 1995. Vol. 21, No. 1. P. 1-11.
8. Адуков В.М., Патрушев А.А. О явном и точном решении задачи Маркушевича на окружности/ / Известия Саратовского государственного университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 2. С. 9-20.
9. Адукова Н.В., Дильман В.Л. Устойчивость факторизационных множителей канонической факторизации Винера–Хопфа матриц-функций // Вестник Южно-Уральского университета, серия Математика. Механика. Физика. 2021. Т. 13, № 1. С. 5-13.

V.M. Adukov, N.V. Adukova
South Ural State University

ON THE HYBRID METHOD FOR CONSTRUCTING THE CANONIC WINER – HOPF FACTORIZATION

Keywords: *Wiener – Hopf factorization, canonical factorization, partial indices, matrix polynomials, exact calculations, hybrid factorization method.*

Abstract. *In the paper a hybrid method for the approximate construction of a canonical factorization of strictly positive second-order matrix functions with a constant determinant is proposed. The method is based on a combination of approximate and exact calculations. A given matrix-function is approximated by a Laurent matrix polynomial using numerical methods. The factorization of the latter is constructed by exact methods. This hybrid method allows to find out when a given matrix function admits a canonical*

factorization and to construct its approximate canonical factorization. Since the factorization of the approximating Laurent matrix polynomial is constructed exactly, this allows avoiding errors associated with errors in intermediate calculations and round-off errors. Therefore, an approximate factorization can be obtained with guaranteed accuracy.

Г.А. Банару, М.Б. Банару
Смоленский государственный университет

УДК 514.76

О 6-МЕРНЫХ G_1 - И G_2 -ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ ОКТАВ

Ключевые слова: почти эрмитово многообразие, классы Грея – Хервеллы, алгебра октав, почти контактная метрическая структура, структурные уравнения Картана, гиперповерхность.

Представлено несколько результатов о 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли, оснащенных G_1 - или G_2 -структурой, индуцированной на таких многообразиях 3-векторными произведениями Грея – Брауна.

1. Введение

Статью известнейшего американского геометра Альфреда Грея и его испанского коллеги Луиса М. Хервеллы [1], опубликованную в 1980 году, многие специалисты считают одной из самых значительных работ в области геометрии почти эрмитовых многообразий. Основной результат, который содержится в этой работе, – выделение 16 классов (впрочем, правильнее было бы сказать «типов») почти эрмитовых структур.

Эти 16 классов Грея – Хервеллы почти эрмитовых структур изучены весьма неравномерно. Менее всего исследованы так называемые «большие» классы: $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. За многообразиями класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ уже лет сорок как закрепилось название полукелеровых (semi-Kählerian, SK-) многообразий, многообразия классов $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ изучались обычно под названиями G_1 - и G_2 -многообразий соответственно (этой терминологии придерживались А. Грей, Л. Хервелла и Е. Видаль). А вот у многообразий класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ до

сих пор нет особого названия – наверное, из-за того, что эти многообразия изучались отдельно крайне редко.

В настоящей заметке мы рассматриваем почти эрмитовы структуры классов G_1 и G_2 , индуцированные на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав так называемыми 3-векторными произведениями Грея – Брауна [2].

Эта заметка продолжает совместные исследования авторов в области геометрии 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли (см., например, [3; 4; 5]), а также их работы в области геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий общего вида (см., например, [6]).

2. Предварительные сведения

Почти эрмитовой (almost Hermitian, АН-) структурой на многообразии M^{2n} четной размерности понимают упорядоченную пару $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, состоящую из почти комплексной структуры J и римановой метрики $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, для которых выполняется условие

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}),$$

где $\mathfrak{N}(M^{2n})$ – модуль всех гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n} [7]. Для каждой АН-структуры $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} соотношение

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n})$$

определяет фундаментальную (или, в другой терминологии [1], келерову) форму.

Почти эрмитова структура принадлежит классу G_1 , если

$$\nabla_X (F)(X, Y) - \nabla_{JX} (F)(JX, Y) = 0 ;$$

почти эрмитова структура принадлежит классу G_2 , если

$$G_{XYZ} \{ \nabla_X (F)(Y, Z) - \nabla_{JX} (F)(JY, Z) \} = 0,$$

где $X, Y, Z \in \mathfrak{N}(M^{2n})$ [1].

Напомним также [7], что почти контактной метрической структурой на многообразии N нечетной размерности называется система $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, состоящая из четырех тензорных полей на этом многообразии, в том случае, когда для нее выполняются такие условия:

$$\begin{aligned} \eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{N}(N). \end{aligned}$$

Здесь Φ – тензор типа $(1, 1)$, ξ – векторное поле, η – ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика, $\mathfrak{N}(N)$ – модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии N .

К числу самых важных примеров почти контактных метрических структур относятся косимплектическая и слабо косимплектическая структуры (последнюю иногда называют структурой Эндо), структуры Сасаки и Кенмоцу, а также их многочисленные обобщения. В данной заметке речь пойдет о слабо косимплектической структуре, которая определяется условием

$$(\nabla_X \Phi)X = 0,$$

а также о квазисасакиевой структуре, которая определяется как почти контактная метрическая структура с замкнутой формой $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$, если дополнительно выполняется равенство:

$$N_\Phi + \frac{1}{2}d\eta \otimes \xi = 0,$$

где N_Φ – тензор Нейенхейса оператора Φ [6].

3. Основные результаты

В 60-х годах прошлого века Альфред Грей приступил к исследованию почти эрмитовых структур, индуцированных так называемыми 3-векторными произведениями в алгебре Кэли на ее 6-мерных подмногообразиях (см., например, [8]). В 1980 году отечественный геометр Вадим Фёдорович Кириченко опубликовал работу [9], где представлены структурные уравнения Картана произвольной почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_h^{c]} \omega_b \wedge \omega_c + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D_c^h] \omega^b \wedge \omega_c + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b; \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{h[k} D^{g}_{j]} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}[k}^{\varphi} T_{j]b}^{\varphi} \right) \omega^k \wedge \omega^j. \end{aligned}$$

Здесь через $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ обозначены компоненты тензора Кронекера порядка три, $\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$;

$$D_{cj} = \pm T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \quad D_{\hat{c}j} = \pm T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7,$$

где $\{T_{ij}^{\varphi}\}$ – компоненты конфигурационного тензора (см., например, [3; 4]); $\varphi = 7, 8$; $a, b, c, d, h = 1, 2, 3$; $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $\hat{a} = a + 3$.

Используя условия принадлежности произвольной почти эрмитовой структуры классам G_1 и G_2 [2], мы приходим к таким утверждениям.

Предложение 1. Почти эрмитова структура на b -мерном подмногообразии алгебры Кэли принадлежит классу G_1 тогда и только тогда, когда

$$D_b^a = \lambda \delta_b^a . \quad (1)$$

Предложение 2. Почти эрмитова структура на b -мерном подмногообразии алгебры Кэли принадлежит классу G_2 тогда и только тогда, когда

$$\text{tr}(D_{\hat{a}b}) = 0 . \quad (2)$$

Условия (1) и (2) позволяют получить структурные уравнения Картана почти эрмитовых структур классов G_1 и G_2 , индуцированных на b -мерном подмногообразии алгебры Кэли.

Предложение 3. Структурные уравнения Картана почти эрмитовой структуры, индуцированной на b -мерном G_1 -подмногообразии алгебры октав, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b + \mu \varepsilon^{acb} \omega_b \wedge \omega_c ; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b + \bar{\mu} \varepsilon_{acb} \omega^b \wedge \omega^c ; \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c + \left(-\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} \lambda D_{h[c} D^{g d]} - \sum_{\varphi} T_{\hat{a}[c}^{\varphi} T_{d]b}^{\varphi} \right) \omega^c \wedge \omega^d + \\ &+ \left(-\frac{1}{2} |\lambda|^2 \delta_{bd}^{ac} + \frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{hd} D^{gc} + 2 \sum_{\psi} T_{\hat{a}[d}^{\psi} T_{\hat{c}]b}^{\psi} \right) \omega_c \wedge \omega^d + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} \bar{\lambda} D^{g[c} \delta_h^{d]} - \sum_{\psi} T_{\hat{a}[\hat{c}}^{\psi} T_{\hat{d}]b}^{\psi} \right) \omega_c \wedge \omega_d . \end{aligned} \quad (3)$$

Предложение 4. Структурные уравнения Картана почти эрмитовой структуры, индуцированной на b -мерном G_2 -подмногообразии алгебры октав, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_h^{c]} \omega_b \wedge \omega_c ; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D_h^{c]} \omega^b \wedge \omega^c ; \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{h[k} D^{g j]} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}[k}^{\varphi} T_{j]b}^{\varphi} \right) \omega^k \wedge \omega^j , \end{aligned} \quad (4)$$

где при этом $\text{tr}(D_{h\hat{c}}) = 0$.

Обратим внимание на то, что уравнения (3) в точности соответствуют структурным уравнениям почти эрмитовой структуры класса $W_1 \oplus W_3$, а уравнения (4) – структурным уравнениям почти эрмитовой структуры класса $W_2 \oplus W_3$ [2; 5]. Отметим, что в исследовании

Л.В. Степановой [10] представлено большое количество результатов о геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей АН-многообразий различных классов. Эти результаты можно теперь применить и к 6-мерным G_1 - и G_2 -подмногообразиям алгебры Кэли. В частности, имеют место такие результаты.

Предложение 5. *Условие $\sigma = h\eta \otimes \eta$, $h = \sigma(\xi, \xi)$ является необходимым для того, чтобы почти контактная метрическая структура на ориентируемой гиперповерхности 6-мерного G_1 -подмногообразия алгебры октав была слабо косимплектической структурой (структурой Эндо).*

Здесь σ – вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности в 6-мерное G_1 -подмногообразие алгебры Кэли.

Предложение 6. *Условие $\Phi(\nabla_{\xi}(J)\Phi^2 X) = 0$ является необходимым для того, чтобы почти контактная метрическая структура на ориентируемой гиперповерхности 6-мерного G_2 -подмногообразия алгебры октав была квазисасакиевой.*

Литература

1. Gray A., Hervella L.M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. Vol. 123. No 4. P. 35-58.
2. Banaru M.B. Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // J. Math. Sci., New York. 2015. Vol. 207. No 3. P.354-388.
3. Banaru M.B., Banaru G.A. A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. № 1(74). P.23-32.
4. Banaru M.B., Banaru G.A. 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT J. Math. 2015. Vol. 51. No 1. P.1-9.
5. Banaru M., Banaru G. A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2015. Vol. 8(57). No 2. P.21-28.
6. Степанова Л.В., Банару М.Б., Банару Г.А. О геометрии QS-гиперповерхностей келеровых многообразий // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С.815-822.
7. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный дом, 2013. 458 с.
8. Gray A. Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. Vol. 21. P. 614-620.
9. Кириченко В.Ф. Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Известия высших учебных заведений. Математика. 1980. №8. С. 32-38.
10. Степанова Л.В. Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий: дисс. ... канд. физ.-мат.наук. М.: МПГУ им. В.И. Ленина, 1995.

G.A. Banaru, M.B. Banaru
Smolensk State University

**ON SIX-DIMENSIONAL G_1 - AND G_2 -SUBMANIFOLDS
OF THE OCTAVE ALGEBRA**

Keywords: *almost Hermitian manifold, Gray–Hervella classes, octave algebra, almost contact metric structure, Cartan structural equations, hypersurface.*

Abstract. *Some results on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra, equipped with G_1 - or G_2 -structures induced on such submanifolds by Brown–Gray vector cross products, are presented.*

В.А. Беднаж, А.С. Нестеров
Брянский государственный университет

УДК 517.53

**ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ
БЕРГМАНА**

Ключевые слова: *пространство Бергмана, линейный непрерывный функционал, аналитическая функция.*

В статье получено описание линейных непрерывных функционалов в пространствах Бергмана при $1 < p < +\infty$.

Для изложения основных результатов, полученных в работе, введем следующие обозначения: пусть \mathbb{C} – комплексная плоскость, $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ – множество всех аналитических в D функций.

Символом Ω обозначим множество измеримых положительных функций ω на $\Delta = (0, 1]$, для которых существуют числа $m_\omega, M_\omega, q_\omega$, причем $m_\omega, q_\omega \in (0, 1]$, такие, что

$$m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \leq M_\omega, \quad \forall x \in \Delta, \lambda \in [q_\omega, 1].$$

Пусть $0 < p < +\infty, \alpha > -1, \omega \in \Omega$ и $\omega_\alpha(t) = \omega(t) \left(\frac{t^\alpha}{\omega(t)} \right)^p, t \in (0, 1]$.

Обозначим пространство Бергмана с весом ω символом A_ω^p . Таким образом,

$$A_\omega^p = \left\{ f \in H(D) : \left(\int_D |f(\zeta)|^p \omega(1-|\zeta|) dm_2(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Справедливы следующие утверждения (см. [1]), которые нам необходимы для изложения результатов. Приведем только их формулировки.

Теорема 1. Пусть $1 \leq p < +\infty, \alpha > \frac{\alpha_\omega + 2}{p} - 1$, тогда оператор

$$T_\alpha(f(z)) = \int_D \frac{\omega(1-|\zeta|)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}} f(\zeta) dm_2(\zeta)$$

отображает пространство L_ω^p на пространство A_ω^p .

Теорема 2. Пусть $0 < \rho < 1, 0 < p < +\infty, f_\rho(z) = f(\rho z), z \in D$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \|f_\rho - f\|_{A_\omega^p} = 0.$$

При $\omega(t) = t^\alpha, t \in [0, 1], 0 < p < +\infty$, для краткости обозначим $B_\alpha^p = A_\omega^p$.

Теорема 3. Пусть $\omega \in \Omega, 0 < p < +\infty, \alpha > -1$. Тогда если $\gamma > \frac{2+\alpha}{p} - 1$, то

$$A_\omega^p \subset B_\gamma^1.$$

Теорема 4. Пусть $0 < p < +\infty, \omega \in \Omega$. Тогда если $f \in A_\omega^p, \alpha > \frac{2+\alpha_\omega}{p} - 1$

или $f \in B_\gamma^p, \alpha > \frac{\gamma+2}{p} - 1$, то справедливо представление

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha f(\zeta) dm_2(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}}, z \in D.$$

Перейдем к описанию линейных непрерывных функционалов в пространствах Бергмана при $1 < p < +\infty$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $1 < p < +\infty, \Phi$ – линейный непрерывный функционал на $A_\omega^p, \omega \in \Omega, g_\Phi(z) = \Phi(e_z), z \in D$. Тогда:

1. а) Функция g аналитическая в D , при $\alpha > \alpha_\omega$ принадлежит классу $A_{\omega_\alpha}^q$, где

$$\omega_\alpha(t) = \omega(t) \left(\frac{t^\alpha}{\omega(t)} \right)^q, t \in \Delta, q = \frac{p}{p-1};$$

б) Φ представим в виде

$$\Phi(t) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) g(\rho e^{-i\theta}) d\theta, \quad (1)$$

при этом справедливы оценки

$$c_1(\alpha, p) \|Dg^{\alpha+1}\|_{A_{\omega\alpha}^q} \leq \|\Phi\| \leq c_2(\alpha, p) \|Dg^{\alpha+1}\|_{A_{\omega\alpha}^q}. \quad (2)$$

2. *Обратно: каждая функция $g: D^{\alpha+1}g \in A_{\omega\alpha}^q$, используя (1), порождает линейный непрерывный функционал Φ на A_{ω}^p , для которого справедлива оценка (2) и $g(z) = \Phi(e_z), z \in D$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение линейный непрерывный функционал Φ на пространстве A_{ω}^p . Используя теорему Хана – Банаха, продолжим Φ на пространство L_{ω}^p с сохранением нормы. По теореме Ф. Рисса, существует $\psi \in L_{\omega}^q, q = \frac{p}{p-1}$ такая, что

$$\Phi(f) = \int_D f(\zeta)\psi(\zeta)\omega(1-|\zeta|)dm_2(\zeta),$$

причём $\|\Phi\| = \|\psi\|_{L_{\omega}^q}$. Таким образом,

$$g_{\Phi}(z) = \Phi(e_z) = \int_D \frac{\psi(\zeta)\omega(1-|\zeta|)}{(1-\zeta z)} dm_2(\zeta), z \in D.$$

Учитывая свойство операторов D^{α} , получим

$$D^{\alpha+1}g(z) = \int_D \frac{\psi(\zeta)\omega(1-|\zeta|)}{(1-\zeta z)^{\alpha+2}} dm_2(\zeta), z \in D.$$

Используя теорему 1, имеем $\|D^{\alpha+1}g\|_{A_{\omega\alpha}^q} \lesssim \|\psi\|_{L_{\omega}^q}$.

Представляя $e_z(\zeta), \zeta, z \in D$, в виде степенного ряда в D и учитывая сходимость ряда при фиксированном $z \in D$ к функции e_z в A_{ω}^p , получаем:

$$g(z) = \Phi(e_z) = \Phi\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \zeta^k \delta^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi(\delta_k) z^k, z \in D,$$

$$\delta_k(\zeta) = \zeta^k, \zeta \in D.$$

Пусть теперь $0 < \rho < 1$, положим $f_{\rho^2}(z) = f(\rho^2 z), z \in D$. По теореме 2 $\|f_{\rho^2} - f\| \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1-0$.

Рассмотрим интеграл $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\phi}) g(\rho e^{-i\phi}) d\phi$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\phi}) g(\rho e^{-i\phi}) d\phi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\phi}) \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi(\delta_k) (\rho e^{-i\phi})^k d\phi = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rho^n e^{i\phi n} \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi(\delta_k) (\rho e^{-i\phi})^k d\phi &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \rho^{2k} \Phi(\delta_k) = \Phi\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \rho^{2k} \zeta^k\right) = \Phi(f_{\rho^2}). \end{aligned}$$

Имеем:

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \Phi(f_{\rho}) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^{2k} \Phi(\delta_k),$$

где $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$. Используя предыдущее равенство,

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^{2k} \Phi(\delta_k) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) g(\rho e^{-i\theta}) d\theta,$$

при этом имеет место левая оценка в (2). Для установления правой оценки докажем обратное утверждение теоремы.

Пусть $g: D^{\alpha+1}g \in A_{\omega_\alpha}^q$. Докажем, что по равенству (1) порождается линейный непрерывный функционал Φ на A_ω^p и при этом справедливы оценки (2).

Отметим, что если $g \in A_{\omega_\alpha}^q$, то $g \in B_\alpha^1$. Действительно, по условию теоремы

$$\omega_\alpha(1-|z|) = \omega(1-|z|) \cdot \left(\frac{(1-|z|)^\alpha}{\omega(1-|z|)} \right)^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Следовательно,

$$(1-|z|)^\alpha = \left(\frac{\omega_\alpha(1-|z|)}{\omega(1-|z|)} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \omega(1-|z|).$$

Тогда, согласно неравенству Гёльдера, для произвольной ограниченной аналитической функции ψ

$$\int_D |\psi(z)|(1-|z|)^\alpha dm_2(z) \leq \left(\int_D |\psi(z)|^q \omega_\alpha(1-|z|) dm_2(z) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_D \omega(1-|z|) dm_2(z) \right)^{\frac{1}{p}}$$

получим нужное утверждение.

По условию теоремы $D^{\alpha+1}g \in A_{\omega_\alpha}^q$, значит, $D^{\alpha+1}g \in B_\alpha^1$.

Далее, используя представление класса B_α^1 (теорема 4), имеем:

$$D^{\alpha+1}g(\rho z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha D^{\alpha+1}g(\rho\zeta) dm_2(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}}.$$

Применяя свойство оператора D^α , получаем:

$$g(\rho z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha D^{\alpha+1}g(\rho\zeta)}{1-\bar{\zeta}z} dm_2(\zeta), z \in D.$$

Пусть теперь f – произвольная функция из A_ω^p и $0 < \rho < 1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) g(\rho e^{-i\theta}) d\theta = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \left(D^{\alpha+1}g(\rho w)(1-|w|^2)^\alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta}) d\theta}{1-e^{-i\theta}\bar{w}} \right) dm_2(w).$$

По формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta}) d\theta}{1-e^{-i\theta}\bar{w}} = f(\rho\bar{w}),$$

приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) g(\rho e^{-i\theta}) d\theta = (\alpha+1) \int_D D^{\alpha+1}g(\rho w) f(\rho\bar{w})(1-|w|^2)^\alpha dm_2(w).$$

Оценим последний интеграл с помощью неравенства Гёльдера:

$$\int_D |D^{\alpha+1} g(\rho w)| |f(\rho \bar{w})(1-|w|)^\alpha| dm_2(w) \leq \\ \leq \left(\int_D |f(\rho^2 \bar{w})|^q \omega_\alpha(1-|w|) dm_2(w) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_D |D^{\alpha+1} g(\rho w)|^q \omega_\alpha(1-|w|) dm_2(w) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как $f \in A_\omega^p$ и $D^{\alpha+1} g \in A_{\omega_\alpha}^q$, то

$$\left(\int_D |f(\rho^2 \bar{w})|^q \omega_\alpha(1-|w|) dm_2(w) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \text{ и } \left(\int_D |D^{\alpha+1} g(\rho w)|^q \omega_\alpha(1-|w|) dm_2(w) \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Отсюда следует, что предел

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) g(\rho e^{-i\theta}) d\theta$$

существует и $|\Phi(f)| \leq \frac{\alpha+1}{\pi} \|f\|_{A_\omega^p} \|D^{\alpha+1} g\|_{A_{\omega_\alpha}^q}$,

то есть Φ – линейный непрерывный функционал на A_ω^p , при этом

$$|\Phi(f)| \leq \frac{\alpha+1}{\pi} \|D^{\alpha+1} g\|_{A_{\omega_\alpha}^q}.$$

Покажем теперь, что $\Phi(e_z) = g(z)$, $z \in D$. Действительно,

$$\Phi(e_z) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\rho e^{-i\theta}) e_z(\rho e^{i\theta}) d\theta = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\rho e^{-i\theta}) d\theta}{1 - z \rho e^{i\theta}} = \\ = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\rho e^{i\theta}) d\theta}{1 - z \rho e^{-i\theta}} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta} - z \rho} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{g(\rho \zeta)}{\zeta - \rho z} = \\ = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} g(\rho^2 z) = g(z), z \in D.$$

Отсюда и из первой части доказательства теоремы следует, что имеют место все оценки в (2).

Литература

1. Shamoyan F.A., Djrbashian A.E. Topics in the theory of p A_α spaces // Teubner Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics]. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig, 1988. –Vol. 105. –P. 200.

V.A. Bednazh, A.S. Nesterov
Bryansk State University

LINEAR FUNCTIONALS IN BERGMAN SPACES

Keywords: Bergman space, continuous linear functional, analytic function.

Abstract. In the article we obtain the description of continuous linear functionals in Bergman spaces.

РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ЭКСПЕРТИЗ ПО МЕТОДУ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Ключевые слова: *метод анализа иерархий, экспертные процедуры, интернет-сообщества, показатель интеграции сообщества.*

В работе представлены результаты исследования поведения интернет-сообществ с помощью специализированной информационно-аналитической системы для проведения иерархических экспертиз по методу анализа иерархий. В работе рассматриваются результаты обработки показателей, входящих в иерархию важности параметров процесса интеграции интернет-сообществ. Выдвинута гипотеза о том, что на динамику сообществ именно мобилизационного типа в большей степени влияют социально-групповые характеристики, нежели сетевые. Приводится иерархия параметров, описывающих интеграцию интернет-сообществ, анализируются функционал разработанной информационно-аналитической системы и результаты ее работы.

Постановка задачи. В настоящее время Интернет является частью социального мира, хотя ещё недавно был лишь технологией. Однако исследователям до сих пор не удаётся понять место интернета в связи с обществом. Помимо того, что сам Интернет – новое социальное явление, к проблемам добавляется его бурное развитие. Но самое сложное в данной проблеме – многоуровневость интернет-социальности. Один из уровней – уровень коммуникации offline-взаимодействий с online-взаимодействиями и наоборот. Из-за такой ситуации возникает непростой вопрос: при исследовании нужно использовать одинаковые принципы, категории, методы и логики или разные?

Описанные выше проблемы значительно повлияли на методологию исследования. Объектом исследования в данном случае являются сетевые сообщества мобилизационного типа – это означает, что интернет-коммуникации в таких сообществах влияют на реальное поведение участников в offline [1].

Исследование включает в себя две группы: социологов в качестве экспертов и математиков-прикладников. Предметом наблюдения является интеграция интернет-сообществ. Математики-прикладники выступают в роли разработчиков информационной системы для анализа

иерархии, созданной из характеристик интернет-сообществ, которые выделили эксперты (см. рис. 1). Группа социологов состоит из четырех человек.

В качестве метода для оценки влияния параметров на показатель интеграции выбран метода анализа иерархий Т. Саати [2; 3].

В системе присутствует множество уровней $I = \{I_i, i = \overline{1, m}\}$ [4]. Рассмотрим внимательнее каждый из них.

Вершиной в данной системе служит уровень I_0 , отображающий уровень интеграции в интернет-сообществе.

На первом уровне системы присутствуют силы

$$W_{I_1} = \{W_{I_1, j}, j = \overline{1, n_{I_1}},\} \quad (1)$$

которые оказывают влияние на процесс интеграции. Силами на этом уровне служат само сообщество ($W_{I_1,1}$), динамика сообщества ($W_{I_1,2}$) и внешние факторы ($W_{I_1,3}$).

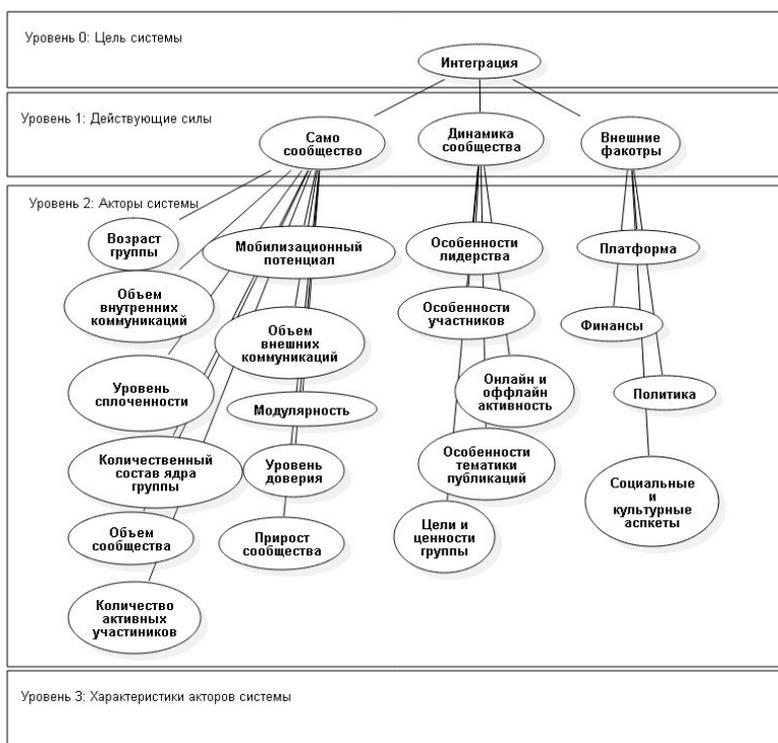


Рис. 1. Рисунок иерархической модели

Второй уровень состоит из акторов, направляющих силы. Аналогично (1)

$$W_{I_2} = \{W_{I_2, j}, j = \overline{1, n_{I_2}},\} \quad (2)$$

где $W_{I_2,1}$ – возраст группы, $W_{I_2,2}$ – динамика объёма сообщества, $W_{I_2,3}$ – количественный состав ядра группы, $W_{I_2,4}$ – мобилизационный потенциал, $W_{I_2,5}$ – модулярность, $W_{I_2,6}$ – объём внешних коммуникаций,

$W_{I_2,7}$ – объём внутренних коммуникаций, $W_{I_2,8}$ – объём сообщества, $W_{I_2,9}$ – уровень доверия, $W_{I_2,10}$ – уровень сплочённости, $W_{I_2,11}$ – особенности лидерства, $W_{I_2,12}$ – особенности участников, $W_{I_2,13}$ – особенности тематики публикаций, $W_{I_2,14}$ – цели и ценности группы, $W_{I_2,15}$ – особенности online- и offline-активности, $W_{I_2,16}$ – особенности программно-технической платформы соцсети, $W_{I_2,17}$ – политико-правовые аспекты, $W_{I_2,18}$ – финансовые аспекты, $W_{I_2,19}$ – социокультурные аспекты.

Третий уровень представляет собой множества показателей, характеризующих акторы, воздействующие на силы, влияющие на процесс интеграции интернет-сообществ. Аналогично (1) и (2)

$$W_{I_2} = \{W_{I_2,j}\}, j = \overline{1, n_{I_2}}. \quad (3)$$

Функционал информационной системы. Данная информационная система имеет следующий функционал:

- редактирование иерархической модели;
- редактирование матрицы парных сравнений;
- представление информации в виде векторов и диаграмм;
- хранение нескольких вариантов оценки экспертов;
- сравнение до 10 элементов одновременно;
- копирование данных из внешней базы данных;
- усреднение весов элементов по среднему геометрическому.

Усреднение весов элементов. Для определения наиболее рассогласованного элемента в иерархии в информационную систему был введён инструмент для усреднения весов элементов по среднему геометрическому.

Для нахождения среднего геометрического по локальным весам элементов ветки иерархии была использована следующая формула:

$$\bar{a}_i = \sqrt[j]{a_1 a_2 a_3 \dots a_j}, \quad (4)$$

где i – количество элементов в ветке иерархии, j – количество используемых вариантов.

Для нахождения усреднённого веса была использована следующая формула:

$$a'_i = \frac{\bar{a}_i}{\sum_{z=1}^i \bar{a}_z}, \quad (5)$$

где z – количество элементов в ветке иерархии.

Отклонения рассчитываются как абсолютная разность усреднённого веса с локальным весом элемента.

Результаты. Имея в наличии разные оценки экспертов можно провести усреднение. Сначала были усреднены значения уровня I_1 [5]. Влияние сил уровня I_1 на цель I_0 получилось равным вектору $\omega_{I_1} = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. Далее был усреднён уровень I_2 . Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Таблица 1

Влияние акторов системы на силы, оказывающие влияние на показатель интеграции интернет-сообщества

Акторы I_2 \ Силы I_1	W_{I_11} – само сообщество	W_{I_12} – динамика сообщества	W_{I_13} – внешние факторы
W_{I_21} – возраст группы	0,05		
W_{I_12} – динамика объёма сообщества	0,09		
W_{I_13} – количественный состав ядра группы	0,1		
W_{I_14} – мобилизационный потенциал	0,13		
W_{I_15} – модулярность	0,06		
W_{I_16} – объём внешних коммуникаций	0,05		
W_{I_17} – объём внутренних коммуникаций	0,14		
W_{I_18} – объём сообщества	0,05		
W_{I_19} – уровень доверия	0,09		
W_{I_110} – уровень сплочённости	0,24		
W_{I_111} – особенности лидерства		0,13	
W_{I_112} – особенности участников		0,12	
W_{I_113} – особенности тематики публикаций		0,2	
W_{I_114} – цели и ценности группы		0,35	
W_{I_115} – особенности online- и offline-активности		0,2	
W_{I_116} – особенности программно-технической платформы социальной сети			0,18

$W_{I_1 17}$ – Политико-правовые аспекты			0,16
$W_{I_1 18}$ – финансовые аспекты			0,13
$W_{I_1 19}$ – социокультурные аспекты			0,54

Последним усредняется уровень I_3 . В таблице 2 представлены результаты вычислений.

Таблица 2

Значения векторов влияния характеристик акторов на уровень I_2

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
$W_{I_2 2}$ – динамика объёма сообщества	0,4	0,6						
$W_{I_2 4}$ – мобилизационный потенциал	0,2	0,3	0,09	0,41				
$W_{I_2 6}$ – объём внешних коммуникаций	0,24	0,16	0,32	0,27				
$W_{I_2 7}$ – объём внутренних коммуникаций	0,22	0,18	0,6					
$W_{I_2 9}$ – уровень доверия	0,48	0,25	0,09	0,1	0,08			
$W_{I_2 10}$ – уровень сплочённости	0,07	0,06	0,09	0,23	0,09	0,26	0,08	0,13
$W_{I_2 11}$ – особенности лидерства	0,11	0,15	0,11	0,09	0,06	0,12	0,37	
$W_{I_2 12}$ – особенности участников	0,18	0,15	0,17	0,17	0,09	0,25		
$W_{I_2 13}$ – особенности тематики публикаций	0,14	0,1	0,08	0,19	0,39	0,1		
$W_{I_2 14}$ – цели и ценности группы	0,26	0,21	0,13	0,09	0,31			
$W_{I_2 15}$ – особенности online- и offline-активности	0,3	0,2	0,22	0,28				
$W_{I_2 16}$ – особенности программно-технической платформы соцсети	0,31	0,21	0,11	0,36				
$W_{I_2 17}$ – политико-правовые аспекты	0,15	0,39	0,45					
$W_{I_2 19}$ – социо-культурные аспекты	0,22	0,13	0,53	0,12				

В результате экспертизы сформирована оценочная функция расчёта показателя интеграции (6). По формуле (6) рассчитаны показатели интеграции групп в динамике (см. рисунки 2–9).

$$\begin{aligned}
Y &= x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 + \dots + x_{34}w_{34} = \\
&= x_1 * 0,012 + x_2 * 0,0056 + x_3 * 0,0144 + x_4 * 0,0048 + x_5 * 0,016667 + \\
&+ x_6 * 0,008667 + x_7 * 0,004767 + x_8 * 0,0001 + x_9 * 0,00528 + x_{10} * 0,0132 + \\
&+ x_{11} * 0,03003 + x_{12} * 0,004767 + x_{13} * 0,008 + x_{14} * 0,016 + x_{15} * 0,010267 + \\
&+ x_{16} * 0,0039 + x_{17} * 0,013 + x_{18} * 0,0039 + x_{19} * 0,008 + x_{20} * 0,0208 + \\
&+ x_{21} * 0,016667 + x_{22} * 0,018 + x_{23} * 0,0001 + x_{24} * 0,014 + x_{25} * 0,0072 + \\
&+ x_{26} * 0,024255 + x_{27} * 0,0026 + x_{28} * 0,024 + x_{29} * 0,0954 + x_{30} * 0,017767 + \\
&+ x_{31} * 0,015015 + x_{32} * 0,035805 + x_{33} * 0,0216 + x_{34} * 0,01848.
\end{aligned}
\tag{6}$$



Рис. 2. Динамика интеграции в сообществе «Лыжи мечты»



Рис. 3. Динамика интеграции в сообществе «Альянс ЛГБТ»



Рис. 4. Динамика интеграции в сообществе «Библиотеки – пространства развития»



Рис. 5. Динамика интеграции в сообществе «Все вместе»

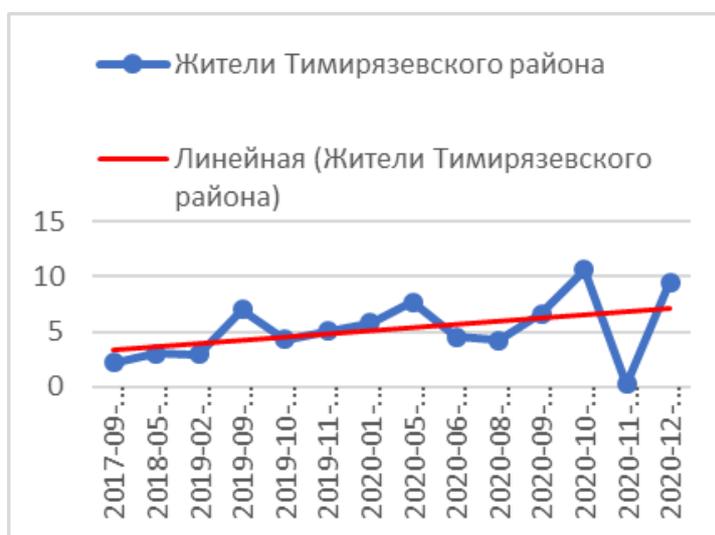


Рис. 6. Динамика интеграции в сообществе «Альянс ЛГБТ»



Рис. 7. Динамика интеграции в сообществе «Поборы в школах и детских садах»



Рис. 8. Динамика интеграции в сообществе «Пражский клуб»



Рис. 9. Динамика интеграции в сообществе «Университет солидарности»

Выводы. На основании данных наблюдений и анализа признаков интеграции на первом этапе сформирована иерархическая модель динамики интеграции, включающая более 30 количественных показателей. Мы предполагаем, что онлайн-сообщества в большей степени ведут себя как структурированные группы с ролевой структурой, единством ценностей и норм, выраженной внешней и внутренней идентичностью или как слабо структурированные сети в зависимости именно от степени гибридности сообщества. Также выдвинута гипотеза о том, что на динамику сообществ именно мобилизационного типа в большей степени влияют социально-групповые характеристики, нежели сетевые. Реализация процедур сбора данных показала, что по большинству показателей, входящих в тестируемую эмпирическую модель, данные оказались доступными для сбора. Исключение составили лишь данные для показателей однородности сообществ по социально-демографическим и образовательным признакам (в силу закрытости большой доли персональных страниц в изучаемых социальных сетях). Также оказываются слабо формализуемыми, а поэтому недоступными для автоматического сбора в настоящий момент, такие значимые показатели, как тип ценностей сообщества, тематическая мода, наличие собственного языка общения, стратегии позиционирования, воздействие внешних факторов (политико-правовое регулирование, резонансные события).

Исследование проводится при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-011-00761А и ИжГТУ БГА/20-28-09.

Литература

1. Построение иерархической модели показателя интеграции интернет-сообществ / Г.А. Благодатский [и др.] // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. № 4. С. 78-79.
2. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation (Decision Making Series). New York: McGraw-Hill, 1980. 287 p.
3. Saaty R.W. The Analytic Hierarchy Process – What it is and How it is Used // Mathematical Modelling. 1987. Vol. 9 (3-5). P. 161-176.
4. Благодатский Г.А., Карачев Е.В. Методы и инструменты исследования иерархической структуры показателей интеграции интернет-сообществ // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. Вып. 21. С. 284-286.
5. . Internet Communities' Integrarion Index Hierarhy Model / G.A. Blagodatsky [et al.]. Krasnoyarsk: European Proceedings, 2020. P. 470-473.

G.A. Blagodatsky, E.V. Karachev
Izhevsk State Technical University

**DEVELOPMENT OF AN INFORMATION SYSTEM
FOR CONDUCTING HIERARCHICAL EXAMINATIONS
BY THE METHOD OF ANALYSIS OF HIERARCHIES**

Keywords: *hierarchy analysis method, expert procedures, Internet communities, community integration indicator*

Abstract. *The work presents results of a research of the conducting the Internet communities using a specialised information and analytical system for conducting hierarchical examinations using the method of analysing hierarchies. The research presents the results of processing the indicators included in the parameters importance hierarchy of the integration process of the internet communities. A hypothesis was put forward that the dynamics of the mobilization communities type is more influenced by social and group characteristics that network ones. A parameters hierarchy describing the integration of the Internet communities and a description of the functionality of the developed information and analytical system and the results of its work are given.*

Ю.М. Вувуникян

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы

УДК 517.988

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Ключевые слова: *системный нелинейный оператор, системный асимптотически обратный оператор, интегро-дифференциальное уравнение, обобщенные импульсные характеристики системных операторов, обобщенные спектральные характеристики системных операторов.*

Методы математического моделирования являются основными средствами исследования сложных нелинейных динамических систем, для описания которых в последнее время используются системные полиномиальные операторы с обобщенными характеристиками. При этом нелинейные и динамические свойства системы полностью характеризуются последовательностью многомерных обобщенных импульсных характеристик. В качестве нелинейных систем в данной работе рассматриваются системы, определяемые нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями. Для аналитического и численного исследования систем используются комплексные коэффициенты передачи в виде спектральных характеристик. Целью данной работы является разработка эффективного метода вычисления

спектральных характеристик для асимптотически обратного системного оператора.

1. Системным оператором [1] называется оператор A , определяемый следующим образом:

$$Ax = \sum_{k=1}^m S_k (a_k * x^{\otimes k}),$$

где S_k – оператор сокращения переменных порядка k , действующий по формуле:

$$S_k : ((t_1, t_2, \dots, t_k) \mapsto f(t_1, t_2, \dots, t_k)) \mapsto ((t \mapsto f(t, t, \dots, t))),$$

где a_k – обобщенная функция с носителем на положительном гипероктанте, называемая импульсной характеристикой k -го порядка оператора A , $x^{\otimes k}$ – тензорная степень k -го порядка, $*$ – k -мерная свертка обобщенных функций.

В рассматриваемой работе будем исследовать системные полиномиальные операторы, порождённые интегро-дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\int_0^t \int_0^t K_2(t-s_1, t-s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + \int_0^t K_1(t-s)x(s)ds + x' + bx^2 + cx = f,$$

где f – обобщенная функция с носителем на замкнутой положительной полуоси.

Рассматриваемое интегро-дифференциальное уравнение определяет системный полилинейный эволюционный оператор A со следующими обобщенными импульсными характеристиками:

$$\begin{aligned} a_1 &= \delta' + c\delta + K_1, \\ a_2 &= b(\delta \otimes \delta) + K_2 = b\delta^{\otimes 2} + K_2, \\ a_k &= 0, \quad \forall k \geq 3, \end{aligned}$$

где δ – дельта-функция Дирака, δ' – обобщенная производная дельта-функции.

Обобщённое преобразование Лапласа \tilde{a}_k импульсной характеристики a_k порядка k называется спектральной характеристикой порядка k эволюционного оператора A , а семейство (\tilde{a}_k) – системой спектральных характеристик системного оператора A .

Применяя обобщенное преобразование Лапласа к полученным импульсным характеристикам системного оператора и учитывая, что $\tilde{\delta}(\lambda) = 1$, $\tilde{\delta}'(\lambda) = \lambda$ и что обобщенное преобразование Лапласа

тензорного произведения равно тензорному произведению обобщенных преобразований Лапласа для системного эволюционного оператора, порожденных рассматриваемым интегро-дифференциальным уравнением, получим следующую систему спектральных характеристик:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1(\lambda) &= \lambda + c + \tilde{K}_1(\lambda), \\ \tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) &= b + \tilde{K}_2(\lambda_1, \lambda_2), \\ \tilde{a}_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) &= 0, \quad \forall k \geq 3.\end{aligned}$$

Найдём спектральные характеристики для асимптотически обратного системного оператора B к рассматриваемому системному оператору A .

Для вычисления первой спектральной характеристики $\tilde{b}_1(\lambda)$ используем равенство $\tilde{b}_1(\lambda)\tilde{a}_1(\lambda) = 1$, из которого получаем:

$$\tilde{b}_1(\lambda) = \frac{1}{\tilde{a}_1(\lambda)} = \frac{1}{\lambda + c + \tilde{K}_1(\lambda)}. \quad (1)$$

Для вычисления спектральных характеристик $\tilde{b}_n(\lambda)$ при $n \geq 2$ применим общую формулу [1] для спектральных характеристик асимптотически обратного оператора:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_n(\lambda)\tilde{a}_1^{\otimes n}(\lambda) &= -\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_m=\lambda} \tilde{b}_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \times \\ &\times \tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_1(\lambda_2)\dots\tilde{a}_1(\lambda_m) \times \\ &\times \tilde{a}_1(\lambda_1+\dots+\lambda_m) \times \dots \times \tilde{a}_1(\lambda).\end{aligned} \quad (2)$$

При $n = 2$ из равенства (2) следует:

$$\tilde{b}_2(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{a}_1^{\otimes 2}(\lambda) = -\tilde{b}_1(\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2),$$

откуда, применяя соотношение (1), получим

$$\begin{aligned}\tilde{b}_2(\lambda_1, \lambda_2) &= -\frac{\tilde{b}_1(\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\tilde{a}_1^{\otimes 2}(\lambda)} = -\frac{\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_1(\lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2)} = \\ &= -\frac{\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)}{(\lambda_1 + c + \tilde{K}_1(\lambda_1))(\lambda_2 + c + \tilde{K}_1(\lambda_2))(\lambda_1 + \lambda_2 + c + \tilde{K}_1(\lambda_1 + \lambda_2))} = \\ &= -\frac{b + \tilde{K}_2(\lambda_1, \lambda_2)}{(\lambda_1 + c + \tilde{K}_1(\lambda_1))(\lambda_2 + c + \tilde{K}_1(\lambda_2))(\lambda_1 + \lambda_2 + c + \tilde{K}_1(\lambda_1 + \lambda_2))}.\end{aligned} \quad (3)$$

Для вычисления характеристики $\tilde{b}_3(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, применим соотношение (2) при $n = 3$.

Имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_3(\lambda)\tilde{a}_1^{\otimes 3}(\lambda) &= -\tilde{b}_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\tilde{a}_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - \\ &-\tilde{b}_2(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_2(\lambda_2, \lambda_3) - \tilde{b}_2(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3).\end{aligned}$$

Так как $\tilde{a}_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ и $\tilde{a}_1^{\otimes 3}(\lambda) = \tilde{a}(\lambda_1)\tilde{a}(\lambda_2)\tilde{a}(\lambda_3)$, то из полученного соотношения и равенства (3) получаем

$$\begin{aligned}\tilde{b}_3(\lambda)\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_1(\lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3) &= \\ &= -\tilde{b}_2(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_2(\lambda_2, \lambda_3) - \tilde{b}_2(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3) = \\ &= \frac{\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_2(\lambda_2, \lambda_3)}{\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_1(\lambda_2 + \lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} + \frac{\tilde{a}_2(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3)}{\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} = \\ &= \frac{1}{\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \left(\frac{\tilde{a}_2(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3)\tilde{a}_2(\lambda_2, \lambda_3)}{\tilde{a}_1(\lambda_2 + \lambda_3)} \right),\end{aligned}$$

откуда и находим характеристику $\tilde{b}_3(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_3(\lambda) &= \frac{1}{\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3)} \times \\ &\times \left(\frac{\tilde{a}_2(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3)\tilde{a}_2(\lambda_2, \lambda_3)}{\tilde{a}_1(\lambda_2 + \lambda_3)} \right) = \quad (4) \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + c + \tilde{K}_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))(\lambda_1 + c + \tilde{K}_1(\lambda_1)) \times \dots \times (\lambda_3 + c + \tilde{K}_1(\lambda_3))} \times \\ &\times \left(\frac{(b + \tilde{K}_2(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3))(b + \tilde{K}_2(\lambda_1, \lambda_2))}{\lambda_1 + \lambda_2 + c + \tilde{K}_1(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{b + \tilde{K}_2(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_2 + \lambda_3 + c + \tilde{K}_1(\lambda_2 + \lambda_3)} \right).\end{aligned}$$

Применим теперь общую формулу (2) для $n = 4$. В этом случае m может принимать значения 1, 2, 3. Если $m = 1$, то внутренняя сумма в (2) содержит только одно слагаемое с $n_1 = 4$. Если $m = 2$, то внутренняя сумма содержит слагаемые с натуральными числами n_1 и n_2 , удовлетворяющими равенству $n_1 + n_2 = 4$.

Отметим, что тогда пара (n_1, n_2) называется композицией числа 4 с двумя частями, при этом в случае $n_1 \leq n_2$ композиция называется разбиением [2]. Искомыми композициями являются следующие: (1, 3), (2, 2), (3, 1), т.е. получаем 3 слагаемых, соответствующих этим парам.

Если же $m = 2$, то внутренняя сумма содержит слагаемые с натуральными числами n_1, n_2, n_3 , удовлетворяющих равенству $n_1 + n_2 + n_3 = 4$. Такие тройки (n_1, n_2, n_3) называются композицией числа 4 с тремя частями. Искомыми композициями являются следующие: (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 2, 2), т.е. получаем еще 3 слагаемых, соответствующих этим тройкам.

Таким образом, при $n = 4$ из формулы (2) следует равенство:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_4(\lambda)\tilde{a}_1^{\otimes 4}(\lambda) = & -\tilde{b}_1(\lambda_1 + \dots + \lambda_4)\tilde{a}_4(\lambda_1, \dots, \lambda_4) - \\ & -\tilde{b}_2(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_3(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) - \\ & -\tilde{b}_2(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{a}_2(\lambda_3, \lambda_4) - \\ & -\tilde{b}_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_4)\tilde{a}_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_4) - \\ & -\tilde{b}_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4)\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_1(\lambda_2)\tilde{a}_2(\lambda_3, \lambda_4) - \\ & -\tilde{b}_3(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_4)\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_2(\lambda_2, \lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_4) - \\ & -\tilde{b}_3(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_4). \end{aligned}$$

Так как $\tilde{a}_3 = 0$, $\tilde{a}_4 = 0$ и $\tilde{a}_1^{\otimes 4}(\lambda) = \tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_1(\lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_4)$, из полученного соотношения получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_4(\lambda)\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_1(\lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_4) = & \\ & -\tilde{b}_2(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{a}_2(\lambda_3, \lambda_4) - \\ & -\tilde{b}_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4)\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_1(\lambda_2)\tilde{a}_2(\lambda_3, \lambda_4) - \\ & -\tilde{b}_3(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_4)\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_2(\lambda_2, \lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_4) - \\ & -\tilde{b}_3(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_4). \end{aligned}$$

Подставляя в это равенство вычисленные значения, получим формулу для вычисления обобщенной спектральной характеристики $\tilde{b}_4(\lambda)$.

Отметим, что при использовании формулы (2) вычисления можно значительно сократить, заменив суммирование по множеству всех композиций натурального числа n суммированием по подмножеству разбиений числа n . Для этого необходимо предварительно применить к каждой спектральной характеристике исходного системного оператора оператор симметризации.

Таким образом, в работе рассмотрены системные эволюционные операторы, порождённые нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями, для которых построены импульсные и спектральные характеристики, доказаны формулы для нахождения спектральных характеристик для асимптотически обратных системных операторов до четвертого порядка.

Литература

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
2. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: МГУ, 1986. 368 с.

3. Земаян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1974. 400 с.
4. Вувуникян Ю.М. Эволюционные операторы с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками. Гродно: ГрГУ, 2007. 224 с.
5. Вувуникян Ю.М. Обобщенные функции и нелинейные эволюционные операторы. Гродно: ГрГУ, 2014. 302 с.
6. Эндриус Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.

Y.M. Vuvunikian

Yanka Kupala State University of Grodno

METHODS FOR CONSTRUCTING IMPULSE AND SPECTRAL CHARACTERISTICS OF SYSTEM OPERATORS, GENERATED BY NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Keywords: *nonlinear system operator, asymptotically inverse system operator, integro-differential equation, generalized impulse characteristics of system operators, generalized spectral characteristics of system operators.*

Abstract. *Methods of mathematical modeling are the main means of studying complex nonlinear dynamical systems, the description of which has been recently used by evolutionary system operators with generalized characteristics. Moreover, the nonlinear and dynamic properties of the system are completely characterized by a sequence of multidimensional generalized impulse characteristics. As nonlinear systems, in this paper we consider systems defined by nonlinear integro-differential equations. For analytical and numerical studies of systems, complex transmission coefficients in the form of spectral characteristics are used. The aim of this work is to develop an effective calculation of spectral characteristics for an asymptotically inverse system operator.*

Г.С. Евдокимова

Смоленский государственный университет

УДК 519.2

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

Ключевые слова: *переменные параметры, порядок поступления, усреднение, эффективность системы, среднее число потерянных заявок.*

В работе доказано: применение приема «усреднения» для систем массового обслуживания с переменными параметрами повлечет за собой переоценку результативности конкретной системы и вероятность допустить ошибку при анализе особенности её работы.

На практике довольно часто встречаются случаи организации работы системы, когда поступившую заявку начинают обслуживать либо все приборы, либо часть из них. Примером обслуживания с такой организацией может служить прием радиogramм. Обслуживание в этом случае заканчивается, как только одна из станций примет радиogramму. Другим примером может служить поиск группой вертолетов геологоразведочной партии, попавшей в беду. Задача поиска будет решена, как только один из вертолетов найдет потерявшуюся партию.

Работа системы массового обслуживания с отказами, в которой каждая вновь поступившая заявка обслуживается всеми приборами, подробно описана Б.В. Гнеденко [1]. Суть ее состоит в следующем.

Имеется n -канальная система массового обслуживания с отказами. Длительность обслуживания осуществляется по экспоненциальному закону распределения с интенсивностью $\mu_i(t)$. Входящий поток – неоднородный пуассоновский с параметром $\lambda(t)$, который является периодической функцией времени. В момент поступления очередной заявки в систему к ее обслуживанию немедленно приступают все n свободных приборов, причем каждый из них действует независимо друг от друга. Обслуживание системы считается завершенным тогда, когда хотя бы один из приборов закончит его.

Примем закон обслуживания заявки экспоненциальным со средним временем обслуживания соответственно для каждого прибора, равным

$$\bar{t}_1 = \frac{t}{\int_0^t \mu_1(u) du}, \dots, \bar{t}_n = \frac{t}{\int_0^t \mu_n(u) du}.$$

Найдем закон распределения времени обслуживания n приборами.

Допустим, что $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n$ – время обслуживания заявки соответственно первым, вторым, ..., n прибором.

В этом случае вероятность того, что время обслуживания $t_{обс}$ окажется больше T , представим в виде

$$P\{t_{обс} > T\} = P\{\min(t_1, t_2, \dots, t_n) > T\}.$$

Так как обслуживание будет закончено в тот момент, как только его завершит один из приборов, то

$$P\{\min(t_1, t_2, \dots, t_n) > T\} = P\{t_1 > T, \dots, t_{n-1} > T, t_n > T\}.$$

Последняя вероятность без особого труда может быть вычислена по теореме умножения вероятностей.

Моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n в нашем случае не зависят друг от друга, поэтому можно записать

$$P\{t_1 > T, t_2 > T, \dots, t_n > T\} = \prod_{i=1}^n P\{t_i > T\}. \quad (1)$$

С учетом того, что закон распределения времени обслуживания экспоненциальный, имеем

$$P\{t_i > T\} = e^{-\int_0^{t_i} \mu_i(u) du}.$$

Подставим значение величины $P\{t_i > T\}$ в равенство (1), получим

$$P\{t > T\} = e^{-\int_0^t (\mu_1(\tau) + \mu_2(\tau) + \dots + \mu_n(\tau)) d\tau}.$$

Обозначим сумму

$$\mu_1(\tau) + \mu_2(\tau) + \dots + \mu_n(\tau) = \mu^*(\tau).$$

Следовательно,

$$P\{t > T\} = e^{-\int_0^t \mu^*(\tau) d\tau},$$

т.е. закон распределения времени обслуживания заявки, поступившей в нашу систему, при условии обслуживания ее всеми n приборами независимо друг от друга также является экспоненциальным законом с математическим ожиданием времени обслуживания

$$\bar{t} = \frac{t}{\int_0^t \mu^*(\tau) d\tau}. \quad (2)$$

Отсюда видно, что среднее значение \bar{t} будет тем меньше, чем большее количество приборов примет участие в обслуживании.

Таким образом, задача сводится к рассмотрению одноканальной системы, у которой математическое ожидание времени обслуживания определяется зависимостью (2).

Аналитическое решение для систем массового обслуживания с периодическим входящим потоком и с переменной интенсивностью обслуживания в стационарном режиме получить не удалось. Поэтому при решении многих практических задач появляется готовность избежать затруднений, обусловленных фактом зависимости, и использовать одно из следующих ухищрений: а) систему массового обслуживания проанализировать по максимальной величине интенсивности прихода заявок; б) опираться на «усреднение»

интенсивности входящего потока и интенсивности обслуживания. При таких приближениях что в первом случае, что во втором начинают работать факторы, оказывающие воздействие на эффективность работы систем обслуживания. Ибо уровень результативности системы обусловлен возможностями обстановки, в которой используется обслуживающая система, например от параметра потока заявок и параметра обслуживания. Рассмотрим более подробно вторую описанную выше ситуацию.

Пусть μ_t – поток потерянных вызовов. В качестве эффективности работы системы можно рассмотреть среднее число потерь в единицу времени.

Обычными рассуждениями составим систему дифференциальных уравнений, описывающих вероятностные состояния одноканальной системы обслуживания с отказами

$$\begin{aligned}\frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_t P_0(t) + \mu_t^* P_1(t), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} &= -\mu_t^* P_1(t) + \lambda_t P_0(t).\end{aligned}$$

Нормировочное условие имеет вид

$$P_0(t) + P_1(t) = 1.$$

С помощью этого нормировочного условия система сводится к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_t - (\lambda_t + \mu_t) P_0(t).$$

Решая это линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами при начальном условии

$$\bar{P}_k(0) = \delta_k,$$

получаем

$$P_0(t) = e^{-(\Lambda_t + M_t)} \left[1 + \int_0^t \mu_x e^{(\Lambda_x + M_x)} dx \right].$$

Очевидно,

$$Mu_t = \int_0^t \lambda_t P_1(t) dt,$$

$$u = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} Mu_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \lambda_t P_1(t) dt,$$

т.е.

$$u = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Mu_t}{t} = \lambda - \mu + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mu_t P_0(t) dt,$$

$$u = \lambda - \mu + \text{cp} \cdot \mu_t e^{-\int_0^t (\lambda_z + \mu_z) dz} \int_0^t \mu_x e^{-\int_0^x (\lambda_z + \mu_z) dz} dx. \quad (3)$$

Используя неравенство

$$\text{cp} \cdot e^{-(\Lambda_t + M_t)} \int_0^t e^{(\Lambda_x + M_x)} dx \geq \frac{1}{\lambda + \mu},$$

с учетом (3) окончательно имеем

$$u \geq \lambda - \mu + \mu^2 \frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda^2}{\lambda + \mu}.$$

Полученный результат позволяет утверждать, что для реальной системы массового обслуживания показатель эффективности – среднее в единицу времени число потерь – значительно по сравнению с построенной нами системой через «усреднение» интенсивности входящего потока и интенсивности обслуживания,

Таким образом, если при расчете использовать прием «усреднения» для систем массового обслуживания с переменными параметрами, то это приведет к преувеличению результативности системы и появлению ошибок при оценке особенности ее работы.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005. 400 с.

G.S. Evdokimova
Smolensk State University

SYSTEM PERFORMANCE SERVICE WITH FAIL URES

Keywords: *variable parameters, procedure for receipt, averaging, system efficiency; average number of lost requests.*

Abstract. *The work proved: the use of «averaging» reception for mass service systems with variable parameters will entail a reevaluation of the performance of a particular system and the likelihood of making an error when analyzing the peculiarity of its work.*

ИНЦИДЕНТНОСТНЫЕ СТРУКТУРЫ С ПРЕЛОМЛЯЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Ключевые слова: *аффинные инцидентностные структуры (AI-структуры), трансляции AI-структур, П-транзитивные AI-структуры.*

Исследуются инцидентностные структуры $S' = \langle P', L'; I', \parallel' \rangle$, дополненные объектами, изменяющими оптические свойства структуры.

