



**Системы
компьютерной
математики
и их приложения**

Выпуск 15

Смоленск 2014

Министерство образования и науки РФ
Смоленский государственный университет

Системы компьютерной математики и их приложения

Материалы XV Международной научной конференции

Выпуск 15

Смоленск
Издательство СмолГУ
2014

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета СмолГУ*

Редакционная коллегия: *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *И.Б. Болотин*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *В.П. Дьяконов*, д-р техн. наук, проф.; *Е.П. Емельченков*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Н.М. Тимофеева*, канд. пед. наук, доц.

Системы компьютерной математики и их приложения:
С 409 материалы XV Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. – Вып. 15. – 318 с.
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XV Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 16–18 мая 2014 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

© Авторы, 2014
© Издательство СмолГУ, 2014

СЕКЦИЯ 1

Системы компьютерной математики

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ОТКЛОНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ ДАТЧИКА ОТ ЕГО НОМИНАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ

А.Д. АБРАМЕНКОВ

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск,
e-mail: radiotema67@hotmail.com

УДК 621.317.335.2

Ключевые слова: *емкость, AD7745, микроконтроллер.*

В статье проведен сравнительный анализ существующих методов и схем измерения отклонения значения электрической емкости датчика от номинального значения, обеспечивающих эффективное использование диапазона преобразования измерительных устройств.

В абсолютном большинстве задач контроля и управления технологическими объектами с использованием емкостных датчиков различного назначения информация несет не абсолютное значение их электрической емкости, а его отклонение от некоторого номинального значения. В последнее время ряд фирм и отдельные разработчики предлагают оригинальные решения построения измерителей отклонения электрической емкости датчиков относительно некоторого эталонного значения. Прежде всего, следует выделить аналого-цифровые преобразователи приращения емкости с использованием сигма-дельта модуляции [1], которые реализованы в виде законченных интегральных микросхем, а среди них наибольшее распространение получили AD7745/AD7746 [2] и AD7747 [3].

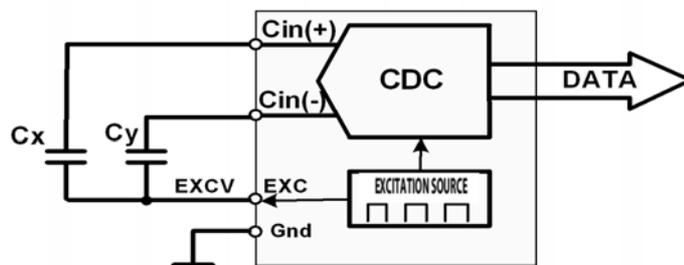


Рис. 1. Схема включения двух емкостных датчиков в измерительных устройствах на базе микросхем AD7745

Микросхемы позволяют с высоким разрешением (эффективная разрешающая способность до 21 разряда) с точностью до ± 4 fF измерять приращение до ± 4 pF относительно эталонного значения емкости от 0 до 17 pF.

Таким образом, представленные на рынке микросхемы позволяют решить большинство технических задач, связанных с контролем приращений электрической емкости емкостных датчиков. Однако большое количество используемых навесных элементов создает определенные трудности для обеспечения высокой точности измерений. Используемые в рассмотренных микросхемах принципы преобразования могут быть успешно реализованы на базе современных микроконтроллеров.

Литература

1. Брихт М. Преобразователи емкости в цифровой код на основе сигма-дельта модулятора // Компоненты и технологии. - 2006. - №1. - С. 34-36.
2. 24-Bit Capacitance-to-Digital Converter with Temperature Sensor AD7745/AD7746 Analog Devices. – URL: <http://www.analog.com>.
3. 24-Bit Capacitance-to-Digital Converter with Temperature Sensor AD7747 Analog Devices. – URL: <http://www.analog.com>.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MAPLE ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В.М. АДУКОВ, А.С. ФАДЕЕВА

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
e-mail: vicmikhad@mail.ru

УДК 519.71

Ключевые слова: *дискретная линейная стационарная конечномерная динамическая система, дробная факторизация, минимальная реализация, алгоритм минимальной реализации.*

В статье описывается реализация в среде Maple нового алгоритма построения минимальной реализации дискретной линейной стационарной конечномерной динамической системы. Алгоритм основан на методе существенных многочленов последовательности матриц.

Рассматривается линейная конечномерная стационарная динамическая система Σ с дискретным временем, эволюция которой описывается системой разностных уравнений

$$x_{j+1} = Ax_j + Bu_j,$$

$$y_j = Cx_j.$$

Здесь (A, B, C) – тройка действительных матриц размером $n \times n, n \times q, p \times n$ соответственно.

Вся информация об отображении вход-выход, осуществляемом системой Σ , содержится в матрицах G_k (*марковских параметрах системы*), которые могут быть определены по реакции системы на единичные входные импульсы. Задача реализации состоит в отыскании для заданной бесконечной последовательности G_k матриц размером $p \times q$ тройки матриц (A, B, C) подходящих размеров такой, что $CA^{k-1}B = G_k, k = 1, 2, \dots$.

Эта тройка является *реализацией* последовательности G_k (системы Σ). Если порядок матрицы A будет при этом наименьшим возможным $n = \delta$, то реализация называется *минимальной*. Хорошо известен классический алгоритм Хо решения задачи минимальной реализации. В работе [1] предложен новый алгоритм построения минимальной реализации, основанный на методе существенных многочленов [2] и полиномиальных моделях Фурмана [3].

В данной работе описывается реализация этого алгоритма в пакете Maple. Для решения задачи созданы процедуры ExactEssPoly, ApproxEssPoly, MinimalRealization. Процедуры ExactEssPoly, ApproxEssPoly предназначены для нахождения индексов и существенных многочленов последовательности матриц в условиях точных или приближенных вычислений соответственно.

Алгоритм нахождения индексов и существенных многочленов требует отыскания ранга и ядра для некоторого семейства теплицевых матриц [2]. При вычислениях в рациональной арифметике применяются стандартные средства пакета LinearAlgebra. При вычислениях с плавающей запятой ввиду неустойчивости задачи используется сингулярное разложение матриц (SVD), на котором основаны процедуры ApproxRank и ApproxNullSpace, входящие в ApproxEssPoly.

В теореме 3 работы [1] приведены формулы для нахождения A, B, C по индексам и существенным многочленам последовательности матриц $G_1, \dots, G_m, m \geq 2\delta$. Процедура MinimalRealization осуществляет построение минимальной реализации по этим формулам. Ей передается два

параметра: число марковских параметров m и матрица $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_m \end{pmatrix}$. Если

все элементы G имеют тип rational, то для нахождения индексов и существенных многочленов применяется процедура ExactEssPoly, в противном случае – ApproxEssPoly. Процедура MinimalRealization возвращает три матрицы A, B, C , задающие минимальную реализацию системы Σ .

Литература

1. Адуков В.М. О задаче минимальной реализации // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». - 2013. - Т. 6, №3. - С. 5–17.
2. Adukov V.M. Generalized Inversion of Block Toeplitz Matrices // Linear Algebra Appl. - 1998. - V. 274. - P. 85–124.
3. Fuhrmann P.A. Functional Model in Linear Algebra // Linear Algebra Appl. - 1992. - V. 162/164. - P. 107–151.

ПОСТРОЕНИЕ В SIMULINK ПРОТОТИПА МОДЕЛИ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ ДЛЯ РЕЖИМНОГО ТРЕНАЖЕРА ДИСПЕТЧЕРА С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

А.М. БЫЧКОВА, Е.Д. КАРАСЕВ, Д.В. НИКИФОРОВ

ЗАО «Монитор Электрик», Смоленский филиал,
e-mail: Evgeny.Karasev@monitel.com, Anastasia.Bychkova@monitel.com,
Dmitry.Nikiforov@monitel.com

УДК 621.31

Ключевые слова: *алгебро-дифференциальные системы уравнений, режимный тренажёр диспетчера, энергосистема, Simulink.*

Описаны принципы построения прототипа математической модели энергосистемы для режимного тренажёра диспетчера в среде Simulink, учитывающей тепловые и электромеханические переходные процессы и основанной на поочерёдном балансировании режима электрической сети и решении дифференциальных уравнений разными методами для разных компонентов системы.

Режимный тренажёр должен имитировать поведение энергосистемы в течение противоаварийной или режимной тренировки на протяжении нескольких часов в темпе времени, близком к реальному. Частоты изменения переменных состояния в общей системе уравнений модели отличаются на 3–4 порядка. Интегрирование на отдельных промежутках времени приходится вести с шагом 20–30 мс. Объект моделирования сложен как по номенклатуре оборудования, так и по числу элементов. Так, например, энергосистема Сибири представляется электрической сетью из 4,5 тыс. расчётных узлов и почти 0,5 тыс. генерирующих единиц. Таким образом, необходимо интегрировать систему из десятков тысяч алгебро-дифференциальных уравнений.

Процедуры интегрирования должны обладать высоким быстродействием, чтобы поведение энергосистемы участникам тренировки казалось естественным. Алгоритмы должны быть

исключительно надёжными, поскольку отказ во время тренировки ведёт к её срыву, а на её организацию могут уходить месяцы. При этом жёстких требований к точности моделирования не ставится – шаг интегрирования можно выбирать не столько из условий точности, сколько из условий численной устойчивости.

Воплощение в программный код стандартных методов для систем такой сложности невозможно без тщательной проработки на моделях-прототипах. Удобным исследовательским полигоном оказался Matlab с визуальным конструктором Simulink, богатой библиотекой моделей типовых элементов энергосистемы, встроенными средствами решения уравнений динамики и возможностью расширения функциональности при помощи пользовательского программного кода. В статье описаны общие принципы построения модели-прототипа.

Стандартный механизм Simulink предусматривает использование единого штатного метода решения уравнений динамики, который не учитывает специфику объекта моделирования. Такой подход для режимного тренажёра неприемлем.

Выполнение разнообразных переключений в энергосистеме приводит к возникновению быстрых электромеханических колебаний. Их расчёт неявными методами требует многократного решения системы алгебраических уравнений очень высокой размерности с обилием нулей на диагонали матрицы Якоби. Такие системы приходится решать итеративными методами. Действия диспетчеров по ходу тренировки достоверно предугадать нельзя, и поэтому не удаётся гарантировать скорую сходимость итераций за счёт тщательной предварительной настройки модели. Медленная сходимость при дефиците производительности будет восприниматься как эпизодическое замирание или как неадекватная заторможенность. Расходимость может вообще сделать невозможным продолжение тренировки.

Предпочтительным является поочерёдный расчёт режима электрической сети и решение системы дифференциальных уравнений, по аналогии с построением модели длительной динамики [1]. Общая система дифференциальных уравнений разбивается на отдельные подсистемы, расчёт для которых ведётся явными методами независимо. Воздействия со стороны электрической сети при расчете дифференциальных уравнений предполагаются неизменными. Результатом решения дифференциальных уравнений является вектор токов воздействия на электрическую сеть. Далее режим сети балансируется надёжным Z-методом, не требующим итеративного решения систем линейных уравнений с возможными нулями по диагонали в матрице коэффициентов. В итоге формируется вектор воздействий сети на динамические элементы для следующего шага интегрирования.

Учет влияния электрической сети на инерционные подсистемы, описывающие динамику длительных переходных процессов [1], производится через определенные промежутки модельного времени (порядка 0,2 с).

Сконструированная модель Simulink верхнего уровня состоит из двух атомарных блоков. Один блок реализован в виде S-функции, рассчитывающей режим сети, а второй – в виде маскированной подсистемы, внутри которой собрана схема сети с использованием метафоры электрической цепи.

К этой схеме подключено электросиловое оборудование. Большая часть блоков сконструирована по стандартной технологии Simulink из библиотечных элементов. Обмен данными между блоками и расчётным состоянием электрической сети, хранящимся в рабочей области проекта, организован через вспомогательные блоки с S-функциями.

К электрической сети в модели Simulink не присоединялись библиотечные источники. За счёт этого удалось отключить стандартный механизм моделирования и инициализации переменных состояния с расчётом потокораспределения по стандартной схеме. Расчёт начального режима сети был сведён к процедуре условной гладкой оптимизации с представлением PV-узлами синхронных машин и устройств FACTS (при наличии у последних астатических регуляторов напряжения).

Для модели Simulink как единого целого требуется указать единый метод решения уравнений динамики. Оптимальное сочетание скорости, надёжности и точности обеспечил простейший явный метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности. Низкий оптимальный порядок объясняется обилием точек излома у функции f решаемой системы $dx/dt = f(x, y, t)$ из-за многочисленных режимных, технологических и конструктивных ограничений на значения переменных состояния.

Для отдельных динамических элементов оказалось полезным и необходимым использовать иные методы интегрирования. Так, для статических тиристорных компенсаторов и статических синхронных компенсаторов дифференциальные уравнения на каждой стадии шага интегрирования решаются аналитически. Это удалось сделать, поскольку динамические свойства устройств FACTS были учтены смещением их вольт-амперных характеристик по итогам очередного шага интегрирования, а в пределах шага входные сигналы тока и напряжения принимались неизменными. Сами же дифференциальные уравнения для этих устройств линейны, а их вид и номенклатура зависят от законов регулирования и активности тех или иных ограничений.

Пересчёт значений переменных состояния для таких элементов осуществляется в специальной функции отклика. Таким образом, хотя формально метод интегрирования для модели Simulink был указан единый и штатный, фактически интегрирование для некоторых

элементов осуществлялось иными методами. Метод, указанный в настройках Matlab, фактически используется только для решения дифференциальных уравнений библиотечных элементов с учётом способа их соединения на схемах Simulink. В целом удалось реализовать поочерёдное решение дифференциальных уравнений и балансирование режима электрической сети тем методом, который предполагалось использовать в режимном тренажёре диспетчера, а не всецело штатными методами Simulink.

Широкие возможности Simulink'a позволили сконструировать удобный полигон для испытания специфических методов решения уравнений динамики, которые в дальнейшем были реализованы в режимном тренажёре диспетчера Финист, используемом в настоящее время для проведения противоаварийных и режимных тренировок в подразделениях Системного Оператора России и некоторых странах зарубежья.

Литература

1. Карасёв Е.Д., Никифоров Д.В., Фёдоров О.А. Принципы построения модели длительной динамики энергосистемы в среде MATLAB // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2008. – Вып. 9. – С. 55–58.

ПАКЕТ ПРОГРАММ ОСНАЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ РАЗМЕРНОСТИ $N = 2, 3, 4$

В.А. БУШКОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e-mail: dakra@inbox.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: *метрический тензор, космология, гравитация, геодезические трубки, массивные частицы, псевдоевклидово пространство.*

В работе представлены возможности использования авторского пакета программ для проведения исследований в римановой геометрии, оптике и теории гравитации.

Пакет программ *Geodesic_lines* является приложением к математическому пакету Maple (версии 13-15) и позволяет полностью автоматизировать процесс построения геодезических линий и их трубок в трехмерных и четырехмерных римановых пространствах по заданной метрике.

Процедура этой библиотеки *Geodesic(Coord, S, S1, P, NewCoord, Inits, N, m, gr)* при соответствующем выборе параметров позволяет создавать самые разнообразные 3d-модели геодезических, включая динамические

модели. Здесь *Coord* – список внутренних координат поверхности и период изменения каждой из этих координат; *S* – канонический параметр кривой; *S1* – интервал изменения параметра *S* в формате $[a,b]$; *P* – метрика; *NewCoord* – список новых координат; *Inits* – координаты начальной точки *M0* геодезической и направляющего вектора *V0* геодезической в этой точке; *N* – число кадров анимации; *m* – параметр, принимающий значения 1 (в случае, когда геодезическая оканчивается на заданной границе поверхности, определяемой *Coord*) или 0 (в случае, когда геодезическая выходит за пределы поверхности); *gr* – параметр, принимающий значения: *graphic* – для вывода графика, *animate* – для вывода анимации.

Для построения световых лучей и их трубок разработана процедура *optica*. Параметры процедуры *optica(Coord, S, S1, G, M0, V0, Init, N, a, graf)*: *Coord* – список координат; *S* – канонический параметр – оптическая длина пути; *S1* – период изменения параметра *S* (число шагов, т.е. $S = 0...S1$); *G* – метрика (тензор преломления, связанный с тензором диэлектрической проницаемости); *M0* – координаты центральной точки *M0* геодезической трубки; *V0* – координаты начального направляющего вектора *K0* трубки; *Init* – определяет максимальные и минимальные координаты, в пределах которых график будет отображаться на экране; $A = [xmin..xmax]$, $B = [ymin..ymax]$, $C = [zmin..zmax]$, дает поле обзора получаемого изображения; *N* – количество кадров анимации; *a* – начальный радиус трубки геодезических линий (лучей); *graf* – параметр, принимающий значения: *graphic* – для построения графика, *animate* – для построения анимации.

На рисунках 1 и 2 представлены примеры геодезических трубок световых лучей для различных тензоров преломления.

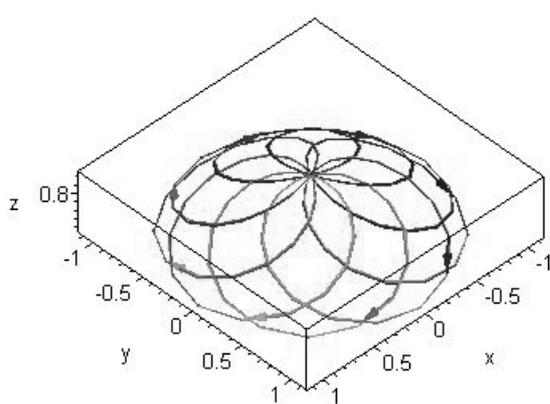


Рис. 1

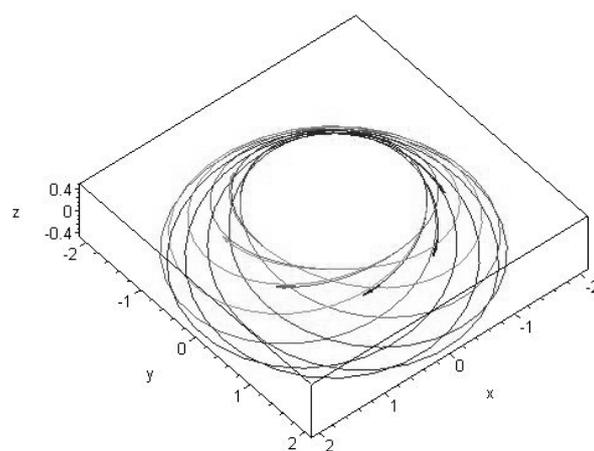


Рис. 2

Пробные частицы, как и лучи света, движутся в гравитационном поле по геодезическим линиям псевдориманова пространства, метрика которого, g_{ik} , определяется уравнениями Эйнштейна. В математической

модели, таким образом, добавляется четырехмерность пространства и фактор массы частицы: массивные частицы движутся по времениподобным геодезическим, безмассовые – по изотропным. Поэтому возможно изобразить лишь двумерную или трехмерную проекцию геодезической линии. Это позволяет сделать команда указанного пакета *geodesic4d*, которая также может быть реализована как в графической, так и в динамической форме.

Автоматизированные программные комплексы позволяют проводить исследования геодезических и их трубок в римановых евклидовых и псевдоевклидовых пространствах размерности 2, 3, 4. Они находят широкое применение во многих областях: нелинейных динамических системах, теории поля, дифференциальной и римановой геометрии, оптике.

Литература

1. Синг Дж. Классическая динамика. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 1963. – 448 с.

2. Бушкова В.А., Игнатъев Ю.Г. Программный комплекс автоматизированного нахождения и построения геодезических линий и геодезических трубок в четырехмерных (псевдоевклидовых) римановых пространствах по заданной метрике и их оснащенной динамической визуализации с автоматической оптимизацией графических параметров в системе компьютерной математики Maple: св. о гос. рег. прог. для ЭВМ РФ. № 2013613444 от 23.04.13.

МЕТОДЫ СНИЖЕНИЯ ПИК-ФАКТОРА СИГНАЛА OFDM. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В.М. ВИКУЛОВ

МГТУ МИРЭА, г. Москва,
e-mail: vulfgaar@list.ru

УДК 621.396.49

Ключевые слова: *сигнал OFDM, пик-фактор, MatLab, MS VisualStudio 2013.*

В статье рассматриваются известные методы снижения пик-фактора сигнала OFDM и предлагается новый метод. Программная модель строится в пакете MS VisualStudio 2013 на языке C++ с последующим импортированием данных в среду MatLab для построения графиков и оценки полученных результатов.

Аббревиатура OFDM расшифровывается как Orthogonal frequency-division multiplexing. В русскоязычной литературе встречается несколько различных переводов, несущих, в принципе, один смысл: OFDM - это механизм мультиплексирования (уплотнения) спектра посредством ортогональных поднесущих.

В спецификациях новейших телекоммуникационных проводных и беспроводных стандартов всё чаще можно встретить использование OFDM технологии. Высокую популярность обеспечивают диктуемые временем требования к архитектурам радиосистем. OFDM механизм обладает рядом свойств, позволяющих удовлетворять тенденциям современности. Разработанная ещё в 60-х годах прошлого века, технология стала доступна для применения лишь относительно недавно [1; 2]. Толчком к этому стало улучшение производительности микропроцессоров и ПЛИС и, как следствие, возможность быстрой обработки больших потоков данных.

Сигнал OFDM имеет несколько положительных свойств, поэтому и вызывает большой интерес у радиоспециалистов по всему миру. Но у него есть и недостатки. Основной из них – большие показатели пиковой мощности сигнала, которые могут появляться случайно. Данное свойство ограничивает использование OFDM сигнала в условиях, когда передатчик имеет жёсткие мощностные ограничения.

Проблема борьбы с высокими значениями пик-фактора (отношения пиковой мощности к средней) OFDM сигнала вызывает большой интерес. Существуют некоторые методы его снижения, основанные на введениях избыточности в передаваемое сообщение.

В данном сообщении предложен новый метод и приведены его испытания на модели, доказывающие улучшение показателей такого сигнала.

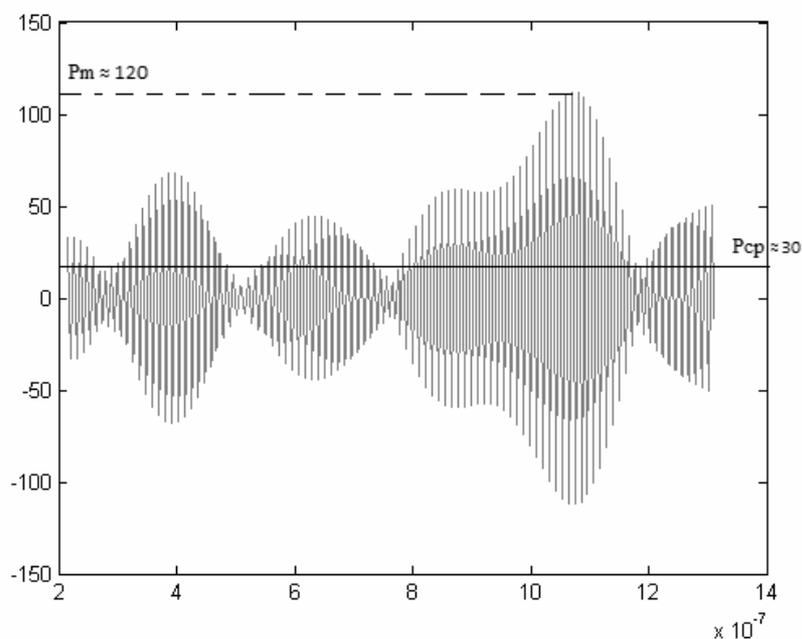


Рис. 1. Временное представление сигнала OFDM

На рисунке 1 показана реализация сигнала OFDM без уменьшения пик-фактора. Исследование показало, что, используя предложенный

метод снижения пиковой мощности, можно добиться снижения пик-фактора в 2–3 раза.

Вся модель численно реализована в пакете MS VisualStudio 2013 на языке C++. Графики строились в пакете MatLab по данным, импортированным из MS VS2013.

Литература

1. Ипатов В.П. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов, М.: Техносфера, 2007. – 488 с.
2. Шахнович И.В. Современные технологии беспроводной связи. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Техносфера, 2006. – 288 с.

ОБЛАЧНАЯ СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ WOLFRAM ALPHA

В. П. ДЬЯКОНОВ

Военная академия ПВО ВС РФ, г. Смоленск,
e-mail: vpdyak@yandex.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: *облачные технологии, Mathematica, Wolfram, math keyboard, 2D-graphics, 3D-graphics, regression, signals, walelets.*

На примере мобильной версии программы Wolfram Alpha показаны возможности облачных математических вычислений с применением смартфонов Nokia.

Многие мечтают о смартфоне хотя бы с основными возможностями мощной системы символьной математики Mathematica фирмы Wolfram Research. Новый путь в реализации этой мечты - математика в облаке Интернета с мобильным доступом - реализован в программе Wolfram Alpha.

Во время стажировки автора на фирме Wolfram (США), еще в 2000 году, в ней шла интенсивная подготовка к выпуску версий мощной системы компьютерной алгебры Mathematica 5/6/7/8 [1-4] и, наконец, Mathematica 9. Эти программы получили всемирную известность. Но специалисты фирмы во главе с S. Wolfram в один голос говорили, что фирма готовится к выпуску нескольких новых программных продуктов для Интернета. Вначале в Интернете появился всемирный «Интегратор», вычисляющий сложнейшие интегралы с помощью установленной на сервере фирмы системы Mathematica. Затем появилась Web Mathematica.

В 2009 году вышла первая версия необычного программного продукта Wolfram Alpha (см. www.wolframalpha.com), а затем и

профессиональная версия Wolfram Alpha Pro. Была создана непрерывно пополняемая обширная база данных по многим отраслям науки, техники, музыки, административной и общественной жизни, прежде всего по математике. Она составила основу решающей части программы Wolfram Alpha.

Эта небольшая программа выдает ответы из этой базы знаний на любые сложные научные и математические запросы в режиме онлайн. В ходе этого сервер корпорации Wolfram решает математические и иные задачи по заданию пользователя, которое формируется в строке ввода (запроса) в словесной или математической форме, как в обычном браузере.

Облачная система Wolfram Alpha уже проникла в смартфоны фирмы Apple с операционной системой iOS и Samsung с Android. А в январе 2014 года в магазине Nokia появилась бесплатная версия этой программы для смартфонов и планшетов с операционной системой Windows 8 для мобильных устройств под названием Math Keyboard for Wolfram Alpha. Многие думают, что это очередной калькулятор, а между тем приложение под этим, не совсем точным, названием обеспечивает полный доступ к мобильной и стандартной системам Wolfram Alpha.

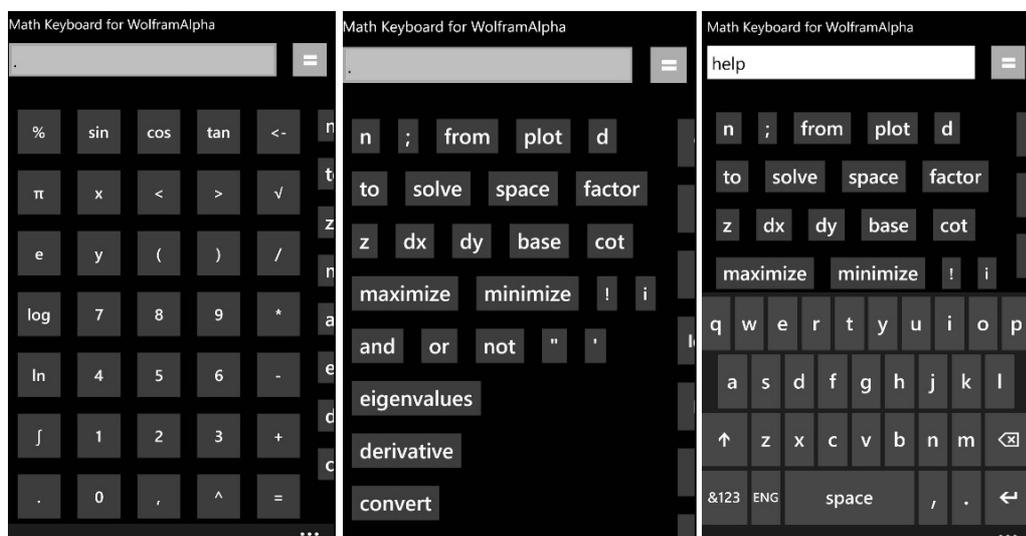


Рис. 1. Окна приложения Math Keyboard for Wolfram Alpha

После включения смартфона на его экране появляется начальная часть основного окна (рис. 1) с множеством плиток, которые ассоциируются с загруженными приложениями (программами).

Система Wolfram Alpha обеспечивает диалог с пользователем на естественном (пока английском) языке. Она «прощает» пользователю многочисленные неточности, которые недопустимы в большинстве систем компьютерной математики. Например, вы можете ввести число с точкой или запятой, отделяющей целую часть от дробной, пропустить у

функции аргумент (он будет по умолчанию x), вместо квадратных скобок использовать круглые и даже допускать в вводимых словах орфографические ошибки.

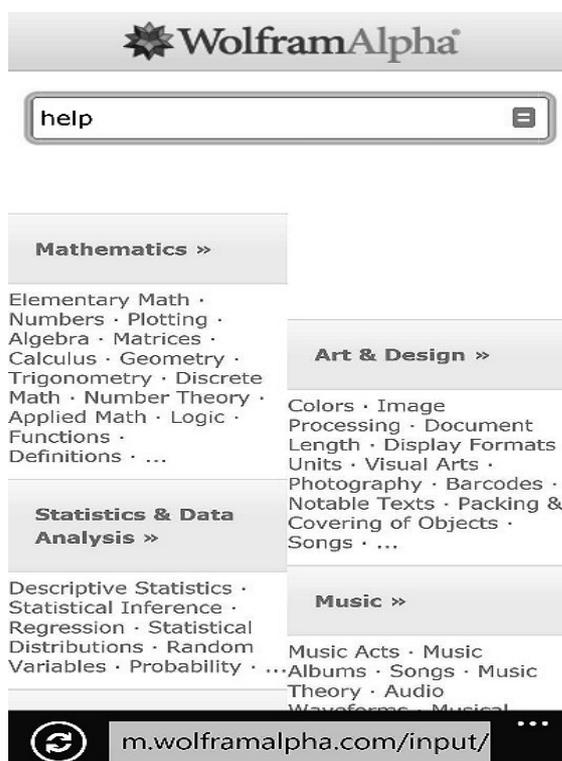


Рис. 2. Часть списка тематического каталога примеров

Если вводимое слово или группа слов имеют общепринятый математический смысл, то Wolfram Alpha сообщает пользователю не только этот смысл, но и дает массу информации об этом слове. Введите, к примеру, слово «sin» (нажав соответствующую клавишу или побуквенно), и программа выдаст детальные данные об этой функции. Тут и графики функции синуса с разными масштабами, и области определения, и альтернативные выражения, и пример разложения функции в ряд Тейлора, и множество дифференциальных и интегральных представлений. И так для любой элементарной или специальной математической функции, уравнения или математического понятия.

Для вывода справки и каталога примеров введите в строку ввода слово «help» (помощь), или «examples» (примеры), или, наконец, просто вопросительный знак. В ответ система выдаст длинный список примеров, начало которого представлено на рисунке 2.

Wolfram Alpha неплохо разбирается с сотнями различных функций. Имена некоторых из них (далеко не всех) нанесены на клавиши клавиатуры этой системы. Например, функции `minimize` и `maximize` находят минимум и максимум выражения, набранного в строке ввода после них, строят графики выражения и помечают красной точкой

минимум или максимум. Различные типы 2D-графиков представлены на рисунке 3. Разумеется, возможно и построение 3D-графиков различного типа (см. рис. 3в).

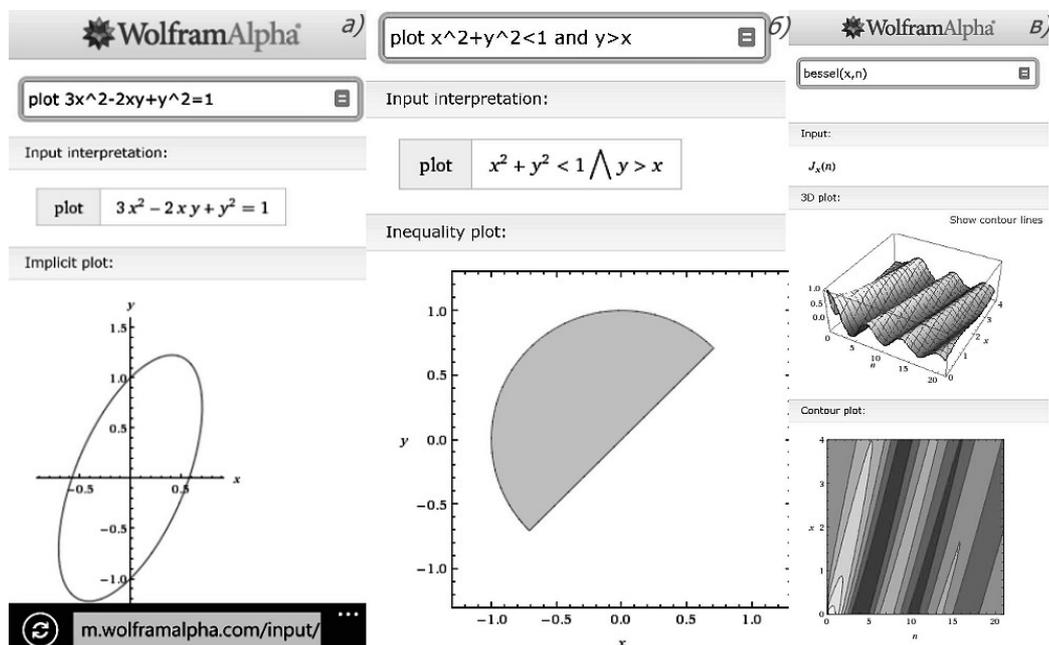


Рис. 3. Построение графика эллипса (а), функции с ограничениями (б) и функции Бесселя (в)

Для численного решения нелинейных уравнений, которые обычно не имеют аналитического решения, часто используются методы Ньютона различного порядка. Забыли, что это такое? Wolfram Alpha напомнит пользователю об этом. Это можно проверить на примере поиска корня уравнения $x \cdot \cos(x) = 0$. Программа выдает 4 экрана с текстами, графиками и математическими формулами.

С легкостью вычисляет Wolfram Alpha символьные и числовые значения выражений, их производных, неопределенных и определенных интегралов пределов. В практике научных вычислений важное место занимает обработка данных эксперимента. Особенно часто используется регрессия, которая позволяет в облаке точек эксперимента построить прямую или более сложную линию, удовлетворяющую критерию метода наименьших квадратов (рис. 4).

На рисунке 5 показаны примеры решения нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (а, б) и линейного второго порядка (в). Представленные уравнения имеют аналитические решения, и для них строятся временные диаграммы решения и фазовые портреты.

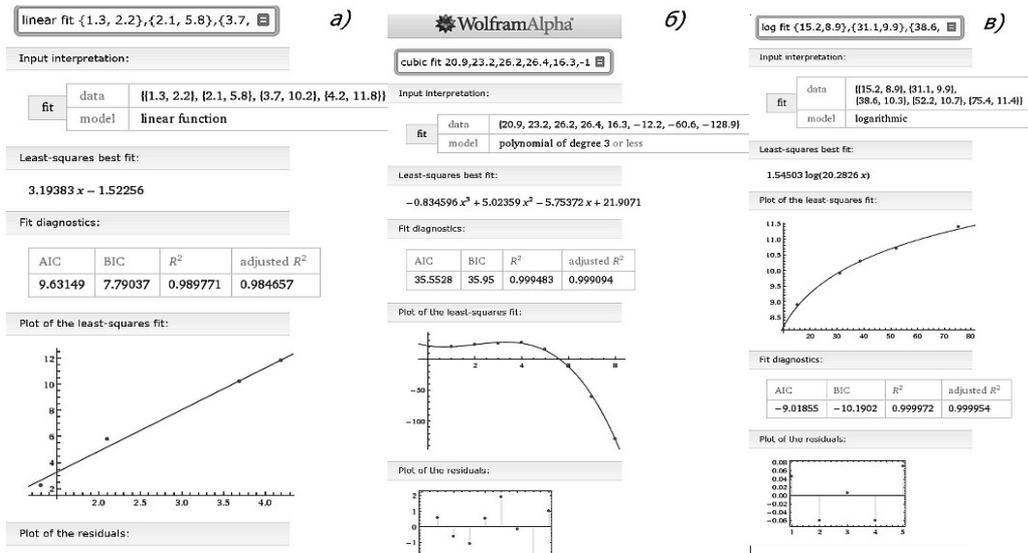


Рис. 4. Линейная (а), полиномиальная (б) и нелинейная логарифмическая регрессия

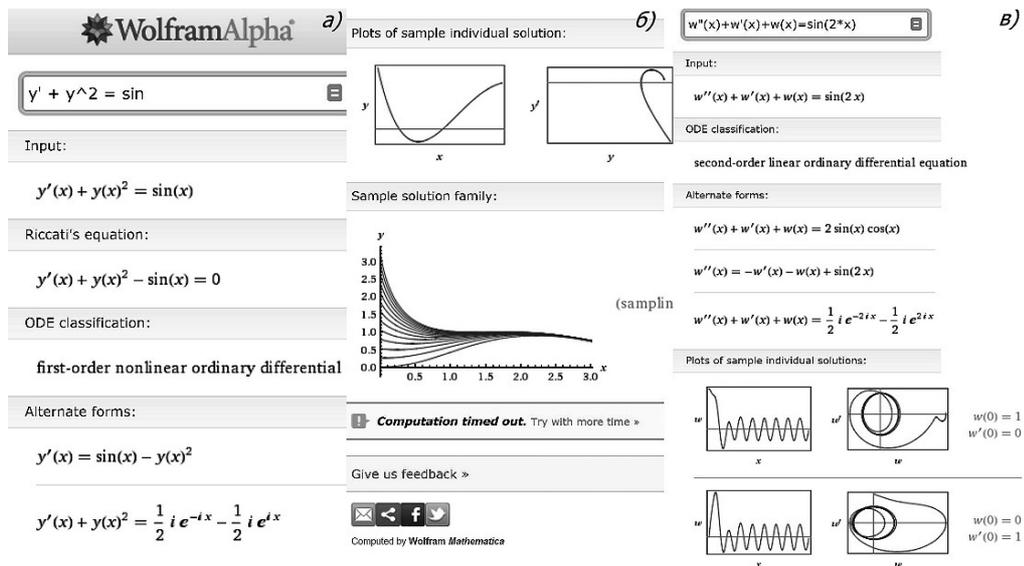


Рис. 5. Решение дифференциальных уравнений с построением временных диаграмм и фазовых портретов

Большинство нелинейных дифференциальных уравнений не имеет аналитического решения и они решаются численными методами.

Все ли есть в Wolfram Alpha? Дифференциальные уравнения второго порядка, например, уравнение Ван-дер-Поля, описывающее процесс нарастания автоколебаний у LC-генератора на электронной лампе или транзисторе с квадратичной передаточной характеристикой? На рисунке 6 даны три примера решения уравнения Ван-дер-Поля при трех значениях параметра μ , заданных числами (перед открывающей круглой скобкой левой части уравнения). При больших μ

дифференциальное уравнение становится жестким, что, впрочем, не мешает его решению.

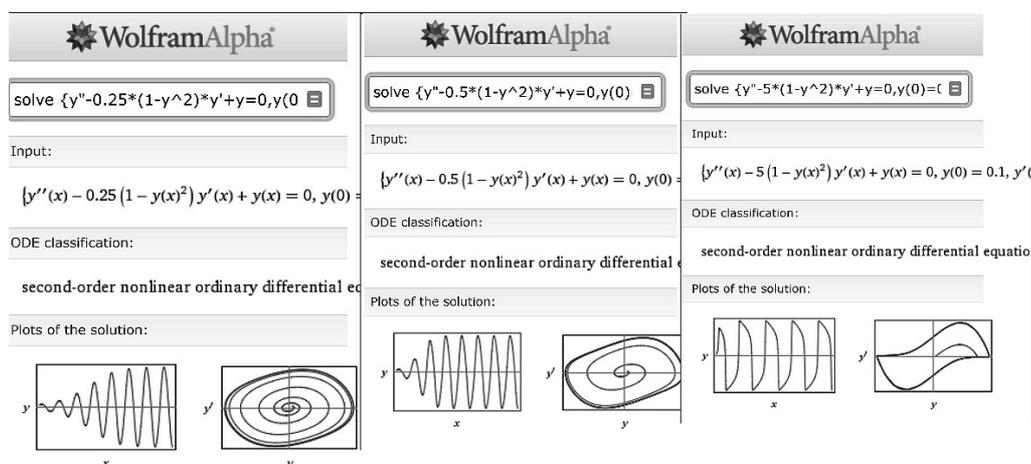


Рис. 6. Численное решение нелинейного дифференциального уравнения Ван-дер-Поля при трех значениях параметра нелинейности μ : 0,25 (а), 0,5 (б) и 5 (в)

Обработка сигналов и преобразования Фурье также доступны системе Wolfram Alpha. Новации в обработке сигналов – вейвлеты [5] – тоже не чужды Wolfram Alpha. Для этого надо зайти с запросом «wavelets» в Wolfram Alpha и активизировать гиперссылки More details (Больше деталей). Вы попадете в проект MathWorld, где обнаружите массу примеров на применение вейвлетов и преобразований Фурье.

Литература

1. Дьяконов В.П. Энциклопедия компьютерной алгебры: в 2 томах. - М.: ДМК-Пресс, 2009.
2. Дьяконов В.П. Mathematica v.5.1/v.5.2/v.6 в математических и научно-технических расчетах. -2-е изд., доп. и перераб. - М. Солон-Пресс, 2008.
3. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полный самоучитель. - М.: ДМК-Пресс, 2012.
4. Дьяконов В.П. Задание, анализ и обработка сигналов в системе Mathematica 8 // Компоненты и технологии. – 2012. -№8.
- 5 Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. 2-е изд., доп. и перераб. - М.: Солон -Р, 2004.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ УПРОЩЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОГРАММЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ АНТЕНН ММАНА-GAL

И.В. ЕГОРЕНКОВ

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск,
e-mail: egorenkov1991@yandex.ru

УДК 621.316.82

Ключевые слова: антенна, программа препроцессора, математическая модель, программа разработки антенных систем, C Sharp, XML-формат данных.

В работе рассмотрен вопрос создания программы препроцессора для упрощения, ускорения и автоматизации создания модельных файлов, которые используются программой MMANA-GAL при создании геометрии антенны для последующего ее моделирования.

Целью работы являлось создание средств подготовки расчетных моделей для программы анализа антенных систем MMANA-GAL [1]. Указанная программа получила широкое распространение среди разработчиков антенн благодаря высокой скорости расчетов, наличию бесплатной обычной и недорогой профессиональной версий.

Выяснено, что основной проблемой при практической работе с программой MMANA-GAL является способ задания данных для последующего моделирования. Модель антенны создается в виде набора отрезков, для которых указываются начальные и конечные координаты. Эти координаты приходится рассчитывать и вводить вручную. В результате много времени непроизводительно затрачивается на создание, а главное - на последующую правку модели антенны.

Для решения проблемы предлагается использовать созданное программное обеспечение - препроцессор, автоматизирующий расчет геометрии моделей. Разработка программы была проведена в среде Visual Studio 2010 с использованием языка C# [2]. Исходным файлом для разработанного препроцессора являлся XML-файл [3], в котором описываются структура антенны в виде укрупненных элементов, а результирующим – файл программы MMANA-GAL с расширением .таа.

Возможности созданного программного обеспечения позволяют: рассчитывать геометрию элементов антенн любой конфигурации с использованием переменных, копировать и поворачивать элементы, разбивать большие плоскости на мелкие элементы, строить сложные поверхности, например спиралевидные антенны по уравнению спирали. Работы над расширением функциональных возможностей программы и пополнением библиотеки укрупненных элементов продолжаются.

Таким образом, использование разработанного программного обеспечения упрощает и ускоряет работу пользователя с программой MMANA-GAL, что в конечном счете приводит к получению антенн с лучшими характеристиками.

Литература

1. Гончаренко И.В. Компьютерное моделирование антенн. Все о программе MMANA. - М.: ИП РадиоСофт Журнал «Радио», 2002.
2. Тролсен Э. Язык программирования C# 2010 и платформа .NET 4.0: пер. с англ. 5-е изд. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2011.
3. Шеперд Д. Освой самостоятельно XML за 21 день: пер. с англ. 2-е изд.: – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2002.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MAPLE ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МОДЕЛИ ЛОТКА -ВОЛЬТЕРРА

Н.В. ЗАЙЦЕВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань,
e-mail: queen-natalya@mail.ru

УДК 517.91

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, модель Лотка-Вольтерра.*

В работе описаны некоторые возможности программы Maple, используемой для занятий по компьютерному моделированию, на примере изучения модели Лотка -Вольтерра.

Одним из основных орудий математического естествознания являются дифференциальные уравнения. Каждый студент, изучающий высшую математику, согласится со словами изобретателя дифференциальных уравнений Исаака Ньютона, что «полезно» решать дифференциальные уравнения, так как они выражают законы природы.

На практических занятиях по предмету «Компьютерное моделирование» мы предлагаем своим студентам такую задачу: «В большом пруду разводят карасей. Они не мешают друг другу, корма им хватает. Как будет меняться число карасей с течением времени?» Скорость прироста карасей при данных условиях оказывается пропорциональной количеству особей или в некоторых случаях числу пар, что характерно для размножения скорее не карасей, а, скажем, китов, ввиду гораздо меньшей плотности вида. Выведенное дифференциальное уравнение «нормального» размножения мы уже решаем с помощью системы компьютерной математики Maple, используя известную команду `>dsolve`. Затем с помощью команды `>plot` [2, с. 339] строим график полученного решения. Студенты самостоятельно делают вывод, что через некоторое время карасей станет настолько много (при экспоненциальном росте интегральной кривой), что им уже не будет хватать корма, станет тесно, и дальнейший прирост уже не будет удовлетворять дифференциальному уравнению нормального размножения.

Далее рассматривается задача о размножении карасей при нехватке пищи. Решение уравнения размножения с учетом конкуренции – логистического уравнения - и построение логистической кривой производим опять же при помощи пакета Maple. Также на практических занятиях нами было рассмотрено дифференциальное уравнение отлова с введенной абсолютной скоростью отлова. И, наконец, решена система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений простейшей

системы «хищник - жертва», после того, как в пруду с карасями завелись щуки [2, с. 174].

Система компьютерной математики Maple позволила в кратчайшее время получить решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, изобразить графики этих решений и проанализировать поле фазовой скорости в модели «хищник - жертва», что вызвало неподдельный интерес у студентов.

Литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984.
2. Васильев А.Н. Maple 8. Самоучитель. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 352 с.

ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

В.Д. ИГНАТОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: viktor_ignatov49@mail.ru

УДК 681.3.06

Ключевые слова: *имитационное моделирование, вычислительная система, процессы, поток, GPSS WORLD.*

Показана имитационная модель технологического процесса вычислительной системы с основным и резервным каналами обработки, выполненная на учебной версии программы GPSS WORLD.

Имитационное моделирование является эффективным средством исследования широкого круга прикладных задач в различных сферах деятельности общества. Такой подход исследования особенно актуален, когда аналитические приемы решения не позволяют получить адекватные решения по ряду ограничений и показателей анализируемых объектов [1; 2].

В данном материале содержатся некоторые возможности применения учебной версии инструментального средства GPSS WORLD на примере использования одной из типовых задач производственного характера.

Для обеспечения надежности некоторого технологического процесса используется две вычислительные системы (ВС). Первая система - основная - выполняет обработку данных о технологическом

процессе и выработку управляющих сигналов, а вторая находится в «горячем резерве».

Данные поступают в основную ВС через 5 ± 1 с и обрабатываются в течение 3 ± 2 с. Подключение резервной системы происходит, за время 5 с, после чего она заменяет основную систему до ее полного восстановления, и процесс возвращается к нормальному режиму работы. Отказы основной вычислительной системы происходят через интервалы времени, равные 300 ± 30 с. Восстановление занимает время, равное 100 с. Пусть характеристики обеих ВС одинаковые и резервная система абсолютно надежная. Требуется построить имитационную модель для такой системы, например, за 30 дней ее работы.

Далее представлен листинг модели в среде GPSS WORLD.

Cena Equ 10; цена обработки данных на ВС

Prib Fvariable (Cena#X3); прибыль от обработанных данных

Zatrat Equ 10000; постоянные затраты, например связанные с рекламой

Zatrat1 Equ 0; и т.д.

Zatrat2 Equ 0

Dohod Fvariable (V\$Prib-Zatrat-Zatrat1-Zatrat2)

** 1 сегмент **

GENERATE 5,1

GATE FV 1,Fasil2; Проверка 1-го канала основной ВС1 на доступность

** 2 сегмент **

Fasil1 SEIZE 1; основная ВС1

ADVANCE 3,2; обработка данных на основной ВС1

RELEASE 1

SAVEVALUE 1+,1

TERMINATE

** 3 сегмент **

FASIL2 ADVANCE 5; задержка на подключение резервной ВС2

SEIZE 2; подключается резервная ВС2

ADVANCE 3,2; обработка данных на резервной ВС2

RELEASE 2

SAVEVALUE 2+,1

TERMINATE

** 4 сегмент **

GENERATE 300,30; отказы работы основной ВС1, т.е. 1 канала

```

FUNAVAIL 1; переводит в недоступность основную BC1
ADVANCE 100; время восстановления доступности основной BC1
FAVAIL 1; переводит в доступное состояние основную BC1
TERMINATE
** 5 сегмент **
GENERATE (60#60#30); время моделирования работы системы
SAVEVALUE 3,(x1+x2)
SAVEVALUE 4,V$Prib
SAVEVALUE 5,V$Doxod
TERMINATE 1
Start 1

```

В модели можно выделить 5 базовых сегментов, каждый из которых представляет определенные процессы. Первый сегмент связан с созданием входного потока данных и его распределением для дальнейшей обработки по основному или по резервному каналу (второй и третий сегменты). Четвертый сегмент моделирует процессы отказа и восстановления работы основной BC1. Пятый сегмент связан с формированием прогона модели и результирующих данных (транзактов), прошедших в системах BC1 и BC2, а также прибыли и дохода. В заголовке модели представлены некоторые константы и простое выражение для расчета дохода.