Описывая геометрию, Евклид выделил в отдельную группу аксиомы инцидентности. В качестве основных объектов он выбрал множество точек P' , множество прямых L' , отношение инцидентности I' , отношение параллельности \parallel' и описал в аксиомах свойства взаимосвязей между указанными объектами.

Таким образом, была выделена некоторая структура инцидентности с параллельностью

$$E = \langle P', L'; I', \parallel' \rangle,$$

характеризующая оптические свойства предметной области.

Если в предметную область поместить некоторый объект, например, прямоугольную пластинку, то набор прямых (набор лучей света) изменится. Также изменятся отношения инцидентности I' и параллельности \parallel' . Другими словами, изменится оптическая характеристика исследуемой предметной области.

В работе мы формулируем и решаем задачу об изменении инцидентностной структуры $S' = \langle P, L'; I', \parallel' \rangle$ при замене множества прямых L' на другое множество прямых L и иллюстрируем ее решение на конкретном примере.

Ниже мы обсуждаем только предметные области V' , в которых прямые ассоциируются с лучами света. Если в такую область V' поместить любой объект Ob , изменяющий траектории лучей света, оптические свойства новой области V могут существенно измениться. Интерес представляет задача определения, каким образом изменятся геометрические (оптические) свойства модели $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ новой предметной области V .

Представляется также важной обратная задача: какие объекты следует поместить в предметную область V' , чтобы получить новую предметную область V с заданными геометрическими (оптическими) свойствами.

Далее мы проиллюстрируем метод построения новой инцидентностной структуры с параллельностью на примере добавления в аффинную плоскость трансляций прямой M' , преломляющей все пересекающие M' прямые.

Пусть предметная область E – аффинная плоскость трансляций, инцидентностная структура с параллельностью $S' = \langle P', L'; I', \parallel \rangle$ – математическая модель плоскости E , $A = \langle A; T', 0', 1' \rangle$ – ассоциированная со структурой S' алгебра типа $\langle 3; 0, 0 \rangle$, координатирующая структуру S' .

Замечание 1. Так как алгебра $A = \langle A; T', 0', 1' \rangle$ ассоциирована с плоскостью трансляций, для нее выполняется ряд свойств:

- 1) $T'(a, b, c) = a \cdot b + c$;
- 2) $\langle A; +, \cdot, 0', 1' \rangle$ - поле,

где $a \cdot b = T(a, b, 0')$; $a + b = T(1', a, b)$.

Замечание 2. Для дальнейшего рассмотрения выберем плоскости трансляций, допускающие отношение порядка « $>$ » на координатирующей структуре $A = \langle A; T', 0', 1' \rangle$.

Выберем в S' произвольную прямую M' . Без ограничения общности можно считать, что в качестве прямой M' выбрана прямая с уравнением $x = 0'$. Зафиксируем элемент $k > 0'$ и каждую прямую с уравнением $y = T'(m, x, b)$ заменим прямой $y = T(m, x, b)$, где

$$T(m, x, b) = \begin{cases} T'(m, x, b), & \text{если } x \leq 0'; \\ T'(k \cdot m, x, b), & \text{если } x > 0'. \end{cases}$$

Заметим, что для плоскости трансляций

$$T(m, x, b) = \begin{cases} m \cdot x + b, & \text{если } x \leq 0'; \\ (k \cdot m) \cdot x + b, & \text{если } x > 0'. \end{cases}$$

Таким образом, геометрически указанное преобразование каждую прямую $y = m \cdot x + b$ преломляет при пересечении с прямой $x = 0'$, умножая угловой коэффициент m на k (рис. 1).

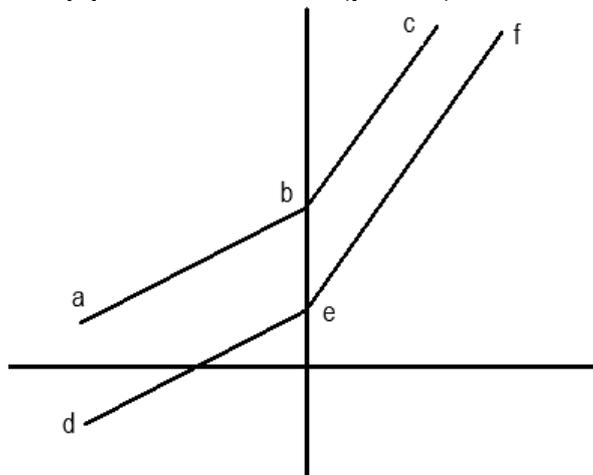


Рис. 1. Преломление прямых относительно оси Oy

После замены всех прямых указанным способом возникает новая инцидентностная структура $S = \langle P, L; I \rangle$. Определим в S отношение параллельности следующим образом:

$$x = a \parallel x = b \text{ при любых } a \text{ и } b.$$

$$y = T(m, x, b) \parallel y = T(n, x, c) \text{ тогда и только тогда, когда } m = n.$$

После добавления в S отношения параллельности получаем инцидентностную структуру с параллельностью $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$.

Подобно тому, как это было сделано в [1], для новой структуры несложно доказать следующие свойства:

Свойство 1. Структура $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ является аффинной плоскостью.

Свойство 2. Аффинная плоскость $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ является $\Pi_{x=0}$ -транзитивной.

Свойство 3. В алгебре $A = \langle A; T, 0, I \rangle$, ассоциированной с аффинной плоскостью S , выполняются свойства:

- 1) $T(a, b, c) = a \cdot b + c$;
- 2) $\langle A; + \rangle$ – группа.

Рассмотрим теперь, как изменятся оптические свойства инцидентностной структуры S при добавлении других преломляющих прямых.

Добавим, например, в $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ еще одну преломляющую прямую $x = 1$ с коэффициентом преломления s ($s > 0$).

Возможный вид дважды преломленных прямых представлен на рисунке 2.

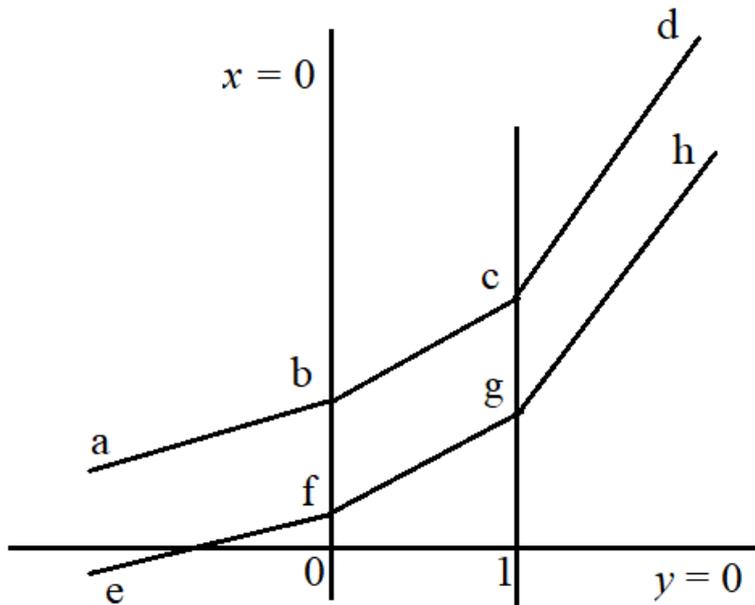


Рис. 2. Преломление относительно прямых $x = 0$ и $x = 1$

Заметим, что в новой инцидентностной структуре сохраняются свойства 1–3. В то же время большинство остальных свойств плоскости трансляций не сохранится.

В заключение отметим, что знание геометрии предметных областей может понадобиться при исследовании виртуальных миров. Размещая в виртуальных мирах различные объекты, можно изменять геометрию (оптические свойства) этих миров.

Можно, например, исследовать, как изменятся оптические свойства озера, если на его поверхность попадет пятно какой-либо жидкости, предсказать действия, необходимые для изменения геометрии новой предметной области.

В настоящее время вопрос об изменении оптических свойств инцидентностной структуры S в зависимости от размещения в S дополнительных объектов плохо изучен.

Литература

1. Емельченков Е. П. Инцидентностные структуры с дополнительными объектами // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. Вып.21. С. 269-273.

Е.П. Emelchenkov
Smolensk State University

INCIDENT STRUCTURES WITH REFRACTIVE LINES

Keywords: *affine incidence structures (AI-structures), translations of AI-structures, Π -transitive AI-structures.*

Abstract. *We study the incident structures $S' = \langle P', L'; I', \parallel' \rangle$ supplemented by objects that change the optical properties of the structure.*

А.М. Зуев
Смоленский государственный университет

УДК 511

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ СУММЫ ЦИФР НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА, ЗАДАННОЙ НА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Ключевые слова: *натуральное число, функция суммы цифр, значение функции на членах последовательности натуральных чисел.*

В данной статье продолжается исследование свойств функции суммы цифр натурального числа, начатое автором в [1] и [2].

Множество N натуральных чисел однозначно разбивается на попарно непересекающиеся классы N_q , $q = 1, 2, \dots, 9$, $N_q = \{q + 9n; n = 0, 1, 2, \dots\}$. При $q \neq 9$ получаем классы чисел, дающих при делении на 9 в остатке q . N_9 – класс чисел, делящихся на 9.

Пусть $S(n)$ – функция, сопоставляющая натуральному числу n сумму цифр в его десятичной записи.

Утверждение 1. Пусть $a_n = a_0 + 9pn$, $a_0 \in N$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

$S(a_0) = b_0$ – цифра. Тогда для любого $p \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ множество значений функции S на последовательности $\{a_n\}$ совпадает с классом $N_{b_0} = \{b_0 + 9k; k = 0, 1, 2, \dots\}$.

Доказательство. Обозначим через $E(S)$ множество значений функции S на последовательности $\{a_n\}$. По утверждению 1 из [1] m и $S(m)$ при делении на 9 имеют одинаковые остатки: $m \equiv S(m) \pmod{9}$. Из определения последовательности $\{a_n\}$ $a_n \equiv a_0 \pmod{9}$. Тогда $S(a_n) \equiv S(a_0) \pmod{9}$ и существует k , такое, что $S(a_n) = S(a_0) + 9k = b_0 + 9k$, то есть $S(a_n) \in N_{b_0}$. Поэтому $E(S) \subset N_{b_0}$. Достаточно доказать, что $N_{b_0} \subset E(S)$.

По условию $b_0 = S(a_0)$, то есть $b_0 \in E(S)$. Осталось показать, что $b_k \in E(S)$ для любого натурального k , $b_k = b_0 + 9k$.

1) $p \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$.

Пусть $b_k = b_0 + 9k$ – произвольное фиксированное число из N_{b_0} . Напомним, что мы рассматриваем $k \geq 1$.

Возьмем $m = 11 \dots 100 \dots 0$, где k единиц и 9 нулей. Число m делится на p : $m = m_1 \cdot p$. Тогда $a_0 + 9m = a_0 + 9pm_1 \in \{a_n\}$.

$S(a_0 + 9m) = S(a_0 + 99 \dots 900 \dots 0) = S(a_0) + S(99 \dots 9) = S(a_0) + 9k = b_0 + 9k = b_k$. Значит, $b_k \in E(S)$.

2) $p \in \{3, 6, 9\}$.

Пусть $b_k = b_0 + 9k$ – произвольное фиксированное число из N_{b_0} .

Возьмем $m = 9090 \dots 9000 \dots 0$, где k пар вида 90 и еще 9 нулей. Число m делится на p : пусть $m = m_1 p$. Тогда $a_0 + 9m = a_0 + 9pm_1 \in \{a_n\}$.

$S(a_0 + 9m) = S(a_0 + 8181 \dots 8100 \dots 0) = S(a_0) + S(8181 \dots 81) = S(a_0) + 9k = b_0 + 9k = b_k$. Значит, $b_k \in E(S)$.

3) $p = 7$.

Пусть $b_k = b_0 + 9k$ – произвольное фиксированное число из N_{b_0} .

Возьмем $m = 77 \dots 700 \dots 0$, где k семерок и 9 нулей. Число m делится на $p = 7$: пусть $m = m_1 p$. Тогда $a_0 + 9m = a_0 + 9pm_1 \in \{a_n\}$.

$$9 \cdot 77 \dots 7 = (10-1) \cdot 77 \dots 7 = 77 \dots 70 - 77 \dots 7 = 700 \dots 0 - 7 = 699 \dots 93.$$

Если в этой цепочке равенств изначально k семерок, то последнее число содержит $k-1$ девяток.

$$S(a_0 + 9m) = S(a_0 + 699 \dots 9300 \dots 0) = S(a_0) + S(699 \dots 93) = \\ = S(a_0) + 9k = b_0 + 9k = b_k. \text{ Значит, } b_k \in E(S).$$

Доказательство закончено.

Замечание 1. Уберем в формулировке утверждения 1 ограничение на a_0 . Тогда $E(S) = \{S(a_0) + 9n; n = 0, 1, 2, \dots\} \subset N_q$, если $a_0 \in N_q$.

Замечание 2. В доказательстве утверждения 1 число нулей при выборке m можно выбрать произвольно (не меньше 9). Поэтому для каждой прогрессии вида $a_n = a_0 + 9pn$, $a_0 \in N$, $p = 1, 2, \dots, 10$ каждое значение функция S принимает на бесконечном множестве членов этой прогрессии.

В [2] было доказано, что множество значений функции S на последовательности $a_n = 1 + 3n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) есть $N_1 \cup N_4 \cup N_7$.

Оказывается, это верно и для последовательности

$$a_n = 1 + 6n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Утверждение 2. Множество значений функции S на последовательности (1) есть объединение трех классов N_1, N_4, N_7 .

Доказательство. Множество, заданное (1), является объединением трех множеств вида: $b_n = 1 + 18n$, $c_n = 7 + 18n$, $d_n = 13 + 18n$.

По утверждению 1 множество значений функции S на последовательности $\{b_n\}$ есть N_1 , на последовательности $\{c_n\}$ – N_7 , на последовательности $\{d_n\}$ – $N_{S(13)} = N_4$.

Задача 1. Принимает ли функция S на последовательности $a_n = 1 + 7n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) значение 2?

Решение

Пусть $S(a_n) = 2$. $a_n = 2$ исключается. Предположим, что $a_n = 2 \cdot 10^k$ ($k = 1, 2, \dots$) и $a_n = 1 + 7n$. Тогда $1 + 7n = 2 \cdot 10^k$, $7n = 199 \dots 9$. Такому равенству при $k = 4$ удовлетворяет число $n = 2857$, $a_n = 20000$.

Задача 2. Для последовательности $\{a_n\}$ из предыдущей задачи найдите такой наименьший член a_n последовательности, что $S(a_n) = 2$.

Решение

Легко убедиться, что если $a_n = 2 \cdot 10^k$, то $a_n = 20000$ – наименьший член последовательности, такой, что $S(a_n) = 2$ (1999, 199, 19 не делятся

на 7). Рассмотрим теперь альтернативный случай, когда в десятичной записи a_n две единицы. Возможные числа по возрастанию: 11, 101, 110, 1001, 1010, 1100, $a_n - 1$ должно делиться на 7. Первым такому условию удовлетворяет число 1100. Оно и будет искомым (1100 меньше числа 20000, найденного при решении первой задачи).

Задача 3. Для последовательности $\{a_n\}$ из задачи 1 найдите такой наименьший член a_n последовательности, что $S(a_n) = 3$.

Решение

$a_n = 3$ исключается.

Среди двузначных чисел 12, 21, 30 нужных тоже нет ($a_n - 1$ не делится на 7). 102 и 111 также исключаются. А число 120 подходит: $120 - 1 = 7 \cdot 17, n = 17, a_{17} = 120$ и есть искомое число.

Утверждение 3. На последовательности $a_n = 1 + 7n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) функция S принимает любое натуральное значение.

Доказательство. Множество $\{a_n\}$ является объединением девяти множеств вида $a_0 + 63n$, где $a_0 \in \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57\}$. Для всех элементов этого множества (кроме 29 и 57) можно пользоваться утверждением 1. Тогда множество значений функции S на соответствующих последовательностях: $N_1, N_8, N_6, N_4, N_9, N_7, N_5$. С учетом замечания 1 множество значений функции S на последовательности $29 + 63n$ есть

$$\{S(29) + 9n; n = 0, 1, 2, \dots\} = \{11 + 9n; n = 0, 1, 2, \dots\} = N_2 \setminus \{2\}.$$

Множество значений функции S на последовательности $57 + 63n$ есть $\{S(57) + 9n; n = 0, 1, 2, \dots\} = \{12 + 9n; n = 0, 1, 2, \dots\} = N_3 \setminus \{3\}$.

Используя результаты рассмотренных выше задач, для членов исходной последовательности $S(a_{2857}) = S(2000) = 2, S(a_{17}) = S(120) = 3$.

Итак, для любого $m \in N$ существует n , такой, что $S(a_n) = m$. Таким образом, множество значений функции S на данной последовательности $\{a_n\}$ есть N .

Приведем также еще одно *доказательство* утверждения 3.

Пусть $p \in N$. Это число заведомо принадлежит одному из классов $\{m_0 + 7k; k = 0, 1, 2, \dots\}, m_0 \in \{1, 2, 3, \dots, 7\}$.

Убедимся, что в исходной последовательности $a_n = 1 + 7n, n = 0, 1, 2, \dots$ для любого $m_0 \in \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ найдется n_0 , такой, что $S(a_{n_0}) = S(1 + 7n_0) = m_0$.

$$m_0 = 1, n_0 = 0: S(a_{n_0}) = S(a_0) = S(1) = 1 = m_0;$$

$$m_0 = 2, n_0 = 2857: S(a_{n_0}) = S(a_{2857}) = S(20000) = 2 = m_0;$$

$$m_0 = 3, n_0 = 17: S(a_{n_0}) = S(a_{17}) = S(120) = 3 = m_0;$$

$$m_0 = 4, n_0 = 3: S(a_{n_0}) = S(a_3) = S(22) = 4 = m_0;$$

$$m_0 = 5, n_0 = 7: S(a_{n_0}) = S(a_7) = S(50) = 5 = m_0;$$

$$m_0 = 6, n_0 = 2: S(a_{n_0}) = S(a_2) = S(15) = 6 = m_0;$$

$$m_0 = 7, n_0 = 6: S(a_{n_0}) = S(a_6) = S(43) = 7 = m_0.$$

Рассмотрим семь последовательностей вида $c_n = a_{n_0} + 7n, n = 0, 1, 2, \dots$.
(Заметим, что $c_n = (1 + 7n_0) + 7n = 1 + 7(n_0 + n) \in \{a_n\}$.)

Для каждой такой последовательности рассмотрим последовательности вида $b_k = S(a_{n_0}) + 7k = m_0 + 7k$.

По утверждению 1 из [2] для любого b_k найдется такое c_n , что $S(c_n) = b_k$.

Итак, любое натуральное число p можно представить в виде b_k и в исходной последовательности найдется такое $a_m = c_n$, что $S(a_m) = S(c_n) = b_k = p$.

Таким образом, функция S на исходной последовательности $\{a_n\}$ принимает любое натуральное значение.

В заключение приведем несколько задач, иллюстрирующих полученные результаты.

1. Может ли сумма цифр члена последовательности $a_n = 123 + 9n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) равняться 12342?

Решение. $a_0 = 123, S(a_0) = 6$. По утверждению 1 множество значений функции S на элементах последовательности есть N_6 . Число $12342 = 9 \cdot 1371 + 3 \notin N_6$. Ответ: нет.

2. Приведите пример члена последовательности $a_n = 123 + 9n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), сумма цифр которого равняется 12345.

Решение. $12345 = 9 \cdot 1371 + 6 \in N_6$. Значит, такой член последовательности существует. Поступим аналогично доказательству утверждения 1. Пусть $m = 11 \dots 1000$, где 1371 единица и 3 нуля. Тогда $a_m = 123 + 9m$ – один из искомым примеров. $a_m = 99 \dots 9123$, где 1371 девятка.

3. Может ли сумма цифр члена последовательности $a_n = 432 + 54n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) равняться 543210?

Решение. $a_n = 432 + 9 \cdot 6n, a_0 = 432, S(a_0) = 9$. По утверждению 1 множество значений функции S на элементах последовательности есть N_9 . Число $543210 = 9 \cdot 60356 + 6 \notin N_9$. Ответ: нет.

4. Приведите пример члена последовательности $a_n = 432 + 54n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), сумма цифр которого равняется 543213.

Решение. $543213 = 9 \cdot 60356 + 9 \in N_9$. Значит, такой член последовательности существует. Возьмем $m = 9090 \dots 9000$, где 60356 пар вида 90 и еще 2 нуля (m делится на 6). Тогда $432 + 54 \cdot \frac{m}{6} = a_{\frac{m}{6}}$ – один из искомых примеров.

$$a_{\frac{m}{6}} = 432 + 9m = 8181 \dots 81432, \text{ где } 60356 \text{ пар вида } 81.$$

5. Может ли сумма цифр члена последовательности $a_n = 521 + 63n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) равняться 1234567?

Решение. $a_n = 521 + 9 \cdot 7n$, $a_0 = 521$, $S(a_0) = 8$. Значит, множество значений функции S на элементах последовательности есть N_8 . Число $1234567 = 9 \cdot 137174 + 1 \notin N_8$. Ответ: нет.

6. Приведите пример члена последовательности $a_n = 521 + 63n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), сумма цифр которого равняется 1234574.

Решение. $1234574 = 9 \cdot 137174 + 8 \in N_8$. Значит, такой член последовательности существует. Возьмем $m = 77 \dots 7000$, где 137174 семерки и 3 нуля (m делится на 7). Тогда $521 + 63 \cdot \frac{m}{7} = a_{\frac{m}{7}}$ – один из

искомых примеров.

$$a_{\frac{m}{7}} = 521 + 9m = 521 + 699 \dots 93000 = 699 \dots 93521, \text{ где } 137173 \text{ девятки.}$$

7. Может ли сумма цифр члена последовательности $a_n = 1 + 6n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) равняться 7654322?

Решение. $7654322 = 9 \cdot 850480 + 2 \in N_2$. Но по утверждению 2 сумма цифр любого члена данной последовательности принадлежит одному из трех других классов: N_1, N_4, N_7 . Ответ: нет.

8. Приведите пример члена последовательности $a_n = 1 + 6n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), сумма цифр которого равняется 7654321.

Решение. $7654321 = 9 \cdot 850480 + 1 \in N_1$. Значит, такой член последовательности существует. Возьмем $m = 11 \dots 10$, где 850480 единиц и 1 ноль (m делится на 2). Тогда $1 + 9m$ будет один из искомых примеров.

$$1 + 9m = 1 + 18 \cdot \frac{m}{2} = 1 + 6 \cdot \frac{3m}{2} \in \{a_n\}$$

Это число равно 99 ... 91, где 850480 девяток.

Литература

1. Зуев А.М. О некоторых свойствах суммы цифр натурального числа // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XX Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. С. 71–75.

2. Зуев А.М. Функция суммы цифр натурального числа, заданная на арифметических прогрессиях // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. С. 279–283.

A.M. Zuev
Smolensk State University

PROPERTIES OF THE FUNCTION OF THE SUM OF DIGITS OF A NATURAL NUMBER GIVEN ON AN ARITHMETIC PROGRESSION

Keywords: *natural number, function of the sum of digits, value of the function on the terms of the sequence of natural numbers.*

Abstract. *This article continues the study of the properties of the function of the sum of digits of a natural number, which was started by the author in [1] and [2].*

В.В. Карачик
Южно-Уральский государственный университет

УДК 517.956.223+517.575

О ФУНКЦИЯХ ГРИНА ЗАДАЧ НАВЬЕ И РИКЬЕ – НЕЙМАНА ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Ключевые слова: *Задача Навье, задача Рикье - Неймана, бигармоническое уравнение, функция Грина.*

В данной работе строятся функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в единичном шаре и приводится интегральное представление решения этих задач.

1. Введение. Одним из эффективных методов представления решений краевых задач для эллиптических уравнений является метод, основанный на построении функции Грина задачи. Много работ посвящено построению функции Грина в явном виде для различных классических краевых задач. Функции Грина бигармонических задач Дирихле, Неймана, Робина и др. в двумерном диске построены в [1] с помощью гармонических функций Грина задачи Дирихле, а в [2; 3] найдено явное представление гармонической функции Робина. Явная форма функции Грина в секторе для бигармонического и тригармонического уравнений приведена в работах [4; 5]. Статьи [6; 7]

посвящены построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре, а в работе [8] для бигармонического уравнения в единичном шаре найден оператор Грина задачи Дирихле при полиномиальных данных. В [9] дано явное представление функции Грина задачи Робина для уравнения Пуассона, а в [10] приведен явный вид функции Грина для 3-гармонического уравнения в единичном шаре. Условия разрешимости некоторых вариантов задач для бигармонического уравнения в шаре, исследованных в [1], были получены также в работах [11; 12], но без предоставления функций Грина. В работе [13] исследованы фредгольмовость и индекс обобщённой задачи Неймана.

В работе [14] было определено элементарное решение

$$E_4(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-2)(n-4)} |x-\xi|^{4-n}, & n > 4, n = 3 \\ -\frac{1}{4} \ln |x-\xi|, & n = 4 \\ \frac{|x-\xi|^2}{4} (\ln |x-\xi| - 1), & n = 2 \end{cases},$$

бигармонического уравнения и доказано, что при $n \geq 3$ функция вида

$$G_4(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4\left(\frac{x}{|x|}, \frac{\xi}{|\xi|}\right) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} E\left(\frac{x}{|x|}, \frac{\xi}{|\xi|}\right)$$

является функцией Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре S , удовлетворяющая равенствам $G_4(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = \partial G_4(x, \xi) / \partial \nu|_{\xi \in \partial S} = 0$ при $x \in S$ и симметричной $G_4(x, \xi) = G_4(\xi, x)$ при $x, \xi \in S$.

2. Интегральное представление. Приведем интегральное представление функции класса $u \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область с кусочно гладкой границей ∂D .

Теорема 1. Для функции $u \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$ имеет место следующее интегральное представление:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \left(- \int_{\partial D} E_4(x, \xi) \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} ds_\xi + \int_{\partial D} \frac{\partial E_4(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta u ds_\xi - \int_{\partial D} \Delta_\xi E_4(x, \xi) \frac{\partial u}{\partial \nu} ds_\xi + \int_{\partial D} \frac{\partial \Delta_\xi E_4(x, \xi)}{\partial \nu} u(\xi) ds_\xi + \int_D E_4(x, \xi) \Delta^2 u(\xi) d\xi \right),$$

где $\omega_n = |\partial S|$ – площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n , ν – внешняя единичная нормаль к ∂D .

3. Задача Навье. Следующие ниже задачи будем рассматривать в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

Задача Навье [15] (в работе [1] она называется также задачей Дирихле-2) заключается в нахождении функции $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$,

являющейся решением следующей граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad u|_{\partial S} = \varphi_0(\xi), \quad \Delta u|_{\partial S} = \varphi_1(\xi), \quad \xi \in \partial S. \quad (1)$$

Рассмотрим функцию вида

$$G_4^r(x, \xi) = E_4(x, \xi) + g_4^r(x, \xi),$$

где $g_4^r(x, \xi) \in C^3(\bar{S})$ - бигармоническая функция по переменным $x, \xi \in S$, такая, что

$$G_4^r(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = \Delta_\xi G_4^r(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$$

при $x \in S$. Назовем функцию $G_4^r(x, \xi)$ функцией Грина задачи Навье (6). Обозначим также

$$E_4^r(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E(y, \xi) dy.$$

Теорема 2. *Функция Грина $G_4^r(x, \xi)$ задачи Навье (1) находится по формуле*

$$G_4^r(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy,$$

где $G_2(x, y)$ - функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Следствие. Функция $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$, являющаяся решением задачи Навье (1), может быть представлена в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial \Delta_\xi G_4^r(x, \xi)}{\partial \nu} \varphi_0(\xi) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial G_4^r(x, \xi)}{\partial \nu} \varphi_1(\xi) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_S G_4^r(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Если $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ и $f \in C^1(\bar{S})$, то функция $u(x)$ из (2) является решением задачи Навье (1).

3. Задача Рикье–Неймана. Задача Рикье–Неймана [16] (в [1] она называется также задачей Неймана-2) заключается в нахождении функции $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$, являющейся решением следующей граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_0(\xi), \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_1(\xi), \quad \xi \in \partial S. \quad (3)$$

Сначала несколько замечаний по задаче Неймана. В работе [17] была построена функция Грина $\mathcal{N}(x, \xi) = E(x, \xi) - E_0(x, \xi)$ задачи Неймана для уравнения Пуассона в шаре S , где гармоническая функция $E_0(x, \xi)$ записывается в форме

$$E_0(x, \xi) = \int_0^1 \left(\hat{E} \left(\frac{x}{|x|}, t|x|\xi \right) + 1 \right) \frac{dt}{t}$$

и $\hat{E}(x, \xi) = \Lambda_x E(x, \xi)$. Здесь $\Lambda_x u = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{N}(x, \xi)$ симметрична.

Теорема 3. *Пусть $f \in C^1(\bar{S})$ и $\psi \in C(\partial S)$, тогда решение задачи Неймана*

$$\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \psi$$

при условии

$$\int_{\partial S} \psi(\xi) ds_\xi = \int_S f(\xi) d\xi$$

с точностью до константы можно записать в виде

$$v_\psi(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}(x, \xi) \psi(\xi) ds_\xi - \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Теорема 4. Функцию Грина $G_4^m(x, \xi)$ задачи Рикье–Неймана (3) можно представить в виде

$$G_4^m(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \left(\int_S \mathcal{N}(x, y) \mathcal{N}(y, \xi) dy - \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}(x, y) dy \int_S \mathcal{N}(y, \xi) dy \right),$$

где $\tau_n = |S|$. Функция Грина $G_4^m(x, \xi)$ симметрична.

Теорема 5. Пусть функция $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$ является решением задачи Рикье–Неймана (3), тогда она может быть представлена в виде

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \Delta_\xi G_4^m(x, \xi) \varphi_0(\xi) ds_\xi - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} G_4^m(x, \xi) \varphi_1(\xi) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_S G_4^m(x, \xi) f(\xi) d\xi + C. \quad (4)$$

Если $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ и $f \in C^1(\bar{S})$, то функция $u(x)$ из (4) - решение задачи Рикье–Неймана (3) при условии $\int_{\partial S} \varphi_1(\xi) ds_\xi = \int_S f(\xi) d\xi$.

Замечание. Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Рикье–Неймана для полигармонического уравнения было получено в [17,] и это условие имеет вид $\int_{\partial S} \varphi_1(\xi) ds_\xi = \int_S f(\xi) d\xi$.

Пример. Пусть $\{H_k^{(i)}(x) : i=1, \dots, h_k, k \in \mathbb{N}_0\}$ - полная система однородных степени $k \in \mathbb{N}_0$ ортогональных на ∂S сферических гармоник, нормированных так, что $\int_{\partial S} (H_k^{(i)}(\xi))^2 ds_\xi = \omega_n$, и $h_k = \frac{2k+n-2}{n-2} \binom{k+n-3}{n-3}$ - размерность базиса однородных гармонических многочленов степени k . Найдем решения рассмотренных выше однородных задач (нулевые значения на границе) для неоднородного бигармонического уравнения в шаре при $f(x) = |x|^{2l} H_m^{(j)}(x)$, $l \in \mathbb{N}_0$.

1. По теореме 2 функция Грина задачи Навье $G_4^r(x, \xi)$ имеет вид

$$G_4^r(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy.$$

Вычисления показывают, что

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_4^r(x, \xi) |\xi|^{2l} H_m^{(j)}(\xi) d\xi = \left(\frac{|x|^{2l+4} - 1}{C_{l,m} C_{l+1,m}} + \frac{1 - |x|^2}{C_{l,m} C_{0,m}} \right) H_m^{(j)}(x),$$

где $C_{l,m} = (2l+2)(2l+2m+n)$.

2. По теореме 4 функция Грина $G_4^m(x, \xi)$ имеет вид

$$G_4^m(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \left(\int_S \mathcal{N}(x, y) \mathcal{N}(y, \xi) dy - \frac{n}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}(x, y) dy \cdot \int_S \mathcal{N}(y, \xi) dy \right).$$

Вычисления показывают, что при $m > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_n} \int_S G_4^m(x, \xi) |\xi|^{2l} H_m^{(j)}(\xi) d\xi = \\ & = \left(\frac{|x|^{2l+4} - (2l+4+m)/m}{C_{l,m} C_{l+1,m}} - \frac{2l+2+m}{m C_{l,m}} \frac{|x|^2 - (m+2)/m}{C_{0,m}} \right) H_m^{(j)}(x). \end{aligned}$$

Литература

1. Begehr H. Biharmonic Green functions // *Le Matematiche*. 2006. V. LXI. P. 395-405.
2. Begehr H., Vaitekhovich T. Modified harmonic Robin function // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2013. Vol. 58, No. 4. P. 483-496.
3. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // *Adv. Pure Appl. Math.* 2015. 6 (3). P. 163-172.
4. Ying Wang, Liuqing Ye. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // *Complex Variables Elliptic Equ.* 2013. Vol. 58, No 1. P. 7–22.
5. Ying Wang Tri-harmonic boundary value problems in a sector // *Complex Variables Elliptic Equ.* 2014. Vol.59, No. 5. P. 732-749.
6. Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m // *Palermo Rend.* 1905. Vol. 20. P. 97-135.
7. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // *Complex Var. Elliptic Equ.* 2008. Vol. 53. P. 177-183.
8. Карачик, В.В., Антропова, Н.А. Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // *Дифференциальные уравнения*. 2013. Т. 49, № 2. С. 250-254.
9. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // *Advances in Pure and Applied Mathematics*. 2019. Vol. 10, No 3. P. 203-214.
10. Карачик В.В. Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // *Матем. заметки*. 2020. Т. 107, № 1. С. 87-105.
11. Карачик В.В., Торбек Б.Т. О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения // *Матем. заметки*. 2017. Т. 102, № 1. С. 39–51.
12. Карачик В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // *Математические труды*. 2016. 19(2), С. 86-108.
13. Солдатов А.П. О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана // *Дифференциальные уравнения*. 2020. Т. 56, № 2. С. 217-225.
14. Karachik V.V. Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2019. Vol. 64, No 9. P. 1500–1521.
15. Sweers G.A survey on boundary conditions for the biharmonic // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2009. 54. P. 79-93.
16. Карачик В.В. Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // *Дифференциальные уравнения*. 2018. Т. 54:5. С. 653-662.
17. Карачик В.В., Турметов Б.Х. О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона // *Матем. тр.* 2018. 21(1). С. 17-34.

V.V. Karachik
South Ural State University

ON GREEN'S FUNCTIONS FOR THE NAVIER AND RIQUIER– NEUMANN PROBLEMS FOR BIHARMONIC EQUATION IN A BALL

Keywords: *Navier problem, Riquier–Neumann problem, Green's function, biharmonic equation.*

Abstract. *In the paper the Green's functions of the Navier and Riquier–Neumann problems for the biharmonic equation in the unit ball are constructed and integral representations of solutions to these problems are given.*

Е. Кирьяцкий, Э. Кирьяцкий
Вильнюсский технический университет им. Гядиминаса

УДК 517.54

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Ключевые слова: *единичный круг, однолиственная функция, выпуклая функция, дифференциальный оператор, дифференциальное уравнение.*

В статье изучаются некоторые свойства специального линейного дифференциального оператора, определенного на различных классах аналитических в комплексной области функций. Устанавливаются точные оценки модулей, решается дифференциальное уравнение, описаны также некоторые свойства однолистных в единичном круге функций.

1. Постановка задачи. В данной статье ставятся и решаются задачи по изучению свойств линейного дифференциального оператора

$$\Psi_n(f) = \frac{(\omega-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{f^{(k+1)}(\omega)}{(k+1)!} (\omega-1)^{k+1}, \quad (1)$$

заданного на классах однолистных функций. Особое внимание уделено экстремальным свойствам данного оператора и соответствующим экстремальным свойствам однолистных функций, на которых данный оператор определен. Заметим, что оператор может служить мостиком, соединяющим с помощью дробно линейного преобразования однолистные в единичном круге функции с однолистными в полуплоскости функциями.

2. Обозначения и определения.

$K_1(E)$ – класс однолистных в E функций $f(\omega)$.

$\tilde{K}_1(E)$ – класс однолистных в E функций $f(\omega)$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

$\tilde{K}_1^\nu(E)$ – подкласс класса $\tilde{K}_1(E)$, отображающих круг E на выпуклую область.

В классе $\tilde{K}_1(E)$ введены и используются функции

$$g_1(\omega; \alpha) = \frac{\omega}{1 - e^{i\alpha}\omega}, \quad g_2(\omega; \alpha) = \frac{\omega}{(1 - e^{i\alpha}\omega)^2}, \quad g_{2,b}(\omega; \alpha) = \frac{\omega(1 + b\omega)}{(1 - e^{i\alpha}\omega)^2},$$

$$|e^{i\alpha} + 2b| \leq 1.$$

3. Линейное дифференциальное уравнение Эйлера.

Теорема 1. *Общее решение дифференциального уравнения*

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{f^{(k+1)}(\omega)}{(k+1)!} (\omega-1)^{k+1} = 0 \quad (2)$$

имеет вид:

$$f(\omega) = c_0 + \frac{c_1}{1-\omega} + \dots + \frac{c_{n-1}}{(1-\omega)^{n-1}}. \quad (3)$$

Доказательство. Уравнение (2) является классическим линейным дифференциальным уравнением Эйлера. Ищем частное решение в виде $f(\omega) = (1-\omega)^{-m}$. Подставляя в уравнение (2), приходим к характеристическому уравнению

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k C_{k+m}^{k+1} = 0,$$

корнями которого будут числа $m = 0, 1, \dots, (n-1)$. Отсюда следует (3).

Замечание. Среди функций, удовлетворяющих уравнению (1), однолиственными могут быть только те функции, которые записываются в виде

$$f(\omega) = c_0 + \frac{c_1}{1-\omega} + \frac{c_2}{(1-\omega)^2}. \quad (4)$$

Это объясняется тем, что должно выполняться неравенство $1 \leq n \leq 3$. В противном случае функция $f(\omega)$ будет константой или рациональной функцией, имеющей полюс в граничной точке $\omega = 1$ кратности выше второй, что невозможно для однолистных функций.

Ясно, что c_0 не мешает однолиственности функции. Если $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ или $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$, то функция (4) является однолистной в E . Пусть теперь $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Тогда для того, чтобы функция (4) была

однолистной в E , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Re}\{c_1/c_2\} \geq -1/2$. В самом деле, сделаем в (4) замену $z = 1/(1-\omega)$. Тогда получим многочлен второй степени $\varphi(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2$, определенный в правой полуплоскости $\operatorname{Re}z > 1/2$. Для того чтобы функция $\varphi(z)$ была однолистной в полуплоскости $\operatorname{Re}z > 1/2$, необходимо и достаточно, чтобы первая разделенная разность $[\varphi(z); z_0, z_1] \neq 0$ для любых различных z_0, z_1 , взятых в этой полуплоскости. Нетрудно понять, что утверждение эквивалентно указанному выше условию.

Используя сказанное в замечании 1, легко прийти к следующему утверждению.

Теорема 2. Функции

$$g_1(\omega; 0), g_2(\omega; 0), g_{2,b}(\omega; 0), |1+2b| \leq 1, \quad (5)$$

и только они принадлежат классу $\tilde{K}_1(E)$ и удовлетворяют уравнению (2).

3. Оценка модулей.

Теорема 3. Пусть на классе $\tilde{K}_1(E)$ оператор

$$\Psi_n(f) = \frac{(\omega-1)^{n+1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{f^{(k+1)}(\omega)}{(k+1)!} (\omega-1)^k. \quad (6)$$

Справедливы точные оценки

$$0 \leq |\Psi_n(f)| \leq \frac{n+1}{2} \left(\frac{1+|\omega|}{1-|\omega|} \right)^{n+2}, \quad \forall f(\omega) \in \tilde{K}_1(E), n=1,2,3,\dots \quad (7)$$

Знак равенства в правой части (7) реализуется только функцией Кебе

$$g_2(\omega; \pi), \text{ если } \omega = -r, \text{ где } 0 \leq r < 1. \quad (8)$$

Знак равенства в левой части (7) реализуется только функциями

$$g_1(\omega; 0), g_2(\omega; 0), |2a+1| \leq 1. \quad (9)$$

Лемма 1. Справедливы точные оценки

$$\frac{|f^{(m)}(\omega)|}{m!} \leq \frac{m+|\omega|}{(1-|\omega|)^{m+2}}, \quad \forall f(\omega) \in \tilde{K}_1(E), m=0,1,2,\dots \quad (10)$$

Знак равенства в (10) реализуется только функциями Кебе

$$g_2(\omega; \alpha), 0 \leq \alpha < 2\pi. \quad (11)$$

В самом деле, запишем функцию $f(\omega) \in \tilde{K}_1(E)$ в виде

$$f(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \omega^p, \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

По теореме Бранжа [1] имеем точные оценки

$$|a_p| \leq p, \quad p = 2, 3, 4, \dots \quad (12)$$

Далее, записываем формулу

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m a_{m+p} \omega^p. \quad (13)$$

Пользуясь оценкой (12) и формулой (13), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} |f^{(m)}(\omega)| &= \left| \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m a_{m+p} \omega^p \right| \leq \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m |a_{m+p}| |\omega|^p \leq \\ &\leq \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m (m+p) |\omega|^p = \frac{m + |\omega|}{(1 - |\omega|)^{m+2}}. \end{aligned}$$

Знак равенства в (10) действительно реализуется функцией (11), так как

$$\frac{g_2^{(m)}(\omega; \alpha)}{m!} = \frac{m + e^{i\alpha} \omega}{(1 - e^{i\alpha} \omega)^{m+2}} e^{i(m-1)\alpha}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Лемма 2. *Справедливы два очевидных равенства*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k k \left(\frac{1 + |\omega|}{1 - |\omega|} \right)^k &= 2^{n-2} (n-1) \frac{1 + |\omega|}{(1 - |\omega|)^{n-1}}, \\ \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{1 + |\omega|}{1 - |\omega|} \right)^k &= \frac{2^{n-1}}{(1 - |\omega|)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3. Опираясь на леммы 1, 2, получим

$$\begin{aligned} |\Psi_n(\omega)| &\leq \frac{(1 + |\omega|)^{n+1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{|f^{(k+1)}(\omega)|}{(k+1)!} (1 + |\omega|)^k \leq \\ &\leq \frac{(1 + |\omega|)^{n+1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{k+1+|\omega|}{(1-|\omega|)^{k+3}} (1 + |\omega|)^k = \\ &= \frac{(1 + |\omega|)^{n+1}}{2^{n-1} (1 - |\omega|)^3} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k k \left(\frac{1 + |\omega|}{1 - |\omega|} \right)^k + \frac{(1 + |\omega|)^{n+2}}{2^{n-1} (1 - |\omega|)^3} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{1 + |\omega|}{1 - |\omega|} \right)^k = \\ &= \frac{n+1}{2} \left(\frac{1 + |\omega|}{1 - |\omega|} \right)^{n+2}. \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) второе неравенство записано нестрогим. Благодаря лемме 1 заключаем, что экстремальные функции, реализующие знак равенства, следует искать среди функции Кебе вида (11), так как в противном случае второе неравенство превращается в строгое неравенство, т.е. знак

равенства не будет выполняться. Подставим какую-либо функцию из (11) в (6). Тогда получим

$$\Psi_n(g_2(\omega; \alpha)) = \frac{(\omega-1)^{n+1} (1-e^{i\alpha})^{n-2} \left((\omega-1)e^{i\alpha}(n-1) + (1+e^{i\alpha}\omega)(1-e^{i\alpha}) \right)}{2^{n-1} (1-e^{i\alpha}\omega)^{n+2}}.$$

Но легко доказать, что

$$|\Psi_n(g_2(\omega; \alpha))| \leq |\Psi_n(g_2)| = \frac{(n+1)}{2} \left(\frac{1+|\omega|}{1-|\omega|} \right)^{n+2}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

Кроме того,

$$\Psi_n(g_2(\omega; \pi)) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{2} \left(\frac{1-\omega}{1+\omega} \right)^{n+2}.$$

Отсюда следует, что знак равенства в (7) реализуется функцией $g_2(\omega; \pi)$ при $\omega = -r$, $0 \leq r < 1$. Тем самым правая часть (7) доказана. Применяя теорему 2, убеждаемся в том, что знак равенства в левой части (7) действительно реализуется только функциями (5).

Теорема 4. Пусть на классе $\tilde{K}_1^v(E)$ задан оператор

$$\Psi_n(f) = \frac{(\omega-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{f^{(k+1)}(\omega)}{(k+1)!} (\omega-1)^{k+1}. \quad (15)$$

Тогда справедливы точные оценки

$$0 \leq |\Psi_n(f)| \leq \left(\frac{1+|\omega|}{1-|\omega|} \right)^{n+1}, \quad \forall f(\omega) \in \tilde{K}_1^v(E), \quad n=1,2,3,\dots \quad (16)$$

Знак равенства в правой части (16) реализуется функцией $g_1(\omega; \pi)$, если $\omega = -r$, где $0 \leq r < 1$.

Знак равенства в левой части (16) реализуется функцией $g_1(\omega; 0)$.

Лемма 3. Справедливы точные оценки

$$\frac{|f^{(m)}(\omega)|}{m!} \leq \frac{1}{(1-|\omega|)^{m+1}}, \quad \forall f(\omega) \in \tilde{K}_1^v(E), \quad m=0,1,2,\dots \quad (17)$$

Знак равенства в (17) реализуется только функциями

$$g_1(\omega; \alpha), \quad 0 \leq \alpha < 2\pi. \quad (18)$$

В самом деле, запишем функцию $f(\omega) \in \tilde{K}_1^v(E)$ в виде

$$f(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \omega^p, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Для выпуклых однолистных функций известны точные оценки [2]

$$|a_p| \leq 1, \quad p = 2,3,4,\dots \quad (19)$$

Далее, записываем формулу

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m a_{m+p} \omega^p. \quad (20)$$

Пользуясь оценкой (19) и формулой (20), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \left| f^{(m)}(\omega) \right| &= \left| \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m a_{m+p} \omega^p \right| \leq \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m |a_{m+p}| |\omega|^p \leq \\ &\leq \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m |\omega|^p = \frac{1}{(1-|\omega|)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Знак равенства в (17) реализуется функцией (18), так как

$$\frac{g_1^{(m)}(\omega; \alpha)}{m!} = \frac{e^{i(m-1)\alpha}}{(1-e^{i\alpha}\omega)^{m+1}}, \quad m=1,2,3,\dots$$

Доказательство теоремы 4. Опираясь на леммы 3, получим

$$\begin{aligned} |\Psi_n(f)| &\leq \frac{(1+|\omega|)^{n+1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{|f^{(k+1)}(\omega)|}{(k+1)!} (1+|\omega|)^k \leq \\ &\leq \frac{(1+|\omega|)^{n+1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{1}{(1-|\omega|)^{k+2}} (1+|\omega|)^k = \left(\frac{1+|\omega|}{1-|\omega|} \right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (21)$$

В (21) второе неравенство записано нестрогим. Благодаря лемме 3, заключаем, что экстремальные функции, реализующие знак равенства, следует искать среди функции вида (18), так как в противном случае второе неравенство превращается в строгое неравенство, т.е. знак равенства не будет выполняться. Подставим какую-либо функцию из (18) в (15). Тогда получим

$$\Psi_n(g_1(\omega; \alpha)) = \left(\frac{1-e^{i\alpha}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{\omega-1}{1-e^{i\alpha}\omega} \right)^{n+1}.$$

В частности,

$$\Psi_n(g_1(\omega; \pi)) = (-1)^{n+1} \left(\frac{1-\omega}{1+\omega} \right)^{n+1}.$$

Отсюда следует, что знак равенства в (16) реализуется функцией $g_1(\omega; \pi)$ при $\omega = -r$, $0 \leq r < 1$. Тем самым правая часть (16) доказана. Применяя теорему 2, убеждаемся в том, что знак равенства в левой части (16) действительно реализуется только функцией $g_1(\omega; 0)$.

Литература

1. Александров И.А. Доказательство Л. де Бранжом гипотезы И.М. Милина и гипотезы Л. Бибераха // Сибирск. матем. ж. 1987. Т. 26. С. 7–20.
2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972. С. 430–432.

E.E. Kirjackis, E.G. Kiriyatzkii
Vilnius Gediminas Technical University

ON PROPERTIES OF ONE LINEAR DIFFERENTIAL OPERATOR

Keywords: *unit circle, univalent function, convex function, differential operator, differential equation.*

Abstract. *In this article, we study some properties of a special linear differential operator defined on various classes of analytic functions in the complex domain. Exact estimates of the moduli are established, the differential equation is solved, and some properties of univalent functions in the unit disc are given.*

Е. Кирьяцкий, Э. Кирьяцкий
Вильнюсский технический университет им. Гядиминаса

УДК 517.54

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ, ЗАДАННОМ НА КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *полуплоскость, однолистная функция, выпуклая функция, дифференциальный оператор, дифференциальное уравнение.*

В данной статье изучаются некоторые свойства специального линейного дифференциального оператора, определенного на различных классах аналитических в комплексной области функций. Устанавливаются точные оценки модулей, решается дифференциальное уравнение, описаны также некоторые свойства однолистных в полуплоскости функций.

1. Постановка задачи. Обозначения и определения. Пусть: Π – правая полуплоскость $\operatorname{Re}\{z\} > 0$, $K_1(\Pi)$ – класс однолистных в Π функций $\varphi(z)$. $\tilde{K}_1(\Pi)$ – класс однолистных в Π функций $\varphi(z)$, $\varphi(1)=0$, $\varphi'(1)=1$. Пусть: E – единичный круг $|\omega| < 1$, $K_1(E)$ – класс однолистных в E функций $f(\omega)$, $\tilde{K}_1(E)$ – класс однолистных в E функций $f(\omega)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$.

Между функциями $\varphi(z)$ и $f(\omega)$, взятых из классов $\tilde{K}_1(\Pi)$ и $\tilde{K}_1(E)$, устанавливается взаимно однозначное соответствие по формуле

$$\varphi(z) = 2f(\omega), \text{ где } z = (1 + \omega) / (1 - \omega) \text{ или } \omega = (z - 1) / (z + 1). \quad (1)$$

Назовем $\varphi(z)$ и $f(\omega)$ родственными функциями, а $\tilde{K}_1(\Pi)$ и $\tilde{K}_1(E)$ – родственными классами. Введем в рассмотрение два родственных оператора:

$$H_n(\varphi) = \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{\varphi^{(k+1)}(z)}{(k+1)!} (z+1)^{k+1}, \quad (2)$$

$$\Psi_n(f) = \frac{(\omega-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{f^{(k+1)}(\omega)}{(k+1)!} (\omega-1)^{k+1}. \quad (3)$$

В данной статье мы сосредоточим свое внимание в основном на свойствах оператора (2). Ставятся и решаются задачи, связанные с экстремальными свойствами оператора и с экстремальными свойствами однолистных функций на которых он определен. Заметим, что оператор может служить мостиком, соединяющим с помощью дробно линейного преобразования однолистные в единичном круге функции с однолистными в полуплоскости функциями.

2. Линейное дифференциальное уравнение.

Теорема 1. *Общее решение дифференциального уравнения*

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{\varphi^{(k+1)}(z)}{(k+1)!} (z+1)^{k+1} = 0 \quad (4)$$

имеет вид:

$$\varphi(z) = c_0 + c_1(z+1) + \dots + c_{n-1}(z+1)^{n-1}. \quad (5)$$

Доказательство. Уравнение (4) является классическим линейным дифференциальным уравнением Эйлера. Ищем частное решение в виде $\varphi_m(z) = (z+1)^m$. Подставляя в (4), получим характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k C_{k+m}^{k+1} = 0,$$

корнями которого будут числа $m = 0, 1, \dots, (n-1)$. Отсюда следует (5).

Замечание. Среди функций, удовлетворяющих уравнению (5), однолистными могут быть только те функции, которые записываются в виде

$$\varphi(z) = c_0 + c_1(z+1) + c_2(z+1)^2. \quad (6)$$

Это объясняется справедливостью неравенства $1 \leq n \leq 3$. В противном случае функция $\varphi(z)$ будет константой или многочленом степени выше второй, что невозможно [1] для однолистных в правой полуплоскости многочленов.

Изучим многочлен $\varphi(z)$ из (6). Ясно, что c_0 не мешает однолистности. Очевидно, что если $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ или $c_1 \neq 0, c_2 = 0$, то $\varphi(z) \in K_1(\Pi)$. Пусть $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$. Тогда, для того чтобы $\varphi(z) \in K_1(\Pi)$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Re}\{c_1 / c_2\} \geq -2$. Для нахождения среди многочленов (6) тех, которые принадлежат классу $\tilde{K}_1(\Pi)$, составляем тождество

$$c_0 + c_1(z+1) + c_2(z+1)^2 \equiv (z-1) + a_2(z-1)^2. \quad (7)$$

Отсюда находим, что $c_0 = -2 + 4a_2, c_1 = 1 - 2a_2, c_2 = a_2$. Далее, легко убедиться в том, что, для того чтобы многочлен, стоящий в правой части тождества (8), одновременно принадлежал классу $\tilde{K}_1(\Pi)$ и удовлетворял дифференциальному уравнению (4), необходимо и достаточно, чтобы он имел вид: $h_1(z) = z - 1$, если $a_2 = 0, h_2(z) = (z - 1) + a_2(z - 1)^2$, $\operatorname{Re}\{1/a_2\} > 2$, если $a_2 \neq 0$. В итоге мы пришли к следующему утверждению

Теорема 2. *Функции $h_1(z), h_2(z)$ и только они одновременно принадлежат классу $\tilde{K}_1(\Pi)$ и удовлетворяют дифференциальному уравнению Эйлера (4).*

3. Оценка модулей. Выше мы писали о родственности двух функций, классов, операторов. С помощью дробно линейного преобразования (1) между операторами (2) и (3) установлено взаимно однозначное соответствие.

Теорема 3. Операторы $H_n(\varphi)$ и $\Psi_n(\varphi)$ связывают между собой производные функций $\varphi(z)$ и $f(\omega)$ следующим образом:

$$\frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} = \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{\varphi^{(k+1)}(z)}{(k+1)!} (z+1)^{k+1}, \quad \omega = (z-1)/(z+1), \quad (8)$$

$$\frac{\varphi^{(n)}(z)}{n!} = \frac{(\omega-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{f^{(k+1)}(\omega)}{(k+1)!} (\omega-1)^{k+1}. \quad z = (1+\omega)/(1-\omega). \quad (9)$$

Доказательство теоремы 3 проводится с помощью обычных вычислений, при этом используются дробно линейные преобразования (1).

Можно использовать теорему 3 для установления зависимости между коэффициентами разложения функций $\varphi(z), f(\omega)$, принадлежащих классам $\tilde{K}_1(\Pi), \tilde{K}_1(E)$, в степенные ряды

$$\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p (z-1)^p, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1. \quad (10)$$

$$f(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \omega^p, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \quad (11)$$

Следствие 1. Взаимозависимость между коэффициентами b_p и a_p , $p = 1, 2, 3, \dots$ функций $\varphi(z)$, $f(\omega)$ заключена в формулах

$$a_p = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k C_{p-1}^k b_{k+1}, \quad (12)$$

$$b_p = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+1+p} C_{p-1}^k a_{k+1}. \quad (13)$$

Для доказательства следствия достаточно в формулах (8), (9) положить $\omega = 0$ и $z = 1$. Пользуясь формулами (10), (11), (12), (13), приведем несколько примеров.

$$1) \quad a_1 = b_1 = 1. \quad 2) \quad a_2 = 1 + 2b_2, \quad b_2 = \frac{1}{2}(-1 + a_2).$$

$$2) \quad a_3 = 1 + 4b_2 + 4b_3, \quad b_3 = \frac{1}{4}(1 - 2a_2 + a_3).$$

Теорема 4. Пусть на классе $\tilde{K}_1(\Pi)$ задан оператор

$$H_n(\varphi) = \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{\varphi^{(k+1)}(z)}{(k+1)!} (z+1)^{k+1}. \quad (14)$$

Справедливы оценки

$$0 \leq |H_n(\varphi)| \leq \frac{n + \left| \frac{z-1}{z+1} \right|}{\left(1 - \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \right)^{n+2}}, \quad \forall \varphi(z) \in \tilde{K}_1(\Pi), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Знак равенства в правой части (15) реализуется функцией

$$h_3(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2} (z-1)^n, \quad \text{если } z = \frac{1-r}{1+r}, \quad \text{где } 0 \leq r < 1.$$

Для доказательства теоремы 4 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Справедливы оценки

$$\frac{|f^{(m)}(\omega)|}{m!} \leq \frac{m + |\omega|}{(1 - |\omega|)^{m+2}}, \quad \forall f(\omega) \in \tilde{K}_1(E), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Знак равенства в (16) реализуется только функциями Кебе

$$g(\omega; \alpha) = \frac{\omega}{(1 - e^{i\alpha} \omega)^2}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi. \quad (17)$$

В самом деле, запишем функцию $f(\omega) \in \tilde{K}_1(E)$ в виде

$$f(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \omega^p, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

По теореме Бранжа [2] имеем точные оценки

$$|a_p| \leq p, \quad p = 2, 3, 4, \dots \quad (18)$$

Далее, записываем формулу

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m a_{m+p} \omega^p. \quad (19)$$

Пользуясь оценкой (18) и формулой (19), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} |f^{(m)}(\omega)| &= \left| \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m a_{m+p} \omega^p \right| \leq \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m |a_{m+p}| |\omega|^p \leq \\ &\leq \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m (m+p) |\omega|^p = \frac{m + |\omega|}{(1 - |\omega|)^{m+2}}. \end{aligned}$$

Знак равенства в (16) действительно реализуется функцией (17), так как

$$\frac{g^{(m)}(\omega; \alpha)}{m!} = \frac{m + e^{i\alpha} \omega}{(1 - e^{i\alpha} \omega)^{m+2}} e^{i(m-1)\alpha}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Перейдем к доказательству теоремы 4. Зафиксируем в классе $\tilde{K}_1(\Pi)$ произвольным образом функцию $\varphi(z)$. Тогда оператор $H_n(\varphi)$ превращается в некоторую функцию от $z \in \Pi$. Далее имеем

$$H_n(\varphi(z)) = \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!},$$

где функция $f(\omega)$ – родственная функции $\varphi(z)$. Пользуясь леммой 1, получим

$$|H_n(\varphi(z))| = \left| \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{\varphi^{(k+1)}(z)}{(k+1)!} (z+1)^{k+1} \right| \leq \frac{n + |\omega|}{(1 - |\omega|)^{n+2}}, \quad \omega = \frac{z-1}{z+1}.$$

Чтобы добиться в (15) знака равенства, надо в классе $\tilde{K}_1(\Pi)$ взять функцию $h_3(z)$, подставить в (15) и затем положить $z = (1-r)/(1+r)$, где $0 \leq r < 1$. Тогда получим

$$|H_n(h_3(z))| = \frac{n+r}{(1-r)^{n+2}}.$$

Знак равенства в левой части (15) получаем из теоремы 2.