Отчет в программе GPSS WORLD создается автоматически, и вот только некоторые его результаты:

- коэффициенты загрузки BC1 – 0.399 и BC2 – 0.199;
- число обработанных данных BC1 – 14414 и BC2 – 7197;
- прибыль и доход 216110 и 206110 соответственно.

В заключение отметим, что даже учебная версия программы GPSS WORLD позволяет строить относительно простые, имитационные модели и анализировать технологические, производственные, вычислительные, экономические и финансовое процессы, происходящие в сложных объектах моделирования [1-3].

Литература

1. Боев В.Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World: учеб. пособие. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. –368 с.
2. URL: www.gpss.ru.
3. Игнатов В.Д. Особенности применения функций распределения потоков в имитационных моделях многоканальных структур // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. – Вып. 12. - С. 99 -102.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
РЕШЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ДИФФУЗИОННОГО
УРАВНЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ФОККЕРА-ПЛАНКА
НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК
В СКМ MAPLE**

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ¹, И.Х. ГАРИПОВА²

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, г. Казань,
e-mail: ¹ignatev_yu@rambler.ru, ²bkmctzh@mail.ru

УДК 004.94, 004.92

Ключевые слова: *математическое и компьютерное моделирование, космология, неравновесные процессы, релятивистская кинетика, уравнение Фоккера-Планка, СКМ Maple.*

Описаны результаты моделирования процесса космологической эволюции сверхтепловых частиц на основе комбинации асимптотических и численно-аналитических методов решения и исследования релятивистского уравнения типа Фоккера-Планка.

В ряде работ [1-6] исследовался процесс восстановления теплового равновесия в изначально неравновесной космологической плазме в условиях энергодоминантности частиц сверхвысоких энергий. В этих работах были сформулированы две различные математические модели этого процесса: первая из них [1-3] описывала эволюцию космологической плазмы в приближении малого числа сверхтепловых частиц по сравнению с числом тепловых, а вторая [4-6] – в приближении, когда число сверхтепловых частиц еще велико по сравнению с числом тепловых. Вторая модель основывалась на так называемом диффузионном приближении, описываемом уравнением типа Фоккера-Планка, т.е., уравнением типа уравнения теплопроводности. Эта модель была исследована в цитируемых работах, однако, в приближении малых космологических времен. Попытки распространить результаты на большие времена натолкнулись на существенные трудности как математического, так и вычислительного характера.

В данной работе предпринимается попытка решить указанную задачу с помощью численно-аналитических методов, основанных на сплайновой экстраполяции функций в СКМ Maple. При этом используется пакет программ сплайновой экстраполяции решений

дифференциальных уравнений [7]. С помощью экстраполяции ряда интегральных формул удастся получить компьютерную модель, справедливую при больших космологических временах, что позволяет провести исследование спектра космических частиц сверхвысоких энергий. В работе представлен графический материал об эволюции спектра космических лучей сверхвысоких энергий. Рассмотрена функция распределения $G_0(\tau, x)$ нулевого и первого приближений, описывающая космологическую эволюцию частиц сверхвысоких энергий в условиях скейлинга:

$$G_0(\tau, x) = \frac{81}{128} \left[\Phi\left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] - \frac{81\sqrt{\tau}}{64\sqrt{\pi x}} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\tau}} \right],$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятностей,

$$G_1(\tau, x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{t}} \int_0^\infty G_0(t, \xi) \xi d\xi \cdot \int_{-\infty}^\infty dy e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} G_0(t, y) \left(1 + \frac{y^2}{2t} + \frac{xy}{2t} \right).$$

Проводя асимптотические оценки методом Лапласа при $\tau \rightarrow 0$, получим некоторые интегральные выражения, которые анализируются сочетанием аналитических и численных методов.

Литература

1. Ignatyev Yu.G. Kinetics of the nonequilibrium universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition // *Gravitation & Cosmology*. - 2007. - Vol. 13, No. 1 (49). - P. 1-14.
2. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Kinetics of the nonequilibrium universe. II. Kinetics of local thermodynamic equilibrium recovery // *Gravitation & Cosmology*. - 2007. - Vol. 13, No. 2 (50). - P. 101-103.
3. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Ignatyev. Kinetics of a Non-Equilibrium Universe. III. Stability of the Non-Equilibrium Scenario // *Gravitation and Cosmology*. - 2008. - Vol. 14, No. 4. - P. 309-313.
4. Ignatyev Yu.G., Ziatdinov R.A. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early universe // *Gravitation & Cosmology*. - 2006. - Vol. 12, No. 4 (48). - P. 1-12.
5. Ignatyev Yu.G., Ziatdinov R.A. Diffusion Model of Evolution of Superthermal High-Energy Particles under Scaling in the Early Universe. II. Early Stages // *Gravitation and Cosmology*. - 2008. - Vol. 14, No. 4. - P. 301-308.
6. Игнатъев Ю.Г., Зиатдинов Р.А. Асимптотическое приближение модели Фоккера-Планка космологической эволюции сверхтепловых ультрарелятивистских частиц при наличии скейлинга взаимодействий // *Известия высших учебных заведений. Физика*. - 2009. - № 2. - С. 87-91.
7. Игнатъев Ю.Г. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2012613751, 20 июня 2012 г.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИИ ЧАСТИЦ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ В ТОЧНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С УСКОРЕНИЕМ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ В СКМ MAPLE

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ¹, И.А. КОХ²

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, г. Казань,
e-mail: ¹ignatev_rambler.ru, ²kokh90@mail.ru

УДК 530.12, 531.51

Ключевые слова: *математическое и компьютерное моделирование, релятивистское диффузионное уравнение, космология, СКМ Maple.*

Описана математическая и компьютерная модель нулевого приближения в СКМ Maple космологической эволюции сверхтепловых ультрарелятивистских частиц в условиях ускорения Вселенной.

Исследуется математическая модель, основанная на уравнении Фоккера-Планка, являющегося обобщением диффузионного уравнения:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right), \quad (1)$$

где

$$b(\tau) = \int_0^{\infty} G(\tau, x) x dx .$$

Уравнение (1) должно удовлетворять начальным и граничным условиям вида:

$$G(0, x) = G(x);$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(\tau, x) x^3 = 0.$$

Вследствие (1) функция G удовлетворяет интегральным условиям:

$$\int_0^{\infty} G(x) x^2 dx = 1; \quad \int_0^{\infty} G(x) x^3 dx = 1.$$

В [1]-[3] были предложены методы решения этой задачи разложением решений по малости временной функции $b(\tau) = 0$ для ультрарелятивистской Вселенной с масштабным фактором $a(t) \sim \sqrt{t}$. В данной работе этот метод распространяется на инфляционную Вселенную с масштабным фактором $a(t) = \frac{1}{\Lambda} \sqrt{\frac{3}{32\pi} sh \frac{t}{\Lambda}}$ и проводится численное моделирование. Для приведения результатов интегрирования от промежуточной временной переменной τ к физическому времени t необходимо провести численное интегрирование (см., например, [4]):

$$\tau = \frac{16\pi^2 \Lambda n}{\sqrt{3/32\pi}} \int_0^t \frac{1}{\left(1 + \ln^2(1 + E/a^2)\right) \sqrt{\text{sh}(t/\Lambda)}} dt .$$

Далее с помощью СКМ Maple проводятся вычисления функции G нулевого приближения для различных значений t в зависимости от параметров начального распределения, а затем для каждой такой функции находятся значения полуширины графика Γ и значение максимума энергетического спектра E_{\max} .

В результате строятся графики зависимости максимальных значений x и полуширины от значения $\lg t$ (например, см. рис. 1, 2). В ходе изучения полученных результатов, делается вывод о том, что при нулевом приближении значения x_{\max} и полуширины начинают фиксироваться тогда, когда фиксируется значение τ (рис. 3).

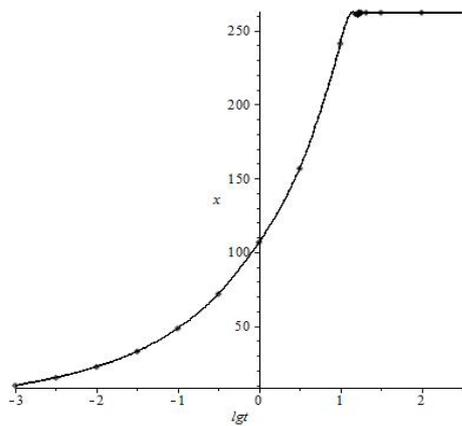


Рис. 1. Зависимость $E_{\max}=x$ от $\lg t$

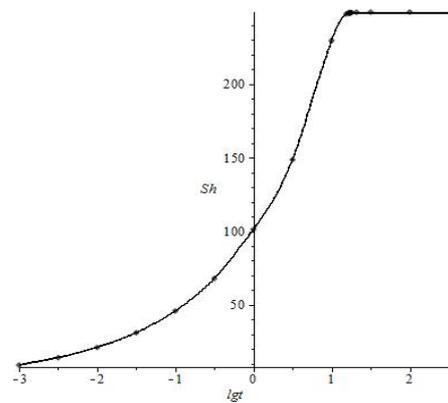


Рис. 2. Зависимость полуширины $\Gamma=Sh$ от $\lg t$

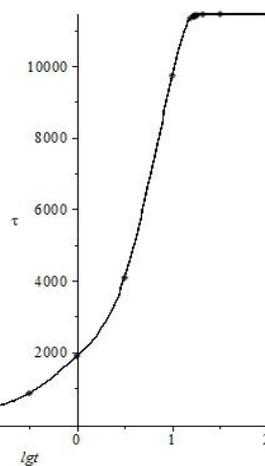


Рис. 3. Зависимость τ от $\lg t$

Литература

1. Ignatyev Yu. G., Ziatdinov R.A. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early universe // Gravitation & Cosmology. – 2006. - Vol. 12, No. 4 (48). - P. 1-12.
2. Ignatyev Yu. G., Ziatdinov R.A. Diffusion Model of Evolution of Superthermal High-Energy Particles under Scaling in the Early Universe. II. Early Stages // Gravitation and Cosmology. – 2008. - Vol. 14, No. 4. - P. 301–308.
3. Игнатъев Ю.Г., Зиатдинов Р.А.. Асимптотическое приближение модели Фоккера-Планка космологической эволюции сверхтепловых ультрарелятивистских частиц при наличии скейлинга взаимодействий // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2009. - № 2. - С. 87-91.
4. Игнатъев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. IV. Модель энергобаланса для стадии с произвольным ускорением // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2013. - №3. - С. 5-19.

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ НА ОСНОВЕ ИНФОРМАЦИИ О КОМПЛЕКТУЮЩИХ

В.Р. КРИСТАЛИНСКИЙ¹, М.А. ГЕРАСЕНКОВА²

Смоленский государственный университет, г. Смоленск,
e-mail: ¹kristivr@rambler.ru, ²marinkagerasenkova@gmail.com

УДК 004.825

Ключевые слова: *нечеткое моделирование, прогнозирование, система MatLab.*

В работе рассматривается пример построения системы нечеткого вывода, предназначенной для прогнозирования качества продукции.

Экономическая и хозяйственная деятельность в настоящее время осуществляется в условиях неопределенности. На экономические показатели бизнеса, работающего в сфере производства, воздействует большое количество разнообразных факторов. В частности, среди этих факторов можно выделить качество комплектующих, поставляемых смежниками. Качество этой продукции, на которую менеджмент предприятия повлиять не может, оказывает существенное влияние на качество собираемых из этих комплектующих изделий. Но связь эта носит весьма сложный характер, поскольку различные детали играют различную по степени важности роль в функционировании основного изделия.

Для прогнозирования степени влияния качества комплектующих на качество готовой продукции можно использовать методы нечеткой логики. Эта технология моделирования позволяет оперировать с «размытыми», причинно-следственными связями, имеющими место в

данной ситуации, и строить прогноз, опираясь на оценку качества комплектующих, осуществляемую экспертным путем.

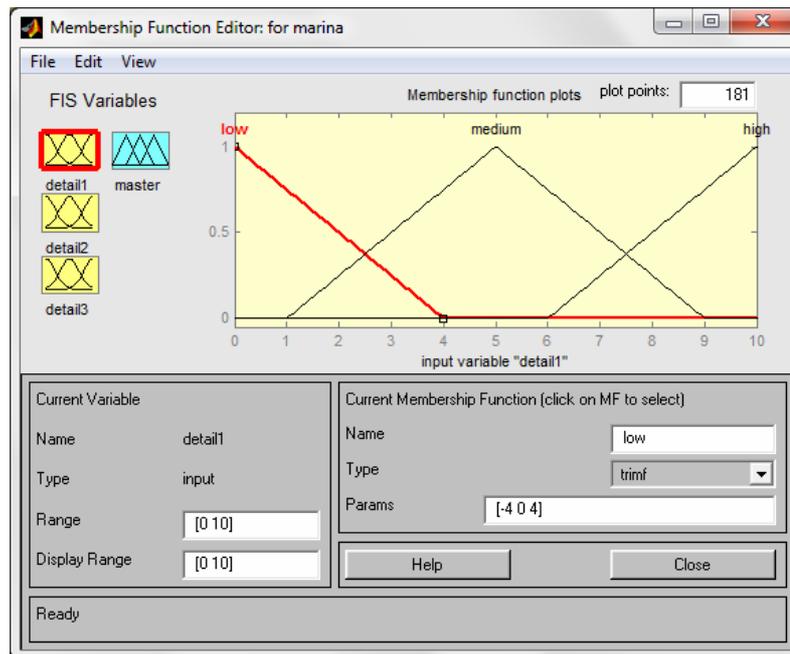


Рис. 1. Основное окно системы с входными и выходными переменными

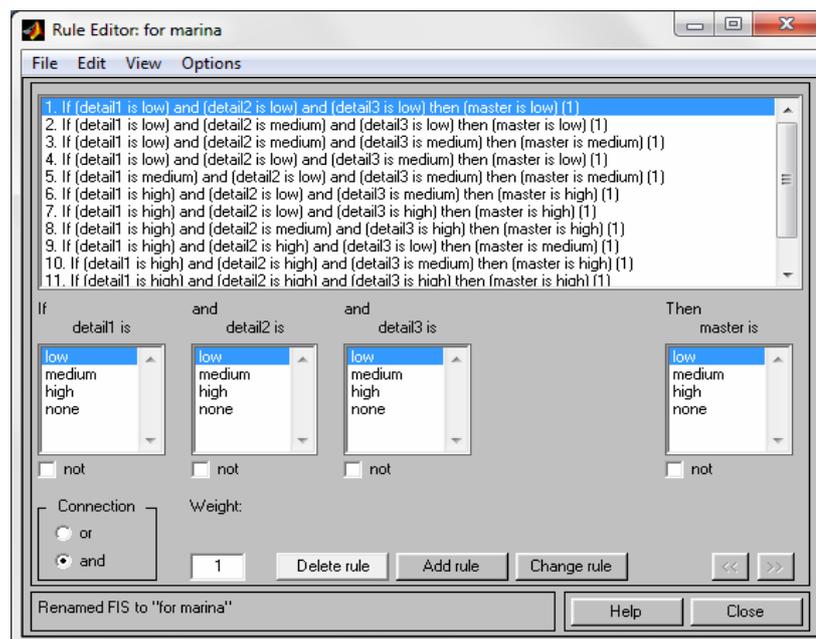


Рис. 2. Окно с множеством правил

Предлагаемая система нечеткого вывода реализована в системе MatLab. В качестве входных лингвистических переменных используется оценка качества трех комплектующих, в качестве выходной – прогноз качества готового изделия. Основу системы представляет множество правил вида «ЕСЛИ комплектующее 1 низкого качества, И

комплектующее 2 низкого качества, И комплектующее 3 высокого качества, ТО готовое изделие среднего качества».

На рисунках 1 и 2 представлены окна работающей системы в Matlab

КОМПЬЮТЕРНАЯ СИСТЕМА MATHEMATICA В ОБУЧЕНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ¹

Р.Е.КРИСТАЛИНСКИЙ², Г.С.ЕВДОКИМОВА³

Военная академия ПВО ВС РФ; Смоленский государственный университет,
e-mail: ²kristl940@rambler.ru, ³evgalsema@gmail.ru

УДК 656.6

Ключевые слова: обучение, информационные технологии, пакет Mathematica, задачи, профессиональные навыки, активные формы обучения.

Статья посвящена актуальной проблеме повышения эффективности учебного процесса в вузе. В ней представлены методы применения систем компьютерной математики в обучении теории вероятностей.

При обучении дисциплинам прикладной математики в последнее время начинают доминировать тенденции использования различных специализированных математических пакетов. Среди них – Mathematica (Wolfram Research) [2], MatLab (MathWorks), Maple (фирма Waterloo), Mathcad (MathSoft). Однако в нашей стране именно в области образования применение современных компьютерных методов и систем оставляет желать лучшего. Это связано частично с объективными причинами (дороговизна программных продуктов, оборудования и т. д.) и очень часто и с субъективными - нежеланием что-либо менять в образовательных технологиях.

Пакет Mathematica, по-видимому, является сегодня наиболее популярным. В настоящее время система Mathematica получила широкое распространение в мире [1]. Ею захвачены огромные области применения в инженерных и научных исследованиях, а также в системе образования. Во многих высших, как технических, так и гуманитарных, учебных заведениях программа Mathematica используется в качестве базисной для построения курса математики. Эта система отличается охватом широкого круга задач. Ее разработчикам удалось объединить

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках проекта проведения научных исследований «Теория и практика формирования вероятностно-статистических представлений в процессе профессиональной подготовки учителя математики» проект № 14-16-67009.

все известные математические методы, применяемые для решения научных задач, в унифицированном и согласованном виде, включая аналитические и численные расчеты.

Работ, посвященных информатизации таких разделов математики, как математический анализ, алгебра, геометрия, гораздо больше, чем работ, посвященных использованию информационных технологий в курсе теории вероятностей и математической статистики. При этом очевидно, что применение компьютерных технологий в реализации стохастической составляющей математического образования имеет не только методологическое, но и методическое значение, так как позволяет раскрыть статистическую природу практически всех предусмотренных программой фактов и понятий теории вероятностей.

Следовательно, роль математического пакета Mathematica в образовании исключительно велика. В частности, облегчая решение нестандартных задач, она снимает психологический барьер в изучении теории вероятностей и делает этот процесс более интересным и простым. Продемонстрируем сказанное на конкретном примере.

Отрезок $[0,1]$ случайным образом делится на 3 части. Требуется найти вероятность того, что из полученных отрезков можно сложить треугольник и этот треугольник будет остроугольным.

Обозначим через x и y длины двух отрезков. Тогда длина третьего отрезка будет равна $1-x-y$. Положим $u_1 = x$, $u_2 = y$, $u_3 = 1-x-y$.

Из полученных отрезков можно сложить треугольник, если выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &> u_3; \\ u_1 + u_3 &> u_2; \\ u_2 + u_3 &> u_1. \end{aligned}$$

Полученный треугольник будет остроугольным, если выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 &> u_3^2; \\ u_1^2 + u_3^2 &> u_2^2; \\ u_2^2 + u_3^2 &> u_1^2. \end{aligned}$$

Если мы найдём площадь множества точек единичного квадрата, координаты которых удовлетворяют приведенным неравенствам, то получим искомую вероятность.

$$u_1 = x; \quad u_2 = y; \quad u_3 = 1 - x - y;$$

$$P = FullSimplify \left[\int_0^1 \int_0^1 Boole[u_1 + u_2 > u_3 \ \&\& \ u_1 + u_3 > u_2 \ \&\& \ u_2 + u_3 > u_1 \ \&\& \ u_1^2 + u_2^2 > u_3^2 \ \&\& \ u_1^2 + u_3^2 > u_2^2 \ \&\& \ u_2^2 + u_3^2 > u_1^2] \ dx dy \right]$$

$$-1 + (3 \text{Log}[2])/2.$$

В заключение хочется заметить, что грамотное использование в учебном процессе системы Mathematica при изучении курса теории вероятностей, способствует повышению уровня фундаментальности математического образования.

Литература

1. Евдокимова Г.С., Кристалинский Р. Е. Использование систем компьютерной математики как средства формирования профессиональной компетентности студента // Известия Смоленского государственного университета. - 2013. - № 4. - С. 416 –424.
2. Hastings K. Introduction to Probability with Mathematica. CRC Press, 2009.- 400 p.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С НЕДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ МАТРИЦЕЙ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А.В. МИШИН¹, М.Ю. БАЛАНОВ²

МГТУ МИРЭА, г.Москва

e-mail: ¹a.mishnvp@gmail.com; ²balanov@mirea.ru

УДК 621.391.1

Ключевые слова: *случайные последовательности, последовательности Маркова, М-последовательность, автокорреляционная функция, боковые пики.*

Получены статистические характеристики автокорреляционной функции случайной марковской последовательности с различными матрицами переходных вероятностей. Проведено сравнение с характеристиками автокорреляционной функции детерминированной цепи Маркова.

В настоящее время в системах передачи информации (СПИ) нашли широкое применение псевдослучайные последовательности, которые используются для кодирования информации, повышения скрытности, ускорения процессов синхронизации.

Наиболее часто псевдослучайными последовательностями являются М-последовательности, которые обладают хорошими корреляционными свойствами, позволяют использовать простые алгоритмы для их формирования и приема.

Однако М-последовательности имеют ряд недостатков: периодический характер, низкая эквивалентная вычислительная сложность. Указанные недостатки ведут к уменьшению скрытности передачи, увеличению уровня межканальных помех.

Для решения указанных проблем предложено использовать случайные марковские последовательности. Можно показать, что М-последовательность представляет собой детерминированную марковскую последовательность с единичной матрицей переходных вероятностей [1]. Изменение матрицы переходных вероятностей марковской последовательности приводит к изменению автокорреляционных свойств, что является предметом изучения данной работы.

Для проведения эксперимента построена математическая модель генератора марковской последовательности с различными матрицами переходных вероятностей. В качестве характеристик автокорреляционных функций (АКФ) оценивались следующие величины:

- 1) среднее значение максимумов боковых пиков АКФ;
- 2) среднее значение модуля боковых пиков АКФ;
- 3) дисперсия максимумов боковых пиков АКФ.

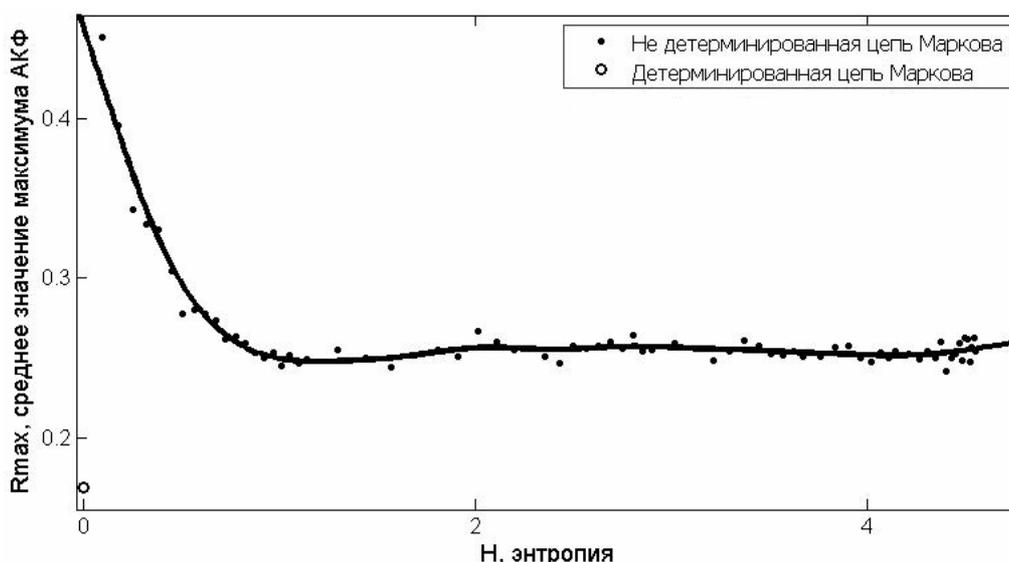


Рис. 1. Среднее значение R_{max}

Эксперимент проводился с несколькими матрицами переходных вероятностей, первой из которых была матрица переходных вероятностей детерминированной цепи Маркова М-последовательности. В качестве исходной М-последовательности использована двоичная последовательность с 31 состояниями (длина регистра сдвига 5). Для формирования случайной последовательности исходная матрица переходных вероятностей π_{ij} изменялась путем добавления случайных элементов в строки матрицы с последующей нормировкой строк. Мерой случайности последовательности является среднее значение энтропии H строк матрицы переходных вероятностей [2]. Полностью

детерминированная последовательность является М-последовательностью с известными характеристиками [3].

Результаты оценки средних значений максимумов боковых пиков АКФ (R_{max}) и средних значений модулей боковых пиков АКФ ($|R_i|$) представлены на рисунках 1 и 2 соответственно. Результаты оценки дисперсии максимумов боковых пиков АКФ повторяют по своему характеру рисунок 1.

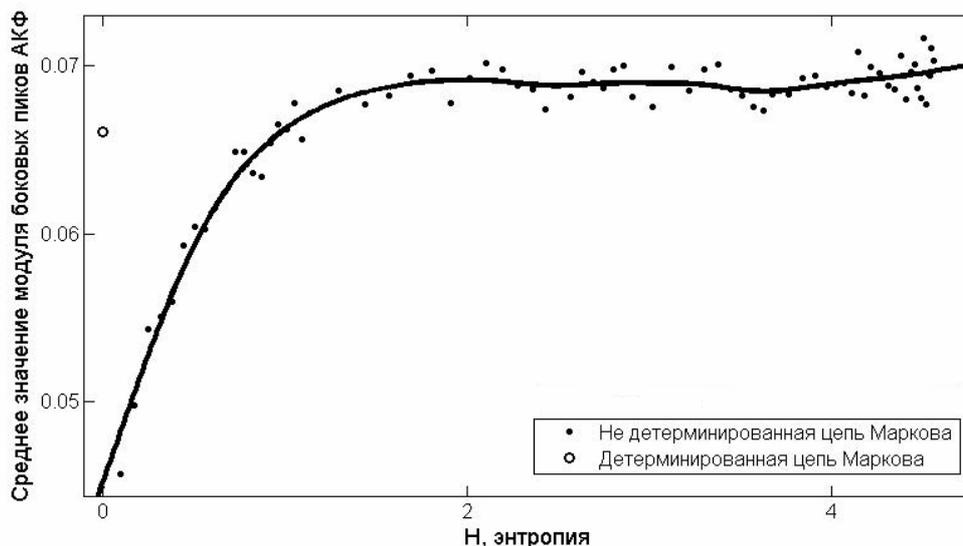


Рис. 2. Среднее значение $|R_i|$

Литература

1. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
2. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.
3. Прокис Дж. Цифровая связь / пер. с англ. Д.Д. Кловский. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.

КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В САПР И СКМ УЗЛОВ МИКРОМАШИНЫХ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ ПЛАТФОРМ ДЛЯ КУЛЬТИВИРОВАНИЯ САМОРАЗВИВАЮЩИХСЯ И ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ ЭНДОТЕЛИАЛЬНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ СЕТЕЙ

Е.В. НАЙДЁНОВ

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск,
e-mail: nzettez@gmail.com

УДК 611.161+685.515

Ключевые слова: *моделирование, САПР, системы компьютерной математики, саморазвивающиеся капиллярные сети, аппаратная платформа.*

В статье рассматриваются возможности применения современных средств автоматизированного проектирования и компьютерной математики при проектировании технических платформ для культивирования саморазвивающихся эндотелиальных капиллярных кровеносных сетей in vitro.

Процесс проектирования сложных устройств, состоящих из десятков и более отдельных функциональных узлов и модулей, имеющих гибкую систему управления и распределения питания, в настоящее время немислим без предварительного компьютерного моделирования. Создание качественных компьютерных моделей (КМ) разрабатываемого объекта или системы позволяет заменить предварительные макетные испытания моделированием и сэкономить средства на разработку готового изделия. В настоящее время, инженеру-конструктору доступны самые различные методы создания КМ: функциональные электрические схемы в схемотехнических САПР, системные математические модели в системах компьютерной математики (СКМ), программирование и кодирование, 3D-проектирование. В случае, если между всеми используемыми при создании КМ программными пакетами имеются внутренние способы интеграции, которые официально предложены разработчиками, процесс моделирования значительно упрощается [1].

Примером совместного использования разнообразных САПР может являться разработка микромашинной кибернетической платформы для культивирования саморазвивающихся эндотелиальных капиллярных кровеносных сетей. Данная разработка предназначена для областей клеточной биологии, фармакологии, биотехнологий, пищевой промышленности и ряда иных и заключается в создании биологического реактора с интеллектуальной системой управления [2].

В работе применяются следующие пакеты: Autodesk 3ds Max для создания трёхмерных элементов корпуса и узлов устройства, а также анимации пошагового процесса функционирования аппаратной платформы в реальной среде; Matlab&Simulink R2013b – для разработки полной функциональной КМ устройства и кода управления микропроцессорной СУ; Cadence OrCAD 16.6 – КМ электрических схем узлов биологического реактора. СКМ Matlab&Simulink, являясь гибкой средой интеграции со схемотехнической САПР OrCAD, позволяет с учётом влияния силовых компонентов проводить анализ адекватности КМ как в стационарных, так и в не стационарных режимах. Код управления каждого блока КМ сформирован с использованием алгоритмов нейронных сетей (рис. 1, а). Время расчёта КМ согласовывается со скоростью анимации Autodesk 3ds Max, где наглядно воспроизводятся процессы, происходящие в биологической среде

(рис. 1, б). Таким образом, ещё перед сборкой реальной установки разработчик имеет пакет КМ, необходимый для тестирования и представления данных.

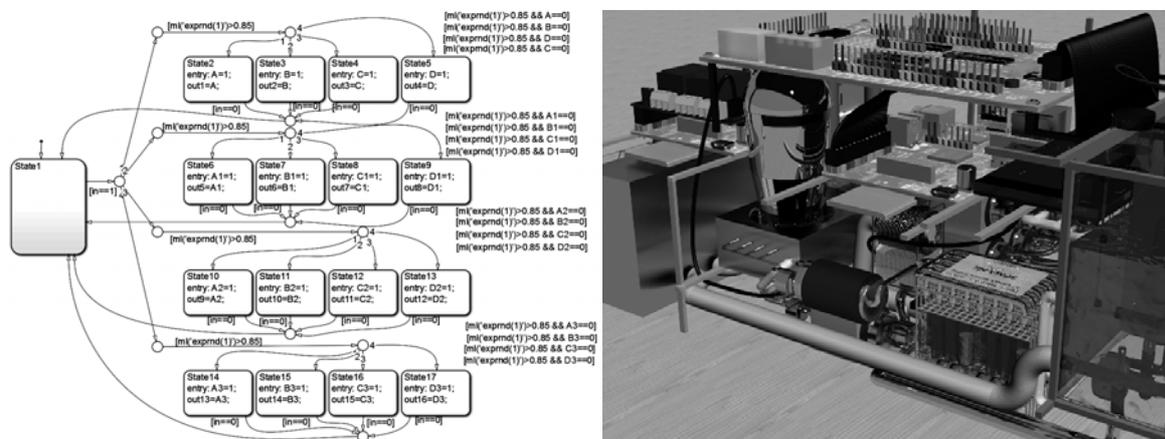


Рис. 1. а) Модель системы управления одного из узлов;
б) 3D-модель платформы

Литература

1. Найдёнов Е.В. Способ проектирования цифровых систем управления преобразовательными устройствами // Сборник тезисов докладов II Всероссийского конгресса молодых учёных. - СПб: НИУ ИТМО, 2013. – С. 280-281.
2. Найдёнов Е.В., Прокофьева П.А., Якименко Ю.И. Клеточная и тканевая инженерия эндотелия IN VIVO и IN VITRO (инженерные подходы) // Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. – 2013. - Т. 12, вып. 2. – Смоленск: СГМА. – URL: <http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-38-html/naydenov/naydenov.htm>.

ОСНАЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧКИ ПО ЕЕ КООРДИНАТАМ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ

А.М. НИГМЕДЗЯНОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e-mail: aigmani@rambler.ru

УДК 004.9, 514.1

Ключевые слова: *оснащенная динамическая визуализация, математическое моделирование, системы компьютерной математики, проективная геометрия.*

В работе построена оснащенная динамическая визуализация построения точки по произвольным координатам на расширенной прямой.

В настоящее время современное образование невозможно без использования информационно-коммуникационных технологий. Применение компьютера и других информационно-коммуникационных технологий на занятиях в вузе позволяет оптимизировать управление обучением, повысить эффективность и объективность учебного процесса при значительной экономии времени преподавателя, мотивировать учеников на получение новых знаний и закреплении выработанных умений и навыков.

Методы оснащенной динамической визуализации разрабатываются Ю.Г. Игнатьевым [1]. В предыдущих статьях автор уже строил цифровое оснащение к задачам математической физики [2], а также динамическую текстовую визуализацию построения сечений многогранников [3].

Курс «Проективная геометрия» является достаточно проблемным, поскольку требует от студентов высокого уровня развития пространственного мышления, воображения. Поэтому задача повышения наглядности курса становится чрезвычайно важной. Она решается графическими средствами компьютерной математики, в частности, пакета Maple.

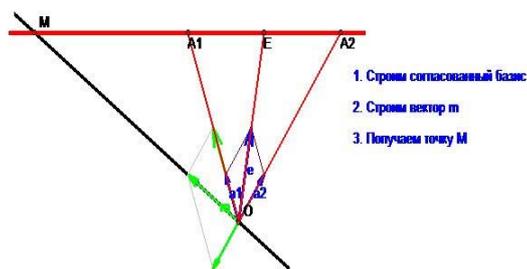


Рис. 1

Автором написана программа, в которой вводятся координаты точек проективного репера, уравнение прямой, на которую проводится проектирование и проективные координаты точки, которую надо построить. Программа визуализирует каждый этап построения. Сначала строит проективный репер на расширенной прямой. Далее происходит согласование базиса (для точек, которые были набраны произвольно вначале программы). Потом строится вектор, порождающий искомую точку на расширенной прямой (координаты вектора совпадают с координатами точки, которую требуется построить). Все этапы построения сопровождаются текстовыми комментариями (рис. 1).

Если же вектор, координаты которого вводятся произвольным образом, порождает несобственную точку, то программа, соответственно, строит и описывает это (рис. 2).

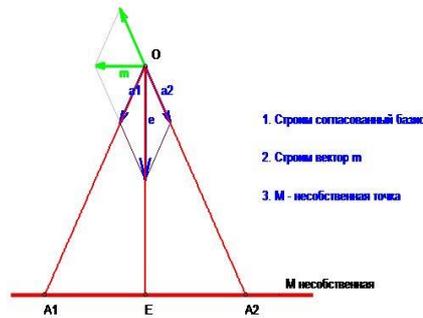


Рис. 2

Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. - Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с.

2. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация задач математической физики // Материалы Международной научно-практической конференции «Информационные технологии в образовании и науке ИТОН-2012» (Казань, 8-12 октября 2012 г.). - Казань. 2012. - С. 127-121

3. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построений сечений многогранников // Международный научный семинар «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии» и Российская школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений» (Казань, 21-26 октября 2013 г.). – Казань, 2013. - С. 151-157.

РЕШЕНИЕ ПАДЕ-АППРОКСИМАЦИИ В СИСТЕМЕ МАХИМА

Е.В. ПЕТРОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: petrova-elena-vlad@mail.ru

УДК 519.651

Ключевые слова: *приближение функции, рациональная аппроксимация, аппроксимация Паде, система компьютерной математики Maxima.*

В работе рассматривается пример решения задачи приближения функции, заданной локально в окрестности некоторой точки, методом рациональной аппроксимации Паде в системе компьютерной математики Maxima.

Широко используемым методом приближения функций является полиномиальная аппроксимация и ее разновидности, так как в этом

случае аппроксимирующая функция удобна для дальнейших исследований. Интересны методы, которые способны ее улучшить.

Для повышения эффективности проведения полиномиальной аппроксимации рекомендуются методы Паде и минимаксной аппроксимации [1-3].

Метод Паде относится к методам локально рациональных аппроксимаций степенного ряда. Интерес к нему вызван широким применением рациональных приближений в задачах механики, теоретической физики, технических расчетах, то есть в тех задачах, где хорошо известно поведение объекта в локальной окрестности одной или нескольких точек и необходимо исследовать его на некотором интервале.

С помощью Паде-аппроксимации ряда $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ можно приблизить функцию $f(x)$, для которой этот ряд будет являться рядом Тейлора, то есть должно выполняться соотношение:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_L x^L}{b_0 + b_1 x + \dots + b_M x^M}.$$

Для построения данной аппроксимации необходимо найти значения коэффициентов a_i , b_j . Их вычисление реализуется различными алгоритмами, такими как алгоритм Кронекера, алгоритм Бейкера, алгоритм Ватсона [1].

Так, например, алгоритм Бейкера и Ватсона основан на построении последовательности числителей $\eta_i(x)$, $i = 0, 1, \dots$, и знаменателей $\theta_i(x)$, $i = 0, 1, \dots$, аппроксимацией Паде, которые образуют таблицу Паде, представляемую лестничными последовательностями следующего вида [1]:

- для алгоритма Бейкера - $\frac{\eta_{2j+1}(x)}{\theta_{2j+1}(x)} = [L + M - 1/j]$,
- для алгоритма Ватсона - $\frac{\eta_{2j+1}(x)}{\theta_{2j+1}(x)} = [L + j + 1/j]$.

Коэффициенты $\eta_i(x)$ и $\theta_i(x)$ вычисляются по рекуррентным формулам. Они являются быстрыми методами вычисления последовательностей типа лестниц, параллельных главной диагонали.

Рассмотренные подходы достаточно часто реализуются в системах компьютерной математики. Так, например, в коммерческих пакетах (Derive, Maple, Mathematica) Паде аппроксимация представлена соответствующими встроенными функциями и пакетами [2].

Особый интерес представляет реализация данного вида аппроксимации в системах с открытым кодом GPL. Ярким примером свободных математических систем является система Maxima [4].

Построение аппроксимации Паде выполняется в пакете Maxima с помощью встроенной функции `pade`. Она аппроксимирует заданный интервал ряда Тейлора рациональной функцией. Пользователь должен задать порядок числителя L и порядок знаменателя M . При этом надо учесть, что количество задаваемых коэффициентов ряда Тейлора должно совпадать с общим количеством коэффициентов рациональной функции, уменьшенным на единицу.

Высокий интерес к данному виду аппроксимации в системе Maxima выражается тем, что вызов функции `pade` может быть выполнен не только в командной строке пакета, но и из меню пользовательского интерфейса Анализ командой `Pade Approximation`. В открывшемся диалоговом окне пользователь должен ввести исходные данные ряда Тейлора и задать степень числителя и знаменателя искомой рациональной функции.

Построение ряда примеров в системе Maxima показывает, что для функций, заданных локальными данными, удается построить хорошо аппроксимируемые функции дробно-рационального вида методом Паде-аппроксимации в окрестности точки разложения.

Литература

1. Бейкер Дж. Аппроксимация Паде: пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. Петрова Е.В. Решение задач аппроксимации функций в системах компьютерной математики: дис. ... канд. техн. наук. – Смоленск, 2002. – 141 с.
3. Христофоров Д.В. Сильная асимптотика аппроксимаций Паде и интерполяционных полиномов: автореф. дис. ... канд. физ.- мат. наук. – М., 2010. – 14 с.
4. Система компьютерной алгебры Maxima [Электронный ресурс]. - URL: <http://maxima.sourceforge.net/ru/> (дата обращения: 10.03.2014).

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ MAXIMA

Е.В. ПЕТРОВА, М.И. МЕДВЕДЕВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: petrova-elena-vlad@mail.ru

УДК 004.67 + 519.65

Ключевые слова: *статистические методы прогнозирования, система компьютерной математики Maxima, линейная регрессия, многомерная регрессия.*

В работе представлен обзор возможностей системы компьютерной математики Maxima для решений задач прогнозирования статистическими методами.

Необходимость проведения прогноза возникает всякий раз, когда требуется предсказать вероятностное поведение какого-либо объекта в будущем. При исследовании временных зависимостей каких-либо экономических или социально-экономических процессов часто процесс прогнозирования строится с помощью статистических методов. Для выполнения краткосрочного прогноза для исходной статистической зависимости необходимо найти некоторую аналитическую зависимость, которую можно использовать для вычисления значений функциональной зависимости для временного отсчета x_{n+1} .

Искомая аналитическая зависимость $f(x)$ должна с достаточной точностью соответствовать исходной табличной зависимости. Необходимо найти функцию заданного вида $f(x)$, которая в точках x_1, x_2, \dots, x_n принимает значения как можно ближе к табличным значениям y_1, y_2, \dots, y_n .

Надо отметить, что при анализе исходных данных требуется достаточно продолжительный период времени исследования объекта для построения соответствующих функциональных зависимостей в виде математической модели. Модель может быть найдена в виде уравнения зависимости от одного или нескольких параметров. При изучении сложных зависимостей экономических показателей могут быть использованы взаимосвязанные системы уравнений. Процесс построения и применения статистической модели для прогнозирования обязательно состоит из выбора вида уравнения, описывающего динамику или взаимосвязь явлений.

Алгоритм реализации статического подхода для прогнозирования можно разделить на следующие этапы.

1. Выполнение построения графика по исходным статистическим данным.
2. После анализа характера исходной последовательности временной зависимости проведение выбора аналитической зависимости.
3. Вычисление коэффициентов аналитической зависимости и расчет значения ожидаемого прогноза.
4. Определение абсолютной и относительной погрешности вычислений.

Если ожидаемое значение погрешности вычислений неудовлетворительное, то алгоритм повторяется вновь с другой, более подходящей, как правило, более сложной аналитической зависимостью.

Трудоемким этапом является вычислительный, который связан с определением коэффициентов уравнений по методу наименьших квадратов. Этот этап выполняется в какой-либо вычислительной среде. Мы рассматриваем возможности реализации данного этапа в системе *Matha*. Эта система имеет достаточно мощные вычислительные

возможности, и она является некоммерческим пакетом с открытым кодом на основе лицензии GNU GPL (General Public License) [1].

Для вычисления аналитической модели прогноза могут быть использованы следующие инструменты:

- функция `simple_linear_regression` вычисляет коэффициенты и параметры линейной регрессии;
- пакет расширений `lsquares` оценивает параметры линейных и нелинейных моделей с помощью метода наименьших квадратов.

Используя функцию `lsquares_estimates` данного пакета, можно вычислить значения коэффициентов уравнения заданного вида для исходных числовых значений, представленных в виде матрицы, каждый ряд которой соответствует значениям некоторой переменной. Это дает возможность проведения многомерной регрессии и расчета краткосрочного прогноза более сложных ситуаций.

Опыт показывает, что вычислительные возможности пакета `Maxima` и его доступность создают хорошие предпосылки для его использования в расчетах математических моделей прогноза социально-экономических процессов.

Литература

1. Система компьютерной алгебры `Maxima` [Электронный ресурс]. - URL: <http://maxima.sourceforge.net/ru/> (дата обращения: 10.03.2014).

ИМИТАЦИОННЫЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ОДНОПОЛОСНОГО ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

А.В. ПОДРОГА

МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва,
e-mail: anastasjonok@rambler.ru

УДК 532.5+004.942

Ключевые слова: *математическое моделирование транспортных потоков, однополосное движение.*

Рассматривается имитационная компьютерная модель однополосного дорожного движения. Описан ряд численных экспериментов для различных типов движения.

В последнее время задачи дорожного движения привлекают внимание специалистов по математическому моделированию. Подробное изложение математической теории дорожного движения дано в монографии [1], см. также [2; 3]. Имеются два подхода к

описанию процесса дорожного движения: макроскопический подход, где поток автомобилей представляется как некий поток сплошной среды, и микроскопический, где рассматриваются отдельные автомобили как индивидуальные элементы.

Рассмотрим простую ситуацию однополосного движения, когда на дороге нет съездов и въездов машин, т. е. дополнительные источники отсутствуют. Вводятся следующие характеристики: скорость $v = v(x, t)$ движения транспортного потока в точке x в момент времени t , плотность $\rho = \rho(x, t)$ потока в точке x в момент времени t , сам поток $q = q(x, t)$, т.е. количество автомобилей, проходящих через точку x в момент времени t .

Эти величины связаны следующими соотношениями. Во-первых, действует закон сохранения автомобилей

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

являющийся аналогом уравнения неразрывности. Во-вторых, справедлива формула потока

$$q(x, t) = \rho(x, t)v(x, t).$$

Третье соотношение выражает специфику дорожного движения, предполагающую, что при увеличении плотности потока скорость автомобилей уменьшается, т.е. $v(x, t) = V(\rho(x, t))$ с монотонно убывающей функцией $V = V(\rho)$. Важную роль при изучении транспортных потоков играет *фундаментальная диаграмма*

$$Q = Q(\rho) = \rho V(\rho),$$

выражающая поток как функцию плотности ρ .

Поскольку наблюдение за реальными транспортными потоками представляет значительные трудности, требуется иметь модель, имитирующую дорожные ситуации с теми или иными характеристиками. Нами разработана имитационная модель, описывающая движение группы автомобилей по однополосной дороге. Использованы язык программирования C# и библиотека SharpGL для визуализации.

Программа имитирует движение больших групп автомобилей в зависимости от дорожной ситуации. Поведение каждого конкретного автомобиля определяется поведением впереди идущих транспортных средств. Основным управляющим параметром является ускорение индивидуального автомобиля. Все параметры транспортных средств (максимальное ускорение разгона, ускорение торможения, допустимые скорости) выбираются на основе их реальных значений.

Проведен ряд численных экспериментов, позволивших оценить разные параметры группы автомобилей в зависимости от поведенческих моделей водителей. Результаты подробно описаны и сопоставлены с

данными теории. Особо отметим, что при движении по кольцевой автодороге с определенными плотностями и начальными условиями в предложенной модели возникают характерные движущиеся «пробки», перемещающиеся против потока, в согласии с результатами, полученными в [3] из других соображений.

Литература

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие // А.В. Гасников [и др.]; под ред. А.В. Гасникова. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2013. – 427 с.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. - С. 72-77.
3. Математическое моделирование автотранспортных потоков / Н.Н.Смирнов [и др.]. – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. – 30 с.

ДАТЧИК ТОКА НА ОСНОВЕ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

К.Г. ПУЛЬНОВА

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск,
e-mail: Ready.gf@mail.ru

УДК 621.382.2/.3

Ключевые слова: *датчик тока, эффект Холла.*

В работе приведены отсутствующие в технической документации характеристики работы устройства, содержащего микросхему CSA-1V

При конструировании и проектировании электронных приборов и устройств необходимо использование соответствующей технической документации на комплектующие разрабатываемого изделия. В частности, такой документацией в настоящее время являются предоставляемые фирмами-производителями даташиты и приложения к ним. По приведенным там параметрам и характеристикам возможно также создание математических моделей приборов без проведения натуральных испытаний и экспериментов. Следовательно приведенные в технической документации данные являются основными сведениями для конструкторов и наладчиков электронной аппаратуры.

В работе показаны отсутствующие в технической документации [1] данные о работе устройства, использующего датчик тока на основе эффекта Холла CSA-1V.

В даташите на микросхему CSA-1V приведены следующие данные: время фронта сигнала на выходе датчика 6 мкс, полоса пропускания 100 кГц, максимальная емкость нагрузки 1000 пФ. Ничего не указано про время среза сигнала на выходе датчика тока при подаче на вход

импульса измеряемого тока, хотя оно является ненулевым и весьма важно как для создания модели устройства, так и при расчетах параметров приборов для натуральных испытаний.

При макетировании использовалась следующая аппаратура: генератор Г5-78, усилитель мощности с полосой от 0 до 1 МГц, осциллограф LeCroy Wave Runner. Время фронта и среза сигнала с генератора и усилителя мощности не превышало 500 нс соответственно.

По результатам макетирования получены зависимости времени фронта и среза сигнала на выходе датчика от емкости нагрузки (рис. 1). Измерения проводились при сопротивлении нагрузки 10 кОм, измеряемом токе 4,2 А, частоте работы генератора 479 Гц.