Литература

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972. С. 430–432.

2. Александров И.А. Доказательство Л. де Бранжом гипотезы И.М. Милина и гипотезы Л. Бибербаха // Сибирск. матем. ж. 1987. Т. 26. С. 7–20.

E.E. Kirjackis, E.G. Kiriyatzkii
Vilnius Gediminas Technical University

ON ONE OPERATOR ON THE CLASS OF UNIVALENT A HALF-PLANE FUNCTIONS

Keywords: *half-plane, univalent function, convex function, differential operator, differential equation.*

Abstract. *In this article, we study some properties of a special linear differential operator defined on various classes of analytic functions in the complex domain. Exact estimates of the moduli are established, the differential equation is solved, and some properties of univalent functions in the unit disc are given.*

Д.А. Комиссарова
Южно-Уральский государственный университет

УДК 517.929.2

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА В СВЕРТКАХ

Ключевые слова: *устойчивость, разностные уравнения, уравнения Вольтерра.*

В работе исследуется асимптотическая устойчивость нулевого решения линейного разностного уравнения типа Вольтерра. С помощью метода z-преобразования получены достаточные условия асимптотической устойчивости. Найденные признаки представляют собой ограничения на коэффициенты исходного уравнения. Производится сравнение полученных признаков с некоторыми известными достаточными условиями асимптотической устойчивости конечномерных линейных разностных уравнений.

Рассмотрим линейное разностное уравнение Вольтерра в свертках

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{s=1}^n a_s x_{n-s}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $a_s \in R$, $a_s \geq 0$ ($s = 1, 2, \dots$).

Решение уравнения (1) однозначно определяется начальным условием x_0 .

Нулевое решение уравнения (1) называется устойчивым, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall x_0 |x_0| < \delta \Rightarrow \forall n > 0 |x_n| < \varepsilon)$$

Нулевое решение уравнения (1) называется асимптотически устойчивым, если он устойчиво и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ для любого решения (x_n) уравнения (1).

Уравнение (1) представляет собой бесконечномерный аналог линейного разностного уравнения с запаздываниями, изучаемого многими авторами [1 – 3]:

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{s=1}^k a_s x_{n-s}, \quad (2)$$

где $a_s \in R$, $a_s \geq 0$ ($1 \leq s \leq k$).

Для уравнения (2) известны следующие признаки асимптотической устойчивости [1].

Теорема 1. Если $a_s \geq 0$ ($1 \leq s \leq k$) и

$$0 < \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} < 1, \quad (3)$$

то нулевое решение уравнения (2) асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Если $a_s \geq 0$ ($1 \leq s \leq k$) и

$$0 < \sum_{s=1}^k s a_s \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

то нулевое решение уравнения (2) асимптотически устойчиво.

В работе получены аналоги теорем 1 и 2 для разностного уравнения Вольтерра (1).

Производящей функцией числовой последовательности x_n ($n \geq 0$) называется ряд вида

$$\tilde{x}(z) = Z(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n, \quad (5)$$

где $z \in C$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия:

1) существуют действительные числа $M > 0$ и $q \in (0; 1)$ такие, что для всех $n \in N$ выполняется $a_n \leq Mq^n$;

2) все нули функции $g(z) = 1 - z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ расположены вне единичной окружности $|z| = 1$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть последовательность x_n ($n \geq 0$) – решение уравнения (1). Тогда

$$x_1 = x_0 - a_1 x_0, \quad x_2 = x_1 - (a_1 x_1 + a_2 x_0), \quad x_3 = x_2 - (a_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_0), \quad \dots$$

Умножим обе части первого уравнения на z , второго – на z^2 , третьего – на z^3 и так далее. Сложив полученные равенства и добавив к обеим частям x_0 , согласно определению (5) получим

$$\begin{aligned}\tilde{x}(z) &= x_0 + z\tilde{x}(z) - \tilde{x}(z) \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n. \\ \tilde{x}(z) &= \frac{x_0}{1 - z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n}.\end{aligned}\quad (6)$$

Обозначим функцию

$$g(z) = 1 - z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n. \quad (7)$$

Согласно условиям теоремы функция $g(z)$ является аналитической в круге $|z|=R$, радиус которого R больше единицы. Тогда из (6) получаем, что $\tilde{x}(z)$ раскладывается в степенной ряд по степеням z с радиусом сходимости больше единицы. Таким образом, уравнение (1) экспоненциально, а следовательно, и асимптотически устойчиво при любом начальном условии x_0 . Теорема доказана.

В работе [1] доказаны следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. Для любого числа $\omega \in (0; \pi]$ существует число $m \in \mathbb{R}$, такое, что для всякого $s \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} + \frac{\sin(m-s)\omega}{\sin \frac{\omega}{2} \cos\left(m - \frac{1}{2}\right)\omega} \geq 0. \quad (8)$$

Лемма 2. Для любого числа $s \in \mathbb{N}$

$$2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)} > \frac{\pi}{2s}.$$

Теорема 4. Пусть выполняются условия:

1) существуют действительные числа $M > 0$ и $q \in (0; 1)$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $a_n \leq Mq^n$;

$$2) 0 < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s}{2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} < 1.$$

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполняются и существует нуль z_0 функции $g(z)$, такой, что $|z_0| \leq 1$.

1 случай: $|z_0|=1$. Существует нуль функции $g(z)$ вида $z_0 = e^{i\omega}$ ($\omega \in [0; \pi]$). Тогда, согласно (7),

$$1 - e^{i\omega} + \sum_{s=1}^{\infty} a_s e^{i\omega s} = 0.$$

Отсюда

$$1 - \cos \omega + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos s\omega = 0, \quad (9)$$

$$-\sin \omega + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin s\omega = 0. \quad (10)$$

Из (9) очевидно, что $\omega \neq 0$.

Пусть число $m \in \mathbb{R}$ определено согласно лемме 1.

Умножим (9) на $\frac{\sin m\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(m - \frac{1}{2}\right)\omega}$, а (10) – на $\frac{-\cos m\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(m - \frac{1}{2}\right)\omega}$.

Сложив полученные равенства, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(m - \frac{1}{2}\right)\omega} (\sin m\omega - \cos \omega \sin m\omega + \sin \omega \cos m\omega) + \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \frac{\sin m\omega \cos s\omega - \cos m\omega \sin s\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(m - \frac{1}{2}\right)\omega} = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(m - \frac{1}{2}\right)\omega} (\sin m\omega - \sin(1-m)\omega) + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \frac{\sin(m-s)\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(m - \frac{1}{2}\right)\omega} = 0.$$

И окончательно

$$1 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \frac{\sin(m-s)\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(m - \frac{1}{2}\right)\omega} = 0. \quad (11)$$

Из (11) и (8) при неотрицательных значениях a_s ($s \in \mathbb{N}$) получаем

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s}{2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} - 1 = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} + \frac{\sin(m-s)\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(m - \frac{1}{2}\right)\omega} \right) \geq 0.$$

Получили противоречие второму условию теоремы.

2 случай: $|z_0| < 1$. Рассмотрим окрестность точки z_0 , расположенную целиком внутри единичного круга $|z|=1$, такую, что на ее границе γ нет нулей функции $g(z)$.

По 1 условию теоремы ряд $\sum_{s=1}^{\infty} a_s$ сходится. Тогда последовательность многочленов $P_k(z) = 1 - z + \sum_{s=1}^k a_s z^s$ сходится равномерно к функции $g(z)$ внутри единичного круга.

По теореме Гурвица [4] существует натуральное число $k_0 = k_0(\gamma)$, такое, что для любого натурального числа $k > k_0$ число нулей многочлена $P_k(z)$ внутри кривой γ равно числу нулей функции $g(z)$ внутри этой кривой. Следовательно, существует нуль многочлена $P_k(z)$, расположенный внутри единичного круга.

С другой стороны, из 2 условия теоремы получаем, что при любом $k \in N$ выполняется условие (3). Значит, согласно теореме 1, уравнение (2) асимптотически устойчиво при любом значении $k \in N$. Следовательно, все корни характеристического уравнения

$$\lambda^k - \lambda^{k-1} + \sum_{s=1}^k a_s \lambda^{k-s} = 0$$

расположены внутри единичного круга. Отсюда следует, что все нули многочлена $P_k(z)$ расположены вне единичного круга при любом значении $k \in N$. Получили противоречие.

Таким образом, все нули z_0 функции $g(z)$ расположены вне единичного круга. Согласно теореме 3 уравнение (1) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Следующая теорема получена непосредственно из леммы 2 и теоремы 4.

Теорема 5. Пусть выполняются условия:

1) существуют действительные числа $M > 0$ и $q \in (0;1)$, такие, что для всех $n \in N$ выполняется $a_n \leq Mq^n$;

$$2) 0 < \sum_{s=1}^{\infty} sa_s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Теоремы 4 и 5 являются бесконечномерными аналогами теорем 1 и 2 соответственно.

Литература

1. Kipnis M.M., Komissarova D.A. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2007. Vol. 13, Iss. 5. P. 457–461.
2. Berezansky L., Braverman E., Liz E. Sufficient conditions for the global stability of nonautonomous higher order difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2005. Vol.11, No 9. P. 785–798.
3. Györi I., Hartung F. Stability in delay perturbed differential and difference equations // Fields Institute Communications. 2001. Vol. 29. P. 181–194.
4. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций М.: Наука, 1978. 415 с.

D.A. Komissarova
South Ural State University

STABILITY OF VOLTERRA DIFFERENCE EQUATIONS IN CONVOLUTIONS

Keywords: *stability, difference equations, Volterra equations.*

Abstract. *The paper deals with asymptotic stability of the zero solution of a linear difference equation of Volterra type. The sufficient conditions for the asymptotic stability are proved using the z-transform method. The obtained criteria are restrictions on the coefficients of the original equation. The obtained criteria are compared with some known sufficient conditions for the asymptotic stability of finite-dimensional linear difference equations.*

А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович
НИЯУ «МИФИ», ИЯИ РАН

УДК 517.521.1

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЧИСЛА π^2

Ключевые слова: «курьёзная» аппроксимация, асимптотическое разложение, остаток числового ряда, двусторонние оценки, обвёртывающий ряд, числа Бернулли.

В заметке на примере приближённого вычисления числа π^2 обсуждаются эффекты, часть из которых относится к феномену так называемой «курьёзной» аппроксимации. Для остатков числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ приведены асимптотически точные двусторонние оценки двух видов. Эти оценки позволяют в рассматриваемом случае объяснить упомянутый феномен, выявленный в зарубежных работах 1980-х годов в процессе исследования различных классических рядов.

Некоторое время назад внимание авторов привлёк один любопытный эффект. Он возникает при приближении числа π частичными суммами

$$S_N = 4 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

классического ряда Лейбница – Грегори

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Означенный эффект был обнаружен, по-видимому, в 80-х годах прошлого века (см. [1–4]) и в общих чертах состоит в следующем. При специальных больших номерах N численное значение S_N , выписанное в виде десятичной дроби, лишь в отдельных достаточно редких местах отличается от начального (довольно длинного) фрагмента представления числа π бесконечной десятичной непериодической дробью. Сказанное иллюстрируется равенством

$$S_{500000} = 4 \sum_{n=1}^{5 \cdot 10^5} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 3.141590\underline{653589793240462643383269502884197} \dots,$$

где из сорока цифр после запятой лишь четыре (подчёркнутые снизу) выдают отличие записанного числа от начального фрагмента развёрнутого десятичного представления числа π . Близкий эффект наблюдается и на примерах других числовых рядов. В этой связи отметим работу [1], где указано ещё одно известное разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Взяв 50000 слагаемых такого ряда, получим рациональное число, в десятичной записи которого сорок пять цифр после запятой образуют массив, похожий «в целом» на набор из первых сорока пяти цифр представления числа $\ln 2$ бесконечной десятичной дробью. Удивительным является ещё и то обстоятельство, что отдельные численные поправки, которые необходимо внести в соответствующие десятичные разряды для полного совпадения двух фрагментов, описываются специальными тангенциальными числами. Именно

$$\sum_{n=1}^{5 \cdot 10^4} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0.69313\underline{7180659945309397232121474176568048300134} \dots,$$

где все неподчёркнутые цифры те же, что и в записи числа $\ln 2$, а для коррекции нужно к подчёркнутым числам прибавить тангенциальные числа 1, -1, 2, -16, 272.

Объяснение этого необычного явления приведено в [1]. Оказалось, что оно напрямую связано со структурой асимптотического разложения остатка рассматриваемого числового ряда. Заинтересовавшись данным вопросом, авторы настоящей заметки подробно исследовали (см. [5]) асимптотическое поведение остатков для специального семейства числовых рядов. Утверждения, доказанные в [5], обобщают и дополняют результаты работы [1].

Для выявления свойств разложения числа π^2 в знаменитый ряд

$$6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2$$

приведём некоторые частные факты из недавней статьи [5].

Рассмотрим величину

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

с натуральным значением N .

Теорема. При каждом N справедливо интегральное представление

$$R_N = \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{e^\tau - 1} e^{-(N-1)\tau} d\tau,$$

а при $N \rightarrow \infty$ верны асимптотические разложения

$$R_{N+1} = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{2N} + \sum_{k=1}^M \frac{B_{2k}}{N^{2k}} + O(N^{-2M-2}) \right),$$

$$R_N = \frac{2}{2N-1} \left(1 - \sum_{k=1}^M \frac{(2^{2k}-2)B_{2k}}{(2N-1)^{2k}} + O((2N-1)^{-2M-2}) \right).$$

Здесь B_{2k} – числа Бернулли, а индекс M принимает любые натуральные значения. Асимптотические формулы подкрепляются двусторонними оценками

$$\frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{2N} + \sum_{k=1}^{2M} \frac{B_{2k}}{N^{2k}} \right) < R_{N+1} < \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{2N} + \sum_{k=1}^{2M-1} \frac{B_{2k}}{N^{2k}} \right),$$

$$\frac{2}{2N-1} \left(1 - \sum_{k=1}^{2M-1} \frac{(2^{2k}-2)B_{2k}}{(2N-1)^{2k}} \right) < R_N < \frac{2}{2N-1} \left(1 - \sum_{k=1}^{2M} \frac{(2^{2k}-2)B_{2k}}{(2N-1)^{2k}} \right),$$

действующими при всех натуральных N и M .

Приведённые в теореме оценки показывают, что соответствующие асимптотические ряды для остатка являются обвёртывающими. Это полезное свойство можно привлечь к задаче о приближённом вычислении числа π^2 для объяснения возникающих по ходу дела аппроксимационных эффектов, близких к подмеченным в публикациях [1–4]. В докладе планируется также обсудить результаты компьютерных экспериментов, иллюстрирующих наши теоретические выводы.

Литература

1. Borwein J.M., Borwein P.B., Dilcher K.Pi, Euler Numbers and Asymptotic Expansions // American Mathematical Monthly. 1989. Vol. 96, № 8. P. 681-687.
2. Powell M.R. Significant Insignificant Digits? // Mathematical Gazette. 1982. Vol. 66, № 437. P. 220-221.
3. Cundy H.M. The Significance of Those Insignificant Digits // Mathematical Gazette. 1983. Vol. 67, № 441. P. 171-173.

4. Girling A. Accelerating the Convergence of an Alternating Series // *Mathematical Gazette*. 1983. Vol. 67, № 441. P. 173-177.

5. Костин А.Б., Шерстюков В.Б. Асимптотическое поведение остатков числовых рядов специального вида // *Проблемы математического анализа*. 2020. Вып. 107. С. 39-58.

A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov, D.G. Tsvetkovich

National Research Nuclear University MEPhI

Institute for Nuclear Research of the Russian Academy of Sciences

ON THE APPROXIMATION OF π^2

Keywords: «curious» approximation, asymptotic expansion, remainder of a number series, two-sided estimates, enveloping series, Bernoulli numbers.

Abstract. *By the example of approximate calculation of π^2 the effects relating to the phenomenon of the so-called «curious» approximation are discussed. Asymptotically accurate two-sided estimates of two types for the remainders of the numerical series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ are given. In our case the mentioned phenomenon can be explained by these estimates.*

С.Ю. Курицын, К.М. Расулов

Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ТИПА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Ключевые слова: *метааналитическая функция второго типа, обобщенная краевая задача типа Римана, интегральные члены, фредгольмовы ядра, единичная окружность.*

В статье разработан алгоритм решения одной обобщенной краевой задачи Римана в классах метааналитических функций второго типа в случае, когда носителем краевых условий выступает единичная окружность. Установлено, что решение сформулированной задачи сводится к последовательному решению двух обобщенных задач Римана для аналитических функций.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $L \in C_\mu^2$, а $T^- = \overline{\mathbb{C}} \setminus (T^+ \cup L)$.

Напомним (см., например, [1, с. 139] или [2; 3]), что *кусочно метааналитической функцией с линией скачков L* будем называть функцию $F(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, которая в двух дополняющих друг друга до расширенной комплексной плоскости областях T^+ и T^- определяется так:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)] \exp\{\lambda\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)] \exp\left\{\lambda\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^- \end{cases} \quad (1)$$

или

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_0\bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_1\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) \exp\left\{\lambda_0\frac{\bar{z}}{z^m}\right\} + \varphi_1^-(z) \exp\left\{\lambda_1\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi_k^\pm(z) \in A(T^\pm)$, $k = 0, 1$, а λ , λ_0 , λ_1 – некоторые постоянные ($\lambda_0 \neq \lambda_1$), $m \in \mathbb{N}$ и $m \geq 2$, причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

Обычно функцию $F(z)$, задаваемую формулой (1), называют *кусочно метааналитической функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулой (2), – *кусочно метааналитической функцией второго типа*.

Кроме того, кусочно метааналитическую функцию $F(z)$ вида (1) (или (2)) будем называть *исчезающей на бесконечности*, если $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq k + 1$ (или $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1$), где $k = 0, 1$.

Наконец, будем говорить, что кусочно метааналитическая функция $F(z)$ с линией скачков L принадлежит классу $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_k^\pm(z)$ ($k = 0, 1$) непрерывно продолжаются на границу L вместе со своими производными $\frac{d\varphi_k^\pm(z)}{dz}$ ($k = 0, 1$), причем так, что граничные значения функций $\varphi_k^\pm(z)$ ($k = 0, 1$) и указанных производных удовлетворяют на L условию Гёльдера.

Рассматривается следующая краевая задача (см. также [1, с. 141]). *Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) - G_1(t)F^-(t) + \int_L A_1(t, \tau)F^+(\tau)d\tau + \int_L B_1(t, \tau)F^-(\tau)d\tau = g_1(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} - G_2(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + \int_L A_2(t, \tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial n_+}d\tau + \int_L B_2(t, \tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial n_-}d\tau = g_2(t), \quad (4)$$

где $G_k(t)$, $g_k(t)$ ($k=1, 2$) – заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, причем $G_k(t) \neq 0$, а $A_k(t, \tau)$, $B_k(t, \tau)$ ($k=1, 2$) – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(1)}(L \times L)$, $\frac{\partial}{\partial n_{\pm}}$ – производная по внутренней (внешней) нормали к контуру L .

Следуя [1], сформулированную выше краевую задачу будем называть *второй основной обобщенной краевой задачей типа Римана в классах метааналитических функций* или, короче, *задачей $GR_{2,M}$* , а соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) – *задачей $GR_{2,M}^0$* .

В работах авторов [4] и [5] были предложены методы решения задачи $GR_{2,M}$ в классе метааналитических функций первого типа и второго типа соответственно в случае, когда область T^+ является произвольной односвязной областью. Оказалось, что в случае, когда носителем краевых условий (3), (4) является единичная окружность, т.е. $L = \{t : |t|=1\}$, небольшая модификация метода, предложенного в [5], позволяет установить более полную картину разрешимости краевой задачи $GR_{2,M}$. Поэтому основной целью настоящей заметки является разработка конструктивного алгоритма решения задачи $GR_{2,M}$ в классах функций вида (2) в случае, когда носителем краевых условий является единичная окружность. Всюду в дальнейшем в основном будем использовать обозначения и терминологию, принятую в монографии [1].

2. О решении задачи $GR_{2,M}$ в классе кусочно метааналитических функций второго типа. В силу представления (1) и соотношения (см., например, [6, с. 37] или [7, с. 304])

$$\frac{\partial}{\partial n_{\pm}} = \pm i \left(t' \frac{\partial}{\partial t} + \bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) = \mp \left(t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \quad (5)$$

и в связи с тем фактом, что на единичной окружности выполняется тождество $\bar{t} = 1/t$, краевые условия (3) и (4) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^1 \varphi_k^+(t) \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{t} \right\} - G_1(t) \sum_{k=0}^1 \varphi_k^-(t) \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{t^{m+1}} \right\} + \int_L A_1(t, \tau) \sum_{k=0}^1 \varphi_k^+(\tau) \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{\tau} \right\} d\tau + \int_L B_1(t, \tau) \sum_{k=0}^1 \varphi_k^-(\tau) \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{\tau^{m+1}} \right\} d\tau = g_1(t), \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{k=0}^1 \left(\frac{\lambda_k}{t} \varphi_k^+(t) + t \frac{d\varphi_k^+(t)}{dt} \right) \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{t} \right\} - G_2(t) \sum_{k=0}^1 \left(\frac{\lambda_k(1-m)}{t^{m+1}} \varphi_k^-(t) + t \frac{d\varphi_k^-(t)}{dt} \right) \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{t^{m+1}} \right\} - \\
& - \int_L A_2(t, \tau) \sum_{k=0}^1 \left(\frac{\lambda_k}{\tau} \varphi_k^+(\tau) + \tau \frac{d\varphi_k^+(\tau)}{d\tau} \right) \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{\tau} \right\} d\tau + \\
& + \int_L B_2(t, \tau) \sum_{k=0}^1 \left(\frac{\lambda_k(1-m)}{\tau^{m+1}} \varphi_k^-(\tau) + \tau \frac{d\varphi_k^-(\tau)}{d\tau} \right) \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{\tau^{m+1}} \right\} d\tau = g_2(t). \quad (7)
\end{aligned}$$

Умножив обе части равенства (6) на $\exp \left\{ -\frac{\lambda_0}{t} \right\} \neq 0$, получаем

$$\varphi_0^+(t) - G_{11}(t) \varphi_0^-(t) + \int_L A_{11}(t, \tau) \varphi_0^+(\tau) d\tau + \int_L B_{11}(t, \tau) \varphi_0^-(\tau) d\tau = g_{11}(t), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
G_{11}(t) &= G_1(t) \exp \left\{ \frac{\lambda_0(1-t^m)}{t^{m+1}} \right\}, \quad A_{11}(t, \tau) = A_1(t, \tau) \exp \left\{ \lambda_0 \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t} \right) \right\}, \\
B_{11}(t, \tau) &= B_1(t, \tau) \exp \left\{ \lambda_0 \left(\frac{1}{\tau^{m+1}} - \frac{1}{t} \right) \right\}, \\
g_{11}(t) &= g_1(t) \exp \left\{ -\frac{\lambda_0}{t} \right\} - \varphi_1^+(t) \exp \left\{ \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{t} \right\} + G_1(t) \varphi_1^-(t) \exp \left\{ \frac{\lambda_1 - \lambda_0 t^m}{t^{m+1}} \right\} - \\
& - \int_L A_1(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) \exp \left\{ \frac{\lambda_1}{\tau} - \frac{\lambda_0}{t} \right\} d\tau - \int_L B_1(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) \exp \left\{ \frac{\lambda_1}{\tau^{m+1}} - \frac{\lambda_0}{t} \right\} d\tau. \quad (9)
\end{aligned}$$

Заметим, что поскольку $G_1(t), g_1(t) \in H^{(1)}(L)$, $A_1(t, \tau), B_1(t, \tau) \in H_*^{(2)}(L \times L)$, $F^\pm(z) \in M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, то $G_{11}(t), g_{11}(t) \in H^{(1)}(L)$, $A_{11}(t, \tau), B_{11}(t, \tau) \in H_*^{(2)}(L \times L)$. Также заметим, что $G_{11}(t) \neq 0$.

Временно рассмотрим $g_{11}(t)$ как известную функцию. Тогда равенство (8) представляет собой граничное условие обобщенной краевой задачи Римана относительно кусочно аналитической исчезающей на бесконечности функции $\varphi_0^\pm(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$ с линией скачков L .

Решая полученную задачу методом, описанном в §2 монографии [1], будем иметь:

$$\varphi_0^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_{11}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \int_L R_1^+(z, \tau) g_{11}(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{p_1} \beta_n \alpha_n^+(z), \quad z \in T^+, \quad (10)$$

$$\varphi_0^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_{11}(\tau)}{G_{11}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_1^-(z, \tau) g_{11}(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^p \beta_n \alpha_n^-(z), \quad z \in T^-, \quad (11)$$

где $R_1^\pm(z, \tau)$ и $\alpha_n^\pm(z)$ вполне определяются через заданные функции $G_1(t)$, $g_1(t)$, $A_1(t, \tau)$, $B_1(t, \tau)$, β_n – произвольные комплексные числа, а

$$p_1 = \begin{cases} \varkappa_1 + \nu_1 - r_1, & \text{если } \varkappa_1 \geq 0, \\ \max(0; \nu_1 - |\varkappa_1|), & \text{если } \varkappa_1 < 0, \end{cases} \quad (12)$$

$\varkappa_1 = \text{Ind } G_{11}(t) = \text{Ind } G_1(t)$, ν_1 – число линейно независимых над полем \mathbb{C} решений однородного уравнения Фредгольма, ядро которого выражается через заданные функции $G_1(t)$, $g_1(t)$, $A_1(t, \tau)$, $B_1(t, \tau)$, а r_1 – ранг определенной матрицы, элементы которой также выражаются через эти функции.

Воспользовавшись формулами Сохоцкого – Племяля (см. например, [7, с. 38] или [8, с. 55]), найдем граничные значения функций $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_0^-(z)$, определяемых равенствами (12) и (13):

$$\varphi_0^+(t) = \frac{1}{2} g_{11}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_{11}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L R_1^+(t, \tau) g_{11}(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^p \beta_n \alpha_n^+(t), \quad t \in L, \quad (13)$$

$$\varphi_0^-(t) = -\frac{1}{2} \frac{g_{11}(t)}{G_{11}(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_{11}(\tau)}{G_{11}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_L R_1^-(t, \tau) g_{11}(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^p \beta_n \alpha_n^-(t), \quad t \in L. \quad (14)$$

С учетом обозначений (9) из (13) и (14) соответственно получаем

$$\varphi_0^+(t) = -\varphi_1^+(t) \exp\left\{\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{t}\right\} + \int_L R_{10}^+(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \int_L R_{11}^+(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau + Q_1^+(t) + \sum_{n=1}^p \beta_n \alpha_n^+(t), \quad (15)$$

$$\varphi_0^-(t) = -\varphi_1^-(t) \exp\left\{\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{t^{m+1}}\right\} + \int_L R_{10}^-(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \int_L R_{11}^-(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau + Q_1^-(t) + \sum_{n=1}^p \beta_n \alpha_n^-(t), \quad (16)$$

где $Q_1^\pm(t)$, $R_{10}^\pm(t, \tau)$, $R_{11}^\pm(t, \tau)$ – вполне определенные функции.

Подставим в равенство (7) граничные значения $\varphi_0^+(t)$ и $\varphi_0^-(t)$, задаваемые формулами (15) и (16), а также их производные, получим

$$\varphi_1^+(t) - G_{22}(t) \varphi_1^-(t) + \int_L A_{22}(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \int_L B_{22}(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau = g_{22}(t), \quad (17)$$

где

$$G_{22}(t) = -\exp\left[\lambda_1 \left(\frac{1-t^m}{t^{m+1}}\right)\right] \frac{G_2(t)}{t^m}, \quad (18)$$

а фредгольмовы ядра $A_{22}(t, \tau)$, $B_{22}(t, \tau)$ и функция $g_{22}(t)$ вполне определенным образом выражаются через заданные в условии задачи функции $G_k(t)$, $g_k(t)$, $A_k(t, \tau)$, $B_k(t, \tau)$ ($k = 1, 2$), причем $A_{22}(t, \tau)$, $B_{22}(t, \tau) \in H_*(L \times L)$, а $g_{22}(t) \in H(L)$.

В свою очередь, равенство (17) есть краевое условие обобщенной задачи Римана нормального типа относительно кусочно аналитической

функции $\varphi_1^\pm(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$, исчезающей на бесконечности. Решая обобщенную задачу Римана (18) тем же методом, что и задачу (8), найдем функции $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_1^-(z)$, выражения которых будут зависеть от заданных функций в условии исходной задачи $GR_{2,M}$.

Подставляя в свободный член $g_{11}(t)$ краевого условия (8) вместо $\varphi_1^+(t)$, $\varphi_1^-(t)$, $\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt}$, $\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt}$ граничные значения аналитических функций, являющихся решениями задачи (17), а затем решая обобщенную задачу Римана (8), находим по формулам (10) и (11) аналитические функции $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_0^-(z)$. Тогда решение исходной краевой задачи $GR_{2,M}$ можно задавать формулой

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_0 \bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_1 \bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) \exp\left\{\lambda_0 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\} + \varphi_1^-(z) \exp\left\{\lambda_1 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases}$$

где $\varphi_1^\pm(z)$ и $\varphi_0^\pm(z)$ – решения обобщенных задач Римана (17) и (8) соответственно.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Решение задачи $GR_{2,M}$ сводится к последовательному решению двух обобщенных краевых задач Римана (17) и (8) нормального типа в классах исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций с линией скачков L . При этом для разрешимости задачи $GR_{2,M}$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы обобщенные задачи Римана (17) и (8).*

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
2. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ /Серия Совр. пробл. матем. Фунд. напр Т. 85. М.: ВИНТИ, 1991. С. 187-246.
3. Kuritsyn S.Yu., Rasulov K.M. On a Generalized Riemann Problem for Metaanalytic Functions of the Second Type // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2018, Vol. 39, No. 1. P. 97-103.
4. Курицын С.Ю., Расулов К.М. Обобщенная задача типа Римана для метааналитических функций в случае произвольных односвязных областей // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. / СмолГУ. Смоленск, 2015. Вып. 16. С. 186-191.
5. Курицын С.Ю., Расулов К.М. Обобщенная задача Римана для метааналитических функций второго типа // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. / СмолГУ. Смоленск, 2016. Вып. 17. С. 161-163.

6. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.
8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

S.Yu. Kuritsyn, K.M. Rasulov
Smolensk State University

ON SOLVING THE GENERALIZED PROBLEM OF RIEMANN TYPE FOR METAANALYTIC FUNCTIONS OF THE SECOND TYPE IN UNIT DISK

Keywords: *metanalytic functions of the second type, generalized boundary value problem of Riemann type, Fredholm kernels; unit circle.*

Abstract. *In this article we develop a general algorithm of solving the second generalized boundary value problem of Riemann type for metanalytic functions of the second type in unit disk. It is established that the solving of the considered problem reduces to consecutive solving of two generalized Riemann boundary value problems in class of analytic functions of a complex variable.*

В.И. Матюхин, Е.Е. Кирьяцкий, Э.Г. Кирьяцкий
Вильнюсский технический университет им. Гядиминаса

УДК 514

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Ключевые слова: *изображение, существование решения, единственность, доказательство.*

В данной работе обращено внимание на необходимость исследования задач с числовыми данными для доказательства существования указанной в задаче фигуры, отмечается необходимость проведения исследования при решении задач графическим способом.

1. Постановка задачи. В последние годы из школьной программы по геометрии исчезли задачи на построение. Из поля зрения

большинства учителей ушло исследование решения задачи, которому и прежде не уделялось должного внимания. Конечно, в задачах с параметрами проводится исследование, а вот в задачах с числовыми данными – что получилось при правильном решении, то и ответ.

В.И. Арнольд в брошюре «Задачи для детей от 5 до 15 лет» (М.: МЦНМО, 2004. 16 с.) приводит ставшую классической задачу: «Гипотенуза прямоугольного треугольника (в американском стандартном экзамене) – 10 дюймов, а опущенная на неё высота – 6 дюймов. Найти площадь треугольника».

Ответ «30 квадратных дюймов» десятком лет устраивал американских учителей, которые не обращали внимания на то, что данная высота не может быть больше 5 дюймов. Указанного в условии задачи треугольника не существует.

Данную задачу можно распространить на случай конуса, осевое сечение которого – прямоугольный треугольник.

2. Решение некоторых задач. Приведём пример задачи, в которой вопроса существования фигуры, на первый взгляд, не возникает (Квант. 2020, №5, С. 46).

Задача 1. Квадрат ABCD (см. рисунок 1) разрезали на треугольники и внутри каждого из них написали его периметр. Найдите сторону квадрата ABCD.

Решение. Периметр четырёхугольника FGHE равен $6+5+7-8=10$, поэтому периметр квадрата FDCD равен $10+7+6+12-10=25$, а его сторона равна $25:4=6,25$.

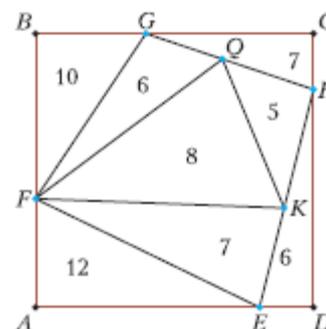


Рис. 1

Предположим, что задача решена верно, и проанализируем ее условие.

В треугольнике против большего угла лежит большая сторона (докажите), поэтому в треугольнике BFG:

$$GF > GB, 10 = BF + BG + FG > BG + FG > 2BG \text{ и } BG < 5.$$

Если сторона квадрата равна $6,25$, то $GC > 6,25 - 5 = 1,25$.

Аналогично в треугольнике DEH:

$$6 = ED + EH + HD > EH + HD > 2HD, HD < 3 \text{ и } CH > 6,25 - 3 = 3,25.$$

Применив аналогичные рассуждения к треугольнику CHG, получаем: $7 = GC + CH + GH > GC + 2CH > 1,25 + 2 \cdot 3,25 = 7,75$. Получили противоречие: $7 > 7,75$. А так как все рассуждения были правильные, то ошибку следует искать в условии задачи. Указанный в задаче набор периметров треугольников ошибочен, квадрата с таким условием не существует.

Проблема исследования решения задачи носит застарелый характер. Одна из причин этого – исследование существенно усложняет

решение задачи. Отсутствие фигур, о которых идёт речь в задаче, встречалось даже в стабильных школьных учебниках. Например, в учебнике «Геометрия» для 7-9 классов, 1992 (Л.С. Атанасян и др.) имеется задача № 536:

Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC .

б) Найдите DC , если $AB=30$, $AD=20$, $BD=16$ и $\angle BDC = \angle C$ (см. рис. 2).

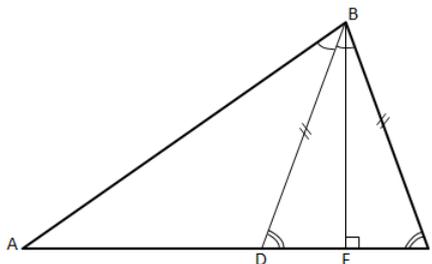


Рис. 2

Обозначим через BF высоту треугольника ABC и решим задачу двумя способами.

I способ. Используя свойство биссектрисы угла треугольника, получаем:

$$AD / DC = AB / BC. \text{ Отсюда } DC = 10\frac{2}{3}.$$

II способ. Воспользуемся теоремой Пифагора: из треугольника ABF : $BF^2 = AB^2 - AF^2$, а из треугольника BCF : $BF^2 = BC^2 - FC^2$. Следовательно,

$$AB^2 - AF^2 = BC^2 - FC^2. \text{ Отсюда } DC = 12\frac{1}{5}.$$

Вывод: при заданных значениях BD не является биссектрисой треугольника ABC . Используя теорему косинусов, можно убедиться, что $\angle ABD < \angle DBC$, если $BC = BD$.

Приведём пример стереометрической задачи, в которой данной в условии фигуры не существует.

Боковая поверхность треугольной пирамиды равна 125, а боковые рёбра равны 5. Найдите плоские углы при вершине пирамиды, если известно, что их величины образуют арифметическую прогрессию с разностью $\pi / 3$.

Если учесть, что сумма плоских углов меньше 2π , а каждый из них меньше суммы двух других, то оказывается, что пирамиды с такими данными не существует.

Напомним основные требования к изображению фигур в геометрии, так как грамотно выполненный чертёж часто служит определённой подсказкой при поисках решения задачи.

1. Изображение должно быть правильным, т.е. должно представлять собой одну из проекций изображаемой фигуры.

2. Изображение должно быть наглядным, т.е. вызывать пространственное представление оригинала.

3. Изображение должно быть простым для выполнения, оно не должно содержать каких-либо построений, не имеющих отношения к вопросу задачи.

Самое неблагоприятное положение – с чертежами, где требуется изобразить шар. При параллельном проектировании шара получается либо окружность, либо эллипс. На ортогональной проекции абрис шара – окружность, а в косоугольной проекции – эллипс. Из соображений большей наглядности шар рекомендуется изображать в ортогональной проекции. Сначала чертим окружность, представляющую абрис. Затем чертим эллипс, изображающий окружность большего круга – сечение сферы плоскостью, проходящей через её центр. Это сечение называют экваториальным (см. рис. 3). Перпендикуляр к плоскости большого круга, проходящий через центр сферы, пересекает её в двух точках, называемых полюсами, соответственно северным (N_1) и южным (S_1).

Распространённая ошибка – помещать изображение полюсов N_1 и S_1 на абрисе. Если экваториальное сечение изображено эллипсом, ближняя к нам часть которого ниже дальней его части, то глаз наблюдателя находится выше плоскости экватора. Поэтому наблюдатель видит точку N_1 ниже абриса, а точку S_1 – выше абриса, она находится на задней, невидимой части шара.

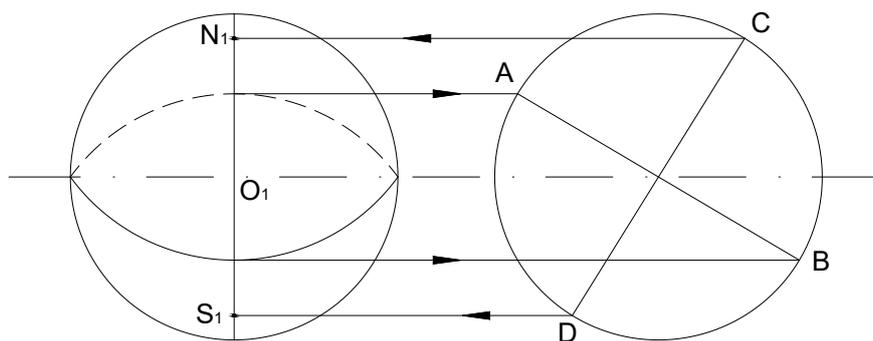


Рис. 3

Только в том случае, если бы проектирующие прямые были параллельны плоскости экватора, полюсы находились бы на абрисе. Но в этом случае экватор изображался бы не эллипсом, а отрезком. Чем шире эллипс, изображающий экватор, тем дальше от абриса находятся изображения полюсов. На рисунке 3 показано, как построить изображения полюсов, если дано изображение экватора: переносим на правую окружность малую ось эллипса; проводим диаметр АВ (это проекция экваториального круга); проводим диаметр CD перпендикулярно АВ (это проекция диаметра N_1S_1); переносим точки С и D, как показано на рисунке 3.

Для развития пространственного воображения учащихся полезно решать, например, задачи следующего типа (см. рис. 4).

Задача 2. Даны проекции фигур на три плоскости – фронтальная, горизонтальная и профильная (вид спереди, сверху и сбоку). Постройте наглядные изображения этих фигур.

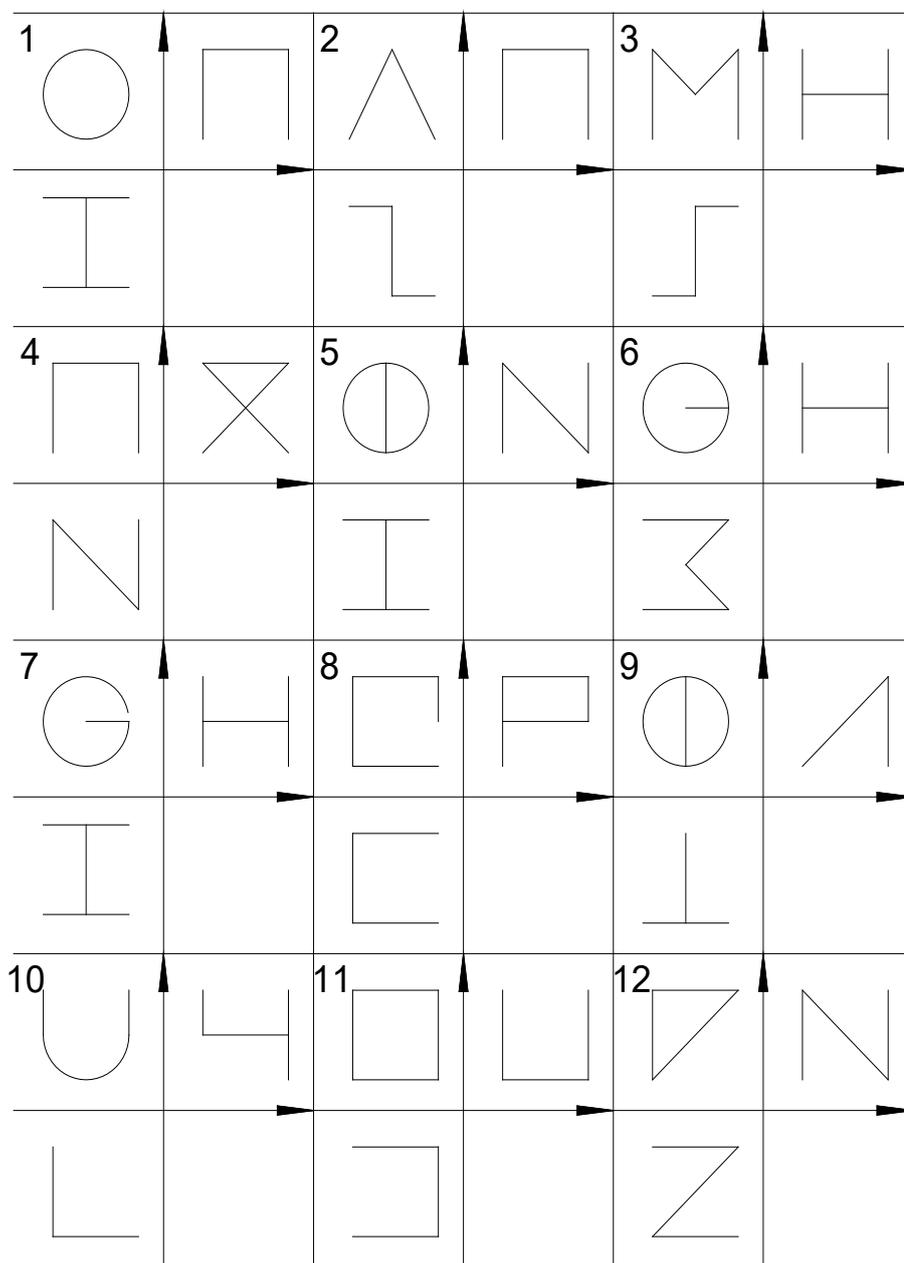


Рис.4

Указание. При решении этой задачи полезно использовать кусок проволоки длиной 35–40 см, с помощью которого методом проб и ошибок попытаться изготовить искомую фигуру. После этого нужно выполнить аксонометрическую проекцию полученной фигуры.

Например, на первом виде рисунка 4 указаны проекции двух окружностей одинакового радиуса, лежащих в параллельных плоскостях и соединённых сверху отрезком, перпендикулярным к этим плоскостям.

3. О наглядности чертежа. Никакой чертёж, даже самый аккуратный, не может заменить логического доказательства, он является лишь иллюстрацией к рассуждениям.

Рассмотрим такой пример: «Решить уравнение $(\frac{1}{16})^x = \log_{\frac{1}{16}} x$ ».

Функции $f(x) = (\frac{1}{16})^x$ и $g(x) = \log_{\frac{1}{16}} x$ взаимно обратные, точка

пересечения их графиков лежит на прямой $y = x$, абсцисса этой точки – решение данного уравнения. Однако легко проверить, что $x=1/4$ и $x=1/2$ – корни этого уравнения, а потому точки $(1/4;1/2)$ и $(1/2;1/4)$ должны принадлежать графикам указанных функций, причём ни одна из них не лежит на прямой $y = x$. Значит, данное уравнение имеет три решения, на что не указывает сделанный от руки рисунок графиков указанных функций.

Любой геометрический факт, который мы «увидели» на чертеже, необходимо строго обосновать – только тогда можно утверждать, что этот факт действительно имеет место, а не получен из рисунка.

В то же время наглядный чертёж – хороший помощник при решении задачи: он может подсказать идею необходимых рассуждений и вычислений, натолкнуть на мысль использовать некоторую теорему или придумать удачное дополнительное построение.

Рассмотрим задачу, предлагавшуюся на вступительных экзаменах в МГУ.

Высота прямой призмы равна 1, её основанием служит ромб со стороной 2 и острым углом 30 градусов.

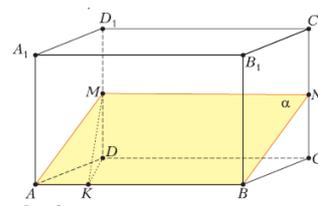


Рис. 5

Через сторону основания проведена секущая плоскость, наклонённая к плоскости основания под углом в 60 градусов (см. рис. 5). Найдите площадь сечения.

Сделав рисунок и проведя несложные вычисления, получим, что искомая площадь равна

$$S = AB \cdot MK = 4.$$

Однако при заданных числовых данных секущая плоскость пересекает верхнее основание призмы (см. рис. 6), конфигурация оказывается иной, а потому и площадь сечения будет равна $S = 4/\sqrt{3}$.

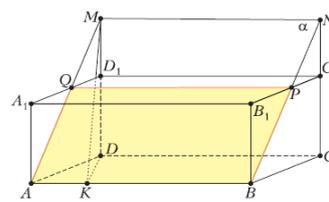


Рис. 6

Ещё большее внимание требуется при решении задач, в которых геометрическая конфигурация задается не числовыми, а буквенными данными. В таких задачах и способ решения, и получаемый ответ могут существенно зависеть от соотношений между параметрами, определяющими конфигурацию.

Разумеется, решение, в котором рассмотрены не все различные случаи, не может считаться полноценным, хотя формально и получается правильный ответ.

Рассмотрим несколько задач с указанным свойством.

1. В окружность с длиной 10π вписан равнобедренный треугольник с длиной основания b . Найдите площадь этого треугольника.

Существуют два (различных) треугольника, удовлетворяющих условию задачи.

2. Дан ромб $ABCD$, сторона которого равна 3, а острый угол равен 60° . Точка E лежит на стороне BC , причём $BE = EC$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AE .

В условии не сказано острый или тупой угол B . Нужно рассмотреть оба случая.

3. В треугольнике ABC $BC = 10$, а длины высот, проведенных к AC и BC равны соответственно 7 и 5. Найдите длины сторон AB и AC .

В условии задачи ничего не сказано про треугольник ABC . Поэтому следует рассмотреть случаи, когда он остроугольный или тупоугольный, причём тупым может быть любой из его углов (прямоугольным он не может быть).

4. При каких действительных значениях a множества решений уравнений $4\cos^2 x = a^2 - 6$ и $1 - \cos(2x) = a/6$ совпадают?

При решении данной задачи существует опасность пропустить случай, когда эти уравнения не имеют корней.

5. Длины двух боковых сторон треугольника равны 30 и 26, а длина высоты, опущенной на третью сторону, равна 24. Найдите длину медианы, проведенной к третьей стороне.

В условии задачи не оговорен вид данного треугольника, поэтому здесь возможны различные случаи.

Считаем, если в условии задачи сказано, что даны, например, треугольник, параллелограмм, пирамида и т.д., и вместе с тем в нем имеются скрытые факты противоречивости, то это недоработка (или провокация) составителя задачи. Таких ситуаций следует избегать.

Литература

1. Четверухин Н.Ф. Изображение фигур в курсе геометрии. М., Учпедгиз, 1958.
2. Кирьяцкий Э.Г., Матюхин В.И. Изображение фигур в геометрии // Вестник Могилёвского государственного университета. Серия В. 2014. С. 44-60.

3. Кирьяцкий Э.Г., Матюхин В.И. Решение задач на проекционном чертеже // Вестник Могилёвского государственного университета. Серия В. 2015. С. 32-44.
4. Дорофеев Г., Розов Н. Чертёж в геометрической задаче // Квант, №11-12, 2020. С. 25-30.

V.I. Matiukhin, E.E. Kirjackis, E.G. Kiriyaetskii
Vilnius Gediminas Technical University

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF GEOMETRICAL PROBLEMS

Keywords: *image, existence of a solution, uniqueness, proof.*

Abstract. *In this paper, attention is paid to the need to investigate problems with numerical data for the existence of the figure indicated in the problem, the need for research in solving problems in a graphical way is noted.*

Т.И. Михалёва, К.М. Расулов
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРИ МАЛЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ КОНТУРА

Ключевые слова: *квазигармоническая функция, краевая задача типа Карлемана, дифференциальное уравнение Эйлера, круговая область, неустойчивость решений.*

В статье рассматривается краевая задача типа Карлемана для квазигармонических функций в произвольных односвязных областях с гладкими границами. Устанавливается, что решения рассматриваемой задачи в круговых областях неустойчивы по отношению к малым изменениям границы, то есть исследуемая задача относится к классу так называемых некорректных краевых задач.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – произвольная односвязная область на конечной плоскости C комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром Ляпунова L , а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$, где $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$.

В работе одного из авторов [1] для квазигармонических функций рода n , то есть для функций, представимых в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (1)$$

где

$$A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}, \quad (2)$$

а $\varphi^+(z)$ – аналитическая функция в области T^+ , впервые была поставлена следующая краевая задача GK_n : требуется найти все квазигармонические рода n функции $W(z)$, принадлежащие классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ и удовлетворяющие на контуре L условию:

$$W^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{W^+(t)} + g(t), \quad (3)$$

где $W^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} W(z)$; $\alpha(t)$ – прямой сдвиг контура, для которого

выполняется условие Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \quad (4)$$

а $G(t)$ и $g(t)$ – заданные на контуре L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера совместно с производными включительно до порядка n (т.е. $G(t), g(t) \in H^{(n)}(L)$), причем $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$ и $\alpha'(t) \in H(L)$.

Следуя [1], сформулированную задачу GK_n будем называть задачей типа задачи Карлемана для квазигармонических функций рода n в области T^+ , при этом соответствующую ей однородную задачу ($g(t) \equiv 0$) назовем задачей GK_n^0 .

Ясно, что в силу представления (1) краевое условие (3) можно переписать так:

$$\sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\overline{\alpha(t)}}{1+\alpha(t)\overline{\alpha(t)}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+[\alpha(t)]}{dt^k} = G(t) \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} + g(t), t \in L. \quad (5)$$

Но равенство (5) представляет собой краевое условие хорошо известной дифференциальной краевой задачи типа Карлемана относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi^+(z)$ (см., например, [2, с. 332]), то есть, по сути, задача GK_n является неформальной моделью дифференциальной задачи типа Карлемана для аналитических функций комплексного переменного.

До сих пор в общем случае дифференциальные краевые задачи вида (5) в основном решаются методом интегральных уравнений (см., например, [2–5]). Однако метод интегральных уравнений не позволяет установить точные картины разрешимости и исследовать вопросы об устойчивости решений дифференциальных краевых задач.

В связи со сказанным выше в настоящее время *актуальной проблемой* в теории краевых задач комплексного анализа является проблема, состоящая в отыскании *новых подходов* к решению дифференциальных краевых задач вида (5), которые были бы более «чувствительными», чем *метод интегральных уравнений*.

В последнее время математиками разных стран для исследования дифференциальных краевых задач широко используются так называемые *комплексно-аналитические подходы* (см., например, [5–8]), основанные на глубоких качественных аналитических свойствах рассматриваемых классов функций комплексного переменного и аналитической теории дифференциальных уравнений.

Основной целью настоящей статьи является установление существенной зависимости картины разрешимости исследуемой краевой задачи GK_n в круговых областях от радиуса рассматриваемой области. Ради краткости изложения здесь мы ограничиваемся исследованием задачи GK_n в случае, когда $n=1$ и область T^+ представляет собой произвольную круговую область вида $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $r > 0$.

2. Об одном методе решения задачи GK_1 в произвольных круговых областях. Пусть $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ и $L_r = \{t: |t| = r\}$ – граница круга T_r^+ . В случае $n=1$ представление (1) принимает вид

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (6)$$

где $\varphi^+(z)$ – голоморфная (аналитическая) в круге T_r^+ функция, принадлежащая классу $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$, значит, решения задачи GK_1 будем искать в виде (6).

Поскольку на контуре $L_r = \{t: |t| = r\}$ имеем $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$, то в рассматриваемом случае граничное условие (3) можно представить как:

$$\frac{d\varphi^+[\alpha(t)]}{dt} - \frac{2r^2}{\alpha(t)(1+r^2)}\varphi^+[\alpha(t)] = G(t) \left\{ \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - \frac{2r^2}{(1+r^2)}t \cdot \overline{\varphi^+(t)} \right\} + g(t), \quad t \in L_r. \quad (7)$$

Вводя в рассмотрение вспомогательную аналитическую функцию

$$\Phi^+(z) = z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2r^2}{1+r^2}\varphi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (8)$$

граничное условие (7) представим в виде:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G_1(t)\overline{\Phi^+(t)} + g_1(t), \quad t \in L_r, \quad (9)$$

где $G_1(t) = t \cdot \alpha(t)G(t)$, $g_1(t) = \alpha(t)g(t)$.

Заметим, что равенство (9) является граничным условием задачи типа Карлемана относительно аналитической функции $\Phi^+(z)$ класса $A(T_r^+) \cap H(L_r)$ (см., например, [4, с. 172]).

Предположим, что задача типа Карлемана с краевым условием (9) разрешима и уже найдено ее общее решение $\Phi^+(z)$. В этом случае (с учетом (8)) для нахождения аналитической компоненты $\varphi^+(z)$ искомой квазигармонической функции $W(z)$ нужно решить в классе $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$ линейное дифференциальное уравнение Эйлера вида:

$$z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2r^2}{(1+r^2)} \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (10)$$

где $\Phi^+(z)$ – общее решение задачи типа Карлемана (9).

Рассмотрим еще однородное линейное дифференциальное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (10), то есть уравнение

$$z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2r^2}{(1+r^2)} \varphi^+(z) = 0, \quad z \in T_r^+. \quad (11)$$

Обозначим через $\varphi_{o.n}(z)$ *общее решение* линейного неоднородного уравнения (10). Тогда имеем:

$$\varphi_{o.n}(z) = \varphi_{o.o}(z) + \varphi_{ч.н}(z), \quad (12)$$

где $\varphi_{o.o}(z)$ – *общее решение однородного уравнения* (11), а $\varphi_{ч.н}(z)$ – *какое-нибудь частное решение* неоднородного уравнения (10).

Нетрудно проверить (см. также [9, с. 137]), что общее решение $\varphi_{o.o}^+(z)$ однородного уравнения (11) в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ задается формулой

$$\varphi_{o.o}^+(z) = bz^{\frac{2r^2}{1+r^2}}, \quad (13)$$

где b – произвольная комплексная постоянная.

Поскольку мы ищем лишь те решения задачи GK_1 , для которых функция $\varphi_{o.n}(z) = \varphi_{o.o}(z) + \varphi_{ч.н}(z)$ должна принадлежать классу $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$, то среди решений вида (13) нас интересуют те, которые принадлежат классу $A(T_r^+) \cap H^{(m)}(L_r)$, а именно:

$$\varphi_{o.o}^+(z) = \begin{cases} 0, & r \neq 1, \\ bz, & r = 1, \end{cases} \quad (14)$$

где b – произвольная комплексная постоянная.

С учетом (14) из (13) получаем

$$\varphi_{o.n}(z) = \begin{cases} bz + \varphi_{ч.н}(z), & r = 1, \\ \varphi_{ч.н}(z), & r \neq 1, \end{cases} \quad (15)$$

где $\varphi_{ч.н}(z)$ можно найти, например, методом вариации произвольной постоянной.

Наконец, предполагая, что задача типа Карлемана (9) разрешима в классе функций $A(T_r^+) \cap H(L_r)$, а дифференциальное уравнение Эйлера (10) разрешимо в классе функций $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$, общее решение искомой задачи \mathbf{GK}_1 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ можно найти по формуле

$$W(z) = \frac{d\varphi_{о.н}(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi_{о.н}(z), \quad z \in T_r^+, \quad (16)$$

где $\varphi_{ч.н}(z)$ – общее решение неоднородного уравнения Эйлера (10), определяемое по формуле (13).

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема. Для разрешимости краевой задачи \mathbf{GK}_1 в классе квазигармонических функций 1-го рода в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы задача типа Карлемана (9) (в классе функций $A(T_r^+) \cap H(L_r)$) и дифференциальное уравнение Эйлера (10) (в классе функций $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$). При выполнении этих условий решение краевой задачи \mathbf{GK}_1 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ сводится к последовательному решению задачи типа Карлемана (9) и линейного неоднородного дифференциального уравнения Эйлера (10), причем общее решение задачи \mathbf{GK}_1 можно задавать формулой (16).

3. О неустойчивости решений задачи \mathbf{GK}_1 в круговых областях.

Как видно из формулы (16), общее решение задачи \mathbf{GK}_1 в круговых областях существенно зависит от структуры общего решения $\varphi_{о.н}(z)$ линейного дифференциального уравнения Эйлера (10).

Если $r=1$, то соответствующее (10) однородное дифференциальное уравнение (11) имеет нетривиальные аналитические в единичном круге решения вида

$$\varphi_{о.о}^+(z) = bz, \quad z \in T_1^+, \quad (17)$$

где b – произвольная комплексная постоянная.

Если же $r \neq 1$, то однородное дифференциальное уравнение (11) не имеет нетривиальных решений, аналитических в рассматриваемом круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$.