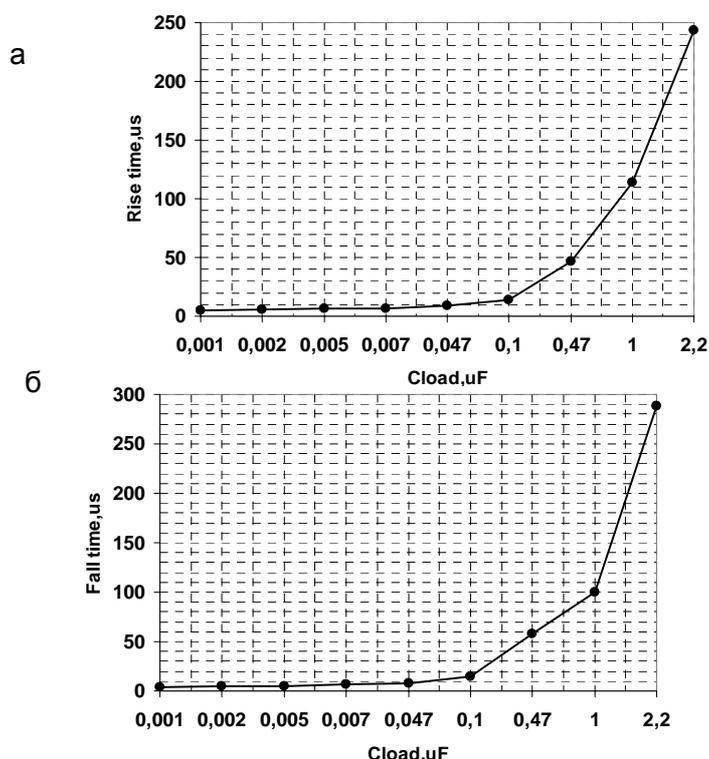


Рис. 1. Зависимости времен фронта (а) и среза (б) выходного сигнала датчика от емкости нагрузки

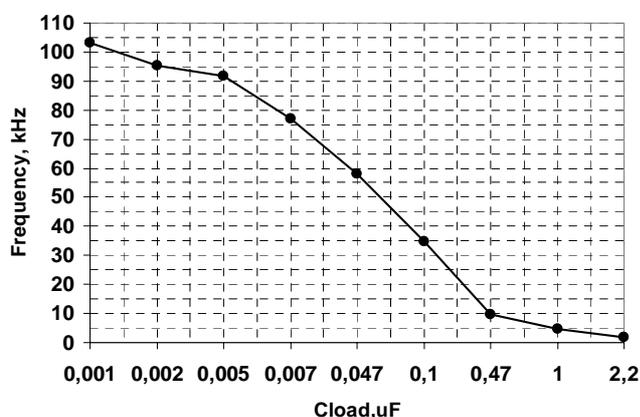


Рис. 2. Зависимость частоты работы датчика тока от емкости нагрузки

Исходя из предположения, что частота работы датчика тока ограничена только временами нарастания и спада сигнала на выходе датчика, построена экспериментальная зависимость частоты работы устройства от емкости нагрузки (рис. 2).

Приведенные экспериментальные характеристики свидетельствуют о необходимости учета данных параметров работы устройства при расчете других комплектующих разрабатываемых приборов. Полученные сведения были учтены при создании и проверке адекватности работы макромодели датчика тока CSA-1V.

Литература

1. Datasheet CSA-1V. [Электронный ресурс]: Melexis: официальный сайт. - URL :http://www.google.ru/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCgQFjAA&url=http%3A%2F%2Fchina.melexis.com%2FAsset%2FDatasheet_91202CSA-1V_old_541_DownloadLink_5313.aspx&ei=Zc8gU8XqMorp4gSP-IHgCQ&usg=AFQjCNGQpaf_kfW0CbWVkPn4yDQnsW3bRw&bvm=bv.62788935,d.bGE&cad=rjt.

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПАКЕТА РАСШИРЕНИЯ SIMRF СИСТЕМЫ MATLAB ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ МОЩНОСТИ

А.С. РОГОЖКИН

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск,
e-mail: alexras@bk.ru

УДК 519.688

Ключевые слова: *усилитель мощности, SimRF, RF Blockset, S-параметры, нелинейная модель, точка пересечения интермодуляции третьего порядка IP3, точка децибельной компрессии P1dB.*

В работе приводятся ключевые моменты использования пакета расширения SimRF системы Matlab при моделировании высокочастотных усилителей мощности

Начиная с версии Matlab 2010b изменилась структура пакета расширений Simulink, предназначенного для моделирования СВЧ устройств — расширение методик моделирования привело к оформлению пакета SimRF [1], включившего в себя ранее используемый в этих целях пакет RF Blockset [2].

SimRF, в частности, включает в себя несколько моделей усилителей, отличающихся способом описания характеристик, их

набором и используемыми методами расчета. SimRF позволяет учитывать при моделировании нелинейность усиления и эффект насыщения, влияние шумов и интермодуляционные искажения.

Связь с Simulink позволяет подавать на вход усилителя сложные сигналы с произвольной модуляцией (используя возможности пакета Communications System Toolbox) и использовать функции анализа выходных сигналов (для определения уровня нелинейных искажений), доступные из пакета DSP System Toolbox.

Пакет SimRF содержит три библиотеки для описания СВЧ устройств, отличающихся используемыми методами расчета (соответственно скоростью и точностью) и представленных специфическим набором функциональных блоков: Circuit Envelope, Equivalent Baseband и Idealized Baseband:

- Библиотека Idealized Baseband — для упрощенного моделирования радиочастотных устройств с возможностью прямого подключения к блокам Simulink. В этом наборе есть простейшая математическая модель усилителя, построенная как субмодель из блоков Simulink. В ней задаются коэффициент усиления и тепловой шум, выбирается функциональная зависимость для учета нелинейности амплитудной характеристики и амплитудно-фазовой конверсии.

- Библиотека Circuit Envelope — для моделирования схем с произвольными топологиями и (или) в случае расчета сигналов с несколькими несущими. Содержит модель усилителя, параметры которой задаются либо через численное указание коэффициента усиления, входного и выходного сопротивлений, точек пересечения интермодуляции второго и третьего порядка IP2 и IP3 либо файлами с параметрами. Кроме малосигнальных S-параметров поддерживаются форматы, учитывающие нелинейность передаточной характеристики и эффект насыщения и шумовые характеристики (расширения s2d, p2d).

- Библиотека Equivalent Baseband — для моделирования каскадного соединения СВЧ элементов для сигналов с одной несущей. Содержит несколько моделей, начиная от модели, схожей по заданию с математической моделью из библиотеки Idealized Baseband, и заканчивая моделями, задаваемыми S-, Y-, Z-параметрами, сопоставимыми по учету нелинейных и шумовых характеристик с моделью библиотеки Circuit Envelope. При этом возможно задание части характеристик не файлами, а числовыми значениями параметров, таких как IP2, IP3, точки децибельной компрессии P1dB. Есть возможность создания собственной нелинейной модели усилителя.

Блоки из библиотек Circuit Envelope и Equivalent Baseband не могут напрямую подключаться друг к другу и к блокам других библиотек Simulink. Конвертирование сигналов для возможности такого объединения производится через специальные блоки — порты (SimRF

Inport и SimRF Outport для схем на основе библиотеки Circuit Envelope и Input/Output Port — для библиотеки Equivalent Baseband). Точки ввода сигналов в блоки Simulink и SimRF отображаются при этом разными графическими символами.

Также необходимо учитывать отличие в представлении сигналов. Если в Simulink используются безразмерные сигналы (задается их амплитуда в безразмерных единицах), то при моделировании физических систем в SimRF более привычным является оперирование мощностью сигналов или напряжением с привязкой к определенному волновому сопротивлению тракта. При вводе в схему SimRF сигнала из Simulink его амплитуду необходимо рассчитать из заданной мощности (учитывая также комплексный или вещественный этот сигнал). При выводе сигналов из SimRF для получения числовых значений мощности также требуется проведение дополнительных преобразований.

Литература

1. SimRF — сверхвысокочастотные (СВЧ) системы для Simulink [электронный ресурс] - Режим доступа <http://matlab.ru/products/simrf>, свободный.
2. Дьяконов В.П. Проектирование и моделирование СВЧ устройств в Matlab R2010 // Компоненты и технологии. - 2011. - № 6. - С. 127–138.

ПРОГРАММНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА И ОСНАЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ИХ РЕШЕНИЙ

О.А. САЧКОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского, г. Казань,
e-mail: sachkova.olga@mail.ru

УДК: 512;514; 519.6; 519.8; 378.02:37.016

Ключевые слова: математическое моделирование, компьютерная математика, обыкновенные дифференциальные уравнения, высшее образование, методика математики.

Описаны основные принципы математического моделирования и программные процедуры в системе компьютерной математики Maple, оснащенной динамической визуализацией решений обыкновенных дифференциальных уравнений, как линейных, так и нелинейных.

Для компьютерных моделей, описываемых линейными и нелинейными ОДУ, нами созданы программные процедуры оснащенной динамической визуализации [1-2]. Для повышения наглядности компьютерных моделей ОДУ используется динамическая визуализация в формате динамической цветовой визуализации [3-4]. При этом начальному значению функции сопоставляется цвет (или освещенность) по определенному алгоритму. Наиболее простым алгоритмом сопоставления цветов является психологическая модель цветового восприятия человека: представление красного цвета как чего-то горячего, а синего - как холодного. В этом случае цвет задается схемой RGB и подбирается по тональности, где $rc(k)$ задает оттенки красного цвета, $gc(k)$ - оттенки зеленого цвета и $bc(k)$ - оттенки синего цвета.

Созданная нами программная процедура численного решения задачи Коши $DsolveCoushNum$ ($Eq, InCon, y, x, a, N$) решает ОДУ и выводит решение в виде динамической цветовой гистограммы.

В этой программе Eq является дифференциальным уравнением n -го порядка, $InCon$ – заданным начальным условием, y, x - переменными, a [$a1, a2$] - началом и концом отрезка анимации, N - число кадров анимации. Границы отрезка анимации мы выбираем сами и можем решить ОДУ на разных промежутках. Число кадров анимации выбирается произвольно. При необходимости мы можем посмотреть любой кадр анимации. Результат выдается в виде анимации графика (динамической визуализации).

Динамическая визуализация достигается большей наглядностью в сочетании с анимацией цветом. При такой визуализации оттенкам серых цветов соответствуют меньшие значения функции, а оттенкам темных цветов - большие значения.

Таким образом, различные способы динамической визуализации с помощью системы компьютерной математики Maple позволяют наглядно представить решения линейных и нелинейных ОДУ.

Литература

1. Сачкова О.А. Программные процедуры автоматизированного решения обыкновенных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и оснащенной динамической визуализации их решений // Труды Российской школы «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений» и Международного научного семинара «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии». - Казань: Отечество, 2013.– С. 131-132.

2. Сачкова О.А. Методическое обеспечение темы «Дифференциальные уравнения» на основе технологии оснащенной динамической визуализации решений обыкновенных дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики Maple // Информационные технологии в образовании и науке: материалы Междунар. научно-практической конфер. ИТОН-2012. – Казань: Изд-во КФУ, 2012. - С. 159-161.

3. Сачкова О.А. Программные процедуры автоматизированного решения обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений и оснащенной

динамической визуализации их решений // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы двенадцатой молодежной научной школы конференции «Лобачевские чтения - 2013». - 2013, -Казань: Казан. ун-т, 2013. –Т. 47. – С. 157-160.

4. Оснащенная динамическая визуализация решений однородных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений // 2-я Международная молодежная научно-практическая конференция «ПОКОЛЕНИЕ БУДУЩЕГО – 2013: взгляд молодых ученых» (МЛ-03). – Курск, 2013. – Т.5. - С. 326-328.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОБЪЕМНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В БИНАРНОЙ СИСТЕМЕ ЭТАНОЛ – ВОДА КАК ОСНОВЫ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА СВОБОДНОЙ ВОДЫ В БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ

В.А. СМОЛИН

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск,
e-mail: smolin.vofka@yandex.ru

УДК 004.942 + 611.018

Ключевые слова: *свободная вода, структурированная вода, нарушение аддитивности объема.*

В работе рассматривается математическая модель динамики объемных взаимодействий в бинарной системе этанол – вода, составляющая основу метода, позволяющего количественно определить содержание свободной воды в организме в норме и при различных патологиях.

Органы и ткани живого организма в зависимости от структуры и функционального состояния могут содержать от 50 до 95 процентов воды. Вода в живом организме содержится в двух видах: свободная (жидкоплавленная) вода и связанная (структурированная) вода. Связанная вода образует прочные связи с органическими молекулами. Свободная вода подвижна, ее количество может заметно изменяться в зависимости от функционального состояния организма и определяет степень гидратации тканей.

Из органической химии известен следующий факт: «При смешивании спирта с водой происходит уменьшение общего объема: так как при смешивании 52 объемов спирта и 48 объемов воды получается не 100, а 96,3 объема разбавленного спирта» [1]. По Б. Ромейсу [2],

«фиксирующее действие спирта основано, прежде всего, на отнятии воды. ...химическое строение белков нарушается спиртом минимально».

Таким образом, при погружении кусочка органа, изолированного из организма, в спирт последний будет отнимать воду из этого кусочка органа и проникать внутрь его. При этом должен происходить эффект, описанный выше, т.е. вследствие смешивания спирта с водой должно произойти уменьшение их общего объема и, следовательно, объема всей фиксирующей системы.

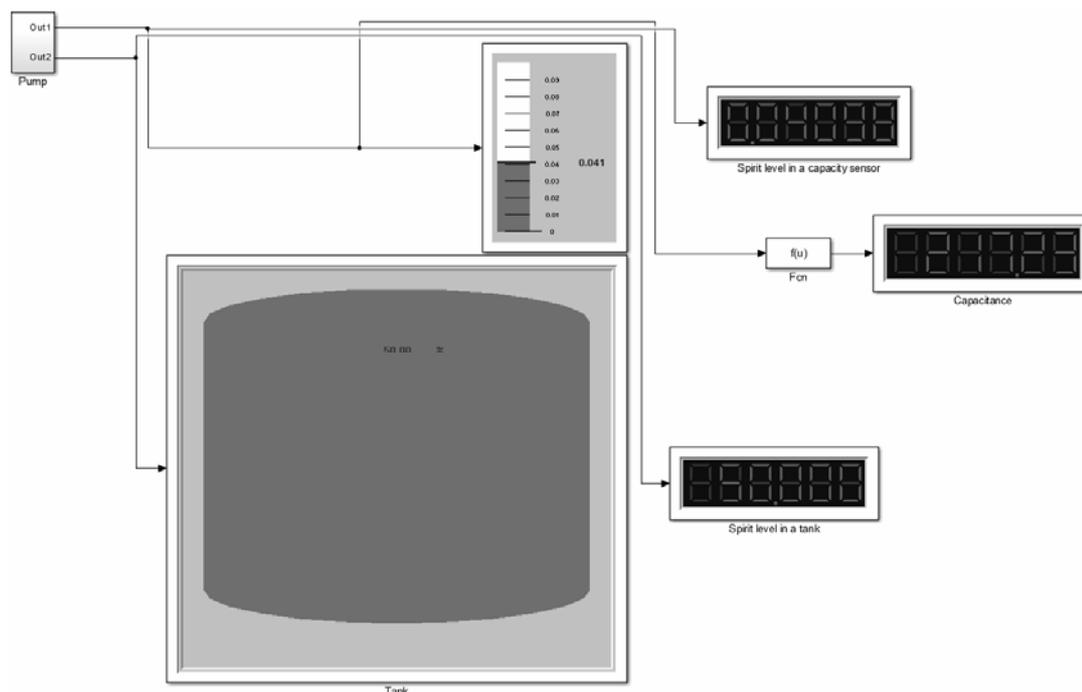


Рис. 1. Математическая модель реактора

В ходе экспериментальных исследований смешения различного количества спирта с одинаковым объемом воды было показано, что изменение объема происходит на одну и ту же величину, вне зависимости от взятого объема спирта. Этот факт позволяет взять необходимое количество этанола, при котором биологическая ткань будет полностью погружена в спирт, что увеличит скорость реакции.

При добавлении к одинаковым объемам спирта различных объемов воды было показано, что зависимость уменьшения суммарного объема близка к линейной, что позволит автоматизировать процесс обработки получаемых данных.

Было показано [3], что, создав специальный реактор (рис. 1), в котором регистрируется динамика взаимодействия биологического объекта, содержащего свободную воду с этанолом, путем регистрации изменения объема системы этанол - биологический объект, можно

достаточно просто и точно определить степень гидратации этого объекта.

Литература

1. Степаненко Б.Н. Курс органической химии. – М.: Высшая школа, 1966. – 552 с.
2. Ромейс Б. Микроскопическая техника: пер. с нем. / под ред. И.И. Соколова. - М.: Иностранная литература, 1953. – 720 с.
3. Глотов В.А. Геометрия биологического тканевого пространства // Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. – Смоленск: СГМА, 1997. – Т. 2. – Вып. 2. URL: <http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-3-html/10.htm>.

СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ КАК СРЕДСТВО РАСЧЕТА РЫНОЧНОЙ СТОИМОСТИ ОБЪЕКТОВ НЕДВИЖИМОСТИ

А.Г. СУХАНОВА

Северо-Западный институт управления – филиал Российской академии
народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ,
г. Санкт-Петербург,
e-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru

УДК 330.4

Ключевые слова: *рыночная стоимость недвижимости, системы компьютерной математики, линейная алгебра.*

Рассмотрены возможности линейной алгебры при расчете рыночной стоимости объектов недвижимости на основе сравнительного подхода. Для реализации математических моделей была использована система Mathcad.

Системы компьютерной математики (СКМ) широко используются для моделирования различных социально-экономических процессов, так в [1] использованы возможности системы Matlab при построении систем нечеткого вывода для определения готовности преподавателя к проектированию образовательной среды. Возможности системы Mathcad для шифрования информации с открытым ключом рассмотрены в [2].

В данной работе применены возможности системы Mathcad для определения рыночной стоимости объектов недвижимости. На основе данных о ценах продажи и характеристиках объектов-аналогов (табл. 1)

требуется определить рыночную стоимость объекта оценки с заданными характеристиками (табл. 1).

Таблица 1

Цена продажи и характеристики аналогов и объекта оценки						
Характеристики	Аналог 1	Аналог 2	Аналог 3	Аналог 4	Аналог 5	Объект оценки
Цена продажи, руб.	17000000	3250000	23500000	26500000	22600000	?
Общая площадь, м ²	150	97,4	150	220	150	200
Этажность, этаж	3	2	3	2	2	2
Участок, сот.	6	7	17	7	17	10
Гараж	1	0	1	0	1	1

Рассмотрен вариант, когда число аналогов равно количеству ценообразующих факторов, увеличенному на единицу, т.е.

$$k = n + 1, \quad (1)$$

где k – число аналогов, n – количество ценообразующих факторов.

Для нахождения рыночной стоимости объекта оценки в данном случае можно воспользоваться математическим аппаратом линейной алгебры [3].

Для оценки рыночной стоимости составляется следующая система линейных алгебраических уравнений типа:

$$\begin{aligned} C_{01} &= C_1 + \Delta u_{11} + \Delta u_{12} + \dots + \Delta u_{1n}, \\ C_{02} &= C_1 + \Delta u_{12} + \Delta u_{22} + \dots + \Delta u_{2n}, \\ &\dots \\ C_{0k} &= C_k + \Delta u_{k1} + \Delta u_{k2} + \dots + \Delta u_{kn}, \end{aligned} \quad (2)$$

где C – цена аналога, C_0 – расчетная рыночная цена объекта оценки.

Корректировка Δc_{ij} определяется следующим образом:

$$\Delta c_{ij} = (x_{0j} - x_{ij}) \Delta c_j = \Delta x_{ij} \Delta c_j, \quad (3)$$

где x_{0j} – значение j -го ценообразующего фактора объекта оценки, x_{ij} – значение j -го ценообразующего фактора i -го аналога, Δx_{ij} – разность значений ценообразующих факторов, Δc_j – вклад в стоимость единицы j -го ценообразующего фактора.

С учетом (3) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_{01} - \Delta x_{11} \Delta c_1 - \Delta x_{12} \Delta c_2 - \dots - \Delta x_{1n} \Delta c_n, \\
C_2 &= C_{02} - \Delta x_{21} \Delta c_1 - \Delta x_{22} \Delta c_2 - \dots - \Delta x_{2n} \Delta c_n, \\
&\dots \\
C_k &= C_{0k} - \Delta x_{k1} \Delta c_1 - \Delta x_{k2} \Delta c_2 - \dots - \Delta x_{kn} \Delta c_n.
\end{aligned}
\tag{4}$$

Данная совокупность уравнений представляет собой систему k линейных уравнений с $k = n + 1$ неизвестными:

$$\bar{C} = \Delta \bar{X} \times \bar{C}, \tag{5}$$

где

$$\Delta \bar{X} = \begin{pmatrix} 1 - \Delta x_{11} - \Delta x_{1n} \\ 1 - \Delta x_{21} - \Delta x_{2n} \\ \dots \\ 1 - \Delta x_{k1} - \Delta x_{kn} \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} C \\ \Delta c_1 \\ \dots \\ \Delta c_k \end{pmatrix}.$$

Данная система имеет единственное решение:

$$\bar{C} = \Delta X^{-1} \times \bar{C}, \tag{6}$$

где $\bar{C}^T = \|C = C_{01} = C_{02} = \dots = C_{0k}, \Delta c_1, \Delta c_2, \dots, \Delta c_n\|$.

Решение данной задачи было выполнено в системе Mathcad (рис. 1 и 2).

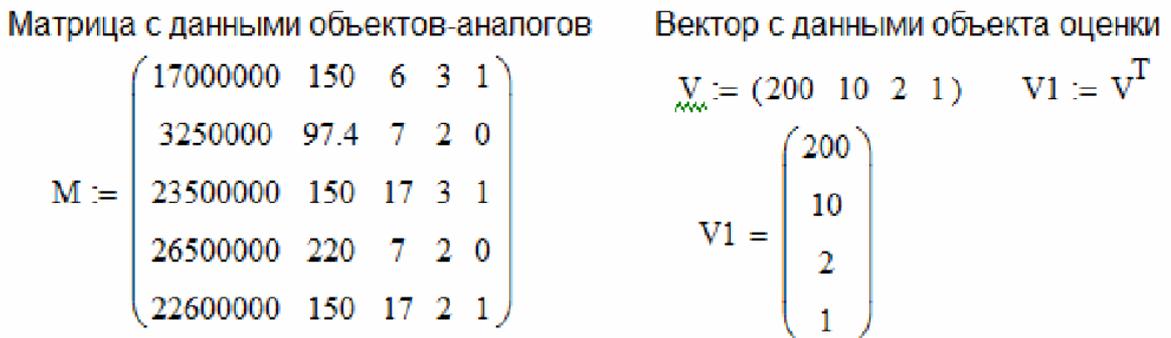


Рис. 1. Исходные данные объектов-аналогов и объекта оценки

Из рисунка 2 видно, что рыночная стоимость объекта оценки составляет 27950000 руб. – первый параметр вектора M1, второй параметр этого вектора показывает вклад в стоимость объекта размера единицы площади коттеджа, третий параметр дает вклад в стоимость одной сотки участка, четвертый показывает влияние на стоимость одного этажа здания, пятый – наличие гаража.

Решение данной задачи с использованием классического метода парных продаж приведено на рисунке 3.

Очевидно, что данная модель требует расширения, так как на величину рыночной стоимости объектов недвижимости оказывает влияние гораздо больше факторов, помимо тех, которые были рассмотрены в данной работе.

$$\begin{aligned}
& i := 1..5 \quad X_{i,1} := 1 \\
& X_{i,2} := -V_{11} + M_{i,2} \quad X_{i,3} := -V_{12} + M_{i,3} \quad X_{i,4} := -V_{13} + M_{i,4} \quad X_{i,5} := -V_{14} + M_{i,5} \\
& W_{i,1} := M_{i,1} \\
& X1 = \begin{pmatrix} 1 & -50 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -102.6 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -50 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -50 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W1 = \begin{pmatrix} 1.7 \times 10^7 \\ 3.25 \times 10^6 \\ 2.35 \times 10^7 \\ 2.65 \times 10^7 \\ 2.26 \times 10^7 \end{pmatrix} \quad + \\
& M1 := X1^{-1} \cdot W1 \quad \text{Вектор с искомыми компонентами} \\
& M1^T = (2.795 \times 10^7 \quad 1.896 \times 10^5 \quad 5.909 \times 10^5 \quad 9 \times 10^5 \quad 3.466 \times 10^6)
\end{aligned}$$

Рис. 2. Определение рыночной стоимости объекта оценки в системе Mathcad с использованием линейной алгебры

Вклад в стоимость единицы площади

$$k := M_{4,1} - M_{2,1} \quad p := \frac{k}{M_{4,2} - M_{2,2}} \quad p = 1.896 \times 10^5$$

Вклад в стоимость одной сотки участка

$$s := M_{3,1} - M_{1,1} \quad n := \frac{s}{M_{3,3} - M_{1,3}} \quad n = 5.909 \times 10^5$$

Вклад в стоимость одного этажа коттеджа

$$q := M_{5,1} - M_{3,1} \quad t := \frac{q}{M_{5,4} - M_{3,4}} \quad t = 9 \times 10^5$$

Рыночная стоимость объекта оценки

$$r := M_{1,1} + 50 \cdot p + 4 \cdot n - t \quad r = 2.795 \times 10^7$$

Рис. 3. Определение рыночной стоимости объекта оценки методом парных продаж в системе Mathcad

Литература

1. Суханов М.Б., Суханова А.Г. Нечеткая оценка готовности преподавателя к проектированию образовательной среды // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. – 2013. – № 2. – С. 15 – 19.
2. Суханов М.Б., Суханова А.Г. Изучение принципов шифрования информации с открытым ключом // Информатика и образование. – 2009. – №10. – С. 100 – 103.
3. Оценка стоимости недвижимости / С.В. Грибовский [и др.] – М.: ИНТЕРРЕКЛАМА, 2003. – 704 с.

КОМБИНИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. В. ТИХОНОВА

МГТУ МИРЭА, г. Москва, e-mail: o_tikhonova@inbox.ru

УДК 623.4.01

Ключевые слова: *математическое моделирование, имитационное моделирование, макет-имитатор, радиотехническая система.*

Предлагается комбинированный метод моделирования сложных систем, суть которого в совмещении в рамках гибкой структуры имитационных моделей подсистем, их моделей – статистических аналогов и реальных макетов-имитаторов, позволяющий сочетать преимущества математического моделирования и реального эксперимента. Рассмотрен пример комбинированной модели радиотехнической системы.

Проектирование радиотехнической системы начинается с разработки ее подробной математической модели, с помощью которой определяется сама возможность построения системы с заданными свойствами и оцениваются различные аспекты предлагаемых технических решений. В дальнейшем весь цикл разработки, эксплуатации и модернизации системы сопровождается усложнением ее математической модели и расширением круга решаемых с помощью моделирования задач. Современные вычислительные средства и уже существующие программные решения делают возможным создание имитационной математической модели системы с любой степенью детализации, однако не отвечают на вопрос о соответствии реальной системы и ее математической модели. Подобное обстоятельство служит серьезным препятствием к использованию моделей [1].

На первый взгляд, чем подробнее математическая модель и чем большее количество деталей имитируется в процессе моделирования, тем выше уверенность в ее соответствии реальной системе. Однако надо учитывать, что с увеличением размерности модели увеличивается как прямое количество ошибок (в частности, ошибок перевода алгоритмов модели на языки программирования), так и ошибок, возникающих при проверке модели на стандартных примерах. Кроме того, возрастают затраты на создание такого типа модели. Предложенный автором метод многоуровневого математического моделирования [2] во многом решает поставленные вопросы, но уверенность в полной достоверности модели все равно надо подкреплять экспериментами.

Развивая метод многоуровневого моделирования, мы предлагаем совместить имитационную математическую модель радиотехнической

системы с реальной аппаратурой и макетами-имитаторами ее отдельных частей в единый аппаратно-программный комплекс. Для моделирования работы каждой подсистемы можно использовать:

- подробную имитационную математическую модель;
- статистический аналог, обобщенные характеристики которого получены на имитационной модели более низкого уровня;
- макет-имитатор реальной аппаратуры.

Гибкая структура позволяет использовать в рамках единой модели одновременно различные способы имитации, видоизменяя сочетание имитационных и статистических моделей и макетов-имитаторов. Совмещение методов имитационного и статистического моделирования вместе с макетами реальной аппаратуры позволяет сочетать преимущества математических моделей (возможность учета внешних воздействий и внутренних погрешностей, повторяемость и воспроизводимость результатов) и достоверность реальных процессов, получаемых с использованием макетов-имитаторов.

Рассмотрим систему радиоэлектронных средств (РЭС) надводного корабля при их взаимодействии с РЭС кораблей тактической группы при работе в реальных условиях. Системы РЭС корабля можно разделить на подсистемы радиолокации, связи, радиоэлектронного противодействия (РЭП) и обеспечения электромагнитной совместимости в соответствии со спецификой функционирования. Каждая из подсистем имеет в своем составе модуль управления, исполнительные устройства, вспомогательные блоки и прочее, однако общим элементом всех подсистем являются генерация и измерение высокочастотного излучения. Совместное проектирование корабельных РЭС должно обеспечить как максимальную их эффективность, так и полную совместимость, то есть отсутствие взаимного влияния.

Решить поставленные задачи позволяет комбинированное моделирование работы РЭС корабля во всем диапазоне внешних условий. Для этого создается программно-аппаратный комплекс, в состав которого входят модели радиолокационных средств, средств РЭП, состоящие из трех компонент: подробная имитационная математическая модель подсистемы, математическая модель – статистический аналог работы подсистемы и макет-имитатор работы подсистемы. Модуль управления во всех компонентах единый, воспроизводящий логику работы, временные характеристики и алгоритмы управления. Модель средств обеспечения электромагнитной совместимости – это имитационная модель, реализующая алгоритмы реальной системы. В состав программно-аппаратного комплекса входят также трехкомпонентные имитаторы внешней обстановки и кораблей тактической группы, а также при необходимости авиационных и космических средств.

Комбинированное моделирование позволяет одновременно решать различные классы задач, традиционно относящихся как к математическому моделированию, так и к натурному эксперименту. Например, вопросы оценки эффективности отражения массивов средств воздушного нападения решаются на моделях статистических аналогов, проверка алгоритмов управления подсистемами – на имитационных моделях, а выбор оптимальных способов помехозащиты или оценки сигналов – на макетах-имитаторах. Следует отметить, что подтверждение адекватности математических моделей реальным системам решается на той же комбинированной модели. Увеличение стоимости разработки комбинированной модели по сравнению с чисто математической окупается ее универсальностью.

Литература

1. Максимей И. В. Имитационное моделирование на ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988. – 232 с.
2. Тихонова О. В. Многоуровневое моделирование сложных технических систем // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIII Международной научной конференции. - Смоленск, 2012. – Вып. 13. - С. 216-217.

ИССЛЕДОВАНИЕ SPICE-МОДЕЛЕЙ ОПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

Е.О. ФОМЕНКОВА

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск,
e-mail: katuska067@gmail.com

УДК 621.377.6

Ключевые слова: *операционный усилитель, SPICE-модель, модель Бойля.*

В работе исследованы различные математические модели операционных усилителей, представленные в виде файлов стандарта SPICE. На основании исследования сделан вывод об адекватности их моделирования, выявлены их достоинства и недостатки.

При моделировании устройств в различных программах схемотехнического анализа важным критерием является их точность и многофункциональность. В настоящее время существует огромное количество библиотек SPICE-моделей операционных усилителей (ОУ) различных фирм-производителей. Структура данных моделей весьма разнообразна, она может содержать как классические варианты, так и оригинальные схемные решения, выгодно отличающиеся от конкурентов. Однако для пользователя такие модели не универсальны,

многие модели ОУ имеют серьезные недостатки и характерные особенности, которые необходимо учитывать в процессе моделирования. Большинство представленных моделей конкретных ОУ представляют собой «черный ящик», иногда не доступный для редактирования. При детальном анализе подобные модели оказываются сложны для понимания и могут содержать ошибки. По этой причине результаты моделирования некоторых схемных конфигураций, в состав которых входят ОУ, оказываются некорректными.

Целью исследования является повышение адекватности моделирования существующих SPICE-моделей ОУ.

Строго говоря, существует несколько типов моделей ОУ, предлагаемых САПР [1]. В частности, это различные SPICE-модели, дублирующие внутреннюю структуру ОУ, оригинальные пользовательские модели, модели 3 уровней, в том числе макромодель Бойля и ее усовершенствованные версии. Каждый следующий уровень представляет собой более точную модель благодаря использованию более сложной эквивалентной схемы.

Модели, дублирующие внутреннюю структуру ОУ, представляют собой точную копию схмотехники усилителя, представленного в программе схмотехнического моделирования.

Модель 1-го уровня представляет собой управляемый напряжением источник тока с ограниченным выходным сопротивлением.

Модель 2-го уровня состоит из 3 частей, имеет 2 полюса и ограничение скорости нарастания, конечный коэффициент усиления и выходное сопротивление.

Модель 3-го уровня — это усовершенствованная модель Бойля, подобная модели, используемой в других SPICE-программах в виде подсхемы. Она моделирует ограничение скорости нарастания и спада выходного напряжения, ограничение коэффициента передачи, выходное сопротивление на постоянном и переменном токе, напряжения и токи смещения нуля, фазовые сдвиги, полосу пропускания, 3 вида дифференциальных входов, ограничение выходного напряжения и ограничение тока.

Для дальнейшего исследования рассматривались модели Бойля различных ОУ. Отмечено, что преимущество модели Бойля, по сравнению с моделью ОУ транзисторного уровня, заключается в существенном уменьшении машинного времени, которое необходимо для анализа схем, активными компонентами которых являются ОУ. Однако было установлено, что модель Бойля некорректно моделирует некоторые параметры и характеристики ОУ: частотную зависимость входных сопротивлений, коэффициент ослабления синфазного сигнала, ограничение входных токов, а также динамику токов потребления по цепям питания. Кроме того, модель Бойля не является универсальной и

не подходит для моделирования ОУ с токовой обратной связью, а также классических ОУ с немонотонной ФЧХ.

На основе полученных исследований была построена SPICE-модель ОУ, отличающаяся высокой скоростью моделирования и сходимостью расчетов, имеющая более простую структуру, чем у модели Бойля и при этом учитывающая некоторые имеющиеся недостатки рассмотренных ранее моделей. Результаты, полученные в ходе сравнения характеристик построенной модели и реального ОУ, хорошо согласуются между собой. Таким образом, построенная модель доказывает свою эффективность и может применяться для исследовательских и учебных целей.

Литература

1. Амелина М.А., Амелин С.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8. - М.: Горячая линия-Телеком, 2007. - 464 с.

ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ КОЛИЧЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ НУЛЕЙ ПОЛИНОМОВ БЕРНУЛЛИ

Д. Г. ЦВЕТКОВИЧ

МПГУ, г. Москва,

e-mail: dianacve@inbox.ru

УДК 519.6

Ключевые слова: *полиномы Бернулли, вещественные нули, компьютерная математика.*

Методами компьютерной математики изучается вопрос об оценках количества вещественных нулей полиномов Бернулли.

Полиномы Бернулли стандартно вводятся при помощи производящей функции

$$\frac{\lambda}{e^\lambda - 1} e^{\lambda t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} \lambda^n, \quad |\lambda| < 2\pi.$$

Коэффициенты $B_n(t)$, возникающие в этом разложении, называются *полиномами Бернулли* и являются обычными полиномами степени n . Справедливо представление

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k t^{n-k},$$

где $B_k = B_k(0)$ (*числа Бернулли*). Подробнее с теорией полиномов Бернулли можно ознакомиться по книгам [1–3].

Особый интерес представляет проблема вещественных нулей полиномов Бернулли. Обозначим через c_n общее количество

вещественных нулей полинома $B_n(t)$, а через y_n – его максимальный вещественный нуль. В работе К. Инкери [4] показано, что

$$c_n = \frac{2n}{\pi e} + o(n), \quad y_n = \frac{n}{2\pi e} + o(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Эти оценки уточнены в работе А.И. Ефимова [5] в виде:

$$c_n = \frac{2n}{\pi e} + \frac{\ln n}{\pi e} + \alpha_n, \quad y_n = \frac{n}{2\pi e} + \frac{\ln n}{4\pi e} + \beta_n,$$

где α_n, β_n – некоторые ограниченные величины. Дополнительную информацию о вещественных нулях полиномов Бернулли можно найти в [6].

Поведение остаточного члена α_n в формуле для общего количества вещественных нулей представляет особый интерес, но трудно поддается аналитическому описанию. Нами проведено численное исследование, позволившее установить некоторые закономерности.

С помощью встроенной команды *CountRoots* математического пакета *Wolfram Mathematica 8.0* для поиска числа вещественных нулей полиномов были найдены значения c_n для первой тысячи полиномов Бернулли. Построены таблицы, содержащие эти значения c_n , оценки величины c_n по К. Инкери и А. И. Ефимову, а также значения величины α_n для первой тысячи полиномов Бернулли.

Возникает естественный вопрос: является ли последовательность α_n знакопеременной или знакопостоянной? Расчеты, проведенные для первой тысячи номеров, показали, что величина α_n является знакопостоянной, строго большей нуля. Определены границы

$$0,24 \leq \alpha_n \leq 4,24,$$

верные для $n = 1, 2, \dots, 1000$. Максимальное значение величины α_n достигается у полинома $B_{440}(t)$, минимальное – у полинома $B_{649}(t)$. На основании численных расчетов можно выдвинуть гипотезу о положительности значений α_n при всех номерах $n \in \mathbb{N}$. Представляется полезным дать точные аналитические оценки границ величины α_n .

Из составленных таблиц виден нетривиальный закон последовательного изменения количества нулей. Этот закон по сей день остается неизвестным.

Литература

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 400 с.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 327 с.
3. Прасолов В. В. Многочлены. – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.
4. Inkeri K. The real roots of Bernoulli polynomials // Turun Yliopiston Julkaisuja. - 1959. - Ser A1. - No. 37. - P. 1–20.

5. Efimov A. I. The asymptotic for the number of real roots of the Bernoulli polynomials // arXiv:math/0606361v2 [math.NT] 16 June 2006.

6. Delange H. Sur les zeros reels des polynomes de Bernoulli // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. - 1991. - T. 41. - No 2. - P. 267–309.

МЕТОДИКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ФИЛЬТРА НА МНОГОСЛОЙНОЙ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ КЕРАМИКЕ

В.В. ЧЕЧУЛИН, Е.А. ТИМОФЕЕВ

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск,
e-mail: hitvovan@mail.ru, timofeev@niistt.ru

УДК 621.396.621.53

Ключевые слова: *понижающие конверторы, керамика с низкой температурой обжига, методика расчета фильтра.*

В работе рассмотрена гибридная технология многослойных интегральных схем на основе керамики с низкой температурой обжига (КНТО), особенности ее использования в понижающих конверторах СВЧ- и КВЧ-диапазонов. Рассмотрена методика расчета фильтра на КНТО.

Основной трудностью при разработке конвертора в диапазоне КВЧ является повышение потерь в микрополосковых дорожках, для уменьшения этого эффекта необходимо выбирать материалы с минимальным $\text{tg}\delta$ и максимально уменьшать длину проводников. Также для уменьшения вероятности возникновения объемного резонанса в материале микрополоска необходимо уменьшить толщину материала. Данным условиям хорошо соответствует выполнение отдельных элементов и целых функционально законченных узлов высокочастотных частей устройства в виде малогабаритных интегральных схем (ИС).

В первых объемных ИС СВЧ-диапазона, идея создания которых логично следовала из опыта разработки полупроводниковых ИС с высокой степенью интеграции, использовалась монолитно-интегральная технология. В последнее время широкое распространение получила гибридная технология многослойных ИС СВЧ на основе керамики с низкой температурой обжига — КНТО (*Low Temperature Cofired Ceramics — LTCC*).

Изготовление пассивных ИС СВЧ- и КВЧ-диапазонов в виде многослойных структур на основе КНТО обеспечивает малые габариты и низкую себестоимость СВЧ-устройств, кроме того, за счет более

плотной компоновки СВЧ элементов благодаря многослойности структуры и низкого $\text{tg}\delta$ для специализированных материалов можно получить меньше потери в линиях передачи энергии между СВЧ-элементами. Например, фирма Dupont предлагает материал Green Tape 9K7, работающий до 100 ГГц. Технология многослойных ИС на КНТО обладает широким спектром возможностей как по реализации элементов внутри многослойной структуры, так и по интеграции с компонентами, изготовленными с применением других технологий.

Проектирование СВЧ-устройств выполняется, как правило, в два этапа. Первый этап включает в себя синтез устройства на уровне эквивалентной схемы. На втором этапе после определения предварительной геометрии устройства выполняется моделирование распределения электромагнитного поля в полученной структуре на основе решения системы уравнений Максвелла численными методами. При необходимости геометрия устройства корректируется и вновь подвергается электродинамическому анализу. Процесс повторяется итерационно до получения требуемых характеристик устройства.

Выбор того или иного метода электродинамического моделирования определяется его эффективностью для конкретных геометрических, физических и электрических параметров анализируемой структуры. Методы электродинамического анализа и, соответственно, программные средства моделирования СВЧ-устройств, реализованные на их основе, подразделяются на трехмерные (3D), трехмерные для существенно планарных структур (2.5D) и двумерные (2D).

Снизить временные и финансовые затраты при разработке СВЧ-фильтров на КНТО можно за счет применения численных методов расчета электромагнитных полей, опираясь на возросшие возможности вычислительной техники. Однако переход к численному проектированию связан и с некоторыми трудностями: необходимо обеспечить достоверность расчетов при приемлемых вычислительных затратах и упростить создание расчетной модели инженером-разработчиком, не предъявляя высоких требований к опыту работы со специальными программными средствами и вычислительными методами. Рассматриваемая методика проектирования решает поставленные задачи [8].

Процесс проектирования СВЧ фильтра на КНТО включает в себя следующие этапы:

1. Расчет фильтра-прототипа.
2. Синтез базовой конструкции фильтра.
3. Оптимизация конструкции фильтра с целью достижения требуемых электрических параметров на основе численных расчетов:
 - а) создание расчетной модели;

- б) расчет;
- в) анализ результатов расчета, коррекция топологии фильтра;
- 4. Изготовление образцов фильтра и измерение их характеристик (первая итерация).

5. Анализ полученных результатов, а в случае необходимости – коррекция конструкции фильтра и выполнение второй итерации по изготовлению образцов фильтра.

Рассматриваемая методика проектирования основана на численном решении электродинамической задачи. Применение численных электродинамических расчетов позволяет сократить экспериментальную отработку фильтров до двух итераций. На основе анализа возможностей коммерческих программных продуктов, реализующих различные численные методы, выбраны программные комплексы ANSYS и CST Studio.

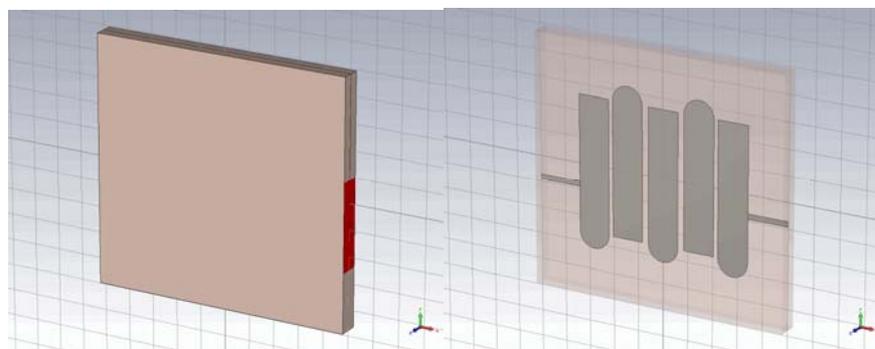


Рис. 2. Внешний вид рассчитанного фильтра

Для примера был рассчитан фильтр Чебышева 5 порядка с полосой пропускания 18,3-18,6 ГГц во внутренних слоях КНТО на материале DuPontt GreenTape 943 с толщиной слоя 217 мкм. Синтез и первичный расчет производился в ANSYS, конечной расчет 3D модели - в CST Studio. Внешний вид фильтра представлен на рисунке 2, S-параметры приведены на рисунке 3.

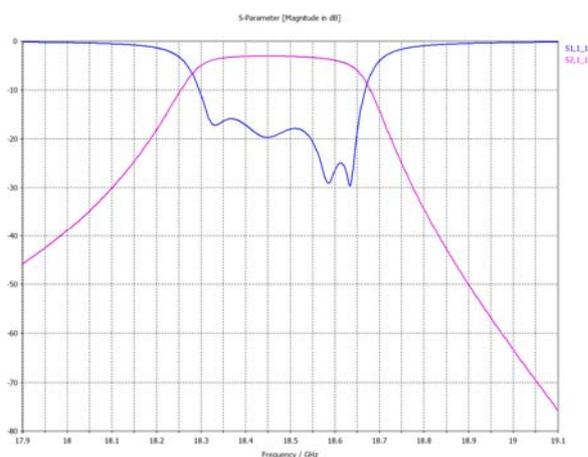


Рис. 3. S-параметры рассчитанного фильтра

Литература

1. Куприянов П. В. Широкополосные инфрадинные преобразователи СВЧ / П.В. Куприянов // Электронная техника. - Сер.1: СВЧ-техника. – 2003. - Вып.1(481).
2. Симин А., Холодняк Д., Вендик И. Многослойные интегральные схемы сверхвысоких частот на основе керамики с низкой температурой обжига // Компоненты и технологии = Components & Technologies. – 2005. – №5. – С. 81-88.

ХЕШИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ПОИСКА ФИБОНАЧЧИ

М.Ю. ЯСТРЕБОВ

Государственный университет морского и речного
флота имени адмирала С.О.Макарова, г. Санкт-Петербург,
e-mail: rectorat@gma.ru

УДК 004.424.47:004.424.43

Ключевые слова: поиск Фибоначчи, полнота поиска, представление чисел, троичная система, хеширование.

На основе поиска Фибоначчи в упорядоченном массиве строится кортеж в трёхсимвольном алфавите, задающий блуждание при поиске. Далее на основе преобразования троичной записи числа к допустимому кортежу задаётся процедура хеширования.

Поиск Фибоначчи (Ф-поиск) ключа $i \in \{1, \dots, F_{k+1} - 1\}$ со стартовым индексом F_k , как он изложен в [1], равносильно представлению

$$i = F_k + c_{k-2}F_{k-2} + c_{k-3}F_{k-3} + \dots + c_1F_1$$

и задаётся кортежем

$$g_k(i) = (c_{k-2,i}^{(k)}, c_{k-3,i}^{(k)}, \dots, c_{1,i}^{(k)}),$$

в котором компоненты $c_{j,i}^{(k)}$ могут принимать значения из множества $\{-1, 0, 1\}$ и задают блуждание по массиву. В то время как общее число таких кортежей равно 3^{k-2} , Ф-поиску соответствуют лишь $F_{k+1} - 1$ из них.

Назовём кортеж *допустимым*, если он соответствует Ф-поиску некоторого $i \in \{1, \dots, F_{k+1} - 1\}$. При фиксированном k (и, значит, фиксированном F_k) $g_k(i)$ можно рассматривать как представление числа i в системе счисления с основанием F_k , которую назовём *Ф-поисковым представлением*. Оно отличается от *фибоначчиевой записи* [2] в виде последовательности нулей и единиц.

Назовём при заданном k кортеж $(c_{k-2}, c_{k-3}, \dots, c_1)$ со значениями компонент $c_j \in \{-1, 0, 1\}$ *правильным*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) $c_j \neq 0$, $c_{j-1} = 0$, $c_{j-2} = 0$, то $c_{j-3} = c_{j-4} = \dots = c_1 = 0$; 2) если $c_j = 1$, то $c_{j-1} = 0$; 3) $c_1 \neq 1$; 4) если $c_{k-2} = 0$, то $c_{k-3} = c_{k-4} = \dots = c_1 = 0$; 5) если $c_j = -1$, $c_{j-1} = 0$, то $c_{j-2} \neq 1$.

В [3] показано, что понятия допустимости и правильности для кортежа $(c_{k-2}, c_{k-3}, \dots, c_1)$ равносильны.

Процедура хеширования, основанная на Φ -поисковом представлении. Записанное в троичной позиционной системе счисления число $n \in \{1, 2, \dots, 3^k - 1\} = A(k)$ задаётся кортежем g из k нулей, единиц и двоек. Если заменить все двойки на минус-единицы, получим кортеж g' , который может оказаться Φ -поисковым представлением некоторого другого числа $n' \in \{1, 2, \dots, F_{k+3} - 1\}$: $g' = g_{k+2}(n')$. В этом случае хеширование разреженного массива a_n , $n \in A(k)$ означает соответствие $a_n \rightarrow b_{n'}$, и мы задаём хеш-функцию

$$\text{в виде } h(n) = n' = F_{k+1} + \sum_{i=1}^k c_i F_i.$$

Наряду с преобразованием кортежа троичной записи в потенциально Φ -поисковое представление по схеме $(0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow -1)$, возможны ещё пять других вариантов преобразования (то есть всего 3!).

Если же кортеж g' не является допустимым, то для хеширования необходим механизм его преобразования в допустимый. Априори представляется разумным механизм преобразования, связанный с заменой недопустимых групп символов [3]. Запрещёнными в допустимом кортеже являются: а) тройки $(0, 0, -1)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$ — последняя, если не является концевой; б) пары $(1, -1)$, $(1, 1)$; в) конечная пара $(\forall, 1)$, где $\forall = 0, 1, -1$; г) начальная пара $(0, 1)$, $(0, -1)$; д) тройка $(-1, 0, 1)$. Поэтому сначала в конечной паре $(\forall, 1)$, если она присутствует, \forall заменяется на 0 при чётном количестве минус-единиц в кортеже и на -1 при нечётном. Затем начальная пара $(0, 1)$, если она присутствует, заменяется на $(-1, 1)$, а начальная пара $(0, -1)$ — на $(-1, -1)$. Далее случаи в) и г) уже встретиться не могут. Затем при движении слева направо с последовательным сдвигом на одну позицию тройка $(0, 0, 1)$ заменяется на $(0, 1, 0)$, тройка $(0, 0, -1)$ — на $(0, -1, 0)$; неконцевая тройка $(0, 0, 0)$ заменяется на $(0, 1, 0)$ при чётном количестве

минус-единиц в исходном кортеже и на $(0, -1, 0)$ при нечётном. После прохода по всему кортежу случай а) больше встретиться не может. Для устранения случая б) при движении слева направо пары $(1, -1)$, $(1, 1)$ заменяются на пару $(-1, -1)$. Новых нулей при этом не появляется. На последнем этапе тройки $(-1, 0, 1)$ заменяются на $(-1, 0, -1)$.

Заметим, принудительное введение в кортеж минус-единиц в большем числе случаев, чем введение единиц, хорошо согласуется с тем, что правое поддерево Фибоначчи имеет порядок на два меньший, чем левое (в правом поддереве первая компонента кортежа является единицей, а в левом — минус-единицей).

Процедура поиска Фибоначчи может служить для формирования как новой трёхсимвольной системы счисления, так и новой процедуры хеширования, не предполагающей выполнение «медленных» операций умножения и деления. Более общо изложенный подход даёт методологическую основу для использования в указанных целях и других поисковых процедур. Дополнительную вариативность Φ -поисковому подходу даёт возможность изменения корневого узла F_k .

Литература

1. Кнут В. Искусство программирования. –Т. 3. Сортировка и поиск. - 2-е изд. - М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. - 820 с.
2. Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1978. - 144 с.
3. Ястребов М.Ю. Поиск Фибоначчи - обоснование, система счисления и хеширование // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2013. - № 3 (174). - С. 53-58.

СЕКЦИЯ 2

Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

МНОГОМЕРНО-МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАССОВОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В ОБЛАЧНОЙ СИСТЕМЕ WINDOWS AZURE

Е.А. БЕЛЯКОВА, В.И. МУНЕРМАН

Смоленский государственный университет,
e-mail: gretta_li@mail.ru, vimoona@gmail.com

УДК 004.43

Ключевые слова: *многомерная матрица, база данных, таблицы, индексы, ключи, обработка данных.*

В работе рассматривается способ преобразования метаданных (ключей в индексы и обратно) для получения схемы базы данных и оптимизации процесса массовой обработки данных.

Сегодня одним из наиболее популярных методов хранения и обработки данных являются облачные хранилища, позволяющие получать доступ к информации из любой точки мира в удобное для пользователя время. Облачные сервисы Microsoft Azure включают в себя два средства, обеспечивающие хранение и обработку данных, идентифицированных ключами. К этим средствам относятся Хранилища таблиц (TableStorage) и база данных SQL-Server.

Отдельная таблица, как и таблица базы данных, созданная в виде последовательного файла, не является многомерной матрицей [1]. Для приведения базы таблицы к многомерной матрице необходимо преобразовать ключи в индексы. Для этого используются операции, подобные операциям подъёма-спуска индексов в тензорной алгебре [2]. Фактически задание индекса приводит к построению таблицы во второй или третьей нормальной форме из таблицы, находящейся в первой нормальной форме.

Пусть существует набор функций вида: $f(s): S \rightarrow N$, где S – произвольное множество, N – множество натуральных чисел. Функции такого вида называются функциями рандомизации. С помощью данных функций мы можем перевести атрибут (ключ таблицы базы данных) в индекс. Конечная цель использования подобного рода функций: выполнение (λ, μ) –свёрнутого произведения в процессе массовой обработки данных.

В предыдущей работе было введено определение операции (λ, μ) – свёрнутого произведения и её оптимизации посредством введения тензорных операций подъема и спуска индексов.

Теорема. *Операция подъёма-спуска индексов есть операция сортировки.*

Итак, преобразование атрибута в ключ происходит в два этапа:

- 1) рандомизация атрибута (если в этом есть необходимость).
- 2) сортировка элементов множества для получения лексикографически упорядоченной совокупности ключей.

Итогом приведенной последовательности действий становится фактическая рандомизация функций преобразования индексов в λ и μ индексы для дальнейшей обработки.

Авторы благодарны корпорации Microsoft за возможность проведения экспериментальных исследований в облачной системе Windows Azure в рамках гранта, предоставленного Смоленскому государственному университету.

Литература

1. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2012. – Т. 8. – № 3. – С. 19–22.
2. Белякова Е.А., Мунерман В.И. Использование операций тензорной алгебры для формализации процессов обработки данных // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013. – Вып. 14. – С. 64–65.

РАЗВИТИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ «БОЛЬШИЕ ДАННЫЕ»

В.И. БУДЗКО¹, И.Н. СИНИЦЫН²

Институт проблем информатики РАН, г. Москва,

e-mail: ¹vbudzko@ipiran.ru, ²sinitsin@dol.ru

УДК 681.3

Ключевые слова: компьютерные информационные технологии, большие данные, системы высокой доступности, цифровая информация, потоковая обработка.

Важность получения своевременной, точной и полной информации в условиях бурного роста доступных цифровых данных потребовала пересмотра парадигмы их обработки. Компьютерные технологии, стоящие за цифровой революцией, определяемой всем ходом технического прогресса, условно называются Большие данные. При неизменности принципиальной схемы и общих принципов построения средств автоматизированной информационной поддержки обработка больших данных потребовала поиска и реализации множества новых научно-технических решений.

1. Уровень развития информатизации страны – важнейший показатель научно-технического прогресса. Практически во всех областях человеческой деятельности компьютерные информационные технологии (КИТ) стали неотъемлемыми составляющими реализуемых процессов. Без КИТ невозможно осуществлять управление производственными процессами и всеми видами транспорта, проводить банковские расчеты, выполнять денежные операции с использованием кредитных карточек и пр. Развитие различных видов отраслей промышленности требует создания соответствующих обеспечивающих КИТ. В свою очередь, совершенствование КИТ выступает катализатором создания новых технологий и средств, в которых они используются. В результате КИТ после ее полного внедрения постепенно перерастает в критическую составляющую в общей технологии деятельности организации и отдельных лиц. В КИТ тенденция бурного роста порождаемых цифровых данных потребовала пересмотра парадигмы их обработки. Так, в 2011 году общий объем мировых цифровых данных превзошел отметку 1,8 зеттабайт (1,8 триллионов гигабайт), а еще через пять лет эта цифра увеличится еще в девять раз [1]. К 2020 году мировое сообщество произведет количество данных, которое будет превышать нынешнее количество минимум в 50 раз. Резко увеличится, приблизительно в 75 раз, количество форматов данных, так называемых «контейнеров», а штат IT-специалистов, управляющих аппаратными и информационными средствами, оперирующими данными, увеличится всего в 1,5 раза.

Совокупность технологий, стоящих за подготавливаемой всем ходом технического прогресса цифровой революции, сейчас условно называется Big Data (Большие Данные). Большие Данные – общий термин, используемый для описания огромного количества структурированных, неструктурированных и частично структурированных данных. Словосочетание «Большие Данные» появилось сначала в конце 1990-х среди ученых, которые не могли позволить себе сохранить или проанализировать огромные и возрастающие данные, произведенные все более и более сложными цифровыми технологическими средствами, применяемыми при решении задач физики элементарных частиц, экономики, климатологии, астрофизики и др. Эта тенденция роста сохраняется. Неструктурированные источники данных, используемые для анализа Больших Данных, могут не поместиться в традиционных хранилищах данных. Кроме того, традиционные хранилища данных не в состоянии справиться с обработкой заказов, связанных с Большими Данными. В результате, появился новый класс технологий обработки Больших Данных – технологии потоковой обработки, который применяется во многих областях анализа больших данных. Эти технологии образуют

ядро с открытым исходным кодом, которое поддерживает обработку больших наборов данных на кластерных системах [2–4].

К середине 2000-х проводились интенсивные исследования Больших Данных в таких компаниях как Google, Yahoo! Amazon и Netflix, в которые поступали возрастающие объемы данных из открытых сетей [5]. Мало того, что их объем огромен, но эти данные прибывали настолько быстро, что главная техническая проблема состояла в достижении достаточной скорости их захвата и обработки. Кроме того, поступающие данные имеют разнообразные структуры и для их обработки способностей традиционных решений недостаточно. Возрастающее количество устройств радиочастотной идентификации и считывателей, появление первых смартфонов выдвинули еще более сильные требования по обработке поступающей информации с постоянно растущей скоростью. Эти тенденции заставили Google разработать в 2004 году структуры MapReduce.

В результате выполнения проекта Apache в 2008 году была реализована система Hadoop (как общедоступное изделие) для параллельной обработки больших файлов в одном пакете. Это свободно распространяемый набор утилит, библиотек и программный каркас для разработки и выполнения распределённых программ, работающих на кластерах из сотен и тысяч узлов, которые используются для реализации поисковых и контекстных механизмов многих высоконагруженных веб-сайтов, в том числе для Yahoo! и Facebook. Hadoop, использует структуру MapReduce – платформу для вычисления некоторых наборов распределенных задач с использованием большого количества компьютеров (называемых «нодами»), образующих кластер, чтобы действовать как хранилище данных. Hadoop стал почти немедленно синонимом Больших Данных, хотя развитие Больших Данных (с деловой и с технологической точки зрения) демонстрирует, что область применения и важность Больших Данных намного более широкая. Вокруг Hadoop возникло множество связанных общедоступных проектов, направленных на обеспечение управления системами и реализацию поисковых функций с креативными именами, такими как Hive, Pig Latin, Sqoop, Zookeeper и многих др.

Несмотря на популярность файл-ориентированного подхода Hadoop, ясно, что не обойтись без функции базы данных (хотя отличающейся в определенном смысле от реляционной), чтобы управлять определенными типами Больших Данных, особенно там, где были важны разнообразие структуры и изменчивость обработки. С быстрым ростом социальных сетей, таких как LinkedIn, Facebook и Twitter, а также ранее возникших Google и Amazon, подходы нереляционной базы данных и ее обработки (их часто называют NoSQL) вышли на передний план. Описание схемы данных в случае

использования NoSQL-решений может осуществляться через использование различных структур данных: хеш-таблиц, деревьев и др. BigTable Google в 2006 и Amazon Dynamo – в 2007 стали первыми решениями в этом направлении. Среди общедоступных продуктов отметим Amazon SimpleDB, Cassandra, MongoDB и Terrastore.

2. Традиционные данные составляют меньше чем 10% цифровой информации, которой управляет бизнес. Доля традиционной реляционной технологии уменьшается в IT-бюджете и составляет 15–25%, но в большинстве случаев все еще превышает расходы на программное обеспечение NoSQL. При этом реляционная технология существенно развилась в направлении работы с большими объемами данных и достижения более высоких скоростей обработки. Massively Parallel Processing, колоночные и расположенные в памяти базы данных позволили реляционной технологии поддерживать существенно большую нагрузку и более высокие скорости.

В качестве определяющих характеристик для больших данных отмечают несколько «V» [6; 7]. Среди них:

- объём (volume), в смысле громадной величины физического объёма;
- скорость (velocity), в смыслах как скорости прироста, так и необходимости высокоскоростной обработки и получения результатов;
- многообразие (variety), в смысле возможности одновременной обработки различных типов структурированных и слабоструктурированных данных);
- достоверность (veracity), в смысле полного соответствия реальным событиям;
- обоснованность (validity) данных, в смысле возможности применения в качестве доказательного материала.

3. В бизнесе основной задачей обработки больших данных является выявление повторяющихся моделей. По оценкам, неструктурированные данные, большинство из которых расположены в текстовых файлах, составляют не менее 80% от всех данных организаций. Если оставить неуправляемым большой объем неструктурированных данных, которые генерируются каждый год на предприятии, то их хранение может стать дорогостоящим. Неуправляемые данные также могут повлечь привлечение к ответственности, если требуемая информация не может быть представлена в случае аудита или судебного иска.

Основная цель анализа Больших Данных – помочь компаниям принимать более взвешенные бизнес-решения, позволяя анализировать огромные объемы данных транзакций, а также другие источники данных, которые могут остаться неиспользованными обычными программами бизнес-аналитики. Эти другие источники данных могут включать журналы веб-серверов и данных, проходящих через Интернет,

материалы СМИ, детальные записи вызовов и информацию, полученную с помощью датчиков.

Анализ Больших Данных часто связан с облачными вычислениями, потому что анализ больших массивов данных в реальном масштабе времени требует такой структуры, как MapReduce, чтобы распределить работу среди десятков, сотен или даже тысяч компьютеров.

Потенциальные опасности, которые могут сбить с толку организации при проявлении инициативы перехода на аналитику Больших Данных, включают отсутствие внутри самой организации аналитиков с необходимыми навыками и высокую стоимость найма опытных профессионалов аналитиков, а также проблемы в интеграции новых технологий и действующих хранилищ данных, хотя продавцы начинают предлагать программное обеспечение соединений между этими технологиями, так как Большие Данные в информационных технологиях — серия подходов, инструментов и методов обработки структурированных и неструктурированных данных огромных объемов и значительного многообразия для получения человеко-читаемых результатов, эффективных в условиях непрерывного прироста, распределения по многочисленным узлам вычислительной сети, сформировавшихся в конце 2000-х годов, альтернативных традиционным системам управления базами данных и решениям класса Business Intelligence. В данную серию включают средства массово-параллельной обработки неопределённо структурированных данных, прежде всего, решениями категории NoSQL, алгоритмами MapReduce, программными каркасами и библиотеками проекта Hadoop.

Применение КИТ «Большие Данные» для систем высокой доступности является предметом обсуждения в журнале «Системы высокой доступности». Анализ современных проблем дан в [8].

4. Таким образом, условно можно считать, что мы имеем дело с большими данными, если объем исходных данных многократно превышает наши возможности для хранения. Построение современных КИТ, включающих обработку Больших Данных, требует поиска множества научно-технических решений, включающих разработку новых средств, а также выбор и применение готовых. Проблематика Больших Данных охватывает такие направления информационных технологий, как поиск источников данных, представляющих интерес для последующего анализа, выделение полезных данных из большого доступного объема, включая потоковую обработку, параллельную обработку на распределенных вычислительных мощностях данных большого объема традиционного структурированного формата, а также неструктурированных и слабоструктурированных данных. Одновременно большие усилия предпринимаются по анализу, исследованиям и разработке программно-аппаратных инструментальных

средств обеспечения аналитической обработки потоковых структурированных и неструктурированных данных большого объема, ситуационного и предсказательного прогнозирования и новой суперкомпьютерной платформы для обеспечения получения информационного продукта поддержки принятия решения в реальном масштабе времени. Научные изыскания этого направления включают разработку и развитие методов и средств:

- предсказательной аналитики (predictive analytic) на основе статистического анализа (дескриптивные статистики, различные виды регрессионного анализа, дисперсионный анализ, корреляционный анализ, факторный анализ, анализ выживаемости и т. д.), а также интеллектуального анализа данных с применением методов кластеризации, обнаружения аномалий, поиска ассоциативных правил, прогностических методов классификации (деревья решений, регрессии, нейронные сети, Байесовские сети, метод опорных векторов и т. д.);

- анализа текстов, в том числе синтаксический разбор и смысловое аннотирование текста; извлечение структурированной информации из текста при помощи как встроенных экстракторов (например, финансовых), так и создаваемых пользователем с применением специальных языков и среды разработки; подготовка извлеченной информации для дальнейшего интеллектуального анализа;

- распознавания речи и преобразования ее в текстовое представление;

- распознавания объектов, в том числе в условиях искажений и в потоке (лица, фигуры, различные объекты и т.д.) и формирования характеристик поискового образа, и многое другое.

Очень важно должным образом организовать подготовку квалифицированных кадров в области Больших Данных. В нашей стране делаются только первые шаги в этом направлении.

Литература

1. Carter P. Big Data Analytics: Future Architectures, Skills and Roadmaps for the CIO // IDS White Paper. 2011. 14 p.
2. Preimesberger, Chris Hadoop, Yahoo, 'Big Data' Brighten BI Future). EWeek (15 August 2011).
3. Gartner Says Solving 'Big Data' Challenge Involves More Than Just Managing Volumes of Data. Gartner (27 June 2011).
4. Черняк Л. Большие Данные – новая теория и практика // Открытые системы. СУБД. – М.: Открытые системы, 2011. № 10.
5. Manyka J., Chul M., Bughin J., Dobbs R., Bisson P., Mars A. Disruptive technologies: Advances that will transform life, business and the global economy. McKinsey Global Institute, May 2013, USA. – 180 p.
6. Zikopoulos P.C., Eaton C., deRoos D, Deutsch T., Lapis G. Understanding Big Data: Analytics for Enterprise Class Hadoop and Streaming Data. – The McGraw-Hill Companies, 2012. – 141 p.

7. Zikopoulos P.C., deRoos D., Parasuraman K., Deutsch T., Corrigan D., Giles J. Harness the Power of Big Data The IBM Big Data Platform. – The McGraw-Hill Companies, 2013. - 242 p.

8. Будзко В.И. Развитие систем высокой доступности с применением технологий «Большие данные» // Системы высокой доступности.- 2013. - Т. 9, № 4. – С. 3–15.

РОЛЬ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ В ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ

А.Ю. БЫЧЕНОК, В.И. МУНЕРМАН

Смоленский государственный университет,
e-mail:antonbychenok67@gmail.com, vimoona@gmail.com

УДК 004.43

Ключевые слова: OLAP-системы, многомерная матрица, Windows Azure.

В данной статье рассмотрено использование алгебры многомерных матриц для построения современных моделей данных. Показана роль этой алгебры в решении задач обработки данных и возможность ее реализации в облачных системах.

Одним из направлений, связанных с обработкой структурированных данных большого объема, являются OLAP-системы [1].

Суть этих систем состоит в том, что они создаются из таблиц баз данных – реляционных и NoSQL архитектур, с применением схемы звезда или снежинка. В результате этого образуются так называемые OLAP-кубы.

OLAP-куб – это многомерная матрица, и она не может быть получена из обычных таблиц без применения операции Join. Вместе с тем сами таблицы могут быть представлены в виде многомерных матриц, а OLAP-куб образуется в результате выполнения алгебраических операций сложения и умножения этих матриц. Однако OLAP-подход не использует развитую алгебру многомерных матриц [2].

Многомерная матрица определяется как система $(n_1 \times \dots \times n_p)$ двоичных элементов $A_{i_1 \dots i_p}$ ($i_\alpha = 1, \dots, n_\alpha, \alpha = 1, \dots, p$), расположенных в точках p -мерного пространства, определяемых координатами i_1, \dots, i_p , и обозначается $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$.

Над многомерными матрицами определены унарные операции транспонирования, сечения, свертки и бинарные операции сложения и умножения.

Суммой двух p -мерных матриц $A = \|a_{i_1 \dots i_p}\|$ и $B = \|b_{i_1 \dots i_p}\|$ с одинаковыми наборами индексов i_1, \dots, i_p называется p -мерная матрица $C = \|c_{i_1 \dots i_p}\|$ с тем же набором индексов, элементы которой вычисляются по формуле $c_{i_1 \dots i_p} = a_{i_1 \dots i_p} + b_{i_1 \dots i_p}$.

Матрица $C = \|C_{lsm}\|$, элементы которой вычисляются по формуле $c_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} b_{scm}$, называется (λ, μ) -свернутым произведением матриц A и B и обозначается ${}^{\lambda, \mu}(A \times B)$.

В этой алгебре можно построить алгебраическое выражение, вычисление которого приводит к получению OLAP-куба.

Последовательность операций Join и Union, приводящих к получению OLAP-куба, может быть записана как алгебраическое выражение, состоящее из операций сложения и (λ, μ) -свернутого произведения матриц. Это выражение может быть легко оптимизировано [3]. Кроме того, умножение многомерных матриц легко распараллеливается ленточным алгоритмом и алгоритмами Фокса и Кэннона.

Эффективным способом размещения многомерных матриц и OLAP-кубов является табличная память (Table Storage) Windows Azure [4]. В этом случае (λ, μ) -свернутое произведение матриц осуществляется при помощи специальной программы, которая реализует один из приведенных алгоритмов умножения и выполняется как совокупность параллельных потоков.

Используя базы данных, имеющиеся в Windows Azure, можно сконструировать виртуальный программно-аппаратный комплекс с SMP или MPP архитектурой. На таком комплексе возможна параллельная реализация (λ, μ) -свернутого произведения с помощью операции Join.

Авторы благодарят корпорацию Microsoft за предоставленную возможность провести экспериментальные исследования в рамках гранта, выделенного для проведения учебного курса в Смоленском государственном университете.

Литература

1. Codd S. B., Salley C. T. Providing OLAP to User-Analysts: An IT Mandate, Arbor Software Corp. Papers, 1996.
2. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972. - 175 с.
3. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – С. 83-85.
4. Redkar T., Guidici T. Windows Azure Platform, - 2nd ed. – Apress, 2011. – P. 602

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕЧЕТКИХ СИТУАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

М.А. ДЕНИСЕНКОВ

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск,

e-mail: scoz2010@yandex.ru

УДК 004.891.2

Ключевые слова: *сложная система, признак сложной системы, нечеткая ситуационная сеть.*

В работе рассматривается классификация нечетких ситуационных сетей в разрезе признаков сложных систем. Описываются основные признаки сложных систем, классификационные признаки нечетких ситуационных сетей, устанавливается соответствие между ними.

В настоящее время все большую популярность для решения аналитических задач поддержки принятия решений (ППР) получают нечеткие ситуационные сети (НСС). Они являются наиболее перспективным и простым способом решения таких задач. Необходимость в их применении наиболее часто возникает при анализе и работе со сложными системами. Поэтому необходимо провести классификацию НСС на основании таких систем, а именно в разрезе их отличительных черт, признаков.

Существует большое число разнообразных определений понятия «сложная система». Поэтому наиболее полно сложная система может быть описана посредством своих отличительных черт, признаков [1].

Основные признаки сложных систем приведены в таблице 1 [1].

В свою очередь могут быть выделены следующие классификационные признаки нечетких ситуационных сетей:

- по взаимосвязанности признаков НСС:
 - с взаимосвязанными признаками – изменение одного признака влечет за собой изменение другого;
 - с невзаимосвязанными признаками;
- по кратности управляющих решений НСС:
 - управляющее решение может изменять значение только одного признака;
 - управляющее решение может изменять значение нескольких признаков;
- по полноте НСС:
 - полная – в НСС присутствуют ситуации, соответствующие всем возможным сочетаниям значений нечетких признаков в рамках одной нечеткой ситуации;
 - неполная;
- по виду управления [2]:

– при четких управляющих механизмах – в стратегии управления, полученной с помощью НСС, помимо лингвистических указаний о том, как изменить определенный признак, содержится также точное количественное указание, насколько изменить его;

– при нечетких управляющих механизмах – стратегия управления содержит только лингвистические указания;

- по виду представления управляющих решений:

- с лингвистическими управляющими решениями – представлены в словесной форме (увеличить скорость и т.д.);

- с нечёткими управляющими решениями – представлены в виде нечеткого отношения между признаками;

- с функциональными управляющими решениями – представлены в виде функции от значений признаков ситуации, результатом функции являются значения признаков ситуации, в которую переходит система после применения данного решения;

- по влиянию случайных факторов на исследуемую систему:

- классические НСС – влияние случайных факторов не учитывается;

- стохастические – управляющие переходы носят случайный, недетерминированный характер (под воздействием одного и того же управляющего решения из ситуации возможен переход в несколько других с различной степенью вероятности);

- по статичности:

- классические НСС;

- адаптивные – в случае отсутствия в исходной НСС нечетких ситуаций, управляющих переходов и искомым стратегий управления возможно автоматическое добавление в НСС необходимых элементов [3];

- временные – позволяют оценить функционирование системы в динамике, во времени. При этом управляющие решения являются функциями времени, каждое решение продвигает общую шкалу времени;

- смешанные;

- по составу цели:

- однокритериальные;

- многокритериальные (несколько различных целей);

- по назначению:

- стратегические;

- оперативные;

- по характеру весов управляющих переходов:

- с весами в виде значимости (важности) соответствующего управляющего решения, перехода;

- с весами в виде параметра реальной системы (например, количество ресурсов системы, которое необходимо для применения соответствующего управляющего решения в реальной системе);
- с весами в виде времени, в течение которого будет применяться решение в реальной системе (используется во временных НСС);
- с весами в виде вероятности перевода системы в конечную ситуацию управляющего перехода (используется в стохастических НСС);
- с составными весами (несколько весов различного вида);
 - по иерархичности:
 - одноуровневая НСС;
 - многоуровневая НСС;
 - по виду ситуации:
 - с нечеткими ситуациями в виде нечеткого множества 1-го уровня;
 - с нечеткими ситуациями в виде нечеткого множества 2-го уровня.

Соответствие между признаками сложных систем и классификационными признаками НСС приведено в таблице 1.

Таблица 1.