Обозначим через l_r число линейно независимых (над полем комплексных чисел) решений соответствующей однородной задачи \mathbf{GK}_1^0 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$. Тогда в силу того, что в единичном круге однородное дифференциальное уравнение (11) имеет одно линейно

независимое решение вида (16), а в неединичном круге оно вообще не имеет нетривиальных аналитических в рассматриваемом круге решений, то получаем следующее соотношение: $l_1 = l_r + 1$, где $r \neq 1$. Другими словами, при $r = 1$ происходит резкое увеличение числа линейно независимых решений *однородной задачи* GK_1^0 , т.е. при $r = 1$ здесь наблюдается явление «резонанса». Таким образом, решения задачи типа Карлемана GK_1 неустойчивы по отношению к малым изменениям границы круговой области, то есть задача GK_1 относится к классу некорректных краевых задач.

Литература

1. Расулов К.М. О решении краевой задачи Дирихле в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ. 2014. № 1(25). С. 402-409.
2. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
5. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
6. Begehr H. Complex analytic methods for partial differential equations. Singapore: World Scientific Publishing, 1994. 273 p.
7. Begehr H. Boundary value problems in complex analysis // Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. 2005. Vol. 12, №1. P. 65–85.
8. Rasulov K.M. On the Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Boundary Value Problem for Quasiharmonic Functions in a Non-Unit Disk // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, No. 1. P. 142-145.
9. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.

T.I. Mikhalyova, K.M. Rasulov
Smolensk State University

INSTABILITY OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEM OF CARLEMAN TYPE FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS UNDER SMALL CONTOUR CHANGES

Keywords: *quasiharmonic function, boundary value problem of Carleman type, differential equation, cyclic domain, instability.*

Abstract. *The paper presents a boundary value problem of Carleman type for quasiharmonic functions. It is stated that solutions of the boundary value problem of Carleman type in the classes of quasiharmonic functions of the first kind are unstable about small contour changes.*

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КЛАССАХ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ключевые слова: *краевая задача Дирихле, дифференциальное уравнение Бауэра, обобщенная гармоническая функция, круговая область, явное решение, картина разрешимости.*

В статье устанавливается разрешимость однородной краевой задачи Дирихле для одного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка, решения которого являются естественными обобщениями гармонических функций двух действительных переменных. Кроме того, устанавливается, что в случае круговых областей решения исследуемой краевой задачи существенным образом зависят от величины радиуса рассматриваемой круговой области.

1. Введение. Пусть T^+ – односвязная область, лежащая в единичном круге $U_1^+ \quad U_1^+ = \{z : |z| < 1\}$ на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, а простая гладкая замкнутая кривая L служит границей области T^+ (см. рис. 1). Рассмотрим в области T^+ дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1-z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, n – некоторое неотрицательное целое число, а $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ – неизвестная функция.

В работе [1] (см. также [2]) было установлено, что всякое регулярное решение уравнения (1) в области $T^+ \subset U_1^+$ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n B_k \left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} + \overline{\sum_{k=0}^n B_k \left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k f^+(z)}{dz^k}}, \quad (2)$$

где $B_k^n = \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z), f^+(z)$ – аналитические (голоморфные) в области T^+ функции.

Поскольку при $n=0$ решения уравнения (1) являются *гармоническими функциями* в области T^+ , в дальнейшем в случае $n \geq 1$ регулярные решения дифференциального уравнения (1) в области $T^+ \subset U_1^+$ будем называть *обобщенными гармоническими функциями порядка n в области T^+* , а функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, входящие в правую часть представления (2), для удобства назовем соответственно *первой и второй аналитическими компонентами* обобщенной гармонической функции $W(z)$. При этом класс всех обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+ будем обозначать символом $G_n(T^+)$, а через $G_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ обозначим класс обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+ , для которых в представлении (2) аналитические компоненты $\varphi^+(z), f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т.е. $\varphi^+(z), f^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно.

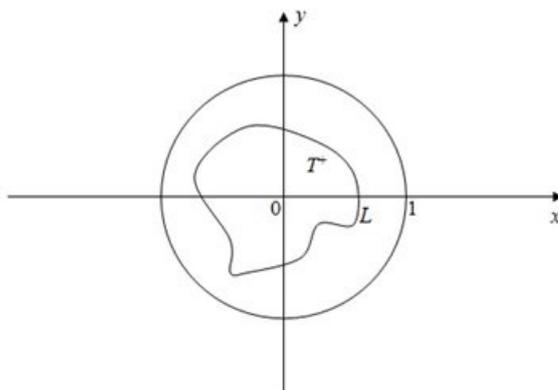


Рис. 1

В работе авторов [3] впервые была поставлена следующая краевая задача GD_n : *требуется найти все функции $W(z)$, принадлежащие классу $G_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию*

$$W(t) = h(t), \quad (3)$$

где $h(t) = a(t) + ib(t)$ – заданная на контуре L функция класса $H(L)$ (т.е. удовлетворяющая на L условию Гельдера).

Следуя [3], задачу GD_n будем называть *задачей Дирихле для обобщенных гармонических функций порядка n* , а под задачей GD_n^0 будем понимать *соответствующую однородную задачу ($h(t) \equiv 0$)*.

В случае, когда $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$ и $n=1$, в работе [3] был разработан *явный метод* решения задачи GD_1 и установлен важный факт, состоящий в том, что *однородная задача GD_1^0 имеет нетривиальные решения*.

Основная цель настоящей статьи состоит в установлении существенной зависимости решений однородной задачи \mathbf{GD}_n^0 в круговых областях $T^+ = T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $0 < r < 1$ от величины радиуса r рассматриваемой области. При этом ради краткости изложения в данной работе мы ограничиваемся исследованием задачи \mathbf{GD}_n^0 в случае $n = 2$.

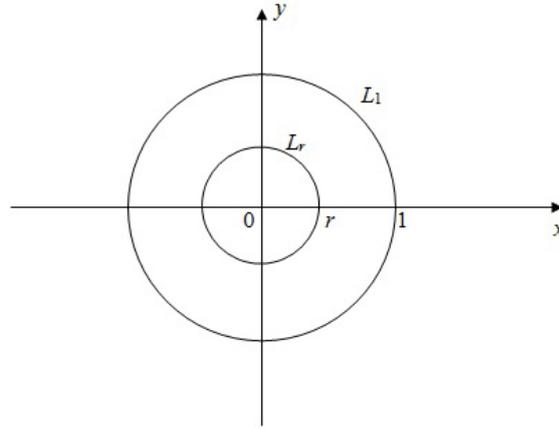


Рис. 2

2. О разрешимости однородной задачи \mathbf{GD}_2^0 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $0 < r < 1$ (см. рис. 2). В силу (2) в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $0 < r < 1$, при $n = 2$ всякую обобщенную гармоническую функцию $W(z)$ из класса $\mathbf{G}_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ можно представить в виде:

$$W(z) = \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{6\bar{z}}{1-z\bar{z}} \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12 \cdot \left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^2 \varphi^+(z) + \overline{\frac{d^2 f^+(z)}{dz^2}} + \frac{6z}{1-z\bar{z}} \cdot \overline{\frac{df^+(z)}{dz}} + 12 \cdot \left(\frac{z}{1-z\bar{z}} \right)^2 \overline{f^+(z)}, \quad z \in T^+, \quad (4)$$

где $\varphi^+(z), f^+(z)$ – аналитические в круге T_r^+ функции, принадлежащие классу $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$.

С учетом представления (4) и соотношения $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$, которое выполняется на окружности $L_r = \{t: |t| = r\}$, краевое условие однородной задачи \mathbf{GD}_2^0 можно записать в виде

$$\frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} \frac{1}{t^2} \varphi^+(t) + \overline{\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2}} + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot \frac{1}{t} \cdot \overline{\frac{df^+(t)}{dt}} + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} \frac{1}{t^2} \overline{f^+(t)} = 0, \quad t \in L_r. \quad (5)$$

Теперь ясно, что для полного решения искомой однородной задачи \mathbf{GD}_2^0 (то есть для отыскания *всех обобщенных гармонических функций* $W(z)$,

принадлежащих классу $G_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ и удовлетворяющих на L условию $W(t) = 0$) достаточно найти аналитические компоненты $\varphi^+(z), f^+(z)$ функции $W(z)$ (то есть две аналитические в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ функции $\varphi^+(z), f^+(z)$, входящие в правую часть формулы (4)).

Далее построим конструктивный **алгоритм**, с помощью которого вполне определяются аналитические компоненты $\varphi^+(z), f^+(z)$ искомой обобщенной гармонической функции $W(z)$. Для удобства разобьем этот алгоритм на несколько логических шагов.

1 шаг. Умножив обе части краевого условия (5) на t^2 , получим

$$t^2 \cdot \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot t \cdot \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} \cdot \varphi^+(t) + \\ + \frac{t^4}{r^4} \left(\overline{t^2 \cdot \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot t \cdot \frac{df^+(t)}{dt} + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} f^+(z)} \right) = 0, \quad t \in L_r. \quad (6)$$

Далее, вводя в рассмотрение вспомогательные аналитические в круге T_r^+ функции

$$\Phi^+(z) = z^2 \cdot \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot z \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} \cdot \varphi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (7)$$

$$F^+(z) = z^2 \cdot \frac{d^2 f^+(z)}{dz^2} + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot z \cdot \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} \cdot f^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (8)$$

равенство (6) можно переписать в следующем виде

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^4}{r^4} \overline{F^+(t)}, \quad t \in L_r. \quad (9)$$

Наконец, построив аналитическую в области $T_r^- = \bar{C} \setminus (T_r^+ \cup L_r)$ функцию $F^-(z)$ по формуле

$$F^-(z) = \overline{F^+ \left(\frac{r^2}{z} \right)}, \quad z \in T_r^-, \quad (10)$$

и учитывая (см., например, [4, с. 40] или [5, с. 290]), что на окружности $L_r = \{t : |t| = r\}$ выполняется условие «симметрии»

$$F^-(t) = \overline{F^+(t)}, \quad t \in L_r, \quad (11)$$

из равенства (9) получаем

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^4}{r^4} F^-(t), \quad t \in L_r. \quad (12)$$

Но равенство (12) есть граничное условие *однородной краевой задачи Римана* (см., например, [5, с. 106]) относительно ограниченной на

бесконечности кусочно аналитической функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), F^-(z)\}$ с линией скачков L_r .

2 шаг. Так как индекс задачи Римана (12) $\chi = \text{Ind}\left(-\frac{t^4}{r^4}\right) = 4$, то она безусловно разрешима и ее общее решение задается в виде (см., например, [4, с. 46] или [5, с. 110]):

$$\Phi^+(z) = -\frac{1}{r^4}P_4(z), \quad z \in T_r^+, \quad (13)$$

$$F^-(z) = \frac{1}{z^4}P_4(z), \quad z \in T_r^-, \quad (14)$$

где $P_4(z) = C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + C_4z^4$ – произвольный многочлен с комплексными коэффициентами и степени не выше 4.

На основании формул (10) и (14), здесь легко устанавливаем явный вид аналитической функции $F^+(z)$:

$$F^+(z) = \overline{F^-\left(\frac{r^2}{z}\right)} = \frac{\overline{C_0}}{r^8}z^4 + \frac{\overline{C_1}}{r^6}z^3 + \frac{\overline{C_2}}{r^4}z^2 + \frac{\overline{C_3}}{r^2}z + \overline{C_4}, \quad z \in T_r^+. \quad (15)$$

3 шаг. После того, как найдены аналитические в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ функции $\Phi^+(z)$ и $F^+(z)$, мы получаем из (7) и (8) следующие линейные дифференциальные уравнения Эйлера второго порядка относительно аналитических компонент $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ искомой обобщенной гармонической функции $W(z)$:

$$z^2 \cdot \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot z \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} \cdot \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (16)$$

$$z^2 \cdot \frac{d^2f^+(z)}{dz^2} + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot z \cdot \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} \cdot f^+(z) = F^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (17)$$

где $\Phi^+(z)$ и $F^+(z)$ – аналитические в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ функции, задаваемые формулами (13) и (15) соответственно.

Поскольку дифференциальные уравнения (16) и (17) различаются лишь правыми частями, то остановимся на подробном исследовании дифференциального уравнения (16).

В первую очередь, исследуем соответствующее (16) однородное линейное дифференциальное уравнение Эйлера, то есть уравнение вида

$$z^2 \cdot \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot z \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} \cdot \varphi^+(z) = 0, \quad z \in T_r^+. \quad (18)$$

Полагая в (18) $\varphi(z) = z^\lambda$, сначала найдем так называемое определяющее уравнение для уравнения Эйлера (18) (см., например, [6, с. 137]):

$$\lambda^2 - \frac{1-7r^2}{1-r^2}\lambda + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} = 0, \quad 0 < r < 1. \quad (19)$$

Заметим, что дискриминант D квадратного уравнения (19) представляет собой функцию $D = D(r)$ параметра r ($0 < r < 1$) и задается формулой:

$$D(r) = \frac{r^4 - 14r^2 + 1}{(1-r^2)^2}. \quad (20)$$

Нетрудно проверить, что для $r \in (0, 1)$ функция (20) имеет лишь один нуль в точке $r = r_0 = 2 - \sqrt{3}$, то есть $D(r_0) = 0$, причем $D(r) > 0$ для $r \in (0, 2 - \sqrt{3})$ и $D(r) < 0$ для $r \in (2 - \sqrt{3}, 1)$.

Таким образом, здесь возможны следующие три случая:

1. Если $r \in (0, 2 - \sqrt{3})$, то квадратное уравнение (19) имеет два *различных действительных корня*, которые определяются по формулам:

$$\lambda_1 = \frac{1-7r^2 - \sqrt{r^4 - 14r^2 + 1}}{2(1-r^2)}, \quad \lambda_2 = \frac{1-7r^2 + \sqrt{r^4 - 14r^2 + 1}}{2(1-r^2)}. \quad (21)$$

2. Если $r \in (2 - \sqrt{3}, 1)$, то квадратное уравнение (19) имеет два *комплексно сопряженных корня*, которые определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{1-7r^2 - i\sqrt{r^4 - 14r^2 + 1}}{2(1-r^2)} = \frac{1-7r^2}{2(1-r^2)} - i \frac{\sqrt{r^4 - 14r^2 + 1}}{2(1-r^2)}, \\ \lambda_4 &= \frac{1-7r^2 + i\sqrt{r^4 - 14r^2 + 1}}{2(1-r^2)} = \frac{1-7r^2}{2(1-r^2)} + i \frac{\sqrt{r^4 - 14r^2 + 1}}{2(1-r^2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

3. Если же $r = 2 - \sqrt{3}$, то квадратное уравнение (19) имеет *один (двукратный) действительный корень* $\lambda_0 = 2 - \sqrt{3}$.

Следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения (18) в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, можно задавать в следующем виде:

$$\varphi_0^+(z) = \begin{cases} l_1 z^{\lambda_1} + l_2 z^{\lambda_2}, & \text{если } r \in (0, 2 - \sqrt{3}), \\ l_1 z^{\lambda_0} + l_2 z^{\lambda_0} \cdot \ln z, & \text{если } r = 2 - \sqrt{3}, \\ l_1 z^{\lambda_3} + l_2 z^{\lambda_4}, & \text{если } r \in (2 - \sqrt{3}, 1), \end{cases} \quad (23)$$

где $l_m = \mu_m + i\eta_m$ ($m = 1, 2$) – произвольные комплексные постоянные, причем здесь $\ln z$ означает главную ветвь логарифмической функции.

Легко проверить, что для $r \in (0, 1)$ числа λ_1 и λ_2 , а также λ_3 и λ_4 , определяемые по формулам (21) и (22) соответственно, не могут быть *целыми положительными* числами. Отсюда следует, что при всех $r \in (0, 1)$ и $|l_1| + |l_2| \neq 0$ в точке $z = 0$ функция вида (23) *не будет являться*

аналитической. В свою очередь, это означает, что однородное дифференциальное уравнение (18) не имеет *аналитических* в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, *ненулевых решений*.

4 шаг. Остановимся теперь на решении *неоднородного дифференциального уравнения Эйлера* (16). Будем решать уравнение (16) *методом степенных рядов*, то есть решения этого уравнения будем искать в виде

$$\varphi^+(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad (24)$$

где a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) – некоторые комплексные числа, подлежащие определению.

Из (24) получаем

$$\frac{d\varphi^+(z)}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \quad \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}. \quad (25)$$

Подставляя в уравнение (16) вместо $\Phi^+(z)$ и $\varphi^+(z)$, $\frac{d\varphi^+(z)}{dz}$, $\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2}$ их значения, определяемые по формулам (13), (24) и (25), будем иметь:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^k + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^k + \frac{12r^4}{(1-r^2)^2} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right) = \\ & = -\frac{C_0}{r^4} - \frac{C_1}{r^4} z - \frac{C_2}{r^4} z^2 - \frac{C_3}{r^4} z^3 - \frac{C_4}{r^4} z^4. \end{aligned} \quad (26)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях равенства (26), получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{(1-r^2)^2 12r^4}{12r^8} C_0, \quad a_1 = -\frac{(1-r^2)^2}{6r^6(1+r^2)} C_1, \quad a_2 = -\frac{(1-r^2)^2}{2r^4(1+4r^2+r^4)} C_2, \\ a_3 &= -\frac{(1-r^2)^2}{6r^4(1+r^2)} C_3, \quad a_4 = -\frac{(1-r^2)^2}{12r^4} C_4, \quad a_s = 0, \quad s = 5, 6, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, всевозможные аналитические в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, решения неоднородного дифференциального уравнения Эйлера (16) задаются формулой:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^+(z) &= -\frac{(1-r^2)^2 12r^4}{12r^8} C_0 - \frac{(1-r^2)^2}{6r^6(1+r^2)} C_1 z - \frac{(1-r^2)^2}{2r^4(1+4r^2+r^4)} C_2 z^2 - \\ & - \frac{(1-r^2)^2}{6r^4(1+r^2)} C_3 z^3 - \frac{(1-r^2)^2}{12r^4} C_4 z^4, \end{aligned} \quad (28)$$

где $C_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) – произвольные комплексные постоянные.

Далее, решая дифференциальное уравнение (17) методом степенных рядов, с учетом (15), получаем всевозможные аналитические в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $0 < r < 1$, решения этого уравнения в виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}^+(z) = & \frac{(1-r^2)^2 12r^4}{12r^4} \bar{C}_4 + \frac{(1-r^2)^2}{6r^4(1+r^2)} \bar{C}_3 z + \frac{(1-r^2)^2}{2r^4(1+4r^2+r^4)} \bar{C}_2 z^2 + \\ & + \frac{(1-r^2)^2}{6r^6(1+r^2)} \bar{C}_1 z^3 + \frac{(1-r^2)^2}{12r^8} \bar{C}_0 z^4, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\bar{C}_k = \alpha_k - i\beta_k$, причем здесь $C_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) – те же самые произвольные комплексные постоянные, которые входят в правую часть формулы (28).

Наконец, подставляя в правую часть формулы (4) вместо $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ соответственно функции (28) и (29), получаем решение искомой задачи \mathbf{GD}_2^0 по следующей формуле

$$\begin{aligned} W(z) = & \frac{d^2 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^2} + \frac{6\bar{z}}{1-z\bar{z}} \cdot \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} + 12 \cdot \left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^2 \tilde{\varphi}^+(z) + \\ & + \frac{d^2 \tilde{f}^+(z)}{dz^2} + \frac{6z}{1-z\bar{z}} \cdot \frac{d\tilde{f}^+(z)}{dz} + 12 \cdot \left(\frac{z}{1-z\bar{z}} \right)^2 \tilde{f}^+(z), \quad z \in T_r^+, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\tilde{\varphi}^+(z)$ и $\tilde{f}^+(z)$ – аналитические в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $0 < r < 1$, функции, определяемые по формулам (28) и (29) соответственно.

Ввиду вышеизложенного можно заключить справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $0 < r < 1$. Тогда однородная задача Дирихле \mathbf{GD}_2^0 имеет нетривиальные решения, которые задаются формулой (30).

3. О зависимости решений задачи \mathbf{GD}_2^0 в круговых областях от радиуса рассматриваемой области. Здесь важно отметить, что общее решение задачи \mathbf{GD}_2^0 , задаваемое формулами (28)–(30), при фиксированных значениях произвольных постоянных $C_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), существенно зависит от величины радиуса r рассматриваемого круга $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$. В связи этим в дальнейшем будем обозначать через $W_r(z)$ решения задачи \mathbf{GD}_2^0 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ радиуса r .

Из формул (28)–(30) видно, что если рассмотрим два круга $T_{r_1}^+ = \{z: |z| < r_1\}$ и $T_{r_2}^+ = \{z: |z| < r_2\}$, радиусы которых достаточно близки

по величине, то есть $|r_1 - r_2| < \varepsilon$, где ε – достаточно малое положительное число, а $W_{r_1}(z)$ и $W_{r_2}(z)$ – решения задачи \mathbf{GD}_2^0 соответственно в $T_{r_1}^+ = \{z : |z| < r_1\}$ и $T_{r_2}^+ = \{z : |z| < r_2\}$, то при фиксированных значениях произвольных постоянных $C_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), входящих в формулы (28) – (29), величина $|W_{r_1}(z) - W_{r_2}(z)|$ также будет достаточно малой. Другими словами, решения однородной задачи \mathbf{GD}_2^0 в круговых областях устойчивы по отношению к малым изменениям носителя краевых условий.

Литература

1. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. 1965. Schriften 23.
2. Bauer K.W., Ruscheweyh S. Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics. Edited by A.Dold and B. Eckmann, 791), 1980. 253 p.
3. Расулов К.М., Нагорная Т.Р. О задаче Дирихле для одного дифференциального уравнения эллиптического типа // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Вып. 19. Ч. 2. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. С. 90-96.
4. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.

T.R. Nagornaya, K.M. Rasulov
Smolensk State University

ON THE SOLVABILITY OF THE HOMOGENEOUS DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE CLASSES OF SECOND-ORDER GENERALIZED HARMONIC FUNCTIONS

Keywords: *Dirichlet boundary value problem, Bauer differential equation, generalized harmonic function, circular domain, explicit solution, solvability.*

Abstract. *The article establishes the solvability of a homogeneous Dirichlet boundary value problem for a second-order elliptic differential equation. Solutions of the equation are natural generalizations of harmonic functions of two real variables. Moreover, it is established that in the case of circular domains, solutions of the boundary value problem significantly depend on the radius of concerned circular domain.*

О.В. Охлупина
Брянский государственный инженерно-технологический
университет
К.А. Ракова
Брянский государственный технический университет

УДК 517.53

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В КЛАССАХ ГЁЛЬДЕРА И БЕСОВА

Ключевые слова: *аналитические функции, граничные значения, ядро Бергмана, класс Бесова, класс Гёльдера, интегральный оператор, единичный круг, полуплоскость, функциональное пространство.*

В работе исследуется поведение интегральных операторов с ядрами С. Бергмана в случае круга и полуплоскости в пространствах аналитических функций, гладких вплоть до границы области, с граничными значениями, принадлежащими классам Гёльдера и Бесова. Показано, что интегральные операторы с ядрами Бергмана оставляют инвариантными классы Гёльдера в круге и классы Бесова в полуплоскости.

1. Постановка задачи. Вопросы исследования интегральных операторов не теряют актуальности не одно десятилетие. Задачами в этой области занимались такие математики, как К. Сейп, Ф.А. Шамоян, Б.И. Коренблум, Х. Хеденмалм и др. Широкое применение в анализе находят классы Гёльдера и Бесова. Теория функций успешно оперирует методами исследования этих классов.

В статье рассматриваются вопросы ограниченности интегрального оператора С. Бергмана в гёльдеровских и бесовских классах специальными методами комплексного и функционального анализа.

2. Интегральные операторы в классах Гёльдера в круге. Пусть D – единичный круг на комплексной плоскости C , а $H(D)$ – множество голоморфных функций в D .

Пространством Бергмана назовём пространство $A^p(D) = \{f : f \in L^p(D) \cup H(D)\}$.

Для $z, \zeta \in D$ определим класс Гёльдера $\Lambda_\beta(D)$, $0 < \beta < 1$, включающий в себя функции, удовлетворяющие условию: $|f(\zeta) - f(z)| \leq C|\zeta - z|^\beta$.

$$K_\alpha(\zeta, z) - \text{ядро Бергмана порядка } \alpha, K_\alpha(\zeta, z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \frac{(1 - |\zeta|^2)^\alpha}{(1 - z\bar{\zeta})^{\alpha+2}}.$$

Рассмотрим функциональное пространство X в D , такое, что $X \subset L^1(dm_2(\zeta))$, где $dm_2(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)^\alpha$.

$K_\alpha(f)(z) = \int_D K_\alpha(\zeta, z) f(\zeta) dm_2(\zeta)$ – интегральный оператор с ядром Бергмана порядка α на X , $z \in D$.

Пусть $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $z = re^{i\varphi}$.

Теорема 1. Если $f \in \Lambda_\beta(D)$, $0 < \beta < 1$, $F(z)$ – голоморфная в D функция, имеющая вид:
$$F(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \frac{(1 - \rho^2)^\alpha f(\rho e^{i\theta})}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \rho d\rho d\theta,$$
 то $F \in \Lambda_\beta(D)$. Причём справедлива оценка: $|F'(z)| \leq \frac{C}{(1 - |z|)^{1-\beta}}.$

Доказательство теоремы несложно провести с применением классической теоремы Харди – Литтлвуда.

При $\beta = 1$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если $f \in \Lambda_1(D)$, $F(z)$ – голоморфная в D функция:
$$F(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \frac{(1 - \rho^2)^\alpha f(\rho e^{i\theta})}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \rho d\rho d\theta,$$
 то $F(z)$ принадлежит классу А. Зигмунда в D , т.е. справедлива оценка: $|F''(z)| \leq \frac{C}{1 - |z|}.$

Аналог теорем 1 и 2 сохраняется и в случае $0 < \beta < +\infty$ для класса $\tilde{\Lambda}_\beta(D)$, состоящего из функций $f \in C(D)$, для которых $\frac{\partial^m f}{\partial \theta^m} \in \tilde{\Lambda}_{\beta - [\beta]}(D)$, где $m = [\beta]$, $[\beta]$ – целая часть β т.е.
$$\left| \frac{\partial^m f(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta^m} - \frac{\partial^m f(re^{i\varphi})}{\partial \theta^m} \right| \leq C |\zeta - z|^\beta.$$

Теорема 3. Если $\frac{\partial^m f}{\partial \theta^m} \in \tilde{\Lambda}_{\beta - [\beta]}(D)$, где $m = [\beta]$, $[\beta]$ – целая часть β , то $F \in \tilde{\Lambda}_{\beta - [\beta]}(D)$.

Доказательство.

1. Докажем, что при справедливости оценки

$$\left| \frac{\partial f(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta} - \frac{\partial f(re^{i\varphi})}{\partial \theta} \right| \leq C|\zeta - z|^\beta \text{ верно неравенство } |F'(z)| \leq \frac{\tilde{C}}{(1-|z|)^{1-\beta}}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{(\alpha+1)}{\pi} (-\alpha-2) \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+3}} (-\rho e^{-i\theta}) f(\rho e^{i\theta}) d\theta \rho d\rho = \\ &= \frac{(\alpha+1)}{\pi z i} \int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha \rho \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) d \left(\frac{1}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \right) d\rho. \end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям, получим:

$$F'(z) = \frac{(\alpha+1)}{\pi i z} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \left(\frac{\partial f(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta} - \frac{\partial f(re^{i\varphi})}{\partial \theta} \right) d\theta \rho d\rho.$$

$$|F'(z)| \leq \frac{(\alpha+1)}{\pi i z} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(1-\rho^2)^\alpha}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \right| \left| \frac{\partial f(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta} - \frac{\partial f(re^{i\varphi})}{\partial \theta} \right| d\theta \rho d\rho \leq$$

$$\leq \frac{(\alpha+1)}{\pi i z} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(1-\rho^2)^\alpha}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \right| C|\zeta - z|^\beta d\theta \rho d\rho$$

Применяя теорему 1, получаем, что $|F'(z)| \leq \frac{\tilde{C}}{(1-|z|)^{1-\beta}}$.

2. Покажем, что из $\left| \frac{\partial^2 f(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 f(re^{i\varphi})}{\partial \theta^2} \right| \leq C|\zeta - z|^\beta$ следует

$$|F''(z)| \leq \frac{\tilde{C}_1}{(1-|z|)^{1-\beta}}.$$

$$F''(z) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha f(\rho e^{i\theta})}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+4}} e^{-2i\theta} d\theta \rho^3 d\rho.$$

Применяя к последнему выражению метод интегрирования по частям дважды и учитывая, что $f(\rho e^{i\theta})$ – 2π -периодическая функция,

$$\text{получаем: } F''(z) = K \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \frac{\partial^2 f(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta^2} d\theta \rho d\rho.$$

Повторяя рассуждения пункта 1, приходим к оценке $|F''(z)| \leq \frac{\tilde{C}_1}{(1-|z|)^{1-\beta}}$.

3. Покажем, что из $\left| \frac{\partial^m f(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta^m} - \frac{\partial^m f(re^{i\varphi})}{\partial \theta^m} \right| \leq C|\zeta - z|^\beta$ следует

$$|F^{(m)}(z)| \leq \frac{\tilde{C}_2}{(1-|z|)^{1-\beta}}.$$

Действуя по аналогии с предыдущими пунктами, имеем:

$$F^{(m)}(z) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha f(\rho e^{i\theta})}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2+m}} e^{-mi\theta} d\theta \rho^{m+1} d\rho.$$

Интегрируя по частям m раз с учётом 2π -периодичности функции $f(\rho e^{i\theta})$, получим: $F^{(m)}(z) = \tilde{K} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \frac{\partial^m f(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta^m} d\theta \rho d\rho$.

Откуда несложно получить, что $|F^{(m)}(z)| \leq \frac{\tilde{C}_2}{(1-|z|)^{1-\beta}}$.

3. Интегральные операторы в пространствах Бесова в полуплоскости. Пусть $C_+ = \{z : z = x + iy, x \in R, y > 0\}$ – верхняя полуплоскость комплексной плоскости.

Установим аналог классической теоремы М. Рисса для классов О. Бесова в полуплоскости. Введём необходимые обозначения.

Пусть $z, \zeta \in C_+$, тогда ядро С. Бергмана имеет вид

$$K(\zeta, z) = \frac{(\text{Im } \zeta)^\alpha}{(\bar{\zeta} - z)^{\alpha+2}}.$$

Обозначим через $A_\beta^{p,q}$ пространство аналитических в C_+ функций с граничными значениями из классов Бесова.

Если $f \in L^p(R)$, то гармоническое продолжение функции f в C_+ имеет вид $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{R^n} P_y(t) f(x+t) dt$, где $P_y(t) = \frac{C_n y}{(t^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ – ядро Пуассона, C_n – положительная константа, зависящая только от n .

Теорема 4. Пусть „ $f \in \Lambda_\beta^{p,q}(R)$, $1 \leq p, q < +\infty$, $0 < \beta \leq 1$. Тогда следующий интегральный оператор

$$F(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{C_+} \frac{\tau^\alpha}{((\xi-x)+i(\tau+y))^{\alpha+2}} u(\xi+i\tau) d\xi d\tau$$

отображает пространство $\Lambda_\beta^{p,q}(R)$ на $A_\beta^{p,q}$, причём $\|F\|_{A_\beta^{p,q}(C_+)} \leq C \|u\|_{\Lambda_\beta^{p,q}(R)}$.

Доказательство.

$$1. F'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_+} \frac{\tau^\alpha}{((\xi-x)+i(\tau+y))^{\alpha+3}} u(\xi+i\tau) d\xi d\tau. \text{ Интегрируя по}$$

$$\begin{aligned} \text{частям по } \tau \text{ получим: } F'(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha \frac{\partial u(\xi+i\tau)}{\partial \tau} + \tau^{\alpha-1} u(\xi+i\tau)}{((\xi-x)+i(\tau+y))^{\alpha+2}} d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha \frac{\partial u(\xi+i\tau)}{\partial \tau}}{((\xi-x)+i(\tau+y))^{\alpha+2}} d\xi d\tau + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^{\alpha-1} u(\xi+i\tau)}{((\xi-x)+i(\tau+y))^{\alpha+2}} d\xi d\tau \right). \end{aligned}$$

$$\text{Очевидно, что } u(\xi+i\tau) = \int_\tau^{+\infty} \frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial r} dr.$$

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha}{((\xi-x)+i(\tau+y))^{\alpha+2}} \frac{1}{\tau} \int_\tau^{+\infty} \frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial r} dr d\xi d\tau.$$

$$|F'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha}{((\xi-x)^2 + (\tau+y)^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{1}{\tau} \int_\tau^{+\infty} \left| \frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial r} \right| dr d\xi d\tau.$$

2. Пусть функция $\psi(x) \in L^q(R)$, причём $\|\psi\|_{L^q} \leq C$, $C - const$. Тогда, сделав замену $\xi - x = t$ и применив неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) |F'(z)| dx \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha}{((\xi-x)^2 + (\tau+y)^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{1}{\tau} \int_\tau^{+\infty} \left| \frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial r} \right| dr d\xi d\tau dx \leq \\ &\leq \|\psi(x)\|_{L^q} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha}{(t^2 + (\tau+y)^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{1}{\tau} \int_\tau^{+\infty} \left\| \frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial r} \right\|_{L^p} dr dt d\tau. \end{aligned}$$

По следствию из теоремы Ф. Рисса:

$$\|F'(z)\|_{L^p} \leq \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha}{(t^2 + (\tau + y)^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{1}{\tau} \int_\tau^{+\infty} \left\| \frac{\partial u(\xi + ir)}{\partial \tau} \right\|_{L^p} dr dtd\tau.$$

3. Пусть функция $\psi(x) \in L^q(R_+)$, такая, что $\|\psi\|_{L^q} \leq C_1$, $C_1 - const$, $R_+ = [0; +\infty)$.

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \varphi(y) y^{1-\beta-1/q} \|F'(z)\|_{L^p} dy \leq \\ & \leq \int_0^{+\infty} \varphi(y) y^{1-\beta-1/q} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha}{(t^2 + (\tau + y)^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{1}{\tau} \int_\tau^{+\infty} \left\| \frac{\partial u(\xi + ir)}{\partial \tau} \right\|_{L^p} dr dtd\tau dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл: $I \leq \int_0^{\tau+y} \frac{dt}{(\tau + y)^{\alpha+2}} + \int_{\tau+y}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+2}} = \frac{C^*}{(\tau + y)^{\alpha+2}}$. Тогда:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \varphi(y) y^{1-\beta-1/q} \|F'(z)\|_{L^p} dy \leq \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha \varphi(y) y^{1-\beta-1/q}}{(\tau + y)^{\alpha+1}} \frac{1}{\tau} \int_\tau^{+\infty} \left\| \frac{\partial u(\xi + ir)}{\partial \tau} \right\|_{L^p} dr d\tau dy. \\ I_1 &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha}{(\tau + y)^{\alpha+1}} \frac{1}{\tau} \int_\tau^{+\infty} \left\| \frac{\partial u(\xi + ir)}{\partial \tau} \right\|_{L^p} dr d\tau \leq \int_0^y \frac{y^{\alpha-1} \Phi(\tau) d\tau}{y^{\alpha+1}} + \int_y^{+\infty} \frac{\tau^{\alpha-1} \Phi(\tau) d\tau}{\tau^{\alpha+1}}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \Phi(\tau) = \int_\tau^{+\infty} \left\| \frac{\partial u(\xi + ir)}{\partial \tau} \right\|_{L^p} dr.$$

Рассмотрим первый интеграл суммы:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(y) y^{1-\beta-1/q} \int_0^y \frac{y^{\alpha-1} \Phi(\tau) d\tau}{y^{\alpha+1}} dy = \int_0^{+\infty} \varphi(y) y^{1-\beta-1/q} \frac{1}{y^2} \int_0^y \Phi(\tau) d\tau dy \leq$$

(применим неравенство Гёльдера)

$$\leq \|\varphi\|_{L^p} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{y^{1+\beta+1/q}} \int_0^y \Phi(\tau) d\tau \right)^q dy \right)^{1/q} \leq (\text{применим неравенство Харди})$$

$$\leq C^* \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^{\beta q+1}} (\Phi(\tau))^q dy \right)^{1/q} \leq C^* \left(\int_0^{+\infty} \frac{y^{-\beta q+q}}{y} \left\| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right\|_{L^p}^q dy \right)^{1/q} < +\infty.$$

Ко второму интегралу применим ту же схему.

Вернёмся к началу доказательства. Осталось рассмотреть интеграл

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^\alpha}{((\xi - x) + i(\tau + y))^{\alpha+2}} \frac{\partial u(\xi + ir)}{\partial \tau} d\xi d\tau \quad \text{и применить}$$

последовательно пункты 2) и 3).

Таким образом, применяя следствие теоремы Ф. Рисса, мы доказали утверждение теоремы и неравенство $\|F\|_{A_{\beta}^{p,q}(C_+)} \leq C \|u\|_{\Lambda_{\beta}^{p,q}(R)}$.

Если $C_+^2 = C_+ \times C_+$, то несложно доказать аналог теоремы 4, используя применяемые выше рассуждения:

Теорема 5. Пусть $f \in \Lambda_{\beta_1, \beta_2}^{p_1, p_2, q_1, q_2}(R^2)$, $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 < +\infty$, $0 < \beta_1, \beta_2 \leq 1$ и $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ определяется следующим образом:

$$u(x, y) = \int_{R^n} \int_{R^n} P_{y_1}(t_1) P_{y_2}(t_2) f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) dt_1 dt_2.$$

Тогда оператор

$$F(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_{C_+} \int_{C_+} \frac{\tau_1^{\alpha_1}}{((\xi_1 - x_1) + i(\tau_1 + y_1))^{\alpha_1 + 2}} \cdot \frac{\tau_2^{\alpha_2}}{((\xi_2 - x_2) + i(\tau_2 + y_2))^{\alpha_2 + 2}} \times$$

$\times u(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) d\xi_1 d\xi_2 d\tau_1 d\tau_2$ отображает пространство $\Lambda_{\beta_1, \beta_2}^{p_1, p_2, q_1, q_2}$ на $A_{\beta_1, \beta_2}^{p_1, p_2, q_1, q_2}$, причём $\|F\|_{A_{\beta_1, \beta_2}^{p_1, p_2, q_1, q_2}(C_+)} \leq C \|u\|_{\Lambda_{\beta_1, \beta_2}^{p_1, p_2, q_1, q_2}(R^2)}$.

Условие $f \in \Lambda_{\beta_1, \beta_2}^{p_1, p_2, q_1, q_2}(R^2)$ означает, что

$$\int_0^{+\infty} y_2^{q_2(1-\beta_2)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} y_1^{q_1(1-\beta_1)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} \right|^{p_1} dx_1 \right)^{q_1/p_1} \frac{dy_1}{y_1} \right)^{p_2/q_1} dx_1 \right)^{q_2/p_2} \frac{dy_2}{y_2} < +\infty.$$

Можно также получить аналог теоремы 4 в случае $p, q < 1$, $q = p$. Здесь применяется иной подход к доказательству, основанный на использовании следующих рассуждений.

Пусть $\Delta_{k,n} = \{(x, y) : 2^k n \leq x \leq 2^{k+1}(n+1), 2^k \leq y \leq 2^{k+1}, n, k \in Z\}$,

$\Delta_{k,n} \cap \Delta_{l,m} = \emptyset$, если $k, n \neq l, m$. Тогда при $\int_{C_+} u(x, y) dx dy < +\infty$

выполняется $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\Delta_{k,n}} u(x, y) dx dy < +\infty$. Кроме того, очевидно, что

размеры указанных квадратов равны 2^k .

Лемма 1. Если $u(x, y) \geq 0$ и для любого круга

$$u(x_0, y_0) \leq \frac{C}{|K_\rho(x_0, y_0)|} \int_{K_\rho(x_0, y_0)} u(x, y) dx dy,$$

то $\sum_{k,n} \max_{(x,y) \in \Delta_{k,n}} |u(x, y)| |\Delta_{k,n}| \leq C \int_{C_+} |u(x, y)| dx dy$.

Если же $C_1 = \{(x, y) : -\infty \leq x \leq +\infty, 0 < y \leq 1\}$, то область разбивается на

$$\Delta_{k,n} = \left\{ (x, y) : \frac{n}{2^k} \leq x \leq \frac{(n+1)}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}} \leq y \leq \frac{1}{2^k}, n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Теорема 6. Пусть $f \in \Lambda_{\beta}^{p,q}(R)$, $p, q < 1$, $q = p$, $0 < \beta \leq 1$. Тогда интегральный оператор

$$F(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_{C_+} \frac{\tau^{\alpha}}{((\xi - x) + i(\tau + y))^{\alpha+2}} u(\xi + i\tau) d\xi d\tau \quad \text{отображает}$$

пространство $\Lambda_{\beta}^{p,q}$ на $A_{\beta}^{p,q}$, причём $\|F\|_{A_{\beta}^{p,q}(C_+)} \leq C \|u\|_{\Lambda_{\beta}^{p,q}(R)}$.

Замечание. Здесь предполагается, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial \tau} dx \right|^p d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|^p dx$.

Литература

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
2. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теорема вложения. М.: Наука, 1981. 456 с.
3. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
4. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986. 450 с.
5. Шамоян Ф.А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сибирский матем. журнал. 1990. Т. 31, № 2. С. 350-365.
6. Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н., Введение в теорию весовых L_p -классов мероморфных функций. Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009. 153 с.

O.V. Okhlupina

Bryansk state engineering-technological University

K.A. Rakova

Bryansk state technical University

ON INTEGRAL OPERATORS IN THE HELDER AND BESOV CLASSES

Keywords: analytic functions, boundary values, Bergman kernel, Besov class, Helder class, integral operator, unit circle, half-plane, function space.

Abstract. In this paper, we study the behavior of integral operators with S . Bergman kernels in the case of a circle and a half-plane in the spaces of analytic functions that are smooth up to the boundary of the domain, with boundary values belonging to the Helder and Besov classes. It is shown that integral operators with Bergman kernels leave invariant the Helder classes in the circle and the Besov classes in the half-plane.

О СУММАХ ФЕЙЕРА СОПРЯЖЕННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЁВА И ПРИБЛИЖЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: рациональные ряды Фурье, суммы Фейера, сопряженные функции, условие Литшица, функции со степенной особенностью, оценки приближений, асимптотическое поведение, наилучшие приближения.

Настоящая работа посвящена исследованию приближений на отрезке $[-1, 1]$ сопряженных функций суммами Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышёва – Маркова. Во введении авторы приводят основные результаты, относящиеся к исследованиям приближений сопряженных функций суммами Фейера в полиномиальном случае и операторам Фейера в рациональной аппроксимации. В основной части настоящей статьи вводятся в рассмотрение суммы Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышёва – Маркова, указываются их основные свойства и устанавливается интегральное представление приближений сопряженных на отрезке функций данным методом. Изучаются приближения сопряженной функции с плотностью, имеющей степенную особенность. В частности, устанавливаются оценки в зависимости от положения точки x на отрезке $[-1, 1]$, асимптотическое выражение при $n \rightarrow \infty$ мажоранты приближений, устанавливается оптимальное значение параметра, при котором мажоранта имеет наибольшую скорость убывания. В качестве следствия приводятся соответствующие оценки приближений на отрезке $[-1, 1]$ исследуемой сопряженной функции суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Введение. Метод приближений средними арифметическими рядов Фурье 2π -периодических функций уходит своими корнями в работы Л. Фейера [1], А. Лебега [2] и к настоящему времени достаточно хорошо изучен, находя широкое применение в полиномиальной аппроксимации (см., напр., [3 – 6]).

Изучению приближений сопряженных 2π -периодических функций суммами Фейера сопряженных тригонометрических рядов Фурье посвящены работы И.И. Привалова [7], Г. Алексича [8], А.В. Ефимова [9; 10], С.Б. Стечкина [11] и других известных специалистов в области

теории функций. Л.П. Фалалеев [12] получил асимптотически точные оценки приближений сопряжённых функций на классах Липшица порядка $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, средними Чезаро сопряжённого ряда Фурье в тригонометрическом случае. Порядковые оценки приближений 2π -периодических сопряженных функций суммами Фейера сопряженных тригонометрических рядов Фурье на классах $\bar{H}^{(\gamma)}, 0 < \gamma < 1$, были получены И.И. Приваловым [7], при $\gamma = 1$ порядковая оценка была установлена Г. Алексичем [13]. Точная верхняя грань уклонений сумм Фейера сопряженных рядов Фурье на классах $\bar{H}^{(1)}$ получена С.А. Теляковским [14].

В 1956 году М.М. Джрбашян [15] ввел рациональные ряды Фурье, обобщающие соответствующие классические тригонометрические ряды. Продолжая эти исследования, В.Н. Русак [16; 17] ввёл рациональные операторы типа Фейера, Джексона, Валле Пуссена.

Рациональные операторы Джексона и Валле Пуссена нашли широкое применение не только в теории рациональных приближений с фиксированными полюсами, но и в теории рациональных приближений со свободными полюсами. С их помощью были найдены новые классы функций, отражающие особенности рациональной аппроксимации (см., напр., [18–21]). Рациональные операторы Фейера такого применения не нашли и практически не использовались.

Е.А. Ровба [22] ввел интегральные операторы типа Фейера на отрезке $[-1, 1]$, ассоциированные с системой рациональных функций, введённой М.М. Джрбашяном и А.А. Китбаляном [23], и изучил их аппроксимационные свойства [24; 25]. Исследования в этом направлении были продолжены К.А. Смотрицким [26].

Изучение рациональной аппроксимации сопряжённых функций носит эпизодический характер. В.Н. Русак и И.В. Рыбаченко [27] нашли сравнительные порядковые оценки для рациональных приближений взаимно сопряжённых в смысле Гильберта функций действительной переменной в пространстве непрерывных 2π -периодических функций.

В [28] были введены ряды Фурье на отрезке $[-1, 1]$ по одной системе алгебраических дробей Чебышёва – Маркова, которая является обобщением классической системы полиномов Чебышёва первого рода. В частности, был построен интеграл Дирихле и изучены его аппроксимационные свойства в приближениях некоторых индивидуальных функций. В [29] авторами были построены суммы Фейера введенных ранее рациональных рядов Фурье – Чебышёва и также изучены их аппроксимационные свойства. В частности, установлено, что последовательности сумм Фейера равномерно сходятся для непрерывных на отрезке функций и отражают особенности рациональной аппроксимации функций со степенной особенностью,

доставляя в некоторых случаях приближения более высоких порядков в сравнение с полиномиальным случаем. Одним из результатов дальнейших исследований в этом направлении было построение сопряженного ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышёва – Маркова и исследование приближений его частичными суммами сопряженных на отрезке $[-1, 1]$ функций вида

$$\hat{f}(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t)}{t^2-x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1,1], \quad (1)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши [30].

Целью настоящей работы является построение сумм Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышёва – Маркова и исследование их аппроксимационных свойств. Представляет интерес получить аналоги теорем о приближениях функций из классов $\bar{H}^{(\alpha)}[-1,1]$ сопряженных функций с плотностью, удовлетворяющей на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица порядка $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, а также исследовать приближения некоторых индивидуальных функций изучаемым методом суммирования.

1. Сопряженные суммы Фейера. Известно [30], что для частичных сумм сопряженного ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышёва – Маркова имеет место интегральное представление

$$\hat{s}_{2n}(f, x) = \hat{f}(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(t) \rho(t, a) \hat{D}_{2n}(t, x) dt, \quad x \in (-1,1), \quad (2)$$

где

$$\hat{D}_{2n}(t, x) = \frac{M_{2n+2}(t)N_{2n}(x) - M_{2n}(t)N_{2n+2}(x)}{M_2(t) - M_2(x)},$$

– сопряженное ядро Дирихле, $\hat{f}(x)$ – сопряженная функция вида (1),

$$M_{2n}(x) = \cos n\theta, \quad N_{2n}(x) = \sin n\theta, \quad \cos \theta = x \sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}}, \quad x \in [-1,1], \quad a \geq 0,$$

– соответственно алгебраические косинус и синус-дроби Чебышёва – Маркова,

$$\rho(x, a) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Интеграл в (2) понимается в смысле главного значения по Коши.

Арифметические средние

$$\hat{\sigma}_{2n}(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \hat{s}_{2k}(f, x), \quad x \in [-1, 1], \quad (3)$$

естественно назвать суммами Фейера рациональных сопряженных рядов Фурье – Чебышёва.

Введем следующие обозначения

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(f, x, \alpha) = \hat{f}(x) - \hat{\sigma}_{2n}(f, x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (4)$$

Получим компактное выражение для величин (3) и (4). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Имеют место представления*

$$\hat{\sigma}_{2n}(f, x) = \hat{f}(x) + \frac{1}{2\pi\lambda(u)(n+1)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{\sin[2(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^2(v-u)} dv; \quad (5)$$

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(f, x, \alpha) = -\frac{1}{2\pi\lambda(u)(n+1)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{\sin[2(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^2(v-u)} dv, \quad (6)$$

где

$$\varphi(u, v) = \int_u^v \lambda(y) dy, \quad \lambda(y) = \frac{1 - \alpha^4}{1 + 2\alpha^2 \cos 2y + \alpha^4}, \quad \alpha \in [0, 1), \quad x = \cos u. \quad (7)$$

Суммы Фейера (3) представляют собой алгебраическую дробь вида

$$x\sqrt{1-x^2} \frac{p_{n-1}(x^2)}{(1+\alpha^2 x^2)^n}, \quad p_{n-1}(x) \in P_{n-1}$$

и обращаются в нуль на константах, то есть $\hat{\sigma}_{2n}(1, x) = 0$.

Доказательство. Известно, что для частичных сумм (2) имеет место представление

$$\hat{s}_{2k}(f, x) = \hat{f}(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda(u)}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\cos[(2k+1)\varphi(u, v)]}{\sin(v-u)} \sqrt{\lambda(v)} dv,$$

где $\lambda(u), \varphi(u, v)$ из (7). Просуммировав правую и левую части последнего соотношения по k , $k = 0, \dots, n$, и разделив на $(n+1)$, получим

$$\hat{\sigma}_{2n}(f, x) = \hat{f}(x) + \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda(u)(n+1)}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{\sin[2(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin(v-u)\sin\varphi(u, v)} \sqrt{\lambda(v)} dv.$$

Чтобы прийти к (5), достаточно воспользоваться легко проверяемой формулой $\sin\varphi(u, v) = \sin(v-u)\sqrt{\lambda(v)\lambda(u)}$.

Из (4) и (5) сразу же следует (6). Третье и четвертое утверждение настоящей теоремы непосредственно вытекает из (3) и результатов работы [30, т. 1]. Теорема 1 доказана.

2. Приближения функций из классов $\bar{H}^{(\gamma)}[-1, 1]$. Изучим аппроксимационные свойства сумм Фейера сопряжённых рядов Фурье – Чебышёва в приближениях сопряженных функций с плотностью f , удовлетворяющей условию Липшица порядка $\gamma, 0 < \gamma \leq 1$, с константой равной единице, то есть условию вида

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|^\gamma, \quad 0 < \gamma \leq 1.$$

Отметим, что в нашем случае при каждом значении $n, n = 1, 2, \dots$, у аппроксимирующей функции могут выбираться соответствующие значения параметра α , т. е., вообще говоря, $\alpha = \alpha(n)$. В связи с этим будем полагать, что везде в дальнейшем выполняется следующее условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha)n = \infty. \quad (8)$$

Теорема 2. Если функция $f \in H^{(\gamma)}[-1, 1], \gamma \in (0, 1)$, то справедливы неравенства

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(f, x, \alpha)| < c_1(\gamma) \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n+1)\lambda(u)} \right)^\gamma + \delta_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha), \quad x \in [-1, 1], \gamma \in (0, 1), \quad (9)$$

где

$$\delta_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha) = \begin{cases} c_2(\gamma) \left(\frac{\sqrt{2|x|}}{(n+1)\lambda(u)} \right)^{2\gamma}, & \gamma \in (0, 1/2), \\ \frac{\sqrt{2|x|} \ln[(n+1)\lambda(u)]}{(n+1)\lambda(u)}, & \gamma = 1/2, \\ \frac{|x|^\gamma}{2^{\gamma-1}(n+1)\lambda(u)}, & \gamma \in (1/2, 1). \end{cases} \quad (10)$$

$$c_1(\gamma) = \frac{2^{2-\gamma}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t^{2-\gamma}} dt + \frac{1}{1-\gamma}, \quad c_2(\gamma) = \frac{2^{2-4\gamma}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t^{2-2\gamma}} dt + \frac{1}{2^{4\gamma}(1-2\gamma)},$$

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(f, x, \alpha)| \leq \frac{\sqrt{1-x^2}}{(n+1)\lambda(u)}, \quad x \in [-1, 1], \gamma = 1, \quad (11)$$

$\lambda(u)$ из (7).

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением приближений (6). В силу π -периодичности подынтегральной функции после некоторых преобразований придем к представлению

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(f, x, \alpha) = -\frac{1}{2\pi\lambda(u)(n+1)} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\cos(t+u)) - f(\cos u)) \frac{\sin[2(n+1)\varphi(+u, t)] dt}{\sin^2 t} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\cos(t-u)) - f(\cos u)) \frac{\sin[2(n+1)\varphi(-u, t)] dt}{\sin^2 t} \right], \quad x = \cos u. \quad (12)$$

Тогда

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(f, x, \alpha)| \leq I_{2n}(+u) + I_{2n}(-u), \quad x = \cos u, n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где

$$I_{2n}(\pm u) = \frac{1}{2\pi\lambda(u)(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t \pm u) - \cos u|^\gamma \frac{|\sin[2(n+1)\varphi(\pm u, t)]|}{\sin^2 t} dt.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} |\cos(t \pm u) - \cos u|^\gamma &= \left| 2 \sin \frac{t}{2} \sin \left(u \pm \frac{t}{2} \right) \right|^\gamma = \\ &= |\sin u \sin t \pm 2 \cos u \sin^2 \frac{t}{2}|^\gamma \leq |\sin u|^\gamma |\sin t|^\gamma + 2^\gamma |\cos u|^\gamma \left| \sin \frac{t}{2} \right|^\gamma, \end{aligned}$$

то

$$I_{2n}(\pm u) \leq |\sin u|^\gamma I_1 + 2^\gamma |\cos u|^\gamma I_2, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi\lambda(u)(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin[2(n+1)\varphi(\pm u, t)]|}{\sin^{2-\gamma} t} dt, \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi\lambda(u)(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\gamma} \frac{t}{2} \frac{|\sin[2(n+1)\varphi(\pm u, t)]|}{\sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

Исследуем каждый из двух интегралов по отдельности. Очевидно, что их асимптотика определяется поведением подынтегральной функции в сколь угодно малой окрестности нуля. Учитывая сказанное, для интеграла I_1 имеем

$$I_1 = \frac{1}{2\pi\lambda(u)(n+1)} \left(\int_0^{\delta_n} + \int_{\delta_n}^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{|\sin[2(n+1)\varphi(\pm u, t)]|}{\sin^{2-\gamma} t} dt,$$

где $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\gamma \in (0, 1)$. Для первого интеграла воспользуемся соотношениями

$$\frac{1}{\sin^{2-\gamma} t} - \frac{1}{t^{2-\gamma}} = O(1), \quad (\gamma \geq 0, |t| \leq \pi/2),$$

и $\sin[2(n+1)\varphi(\pm u, t)] \sim \sin[2(n+1)\lambda(u)t], u \rightarrow 0$. Для второго применим оценки $|\sin[2(n+1)\varphi(\pm u, t)]| \leq 1$ и $\sin t \geq (2/\pi)t$. Тогда

$$I_1 < \frac{1}{2\pi\lambda(u)(n+1)} \left[\int_0^{\delta_n} \frac{|\sin[2(n+1)\lambda(u)t]|}{t^{2-\gamma}} dt + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-\gamma} \int_{\delta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{2-\gamma}} + O\left(\int_0^{\delta_n} |\sin[2(n+1)\lambda(u)t]| dt\right) \right], \quad n \rightarrow \infty.$$

Положив $\delta_n = \pi / (2(n+1)\lambda(u))$ и выполнив в первом и третьем интегралах замену переменного по формуле $2(n+1)\lambda(u)t \mapsto t$, придем к оценке

$$I_1 < \frac{c_1(\gamma)}{4[(n+1)\lambda(u)]^\gamma} + O\left(\frac{1}{(n+1)\lambda(u)}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где $c_1(\gamma)$ определена в формулировке теоремы 2.

Займемся интегралом I_2 . Перепишем его в виде

$$I_2 = \frac{1}{2\pi\lambda(u)(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin[2(n+1)\varphi(\pm u, t)]|}{4\cos^2 \frac{t}{2} \sin^{2-2\gamma} \frac{t}{2}} dt.$$

Рассуждая как в случае с интегралом I_1 , получим

$$I_2 < \frac{1}{4\pi\lambda(u)(n+1)} \left[\int_0^{\delta_n} \frac{|\sin[2(n+1)\lambda(u)t]|}{\left(\frac{t}{2}\right)^{2-2\gamma}} dt + \pi^{2-2\gamma} \int_{\delta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{2-2\gamma}} + O\left(\int_0^{\delta_n} |\sin[2(n+1)\lambda(u)t]| dt\right) \right], \quad n \rightarrow \infty.$$

При $\delta_n = \pi / (2(n+1)\lambda(u))$ после соответствующих преобразований последняя оценка приводится к виду

$$I_2 < \frac{2}{\pi[4(n+1)\lambda(u)]^{2\gamma}} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^{2-2\gamma}} dt + \frac{\pi^{1-2\gamma}}{4(n+1)\lambda(u)} \int_{\delta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{2-2\gamma}} + O\left(\frac{1}{[(n+1)\lambda(u)]^2}\right).$$

При $\gamma \in (0, 1/2)$ следует, что

$$I_2 < \frac{c_2(\gamma)}{4[(n+1)\lambda(u)]^{2\gamma}} + O\left(\frac{1}{(n+1)\lambda(u)}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

где $c_2(\gamma)$ определена в формулировке теоремы 2.

Если $\gamma = 1/2$, то

$$I_2 < \frac{\ln[(n+1)\lambda(u)]}{4(n+1)\lambda(u)} + O\left(\frac{1}{(n+1)\lambda(u)}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Наконец, если $\gamma \in (1/2, 1)$, то

$$I_2 < \frac{1}{2^{2\gamma+1}(n+1)\lambda(u)} + O\left(\frac{1}{[(n+1)\lambda(u)]^{2\gamma}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Из (15)–(18) в (14) следует, что

$$I_{2n}(\pm u) < \frac{c_1(\gamma)}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n+1)\lambda(u)} \right)^\gamma + \frac{1}{2} \delta_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha), \quad x \in [-1, 1], \gamma \in (0, 1),$$

где $\delta_{2n}^{(\gamma)}(x, \alpha)$ определена в (10). Из (13) и последней оценки получим (9).

Займемся доказательством оценки (11). Рассмотрим интегралы

$$J_{2n}(\pm u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\cos(t \pm u)) - f(\cos u)) \frac{\sin[2(n+1)\varphi(\pm u, t)]}{\sin^2 t} dt.$$

Проинтегрируем их по частям. Имеем

$$J_{2n}(\pm u) = - \frac{[f(\cos(t \pm u)) - f(\cos u)] \sin[2(n+1)\varphi(\pm u, t)] \cos t}{\sin t} \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} - I_3 + I_4, \quad (19)$$

где

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t f'(\cos(t \pm u)) \sin(t \pm u) \frac{\sin[2(n+1)\varphi(\pm u, t)]}{\sin t} dt,$$

$$I_4 = 2(n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \lambda(t \pm u) \cos[2(n+1)\varphi(\pm u, t)] \frac{f(\cos(t \pm u)) - f(\cos u)}{\sin t} dt.$$

Первое слагаемое в последнем выражении обращается в нуль. Исследуем асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ двух оставшихся интегралов. Отметим, что основной вклад в их асимптотику вносит значение интегралов по достаточно малой окрестности нуля. Учитывая, что

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = O(t), \quad t \rightarrow 0,$$

для интеграла I_3 получим

$$I_3 = f'(\cos u) \sin u \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[2(n+1)\lambda(u)t]}{t} dt + O\left(\frac{\sin u}{2(n+1)\lambda(u)}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Выполнив в интеграле справа замену переменного по формуле $2(n+1)\lambda(u)t \mapsto t$, будем иметь

$$I_3 = f'(\cos u) \sin u \int_0^{\pi(n+1)\lambda(u)} \frac{\sin t}{t} dt + O\left(\frac{\sin u}{2(n+1)\lambda(u)}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

При $n \rightarrow \infty$ с учетом выполнения условия (8) и того факта, что $f \in H^{(1)}[-1,1]$, приходим к оценке

$$|I_3| < \pi\sqrt{1-x^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Исследуем интеграл I_4 . Рассуждая аналогичным образом, находим, что

$$I_4 = -2(n+1)\lambda(u)f'(\cos u)\sin u \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \cos[2(n+1)\lambda(u)t]}{\sin t} dt + O\left(\frac{\sin u}{2(n+1)\lambda(u)}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Воспользовавшись неравенством $\sin t > (2/\pi)t$, получим

$$|I_4| < \pi\sqrt{1-x^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Из (20) и (21) в (19) приходим к оценке

$$|J_{2n}(\pm u)| < 2\pi\sqrt{1-x^2}, \quad x = \cos u, n \rightarrow \infty.$$

Из последней оценки и (12) получим (11). Таким образом теорема 2 доказана полностью.

Следствие 1 (Полиномиальный случай). Для приближений сопряженных функций с плотностью $f \in H^{(\gamma)}$, $0 < \gamma \leq 1$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва имеют место оценки

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f, x)| < c_1(\gamma) \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right)^\gamma + \delta_{2n}^{(\gamma)}(x), \quad x \in [-1, 1], \gamma \in (0, 1),$$

где

$$\delta_{2n}^{(\gamma)}(x) = \begin{cases} c_2(\gamma) \left(\frac{\sqrt{2|x|}}{n+1}\right)^{2\gamma}, & \gamma \in (0, 1/2), \\ \frac{\sqrt{2|x|} \ln(n+1)}{n+1}, & \gamma = 1/2, \\ \frac{|x|^\gamma}{2^{\gamma-1}(n+1)}, & \gamma \in (1/2, 1). \end{cases}$$

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f, x)| \leq \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1], \gamma = 1,$$

$c_1(\gamma), c_2(\gamma)$ определены в формулировке теоремы 2.

3. Приближения сопряженных функций с плотностью $|x|^s$. Изучим приближения сопряженными рациональным суммами Фейера (3) некоторых индивидуальных сопряжённых функций.

Пусть на отрезке $[-1, 1]$ задана функция $|x|^s, s > 0$. Из (1) следует, что функция, сопряжённая к ней, задаётся соотношением

$$\hat{f}_{|x|^s}(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_0^1 \frac{t^s}{t^2-x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Отметим, что при $x=0$ интеграл справа существует при выполнении условия $s > 1$. Это замечание будем учитывать в дальнейшем.

Теорема 3. Для приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s, 1 < s < 2$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженных рядов Фурье – Чебышёва имеет место интегральное представление:

$$\varepsilon_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha) = \frac{2^{2-s}}{\pi(n+1)\lambda(u)} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1+2t^2 \cos 2u + t^4)^2} \Phi_{n+1}(t, x, \alpha) dt, \quad (22)$$

где $x = \cos u, \xi = e^{iu}$,

$$\Phi_{n+1}(t, x, \alpha) = [1 + (-1)^n \chi_{n+1}(t) M_{2n+2}(x)](1-t^4) \sin 2u + \\ + (-1)^n \chi_{n+1}(t) N_{2n+2}(x) ((1+t^4) \cos 2u + 2t^2),$$

$$M_{2n+2}(x) = \frac{1}{2} [\pi_{n+1}(\xi) + \overline{\pi_{n+1}(\xi)}], \quad N_{2n+2}(x) = \frac{1}{2i} [\pi_{n+1}(\xi) - \overline{\pi_{n+1}(\xi)}],$$

– соответственно алгебраические косинус и синус дроби Чебышёва – Маркова,

$$\pi_n(\xi) = \left(\frac{\xi^2 + \alpha^2}{1 + \alpha^2 \xi^2} \right)^n, \quad \chi_n(t) = \left(\frac{t^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2 t^2} \right)^n. \quad (23)$$

Доказательство. Известно [30], что для приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s, s \in (1, 2)$, на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами сопряженного ряда Фурье – Чебышёва имеет место интегральное представление

$$\hat{\delta}_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha) = \frac{(-1)^{n+1} i}{2^{s-1} \pi} \sin \frac{\pi s}{2} \times \\ \times \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1 - \alpha^2 t^2} \left[\frac{\xi^2 + \alpha^2}{1 + t^2 \xi^2} \pi_n(\xi) - \frac{1 + \alpha^2 \xi^2}{t^2 + \xi^2} \overline{\pi_n(\xi)} \right] \chi_n(t) dt,$$

где $\pi_n(\xi), \chi_n(t)$ определены в (23).

Вместе с тем из (3) для приближений (6) сопряженной функции с плотностью $|x|^s$ суммами Фейера нетрудно получить, что

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \hat{\delta}_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha), \quad x \in [-1, 1], x = \cos u.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha) = \frac{i}{2^{s-1} \pi(n+1)} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2} \times \\ \times \left[\frac{\xi^2 + \alpha^2}{1+t^2 \xi^2} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \pi_k(\xi) \chi_k(t) - \frac{1+\alpha^2 \xi^2}{t^2 + \xi^2} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \overline{\pi_k(\xi)} \chi_k(t) \right] dt.$$

Суммы в квадратных скобках представляют собой суммы геометрических прогрессий с соответствующими знаменателями. Тогда

$$\varepsilon_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha) = \frac{-i}{2^{s-1} \pi(n+1) \lambda(u)} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 (1-t^2)^s t^{1-s} \times \\ \times \left[\frac{\xi^2 (1 + (-1)^n \pi_{n+1}(\xi) \chi_{n+1}(t))}{(1+t^2 \xi^2)^2} - \frac{\xi^2 (1 + (-1)^n \overline{\pi_{n+1}(\xi)} \chi_{n+1}(t))}{(t^2 + \xi^2)^2} \right] dt,$$

где $\lambda(u)$ из (7).

Учитывая, что выражение в квадратных скобках представляет собой разность взаимно комплексно сопряженных слагаемых, после соответствующих преобразований получим

$$\varepsilon_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha) = \frac{2^{2-s}}{\pi(n+1) \lambda(u)} \sin \frac{\pi s}{2} \times \\ \times \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1+2t^2 \cos 2u + t^4} \left[(1 + (-1)^n \chi_{n+1}(t) M_{2n+2}(x)) \sin 2 \arg \frac{\xi}{1 + \xi^2 t^2} + \right. \\ \left. + (-1)^n \chi_{n+1}(t) N_{2n+2}(x) \cos 2 \arg \frac{\xi}{1 + \xi^2 t^2} \right] dt, \quad x = \cos u, \xi = e^{iu}. \quad (24)$$

где $M_{2n+2}(x), N_{2n+2}(x)$ определены в формулировке теоремы.

Замечая, что

$$\sin 2 \arg \frac{\xi}{1 + \xi^2 t^2} = \frac{(1-t^4) \sin 2u}{1+2t^2 \cos 2u + t^4}, \quad \cos 2 \arg \frac{\xi}{1 + \xi^2 t^2} = \frac{(1+t^4) \cos 2u + 2t^2}{1+2t^2 \cos 2u + t^4}.$$

из последнего соотношения придем к (22). Теорема 3 доказана.

В представлении (22) положим значение параметра $\alpha = 0$. Тогда $\hat{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x, 0) = \hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(|\cdot|^s, x)$ есть приближения сопряженной функции с плотностью $|x|^s, s \in (1, 2)$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженного ряда Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода.

Следствие 2 (Полиномиальный случай). *Справедливо интегральное представление*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}(|\cdot|^s, x) = \frac{2^{2-s}}{\pi(n+1)} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1+2t^2 \cos 2u + t^4)^2} \Phi_{n+1}^{(0)}(t, x) dt,$$

где $x = \cos u$, $\xi = e^{iu}$,

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}^{(0)}(t, x) = & [1 + (-1)^n t^{2n+2} \cos(2n+2)u](1-t^4) \sin 2u + \\ & + (-1)^n t^{2n+2} \sin(2n+2)u((1+t^4) \cos 2u + 2t^2), \quad x = \cos u. \end{aligned}$$

4. Оценки приближений сопряженных функций с плотностью $|x|^s$ суммами Фейера. В следующей теореме устанавливаются оценки сверху величины (22).

Теорема 4. Для приближений сопряженных функций с плотностью $|x|^s$, $s \in (1, 2)$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье – Чебышёва справедливы оценки:

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha)| \leq \frac{2^{2-s} |\sin 2u|}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} [I_1(n, s) + I_2(n, s)], \quad x = \cos u, \quad (25)$$

где

$$I_1(n, s) = \frac{1}{(n+1)\lambda(u)} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s+1} t^{1-s} (1+t^2)(1+(-1)^n \chi_{n+1}(t) M_{2n+2}(x))}{(1+2t^2 \cos 2u + t^4)^2} dt,$$

$$I_2(n, s) = \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1+2t^2 \cos 2u + t^4} |\chi_{n+1}(t)| dt;$$

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha)| \leq \frac{2^{2-s} |\sin 2u|}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} [I_3(n, s) + I_4(n, s)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где

$$I_3(n, s) = \frac{1-\alpha^4}{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-1} t^{1-s} (1+t^2)}{(1-\alpha^2 t^2)^2} \frac{1-|\chi_{n+1}(t)|}{(1-|\chi_1(t)|)^2} dt,$$

$$I_4(n, s) = \int_0^1 (1-t^2)^{s-2} t^{1-s} |\chi_{n+1}(t)| dt.$$

Неравенства (25) и (26) являются точными. Равенства достигаются при $x = 0$, а также на концах отрезка в точках $x = \pm 1$.

Доказательство. Обратимся к соотношению (24). Поскольку для выражения, стоящего под знаком интеграла в правой его части, справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left| (1 + (-1)^n \chi_{n+1}(t) M_{2n+2}(x)) \sin 2 \arg \frac{\xi}{1 + \xi^2 t^2} + \right. \\ & \left. + (-1)^n \chi_{n+1}(t) N_{2n+2}(x) \cos 2 \arg \frac{\xi}{1 + \xi^2 t^2} \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{(1 + (-1)^n \chi_{n+1}(t)M_{2n+2}(x))(1 - t^4) |\sin 2u|}{1 + 2t^2 \cos 2u + t^4} + |\chi_{n+1}(t)N_{2n+2}(x)|,$$

то заключаем, что

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha)| &\leq \frac{2^{2-s}}{\pi(n+1)\lambda(u)} \sin \frac{\pi s}{2} \times \\ &\times \left[|\sin 2u| \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s+1} t^{1-s} (1+t^2)(1+(-1)^n \chi_{n+1}(t)M_{2n+2}(x))}{(1+2t^2 \cos 2u + t^4)^2} dt + \right. \\ &\left. + |N_{2n+2}(x)| \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1+2t^2 \cos 2u + t^4} |\chi_{n+1}(t)| dt \right], \quad x = \cos u, \xi = e^{iu}. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как

$$|N_{2n+2}(x)| = \left| \sin \left((n+1) \arg \frac{\xi^2 + \alpha^2}{1 + \alpha^2 \xi^2} \right) \right| \leq (n+1)\lambda(u) |\sin 2u|,$$

то из (27) приходим к оценке (25).

Докажем справедливость оценки (26). С этой целью выполним некоторые преобразования в интеграле $I_1(n, s)$ из оценки (25).

Имеем

$$\begin{aligned} 1 + (-1)^n \chi_{n+1}(t)M_{2n+2}(x) &= \frac{1 + (-1)^n \chi_{n+1}(t)\pi_{n+1}(\xi)}{2(1 + \chi_1(t)\pi_1(\xi))} (1 + \chi_1(t)\pi_1(\xi)) + \\ &+ \frac{1 + (-1)^n \chi_{n+1}(t)\overline{\pi_{n+1}(\xi)}}{2(1 + \chi_1(t)\overline{\pi_1(\xi)})} (1 + \chi_1(t)\overline{\pi_1(\xi)}) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \chi_1(t)\pi_1(\xi)) \sum_{k=0}^n (-1)^k \chi_k(t)\pi_k(\xi) + \frac{1}{2} (1 + \chi_1(t)\overline{\pi_1(\xi)}) \sum_{k=0}^n (-1)^k \chi_k(t)\overline{\pi_k(\xi)} = \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2\chi_1(t)M_2(x) + \chi_1^2(t)) \times \\ &\times \left(\frac{1}{1 + \chi_1(t)\pi_1(\xi)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \chi_k(t)\pi_k(\xi) + \frac{1}{1 + \chi_1(t)\overline{\pi_1(\xi)}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \chi_k(t)\overline{\pi_k(\xi)} \right), \end{aligned}$$

где $\chi_{n+1}(t)$ и $\pi_{n+1}(\xi)$ из (23).

Оценим полученное выражение. Примем во внимание равенство $|\pi_k(\xi)| = 1$, а также учтем, что суммы под знаком круглых скобок представляют собой суммы геометрических прогрессий с соответствующими знаменателями. Тогда, заметив, что

$$1 + 2\chi_1(t)M_2(x) + \chi_1^2(t) = \frac{(1 - \alpha^4)\lambda(u)(1 + 2t^2 \cos 2u + t^4)}{(1 - \alpha^2 t^2)^2},$$

получим

$$|1 + (-1)^n \chi_{n+1}(t)M_{2n+2}(x)| \leq \frac{(1 - \alpha^4)\lambda(u)(1 + 2t^2 \cos 2u + t^4)}{(1 - \alpha^2 t^2)^2} \frac{1 - |\chi_{n+1}(t)|}{(1 - |\chi_1(t)|)^2}.$$

Отсюда следует оценка

$$|I_1(n,s)| \leq \frac{1-\alpha^4}{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s+1} t^{1-s} (1+t^2)}{(1+2t^2 \cos 2u + t^4)(1-\alpha^2 t^2)^2} \frac{1-|\chi_{n+1}(t)|}{(1-|\chi_1(t)|)^2} dt, \quad x = \cos u.$$

Учитывая хорошо известное неравенство

$$1+2t^2 \cos 2u + t^4 \geq (1-t^2)^2, \quad t \in [0,1], u \in \mathbb{R},$$

окончательно получим

$$|I_1(n,s)| \leq \frac{1-\alpha^4}{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-1} t^{1-s} (1+t^2)}{(1-\alpha^2 t^2)^2} \frac{1-|\chi_{n+1}(t)|}{(1-|\chi_1(t)|)^2} dt, \quad x = \cos u.$$

Интеграл $I_2(n,s)$ оценивается значительно проще, а именно:

$$|I_2(n,s)| \leq \int_0^1 (1-t^2)^{s-2} t^{1-s} |\chi_{n+1}(t)| dt.$$

Из двух последних соотношений следует оценка (26).

Для доказательства точности оценок (25) и (26) достаточно заметить, что в указанных точках их правые части, как и приближения $\varepsilon_{2n}(|\cdot|^s, x, \alpha)$, обращаются в нуль. Теорема 4 доказана.

Следствие 3 (Полиномиальный случай). Для приближений сопряженных функций с плотностью $|x|^s$, $s \in (1,2)$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва справедлива оценка

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(|\cdot|^s, x)| \leq \frac{2^{2-s} |\sin 2u| \sin \frac{\pi s}{2}}{\pi} \times \left[\frac{1}{n+1} \int_0^1 (1-t^2)^{s-2} t^{1-s} (1+t^2) \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} dt + \int_0^1 (1-t^2)^{s-2} t^{2n+3-s} dt \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Асимптотика мажоранты приближений. Исследуем асимптотическое поведение правой части неравенства (26) при $n \rightarrow \infty$. С этой целью в интегралах $I_3(n,s)$ и $I_4(n,s)$ выполним замену переменного интегрирования по формуле $t^2 = (1-u)/(1+u)$, $dt = -du / ((1+u)^{3/2} (1-u)^{1/2})$. Тогда

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}^*(|\cdot|^s, x, \alpha)| \leq \hat{\varepsilon}_{2n}^*(|\cdot|^s, x, \alpha), \quad x \in [-1,1], \quad (28)$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^*(|\cdot|^s, x, \alpha) = \frac{2^{2-s} |\sin 2u| \sin \frac{\pi s}{2}}{\pi} [I_3(n,s) + I_4(n,s)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

$$I_3(n,s) = \frac{2^s \beta}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} \frac{1 - \left| \frac{\beta-u}{\beta+u} \right|^{n+1}}{(\beta+u - |\beta-u|)^2} du,$$

$$I_4(n, s) = 2^{s-2} \int_0^1 \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{s/2}} \left| \frac{\beta-u}{\beta+u} \right|^{n+1} du, \quad \beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \quad s \in (1, 2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 5. Для величины (29) имеет место асимптотическое равенство

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^*(|\cdot|^s, x, \alpha) \sim \frac{|\sin 2u|}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \left[\frac{(4-s)\Gamma(s-1)\beta^{s-1}}{(2-s)2^{s-1}(n+1)^{s-1}} + \frac{1}{(n+1)\beta} \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1} du}{(1-u^2)^{s/2}} + \frac{1}{2} \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n+1} \left(\frac{1-\beta^2}{\beta(n+1)}\right)^{1-\frac{s}{2}} \left(1-\frac{1}{(n+1)\beta}\right) \right], \quad n \rightarrow \infty, \quad (30)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Исследуем асимптотическое поведение каждого из двух интегралов по отдельности. Доказательству теоремы 5 предпшлём две леммы, которые описывают асимптотическое поведение интегралов $I_3(n, s)$ и $I_4(n, s)$.

Лемма 1. Справедливо асимптотическое равенство

$$I_3(n, s) \sim \frac{\Gamma(s-1)\beta^{s-1}}{(2-s)(n+1)^{s-1}} + \frac{1}{2^{2-s}(n+1)\beta} \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} du - \frac{1}{2^{3-s}} \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n+1} \frac{(1-\beta^2)^{1-\frac{s}{2}}}{(\beta(n+1))^{2-\frac{s}{2}}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (31)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Разобьём интеграл $I_3(n, s)$ на два интеграла по промежуткам $[0, \beta]$ и $[\beta, 1]$. Тогда

$$I_3(n, s) = \frac{2^{s-2}}{n+1} [I_5(n, s) + I_6(n, s)],$$

$$I_5(n, s) = \beta \int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{s/2}} \left(1 - \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^{n+1}\right) \frac{du}{u},$$

$$I_6(n, s) = \frac{1}{\beta} \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} \left(1 - \left(\frac{u-\beta}{u+\beta}\right)^{n+1}\right) du.$$

Для исследования первого интеграла в квадратной скобке воспользуемся методикой, предложенной в [31]. Продифференцируем интеграл по параметру n . Тогда

$$\frac{\partial I_5(n, s)}{\partial n} = -\beta \int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{s/2}} \ln \frac{\beta-u}{\beta+u} \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^{n+1} \frac{du}{u}.$$

Для исследования асимптотического поведения интеграла справа воспользуемся методом Лапласа [32; 33]. Перепишем интеграл в виде

$$\frac{\partial I_5(n,s)}{\partial n} = -\beta \int_0^\beta f(u) \exp[(n+1)S(u)] du,$$

$$S(u) = \ln \frac{\beta-u}{\beta+u}, \quad f(u) = \frac{u^{s-3}}{(1-u^2)^{s/2}} \ln \frac{\beta-u}{\beta+u}.$$

Функция $S(u)$ убывает на промежутке $0 < u < \beta$, поскольку $S'(u) < 0$, и, следовательно, достигает своего максимального значения при $u = 0$. Используя асимптотические равенства $S(u) = -2u/\beta + o(\beta)$ и $f(u) \sim -(2/\beta)u^{s-2}$, справедливые при $u \rightarrow 0$, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$ получим

$$\frac{\partial I_5(n,s)}{\partial n} \sim 2 \int_0^\varepsilon u^{s-2} e^{-\frac{2(n+1)u}{\beta}} du.$$

Выполнив в интеграле замену переменного по формуле $-2(n+1)u/\beta \mapsto u$, придем к асимптотическому равенству

$$\frac{\partial I_5(n,s)}{\partial n} \sim 2\Gamma(s-1) \left(\frac{\beta}{2(n+1)} \right)^{s-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Чтобы прийти к асимптотике для интеграла $I_5(n,s)$, в последнем соотношении выполним интегрирование по параметру. Тогда

$$I_5(n,s) \sim \frac{2\Gamma(s-1)}{(2-s)(n+1)^{s-2}} \left(\frac{\beta}{2} \right)^{s-1}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Займемся исследованием интеграла $I_6(n,s)$. Разобьем его на два интеграла так, что

$$I_6(n,s) = \frac{1}{\beta} \int_\beta^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} du - \frac{1}{\beta} \int_\beta^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} \left(\frac{u-\beta}{u+\beta} \right)^{n+1} du.$$

Первый интеграл не зависит от n и существует при любых $0 < \beta \leq 1$ и $s \in (1,2)$. Для исследования асимптотического поведения второго интеграла также воспользуемся методом Лапласа. После замены переменного по формуле $u = \cos \theta$ получим

$$I_6(n,s) = \frac{1}{\beta} \int_\beta^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} du - \frac{1}{\beta} \int_0^{\arccos \beta} f(\theta) \exp[(n+1)S(\theta)] d\theta,$$

где

$$f(\theta) = \cos^{s-1} \theta \sin^{1-s} \theta, \quad S(\theta) = \ln \frac{\cos \theta - \beta}{\cos \theta + \beta}.$$

Функция $S(\theta)$ убывает на промежутке $0 < \beta < \arccos \beta$, поскольку $S'(\theta) < 0$, и, следовательно, достигает своего максимального значения при $\theta = 0$. Используя разложение

$$S(\theta) = \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} - \frac{\beta}{1-\beta^2} \theta^2 + o(\theta^2)$$

и асимптотическое равенство $f(\theta) \sim u^{1-s}$, справедливые при $\theta \rightarrow 0$, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$ получим

$$I_6(n, s) \sim \frac{1}{\beta} \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} du - \frac{1}{\beta} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{n+1} \int_0^{\varepsilon} \theta^{1-s} \exp \left[-\frac{\beta(n+1)}{1-\beta^2} \theta^2 \right] d\theta.$$

Выполнив во втором интеграле замену переменного по формуле $\beta(n+1)\theta^2 / (1-\beta^2) \mapsto \theta^2$, придем к выражению

$$I_6(n, s) \sim \frac{1}{\beta} \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} du - \frac{1}{\beta} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{n+1} \left(\frac{1-\beta^2}{\beta(n+1)} \right)^{1-\frac{s}{2}} \int_0^{\varphi(n, \varepsilon)} \theta^{1-s} e^{-\theta^2} d\theta,$$

где $\varphi(n, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\beta(n+1) / (1-\beta^2)} \rightarrow \infty$, при $n \rightarrow \infty$. Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} \theta^{1-s} e^{-\theta^2} d\theta = \frac{1}{2} \Gamma \left(1 - \frac{s}{2} \right),$$

окончательно получим

$$I_6(n, s) \sim \frac{1}{\beta} \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} du - \frac{1}{2\beta} \Gamma \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{n+1} \left(\frac{1-\beta^2}{\beta(n+1)} \right)^{1-\frac{s}{2}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Из (32) и (33) приходим к (31). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$I_4(n, s) \sim \frac{\Gamma(s-1)\beta^{s-1}}{2(n+1)^{s-1}} + \frac{1}{2^{3-s}} \Gamma \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{n+1} \left(\frac{1-\beta^2}{\beta(n+1)} \right)^{1-\frac{s}{2}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (34)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Справедливость асимптотического равенства (34) доказывается методом, аналогичным примененному в лемме 1. Ввиду этого доказательство леммы 2 опустим.

Возвращаясь к доказательству теоремы 5, для получения асимптотического равенства (30) достаточно подставить соотношения (31) и (34) в (29). Теорема 5 доказана.

В теореме 5 положим значение параметра $\alpha = 0$. Тогда $\hat{\varepsilon}_{2n}^*(|\cdot|^s, x, 0)$ – есть мажоранта приближений сопряженных функций с плотностью $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Следствие 4 (Полиномиальный случай). Справедливы асимптотические равенства

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^*(|\cdot|^s, x, 0) \sim \frac{|\sin 2u|}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \frac{(4-s)\Gamma(s-1)}{(2-s)2^{s-1}(n+1)^{s-1}}, \quad s \in (1, 2), n \rightarrow \infty.$$

Представляет интерес минимизировать мажоранту (30) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра α . Другими словами, искать наилучшую оценку сверху приближений сопряженных функций с плотностью $|x|^s$ суммами Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье – Чебышёва. С этой целью положим

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^*(|\cdot|^s, x) = \inf_{\alpha \in (0, 1]} \hat{\varepsilon}_{2n}^*(|\cdot|^s, x, \alpha).$$

Теорема 6. Справедливы асимптотические равенства

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^*(|\cdot|^s, x) \sim |\sin 2u| \left(\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \frac{(4-s)\Gamma(s)}{2^{s-2}(2-s)} \right)^{\frac{1}{s}} \frac{s}{2(s-1)(n+1)^{\frac{2(s-1)}{s}}}, \quad n \rightarrow \infty. (34)$$

Доказательство. Исследуем асимптотическое равенство (30). Очевидно, что при постоянных значениях параметра β порядок его правой части не отличается от полиномиального, указанного в следствии 4. Будем полагать, что параметр $\beta = \beta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. При этом считаем условие (8) выполненным. В этом случае порядок убывания третьего слагаемого в равенстве (30) является экспоненциальным. Учитывая также, что

$$\int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}} du = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi s}{2}}, \quad s \in (1, 2),$$

получим

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^*(|\cdot|^s, x, \alpha) \sim |\sin 2u| \left[\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \frac{(4-s)\Gamma(s-1)\beta^{s-1}}{(2-s)2^{s-1}(n+1)^{s-1}} + \frac{1}{2(n+1)\beta} \right], \quad n \rightarrow \infty. (35)$$

При каждом заданном $s \in (1, 2)$ соответствующие значения величины, стоящей в квадратных скобках (35), имеют строгий минимум как функции переменного β , $\beta \in (0, 1]$. Действительно, функция в квадратных скобках является непрерывно дифференцируемой по β , $\beta \in (0, 1]$. Естественно искать точку минимума этой функции по β там, где выполняется необходимое условие экстремума. Решая эту задачу, находим, что оптимальным при заданном $s \in (1, 2)$ будет значение

$$\beta^* = \left(\frac{1}{2(s-1)c(s)(n+1)^{2-s}} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad c(s) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \frac{(4-s)\Gamma(s-1)}{2^{s-1}(2-s)}.$$

Из (35) при найденных оптимальных значениях параметра приходим к (34). Теорема 6 доказана.

Сравнивая результаты, полученные в теореме 6, с результатами, указанными в следствии 4, приходим к выводу, что при фиксированном $s \in (1,2)$ специальным выбором параметра α^* , $\alpha^* = \sqrt{(1-\beta^*)/(1+\beta^*)}$, возможно добиться увеличения скорости приближений сопряженных функций с плотностью $|x|^s$ сопряженными рациональными суммами Фейера в сравнении с их полиномиальными аналогами. Данный результат свидетельствует, что рациональная аппроксимация исследуемого класса сопряженных функций эффективнее полиномиальной аппроксимации.

Заключение. В работе построены суммы Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье по одной системе рациональных дробей Чебышёва – Маркова и исследованы их аппроксимационные свойства. Найденны оценки сверху приближений функций из классов $\bar{H}^\gamma[-1,1], \gamma \in (0,1]$, изучаемым методом. Подробно рассмотрены приближения сопряженных функций с плотностью $|x|^s, s \in (1,2)$. Установлено интегральное представление приближений, поточечные и в некоторой степени равномерные оценки приближений, асимптотическое выражение при $n \rightarrow \infty$ мажоранты приближений. Найдено оптимальное значение параметра, при котором исследуемый метод рациональной аппроксимации имеет значительно большую скорость приближений в сравнении со своим полиномиальным аналогом. В качестве следствий полученных результатов приводятся оценки соответствующих полиномиальных приближений.

Литература

1. Fejer L. Untersuchungen uber Fouriersche Reihen // *Mathematische Annalen*. 1904. Vol. 58. P. 51–69.
2. Lebesgue H. Sur les integrales singulieres // *Annales de la faculte des sciences de Toulouse 3e serie*. 1909. T. 1. P. 25–117.
3. Bernstein S. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degre donne. Bruxelles : Hayez, Imprimeur des Acadēmies Royales de Belgique, 1912. 104 p.
4. Никольский С.М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // *Известия АН СССР. Серия матем.* 1940. Т. 4, № 6. С. 501–508.
16. Zygmund A. On the degree of approximation of functions by Fejer means // *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1945. Vol. 51. P. 274–278.
5. Zygmund A. On the degree of approximation of functions by Fejer means // *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1945. Vol. 51. P. 274–278.
6. Новиков О.А., Ровенская О.Г. Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2015. Т. 7, № 4. С. 813–819.

7. Привалов И.И. Sur les fonctions conjuguées // Bulletin de la Societe Mathematique de France. 1916. Vol. 44. P. 100–103.
8. Alexits G. Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction periodique par les sommes de Fejer // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1952. 3(1–2). P. 29–42.
9. Ефимов А.В. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера // Известия АН СССР. Серия матем. 1958. Т. 22, № 1. С. 81–116.
10. Ефимов А.В. Приближение сопряженных функций суммами Фейера // Успехи математических наук. 1959. Т. 14, № 1(85). С. 183–188.
11. Стечкин С.Б. О приближении периодических функций суммами Фейера // Труды МИАН СССР. 1961. Т. 62. С. 48–60.
12. Фалалеев Л.П. Приближение сопряжённых функций суммами Чезаро // Математические заметки. 1980. Т. 28, № 3. С. 451–458.
13. Alexits G. Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa serie de Fourier // Matematikai es Fizikai Lapok. 1941. Vol. 48. P. 410–433.
14. Теляковский С.А. О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Известия АН СССР. Серия матем. 1960. Т. 24, № 2. С. 213–242.
15. Джрбашян М.М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Известия АН АрмССР. Сер. физ.-мат. 1956. Т. 9, № 7. С. 1–27.
16. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск.: Издательство БГУ, 1979. 179 с.
17. Petrushev P.P., Popov V.A. Rational approximation of real functions. Cambridge : Cambridge university press, 1987. 386 p.
18. Русак В.Н. Точные порядки наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свёртки // Доклады АН СССР. 1984. Т. 279, № 4. С. 810–812.
19. Русак В.Н. Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки // Математический сборник. 1985. Т. 128, № 4. С. 492–515.
20. Пекарский А.А. Чебышёвские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Математический сборник. 1987. Т. 133 (175). № 1(5). С. 86–102.
21. Смотрицкий К.А. Аппроксимация рациональными операторами Валле Пуссена на отрезке // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений 2001. Труды института математики НАН Беларуси. Минск. 2001. Т. 9. С. 136–139.
22. Ровба Е.А. Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестник БГУ. 1996. Т. 1, № 1. С. 34–39.
23. Джрбашян М.М., Китбальян А.А. Об одном обобщении полиномов Чебышёва // Доклады Академии наук Армянской ССР. 1964. Т. 38, № 5. С. 263–270.
24. Ровба Е.А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля, рациональными операторами // Доклады АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 6. С. 18–22.
25. Ровба Е.А. О приближении рациональными операторами Фейера и Джексона функций ограниченной вариации // Доклады НАН Беларуси. 1998. Т. 42, № 4. С. 13–17.

26. Смотрицкий К.А. О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке // Вестник БГУ. 2005. Т. 1, № 3. С. 64–70.

27. Русак В.Н., Рыбаченко И.В. Равномерная рациональная аппроксимация сопряжённых функций // Вестник БГУ. Серия 1. Математика и информатика. 2013. Т. 3. С. 83–86.

28. Rouba Y., Patseika P., Smatrytski K. On one system of rational Chebyshev – Markov fractions // Analysis Math. 2018. Vol. 44, Iss. 1. P. 115–140.

29. Поцейко П.Г., Ровба Е.А. Суммы Фейера рационального ряда Фурье – Чебышёва и аппроксимации функции $|x|^s$ // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 18–34.

30. Ровба Е.А., Поцейко П.Г. Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышёва – Маркова // Известия вузов. Математика. 2020. № 9. С. 68–84.

31. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М. : Наука, Гл. ред. Физ.-мат. литер., 1989. 480 с.

32. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.

33. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Гл. ред. Физ.-мат. литер., 1987. 544 с.

P.G. Patseika, Y.A. Rouba

Yanka Kupala State University of Grodno (Belarus)

APPROXIMATIONS OF SOME CONJUGATED FUNCTIONS BY THE FEJER MEANS OF RATIONAL FOURIER – CHEBYSHEV SERIES

Keywords: *rational Fourier series, Fejer means, conjugate functions, Lipschitz condition, functions with a power singularity, approximation estimates, asymptotic behavior, best approximations.*

Abstract. *This paper is devoted to the study of approximations on the segment $[-1, 1]$ of conjugate functions by Fejer means of conjugate rational Fourier series on one system of Chebyshev – Markov algebraic fractions. In the introduction, the authors present the main results related to the study of approximations of conjugate functions by Fejer means in the polynomial case and by Fejer operators in the rational approximation. In the main part of this article, we introduce the Fejer means of conjugate rational Fourier series on one system of Chebyshev – Markov algebraic fractions, indicate its main properties, and establish an integral representation of approximations of conjugate functions on a segment by this method. Approximations of a conjugate function with a density having a power singularity are studied. In particular, estimates depending on the position of the point on the segment $[-1, 1]$ are established, the asymptotic expression for the majorants of approximations, and the optimal value of the parameter at which the majorant has the highest rate of decrease is established. As a corollary, the*

corresponding estimates of approximations on the segment $[-1, 1]$ of the conjugate function under study by Fejer means of conjugate polynomial Fourier – Chebyshev series are given.

Е.Х. Садекова
НИЯУ «МИФИ»

УДК 517.518.8

О ЗАДАЧЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ХАУСДОРФОВОЙ МЕТРИКЕ

Ключевые слова: *равномерная метрика, метрика Хаусдорфа, ограниченная функция, наилучшее приближение рациональными функциями, средний модуль колебания функции.*

В работе исследуются вопросы приближения ограниченной на отрезке функции рациональными функциями в метрике Хаусдорфа. Кратко изложена история задачи, приведены известные результаты болгарских и отечественных математиков по приближению в равномерной метрике. С помощью этих результатов в терминах специального модуля колебания, введенного в 1976 году Е.П. Долженко и Е.А. Севастьяновым, получена оценка для наилучшего приближения в метрике Хаусдорфа с более точной, чем было известно ранее, константой.

1. Постановка задачи. Пусть число $r \in \mathbb{N}$ фиксировано. Через Δ обозначим отрезок $[a, b]$ вещественной оси. Пусть, далее, функция $f(x)$ определена на отрезке Δ и имеет на нём абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}(x)$ порядка $(r-1)$, а её производная порядка r имеет ограниченную вариацию на Δ , т.е. $\text{Var}_{\Delta} f^{(r)} < \infty$.

Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через R_n множество всех рациональных функций порядка не выше n с вещественными коэффициентами. По определению $t(x) \in R_n$, если

$$t(x) = \frac{c_m x^m + \dots + c_0}{d_k x^k + \dots + d_0}, \quad m \leq n, \quad k \leq n, \quad c_m \neq 0, \quad d_k \neq 0.$$

Далее $R_n(f, \Delta)$ обозначает наименьшее уклонение функции $f(x)$ от рациональных функций $t(x) \in R_n$ в смысле равномерной метрики на отрезке Δ . А именно

$$R_n(f, \Delta) = \inf_{t \in R_n} \|f - t\|,$$

где $\|f - t\| = \max_{x \in \Delta} |f(x) - t(x)|$.

Обозначим также символом $HR_n(f, \Delta)$ наименьшее уклонение ограниченной функции $f(x)$ от функций из класса R_n в метрике Хаусдорфа. При заданных ограничениях на функцию $f(x)$ требуется оценить величину $HR_n(f, \Delta)$.

2. Равномерное приближение. В 1964 году Д. Ньюман указал, что для функций $|x|$ и \sqrt{x} равномерное приближение рациональными функциями n -го порядка лучше, чем наилучшее равномерное приближение алгебраическими многочленами n -го порядка (см. [1]).

Вопрос о наилучшем равномерном приближении $R_n(f, \Delta)$ выпуклой на отрезке Δ функции $f(x)$ рациональными функциями n -го порядка исследовал А.П. Буланов [2]. Им было доказано, что

$$R_n(f, \Delta) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).$$

В работах В.А. Попова [3], П.И. Петрушева [4] показано, что существует такая константа $D \geq 1$, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $n > 4r$ справедлива оценка

$$R_n(f, \Delta) \leq \frac{(D|\Delta|)^r}{n^{r+1}} V_{\Delta} f^{(r)}, \quad (1)$$

где $|\Delta| = b - a$.

3. Хаусдорфово приближение. В статье [5] В.А. Попов доказал, что для наилучшего приближения ограниченной функции на отрезке $\Delta_1 = [0, 1]$ в метрике Хаусдорфа справедливо равенство

$$HR_n(f, \Delta_1) = O\left(\frac{\ln \ln n}{n}\right).$$

Позднее в работе Е.П. Долженко и Е.А. Севастьянова [6] введено понятие среднего модуля колебания

$$\Omega(f, \Delta; \delta) = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \Omega(f, (x - \delta/2, x + \delta/2) \cap \Delta) dx, \quad \delta > 0,$$

где $\Omega(f, E) = \sup \{f(x') - f(x'') : x', x'' \in E\}$.

В терминах среднего модуля колебания П.И. Петрушевым [4] для хаусдорфова уклонения была доказана оценка

$$HR_n(f, \Delta_1) \leq \frac{(32\epsilon D)^2}{n} \ln \left(e + n\Omega \left(f, \Delta_1; \frac{1}{n} \right) \right). \quad (2)$$

где $\Delta_1 = [0, 1]$ и D – постоянная из формулы (1).

Сформулируем теперь основной результат нашей работы.

Теорема. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и отрезок $\Delta = [a, b]$. Пусть функция $f(x)$ определена на Δ и имеет на нём абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}(x)$ порядка $(r-1)$, а её производная порядка r имеет ограниченную вариацию на Δ . Тогда справедлива оценка

$$HR_n(f, \Delta_1) \leq \frac{9D|\Delta|}{n} \ln \left(e + \frac{n}{|\Delta|} \Omega \left(f, \Delta; \frac{|\Delta|}{n} \right) \right), \quad (3)$$

где $D \geq 1$ – постоянная из формулы (1).

Замечание. Отметим, что в простейшем случае $\Delta = \Delta_1$ оценка (3) совпадает по порядку с оценкой (2), но лучше по значению константы.

Ключевую роль в доказательстве теоремы играет следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $h > 0, r \in \mathbb{N}$ и $f(x)$ – ограниченная интегрируемая (измеримая) функция, определённая на Δ . Тогда почти всюду на Δ выполнена оценка

$$\left| f_{h,r}^{(r)}(x) \right| \leq \frac{\omega(f; 2h)}{2h^r}.$$

Здесь

$$\omega(f; 2h) = \sup_{x', x'' \in \Delta} \{f(x') - f(x'') : |x' - x''| \leq 2h\}$$

есть равномерный модуль непрерывности функции $f(x)$, $f_h(x)$ – функция Стеклова

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt,$$

$f_{h,k}$ – функция Стеклова порядка k для $f(x)$ с шагом h , определяемая при $k = 2, 3, \dots$ соотношениями

$$f_{h,1}(x) = f_h(x), \quad f_{h,2}(x) = \left(f_{h,1}(x) \right)_h, \quad \dots, \quad f_{h,k}(x) = \left(f_{h,k-1}(x) \right)_h.$$

Кроме того, если $\text{Var}_\Delta f < \infty$, то справедливо неравенство

$$\text{Var}_{\Delta} f_{h,r}^{(r)} \leq \frac{1}{h^r} \text{Var}_{\Delta} f.$$

Доказательство леммы. Напомним, что *симметрической разностью* для функции $g(x)$ называется величина

$$\Delta_{\delta}^1(g) = g\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - g\left(x - \frac{\delta}{2}\right), \quad \delta > 0.$$

Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. В соответствии с данным выше определением запишем

$$\Delta_{2h}^1(F) = F(x+h) - F(x-h), \quad f_{h,1}(x) = \frac{1}{2h} \Delta_{2h}^1(F).$$

По индукции k -ая симметрическая разность для функции $g(x)$ задаётся формулой

$$\Delta_{\delta}^k(g) = \Delta_{\delta}^1\left(\Delta_{\delta}^{k-1}(g)\right), \quad k = 2, 3, \dots.$$

Тогда по определению функции Стеклова и симметрической разности порядка r получим

$$f_{h,r}(x) = \frac{\Delta_{2h}^r(F_r(x))}{(2h)^r}, \quad (4)$$

где $F_r(x)$ – r -ая последовательная первообразная функции $f(x)$.

Дифференцируя равенство (4) r раз, для почти всех $x \in \Delta$ будем иметь

$$f_{h,r}^{(r)}(x) = \frac{\Delta_{2h}^r(f(x))}{(2h)^r}. \quad (5)$$

Для тех же $x \in \Delta$ докажем по индукции неравенство

$$|\Delta_{2h}^r(f(x))| \leq 2^{r-1} \omega(f; 2h).$$

В условиях леммы справедлива цепочка соотношений

$$|\Delta_{2h}^1(f(x))| = |f(x+h) - f(x-h)| \leq \omega(f; 2h),$$

$$|\Delta_{2h}^2(f(x))| = |f(x+2h) - f(x) - f(x) + f(x-2h)| \leq$$

$$\leq |f(x+2h) - f(x)| + |f(x) - f(x-2h)| \leq 2\omega(f; 2h),$$

...

$$|\Delta_{2h}^r(f(x))| \leq 2^{r-1} \omega(f; 2h).$$

Отсюда, используя (5), запишем

$$\left| f_{h,r}^{(r)}(x) \right| = \left| \frac{\Delta_{2h}^r(f(x))}{(2h)^r} \right| \leq \frac{2^{r-1}}{(2h)^r} \omega(f; 2h) \leq \frac{\omega(f; 2h)}{2h^r}.$$

Рассуждения, аналогичные проведённым выше, дают неравенства

$$\text{Var}_{\Delta} \Delta_{2h}^1(f(x)) \leq 2 \text{Var}_{\Delta} f, \dots, \text{Var}_{\Delta} \Delta_{2h}^r(f(x)) \leq 2^r \text{Var}_{\Delta} f.$$

Тем самым

$$\text{Var}_{\Delta} f_{h,r}^{(r)} = \frac{1}{(2h)^r} \text{Var}_{\Delta} \Delta_{2h}^r(f(x)) \leq \frac{1}{(2h)^r} 2^r \text{Var}_{\Delta} f = \frac{1}{h^r} \text{Var}_{\Delta} f.$$

Лемма доказана.

Литература

1. Newman D. Rational approximation to $|x|$ // Michigan Math J. 1964. No. 11. P. 11-14.
2. Буланов А.П. О порядке приближения выпуклых функций рациональными функциями // Известия АН СССР. Серия матем. 1969. № 33. С. 1132-1148.
3. Popov V.À. Uniform rational approximation of the class and its applications // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1977. Т. 29. № 1-2. P. 119-129.
4. Петрушев П.П. Наилучшие рациональные приближения в хаусдорфовой метрике // Сердика Българско математическо списание. 1980. Т. 6. С. 29-41.
5. Попов В.А. Об аппроксимации функций ограниченной вариации рациональными функциями // Сердика Българско математическо списание. 1975. Т. 1. С. 96-103.
6. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно-монотонных (в частности, рациональных) функций // Матем.сб. 1976. Т. 101. № 4. С. 508-541.

Е.Н. Sadekova
NRNU "MEPhI"

ON THE PROBLEM OF APPROXIMATION OF BOUNDED FUNCTIONS BY RATIONAL FUNCTIONS IN THE HOUSDORF METRIC

Keywords: *uniform metric, Hausdorff metric, bounded function, best approximation by rational functions, integral average modulus of oscillation.*

Abstract. *The paper investigates the approximation of a function bounded on an interval by rational functions in the Hausdorff metric. The*

history of the problem is briefly stated, well-known results of Bulgarian and Russian mathematicians on approximation in the uniform metric are given. With these results and a special oscillation modulus introduced in 1976 by E.P. Dolzhenko and E.A. Sevastyanov, an estimate was obtained for the best approximation in the Hausdorff metric with a constant that is more accurate than previously known.

А.П. Шилин

Белорусский государственный университет

УДК 517.968.7

ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЧАСТНОГО ВИДА

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярный интеграл, обобщенные формулы Сохоцкого, дифференциальное уравнение, краевая задача Римана.

Рассмотрено новое гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение произвольного порядка. Уравнение задано на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения имеют специальную структуру. Уравнение сведено к краевой задаче Римана и дифференциальным уравнениям, которые решаются в некотором классе функций. Результат носит законченный конструктивный характер. Решен пример.

1. Постановка задачи. Обозначим L простую гладкую замкнутую положительно ориентированную кривую на комплексной плоскости. Пусть D_+ и D_- – соответственно внутренняя и внешняя области, для которых эта кривая является границей. Зададим H -непрерывные функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $f(t) \in L$. Зададим также n раз H -непрерывно дифференцируемые функции $R_{\pm}(t) \neq 0$, $t \in L$, $n \in \mathbb{N}$. Будем искать n раз H -непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \left((a(t)R_+^{(n-k)}(t) + b(t)R_-^{(n-k)}(t))\varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{\pi i} (a(t)R_+^{(n-k)}(t) - b(t)R_-^{(n-k)}(t)) \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} \right) = f(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты, а интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару.

Предположим в дальнейшем, что функции $R_{\pm}(t)$ аналитически продолжимы с кривой L в соответствующие области D_{\pm} , за исключением точек z_j^{\pm} , в которых у них имеются полюсы порядков n_j^{\pm} соответственно, $j = \overline{1, n^{\pm}}$. Обозначим ζ_j^{\pm} нули функций $R_{\pm}(z)$ в соответствующих областях D_{\pm} , и пусть порядки этих нулей равны соответственно m_j^{\pm} , $j = \overline{1, m^{\pm}}$. Считаем для определенности, что ни одна из точек z_j^- и ζ_j^- не совпадает с точкой $z = \infty$, иначе пришлось бы (как это мы делаем в рассматриваемом далее примере) лишь немного видоизменить последующие формулы. Обозначим также $l_j^{\pm} = \max(0, m_j^{\pm} - n)$, $j = \overline{1, m^{\pm}}$.

Интегро-дифференциальное уравнение с интегралами, понимаемыми в смысле конечной части по Адамару, впервые исследовано в [1] для случая постоянных коэффициентов. В настоящей работе, как и в работах [2; 3] и др., изучаются такие случаи переменных коэффициентов в подобных уравнениях, которые допускают конструктивный подход к нахождению решений.

2. Основной результат и схема исследования. Введем функции

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm},$$

$$F_+(z) = (R_+(z)\Phi_+(z))^{(n)}, \quad z \in D_+, \quad (2)$$

$$F_-(z) = (R_-(z)\Phi_-(z))^{(n)}, \quad z \in D_-. \quad (3)$$

Теорема. *Решение уравнения (1) сводится к последовательному решению краевой задачи Римана*

$$F_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)} F_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)}, \quad t \in L, \quad (4)$$

в классе функций, кратных дивизору

$$\bigcup_{j=1}^{n^+} (z_j^+)^{-n_j^+ - n} \bigcup_{j=1}^{n^-} (z_j^-)^{-n_j^- - n} \bigcup_{j=1}^{m^+} (\zeta_j^+)^{l_j^+} \bigcup_{j=1}^{m^-} (\zeta_j^-)^{l_j^-} \infty^{n+1}, \quad (5)$$

и решению дифференциальных уравнений (2), (3) в классе аналитических функций (с условием $\Phi_-(\infty) = 0$ для уравнения (3)).

Задача Римана (4) получается после использования в уравнении (1) обобщенных формул Сохоцкого [4] для функций $\Phi_{\pm}(z)$ и формулы Лейбница для производных высших порядков. Требование кратности дивизору (5) возникает после анализа поведения функций $F_{\pm}(z)$ в точках

z_j^\pm, ζ_j^\pm . Теория задачи Римана [5] позволяет дать конструктивное решение задачи (4). Здесь мы не будем приводить соответствующие условия разрешимости и формулы решения.

В случае разрешимости задачи (4) обозначим $\sum_{k=-n_j^+-n}^{\infty} c_{kj} (z - z_j^+)^k$

ряды Лорана функции $F_+(z)$ в точках $z_j^+, j = \overline{1, n^+}$. Для разрешимости уравнения (2) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{cases} c_{kj} = 0, k = \overline{-n_j^+, -1}, j = \overline{1, n^+}; \\ \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_{z_0}^z (z-\zeta)^{n-1} F_+(\zeta) d\zeta + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k z^k \right) \Big|_{z=\zeta_j^+}^{(s)} = 0, s = \overline{0, m_j^+ - 1}, j = \overline{1, m^+}, \end{cases} \quad (6)$$

где $z_0 \in D_+$, δ_k – произвольные постоянные, $k = \overline{0, n-1}$.

В развернутом виде условия (6) будут представлять собой систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных δ_k и тех произвольных постоянных, которые, возможно, входят в решение задачи (4). При их выполнении решение уравнения (2) записывается по формуле

$$\Phi_+(z) = \frac{1}{R_+(z)} \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_{z_0}^z (z-\zeta)^{n-1} F_+(\zeta) d\zeta + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k z^k \right).$$

Аналогично решается уравнение (3). Решение исходного уравнения (1) (в случае разрешимости) записывается по формуле

$$\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t)$$

3. Пример. Рассмотрим уравнение (1) на окружности $|t| = 2$ в случае, когда $n = 2, a(t) = b(t) = 1, f(t) = 4, R_+(t) = \frac{t^2(t-1)}{t+1}, R_-(t) = t^3$. Уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{t^2(t^2 + 2t - 1)}{t+1} \varphi''(t) + 2 \left(2t + 3t^2 - 2 + \frac{2}{(t+1)^2} \right) \varphi'(t) + 2 \left(1 + 3t - \frac{2}{(t+1)^3} \right) \varphi(t) + \\ & + \frac{2}{\pi i} \left(1 - 3t - \frac{2}{(t+1)^3} \right) \int_{|\tau|=2} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{2}{\pi i} \left(2t - 3t^2 - 2 + \frac{2}{(t+1)^2} \right) \int_{|\tau|=2} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} - \\ & - \frac{2}{\pi i} \frac{t^2(t^2 + 1)}{t+1} \int_{|\tau|=2} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^3} = 4, |t| = 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Задача Римана (4) станет задачей о скачке

$$F_+(t) = F_-(t) + 2, \quad |t| = 2,$$

для функций $F_+(z) = \left(\frac{z^2(z-1)}{z+1} \Phi_+(z) \right)''$, $F_-(z) = \left(z^3 \Phi_-(z) \right)''$. Следует находить решения этой задачи, кратные дивизору $(-1)^2 \infty^0$. В результате получим

$$F_+(z) = 2 + c_0 + \frac{c_{-1}}{z+1} + \frac{c_{-2}}{(z+1)^2} + \frac{c_{-3}}{(z+1)^3},$$

$$F_-(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z+1} + \frac{c_{-2}}{(z+1)^2} + \frac{c_{-3}}{(z+1)^3},$$

где $c_0, c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}$ – произвольные постоянные. Для возможности восстановить двукратным интегрированием функции $\frac{z^2(z-1)}{z+1} \Phi_+(z)$, $z^3 \Phi_-(z)$ полагаем в дальнейшем $c_{-1} = c_{-2} = 0$, тогда получим

$$\Phi_+(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)} \left(\int_{z_0}^z (z-\zeta) \left(2 + c_0 + \frac{c_{-3}}{(\zeta+1)^3} \right) d\zeta + \delta_1 z + \delta_0 \right),$$

$$\Phi_-(z) = \frac{1}{z^3} \left(\int_{\infty}^z (z-\zeta) \frac{c_{-3}}{(\zeta+1)^3} d\zeta + \frac{c_0 z^2}{2} + \sigma_1 z + \sigma_0 \right),$$

где $\delta_1, \delta_0, \sigma_1, \sigma_0$ – произвольные постоянные.

В формуле для $\Phi_+(z)$ удобно взять $z_0 = 0$. Для устранения у этой функции возможных полюсов в точках $z=0, z=1$ возникают три условия

$$\left(\int_0^z (z-\zeta) \left(2 + c_0 + \frac{c_{-3}}{(\zeta+1)^3} \right) d\zeta + \delta_1 z + \delta_0 \right) \Big|_{z=0}^{(s)} = 0, \quad s = 0, 1,$$

$$\left(\int_0^z (z-\zeta) \left(2 + c_0 + \frac{c_{-3}}{(\zeta+1)^3} \right) d\zeta + \delta_1 z + \delta_0 \right) \Big|_{z=1} = 0.$$

Учет этих условий и дальнейшие вычисления дают $c_{-3} = -2(2 + c_0)$,

$$\delta_1 = \delta_0 = 0, \quad \Phi_+(z) = -\frac{2+c_0}{2}, \quad \Phi_-(z) = -\frac{2+c_0}{z^3(z+1)} + \frac{c_0}{2z} + \frac{\sigma_1}{z^2} + \frac{\sigma_0}{z^3}.$$

Следовательно, решение уравнения (7) содержит три произвольные постоянные c_0, σ_1, σ_0 и выражается формулой

$$\varphi(t) = \frac{2+c_0}{2} + \frac{2+c_0}{t^3(t+1)} - \frac{c_0}{2t} - \frac{\sigma_1}{t^2} - \frac{\sigma_0}{t^3}.$$

Литература

1. Зверович Э. И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2010. Т. 54, № 6. С. 5–8.
2. Зверович Э. И., Шилин А. П. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2018. Т. 54, № 4. С. 404–407. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>.
3. Шилин А. П. О решении одного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным и гиперсингулярным интегралами // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2020. Т. 56, № 3. С. 298–309. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309>.
4. Зверович Э. И. Обобщение формул Сохоцкого // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2012. №2. С. 24–28.
5. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

A.P. Shilin

Belarusian State University

HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH PARTIAL COEFFICIENTS

Keywords: *integro-differential equation, hypersingular integral, generalized Sokhotsky formulas, differential equation, Riemann boundary problem.*

Abstract. *A new hypersingular integro-differential equation of arbitrary order is considered. The equation is given on a closed curve located on the complex plane. The coefficients of the equation have a special structure. The equation is reduced to the Riemann boundary value problem and a differential equations that are solved in a certain class functions. The finished result is of a constructive nature. Solved the example.*

СЕКЦИЯ 4

Новые информационные и педагогические технологии в образовании

Н.В. Ассонова

Смоленский государственный университет

УДК 37.012.7

СРАВНЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНОСТИ И МУЛЬТИ- МЕДИЙНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ ФОРМ УЧЕБНИКОВ ДЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ ПО РАЗНЫМ ПРЕДМЕТАМ

Ключевые слова: *электронная форма учебника (ЭФУ), интерактивность, мультимедийность, начальная школа.*

Исследуются свойства интерактивности и мультимедийности электронных форм учебников (ЭФУ) начальной школы по разным предметам, размещённых на образовательной платформе ЛЕСТА. Уточняются определения предложенных ранее автором числовых показателей для характеристики свойств интерактивности и мультимедийности ЭФУ. Выясняются и сравниваются значения введённых показателей для ЭФУ по математике, русскому языку, иностранному языку, окружающему миру и технологии. Найденные величины сопоставляются с предметными областями учебников.

В соответствии с приказом Минпросвещения России от 18 декабря 2019 года № 695 электронную форму должен иметь каждый учебник из федерального перечня допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования.

Отличительные свойства понятия электронной формы учебника (ЭФУ), а также предъявляемые к ней законодательные требования были раскрыты в работе [1].

Напомним эти особенности.

В ЭФУ:

- содержится систематическое изложение учебной дисциплины или её части;
- контент ЭФУ соответствует учебной программе;
- контент ЭФУ поддерживает основные звенья дидактического цикла процесса обучения;
- содержание и структура ЭФУ и печатной формы учебника (ПФУ) идентичны;

- в ЭФУ возможно создавать закладки, заметки и переходить к ним;
- ЭФУ включает в себя мультимедийные и интерактивные компоненты, способствующие активизации познавательной деятельности учащихся;
- ЭФУ является учебным электронным изданием и официально утверждается в данном качестве.

Возможность широкого применения ЭФУ в образовательном пространстве Российской Федерации появилась в 2015 году с вступлением в силу «Порядка формирования федерального перечня учебников», утверждённого приказом Минобрнауки РФ № 1559 от 08 декабря 2014 года. Поэтому ЭФУ является достаточно новым учебным инструментом, требующим всестороннего исследования.

Особенно актуально изучение свойств ЭФУ, поднимающих его по отношению к ПФУ на новый уровень эффективности организации познавательной деятельности учащихся. Такими свойствами являются мультимедийность и интерактивность, которые, согласно действующему «Порядку формирования федерального перечня учебников» должны быть дидактически обоснованы и методически проработаны.

Мультимедийные элементы содержат информацию, воспринимаемую разными органами чувств, например, аудиальную и визуальную.

Интерактивные элементы обеспечивают взаимодействие пользователя с электронным ресурсом. Можно выделить 4 уровня интерактивности [2] в зависимости от форм взаимодействия пользователя с содержанием ресурса. Первый – условно-пассивный, второй – активный, третий – деятельностный, четвёртый – исследовательский.

Для формализации сравнения свойств мультимедийности и интерактивности ЭФУ в работе [1] были введены следующие математические характеристики: качественный уровень k_i интерактивности (k_m – мультимедийности), насыщенность интерактивными элементами (n_i), мультимедийными (n_m), и теми, и другими элементами вместе (n_{i+m}).

Значения введённых величин были найдены для четырёх ЭФУ на образовательной платформе ЛЕСТА. Это позволило проанализировать качество реализации мультимедийности и интерактивности для выбранных учебников начальной школы по русскому языку, математике, окружающему миру и технологии.

Определялись данные величины следующим образом.

k_m – качественный уровень мультимедийности – равен количеству различных типов использованных в ЭФУ медиаэлементов из следующего набора: изображение, галерея изображений, 3D-модель, слайд-шоу, анимация, видео, таблица, диаграмма, схема, график, текстовый материал и аудиоматериал. Перечисленные типы медиаэлементов используются в

ЭФУ на образовательной платформе ЛЕСТА. Первые 11 из них предъявляют визуальную информацию. Показатель k_m принимает натуральные значения от 1 до 11, с буквой А или без неё в зависимости от наличия или отсутствия аудиоматериала.

Показатель k_i интерактивности принимает значения от 1 до 4 в зависимости от уровня интерактивности по градации А.В. Осина.

Для подсчёта насыщенности ЭФУ мультимедийными (n_m), интерактивными элементами (n_i), и теми, и другими элементами вместе (n_{i+m}) находим количество соответствующих элементов, приходящееся на 10 страниц учебника. К интерактивным элементам ЭФУ на образовательной платформе ЛЕСТА относятся итоговая работа, проверочная работа, тренажёр, интерактивное задание.

Цель настоящей статьи – уточнение определений, предложенных в [1] характеристик мультимедийности и интерактивности ЭФУ на образовательной платформе ЛЕСТА; исследование ЭФУ начальной школы по иностранному языку на предмет интерактивности и мультимедийности; сравнение числовых характеристик рассмотренных ЭФУ по математике, русскому языку, английскому языку, окружающему миру и технологии; соотнесение найденных показателей с предметными областями учебников.

Уточнение характеристик мультимедийности и интерактивности вызвано тем, что эти свойства присущи одновременно большому количеству элементов ЭФУ. Подача информации разного типа в зависимости от воспринимающих её органов чувств сочетается с организацией двустороннего взаимодействия пользователя с контентом ресурса.

ЭФУ создаётся как учебное электронное издание с гипертекстуальной системой навигации, включающей оглавление, поиск по фрагменту текста, переход на следующую и предыдущую страницы и на страницу по её номеру, возможность создания заметок и закладок. Масштабирование изображения с целью настройки для комфортного восприятия пользователем также является обязательной опцией электронного учебника. Поэтому условно-пассивные формы взаимодействия пользователя с содержанием электронного ресурса присущи ЭФУ изначально. А значит, все перечисленные 11 видов информационных объектов и аудиоматериал имеют первый уровень интерактивности. Кроме того, 3D-модель, как правило, позволяет вращение тел, что относится уже к активным формам взаимодействия, то есть ко второму уровню интерактивности.

Исследование ЭФУ английского языка [3] М.З. Биболетовой и других авторов для 4 класса показало отсутствие какого бы то ни было элемента из перечисленных выше 11 информационных объектов с соответствующей пиктограммой. Однако примерно пятая часть

интерактивных заданий включает аудиоматериал. В некоторых из них содержатся дополнительные тексты, дополнительные иллюстрации и галереи изображений. Поэтому для определения уровня мультимедийности логичнее опираться не только на элементы ЭФУ, имеющие пиктограммы изображения, галереи изображений, 3D-модели, слайд-шоу, анимации, видео, таблицы, диаграммы, схемы, графики, текстовый материал, но и на содержание заданий интерактивного характера. В ЭФУ [3] имеется три типа дополнительной визуальной информации, представленной внутри интерактивных элементов, а также аудиодорожки, поэтому считаем уровень мультимедийности этого издания равным 3А.

Отметим, что интерактивные задания, представленные в [3], отличаются высоким уровнем методической проработанности. Многие из них требуют упорядочения предложений или изображений перетаскиванием соответствующих «прямоугольников», набора слов или части слов из букв английского алфавита, установления соответствия между указанными множествами предложений и изображений. Подобные упражнения организуют деятельностный характер взаимодействия обучаемого с контентом электронного учебника, что соответствует третьему уровню интерактивности. В таблице 1 представлены итоги исследования ЭФУ [3] и приведены результаты, полученные в работе [1].

Таблица 1

Показатели интерактивности и мультимедийности ЭФУ

Название элемента ЭФУ	Пиктограмма	Учебник				
		ин. яз.	рус. яз.	матем.	окр. мир	технологии
Интерак. задание		89	66	44	39	24
Тренажёр				2	5	
Проверочная работа			3	3	1	4
Итоговая работа		39		3	1	
Изображение			11			
Слайд-шоу			1			4
Неинтерак. задание					5	
Галерея изображ.					2	

Аудио-материал		41			1	
Дополнит. текст					4	
Анимация						2
Количество страниц		144	175	127	158	40
n_i элементов на 10 с.		8,89	3,94	4,09	2,91	7,00
n_m элементов на 10 с.		2,85	0,69	0	0,19	0,75
n_{i+m} элементов на 10 с.		11,74	4,63	4,09	3,10	7,75
k_i		3	3	3	3	3
k_m		3А	4А	6	5А	6А

Таблица показывает, что наиболее насыщенным интерактивными и мультимедийными элементами является учебник английского языка, за ним следуют в порядке убывания учебники технологии, русского языка, математики и окружающего мира. Наивысший уровень интерактивности имеющихся во всех рассмотренных ЭФУ элементов – третий.

Отметим особенности ЭФУ, обусловленные их принадлежностью определённой предметной области. Учебник английского содержит большое количество аудиоэлементов, причём их больше 41 – количества, представленного в таблице, поскольку в ней не учтены аудиоэлементы из интерактивных заданий. Работа с таким учебником, несомненно, будет способствовать развитию понимания иностранной речи на слух. Большое количество тренировочных интерактивных заданий на сопоставление слов и их значений, верное написание слов, употребление артиклей и глаголов, построение предложений и текстов позволяют организовать эффективное изучение иностранного языка.

Учебник технологии предьявляет разнообразные типы визуальной информации и большое количество тренировочных заданий, что обуславливается, возможно, рассмотренным разделом – информационно-коммуникационными технологиями.

ЭФУ окружающего мира предьявляет разные типы зрительной информации, но таких элементов достаточно мало.

ЭФУ математики содержит такие типы визуальной информации, как текст, схема, график, диаграмма, иллюстрация, таблица, что соответствует разным способам представления математической информации. Интерактивные тестовые задания носят в большей степени контролирующий, чем тренировочный характер, как и в учебниках русского языка и окружающего мира.

Безусловным лидером среди рассмотренных ЭФУ начальной школы является учебник английского языка. Он имеет наибольшую насыщенность интерактивными и мультимедийными элементами. Кроме того, большая часть заданий, отмеченных пиктограммами интерактивных, носит и мультимедийный характер, поскольку содержит либо звуковую дорожку, либо дополнительный текст, либо изображение, либо галерею изображений. Не менее трети интерактивных заданий организует деятельностный характер взаимодействия обучающегося с ЭФУ, то есть имеет третий уровень интерактивности.

Методически грамотное применение ЭФУ [3] в образовательном процессе, несомненно, позволит значительно повысить эффективность изучения иностранного языка.

Возможно, ЭФУ по другим предметам будут совершенствоваться в направлении роста насыщенности интерактивно-мультимедийными элементами, предполагающими деятельностный характер взаимодействия обучающихся с их содержанием.

Литература

1. Ассонова Н.В. Анализ мультимедийности и интерактивности некоторых электронных форм учебников для начальной школы // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием / Смоленский государственный университет. Киров, 2020. С. 45-50.
2. Осин А.В. Открытые образовательные модульные мультимедиа системы. М.: Издательский сервис, 2010. 328 с.
3. Биболетова М.З., Денисенко О.А., Трубанева Н.Н. Enjoy English. Английский с удовольствием. Английский язык. 4 класс. Электронная форма учебника. М.: Издательство «Дрофа», 2019.

N.V. Assonova
Smolensk State University

COMPARISON OF INTERACTIVITY AND MULTIMEDIA OF ELECTRONIC FORMS OF TEXTBOOKS FOR PRIMARY SCHOOL IN DIFFERENT SUBJECTS

Keywords: *electronic form of textbook (EFU), interactivity, multimedia, primary school.*

Abstract. *The properties of interactivity and multimedia of electronic forms of primary school textbooks in different subjects, placed on the LECTA educational platform, are investigated. The definitions of the numerical indicators proposed earlier by the author to characterize the properties of interactivity and multimedia EFU are clarified. The values of the entered indicators for the EFU in mathematics, Russian, foreign language, the world around us, and technology are found out and compared. The values found are mapped to the subject areas of the textbooks.*

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ С ПОМОЩЬЮ СКМ WOLFRAM MATHEMATICA

Ключевые слова: *системы уравнений с параметрами, графический метод решения, система компьютерной математики Wolfram Mathematica.*

В данной статье рассматриваются возможности использования системы Wolfram Mathematica для решения систем уравнений с параметрами. На конкретных примерах иллюстрируется применение СКМ при решении систем уравнений с параметром графическим методом.

1. Введение. Задание 18, как и следующее за ним, является одним из самых сложных заданий Единого государственного экзамена по математике. Для успешного решения таких задач требуется свободно оперировать изученными определениями, свойствами, теоремами, применять их в различных ситуациях, анализировать условие и находить возможные пути решения.

Применение графических методов целесообразно в случаях, когда в условии задачи ставится вопрос о количестве решений в зависимости от значений параметра или нахождения значений параметра, при которых решение отсутствует или единственно. Построив графический образ, можно определить, как влияет на них и на решение изменение параметра. Также иногда график дает возможность сформулировать аналитически необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи. К минусам графических методов можно отнести вопрос о строгости решения. Если результат, полученный графическим методом, сомнителен, необходимо подкрепить его аналитически.

2. Решение задач. Приведем некоторые примеры систем уравнений, содержащих параметр, при решении которых можно использовать СКМ Wolfram Mathematica.

Пример 1 (ЕГЭ, 2020 г.). *Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} \frac{x^2+y^2-2x-2y-6}{\sqrt{2-|y-x|}} = 0, \\ y - ax = 3a - 3 \end{cases} \quad (1)$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Очевидно, что первое уравнение системы можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 8, \\ |y-x| < 2. \end{cases}$$

Неравенство $|y-x| < 2$ задает открытое подмножество координатной плоскости Oxy , расположенное между прямыми $y=x+2$ и $y=x-2$. Уравнение $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 8$ задает окружность с центром в точке $O(-1,1)$ и радиусом $R=2\sqrt{2}$.

Следовательно, первому уравнению системы удовлетворяет множество точек $(x; y)$ плоскости, лежащих на части дуги окружности, содержащейся в заданной «полосе». При этом точки $(-1; 1)$, $(-1; -3)$ и $(3; 1)$ должны быть выколоты, так как в этих точках окружность касается или пересекает ограничивающую «полосу».

```
Plot[{{Labeled[-1 - Sqrt[8 - (x - 1)^2], Style["x^2 - 2 x + y^2 - 2 y - 6 = 0", Bold, 14], 4], -1 + Sqrt[8 - (x - 1)^2],
[график с пометкой] [квадратный корень] [стиль] [жирный шрифт] [квадратный корень]
-3, 2/3 (x + 3) - 3, 2 (x + 3) - 3, (Sqrt[3/2] + 1) * (x + 3) - 3, x + 2, x - 2}, {x, -5, 5}, PlotRange -> {-4, 4},
[квадратный корень] [отображаемый диапазон графика]
AxesStyle -> Arrowheads[0.02], AxesLabel -> {x, y}, Filling -> {7 -> {8}},
[стиль осей] [наконечники] [обозначения на осях] [заливка]
PlotStyle -> {Black, Black, Black, Black, Black, Black, Dashed, Dashed}]
[стиль графика] [чёрный] [чёрный] [чёрный] [чёрный] [чёрный] [чёрный] [штриховой] [штриховой пунктир]
```

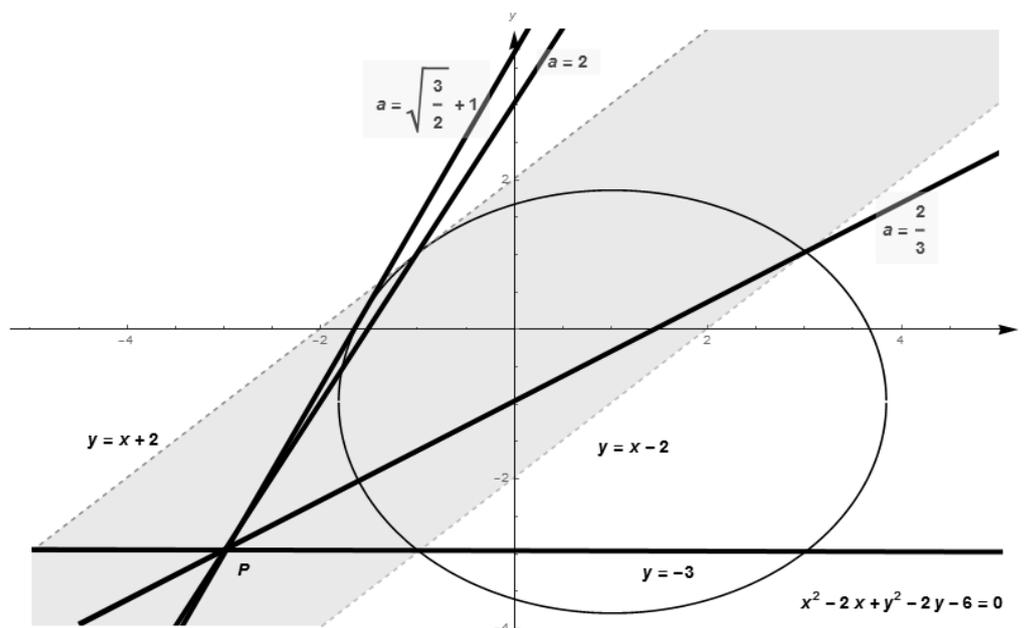


Рис. 1. Графики уравнений, задаваемых системой (1)

Второе уравнение системы задает прямую вида $y = a(x + 3) - 3$, проходящую через точку $P(-3; -3)$ с коэффициентом угла наклона, равным a .

Построим графики рассмотренных уравнений в системе координат Oxy (рис. 1).

Система будет иметь ровно одно решение только в том случае, когда прямая будет иметь с полуокружностью ровно одну общую точку. При этом несложные вычисления показывают, что прямая касается окружности в пределах заданной области только при $a = \sqrt{\frac{3}{2}} + 1$. Кроме того, прямая пересекает границу «полосы» в точках $(-1; 1)$, $(-1; -3)$ и $(3; 1)$ при значениях параметра, равных $0, \frac{2}{3}, 2$ соответственно.

Данный чертеж делает практически очевидным тот факт, что система имеет ровно одно решение только при $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right]$, а также в случае пересечения прямой исключенных точек, соответствующих $a = \sqrt{\frac{3}{2}} + 1$, $a = 2$.

$$\text{Ответ: } a \in \left(0; \frac{2}{3}\right] \cup \left\{\sqrt{\frac{3}{2}} + 1; 2\right\}.$$

Пример 2. (ЕГЭ, 2019 г.) *Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система*

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases} \quad (2)$$

имеет более двух решений.

Решение. Заметим, что первое уравнение $y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|$ после раскрытия модуля становится эквивалентным следующей кусочно-заданной функции:

$$\begin{cases} y^2 = x^2 \text{ при } x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty), \\ (x - 1)^2 + y^2 = 5 \text{ при } x \in [-1; 2]. \end{cases}$$

На первом промежутке $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ это уравнение задает лучи, принадлежащие прямым $y = x$ и $y = -x$. На промежутке $[-1; 2]$ первое уравнение системы задает дугу окружности Ω с центром в точке $O(1; 0)$ и радиусом $R = \sqrt{5}$.

Второе уравнение системы задает на плоскости Oxy параметризованное семейство параллельных прямых $y = x - a$. Они получаются прямым сдвигом прямой $y = x$ на значение параметра a вдоль оси Oy .

Построим графики рассмотренных функций в системе Oxy (рис. 2).

Заданная система имеет более двух решений в том и только в том случае, когда графики построенных уравнений имеют более двух общих точек пересечения. С одной стороны, графики уравнений могут иметь бесконечно много общих точек, что выполняется только при $a = 0$. Иначе уравнение может иметь ровно два решения, когда прямые вида $y = x - a$ лежат между касательной к окружности и прямой $y = x + 2$.

```
ContourPlot[{-x + y^2 - 2 == Abs[x^2 - x - 2], x - y == -2, x - y == 1 - Sqrt[10], x - y == 0},
|контурный график |абсолютное значение |квадратный корень
{x, -10, 10}, {y, -10, 10}, Axes -> True, Frame -> False, AxesStyle -> Arrowheads[0.03],
|оси |истина |рамка |ложь |стиль осей |наконечники
AxesLabel -> {x, y}, ContourStyle -> {Black, Directive[Gray, Dashed], Directive[Gray, Dashed],
|обозначения на осях |контурный стиль |чёрный |директива |серый |штрихово... |директива |серый |штриховой п
Directive[Gray, Dashed]}, PlotTheme -> "Web"]
|директива |серый |штриховой... |тематический стиль графика
```

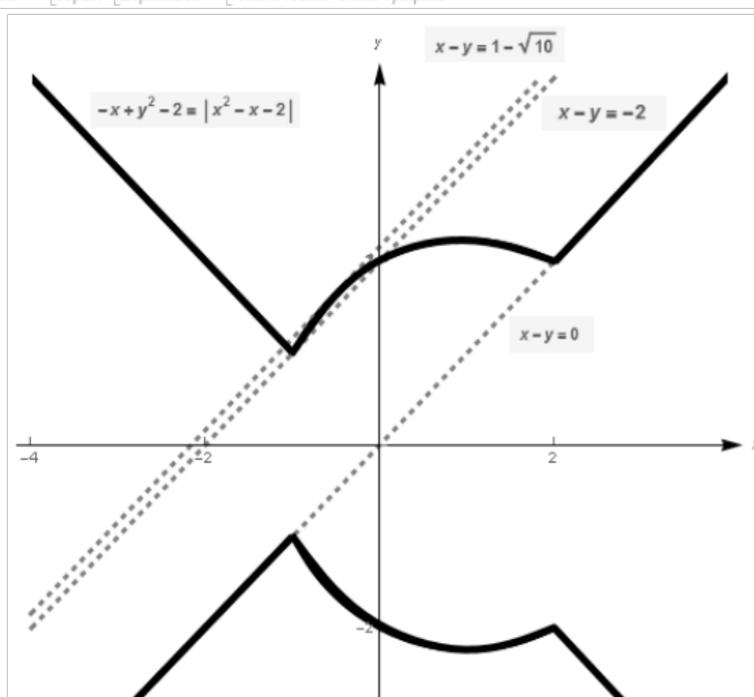


Рис. 2. Графики уравнений, задаваемых системой (2)

Подставляя $y = x - a$ в первое уравнение системы, несложно определить, что прямая касается верхней полуокружности при $a = 1 - \sqrt{10}$.

Изображение графиков функций позволяет выяснить, что система имеет два и более решений только в том случае, когда $a \in (1 - \sqrt{10}, -2)$, а также в единственной точке $a = 0$, где система имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a \in (1 - \sqrt{10}, -2) \cup \{0\}$.

Литература

1. Крамор В.С. Задачи с параметрами и методы их решения М: Оникс, 2015.

N.N. Bogdanova, R.A. Fedotov
Smolensk State University

SOLVING SYSTEMS OF EQUATIONS WITH PARAMETERS USING SCM WOLFRAM MATHEMATICA

Keywords: *systems of equations with parameters, graphical solution method, computer mathematics system Wolfram Mathematica.*

Abstract. *This article discusses the possibilities of using the Wolfram Mathematica system to solve systems of equations with parameters. Specific examples illustrate the use of SCM in solving systems of equations with a parameter by the graphical method.*

И.Н. Борисова, И.Б. Гарипов
Казанский (Приволжский) федеральный университет

УДК 372.851

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА НАГЛЯДНОСТИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Ключевые слова: *абстракция, принцип наглядности, электронное пособие, интегрирование, интегральное исчисление.*

В статье ставится проблема реализации принципа наглядности при изучении интегрального исчисления в школьном курсе математики и в качестве ее решения предлагается разработка и применение наглядных электронных пособий с сопутствующими динамическими анимациями, предназначенных не только для работы на уроке, но и самостоятельного изучения, что является актуальным в связи с распространением практики дистанционного обучения. Представлен анализ применения разработанного электронного пособия по основам интегрирования для школьников и студентов нематематических специальностей в одном из двух контрольных классов средней общеобразовательной школы.

Несмотря на свое многовековое существование, один из самых известных и интуитивно понятных принципов обучения – принцип наглядности – впервые был теоретически обоснован, обобщен и углублен Я.А. Коменским только в XVII веке. Сущность принципа состоит в обогащении учащихся чувственным познавательным опытом, необходимым для полноценного овладения абстрактными понятиями. Тем не менее, в педагогике имеются различные подходы к толкованию этого принципа. В. Оконь воспринимал принцип наглядности как принцип заполнения пространства между конкретным и абстрактным, для М. Данилова наглядность – это единство конкретного и абстрактного, а С. Гончаренко полагал наглядность принципом дидактики, позволяющим строить процесс обучения на конкретных образах. По примеру Я.А. Коменского исследованием наглядности занимались такие видные деятели педагогической сферы, как Ж.Ж. Руссо, И.Г. Песталоцци, Ф.А. Дистервег, К.Д. Ушинский, Л.Н. Толстой.

В.П. Вахтеров в своих педагогических трудах отмечал, что принцип наглядности должен быть положен в основу методики каждого учебного предмета. Однако особое значение он имеет в обучении математике, подразумевающей достижение учеником наиболее высокой ступени абстракции. Проблему повышенной абстрактности математической теории в школьных курсах поднимают в своих работах Е.М. Кабанова-Меллер [1], Т.Я. Гальперин [2], Н.Ф. Талызина [3], Н.А. Менчинская, Ю.А. Самарин и др. Они обосновывают необходимость наглядности и прикладной направленности наличием затруднений в процессе формирования и усвоения школьниками математических абстракций. Анализ материалов, содержащихся в трудах и публикациях указанных авторов, позволяет сказать, что на сегодняшний день есть лишь разрозненные рекомендации, касающиеся разрешения проблемы усвоения учащимися математических абстракций. Сама проблема трактуется в довольно произвольной форме, тезисы и теоретические положения не составляют в своем большинстве логически выстроенной теории. В свою очередь, И.К. Андронов, Т.В. Малкова, С.С. Варданянц пытались сформулировать общие принципы реализации наглядности в процессе изучения таких разделов, как планиметрия, тригонометрия, арифметика, дифференциальное и интегральное исчисления. Множество вопросов и аспектов реализации принципа наглядности, в частности и визуализации, при обучении математическим предметам и дисциплинам рассматривались в работах О.О. Князевой, М.И. Башмакова, Т.Н. Карповой, В.А. Далингер, Н.М. Ежовой, Д.Д. Ефремовой, Е.И. Смирнова, Л.М. Фридмана, И.Г. Шамсутдинова и Н.В. Шукиной.

Проведенный авторами статьи опрос учащихся 11 классов, направленный на выявление наиболее трудного с точки зрения

качественного восприятия учеником раздела, показал, что 73,6% школьников полагают раздел «Первообразная и интеграл» самым абстрактным и нелегким в изучении среди разделов школьного курса алгебры и начал анализа.

Сузим область проблемы реализации принципа наглядности при обучении математике до изучения основ интегрирования в звене старшей школы и попытаемся предложить ее разрешение.

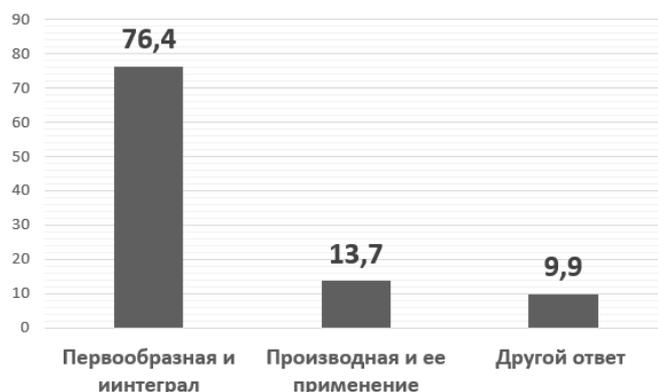


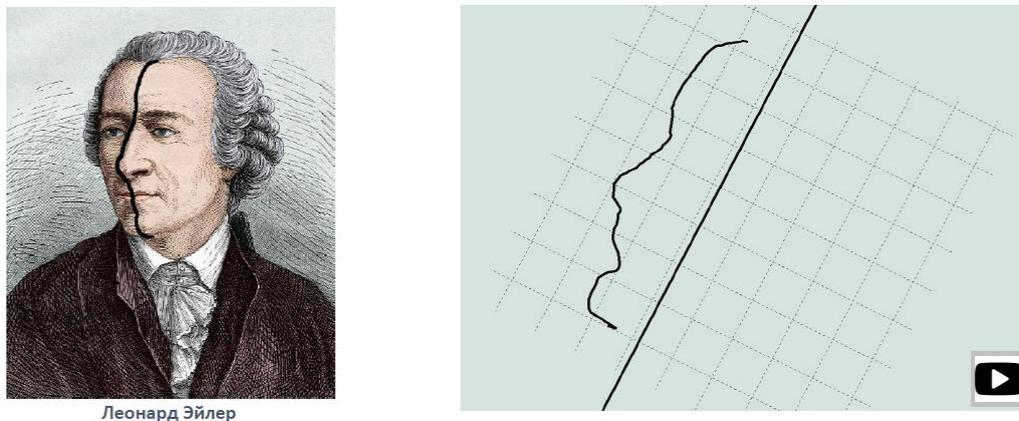
Рис. 1. Опрос учащихся «Самый сложный для изучения раздел алгебры и начал анализа в 10-11 классах»

Если говорить о принципе наглядности в современном обучении, то сегодня его осуществление тесно связано с задачей грамотного применения компьютерных технологий, позволяющих вывести реализацию рассматриваемого дидактического принципа на качественно новый уровень. Поэтому следование за современными тенденциями и развитием образовательных технологий стимулировало к созданию электронного наглядного пособия в формате PDF для учащихся 11 классов и студентов нематематических специальностей. В качестве основной особенности разработки можно выделить повышенный уровень наглядности, достигаемый посредством наполнения материала сопровождающими динамическими анимациями, для создания которых была выбрана математическая программа GeoGebra в виду ряда преимуществ: доступность, кроссплатформенность, простота и удобство интерфейса для изучения учащимися.

Для данного учебного пособия на базе математической программы GeoGebra было создано 26 анимаций, сопровождающих изложение теоретического материала и разбор задач. Всего в пособии представлено 115 заданий, 33 из которых предложены для отработки полученных знаний непосредственно на уроке, 27 – в качестве домашнего задания для закрепления навыков и умений и 55 заданий – для отработки решения задания № 7 из открытого банка заданий ЕГЭ. Большая часть анимаций направлена на сопровождение изучения тем определенного интеграла и его приложений.

Следует отметить, что для учащихся 11 классов, студентов и других

читателей, отдающих предпочтение бумажному формату, разработка не потеряет своих преимуществ, так как каждая иллюстрация и анимация сопровождается QR-кодом, позволяющим просмотреть динамическую анимацию с мобильного устройства.



Леонард Эйлер

Рис. 2. Анимация образования тела путем вращения кривой (профиля Л. Эйлера)

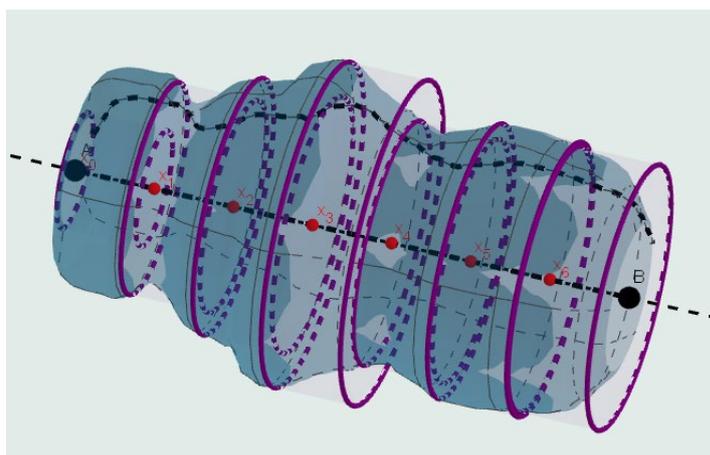


Рис. 3. Анимация поиска объема тел вращения с помощью определенного интеграла

Разработанное пособие было апробировано в ходе эксперимента, проведенного в двух 11 классах, изучающих программу школьного курса математики на углубленном уровне. Первому классу (24 человека) было предложено изучить раздел «Первообразная и интеграл» с помощью школьного учебника, второму (27 человек) – использовать в качестве основной литературы при изучении темы наглядное электронное пособие.

Тесты, проведенные после итоговой контрольной работы, завершающей изучение интегрирования, продемонстрировали следующее:

- в классе (класс № 1), изучавшем интегральное исчисление с помощью учебника (С.М. Никольский), количество людей, считающих интегрирование самой сложной темой курса алгебры и начал анализа,

возросло на 4 человека;

- в классе (класс № 2), изучавшем теорию интегралов с помощью электронного пособия, количество людей, считающих интегрирование самой сложной темой, снизилось на 6 человек;

- 34% учащихся класса № 2 ответили, что ими были просмотрены и разобраны все предложенные анимации;

- 19% учащихся класса № 2 использовали наглядное пособие не только в рамках уроков алгебры, что говорит о положительной стимуляции, повышении мотивации и интереса к изучению интегралов.

Заключение

Подводя итоги, выделим следующее: разработка электронного наглядного пособия по основам интегрирования для школьников и студентов нематематических специальностей была представлена как один из эффективных путей разрешения проблемы реализации принципа наглядности математической теории. Результаты тестирований учащихся 11 класса (51 человек) показали, что интерактивное пособие и наглядные динамические анимации позволили углубить не только уровень понимания предлагаемого для изучения материала, но и интерес к изучению интегрального исчисления и предмета в целом. А это в свою очередь побуждает учителя математики реализовывать и развивать свой творческий потенциал в попытках и процессах решения многочисленных проблем математического образования.

Литература

1. Кабанова-Меллер Е.Н. О роли наглядного материала в процессах абстракции и обобщения у школьников // Вопросы психологии / под. ред. А.А. Смирнова. 1955. №2. С. 65-71.

2. Гальперин П.Я. Основные результаты исследований по проблеме «Формирование умственных действий и понятий». М., 1965.

3. Талызина Н.Ф. Формирование приемов математического мышления. М., 1995.

4. Гайзенберг В. Шаги за горизонт. М.: Прогресс, 1987. 368 с.

5. Мордкович А.Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02 / Моск. гос. педагогич. университет. М., 1986. 358 с.

6. Ефремова Д.Д. Реализация принципа наглядности при изучении математики в старших классах средней школы: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Моск. гос. педагогич. университет. М., 2004. 202 с.

7. Джиджева В. Использование принципа наглядности в процессе обучения // Вопросы психологии. 1983. № 6. С. 128,129.

8. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс: учебное пособие. М.: Просвещение, 2021. 384 с.

9. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2004. 32 с.

10. Егорченко И.В. Методологические аспекты интеграции математических абстракций с реальной действительностью в процессе обучения. Интеграция региональных систем образования: Ч. 2: Интеграционные аспекты в содержании и технологии образования: матер. IV Междунар. конф. Саранск, 2003. С.133-137.

I.N. Borisova, I.B. Garipov
Kazan Federal University

IMPLEMENTATION OF THE CLARITY PRINCIPLE IN THE STUDY OF INTEGRAL CALCULATION IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

Keywords: *abstraction, clarity principle, electronic aid, integration, integral calculus.*

Abstract. *The article poses the problem of implementing the clarity principle in the study of integral calculus at school and as a solution, it is proposed to develop and use visual electronic aids with accompanying dynamic animations, intended not only for work in the class, but also for independent study, which is relevant in connection with spreading the practice of distance learning. The analysis of the application of the developed electronic aid on the basics of integration for schoolchildren and students of non-mathematical majors in one of the two control classes of a secondary general school is presented.*

А.В. Дюндин, Н.Н. Савченкова
Смоленский государственный университет

УДК 378.146

ОРГАНИЗАЦИЯ ТЕКУЩЕГО И ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ В ДИСТАНЦИОННОМ ОБУЧЕНИИ

Ключевые слова: *дистанционное обучение, контроль знаний и умений, организация промежуточного контроля, формы и методы контроля, техническое обеспечение дистанционного контроля.*

В работе рассмотрены варианты организации контроля знаний и умений студентов в дистанционном обучении; предложены приемы

повышения эффективности текущего и промежуточного контроля, описаны возможности проведения контроля с использованием доступного оборудования.

В течение последнего календарного года мировое сообщество испытывало значительные сложности в связи с введением ограничений, связанных с противодействием эпидемии. В подавляющем большинстве отраслей хозяйства зафиксирован спад производства, и особенно сильно пострадали сферы услуг и образования, функционирование которых связано с непосредственным общением больших групп людей. Сложившаяся в сфере образования ситуация, несомненно, обостряет и средний возраст работающих педагогов, и недостаток технических возможностей по организации удаленного общения. Многие столкнулись с необходимостью использования технологий дистанционного общения для выполнения своих профессиональных обязанностей впервые.

В рамках введенных ограничений был осуществлен вынужденный переход на дистанционное (или электронное) обучение практически всех школьников и студентов. В статье 16 закона об образовании электронное обучение определяется как «организация образовательной деятельности с применением содержащейся в базах данных и используемой при реализации образовательных программ информации и обеспечивающих ее обработку информационных технологий, технических средств, а также информационно-телекоммуникационных сетей, обеспечивающих передачу по линиям связи указанной информации, взаимодействие обучающихся и педагогических работников» [7]. В дальнейшем мы все же будем использовать термин «дистанционное обучение», рассматривая его как синоним электронного из указанного выше закона.

Основные теоретические вопросы, связанные с дистанционным обучением и его организацией, подробно рассмотрены в различных работах Е.С. Полат, например [5], и на них мы останавливаться не будем.

В процессе реализации дистанционного обучения в рамках конкретного учебного заведения возникает много проблем, однако мы остановимся на процессах контроля, а именно организации текущего и промежуточного контроля (или промежуточной аттестации).

Некоторые общие и частные вопросы организации контроля знаний в дистанционном обучении рассмотрены авторами в [1, 2, 3 и 4], однако вопросы технического и методического обеспечения данных видов контроля раскрыты недостаточно полно.

Большое внимание исследователи уделяют методам и формам обеспечения достоверности результатов осуществляемого контроля (по сути, самостоятельности выполнения заданий). Например, авторы [6] указывают на необходимость проведения следующих мероприятий для

повышения степени достоверности полученной в ходе контрольных мероприятий информации:

- использование индивидуальных паролей и идентификаторов для обеспечения доступа к учебным ресурсам и контрольным материалам;
- шифрование и кодировка тестов и других контрольных материалов для их защиты от несанкционированного доступа;
- организация и проведение контрольных мероприятий на базе сертифицированных региональных учебных центров, имеющих доступ к Интернету;
- усиление контроля в процессе испытаний за счет использования периферийных устройств, например, видеокамер или устройств ввода индивидуального пин-кода;
- использование строгого лимитирования ответов на задания по времени;
- установление случайного порядка предоставления вариантов ответов на задания и включения самих заданий в тест из обширного банка;
- статистическая защита при рассмотрении результатов – данные протоколов тестирования оцениваются с помощью специальных алгоритмов многомерного анализа данных, позволяющих обнаружить подлог, особенно в случае, когда он носит систематический и (или) массовый характер.

Описанные выше мероприятия гарантируют повышение качества контроля, но, к сожалению, требуют вложения значительных средств в развитие материально-технической базы как образовательного учреждения, так и обучаемого. Некоторые из обозначенных мероприятий осуществляются за счет функциональных возможностей используемых образовательными учреждениями систем управления обучением (виртуальных обучающих сред) и аналогичного программного обеспечения. В большинстве из них имеются системы идентификации пользователей, ограничение доступа к функционалу и ресурсам в зависимости от назначенной роли, возможность осуществлять тестирование обучающихся, в том числе с ограничением по времени выполнения и порядком предъявления заданий и вариантов ответа на них.

Однако далеко не всегда указанные мероприятия имеют первостепенное значение. Так, в процессе текущего контроля важно определить не только степень, но и качество усвоения изучаемого материала, а также иметь возможность корректировки содержания и методов обучения при необходимости. Преподавателю следует оценить в первую очередь самостоятельную работу обучаемого: полноту выполнения заданий, уровень усвоения учебных материалов по отдельным разделам дисциплины, работу с дополнительной литературой,

практические умения и навыки, овладение необходимыми компетенциями аналитической, исследовательской работы, расчетов и др.

Для успешной реализации данного вида контроля в течение всего срока изучения некоторой дисциплины необходимо:

- составить расписание текущей и промежуточной аттестации и ознакомить с ним студентов (с обязательным указанием сроков и формы сдачи работ);
- разработать достаточное количество параллельных вариантов заданий или предложить индивидуальные проекты из серии заданий;
- разработать четкие критерии оценивания заданий и выполняемых проектов;
- запланировать регулярные индивидуальные консультации в процессе и по результатам выполнения заданий;
- быть готовым предоставить развернутые комментарии к оценкам выполнения заданий;
- уменьшить общее количество заданий по сравнению с очной формой обучения.

Отметим, что специальное оборудование (кроме ноутбука или рабочей станции с микрофоном и камерой) при реализации приведенного выше перечня мероприятий не требуется.

Промежуточный контроль по дисциплинам проводится в виде зачета или экзамена в соответствии с учебным планом и необходим для оценки работы студента за определенный период: полученных им теоретических знаний, приобретенных навыков самостоятельной работы, умения синтезировать полученные знания и применять их к решению практических задач.

Так как зачеты обычно выставляются по итогам работы в семестре (или по итогам рейтинговой оценки, оценки проектной деятельности), то больше внимания уделим проведению экзаменов.

Экзаменационное задание в дистанционном обучении чаще всего представляет собой тест или традиционный ответ студента на вопросы билета (или вопросы-эссе).

Применение тестов в системе дистанционного обучения мы считаем оправданным только в случае, когда для тестирования используются материалы специально разработанного УМК с достаточно большим числом параллельных вариантов заданий, четкая тематическая структура теста, в соответствии с которой в него включаются задания, а также применяется временной ограничитель выполнения работы. Выполнение этих и других требований к тестовому контролю знаний влечет необходимость дополнительной подготовки преподавателя к данному виду деятельности и увеличение объема рабочего времени, так как процесс наполнения тестовых оболочек весьма длителен, особенно при наличии изображений в тестовых заданиях.

По-нашему мнению, дистанционный экзамен лучше проводить в традиционной форме с использованием билетов и устным ответом студента в режиме диалога или конференции. Для организации экзамена в такой форме необходимо:

- обеспечить случайное распределение вопросов или билетов между студентами, возможно с использованием генератора случайных чисел;
- разработать регламент подготовки ответа студента, например в режиме видеоконференции для осуществления контроля;
- предусмотреть возможность устного ответа студента и необходимых уточнений или вопросов на понимание темы со стороны педагога;
- предусмотреть возможность предоставления письменного ответа студента (например, решения задач или доказательства теорем в виде текстовых файлов или изображений), а также возможность задать при необходимости вопросы студенту по предоставленному ответу.

Заметим, что при таком варианте организации экзамена специальное оборудование также не требуется, но необходимо наличие надежной и скоростной линии связи для поддержки видеообщения во время экзамена. При отсутствии устойчивой связи можно организовать общение в текстовом формате, но данный вариант работы сильно усложняет ведение диалога и снижает степень достоверности результатов.

В заключение отметим, что важную роль в организации контроля играют техническое оснащение рабочего места преподавателя (и студента), а также наличие технической и информационной поддержки.

За организацию процесса обучения отвечает учебное заведение и в его обязанности входит обеспечение преподавателя необходимой техникой (компьютерами, камерой и микрофоном, доступом в Сеть и др.). Вынужденные ситуации, в которых педагог использует собственную технику и самостоятельно обеспечивает устойчивость канала связи, мы не считаем приемлемыми.

Так как работа в дистанционном режиме не только занимает много времени, но и связана с разработкой большого числа специально адаптированных для дистанционного режима заданий, преподавателю приходится выполнять значительный объем технической работы по набору текста, размещению заданий и др. В связи с этим целесообразно создание центров поддержки, осуществляющих вспомогательную работу по наполнению необходимых баз, подготовке заданий, изображений и т.п.

Отдельно отметим некоторый юридический аспект, связанный с тем, что возможно возникновение противоречия между требованиями разработанной для обычного учебного процесса документации (рабочих программ) и реально используемыми в дистанционном режиме материалами (несовпадение количества заданий и форм их представления

студентам), в результате чего возможно возникновение конфликтных ситуаций.

Литература

1. Дюндин А.В. Оценка результатов изучения технических дисциплин в системах дистанционного обучения // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX международной конференции. Смоленск: СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 354–359.
2. Иванченко И.В. Проблема повышения качества образования в вузе // Молодой ученый. 2016. №5.1. С. 18–21.
3. Казаков В.В. Контроль знаний в системе дистанционного обучения // Альманах современной науки и образования. 2008. № 4-1 (11). С. 81–82.
4. Киян И.В. Варианты контроля знаний в системе дистанционного обучения // Сибирский педагогический журнал. 2010. № 12. С. 52–58.
5. Полат Е.С. Дистанционное обучение // Педагогические и информационные технологии в образовании. 2001. № 4. URL: <http://journals.susu.ru/pit-edu/article/view/318> (дата обращения: 01.03.2021).
6. Раззаков Ш.И., Нарзиев У.З., Рахимов Р.Б. Контроль знаний в системе дистанционного обучения // Молодой ученый. 2014. № 7 (66). С. 70–73.
7. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 N 273-ФЗ (ред. от 08.12.2020). URL: <https://fzrf.su/zakon/ob-obrazovanii-273-fz/> (дата обращения: 01.03.2021).
8. Реализация положений Федерального закона от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации». URL: <http://fcoz.ru/praktika/realizatsiya-273-fz/> (дата обращения: 01.03.2021).

A.V. Dyundin, N.N. Savchenkova
Smolensk State University

THE ORGANIZATION OF STUDENTS CURRENT AND MIDPOINT CONTROL IN DISTANCE LEARNING

Keywords: *distance learning, control of knowledge and skills, organization of midpoint control, testing forms and methods, technical support for distance control.*

Abstract. *The paper deals with options for organization of students midpoint control in distance learning. Methods of increasing the efficiency of current and midpoint control are suggested and the opportunities of carrying out control using available technical equipment are described.*

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДАННЫХ. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

Ключевые слова: *представление данных; визуализация.*

Обсуждаются вопросы, связанные с эффективностью представления данных. Отмечается необходимость знания основных способов представления данных.

Вопрос эффективности представления учебной информации всегда был одним из важнейших в обучении. В XXI веке, когда в системе образования стали широко использоваться информационные технологии, он приобрел особую значимость.

Среди множества различных способов представления информации выделяется визуализация. Поговорка «лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать» отражает суть визуализации. Установлено, люди запоминают 80% того, что они увидели, и 20% того, что прочитали.

Визуализация информации – это процесс представления абстрактных данных в виде изображений, которые могут помочь в понимании смысла данных.

В статье «Этапы развития технических средств обучения: от обеспечения моновосприятия до комбинированного восприятия информации в обучении» [1] авторы подробно обсудили связи между различными информационными технологиями и возможностями представления информации в зависимости от планируемых каналов восприятия для достижения наилучшего результата в обучении.

Роль визуализации в преподавании трудно переоценить. Хорошая визуализация может значительно облегчить понимание. Она вооружает учащегося правильными моделями, помогающими ему делать интуитивные догадки относительно изучаемого объекта.

Придумать хорошую визуализацию непросто. Удачная визуализация – это, как правило, продукт серьезных размышлений. Примерами открытий в области визуализации служат таблица Менделеева в химии, интерфейс Norton Commander в информатике, позиционная система счисления в математике.

Пример с позиционной системой счисления заслуживает более подробного обсуждения. Эта визуализация, несомненно, является одним из величайших достижений в математике, может быть, даже самым великим.

Поясним сказанное. В средние века для обозначения чисел использовалась римская система счисления. Правила действия над числами в этой системе были очень сложными. Чтобы научиться выполнять арифметические операции над числами, надо было закончить университет. При этом не каждый европейский университет давал такие знания. С изобретением другой визуализации чисел - с помощью позиционной десятичной системы счисления - операции над натуральными числами стали доступны выпускникам детского сада.

Авторам неизвестны более яркие примеры полезности визуализации в преподавании. Новая визуализация сложного объекта, доступного для понимания лишь университетским выпускникам, сделала его понятным детям из детского сада.

При изучении определенной предметной области следует учитывать много факторов, в том числе и прошлый опыт обучаемого в визуализации объектов данной предметной области.

Преподаватели иностранного языка настолько часто сталкиваются с такими проблемами визуализации, что даже ввели специальное понятие «неправильная визуализация». Поясним суть этого понятия на примере. Если преподаватель читает с арабскими студентами какой-нибудь текст про русскую школьницу Машу, ученицу третьего класса, они всё понимают. Все слова знакомые, вопросов нет, с виду всё хорошо. Но про себя студенты (невольно) всё время представляют себе арабскую девочку, в арабской одежде, с арабской книжкой, причём ещё такого возраста, какого бывают их третьеклассницы (что, почти наверняка, не совпадает с возрастом российских третьеклассниц).

Другим примером неправильной визуализации в математике, по мнению авторов, являются попытки представить прямую как множество точек. Такое представление противоречит известным «физическим моделям» прямой (туго натянутая нить, луч света и т.п.). Естественно представлять прямую как самостоятельный объект, а не как множество точек. Прямая находится в некотором отношении с точками (называемом отношением инцидентности), а не состоит из точек.

В известной аналитической модели евклидовой плоскости прямая представляется тройкой $\langle a, b, c \rangle$ действительных чисел ($a^2 + b^2 \neq 0$), а точка – парой (x, y) действительных чисел. Совершенно неестественно в такой модели считать, что прямая состоит из точек.

При изучении нового полезно давать несколько визуализаций изучаемого объекта. Например, расширенная несобственными точками и несобственной прямой евклидова плоскость является хорошей визуализацией проективной плоскости. Но указанная визуализация обладает одним недостатком – несобственная прямая в ней играет особую роль. Указанный недостаток легко устраняется с помощью аналитической визуализации. При изучении геометрии проективных плоскостей удобно

использовать оба варианта визуализации. Первый вариант подключает нашу геометрическую интуицию, второй – алгебраическую.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	4	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6
4	0	4	7	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	8	6	0
5	2	3	5	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6
6	0	3	5	6	3	7	9	9	0	0	0	0	0	0	9	9	8	8	7	5	3	0
7	2	3	4	5	6	6	6	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6	6	6
8	0	2	3	3	1	5	8	9	0	0	0	0	0	9	9	9	8	7	6	5	3	0
9	2	3	4	5	5	6	6	6	6	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
0	0	1	2	1	9	4	7	9	9	0	0	0	9	9	9	9	8	7	6	4	2	0
1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	6	7	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	0	9	7	2	6	8	9	9	0	9	9	9	9	8	8	7	6	4	2	0
3	2	3	3	4	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4	0	0	9	8	5	1	5	7	8	9	9	9	9	9	9	8	7	6	5	4	2	0
5	2	2	3	4	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	0	2	3	4	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	1	0	9	8	6	4	9	4	6	8	9	9	9	9	8	8	7	6	5	4	2	0
8	2	2	3	4	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
9	0	8	6	4	1	7	1	4	7	8	8	9	9	8	8	7	7	6	5	3	2	0
0	2	2	3	4	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
1	0	8	6	3	0	6	0	3	6	7	8	8	8	8	8	7	6	6	4	3	2	0
2	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
3	0	7	5	2	9	4	9	2	5	6	7	8	8	8	7	7	6	5	4	3	2	0
4	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	0	7	4	1	7	3	7	1	4	5	6	7	7	7	7	6	6	5	4	3	1	0
6	2	2	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	0	6	3	0	6	1	6	9	2	4	5	6	6	6	6	5	5	4	3	2	1	0
8	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
9	0	5	1	8	3	9	3	7	9	1	2	3	4	4	3	3	3	2	2	1	1	0
0	2	2	2	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
1	0	4	9	4	0	4	9	2	5	7	8	9	9	9	9	9	8	8	8	8	9	0
2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
3	0	1	4	9	3	7	1	4	6	8	9	0	1	1	1	1	0	0	1	2	5	0
4	2	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	6
5	0	4	6	9	2	4	7	9	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	6	0
6	2																					
7	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 1. Пластинка, подогреваемая с четырех сторон

Наилучший эффект в обучении достигается, если к процессу визуализации объекта подключается ученик. В последние годы с этой целью часто используется компьютер, значительно расширяющий возможности визуализации.

Проиллюстрируем использование компьютера для визуализации на примере решения задачи о распределении температуры на прямоугольной пластинке.

Задача о распределении температуры. Имеется прямоугольная пластина (рис. 1). С четырех сторон пластина подогревается источниками с различной температурой. Требуется визуализировать распределение температуры на пластине и выделить цветом три диапазона температур.

Идея дискретизации приводит школьников к необходимости разбить пластину на маленькие прямоугольники, а для вычислений воспользоваться электронными таблицами.

Построим электронную таблицу так, чтобы в каждом маленьком прямоугольнике отображалась его температура в текущий момент времени. Предоставим пользователю также возможность изменения температур пластины с четырех сторон, верхней границы среднего диапазона температур и нижней границы среднего диапазона температур. Закраску диапазонов произведем с помощью условного форматирования.

На рис. 1 показан результат визуализации распределения температуры при следующих значениях параметров: температура пластины с северной стороны – 70° ; температура пластины с восточной стороны – 60° ; температура пластины с южной стороны – 0° ; температура пластины с западной стороны – 20° ; верхняя граница среднего диапазона температур – 65° ; нижняя граница среднего диапазона температур – 31° .

Рассмотренный вариант визуализации позволяет мгновенно получать картину распределения температуры на пластине в зависимости от заданных пользователем шести параметров.

Очевидно, что предложенную модель визуализации легко модернизировать, например, для пластинки произвольной формы или для источников подогрева сложной конфигурации.

Способы визуализации информации постоянно совершенствуются. Автору учебных материалов необходимо следить за этими изменениями и выбирать для представления данных лучшие способы визуализации. Например, для визуализации объектов с большим количеством характеристик удобно воспользоваться представлением данных с помощью лиц Чернова. В настоящее время лица Чернова позволяют визуализировать данные с 36 характеристиками.

Полезно знать различные способы визуализации. Для примера ниже мы перечислим 7 способов визуализации такой популярной структуры, как дерево данных (рис. 2 – рис. 8).

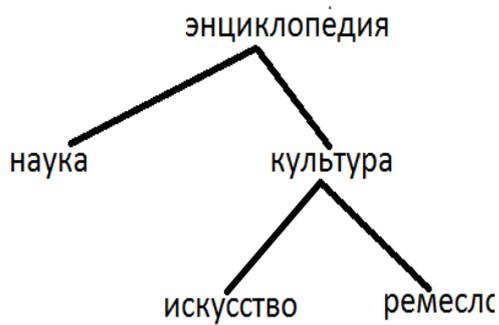


Рис. 2. Представление деревьев

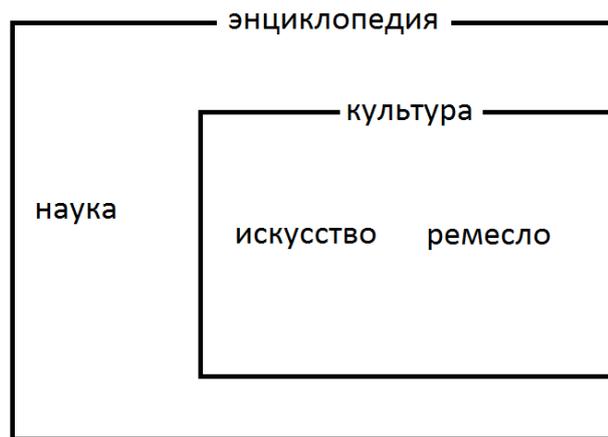


Рис. 3. Представление деревьев



Рис. 4. Представление деревьев

энциклопедия
 наука
 культура
 искусство
 ремесло

Рис. 5. Представление деревьев

энциклопедия (наука, культура (искусство, ремесло))

Рис. 6. Представление деревьев

{энциклопедия. наука;
 энциклопедия. культура. искусство;
 энциклопедия. культура. ремесло}

Рис. 7. Представление деревьев

КАФЕДРЫ			
НАЗВАНИЕ КАФЕДРЫ	ЗАВ. КАФЕДРОЙ		СОТРУДНИКИ
каф едра биологии	ФАМИЛИЯ ИМЯ		№ ФИО ДОЛЖНОСТЬ
	Жуков	Иван	1 Иванов И.И. ассистент
			2 Сидоров С.С. доцент
			3 Петров П.П. доцент
каф едра химии	ФАМИЛИЯ ИМЯ		№ ФИО ДОЛЖНОСТЬ
	Орлова	Дина	1 Петров В.В. ассистент
			2 ассистент
			3 доцент
			4 профессор

Рис. 8. Представление деревьев

Понятно, что в зависимости от контингента слушателей автор может выбрать наиболее доступное представление дерева данных.

В заключение отметим, что в настоящее время пока еще недостаточно изучены возможности использования визуализации в учебном процессе. Указанное направление ожидает своих исследователей.

Литература

1. Шилиягина А.М. Этапы развития технических средств обучения: от обеспечения моновосприятия до комбинированного восприятия информации в обучении // Известия Смоленского государственного университета. 2014. № 3 (27). С.300-337.

2. Емельченков Е.П. Визуализация в учебном процессе // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XII международной конференции. Вып. 13. Смоленск: СмолГУ, 2012. С. 83-86.

E.P. Emelchenkov, A.M. Shilyagina
Smolensk State University

ABOUT THE PRESENTATION OF DATA. VISUALIZATION

Keywords: *data representation, visualization.*

Abstract. *Issues related to the efficiency of data presentation are discussed. It is noted that it is necessary to know the main ways of presenting data.*

ТЕОРИЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРАММАТИК И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Ключевые слова: информатика, формальные грамматики, распознающие грамматики, порождающие грамматики, автоматные грамматики, формальные языки, автоматные языки.

В статье обсуждаются вопросы описания формальных грамматик. Рассматриваются примеры контекстно-зависимых, контекстно-свободных и автоматных грамматик и языков. Особое внимание уделено алгоритмам построения распознавателя и диаграммы состояний для автоматных языков.

Теория формальных грамматик – это раздел, находящийся на стыке дискретной математики и теории алгоритмов, изучающий способы описания закономерностей, характеризующих всю совокупность правильных текстов того или иного языка [1; 2]. Актуальность применения формальных грамматик заключается в том, что они предоставляют аппарат для формализации различных языков. Это позволяет применять формальные грамматики в программировании и в искусственном интеллекте [3; 4]. На их основе пишутся частотные словари, трансляторы, системы для распознавания и генерации речи, системы автоматического перевода.

Первичным неопределяемым теории понятием является «символ». Описать его можно так: символ – объект, имеющий собственное содержание и уникальную читаемую форму. Алфавит – это конечное множество символов. Цепочка (слово) в алфавите V – это произвольная конечная последовательность символов этого алфавита. Существует цепочка, не содержащая ни одного символа, – назовем ее пустой цепочкой и обозначим буквой ε . Конкатенацией цепочек α и β ($\alpha \cdot \beta$) называется бинарная операция, ставящая в соответствие двум цепочкам α и β цепочку $\alpha\beta$. Например, если $\alpha = ab$ и $\beta = c$, то $\alpha \cdot \beta = abc$. n -ой степенью цепочки α называется конкатенация цепочек α n раз, например: $a^2 = aa$; $(ab)^4 = abababab$. Также по определению $\alpha^0 = \varepsilon$.

Существуют различные способы описания языков. Конечный язык (или конечную часть языка) можно задать перечислением его цепочек: иногда так и делается, например в выпадающих списках в программах. Однако для бесконечных или громоздких языков требуются иные

механизмы. Они осуществляются с помощью грамматик. Разделяют два вида грамматик: порождающие и распознающие. Распознающие грамматики по заданной цепочке определяют, принадлежит ли она заданному языку или нет. Порождающие грамматики – это совокупности правил, позволяющие генерировать все правильные цепочки языка. В зависимости от использования грамматики набор этих правил называют либо лексикой языка (лексика – набор допустимых слов в языке, а символы – буквы или морфы), либо синтаксисом (синтаксис – описание правильных предложений – здесь цепочки являются предложениями, а символы – слова или лексемы).

Порождающая грамматика G – это четверка $\langle T, N, P, S \rangle$, где

- T – алфавит терминалов;
- N – алфавит нетерминалов, причем $T \cap N = \emptyset$;
- P – подмножество множества $(T \cup N)^+ \times (T \cup N)^*$; элемент P – $(\alpha; \beta)$ называется правилом вывода, и записывается $\alpha \rightarrow \beta$, α называется левой частью правила; β – правой, причем α должна содержать хотя бы один нетерминал;
- S – начальный символ (аксиома грамматики), $S \in N$.

Примеры:

1. $G_1 = \langle \{a, b\}, \{A, S\}, P, S \rangle$, где P состоит из правил: $S \rightarrow aAb$; $aA \rightarrow aaAb$; $A \rightarrow \varepsilon$.

2. $G_2 = \langle \{\text{кот, пес, он, идет, стоит, _}\}, \{\text{ПРЕДЛОЖЕНИЕ, ПОДЛЕЖАЩЕЕ, СКАЗУЕМОЕ}\}, P, \text{ПРЕДЛОЖЕНИЕ} \rangle$, где P состоит из правил:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ \rightarrow ПОДЛЕЖАЩЕЕ_СКАЗУЕМОЕ;

ПОДЛЕЖАЩЕЕ \rightarrow кот|пес|он;

СКАЗУЕМОЕ \rightarrow идет|стоит.

Говорят, что цепочка $\alpha \in (T \cup N)^+$ прямо порождает цепочку $\beta \in (T \cup N)^*$ в грамматике G , если $\alpha = paq$, $\beta = pbq$, где $p, q, b \in (T \cup N)^*$, $a \in (T \cup N)^+$ и существует правило вывода $a \rightarrow b$ в P . Обозначается $\alpha \rightarrow_G \beta$. Например, в G_1 цепочка aAb прямо порождает цепочку $aaAbb$ по правилу $aA \rightarrow aaAb$. В G_2 цепочка «кот_идет» прямо порождена, например, цепочкой «кот_СКАЗУЕМОЕ» по 3 правилу.

Цепочка $\beta \in (T \cup N)^*$ выводима из цепочки $\alpha \in (T \cup N)^+$ (обозначается $\alpha \Rightarrow_G \beta$), если существуют цепочки c_0, c_1, \dots, c_n , такие, что $\alpha = c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_n = \beta$. Последовательность c_0, c_1, \dots, c_n называют выводом длины n . Например, в G_1 цепочка «aaabbb» выводима из цепочки S за 4 шага, в G_2 цепочка «он_стоит» выводима из «ПРЕДЛОЖЕНИЕ» за 3 шага.

Дадим формальное определение языка: языком, порождаемым грамматикой G , называется множество $L(G) = \{\alpha \in T^* | S \Rightarrow \alpha\}$, то есть

язык – это все цепочки из терминалов, которые выводимы из S с помощью правил P . Например, $L(G_1) = \{a^n b^n | n > 0\}$, $L(G_2) = \{\text{кот_идет, пес_идет, он_идет, кот_стоит, пес_стоит, он_стоит}\}$.

Грамматики называются эквивалентными, если они порождают один и тот же язык, и почти эквивалентными, если порождаемые ими языки отличаются не более, чем на ε . Рассмотрим грамматику $G_3 = \langle \{a, b\}, \{S\}, \{S \rightarrow aSb | ab\}, S \rangle$. Тогда G_1 и G_4 - эквивалентные грамматики, так как $L(G_3) = L(G_1) = \{a^n b^n | n > 0\}$.

Разобьем языки на разные классы по типу ограничений на правила порождающих грамматик.

Тип 0. Правила имеют вид $\alpha \rightarrow \beta$ без каких либо ограничений на цепочки. Языки, порождаемые такими грамматиками, являются рекурсивно перечислимыми языками, и обычно служат моделями естественных языков.

Тип 1. Грамматика называется контекстно-зависимой (КЗ), если в каждом правиле $\alpha \rightarrow \beta$ $\alpha = paq$, $\beta = pbq$, где $b \in (T \cup N)^+$, $a \in N$, $p, q \in (T \cup N)^*$ (и также допускается наличие пустого правила $S \rightarrow \varepsilon$ с условием, что S не содержится в правых частях правил).

Тип 2. Грамматика называется контекстно-свободной, если каждое правило имеет вид: $A \rightarrow \beta$, где $A \in N$, $\beta \in (T \cup N)^*$. Язык, порождаемой такой грамматикой, назовем так же (КС-языком).

Тип 3. Грамматика называется автоматной, если каждое правило имеет вид $A \rightarrow a$ или $A \rightarrow Ba$ ($A \rightarrow aB$), где $A, B \in N$, $w \in T$. Языки, порождаемые этими грамматиками, называются автоматными (как и сами грамматики).

Таким образом, можно получить такую иерархию языков Хомского:

Тип 3 (Регулярные) \subset Тип 2 (КС) \subset Тип 1 (КЗ) \subset Тип 0



Рис. 1. Иерархия Хомского

Примеры: $L(G) = \{a^n | n > 0\}$ – автоматный язык, $L(G_2)$ – также автоматный язык: хоть он и порождается в примере КС-грамматикой, его можно породить автоматной грамматикой. Более того, любой конечный язык является автоматным.

Язык $\{a^n b^n | n > 0\}$ является КС-языком, так как он порождается КС-грамматикой G_3 и не может быть порожден никакой автоматной грамматикой (это доказывается с помощью леммы о накачке либо с помощью теоремы Майхилла-Нероуда). $\{\beta\beta^R\}$ – также КС-язык. Языки $\{a^n b^n c^n | n > 0\}$, $\{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$ являются контекстно-зависимыми языками. Язык, содержащий всевозможные цепочки типа $a_1 a_2 a_3 \dots a'_1 a'_2 a'_3$, $a_2 a_1 a_3 \dots a'_2 a'_1 a'_3$, $a_3 a_2 a_1 \dots a'_3 a'_2 a'_1$ и т.д., также КЗ-язык. Рекурсивно-перечислимый язык – это записи самоприменимых алгоритмов Маркова в каком-либо алфавите.

С точки зрения практики важны автоматные и КС-языки: они позволяют описать большинство языков программирования и широкое подмножество естественных языков. Порождающие грамматики используются в различных генераторах текста, а также в системах перевода, или в более узком случае – генерации внутреннего представления программы в процессе трансляции.

Построение вывода цепочки из начального символа в грамматике, а следовательно, и определение принадлежности цепочки языку называется разбором. Отыскание разбора для данной цепочки языка называется синтаксическим анализом. Если разбор существует, то цепочка принадлежит языку, а анализ даст его синтаксическое дерево. Алгоритм, решающий данную задачу, называется распознавателем.

Синтаксический анализ может проводиться нисходящим и восходящим способом: при нисходящем разборе дерево растет от корня к листьям – на каждом шаге в нетерминальной вершине распознаватель пытается найти правило вывода, которое «приближается» к терминальным символам цепочки. При восходящем разборе дерево растет от листьев к корню – распознаватель ищет такие правила вывода, чтобы достичь аксиомы грамматики.

Ориентированное упорядоченное дерево называют синтаксическим деревом (деревом разбора) в КС-грамматике, если выполняются условия:

- в каждой вершине дерева находится символ из $T \cup N \cup \{\varepsilon\}$, при этом в корне – символ S ; в листьях – символы из $T \cup \{\varepsilon\}$;
- если в вершине графа есть символ A , а в ее непосредственных потомках – символы a_1, a_2, \dots, a_n , где $a_i \in T \cup N$, то $A \rightarrow a_1 a_2 \dots a_n$ – правило вывода в грамматике;
- если в вершине графа есть символ A , а ее непосредственный потомок – символ ε , то $A \rightarrow \varepsilon$ – правило вывода в грамматике.

На рисунке 2 изображено синтаксическое дерево цепочки «кот_идет» грамматики G_2 .



Рис. 2. Пример синтаксического дерева

Для автоматных и КС-языков применяются различные распознаватели. Рассмотрим самый простой распознаватель для автоматных языков (с левосторонней автоматной грамматикой).

1. Первый символ цепочки $a_1 a_2 \dots a_n \$$ заменяется нетерминалом A , для которого существует правило вывода $A \rightarrow a_1$.
2. Многократно, пока не будет считан символ $\$$, выполняется следующее: полученный на предыдущем шаге нетерминал A и терминал a_i , расположенный непосредственно справа, заменяются нетерминалом B , для которого существует правило вывода $B \rightarrow A a_i$.

Это восходящий синтаксический анализ: на каждом шаге ищется свертка, которая приближается к аксиоме грамматики. Чаще всего информацию о возможных свертках представляют в виде диаграммы состояний — ориентированного помеченного графа, строящегося следующим образом.

1. Отмечаются вершины графа, помеченные нетерминалами. Добавляется вершина, помеченная символом O , не являющимся ни терминальным, ни нетерминальным. Все вершины называются состояниями, O — начальное состояние.

2. Для каждого правила грамматики вида $A \rightarrow a$ соединяются дугой состояния O и A (от O к A), помеченной терминалом a .

3. Для каждого правила $B \rightarrow A a$ соединяются дугой состояния A и B (от A к B), помеченной терминалом a .

Диаграмма состояний определяет конечный автомат, построенный по автоматной грамматике. Детерминированным конечным автоматом (ДКА) называется пятерка $\langle K, T, f, O, S \rangle$, где K — конечное множество состояний, T — конечное множество входных символов, f — функция переходов вида $K \times T \rightarrow K$, $O \in K$ — начальное состояние, $S \in K$ — заключительное состояние (или $S \subset K$ — множество заключительных состояний). Состояния и дуги — это графическое изображение функции переходов из одного состояния в другое. Запись $f(A, t) = B$ означает, что по считанному символу t происходит переход в из состояния A в

состояние t . Говорят, что ДКА допускает цепочку $a_1 a_2 \dots a_n$, если $f(O, a_1) = A_1, f(A_1, a_2) = A_2, \dots, f(A_{n-1}, a_n) = S$, или другими словами, если в диаграмме состояний существует путь из начального состояния в какое-либо из конечных по дугам, помеченным символами a_1, a_2, \dots, a_n .

Рассмотрим пример. Дана грамматика G_4 с правилами: $S \rightarrow C\$, C \rightarrow Ab|Ba, A \rightarrow a|Ca, B \rightarrow b|Cb$.

Диаграмма состояний для данной грамматики выглядит так:

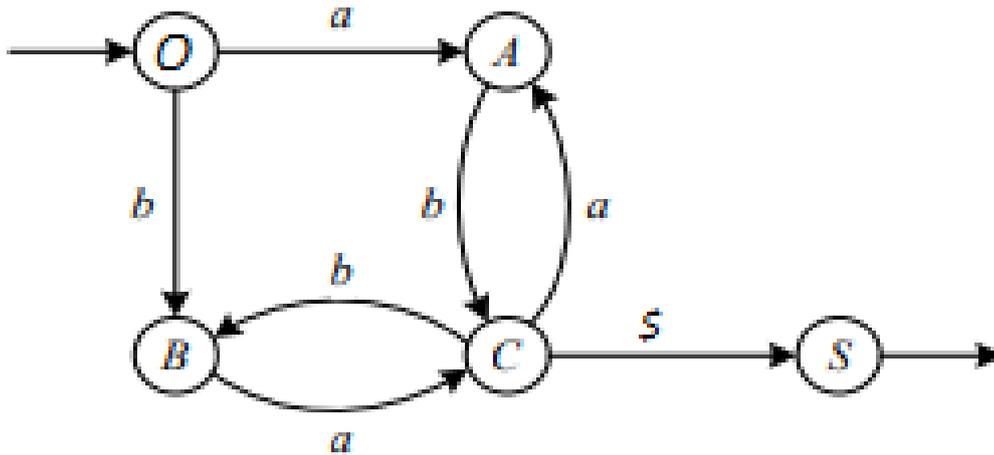


Рис. 3. Диаграмма состояний G_4

По диаграмме состояний нетрудно написать распознаватель для автоматной грамматики на каком-либо языке программирования.

Таким образом, теория формальных грамматик находит широкое практическое применение в различных предметных областях [5; 6] как инструмент анализа данных и моделирования системных процессов [7; 8]. Написание распознавателей составляет основу алгоритмов искусственного интеллекта. Они успешно применяются в распознавании речи и в распознавании образов, что является актуальным направлением практики применения методов прикладной математики и информатики.

Литература

1. Малявко А.А. Формальные языки и компиляторы: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2020. 429 с.
2. Пентус А.Е., Пентус М.Р. Теория формальных языков: учебное пособие. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2004. 80 с.
3. Козлов С.В. Применение соответствия Галуа для анализа данных в информационных системах // Траектория науки. 2016. Т. 2. № 3 (8). С. 18.
4. Козлов С.В., Суин И.А. О некоторых подходах математического описания и анализа многомерной структуры информационных систем // Системы компьютерной математики и их приложения. 2018. Вып. 19. С. 177-182.
5. Козлов С.В., Суин И.А. О некоторых аспектах применения инвариантных методов функционального анализа данных в различных предметных областях // Системы компьютерной математики и их приложения. 2019. Вып. 20. Ч. 1. С. 199-205.

6. Козлов С.В. Использование алгебраических структур для моделирования процессов в сложных информационных системах // Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии: сборник материалов IX Всероссийской конференции с международным участием. 2019. С. 436-440.

7. Киселева О.М. Использование математических методов для формализации элементов образовательного процесса // Научно-методический электронный журнал Концепт. 2013. № 2. С. 51-57.

8. Козлов С.В. Математические особенности использования возможностей программного комплекса «Advanced Tester» как инструмента функционального анализа системных данных // International Journal of Open Information Technologies. 2019. Т. 7, № 2. С. 21-30.

S.V. Kozlov, A.V. Svetlakov
Smolensk State University

THEORY OF FORMAL GRAMMARS AND ITS APPLICATION

Keywords: *computer science, formal grammars, recognizing grammars, generative grammars, automaton grammars, formal languages, automaton languages.*

Abstract. *The article discusses the issues of describing formal grammars. Examples of context-dependent, context-free and automaton grammars and languages are considered. Special attention is paid to algorithms for constructing a recognizer and a state diagram for automaton languages.*

С.В. Козлов, А.А. Шкуратова
Смоленский государственный университет

УДК 371.26

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ СРЕДСТВАМИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПЛАТФОРМ

Ключевые слова: *мониторинг, информационно-коммуникационные технологии, образовательная платформа, образовательный процесс, онлайн-обучение, дистанционное обучение.*

В статье обсуждаются вопросы применения образовательных платформ для оценки качества организации дистанционного обучения.

Особое внимание уделено характеристике объектов и субъектов образовательного процесса в контексте использования информационно-коммуникационных технологий. Авторами охарактеризованы особо важные методологические и методические аспекты обучения с использованием возможностей образовательных платформ.

Вопросы эффективности и качества образования в XXI веке становятся как никогда обсуждаемыми. Активное внедрение информационно-коммуникационных технологий в обучение способствует отмиранию традиционных форм организации образовательного процесса, на замену которым приходит дистанционное образование [1]. Последний, 2020 год стал показательным примером того, что переход на дистанционную форму обучения можно осуществить на всех уровнях образовательного процесса от младшей школы до высших учебных заведений. Но наряду с этим актуализировался ряд проблем:

- качества предоставляемых образовательных услуг;
- организации дистанционного обучения;
- эффективности образовательной среды;
- качества методологии онлайн-обучения и др.

Прежде всего, определим, что мы будем понимать под качеством обучения. Чаще всего в образовательной среде показателем качества выступает соответствие сформированных компетенций выпускника учебного заведения требованиям, предъявляемым рынком труда. С точки зрения законодательства РФ качество образовательных услуг определяется с помощью федеральных государственных образовательных стандартов, которые выступают эталоном. Таким образом, под качеством обучения в общем случае понимают соответствие предмета исследования некоторому стандарту, эталону.

На вопрос, стоит ли выделять отдельные качественные стандарты для дистанционного обучения, можно дать ответ «нет», поскольку дистанционное обучение в современной научной литературе является частью, подвидом образовательного процесса в целом. До сих пор не существует однозначного определения термину «дистанционное образование». Большинство исследователей, педагогов заменяют данное понятие другим, более освещенным в нормативном пространстве – дистанционные образовательные технологии. Под дистанционными образовательными технологиями понимают реализуемые в образовательной среде технологии, отличающиеся активным использованием информационно-коммуникационных средств в педагогическом процессе [2].

Ключевым и наиболее проблемным вопросом сферы оценивания качества дистанционного образования является выбор так называемого

эталона, индикаторов эффективности образовательного процесса. Большинство исследователей в настоящее время полагают, что в качестве факторов в таких исследованиях необходимо выбирать следующие основные компоненты процесса обучения [3]: объекты и субъекты образовательного процесса; учебные материалы, УМК, учебные пособия; методологии педагогического процесса; средства обучения; работу административного звена педагогического процесса.

Изучение субъектов обучения зачастую сводится к экспертизе сформированных у обучаемых компетенций и их соответствия федеральным образовательным стандартам, а также требованиям к результатам обучения. Средством реализации этапа экспертной оценки служит так называемый единовременный срез знаний, подготовленный независимой комиссией. Это, с одной стороны, позволяет провести объективное исследование компетенций учащихся, но, с другой стороны, совершенно не учитывает проделанную ими работу за определенный отрезок времени (учебный год, семестр, четверть и т.д.). Стоит отметить, что использование дистанционных средств обучения, таких как онлайн-курсы, позволяет оптимизировать процесс оценивания работы субъектов обучения [4; 5]. Это становится возможным, поскольку практически любая онлайн-платформа автоматически создает статистику по каждому участнику дистанционного образовательного процесса, что уже является одним из вариантов итоговой оценки за определенный период.

Эталоном качества деятельности педагога как субъекта современного образовательного процесса, служит его квалификация. Поскольку каждый преподаватель периодически проходит курсы повышения квалификации либо переквалификации, данный этап экспертной оценки чаще всего сводится к фиксации уровня профессиональной подготовки, что также не позволяет получить системной оценки качества педагогической деятельности субъекта. В этом случае дистанционные образовательные платформы могут стать важным средством контроля деятельности учителя. Это обусловлено возможностью оперативно изучить образовательные ресурсы, которые использует педагог в обучении, все ли этапы образовательной программы были выполнены, насколько эффективными оказались методы обучения, насколько объективно были оценены результаты деятельности обучаемых и многое другое.

Контроль качества УМК, средств и методов обучения – наиболее трудоемкая часть исследования, поскольку следует изучить большое количество нормативных документов, пособий, конспектов занятий и многое другое. В этом случае онлайн-платформы позволяют получить доступ к единой базе курсов образовательного учреждения и к любому курсу каждого преподавателя. В курсах уже будут собраны необходимые документы, регламентирующие образовательный процесс, и все

используемые ресурсы. Проанализировав их, можно будет составить мнение о методологии преподавателя, используемых средствах обучения, результатах работы студентов и других аспектах обучения. Также, не прилагая дополнительных усилий, дистанционные образовательные среды позволяют оценить методические навыки педагога, его умение пользоваться ресурсами платформ, интернет-технологиями, автоматизированными средствами обучения [6]. В связи с всеохватывающей цифровизацией образовательной системы это является необходимым критерием оценки уровня квалификации современного преподавателя.

В настоящее время наиболее популярными онлайн-платформами обучения являются Coursera и Academic Earth. Образовательная платформа Coursera объединяет множество всевозможных онлайн-курсов: от школьных до вузовских, от любительских до курсов повышения квалификации. Другая образовательная платформа Academic Earth – это сборник курсов от самых известных высших учебных заведений мира, что само по себе уже говорит о качестве представленных образовательных ресурсов и компетенции их создателей (педагогов, методистов). Данные сервисы позволяют как обучаться, так и обучать. Любой человек может создать свой курс и собрать класс учеников. Качество создаваемых ресурсов отслеживается командами разработчиков. При этом каждый курс обладает следующими необходимыми методическими составляющими: цели и задачи учебного курса; методическое наполнение; результат прохождения определенного процесса создателем; понятное и краткое описание-приглашение на курс; наличие календарного планирования, регламентирующего часы обучения (теория, практика, лабораторные работы).

Можно сделать вывод, что оценка качества онлайн-курса, размещенного на данной платформе, не составит большого труда, поскольку все необходимые для этого компоненты обучения будут в открытом пространстве курса. В тоже время существует множество других мировых платформ дистанционного обучения. Все они объединяются под термином Massive open online courses. Для каждого их участника можно выделить следующие общие черты [7]: доступность, массовость; организаторы – лучшие преподаватели учебных заведений; существует единый регламент работы для студентов; единые средства оценивания работы студентов и качества курсов.

Зарубежные и отечественные образовательные организации активно занимаются проблемами оценки качества образования, особенно в последнее время, когда весь мир вынужденно перешел на дистанционный формат обучения. К изучению дистанционного образовательного процесса привлекаются как государственные организации, так и частные лица, фонды и общественные структуры. Например, Агентство по

контролю качества образования и развития карьеры, eLearning Center, общественная организация «Профессионалы дистанционного обучения», Институт развития интернета и другие организации.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что процедура оценки качества дистанционного образования сводится к экспертному исследованию каждого компонента обучения в отдельности с последующим процессом выставления оценки по каждому критерию. Систематизация полученных данных в свою очередь позволяет получить единое решение о качестве дистанционного образовательного процесса. Стоит отметить, что организация дистанционного образовательного процесса посредством онлайн-платформ позволяет улучшить качество обучения, поскольку работа в онлайн-платформе регламентирует деятельность участников образовательного процесса. Также реализация дистанционной формы обучения в онлайн-среде позволяет в большей мере оптимизировать и ускорить оценку качества педагогического процесса, что в свою очередь способствует модернизации и улучшению разработанных информационно-коммуникационных средств обучения.

Литература

1. Козлов С.В., Шкуратова А.А. Особенности мониторинга образовательного пространства с использованием новых информационных технологий // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. Вып. 21. С. 393-399.
2. Романов Е.В., Дроздова Т.В. Дистанционное обучение: необходимые и достаточные условия эффективной реализации // Современное образование. 2017. № 1. С. 172-195. URL: https://nbpublish.com/library_read_article.php?id=22044.
3. Андреев А.А. Оценка качества учебных онлайн-курсов // Качество дистанционного образования, новые технологии управления бизнесом: концепции, проблемы, решения: материалы XVIII Международной научно-практической конференции. Жуковский, 2017. С. 19-20.
4. Козлов С.В. Педагогическое проектирование индивидуального тестирования в лично-ориентированной обучающей системе: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 и 13.00.02. Смоленск, 2006. 204 с.
5. Киселева О.М. Применение методов математического моделирования в обучении: дисс. ... канд. пед. наук. Смоленск, 2007. 181 с.
6. Козлов С.В. Использование вспомогательных программных модулей в автоматизированных информационных системах поддержки учебного процесса // Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии: сборник трудов VIII Всероссийской научно-практической конференции. Оренбург, 2017. С. 235-239.
7. Давлетбаева А.Р. Модель обеспечения качества дистанционного обучения на основе онтологического подхода // Образовательные технологии и общество. URL: <https://readera.org/14062604>.

S.V. Kozlov, A.A. Shkuratova
Smolensk State University

ASSESSMENT OF THE QUALITY OF DISTANCE LEARNING BY MEANS OF EDUCATIONAL PLATFORMS

Keywords: *monitoring, information and communication technologies, educational platform, educational process, online learning, distance learning.*

Abstract. *The article discusses the use of educational platforms for assessing the quality of the organization of distance learning. Special attention is paid to the characteristics of objects and subjects of the educational process in the context of the use of information and communication technologies. The authors described particularly important methodological and methodological aspects of learning using the opportunities of educational platforms.*

С.А. Ксенофонтов, Н.Р. Перельман
Смоленский государственный университет

УДК 519.83

АНАЛИЗ СИТУАЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА СРЕДСТВАМИ MS EXCEL ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ-ЭКОНОМИСТОВ

Ключевые слова: *методы принятия управленческих решений, теория игр, дерево решений.*

Статья посвящена методике обучения студентов-экономистов основам теории игр, в частности, здесь приводится реализация метода дерева решений средствами MS Excel. Вначале дается краткая характеристика дисциплины «Методы принятия управленческих решений» и одного из ее важных разделов – теории игр. Затем описываются задачи, которые удобно решать с использованием метода дерева решений. И, наконец, рассматривается реализация данного метода с помощью компьютерных технологий, в частности средствами MS Excel, что проиллюстрировано на конкретном примере.

При обучении студентов-экономистов важное значение имеют как фундаментальные математические дисциплины, так и прикладные. К последним относится дисциплина «Методы принятия управленческих решений», преподаваемая для студентов специальности «38.05.01

Экономическая безопасность». Данный курс состоит из двух больших блоков, в первом из которых изучается принятие решений в условиях полной определенности (на примере задач линейного программирования и задач, к ним сводящимся), а во втором – принятие решений в условиях неопределенности и риска (на примере задач теории игр).

В задачах теории игр, в которых исход событий зависит от вероятности, часто удобно применять метод дерева решений.

Дерево решений – это структурная математическая модель, которая отображает процесс принятия решений, обозначая каждое возможное решение, предшествующие и последующие этим решениям события или другие решения, а также последствия каждого конечного решения. Существуют определенные правила построения дерева решений (см., например, [1, с. 525]). В частности, вводятся отдельные обозначения для вершин альтернативных решений, которые отображаются на графе дерева решений в виде квадратов, и для вершин событий, которые отображаются в виде окружностей. Также вершины конечных узлов стоит обозначать отлично от других, например в виде закрашенной окружности. Каждой дуге, исходящей из вершины альтернативных решений, при построении дерева решений приписываются веса, которые характеризуют приобретения или убытки при реализации данного решения. Каждой дуге, исходящей из вершины событий, приписываются веса, которые характеризуют вероятность соответствующего события, а также приобретения или убытки при реализации данного события.

Одним из удобных способов построения дерева решений не «вручную» является использование надстройки «Дерево решений» MS Excel [2]. Рассмотрим применение этой надстройки на конкретном примере.

Задача. Строительная фирма принимает решение о строительстве жилого комплекса (ЖК) в некотором районе города. При этом сначала необходимо принять решение: проводить ли рекламную кампанию, которая стоит 500 000 условных единиц (у.е.). Согласно предшествующему опыту фирмы лишь в 25% случаев это обеспечивает успех на рынке. Если кампания пройдет успешно, то начинается строительство. При этом можно построить большой (на 900 квартир) ЖК, что обойдется в 200 000 000 у.е., а можно малый (на 300 квартир) ЖК, тогда расходы на строительство составят 50 000 000 у.е. Прогноз спроса показывает, что вероятность падения спроса на подобное жилье составляет 40%. Если спрос снизится, то цены на квартиры в большом и малом ЖК будут составлять соответственно 100 000 у.е. и 150 000 у.е., а если спрос не снизится, то 250 000 у.е. и 400 000 у.е. Также расходы фирмы в период продажи квартир независимо от величины комплекса составят 5 000 000 у.е. Стоит ли начинать строительство ЖК и если стоит, то какого?

Решение. Определим структуру дерева решений, используя вершины альтернативных решений и вершины событий. Отметим, что вершины деревьев называются в данной надстройке *развилками*, причем вершина альтернативного события называется *развилкой выбора решения*, а вершина событий – *развилкой вариантов будущего* (см. рис 1).

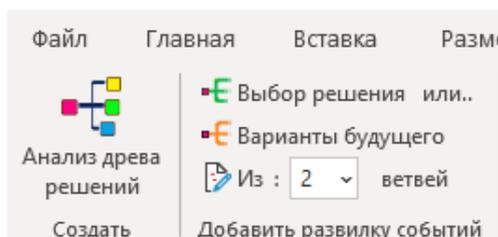


Рис. 3

На графе различные категории вершин отображаются одинаково, но при этом различно отображаются дуги, исходящие из вершин: дуги, исходящие из вершин альтернативных событий – зеленые, дуги, исходящие из вершин событий – красные. Конечные невзвешенные вершины помечаются звездочками.

Структура дерева решений рассматриваемой задачи представлена на рисунке 2.

Присвоим весам конечных вершин конкретные значения согласно условию задачи. Для некоторых вершин потребуются предварительные вычисления (см. табл. 1 и табл. 2).

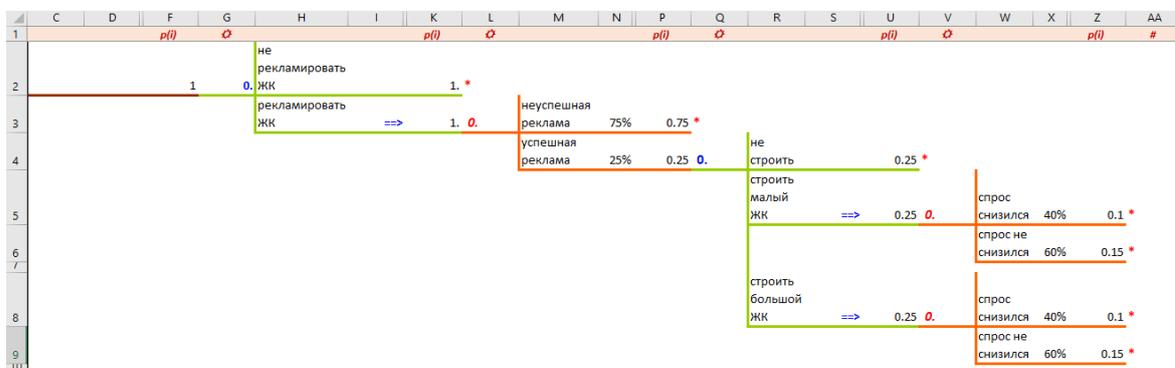


Рис. 4

Таблица 1

	Малый ЖК		
	Доходы	Расходы	Прибыль
Спрос снизился	45 000 000	55 500 000	- 10 500 000
Спрос не снизился	120 000 000	55 500 000	64 500 000

Таблица 2

	Большой ЖК		
	Доходы	Расходы	Прибыль
Спрос снизился	90 000 000	205 500 000	- 115 500 000
Спрос не снизился	225 000 000	205 500 000	19 500 000

После взвешивания конечных вершин дерева выполняется автоматический пересчет весов вершин событий и вершин альтернативных событий (см. рис. 3). Отметим, что возможности надстройки позволяют находить для вершин альтернативных событий как максимум, так и минимум альтернативных значений.

Путь в графе, который отвечает наиболее выигрышной стратегии, указывается стрелками над дугами, исходящими из вершин альтернативных событий. При этом сам выигрыш отображается в корне дерева.

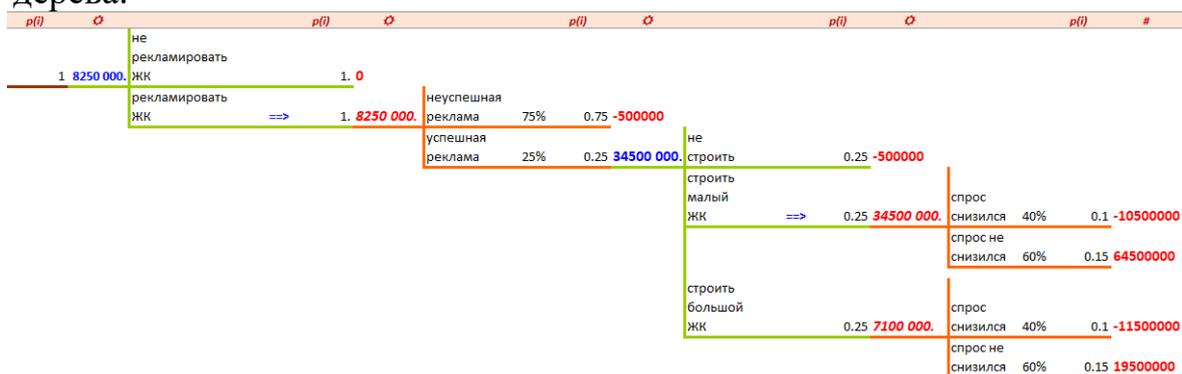


Рис. 5

Таким образом, в результате собственных и программных вычислений получаем оптимальное решение: необходимо проводить рекламную кампанию и строить малый ЖК, оцениваемая прибыль при этом составит 8 250 000 у.е.

Основным преимуществом использования MS Excel является возможность связывать данные в дереве с существующими ячейками, что автоматически обновляет дерево при изменении прикрепленной электронной таблицы. Использование надстройки не дает полной автоматизации решения задачи, но предполагает владение необходимыми компетенциями в предметной области, поскольку структура дерева решений определяется пользователем, равно как и веса конечных вершин, нахождение которых может представлять отдельную подзадачу. Поэтому при обучении студентов-экономистов целесообразно использовать данный метод построения дерева решений наряду с традиционным

«ручным»), так как это существенно расширяет диапазон возможностей работы с полученным деревом и в итоге положительно сказывается на формировании необходимых компетенций.

Литература

1. Таха Х.А. Исследование операций. М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. 911 с.
2. <https://hcxl.net/addins.html>.

S.A. Ksenofontov, N.R. Perelman
Smolensk State University

ANALYSIS OF SITUATIONS UNDER UNCERTAINTY AND RISK WITH MS EXCEL MEANS IN TRAINING STUDENTS-ECONOMISTS

Keywords: *methods of making managerial decisions, game theory, decision tree.*

Abstract. *The article is devoted to the methodology of teaching economics students the basics of game theory, in particular, here is the implementation of the decision tree method using MS Excel. First, there is a brief description of the discipline "Methods of making managerial decisions" and one of its important sections – game theory. Then tasks are described that are convenient to solve using the decision tree method. And, finally, the implementation of this method using computer technologies, in particular, by means of MS Excel, is considered, which is illustrated with a specific example.*

А.С. Кузнецова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

УДК 159.9:331.101.3

МЕТОДЫ ПСИХОЛОГИЧЕСКОЙ САМОРЕГУЛЯЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ КАК ЧАСТЬ ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ И СЛУШАТЕЛЕЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ

Ключевые слова: *саморегуляция, функциональное состояние, стресс, стрессовые ситуации в обучении, психологическая поддержка.*

Программы психологического сопровождения учебного процесса в высшей школе в течение многих лет разрабатывались видными отечественными психологами, но данная проблематика по-прежнему остается актуальной. Перспективным направлением психологического

сопровождения студентов и слушателей программ дополнительного образования является использование технологий экспресс-оптимизации неблагоприятных функциональных состояний в течение кратковременных перерывов для отдыха и восстановления ресурсов, основанных на приемах психологической саморегуляции. Выполненные исследования выявили высокую эффективность однократного применения таких приемов для оптимизации текущего состояния. Показано, что освоенные учащимися программы развития новых навыков саморегуляции формируют психологическую готовность к использованию приемов целевого самовоздействия для достижения состояний, наилучшим образом соответствующих учебным ситуациям и типам выполняемых задач в напряженных учебных ситуациях.

Причины развития неблагоприятных функциональных состояний (ФС) в учебной деятельности студентов высшей школы. Главные факторы негативных изменений текущего ФС в учебной деятельности студентов современной высшей школы связаны с неравномерностью учебной нагрузки во время семестров и с резким ростом напряженности во время зачетных и экзаменационных сессий [1; 2; 10]. Процесс обучения в высшей школе требует не только перестройки привычных жизненных ритмов (учебы и отдыха, сна и бодрствования), но и приспособления к новым формам обучения и контроля. Данный фактор стал одним из ключевых в период вызванной первой волной пандемии COVID-19 самоизоляции и стремительного перехода к тотальному дистанционному формату обучения: Как показывают исследования, студенты были вынуждены быстро адаптироваться к новой среде – вне зависимости от их желания и субъективной готовности учиться дистанционно [5; 9].

Несмотря на то, что в основном во время семестра учебная деятельность студентов может быть охарактеризована как достаточно монотонная работа по восприятию, усвоению и переработке больших объемов информации, в ней есть и «плановые» стрессогенные ситуации – контрольные, зачеты и экзамены. Подготовка к семестровым отчетностям происходит чаще всего в условиях дефицита времени и субъективно высокой значимости неудачи. Как следствие, кумуляция утомления за семестр на фоне плохо организованного индивидуального режима учебы и отдыха приводят к развитию устойчивых деструктивных ФС (хронического утомления и стресса). Комплекс неблагоприятных факторов в учебной деятельности обуславливает необходимость организации программ психологического сопровождения обучения в высшей школе. Несмотря на то, что таковые в течение многих лет разрабатывались отечественными психологами [1; 2; 8], проблематика продолжает оставаться актуальной.

Результаты использования технологий психологической саморегуляции (ПСР) состояния: эффективность однократных занятий и модульных программ обучения новым навыкам ПСР. Одним из перспективных направлений психологического сопровождения обучения является разработка программ экспресс-оптимизации неблагоприятных ФС во время кратковременных периодов отдыха в учебном процессе [7]. Быстрое и эффективное восстановление ресурсов и формирование желаемого ФС может быть достигнуто при помощи технологий психологической саморегуляции (ПСР) состояния как в форме разовых занятий ПСР, так и по линии обучения новым навыкам самоуправления ФС. Исследования эффективности технологий ПСР, основанных на приемах осознанной и целенаправленной оптимизации ФС, проводились в течение нескольких лет на базе разных вузов и учебных институтов повышения квалификации [4; 5; 6]. Полученные результаты позволяют говорить о высоком потенциале разных модулей ПСР ФС, рекомендованных для экспресс-управления состоянием во время учебных перерывов.

Опыт применения *разовых занятий ПСР* по схеме сравнения эффективности целевых приемов ПСР и самостоятельно выбранных приемов оптимизации ФС позволяет говорить о существенно большей эффективности целевых приемов – несмотря на то, что они были для учащихся новыми и никогда ранее ими не использовались. Например, в исследовании результатов применения приемов ПСР для подготовки студентов к выполнению сложных когнитивных задач по обработке информации в рабочей памяти [11] показан более мощный результат воздействия целевых приемов саморегуляции ФС (по сравнению с самостоятельно выбранными приемами настраивая на задачи). При повторной серии выполнения когнитивных задач найдены различия в показателях скорости и точности их выполнения: на уровне статистической тенденции – различия в увеличении точности верификации числовых уравнений ($F=3,25$, $p=0,08$) и снижении количества ошибок в пропуске буквенной информации ($F=2,51$, $p=0,1$); кроме того, на субъективном уровне студенты группы целевой ПСР лучше оценивают эффекты снижения утомления и роста субъективного комфорта при повторном выполнении задач [4].

В сравнительном исследовании эффектов оптимизации ФС перед выполнением итогового задания на проверку блока освоенной профессионально-специфичной информации показаны различия между учащимися групп целевой и самостоятельной саморегуляции, связанные с глубиной оптимизационного эффекта. Данные различия касаются не только более явного улучшения субъективных оценок ФС в группе целевой ФС, но и изменения физиологических показателей, отражающих снижение «цены» выполнения тестового задания [3].

При очевидной эффективности разовых занятий, необходимо разрабатывать программы обучения новым навыкам ПСР как направления психологического сопровождения учебной деятельности студентов и слушателей в высшей школе. Такие программы были внедрены в процесс профессиональной подготовки в ряде учебных заведений. В частности, модификация базовой программы для недельного тренингового цикла, адресованная слушателям программы дополнительного образования, позволила получить выраженный многоуровневый пролонгированный эффект оптимизации ФС за время освоения разных по типу приемов ПСР (см. таблицу).

Данный эффект проявился в оптимизации физиологических (частота сердечных сокращений) и психологических (субъективный комфорт, ситуативная тревожность) показателей при подготовке к выполнению нагрузочных заданий, моделирующих процессы обработки буквенной информации.

Таблица.

**Позитивные сдвиги показателей ФС при использовании приемов ПСР
(различия рассчитаны по t-критерию Стьюдента)**

Методы ПСР	Нервно-мышечная релаксация			Сенсорная репродукция			Целевая аутогенная саморегуляция		
	Среднее (ст. откл.)		р	Среднее (ст. откл.)		р	Среднее (ст. откл.)		р
<i>Субъективный комфорт</i>	51,6 (7,7)	57,1 (7,0)	0,01	53,1 (9,2)	54,8 (8,6)	>0,1	53,0 (8,8)	57,4 (8,2)	0,01
<i>Ситуативная тревожность</i>	36,9 (8,4)	29,1 (6,7)	0,01	39,1 (12,2)	32,5 (7,2)	0,01	36,9 (8,1)	31,8 (7,0)	0,01
<i>Частота сердечных сокращений</i>	69,9 (8,9)	71,8 (8,4)	>0,1	74,8 (6,6)	75,5 (8,3)	>0,1	75,3 (10,4)	77,5 (7,7)	0,05

Итоги оценки результатов применения тренингового модуля освоения приемов ПСР, разработанного и использованного во время первой волны пандемии COVID-19 (апрель 2020), позволяют рекомендовать этот модуль для условий дистанционного обучения [5]. Собранные данные показали сильный восстановительный эффект ($p < 0,001$) в отношении снижения умственного утомления и ситуативной тревожности после применения всех типов приемов ПСР в конце дня.

Выводы и заключение. Сравнительный анализ возможностей однократных занятий по применению приемов ПСР и обучающих тренингов по развитию навыков ПСР позволяет говорить о целесообразности включения таких тренингов в состав программ психологического сопровождения участников учебного процесса в высшей школе. Их преимущество состоит в накоплении положительных эффектов оптимизации ФС и формировании новых психологических

средств целевой саморегуляции состояния, применение которых обеспечивает быстрое достижение такого ФС, которое адекватно ситуативным требованиям и способствует оптимальному расходу когнитивных ресурсов при выполнении учебных задач.

Литература

1. Габдреева Г.Ш. Основы самоуправления психическим состоянием // Проблемы самоуправления в системе психологической службы Вузов / под ред. Н.М. Пейсахова. Казань: Изд-во КГУ, 1983. С. 135-191.
2. Гройсман А.Л. Психология успешности профессионального обучения и творческой активности актера. М.: Когито-Центр, 2007. 143 с.
3. Злоказова Т.А. Оптимизация функционального состояния профессионалов в процессе бизнес-тренингов // Прикладная юридическая психология. 2008. № 2. С. 122–137.
4. Кузнецова А.С., Злоказова Т.А., Величковский Б.Б. Приемы психологической саморегуляции состояния и мобилизация когнитивных ресурсов // Психология состояний человека: актуальные теоретические и прикладные проблемы / под ред. Б.С. Алишева, А.О. Прохорова, А.В. Чернова. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2018. С. 276-279.
5. Кузнецова А.С. Эффективность приемов психологической саморегуляции состояния в преодолении стресса дистанционной работы в условиях пандемии // Бехтерев и современная психология / под ред. Л.М. Попова, И.Р. Абитова. Казань: НОУ ДПО «Центр социально-гуманитарного образования», 2020. С. 173-175.
6. Кузнецова А.С., Тихонов О.И. Эффективность релаксационных процедур Самара: Изд-во Сам ГПУ, 1996. 48 с.
7. *Леонова А.Б.*, Кузнецова А.С. Структурно-интегративный подход к анализу функциональных состояний: история создания и перспективы развития // Вестник Московского университета. Серия 14: Психология. 2019. № 1. С. 13-33.
8. Лилиенталь И.Е., Колесникова И.А. Модель психолого-педагогической поддержки адаптации студентов на начальном этапе вузовского обучения // Вестник Северо-Кавказского федерального университета. 2016. № 1 (52). С. 139-145.
9. Панферов В.Н., Безгодова С.А., Микляева А.В. Динамика отношения студентов к дистанционному обучению (результаты лонгитюдного исследования) // Личностные и регуляторные ресурсы достижения образовательных и профессиональных целей в эпоху цифровизации / под ред. Т.Н. Банщиковой, Е.А. Фоминой, В.И. Моросановой. М.: Знание-М, 2020. С. 204-217.
10. Kuznetsova A.S., Luzianina M.S. Proactive approach to rest and functional states' self-regulation in flexible work arrangements // European Proceedings of Social and Behavioural Sciences (EpSBS). 2020. Vol. 91. P. 244-252.
11. Velichkovsky V.B. Consciousness and working memory: current trends and research perspectives // Consciousness and Cognition. 2017. № 55. P. 35–45.

A.S. Kuznetsova

Lomonosov Moscow State University

METHODS OF HUMAN FUNCTIONAL STATES' SELF-REGULATION AS A PART OF PSYCHOLOGICAL SUPPORT OF HIGH SCHOOL STUDENTS

Keywords: *self-regulation, functional states, stress, educational strain, psychological support.*

Abstract. *Development of psychological support programs for universities students is an important and urgent topic. One of the prospective branch of psychological support in education – implementation of self-regulation methods in order to optimize students' functional states during short breaks in educational process. The empirical research revealed high efficiency of self-regulation means even in single sessions. In self-regulation training program new skills of functional states' optimization could be learned. Obtained data showed that such skills help to develop psychological readiness to use special "targeted" self-regulation means under educational strain – in order to prevent stress and form the most appropriate functional state for different situations and educational tasks.*

С.В. Кулаков, Ю.Б. Дроздов, Ю.Ю. Крисенко
*Военная академия войсковой противовоздушной обороны
им. Маршала Советского Союза А.М. Василевского*

УДК 355.237

ТРЕНАЖЕРЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПЕРСОНАЛА: НАЗНАЧЕНИЕ И ВОЗМОЖНОСТИ

Ключевые слова: *тренажер, дидактические возможности, методические возможности.*

В данной статье рассмотрено общее назначение тренажеров, их возможности по обучению персонала. Проанализированы дидактические и методические возможности тренировочных средств.

Тренажеры (учебно-тренировочные средства) в широком смысле представляют собой комплекс систем моделирования, взаимоувязанных моделей и методик, предназначенных для подготовки обучаемых к принятию качественных и оперативных решений. Применение УТС представляет собой более безопасный, экономичный и удобный способ обучения по сравнению с использованием для этой цели реальной системы. Кроме того, тренажеры позволяют углубить процесс обучения благодаря расширению спектра формируемых навыков и приемов. Тренажеры предназначаются для создания учебной обстановки, которую

в противном случае пришлось бы обеспечивать в действующей системе, а также для формирования и совершенствования знаний, навыков, умений, приобретение которых в реальной обстановке просто невозможно.

Применение УТС обусловлено следующими факторами:

- достаточно высокой стоимостью и недостаточным количеством оборудования, которое может быть использовано для решения учебных задач, затратами на эксплуатацию реального оборудования;

- ограниченностью временного ресурса на подготовку оборудования к использованию;

- большой сложностью изменения параметров оборудования и среды;

- сложностью введения нового усовершенствованного оборудования;

- необходимостью выработки устойчивых практических навыков при работе с оборудованием;

- опасностью выполняемых работ [1].

Современные компьютерные технологии позволяют создавать тренажеры, включающие мультимедийные компоненты – компьютерную мультипликацию, аудио- и видеоэффекты. Использование этих средств усиливает ощущение реальности при работе с тренажером и открывает новые возможности в процессе обучения.

Особое значение использование тренажеров имеет при подготовке персонала в отраслях, где ущерб от ошибочных действий может приводить к необратимым последствиям, таких как АЭС, нефтехимия, металлургическое производство, авиация и многое-многое другое.

Выбор тех или иных программных средств определяется целями обучения. Так, для контроля персонала по выполнению определенных правил можно использовать простые экзаменаторы. Общее ознакомление с устройством и обучение определенному порядку действий можно выполнять средствами статических тренажеров. Для проведения экспериментов, изучения физических основ и способов функционирования устройств, для проблемного обучения, противоаварийных тренировок и анализа аварий следует использовать динамические тренажеры, для осуществления комплексного обучения операторов с применением математических и имитационных моделей сложных технологических объектов необходимо использовать интеллектуальные обучающие тренажеры [2].

УТС также обладают исключительными дидактическими возможностями (рис. 1), что позволяет реализовать в них дополнительные функции, особенно ценные в аспекте задач тренировки, профессиональной подготовки и обучения. Часть функций УТС

выполняет близко к тому, как они исполняются в реальной системе, а некоторые функции реализуются в нем намного лучше [3].



Рис. 1. Дидактические возможности УТС

Инструктаж в тренажере может выполняться самыми разными способами в зависимости от имеющихся средств, а также от важности и степени трудности обрабатываемой задачи. Преимущество такого инструктажа заключается в возможности стандартизации отдаваемых указаний при одновременном снижении нагрузки на инструктора. Кроме того, в этом случае появляется возможность персонифицировать процесс формирования инструкций на основе тщательно разработанного детального учебного плана.

Тренажер предоставляет возможности совершенствования профессиональной подготовки благодаря наличию в нем органов управления и источников информации, обычно используемых обучаемыми в реальной системе при выполнении поставленных перед ними задач. Имеющаяся информация отражает состояние системы, влияние на нее окружающей обстановки, а также результаты входных управляющих воздействий, вводимых инструктором в процессе работы на тренажере. Тренажер уникален по своей возможности создания именно тех условий, которые необходимы для обеспечения прогресса обучения на каждом этапе совершенствования профессиональных навыков обучаемых. Будучи грамотно внедренным в процесс обучения, он является наиболее гибким и эффективным тренировочным средством.

Развитие любых сложных навыков управления есть в известном смысле не что иное, как развитие навыков по обработке информации. Тренажер позволяет вырабатывать информацию, которая характеризует состояние имитируемой системы и входные управляющие воздействия, формируемые обучаемыми в процессе отработки поставленных перед ним задач. Эта информация позволяет обучаемым и инструктору выполнить оценивание того, насколько подходящими оказываются те или иные входные воздействия.

Тренажер может способствовать углублению процесса обучения в следующих направлениях, если его функциональные возможности правильно организованы и верно используются:

- стандартизация учебных заданий;
- систематизация процессов предъявления обучаемым задач, подзадач и элементов задач;
- систематизация условий работы по мере совершенствования и приобретения опыта обучаемыми;
- работа в быстром и медленном темпах;
- оперативность оценивания результатов работы обучаемых;
- комментирование важных особенностей работы обучаемых с целью критического разбора их деятельности, а также для выяснения причин возникших затруднений.

Еще одной функцией наиболее совершенных тренажеров является обеспечение автоматического процесса обучения. Тренажеры располагают обучающими средствами и возможностями, достаточными для того, чтобы можно было передать процесс обучения всецело под контроль самого обучаемого – даже до такой степени, что он будет готов и сможет взять на себя ответственность за качество своего индивидуального обучения.

Оценивая возможности УТС с методической точки зрения, необходимо учитывать, что развитие информационных технологий позволяет решать широкий спектр задач по оцениванию качества и контролю за условиями обучения, а также, что немаловажно, обеспечению безопасности обучаемых во время проведения занятий. Методические возможности УТС показаны на рисунке 2.



Рис. 2. Методические возможности УТС

Постепенное углубление обучения и вывод о том, что подготовка обучаемого достигла того уровня, когда с большой эффективностью можно перейти к отработке более сложных задач, основываются на измерении и оценивании характеристик практической деятельности

обучаемого. Каждый параметр, отражающий состояние моделируемой системы и ее окружения, каждое входное воздействие, вводимое обучаемым или инструктором, отображается, запоминается и обрабатывается в компьютере тренажера как совокупность математических соотношений. Таким образом, компьютер тренажера содержит всю необходимую информацию о системе и качестве работы учащегося, а также о каждом параметре ответных действий учащегося.

Возможность контролируемого изменения условий рабочей среды весьма существенна для эффективного обучения, поскольку рабочая среда (внешние воздействия на систему) может оказывать самое разнообразное влияние на систему и на учащегося. Многие важные внешние воздействия, оказывающие сильное влияние на учащегося и его деятельность, трудно, а иногда и просто невозможно имитировать в процессе обучения.

Одним из преимуществ тренажеров, с методической точки зрения, является возможность совершенствования процесса обучения и достижения качества работы обучаемого, превышающего уровень, достигаемый в реальных системах, в тех случаях, когда обрабатываемые задания и выполняемые системой задачи достаточно сложные. Учащиеся, проходящие подготовку в рабочей обстановке, могут достичь высокого уровня профессионализма при выполнении стандартных процедур в нормальных условиях работы, если при этом обеспечен надлежащий инструктаж и контроль.

Одним из наиболее очевидных преимуществ использования имитационных средств является возможность планирования учебного процесса. Работа на тренажере может быть спланирована заблаговременно, поскольку на него не влияют погодные условия и от него не требуется выполнения какой-либо иной целевой задачи помимо подготовки учащихся.

Тренажерам присуща большая безопасность, чем большинству систем, которые они имитируют, причем эта безопасность обеспечивается двояко. Во-первых, уменьшается вероятность воздействия на обучаемого и реальные системы опасных нестандартных ситуаций. Во-вторых, тренажеры позволяют вести обучение выполнению трудных и ответственных задач в тех случаях, когда для достижения максимальной безопасности в работе системы требуется высокий уровень профессионализма, но обучение на самой реальной системе невозможно.

Таким образом, применение тренажеров в учебном процессе позволяет качественно оценить обучающихся без учета субъективного мнения руководителя занятий, продлить ресурс реальной системы, снизить стоимость обучения, снизить риск аварийных ситуаций и существенно повысить безопасность при проведении занятий.

Литература

1. Векслер В.А., Рейдель Л.Б. Интерактивные тренажеры и их значение в учебном процессе // Научный журнал Novainfo 2016. №41–1. URL: <http://https://novainfo.ru/article/4403> (дата обращения: 01.02.2021).
2. Воробьев, М.Д. Почему тренажер? // – Тула – 2019. URL: https://nsportal.ru/sites/default/files/2020/01/13/pochemu_trenazher.pdf (дата обращения: 02.02.2021г.)
3. Чупшев, Н.М., Шахов, Д.Г. Принцип построения учебно-тренировочных средств и опыт создания тренажера оперативно-тактического ракетного комплекса // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2016. №3. URL: <http://vestnik.rseu.ru> (дата обращения: 01.02.2021г.)

S.V. Kulakov, Y.B. Drozdov, Y.Y. Krisenko

Air Defense Military Academy named after Marshal of the Soviet Union
A.M. Vasilevsky

SIMULATORS FOR TRAINING OF STAFF: PURPOSE AND FEATURES

Keywords: *simulator, didactic capabilities, methodological capabilities.*

Abstract. *This article discusses the general purpose of simulators, their capabilities for training personnel. The didactic and methodological possibilities of training tools are analyzed.*

Г.Е. Сенькина

Смоленский государственный университет

УДК 378, 372.8, 37.02

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ НА ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ: ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Ключевые слова: *образовательные программы, бакалавриат, педагогическое образование, учебные планы, физико-математическое образование, профессиональное образование.*

Статья посвящена анализу результатов исследования выбора абитуриентами физико-математического факультета, возможного предпочтения ими модулей образовательной программы, а также

удовлетворенности своим выбором студентов бакалавриата направления «Прикладная информатика» на примере физико-математического факультета Смоленского государственного университета. Подтверждается, что подавляющему большинству студентов нравится учиться на физико-математическом факультете. Вместе с тем имеется немалая доля студентов (13,2 %), которые выбирают минимальный балл при ответе на поставленный вопрос. В связи с этим им может оказаться интересен модульный подход при формировании индивидуального образовательного маршрута, поскольку появляется возможность в рамках модуля по выбору изучать непрофильно ориентированные предметы и получить дополнительное высшее образование (по программе профессиональной переподготовки) за счет интегрированных программ высшего образования. Результаты исследования положены в основу разработки модулей дисциплин по выбору, обоснована необходимость учета предпочтений студентов при формировании учебных планов на модульной основе.

В условиях изменения и реализации новых образовательных стандартов в вузе проблема исследования различных подходов к разработке и реализации основных образовательных программ бакалавриата становится особенно актуальной [1 – 5]. Для оценивания направлений преобразований ранее нами были исследованы профессиональная направленность и учебные предпочтения студентов физико-математического факультета на примере Смоленского государственного университета [6]. В соответствии с новыми требованиями проектирование основных образовательных программ подготовки должно учитывать возможность разработки индивидуальных образовательных траекторий обучающихся. Так, предложенная в [7] схема построения конкретной ООП по педагогическому направлению подготовки позволяет создать индивидуальные образовательные траектории, соотносящиеся с различными школьными предметами.

Проведенное нами исследование выбора абитуриентами физико-математического факультета, возможного предпочтения ими модулей образовательной программы, а также удовлетворенности студентов своим выбором выявило благоприятные, на первый взгляд, результаты.

Так, на вопрос «Хотели бы вы учиться на физико-математическом факультете СмолГУ?» 68% абитуриентов выбрали 5 и более баллов из 10 – максимально возможного числа баллов. В выборку вошли учащиеся школ г. Смоленска, в той или иной форме изъявившие желание учиться в СмолГУ.

В свою очередь, 80% студентов физмата ответили, что им нравится учиться на физико-математическом факультете (здесь мы также учитывали тех студентов, которые выбрали 5 и более баллов из 10).



Рис. 1. Желание абитуриентов учиться на физико-математическом факультете

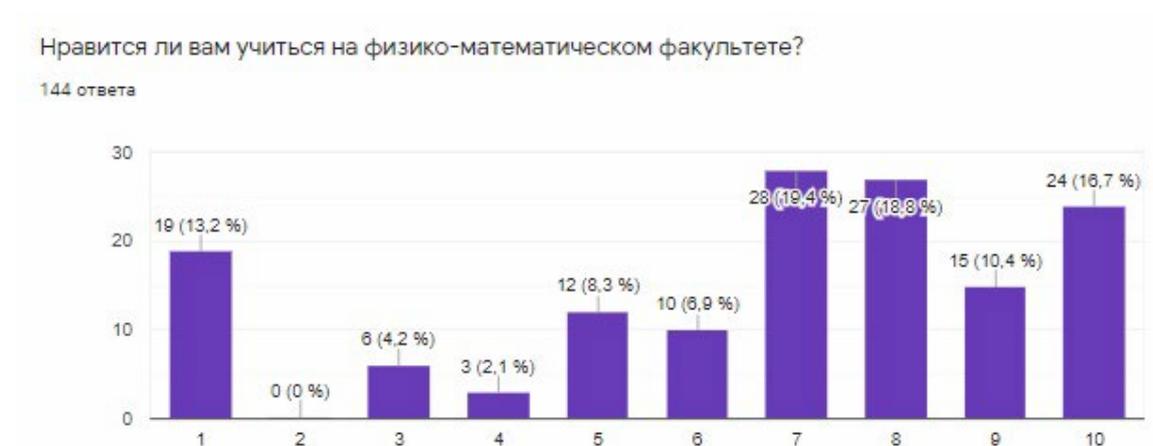


Рис. 2. Удовлетворенность студентов обучением на физико-математическом факультете

Интересны также данные о распределении выборки студентов по курсам. Наиболее представлены 1 и 3 курсы, в целом же распределение пропорционально численности студентов на факультете.

Укажите курс, на котором вы учитесь :

144 ответа

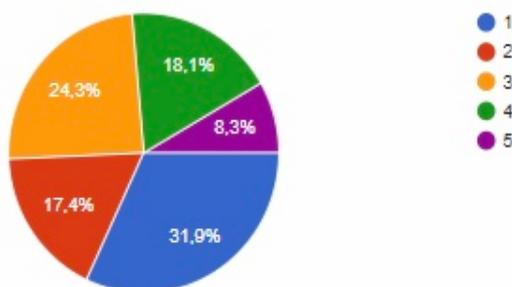


Рис. 3. Распределение студентов по курсам

Анализируя результаты проведенных теоретического анализа и опроса, а также возможности преобразования образовательных программ

в соответствии с новыми возможностями стандартов третьего поколения, мы пришли к выводу о необходимости предоставления студентам выбора в выстраивании индивидуальной траектории обучения на основе модульного подхода. При этом спектр выбираемых модулей должен учитывать предпочтения студентов и абитуриентов, расширять возможности их трудоустройства с учетом востребованных работодателями компетенций.

Предварительно, используя экспертный подход, мы выделили возможные модули по выбору основной образовательной программы направления подготовки бакалавриата «Прикладная информатика», профиль «Информационные системы организаций и предприятий: разработка компьютерных игр, web-программирование, технический английский язык». Затем провели опрос студентов и абитуриентов. В итоге получены следующие результаты (см. рис. 4 и рис. 5).

48,9% абитуриентов отдадут предпочтение web-программированию, 36,2% выбирают разработку компьютерных игр. Выбор абитуриентов представляется закономерным, поскольку компетенции, связанные с программированием, более востребованы на рынке труда. Вместе с тем интересно, что студенты, уже имеющие опыт web-программирования, в процентном отношении более заинтересованы в расширении своих компетенций в плане разработки компьютерных игр (46,5%), чем абитуриенты. Хотя при этом в целом web-программирование выбирает значительное число студентов (43,1%). Большой интерес, чем студенты, абитуриенты проявляют к изучению технического английского языка (14,9% против 10,4%).

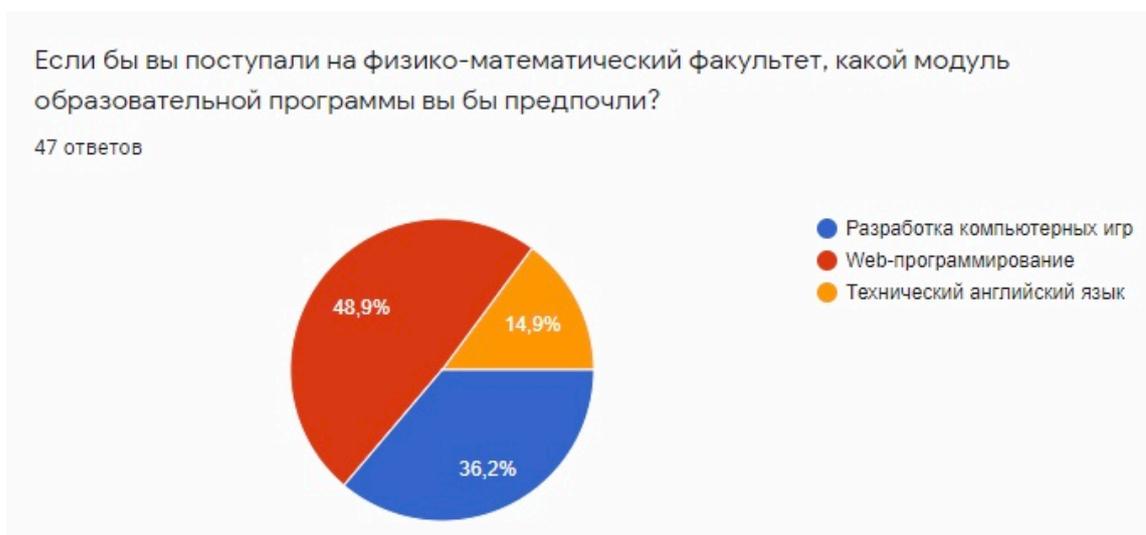


Рис. 4. Предпочтения абитуриентов в выборе модуля

Полученные результаты были учтены при разработке содержания модулей по выбору в плане предлагаемых учебных дисциплин. Причем модули сформированы по непрофильно ориентированным дисциплинам в целях расширения возможностей трудоустройства выпускников. По

окончании вуза студенты получают фактически два высших образования: диплом о высшем образовании по основному профилю и сертификат о профессиональной переподготовке.

Если бы вы были абитуриентом, какой модуль образовательной программы вы бы предпочли?

144 ответа

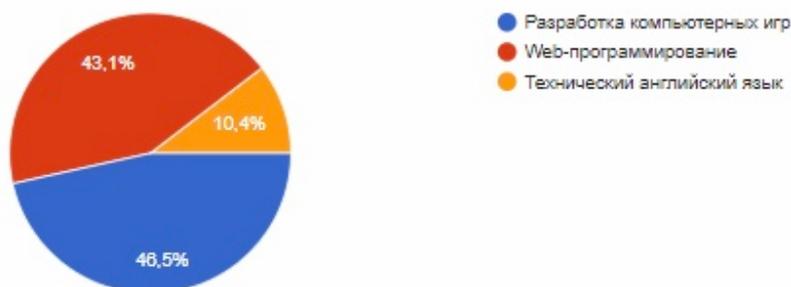


Рис. 5. Предпочтения студентов в выборе модуля

Таким образом у факультета появляется возможность повысить удовлетворенность студентов обучением в вузе. Сам модульный подход к проектированию образовательных программ ориентирован на это, поскольку позволяет выстраивать индивидуальный образовательный маршрут в соответствии с запросами студентов.

Литература

1. Проектирование основных образовательных программ, реализующих федеральные государственные образовательные стандарты высшего профессионального образования: методические рекомендации для руководителей и актива учебно-методических объединений вузов. Первая редакция М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, Координационный совет учебно-методических объединений и научно-методических советов высшей школы, 2009. 80 с.
2. Проектирование основных образовательных программ вуза при реализации уровневой подготовки кадров на основе федеральных государственных образовательных стандартов / под ред. С.В. Коршунова. М.: МИПК МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 212 с.
3. Каракозов С.Д., Петров Д.А., Худжина М.В. Проектирование образовательных программ бакалавриата в условиях приведения федеральных образовательных стандартов в соответствие с профессиональными стандартами // Преподаватель. XXI век. 2015. № 2. С. 9-23.
4. Старостина С.Е., Токарева Ю.С. Подходы к проектированию магистерской программы «Физико-математическое образование» // Высшее образование в России. 2017. № 11. С. 99-108.
5. Смышляева Л.Г., Войтеховская М.П., Матвеев Д. М. Особенности модульных образовательных программ подготовки бакалавров педагогического образования // Вестник ТГПУ. 2018. № 8 (197). С. 155-162.
6. Сенькина Г.Е. Исследование профессиональной направленности и учебных предпочтений студентов направления бакалавриата «Педагогическое образование» на

примере физико-математического факультета Смоленского государственного университета // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. № 21. С. 404-410.

7. Концептуальные подходы к проектированию основных образовательных программ по педагогическому образованию: коллективная монография. Севастополь: Издательство «Шико» Севастополь, 2019. 198 с.

G.E. Senkina
Smolensk State University

DESIGNING INNOVATIVE EDUCATIONAL PROGRAMS AT THE FACULTY OF PHYSICS AND MATHEMATICS: STATEMENT OF THE PROBLEM

Keywords: *educational programs, bachelor's degree, teacher education, curricula, physics and mathematics education, professional education.*

Abstract. *In the article the results of a study of the choice of the Faculty of Physics and Mathematics by applicants, their possible preference for modules of the educational program, as well as satisfaction with their choice of undergraduate students in the Applied Informatics direction on the example of the Physics and Mathematics Faculty of Smolensk State University are analyzed. It is confirmed that the overwhelming majority of students enjoy studying at the Faculty of Physics and Mathematics. At the same time, there is a considerable proportion of students (13.2%) who choose the minimum score when answering this question. In this regard, students may be interested in a modular approach in the formation of an individual educational route, since within the framework of the module it becomes possible to study non-core subjects and receive additional higher education (according to the professional retraining program) through integrated higher education programs. The results of the study formed the basis for the development of modules of optional disciplines, the necessity of taking into account the preferences of students in the formation of curricula on a modular basis was substantiated.*

Н.М. Тимофеева
Смоленский государственный университет

УДК 004.9

О ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА В УСЛОВИЯХ ПОЛНОГО ЕГО ПЕРЕНОСА В ОНЛАЙН

Ключевые слова: *цифровизация, онлайн-обучение, цифровое неравенство, открытые образовательные ресурсы, цифровая грамотность.*

В статье анализируется опыт чрезвычайной ситуации в образовании, такой как закрытие образовательных учреждений в условиях пандемии. К урокам повсеместного перехода на онлайн-обучение автор относит: обострение цифрового неравенства, понимание значения профессии педагога; распространение бесплатных и общедоступных образовательных ресурсов и платформ; приоритет в обучении цифровой грамотности.

Цифровизация образования как процесс формирования цифровой образовательной среды (наличие информационно-коммуникационной инфраструктуры, активное использование в образовательном процессе цифровых ресурсов и средств обучения при организующей, консультативной роли педагога, компетентного в области цифровых технологий и цифровой дидактики) [1] – это понятие было введено в обиход сравнительно недавно. До пандемии этот процесс был достаточно комфортен для преподавателя и учащегося, так как освоение в нем, привыкание происходило постепенно. По мере необходимости и педагогической целесообразности в учебный процесс включались те или иные цифровые элементы.

Условия пандемии создали искусственную ситуацию резкой цифровой трансформации. Цифровизация образовательной сферы получила серьезное ускорение, так как к факторам становления и развития цифрового образовательного процесса помимо запросов цифрового поколения, внедрения цифровых технологий во все сферы деятельности человека присоединился и фактор необходимости реагирования в критических ситуациях, таких как закрытие учебных заведений и перенос обучения в онлайн.

Обострение цифрового неравенства. Основной задачей цифровизации на период пандемии стало обеспечение непрерывности и доступности образовательных программ. Кризис выявил огромное значение цифровой связи и онлайн-платформ. Доступ к информации стал основополагающим при обеспечении права учащихся на образование, а наличие компьютера или ноутбука, возможность выхода в Интернет – необходимым условием реализации этого права.

По данным отчета о состоянии цифровой сферы Digital 2021 (We Are Social, Hootsuite) [2], время, которое проводят в интернете россияне, равняется 7 часам 52 минутам ежедневно (рис.1). Россия опережает многие страны, так как в среднем по миру этот показатель составляет 6 часов 54 минуты.

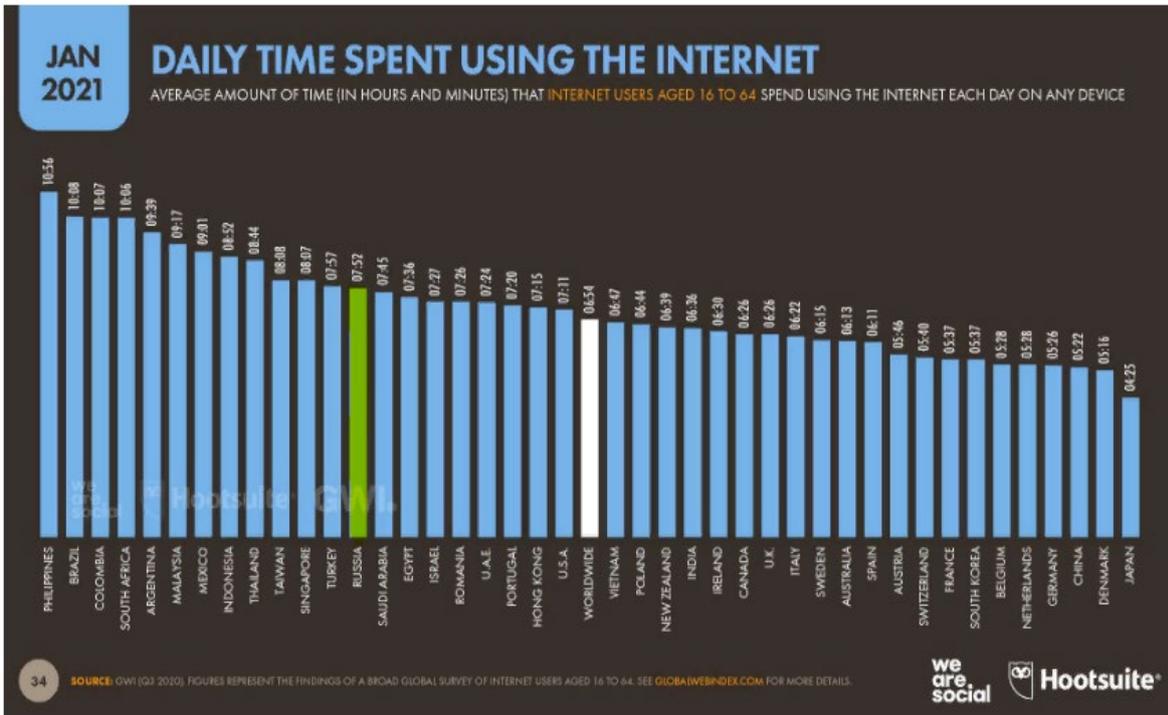


Рис. 1. Время, проводимое в интернете

По данным этого же исследования, на мобильные телефоны приходится больше половины времени, которое мы проводим в интернете (рис. 2).

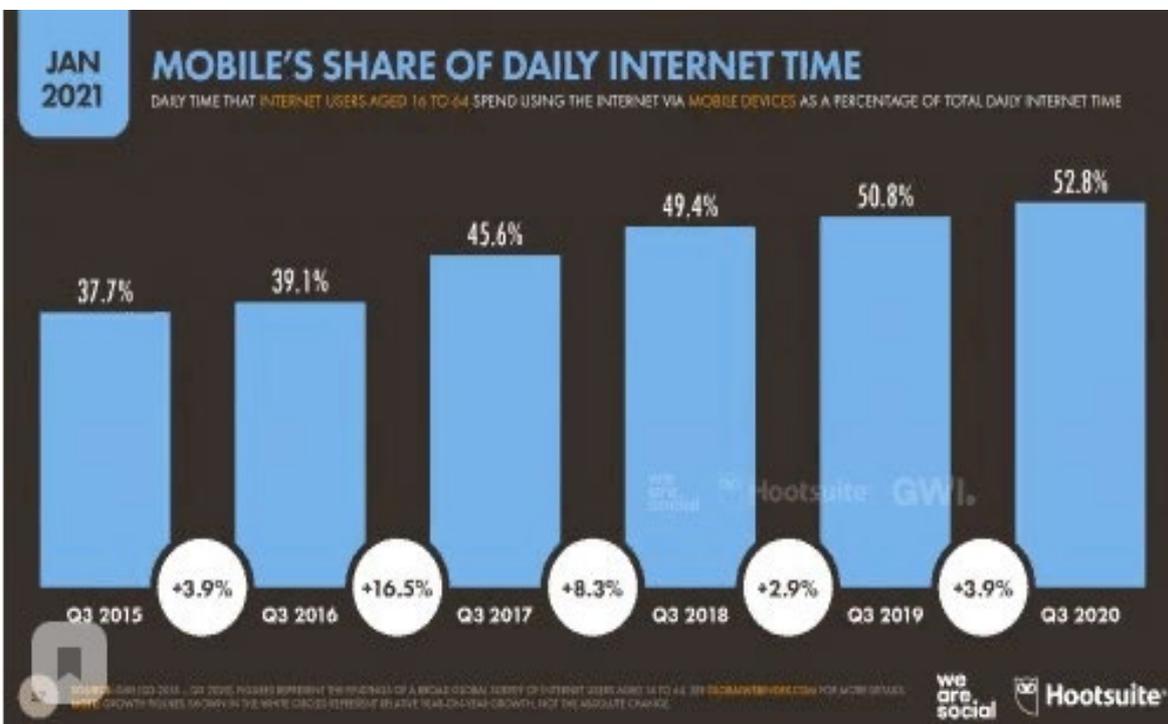


Рис. 2. Доля мобильных устройств в общем интернет-времени

Судя по приведенной в исследовании статистике компьютеры и ноутбуки используют для выхода в интернет гораздо реже, чем мобильные устройства (рис. 3).

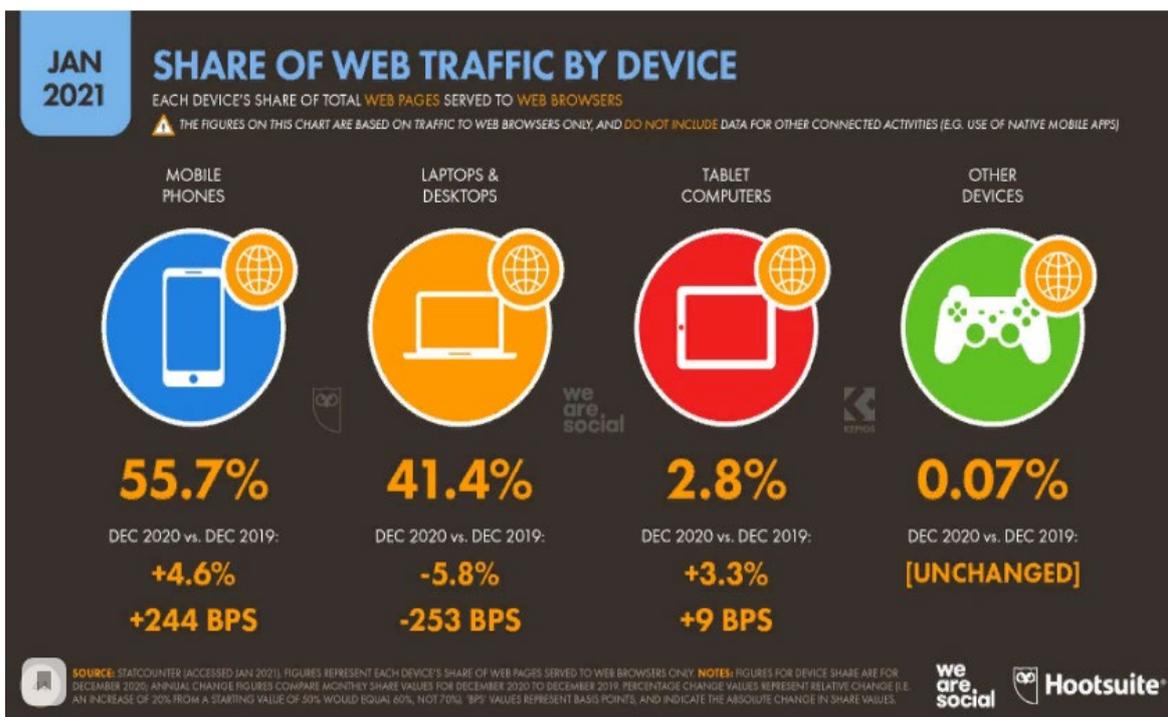


Рис. 3. Доля веб-трафика по устройствам

Эти данные позволяют сделать следующие выводы: российские учащиеся имеют доступ в интернет, проводят в сети достаточно времени, доступ к компьютеру и ноутбуку имеют далеко не все учащиеся. Последнее обстоятельство – серьезный минус для системы образования, так как мобильные устройства – это прежде всего средства коммуникации, учебную деятельность с их помощью организовать достаточно сложно, для цифровизации образования все-таки необходим компьютер или ноутбук как инструмент учебного процесса. Таким образом, пандемия обостряет проблему неравенства возможностей – проблему цифрового неравенства в области получения и возможности полноценного использования образовательного цифрового контента.

Понимание значимости профессии педагога. Перевод обучения в онлайн-формат заставил общество признать важность преподавательской профессии. Представление о сложности работы учителя получили многие родители, вынужденные контролировать обучение своих детей дома. Как никогда стало ясно, что ничто не может заменить человеческое общение, офлайн-сотрудничество между учителем и учащимися, то есть полного отказа от традиционных методов и форм обучения быть не должно.

Кризис, в котором все мы вынужденно оказались, продемонстрировал, что в современных условиях преподаватель должен

полностью взять на себя роль носителя знания и наставника, способного инициировать, экспериментировать и внедрять инновации. Подавляющее число педагогов смогли быстро перестроиться, адаптироваться к реалиям, соединив профессиональные знания, находчивость и креативность, ведь именно на их плечи легла основная ответственность за налаживание учебного процесса и его результаты.

Важный урок корона-кризиса состоит в том, что «в результате учителя должны получить большую самостоятельность и свободу, признание и уважение в обществе и впредь – играть более значительную роль в определении будущего образования» [3].

Распространение бесплатных и общедоступных образовательных ресурсов и платформ. Несмотря на в целом техническую и методическую неготовность системы образования к онлайн, опорой для перехода на дистанционное обучение стали уже существовавшие в стране образовательные онлайн-платформы (рис. 4) [4].

Среди основных недостатков такого активного и повсеместного использования онлайн-ресурсов – неоправданные попытки замены печатного учебника (качественных, проверенных временем, систематизированных учебных материалов) электронными аналогами; разрозненность интерактивного и мультимедийного контента; неустойчивая работа образовательных платформ.

Наиболее используемые онлайн-сервисы в период дистанционного обучения



Рис. 4. Наиболее используемые онлайн-сервисы в период дистанционного обучения

К положительным моментам использования онлайн-платформ и сервисов отнесем существенное расширение и обогащение спектра лицензионного ПО, официально используемого в образовательной организации; возможность оперативного создания авторских материалов и/или адаптации имеющихся в открытом доступе; повышение мотивации к учению за счет включения в образовательный процесс интерактивного контента; возможность использования контента, разработанного

совместными усилиями педагогического сообщества; развитие цифровых навыков учащихся и преподавателей и др.

В дальнейшем необходимо глобальное сотрудничество между государством, технологическими компаниями, педагогами и учащимися, представителями гражданского общества, для того чтобы открытые образовательные ресурсы всегда оставались в приоритете, предоставляли качественный образовательный контент.

Приоритет в обучении цифровой грамотности. Кризис, вызванный пандемией, явно продемонстрировал несостоятельность тезиса о том, что поколение Z (поколение людей, с рождения использующих цифровые технологии) обладает всеми навыками для функционирования в цифровой среде [5]. Опыт показывает, что наиболее неподготовленными к переходу в онлайн, испытывающими трудности при работе в цифровой среде оказались не только представители старшего поколения, которое к цифровым технологиям не привыкло, но и молодые люди, которые к этим технологиям так привыкли, что считают возможным пользоваться ими в обучении как придется.

В соответствии с Европейской моделью цифровых компетенций граждан *цифровая грамотность* определяется набором знаний и умений для безопасного и эффективного использования цифровых технологий и ресурсов интернета, а также намерениями людей в приобретении соответствующих знаний и опыта. В основе данной модели лежит ряд цифровых компетенций:

- способность решать разнообразные задачи в области использования информационно-коммуникационных технологий;
- способность использовать и создавать контент при помощи цифровых технологий, включая поиск и обмен информацией, ответы на вопросы, взаимодействие с другими людьми;
- компьютерное программирование [6].

Основы цифровой грамотности закладываются на уроках информатики и ИКТ в школе и вузе, однако это зона ответственности не только данного предмета. Цифровые компетенции должны формироваться всеми учебными дисциплинами, так как навыки поиска, фильтрации, оценки, интеграции и переработки, защиты информации, навыки общения и сотрудничества с использованием цифровых технологий являются универсальными и относятся к метапредметным компетенциям [7]. При этом значительный и наиболее трудоемкий пласт цифровой грамотности (создание цифрового контента, программирование) остается за информатикой и ИКТ.

Всеобщий переход на дистанционную форму обучения четко обозначил значение цифровой грамотности для человека цифровой эпохи, что ставит в приоритет изучение дисциплины «Информатика и ИКТ» как в школе, так и в вузе.

Опыт чрезвычайной ситуации в образовании, такой как закрытие образовательных учреждений в условиях пандемии, свидетельствует о том, что образовательная система меняется, эти изменения стремительны, будущее за гибридными (смешанными) формами обучения с использованием множества средств, методов, технологий как традиционных, так и цифровых.

Литература

1. Тимофеева Н.М. О цифровых технологиях из арсенала современного преподавателя // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи. Киров, 2020. С.108-113.
2. Вся статистика интернета и соцсетей на 2021 год – цифры и тренды в мире и России. URL: <https://www.web-canape.ru/business/vsya-statistika-interneta-i-socsetej-na-2021-god-cifry-i-trendy-v-mire-i-v-rossii/>
3. Знать, делать, быть и жить вместе // Дети в информационном обществе. 2020. № 32. С. 10-17.
4. Проблемы перехода на дистанционное обучение в Российской Федерации глазами учителей // Институт образования. 2020. URL: https://ioe.hse.ru/fao_distant.
5. Тимофеева Н.М., Тимофеева Т.И. Инфографика как средство цифровизации образования // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. Вып. 21. С. 410-415.
6. Обучение цифровым навыкам: Модели цифровых компетенций // Аналитический отчет АНО ДПО «Корпоративный университет Сбербанка». URL: http://obzory.hr-media.ru/cifrovye_navyki_sotrudnika.
7. Тимофеева Н.М. Цифровая грамотность как компонент жизненных навыков // Психология, социология и педагогика. 2015. № 7. С. 46-52.

N.M. Timofeeva
Smolensk State University

ON DIGITALIZATION OF THE EDUCATIONAL PROCESS IN THE CONDITIONS OF TRANSFER OF TRAINING TO ONLINE

Keywords: *digitalization, online learning, digital inequality, open educational resources, digital literacy.*

Abstract. *The article analyzes the experience of an emergency situation in education, such as the closure of educational institutions in the context of a pandemic. The author refers to the lessons of the widespread transition to online education: the aggravation of digital inequality, understanding the importance of the teaching profession; the spread of free and publicly available educational resources and platforms; priority in teaching digital literacy.*

РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ «ЗАЧИСЛЕНИЕ АБИТУРИЕНТОВ» СРЕДСТВАМИ С#

Ключевые слова: *информационные системы, информационные технологии, программное обеспечение.*

В данной статье рассматривается вопрос о необходимости технической поддержки процесса зачисления абитуриентов в учебные заведения. Авторами представляется описание программного продукта «Зачисление абитуриентов», предназначенного для облегчения работы приемной комиссии. В статье раскрываются некоторые особенности разработки и использования информационных систем данного назначения.

В современном мире просто невозможно представить жизнь без информационных технологий. В деятельность человека они вошли достаточно прочно – компьютерные технологии применяются во многих сферах жизни общества, в том числе и образовательной [1].

Современные программные продукты расширяют возможности для проведения вступительных кампаний высших учебных заведений [2]. Сегодня приемные комиссии вузов вынуждены использовать информационные ресурсы для привлечения и информирования абитуриентов, а также проводить постоянные мониторинг и корректировку результатов данной работы. Скорость получения нужной информации, качество обработки поступающих данных и своевременность выполнения необходимых операций напрямую зависят от используемых технических средств и наличия специализированного программного обеспечения [3; 4].

В настоящее время рынок компьютерных программ изобилует сложными многофункциональными информационными системами, в том числе и в данной области [5; 6; 7]. Особенностью авторской программы «Зачисление абитуриентов», разработанной в среде программирования С#, приводимой в статье в качестве примера, является простота использования и интуитивно понятный интерфейс. Предлагаемая информационная система поможет как членам приемной комиссии, так и самим будущим студентам изучить информацию о зачислении более подробно и в удобной форме.

При запуске данного приложения на экране появляется стартовое окно программы, содержащее разделы «Абитуриенты», «Экзамены»,

«Баллы абитуриентов», а также кнопки «Автор» и «Выход». Чтобы перейти к нужному разделу необходимо щелкнуть по нему левой кнопкой мыши (рис. 1).

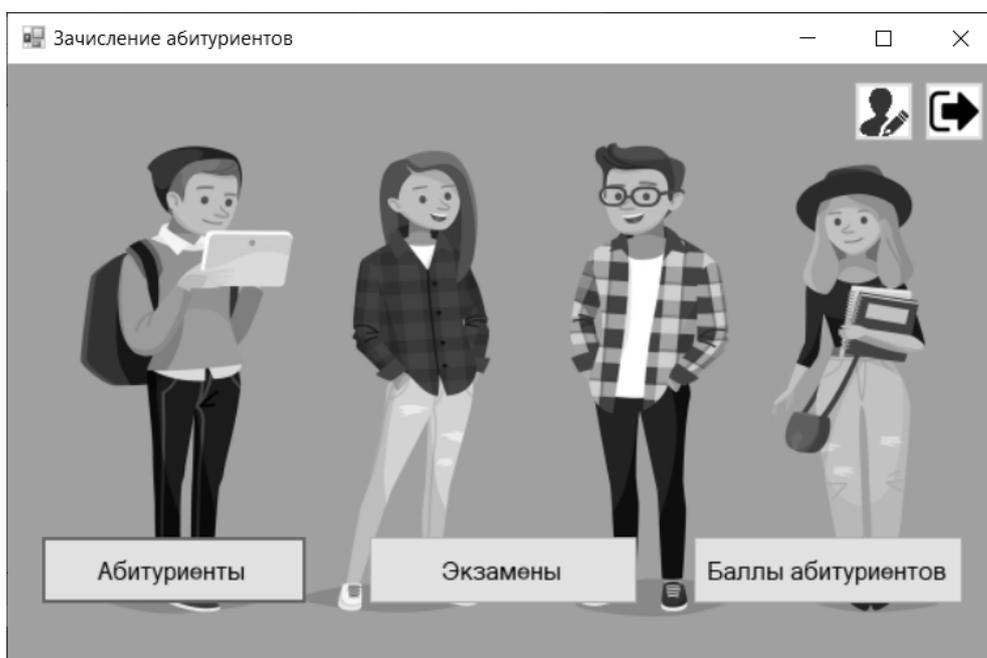


Рис. 1. Стартовое окно программы

При нажатии на кнопку «Абитуриенты» открывается таблица с информацией об абитуриентах (рис. 2). В ней содержатся следующие данные: код абитуриента, ФИО, дата рождения, номер телефона, сумма баллов абитуриента и готовность учиться на договорной основе.

The screenshot shows a window titled "Абитуриенты" with a table of data. The table has six columns: "Код абитуриента", "ФИО", "Дата рождения", "Номер телефона", and "Сумма баллов". The first row is highlighted. Below the table is a "Сохранить" button.

	Код абитуриента	ФИО	Дата рождения	Номер телефона	Сумма баллов
▶	1	Андрееenkova Елизавета Сергеевна	05.01.2000	8 950 7009761	120
	2	Воробьев Максим Сергеевич	23.05.2000	8 906 5194864	184
	3	Галстян Тигран Грачович	25.02.2000	8 951 6997018	180
	4	Глушко Матвей Александрович	23.06.2001	8 910 1182061	135
	5	Иванов Виктор Андреевич	16.02.1999	8 908 2856439	229
	6	Повейкин Александр Игоревич	25.11.2000	8 904 3684190	267
	7	Макаренко Мария Максимовна	21.11.2000	8 905 6982457	223
	8	Михайлов Сергей Сергеевич	21.05.1999	8 910 1185504	180

Рис. 2. Раздел «Абитуриенты»

При нажатии на кнопку «Экзамены» появляется таблица с возможными экзаменами и их шифрами (рис. 3).

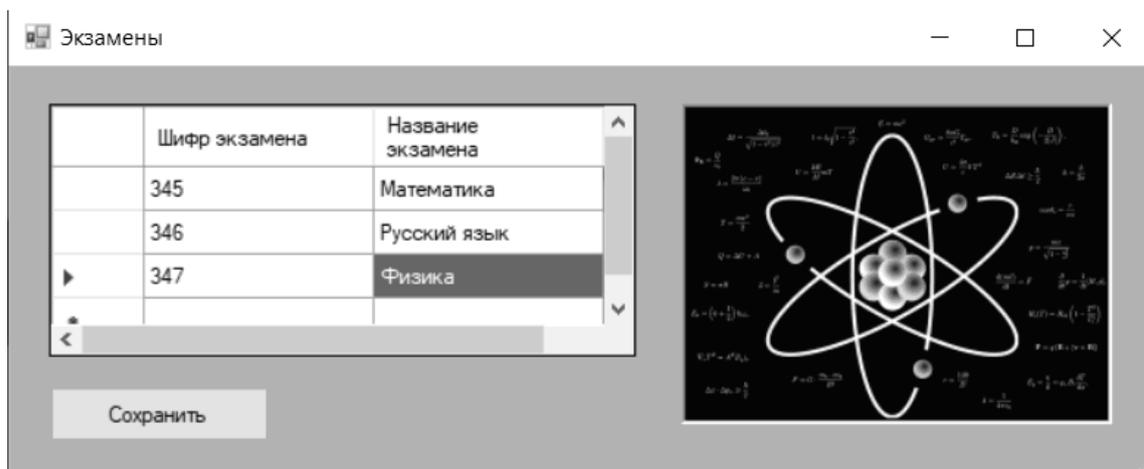


Рис. 3. Раздел «Экзамены»

При нажатии на кнопку «Баллы абитуриентов» открывается раздел с информацией о баллах всех абитуриентов по каждому экзамену (рис. 4).

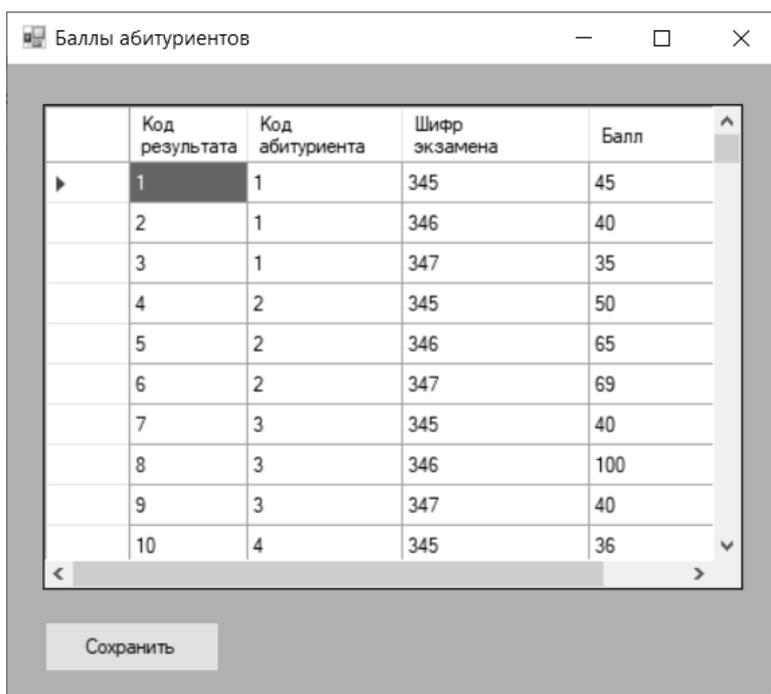


Рис. 4. Раздел «Баллы абитуриентов»

Для открытия какого-либо из разделов меню («Абитуриенты», «Экзамены» или «Баллы абитуриентов») используется процедура открытия формы:

```
private void btnAF_Click(object sender, EventArgs e)
{
    AbiturientiF newForm = new AbiturientiF();
    newForm.ShowDialog();
}
```

В каждую из приведенных таблиц пользователь (член приемной комиссии) может добавить новые данные или изменить уже существующие в ней, после чего сохранить их.

Реализация кнопки «Сохранить» осуществляется посредством следующего программного кода:

```
private void btnSave_Click(object sender, EventArgs e)
{
    this.balliabiturientovBindingSource.EndEdit();
    this.balli_abiturientovTableAdapter.Update(this.zachislenie_abiturientovDataSet2);
}
```

Для создания навигации используется элемент управления `bindingNavigator`. Для соединения таблицы и навигации в свойствах навигации необходимо найти `BindingSource` и выбрать нужную таблицу.

Нажав на кнопку «Автор» в главном меню, можно узнать информацию об авторе.

Для отображения нужной информации служит следующий программный код, реализованный посредством свойств и методов элементов среды программирования C#:

```
private void btnA_Click(object sender, EventArgs e)
{
    MessageBox.Show("Выполнила: студентка физико-математического факультета направления подготовки «Прикладная информатика в логистике» группы 31ПИВЛ(б) Юркова Алина Алексеевна");
}
```

При нажатии на кнопку «Выход» пользователь выходит из программы. Выход из программы осуществляется посредством следующего программного кода:

```
private void btnExit_Click(object sender, EventArgs e)
{
    Application.Exit();
}
```

Программа «Зачисление абитуриентов» рассматривается как вспомогательный сервис для облечения работы приемной комиссии, она также может быть доработана и модернизирована в зависимости от изменений требований приема в конкретном году.

Таким образом, данная программа предназначена для удобного представления сведений при зачислении абитуриентов: информации о самих абитуриентах, возможных экзаменах и баллах по выбранным ими экзаменам. При этом подобного рода ресурсы относительно просты в своем проектировании и программной реализации.

Литература

1. Тимофеева Н.М. Попытка формализации педагогической науки путем систематизации ее терминосистемы // Информатика и образование. 2008. № 4. С. 105-107.
2. Киселева О.М., Тимофеева Н.М., Быков А.А. Особенности формирования технической культуры у учителей различных педагогических специальностей // Концепт. 2013. № 8. С. 11-15. URL: <http://e-koncept.ru/2013/13157.htm> (дата обращения: 15.10.2020).
3. Киселева О.М. Применение методов математического моделирования в обучении: дис. ... канд. пед. наук. Смоленск, 2007. 181 с.
4. Киселева О.М. Использование математических методов для формализации элементов образовательного процесса // Концепт. 2013. №2 (18). С.51-57.
5. Тимофеева Н.М., Киселева О.М. О применении программных средств в процессе обучения // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 2005. С. 233-235.
6. Козлов С.В. Использование вспомогательных программных модулей в автоматизированных информационных системах поддержки учебного процесса // Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии: сборник трудов VIII Всероссийской научно-практической конференции. Оренбург, 2017. С. 235-239.
7. Козлов С.В. Система индивидуального тестирования «Комплекс измерения обученности» // Системы компьютерной математики и их приложения. 2007. С. 223.

A.A. Yurkova, O.M. Kiseleva
Smolensk State University

DEVELOPMENT OF THE INFORMATION SYSTEM "ENROLLING ENTRANTS" WITH C # MEANS

Key words: information systems, information technology, software.

Abstract. *This article discusses the need for technical support for the process of enrolling applicants in educational institutions. The authors provide a description of the software product "Enrollment of Applicants", designed to facilitate the work of the selection committee. The article reveals some of the features of the development and use of information systems for this purpose.*

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Абдуханов Альберт Алексеевич – аспирант кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: alikmskg@gmail.com.

Агасиев Талех Азер оглы – аспирант кафедры «Системы автоматизированного проектирования» МГТУ им. Н.Э. Баумана. E-mail: taaalex@mail.ru.

Адуков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и методики преподавания математики Южно-Уральского государственного университета. E-mail: adukovvm@susu.ru.

Адукова Наталия Викторовна – аспирант, ассистент кафедры математического анализа и методики преподавания математики Южно-Уральского государственного университета. E-mail: adukovanv@susu.ru.

Андрианов Андрей Михайлович – кандидат технических наук, доцент института системной и программной инженерии и информационных технологий национального исследовательского университета «Московский институт электронной техники». E-mail: andymailru@mail.ru.

Ассонова Надежда Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории и методики начального образования Смоленского государственного университета. E-mail: assonova@mail.ru.

Банару Галина Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com.

Банару Михаил Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com.

Беднаж Вера Аркадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского. E-mail: vera.bednazh@mail.ru.

Беляков Павел Валерьевич – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: pawelakkaunt@gmail.com.

Бирюкова Татьяна Константиновна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального информационного центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ИПИ ФИЦ ИУ РАН). E-mail: yukonta@mail.ru.

Благодатский Григорий Александрович – доцент кафедры «Информационные системы» ФГБОУ ВО ИжГТУ им. М.Т. Калашникова. E-mail: blagodatsky@gmail.com.

Богданова Надежда Николаевна – старший преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: nadingioia@yandex.ru.

Бондарь Александр Александрович – аспирант института радиотехнических и телекоммуникационных систем Российского государственного технического университета МИРЭА. E-mail: alex.kvitkovsky@yandex.ru.

Борисов Вадим Владимирович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная техника» филиала ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: vbor67@mail.ru.

Борисов Владимир Николаевич – кандидат военных наук, научный сотрудник научно исследовательского центра Военной академии войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации имени Маршала Советского Союза А.М. Василевского. E-mail: olyakur@list.ru.

Борисова Ирина Николаевна – студент (бакалавр) института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета. E-mail: borisova.irena@mail.ru.

Вишняков Рустам Рустамович – аспирант кафедры РСиК института радиотехнических и телекоммуникационных систем Российского технологического университета (РТУ МИРЭА). E-mail: Vishn9-r@yandex.ru.

Вологдин Сергей Валентинович – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Информационные системы» ИжГТУ имени М.Т. Калашникова. E-mail: vologdin_sv@mail.ru.

Ворожцова Надежда Алексеевна – аспирант кафедры «Информационные системы» ИжГТУ имени М.Т. Калашникова. E-mail: n.vorozh@mail.ru.

Вувуникян Юрий Микиртычевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. E-mail: vuv64@mail.ru.

Гагарина Лариса Геннадьевна – доктор технических наук, директор института СПИНТех МИЭТ. E-mail: gagar@bk.ru.

Гарипов Ильнур Бурханович – доцент, кандидат физико-математических наук, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета. E-mail: Ilnur.Garipov@kpfu.ru.

Гершкович Максим Михайлович – старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального информационного центра

«Информатика и управление» Российской академии наук (ИПИ ФИЦ ИУ РАН). E-mail: makmg@mail.ru.

Гончаров Евгений Игоревич – студент Смоленского государственного университета. E-mail: drbenvey1996@mail.ru.

Городилов Алексей Владиславович – кандидат технических наук, ИП Каверина А.В. «Русская мода». E-mail: kaverina@mail.ru.

Григорьева Галина Михайловна – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: grigoryevagal@gmail.com.

Гридчин Никита Александрович – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: nikita.gridchin.97@mail.ru.

Дроздов Юрий Борисович – преподаватель кафедры зенитных ракетных комплексов и систем средней дальности Военной академии войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации имени Маршала Советского Союза А.М. Василевского. E-mail: kati_kal985@mail.ru.

Дубровкин Дмитрий Станиславович – бакалавр, МГТУ им. Н.Э. Баумана. E-mail: dmitry.dim-2011@yandex.ru.

Дюндин Андрей Викторович – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и технических дисциплин Смоленского государственного университета. E-mail: avdyndin@yandex.ru.

Евдокимова Галина Семеновна – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: kaf-matem@smolgu.ru.

Емельченков Евгений Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики Смоленского государственного университета. E-mail: уру1101@gmail.com.

Захаров Виктор Николаевич – доктор технических наук, доцент, ученый секретарь Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: vzakharov@ipiran.ru.

Зуев Андрей Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: zueandrej@yandex.ru.

Ильин Павел Леонидович – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: zub.dayu@mail.ru.

Карачев Евгений Васильевич – студент института «Информатика и вычислительная техника» Ижевского государственного технического университета. E-mail: evgeshkarach@gmail.com.

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Южно-Уральского государственного университета. E-mail: karachik@susu.ru.

Карпенко Анатолий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Системы автоматизированного проектирования» МГТУ им. Н.Э. Баумана. E-mail: arkarpenk@mail.ru.

Кирикова Анастасия Викторовна – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: anastasiakiricova52@gmail.com.

Кирьяцкий Евгений Эдуардович – доктор физико-математических наук, доцент Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса. E-mail: jevgenijus.kirjackis@vilniustech.lt.

Кирьяцкий Эдуард Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса. E-mail: eduard.kirjackij@mail.ru.

Киселева Ольга Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета, foxu03@yandex.ru.

Классен Роман Константинович – кандидат технических наук, доцент кафедры компьютерных систем Казанского национального исследовательского технического университета имени А. Н. Туполева – КАИ. E-mail: klassen.rk@gmail.com.

Козлов Сергей Валерьевич – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: svkozlov1981@yandex.ru.

Комиссарова Дарья Амировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики Южно-Уральского государственного университета. E-mail: komissarovada@susu.ru.

Конашенкова Татьяна Дмитриевна – ведущий программист ФИЦ ИУ РАН. E-mail: tkonazshenkova@ipiran.ru.

Кононова Александра Игоревна – кандидат технических наук, доцент института СПИНТех МИЭТ. E-mail: illinc@bk.ru.

Копысов Андрей Николаевич – заведующий кафедрой «Радиотехника» ФГБОУ ВО ИжГТУ им. М.Т. Калашникова. E-mail: kan_kan@istu.ru.

Корепанов Эдуард Рудольфович – ведущий научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН, заведующий отделом ФИЦ ИУ РАН. E-mail: ekorpanov@ipiran.ru.

Костин Андрей Борисович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки НИЯУ «МИФИ». E-mail: abkostin@yandex.ru.

Кравченко Кирилл Андреевич – студент ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова». E-mail: wblacksto@gmail.com.

Крисенко Юрий Юрьевич – начальник учебной лаборатории кафедры зенитных ракетных комплексов и систем средней дальности

Военной академии войсковой противовоздушной обороны ВС РФ им. Маршала Советского Союза А.М. Василевского. E-mail: Yuryur80@mail.ru.

Кристалинский Владимир Романович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: kristvr@rambler.ru.

Ксенофонтов Станислав Андреевич – старший преподаватель кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: StanislavKsenofontov@gmail.com.

Кузнецова Алла Спартаковна – кандидат психологических наук, доцент кафедры психологии труда и инженерной психологии факультета психологии Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. E-mail: kuznetsovamsu@rambler.ru.

Кулаков Сергей Владимирович – адъюнкт Военной академии войсковой противовоздушной обороны ВС РФ им. Маршала Советского Союза А.М. Василевского. E-mail: kulakovsv87@mail.ru.

Курицын Сергей Юрьевич – старший преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: KuritsynSergey@me.com.

Матюхин Валентин Иванович – учитель-эксперт. E-mail: valentin.matiuchin@mail.ru.

Медведева Виктория Юрьевна – аспирант специальности «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» Гродненского государственного университета им. Я. Купалы. E-mail: medvedeva_vj@mf.grsu.by.

Мионов Артем Игоревич – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: 615153@mail.ru

Михалёва Татьяна Игоревна – аспирант кафедры математического анализа физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tat.timopheeva@yandex.ru.

Мунерман Виктор Иосифович – доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета, кандидат технических наук. E-mail: vimoona@gmail.com.

Мунерман Даниил Викторович – стажер-исследователь Смоленского государственного университета. E-mail: danvmoon@gmail.com

Нагорная Татьяна Романовна – аспирант кафедры математического анализа физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tani7n@gmail.com.

Нестеров Александр Сергеевич – магистрант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского. E-mail: pianist666666@gmail.com.

Николаев Константин Сергеевич – студент института системной и программной инженерии и информационных технологий национального

исследовательского университета «Московский институт электронной техники». E-mail: knpreacher@gmail.com.

Охлупина Ольга Валентиновна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Брянского государственного инженерно-технологического университета. E-mail: helga131081@yandex.ru.

Парамонов Алексей Анатольевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов МИРЭА – Российского технологического университета. E-mail: paramonov@mirea.ru.

Парфенова Елена Ивановна – магистрант института СПИНТех НИУ МИЭТ. E-mail: theirbis345@gmail.com.

Перельман Наталья Романовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: perelmannr@gmail.com.

Пильненкий Владислав Павлович – курсант Военной академии войсковой противовоздушной обороны ВС РФ им. Маршала Советского Союза А.М. Василевского. E-mail: smolrsu@mail.ru.

Постоев Игорь Евгеньевич – студент института системной и программной инженерии и информационных технологий национального исследовательского университета «Московский институт электронной техники». E-mail: postoev.ie@gmail.com.

Поцейко Павел Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета им. Я. Купалы. E-mail: pahamatby@gmail.com.

Ракова Ксения Александровна – старший преподаватель кафедры «Высшая математика» Брянского государственного технического университета. E-mail: kseniya_senko@mail.ru.

Расулов Карим Магомедович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: kahrimanr@yandex.ru.

Ровба Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета им. Я. Купалы. E-mail: rovba.ea@gmail.com.

Савченкова Наталья Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: snn.smolgu@yandex.ru.

Садекова Екатерина Халиловна – старший преподаватель кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ». E-mail: EKSadekova@mephi.ru.

Самойлова Татьяна Аркадьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: tatsamoilova24@gmail.com.

Светлаков Алексей Владимирович – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: seferlian@mail.ru.

Сенькина Гульжан Ержановна – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информационных и образовательных технологий, декан физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: gulzhan.senkina@gmail.com.

Синицын Владимир Игоревич – главный научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН, заведующий отделением ФИЦ ИУ РАН. E-mail: vsinitsin@ipiran.ru.

Синицын Игорь Николаевич – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН. E-mail: sinitsin@dol.ru.

Суворов Артём Викторович – магистрант института системной и программной инженерии и информационных технологий национального исследовательского университета «Московский институт электронной техники». E-mail: artem.suvorov.96@mail.ru.

Суханова Анна Геннадьевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru.

Тимофеева Наталья Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: nat.timopheeva@yandex.ru.

Тихонова Ольга Вадимовна – доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: o_tikhonova@inbox.ru.

Федотов Роман Александрович – студент 3 курса ПМИ физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: romanfedotov6@yandex.ru.

Хоанг Ван Зунг – аспирант кафедры радиоэлектронных систем и комплексов МИРЭА – Российского технологического университета. E-mail: tuandung@mail.ru.

Ходченков Валерий Юрьевич – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tansdf@mail.ru.

Цветкович Диана Горановна – стажер-исследователь лаборатории фотоядерных реакций Института ядерных исследований РАН. E-mail: dianacve@inbox.ru.

Чепурной Евгений Анатольевич – адъюнкт Военной академии войсковой противовоздушной обороны ВС РФ им. Маршала Советского Союза А.М. Василевского. E-mail: chepurnoy202@gmail.com.

Черяпин Дмитрий Сергеевич – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: daymon_cher@mail.ru.

Чукляев Илья Игоревич – доктор технических наук, профессор кафедры Военной академии войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации имени Маршала Советского Союза А.М. Василевского. E-mail: smolrsu@mail.ru.

Шевченко Александр Леонидович – преподаватель Военной академии войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации имени Маршала Советского Союза А.М. Василевского. E-mail: smolrsu@mail.ru.

Шерстюков Владимир Борисович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки НИЯУ «МИФИ». E-mail: shervb73@gmail.com.

Шилин Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета. E-mail: a.p.shilin@gmail.com.

Шилягина Алла Михайловна – ассистент кафедры иностранных языков Смоленского государственного университета. E-mail: уру1101@gmail.com.

Шкуратова Александра Анатольевна – студентка физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: alexbelaya@mail.ru.

Юркова Алина Алексеевна – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: alinka.5.01@yandex.ru.

Яковлев Георгий Михайлович – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: darksmolensksky@gmail.com.

Ямченко Юрий Владимирович – аспирант МГТУ им. Н.Э. Баумана. E-mail: yamchenko.y.v@yandex.com.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики	3
<i>Абдуханов А.А., Тихонова О.В.</i> Моделирование каналов связи радиотелеметрической системы сбора аварийной информации	3
<i>Агасиев Т.А., Карпенко А.П.</i> Настройка алгоритмов параметрической оптимизации проектных решений при решении серийных задач автоматизированного проектирования	11
<i>Адукова Н.В.</i> Пакет ExactMPF для построения точной факторизации Винера-Хопфа матричных многочленов в СКМ Maple	20
<i>Бирюкова Т.К., Гершкович М.М.</i> Особенности компьютерной обработки данных с неточно известными параметрами в многоуровневых территориально-распределенных информационно-телекоммуникационных системах	28
<i>Бондарь А.А.</i> Исследование различных алгоритмов декодирования стираний для повышения помехоустойчивости цифровой системы связи	37
<i>Вишняков Р.Р.</i> Проектирование линейного тракта передающего модуля в программном комплексе RF Systems Designer	43
<i>Ворожцова Н.А., Вологдин С.В.</i> Применение машинного обучения для автоматизации процесса распознавания информации на фотоизображениях приборов учета электроэнергии	52
<i>Кравченко К.А., Благодатский Г. А., Копысов А. Н.</i> Автоматизация процесса консолидации результатов экспертиз по МАИ	56
<i>Кристалинский В.Р., Борисов В.Н.</i> Решение задач классификации в системе Wolfram Mathematica	62
<i>Медведева В.Ю., Ровба Е.А.</i> Компьютерное моделирование численных результатов приближения функции $ x ^{\alpha}$ интерполяционными полиномами по узлам Чебышева	67
<i>Суворов А.В., Андрианов А.М., Николаев К.С., Постоев И.Е.</i> Применение ИНС для распознавания патологических паттернов на ЭЭГ при дефиците исходных данных	74
<i>Суханова А.Г.</i> Применение кластерного анализа для формирования эффективного инвестиционного портфеля в системе Mathcad	80
<i>Хоанг Ван Зунг, Парамонов А.А.</i> Помехоустойчивость передачи сигналов OFDM в системах радиосвязи с ППРЧ в условиях деструктивного воздействия преднамеренных помех	84
<i>Ямченко Ю.В., Дубровкин Д.С.</i> Кластеризация пользователей информационной системы с использованием временных характерных признаков клавиатурного почерка	89

СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры	94
<i>Беляков П.В.</i> Применение цифровых антенных решёток для пеленгации беспилотных летательных аппаратов	94
<i>Борисов В.В.</i> Интеллектуальные методы и технологии мониторинга и прогнозирования состояния городской среды	98
<i>Гагарина Л. Г., Городилов А. В., Кононова А. И.</i> Эволюция крупнейших файлообменных сетей: рост и забвение	104
<i>Гончаров Е.И.</i> Пример применения сверток многомерных матриц на производстве	108
<i>Григорьева Г.М., Ходченков В.Ю.</i> О возможности построения эмулятора квантового компьютера с использованием ХММ регистров	113
<i>Гридчин Н.А.</i> Анализ технологий разработки пользовательских веб-приложений	117
<i>Захаров В.Н.</i> Об уточнении понятия «искусственный интеллект» и его применениях	122
<i>Ильин П.Л.</i> Эвристический алгоритм распределения деталей по станкам	130
<i>Кирикова А.В. Миронов А.И.</i> Использование хеш-индексного подхода для оптимизации последовательности запросов	136
<i>Класен Р.К.</i> Сравнение различных функций динамического сегментирования в Clusterix-подобных системах	141
<i>Мунерман В.И., Мунерман Д.В.</i> О соответствии моделей данных и моделей вычислений	146
<i>Парфенова Е.И.</i> Об одном алгоритме для узконаправленной системы автоматического проектирования	153
<i>Самойлова Т.А.</i> Исследование влияния искажения изображений на качество систем верификации лиц	158
<i>Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.</i> Инструментальное программное обеспечение вейвлет оптимального синтеза нестационарных систем по сложно-статистическому критерию	166
<i>Черяпин Д.С.</i> Сравнение систем учета рабочего времени	176
<i>Чукляев И.И., Чепурной Е.А., Шевченко А.Л., Пильненский В.П.</i> Способы и средства обнаружения и предотвращения информационно-технических воздействий	180
<i>Яковлев Г.М.</i> Введение в применение параллельного программирования для генерации изображений в стиле ASCII-art	189
СЕКЦИЯ 3. Математика и её приложения	195
<i>Адуков В.М., Адукова Н.В.</i> О гибридном методе построения канонической факторизации Винера-Хопфа	195

<i>Банару Г.А., Банару М.Б.</i> О 6-мерных G_1 - и G_2 -подмногообразиях алгебры октав	202
<i>Беднаж В.А., Нестеров А.С.</i> Линейные функционалы в пространствах Бергмана	207
<i>Благодатский Г.А., Карачев Е.В.</i> Разработка информационной системы для проведения иерархических экспертиз по методу анализа иерархий	212
<i>Вувуникян Ю.М.</i> Методы построения импульсных и спектральных характеристик системных операторов, порожденных нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями	221
<i>Евдокимова Г.С.</i> Эффективность работы системы обслуживания с отказами	226
<i>Емельченков Е.П.</i> Инцидентностные структуры с преломляющимися прямыми	231
<i>Зуев А.М.</i> Свойства функции суммы цифр натурального числа, заданной на арифметической прогрессии	234
<i>Карачик В.В.</i> О функциях Грина задач Навье и Рикье-Неймана для бигармонического уравнения в шаре	240
<i>Кирьяцкий Е., Кирьяцкий Э.</i> О свойствах одного линейного дифференциального оператора	245
<i>Кирьяцкий Е., Кирьяцкий Э.</i> Об одном операторе, заданном на классе однолистных в полуплоскости функций	251
<i>Комиссарова Д.А.</i> Устойчивость разностных уравнений Вольтерра в свертках	256
<i>Костин А. Б., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.</i> Об аппроксимации числа π^2	261
<i>Курицын С.Ю., Расулов К.М.</i> О решении обобщенной задачи типа Римана для метааналитических функций второго типа в единичном круге	264
<i>Матюхин В.И., Кирьяцкий Е.Е., Кирьяцкий Э.Г.</i> О существовании и единственности решения геометрической задачи	270
<i>Михалёва Т.И., Расулов К.М.</i> О неустойчивости решений задачи типа Карлемана для квазигармонических функций при малых изменениях контура	277
<i>Нагорная Т.Р., Расулов К.М.</i> О разрешимости однородной задачи Дирихле в классах обобщенных гармонических функций второго порядка	283
<i>Охлупина О.В., Ракова К.А.</i> Об интегральных операторах в классах Гёльдера и Бесова	292
<i>Поцейко П.Г., Ровба Е.А.</i> О суммах Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье-Чебышёва и приближениях некоторых функций	300
<i>Садекова Е.Х.</i> О задаче приближения ограниченных функций рациональными функциями в хаусдорфовой метрике	321
<i>Шилин А.П.</i> Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с коэффициентами частного вида	326

СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании	331
<i>Ассонова Н.В.</i> Сравнение интерактивности и мульти-медийности электронных форм учебников для начальной школы по разным предметам	331
<i>Богданова Н.Н., Федотов Р.А.</i> Решение систем уравнений с параметрами с помощью СКМ Wolfram Mathematica	337
<i>Борисова И.Н., Гарипов И.Б.</i> Реализация принципа наглядности при изучении интегрального исчисления в школьном курсе математики	341
<i>Дюндин А.В., Савченкова Н.Н.</i> Организация текущего и промежуточного контроля знаний студентов в дистанционном обучении	346
<i>Емельченков Е.П., Шилягина А.М.</i> О представлении данных. Визуализация	352
<i>Козлов С.В., Светлаков А.В.</i> Теория формальных грамматик и ее применение	358
<i>Козлов С.В., Шкуратова А.А.</i> Оценка качества дистанционного обучения средствами образовательных платформ	365
<i>Ксенофонтов С.А., Перельман Н.Р.</i> Анализ ситуаций в условиях неопределенности и риска средствами MS Excel при обучении студентов-экономистов	369
<i>Кузнецова А.С.</i> Методы психологической саморегуляции функционального состояния как часть психологического сопровождения учебной деятельности студентов и слушателей образовательных программ	374
<i>Кулаков С.В., Дроздов Ю.Б., Крисенко Ю.Ю.</i> Тренажеры для подготовки персонала: назначение и возможности	378
<i>Сенькина Г.Е.</i> Проектирование инновационных образовательных программ на физико-математическом факультете: постановка проблемы	384
<i>Тимофеева Н.М.</i> О цифровизации образовательного процесса в условиях полного его переноса в онлайн	389
<i>Юркова А.А., Киселева О.М.</i> Разработка информационной системы «Зачисление абитуриентов» средствами C#	395
Сведения об авторах	400

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 22

Издательство Смоленского государственного
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко, И.В. Марусева*

Подписано к печати 21.04.2020. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. п. л. 25,68. Уч.-изд. л. 25,68. Тираж 120 экз.
Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета
ИП Суркова Н.Н.
214000 г. Смоленск, ул. Б. Советская, д. 12/1
Тел.: 8-951-697-22-23