Признак сложной системы	Классификационный признак НСС
наличие большого числа взаимосвязанных и взаимодействующих элементов	<ul style="list-style-type: none"> – взаимосвязанность признаков; – кратность управляющих решений; – вид ситуации; – характер весов управляющих решений
интегративность	<ul style="list-style-type: none"> – взаимосвязанность признаков; – кратность управляющих решений
невозможность полного формального описания системы	<ul style="list-style-type: none"> – характер весов управляющих решений; – полнота; – вид управления; – вид представления управляющих решений; – вид ситуации; – статичность
отсутствие методов, описывающих все аспекты функционирования системы	<ul style="list-style-type: none"> – кратность управляющих решений; – вид управления; – вид представления управляющих решений; – статичность; – влияние случайных факторов; – характер весов управляющих решений
подверженность влиянию случайных факторов	<ul style="list-style-type: none"> – характер весов управляющих решений; – влияние случайных факторов
непостоянство структуры и функционирования	<ul style="list-style-type: none"> – статичность; – характер весов управляющих решений; – влияние случайных факторов
многокритериальность	<ul style="list-style-type: none"> – состав цели; – назначение; – характер весов управляющих решений; – вид представления управляющих решений; – вид управления
иерархичность структуры	<ul style="list-style-type: none"> – иерархичность; – вид ситуации

Таким образом, предложенная классификация нечетких ситуационных сетей в разрезе признаков сложных систем позволяет разработать НСС, наиболее полно отражающие все особенности и отличительные черты исследуемой системы и учесть их при решении задач поддержки принятия решений.

Литература

1 Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник: Учеб. пособие для вузов / под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. - М.: Высш. шк., 2004 - 616 с.

2 Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Коровин С. Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. – М.: Наука, 1990. – 272 с.

3 Денисенков М.А. Интеллектуальная система поддержки принятия решений на основе адаптивных нечетких ситуационных сетей // V областная выставка научно-технического творчества молодежи «НТТМ-2013»: Сборник проектов. – Смоленск, 2013 – С. 58-65.

БОЛЬШИЕ ДАННЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ ДАННЫХ

Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ, Д.А. АВДЕЕВ, Е.М. КОПАРЕНКО

Смоленский государственный университет,

e-mail: ypy1101@gmail.com

УДК 002.52+004.6+681.3

Ключевые слова: *большие данные, функциональные комплексы данных (ФКД).*

Для формального описания объектного подхода к данным можно использовать функциональные комплексы данных.

Использование облачных моделей для хранения данных стало возможным в связи с виртуализацией систем хранения. Суть виртуализации данных состоит в отделении контента (содержательной части данных) от приложений, которые их используют. Контент предполагает, что данные хранятся вместе с необходимыми метаданными, включающими в себя описания данных, достаточные для их интерпретации. Другими словами, в облаках хранятся не сырые неструктурированные данные, а данные в объектном представлении. Использование облаков для хранения особенно актуально для Больших Данных (Big Data).

Заметим, что для перехода от сырых данных к структурированным удобно использовать функциональный подход [1], позволяющий представить предметную область, ассоциированную с Большими Данными, в виде функционального комплекса данных (ФКД).

Функциональный подход был предложен одним из авторов в 1984 году как метод концептуального описания предметных областей.

Функциональный комплекс данных является математической моделью понятия «модель данных». Функциональный комплекс данных может быть представлен [1] в виде многоосновной алгебраической структуры

$$\langle D_1, D_2, \dots, D_n; R; A \rangle,$$

где D_1, D_2, \dots, D_n – заданные множества (*основы*); R – конечный набор функций данных, определенных на множествах D_1, D_2, \dots, D_n (*типовая характеристика структуры*); A – ограничительные условия, накладываемые на множества D_1, D_2, \dots, D_n и функции данных из R (*аксиомы структуры*).

Таким образом, ФКД представляет собой аксиоматическую теорию (точнее, совокупность аксиоматических теорий). На основе ФКД может быть построен формальный язык описания данных [2-4] и язык манипулирования данными. ФКД служит основой для дальнейшей формализации обработки данных в рамках современных технологий программирования.

Многие специалисты в сфере обработки Больших Данных отмечают отсутствие серьезных теоретических исследований. Так, например, Хью Йошида - технический руководитель одной из крупнейших ИТ-компаний Hitachi Data Systems – в интервью об индустрии обработки Больших Данных [5] указывает на необходимость хранения информации в виде объектов и отмечает недостаточную теоретическую базу объектного подхода: «... к сожалению, чего-то готового, где были бы описаны объектные подходы к данным, пока нет, а все, что есть, еще не формализовано».

В этой связи исследования по функциональным комплексам данных нам представляются актуальными. Эти исследования могут составить теоретическую базу объектного подхода.

Литература

1. Емельченков Е.П. Базы данных. Современный подход: монография – Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ, 2010. – 60 с.
2. Емельченков Е.П., Малеин Ю.С. О функциональном подходе в теории баз данных. Смоленск: СГПУ. 1984. – 29 с. Деп. в ВИНТИ № 6046–84.
3. Емельченков Е.П., Крюков П.П., Малеин Ю.С. О математическом аппарате информационно логического обеспечения САПР ТП // Автоматика и телемеханика. – М.: АН СССР, 1990. № 4. – С. 177–183.
4. Емельченков Е.П., Левин Н.А. О моделировании сложных предметных областей // Проблемы и методы информатики. II Научная сессия ИПИ РАН. Тез. докл. / под ред. И.А. Соколова. – М.: ИПИ РАН, 2005. - С. 89–91.
5. Черняк Л. О Больших данных с четырех сторон // Открытые системы.– 2011.– №10.

ОБОСНОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ МОДАЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ВЫВОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЁТКИХ БАЙЕСОВЫХ СЕТЕЙ

А.С. ЗАХАРОВ, В.В. БОРИСОВ

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск,
e-mail: auth1989@yandex.ru, vborisov@etna-it.ru

УДК 519.248

Ключевые слова: байесовские сети доверия, модальная логика, нечёткая логика, временные модальности.

В работе предложен способ использования байесовского правила в рамках темпоральных нечётких байесовских сетей доверия, показана двойственная природа временных модальностей и особенности отрицания высказываний, использующих временные модальности. Полученные результаты позволяют расширить выразительные возможности нечётких байесовских сетей доверия и могут быть использованы для решения задач поддержки принятия решений в условиях наличия различного типа неопределённости.

Байесовские сети доверия являются математическим аппаратом для выражения причинно-следственных связей между различными переменными и извлечения информации, нетривиально следующей из описанных зависимостей [1].

Понятие полной группы событий играет важную роль в формулировке байесова правила, лежащего в основе байесовских сетей доверия. Полной группой (системой) событий в теории вероятностей называется система случайных событий - такая, что в результате произведенного случайного эксперимента непременно произойдет одно и только одно из них [2]. Противоположным событием (дополнением) для события A называется такое событие \bar{A} , что A и \bar{A} образуют полную группу событий, но являются несовместными, т.е. не могут произойти одновременно. В терминах логики высказываний это означает, что высказывание «событие A произошло» является отрицанием высказывания «событие \bar{A} произошло».

Пусть переменные A и B принимают значения из множества $\{t, f\}$. Тогда высказывания « $A = t$ », « $A = f$ », « $B = t$ », « $B = f$ » будем соответственно обозначать как A_t, A_f, B_t, B_f . Также предположим, что имеется причинно-следственная связь между наступлением события A_t, A_f и B_t, B_f . Тогда вероятность наступления события B_t может быть вычислена следующим образом (по формуле полной вероятности): $P(B_t) = P(A_t) * P(B_t | A_t) + P(A_f) * P(B_t | A_f)$. Наступление событий A_t и A_f

полностью определяет наступление события B_t . При этом события A_t, A_f называют гипотезами.

Процедура формирования набора гипотез в случае, когда используются асерторические высказывания относительно принятия переменными некоторых значений, а элементы множества значений антецедента A причинно-следственной связи попарно различны сводится к формированию набора событий вида A_{Dom_i} , где Dom_i – конкретный элемент множества значений.

В работе [3] описан аппарат темпоральных нечётких байесовских сетей доверия, который, обладая достоинствами классической байесовской сети доверия, позволяет при задании причинно-следственных связей учитывать временные модальности. Это существенно повышает выразительную мощность данного вида моделей. Однако в случае использования темпоральных высказываний понятие полной группы событий весьма нетривиально. В частности, высказывание, противоположное высказыванию «событие A наступало всегда в прошлом» или «событие A наступало когда-либо в прошлом» уже не так просто определить. Решение данной задачи актуально, поскольку позволяет обобщить формулу полной вероятности и формулу Байеса на случай темпоральных высказываний, что необходимо при наличии причинно-следственных связей, учитывающих временной аспект.

В работе [4] в качестве основы для построения модальной логики используется исчисление предикатов первого порядка. При этом рассматриваются алетические модальности (возможность, необходимость) и предлагается способ их выражения в терминах исчисления предикатов первого порядка. Данный подход можно использовать для нахождения отрицания темпоральных высказываний. Для этого модальности времени «когда-либо в прошлом» и «всегда в прошлом» нужно выразить в терминах исчисления предикатов первого порядка.

Пусть t – некоторый момент времени, P – некоторое высказывание, тогда фразу вида «высказывание P истинно в момент времени t » будем обозначать как Pt . Модальность «когда-либо в прошлом P » можно выразить следующим образом: найдётся такой момент времени в прошлом, в который истинно P , что на языке исчисления предикатов записывается как $\exists t : Pt$. Модальность «всегда в прошлом P » фактически означает следующее: в каждый момент времени в прошлом истинно P – в терминах исчисления предикатов записывается как $\forall t : Pt$.

Тогда отрицанием модального высказывания «когда-либо в прошлом P » будет формула следующего вида: $\neg \exists t : Pt$, из которой,

пользуясь аксиоматикой исчисления предикатов (правило отрицания квантифицированных формул) [4], можно вывести $\forall t: \neg Pt$, что эквивалентно «всегда в прошлом $\neg P$ ». Рассуждая аналогично, отрицание модального высказывания «всегда в прошлом P » можно представить как $\neg \forall t: Pt$, что даёт $\exists t: \neg Pt$, т.е. «когда-либо в прошлом $\neg P$ ».

Таким образом, можно сказать, что модальности «когда-либо в прошлом» и «всегда в прошлом» являются дуальными. Чтобы найти отрицание высказывания, к которому применён темпоральный оператор прошлого времени, нужно заменить данный оператор на двойственный, а подоператорное высказывание на противоположное ему.

Пусть переменные A и B могут принимать значения « t » (истина) и « f » (ложь). Тогда отрицанием высказывания « $A = t$ » является высказывание « $A = f$ ». Аналогично для B . Также между A и B существует причинно-следственная связь вида « $A \rightarrow B$ ». Используя вышеприведённые выкладки, вероятность истинности высказывания « $B = t$ » можно выразить в виде:

$$\begin{aligned} P(B_t) &= P(A_{\blacklozenge t}) * P(B_t | A_{\blacklozenge t}) + P(\neg A_{\blacklozenge t}) * P(B_t | \neg A_{\blacklozenge t}) = \\ &= P(A_{\blacklozenge t}) * P(B_t | A_{\blacklozenge t}) + P((\neg A_t)_{\bullet}) * P(B_t | (\neg A_t)_{\bullet}) = \\ &= P(A_{\blacklozenge t}) * P(B_t | A_{\blacklozenge t}) + P(A_{\bullet f}) * P(B_t | A_{\bullet f}) \end{aligned}$$

Байесово правило в этом случае, будучи применённым для нахождения вероятности события « A когда-либо в прошлом равно t », даёт следующий результат:

$$P(A_{\blacklozenge t} | B_t) = \frac{P(B_t | A_{\blacklozenge t}) * P(A_{\blacklozenge t})}{P(A_{\blacklozenge t}) * P(B_t | A_{\blacklozenge t}) + P(A_{\bullet f}) * P(B_t | A_{\bullet f})}.$$

Модальные операторы «когда-либо в прошлом на интервале от m до n » (\blacklozenge_m^n) и «всегда в прошлом на интервале от m до n » (\bullet_m^n) также являются дуальными.

Так, высказывание «когда-либо в прошлом на интервале от m до n истинно P » ($P_{\blacklozenge_m^n}$) может быть выражено в терминах логики предикатов первого порядка аналогично высказыванию P_{\blacklozenge} с учётом следующего ограничения: $t \in [m, n]$. В логике предикатов действует соглашение о том, что все переменные имеют одинаковую область значений. Однако в рассматриваемой ситуации на переменную t накладываются дополнительные ограничения, необходимо использовать ограниченные кванторы, что позволит выразить накладываемые ограничения при помощи следующих определений [5]:

$$\forall(x : A(x))B(x) \leftrightarrow \forall x[A(x) \rightarrow B(x)], \quad (1)$$

$$\exists(x : A(x))B(x) \leftrightarrow \exists x[A(x) \wedge B(x)]. \quad (2)$$

Утверждение $t \in [m, n]$ обозначим как $X_t^{m,n}$, тогда рассматриваемое высказывание в терминах логики предикатов, согласно определению 2, выглядит как: $\exists t: X_t^{m,n} \wedge P$. Аналогично, высказывание «всегда в прошлом на интервале от m до n истинно P » ($P_{\bullet_m}^n$), с учётом введённых обозначений, согласно определению 1, может быть выражено в следующем виде: $\forall t: X_t^{m,n} \rightarrow P$.

Для нахождения отрицаний рассматриваемых модальных высказываний, как и ранее, будем считать, что они эквивалентны отрицанию их формулировок в терминах логики предикатов. Так, отрицанием модального высказывания $P_{\bullet_m}^n$ является формула: $\neg \exists t: X_t^{m,n} \wedge P = \forall t: \neg X_t^{m,n} \vee \neg P = \forall t: X_t^{m,n} \rightarrow \neg P$, что эквивалентно $(\neg P)_{\bullet_m}^n$, т.е. «всегда в прошлом на интервале от m до n ложно P ». Отрицание модального высказывания $P_{\bullet_m}^n$ может быть выражено формулой $\neg \forall t: X_t^{m,n} \rightarrow P = \exists t: \neg(\neg X_t^{m,n} \vee P) = \exists t: X_t^{m,n} \wedge \neg P$, что эквивалентно $(\neg P)_{\bullet_m}^n$, т.е. «всегда в прошлом на интервале от m до n ложно P ».

Как следствие из вышеприведённых результатов, для нахождения вероятности события «А когда-либо на интервале от m до n равно t » даёт следующий результат:

$$P(A_{\bullet_{m,t}}^n | B_t) = \frac{P(B_t | A_{\bullet_{m,t}}^n) * P(A_{\bullet_{m,t}}^n)}{P(A_{\bullet_{m,t}}^n) * P(B_t | A_{\bullet_{m,t}}^n) + P(A_{\bullet_{m,f}}^n) * P(B_t | A_{\bullet_{m,f}}^n)}.$$

Полученные результаты показывают, что для непротиворечивого использования байесового правила при работе с вероятностными оценками истинности высказываний, учитывающих темпоральный аспект, необходимо задавать условные вероятности с учётом дуальной природы темпоральных операторов прошлого времени.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России № 2014/123 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности, проект № 2493.

Литература

1. Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В. Байесовские сети: Логико-вероятностный подход. – СПб.: Наука, 2006. – 607 с.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М. Высшая школа, 2001.
3. Захаров А.С. Темпоральный вывод с использованием нечётких байесовых сетей // Известия СмолГУ, № 1. 2014.
4. Вагин В.Н., Головина Е.Ю., Загорянская А.А., Фомина М.В. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / под ред. В.Н. Вагина, Д.А. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 704 с.
5. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие для студ. высш. учеб. Заведений. - 2-е изд., стер. – М.: Академия, 2008. – 448 с.

АНАЛИЗ АЛГОРИТМА БУСТРОФЕДОНА НА БОЛЬШИХ МАССИВАХ ДАННЫХ

В.В. КРАВЧЕНКОВ, В.И. МУНЕРМАН, А.А. СИМАКОВА

Смоленский государственный университет,
mr.kravchenkov@mail.ru, vimoona@gmail.com, bessima13@yandex.ru

УДК 004.43

Ключевые слова: *массовая обработка данных, распределённые базы данных.*

На основании проведенного эксперимента выявлено, что при приближении диапазона значений ключа к фиксированному количеству строк таблицы разность распределения числа строк в полученных классах эквивалентности уменьшается. В результате эксперимента подтверждена эффективность применения алгоритма бустрофедона для параллельного распределения данных.

Алгоритм бустрофедона предназначен для симметричного горизонтального распределения данных. Данные располагаются в файлах или таблицах реляционных баз данных. Над ними выполняется операция слияния нестрогих упорядоченных файлов, которой в реляционных базах данных соответствует операция JOIN. Цель распределения данных – построение параллельных алгоритмов названных операций [1].

Алгоритм бустрофедона состоит из следующих шагов.

1. На базе исходных файлов (таблиц) формируются индексные файлы (таблицы).

2. Из индексных файлов формируется файл параметров распределения, как их пересечение, и упорядочивается по возрастанию (убыванию) произведений числа записей в классах эквивалентности с одинаковым значением составного ключа.

3. Первые p пар классов эквивалентности последовательно распределяются между p вычислителями (ядрами).

4. Последние p пар классов эквивалентности в обратном порядке последовательно распределяются между p вычислителями.

5. Номер первой записи файла параметров распределения увеличивается, а номер последней записи уменьшается на p .

6. Пункты 3-5 повторяются до тех пор, пока весь файл параметров распределения не будет исчерпан.

Для оценки качества алгоритма бустрофедона был проведен вычислительный эксперимент, состоящий в следующем.

Случайным образом были сгенерированы числовые массивы, содержащие 100 000 строк. Значения элементов массивов изменялись в промежутке от 20 000 до 100 000. Строились классы эквивалентности и соответствующие им индексные файлы. На этих данных выполнялся алгоритм бустрофедона и оценивалась разность минимального и максимального числа строк в полученных классах эквивалентности.

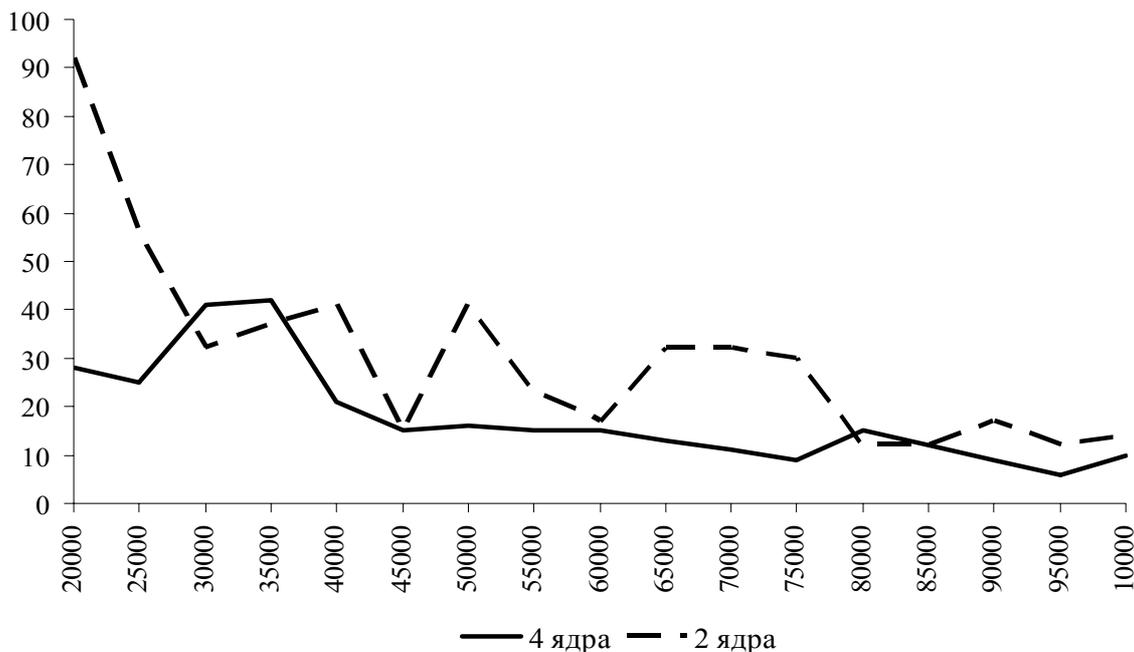


Рис. 1

Результаты эксперимента для двух и четырех вычислителей (ядер) приведены на рисунке 1. Они подтверждают тот факт, что с увеличением числа классов эквивалентности качество распределения улучшается независимо от числа вычислителей.

Из сказанного следует, что экспериментальная проверка алгоритма бустрофедона подтвердила эффективность его применения для симметричного горизонтального распределения данных и повышения эффективности параллельной реализации операций слияния нестрого упорядоченных файлов и операции JOIN.

Литература

1. Мунерман В.И. Объектно-ориентированная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2011. - Т. 7, № 1. – С. 72-74.
2. Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности. – 2011. - Т. 9, № 1. – С. 35-43.

ТЕХНОЛОГИЯ СОЗДАНИЯ ГИБРИДНЫХ МОБИЛЬНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ

Г.Г. ЛАСТОЧКИН, Т.А. САМОЙЛОВА
Смоленский государственный университет,
tatsam@hotmail.ru

УДК 004.43

Ключевые слова: *Windows Azure Mobile Services, Hybrid Mobile Apps, Apache Cordova, протокол связи, параллельная обработка, кроссплатформенность.*

Рассматривается метод разработки гибридных мобильных приложений, при котором серверная часть строится на платформе Windows Azure Mobile Services, а клиентская - с помощью Apache Cordova. Для иллюстрации подхода в среде Intel XDK создана демонстрационная программа, страницы которой иллюстрируют результаты доступа к ресурсам мобильного устройства. Фреймворк Apache Cordova, предоставляющий набор API-интерфейсов JavaScript, позволяет собрать проект под любую из мобильных операционных систем.

Концепция мобильного гибридного приложения заключается в совместной работе удаленного сервера и клиентского мобильного приложения. Основное преимущество такого подхода – это расширение возможностей мобильных устройств, которые всегда ограничены в вычислительных ресурсах и средствах хранения информации.

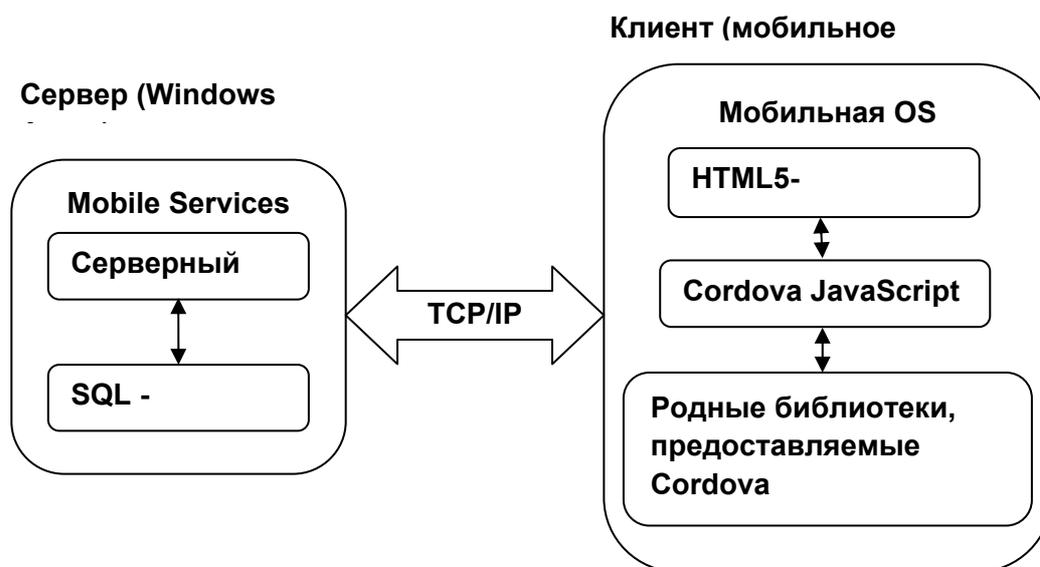


Рис. 1. Взаимодействие мобильного приложения с облачным сервисом

С другой стороны, сервер получает доступ к таким возможностям клиентских мобильных устройств, как камера, акселерометр, контакты,

файловая система или геопозиционирование. Вся работа пользователя происходит в графическом интерфейсе мобильного приложения, для которого взаимодействие с сервером носит вспомогательный характер с целью обмена данными. На наш взгляд, лучшим решением для таких разработок будет Mobile Services, который появился в облачной платформе Windows Azure [1]. Наряду с другими полезными функциями Windows Azure Mobile Services, предоставляет возможность хранения структурированных данных в облаке, к которым может получить доступ программа на любой мобильной платформе. При этом слой доступа к данным будет располагаться на удаленном уровне. В качестве общего механизма для обеспечения структурированного хранилища Windows Azure Mobile Services может быть использована новая или уже существующая база данных Windows Azure SQL Database. Для доступа к базе данных из скриптов на стороне сервера в Windows Azure Mobile Services внедрен специальный объект `mssql`, использующийся для выполнения запросов T-SQL к базе данных.

Мобильные приложения могут взаимодействовать с облачными сервисами (рис. 1) с помощью разнообразных протоколов и методов. Сюда относятся HTTP-запросы, сообщения электронной почты SMTP, SOAP-сообщения веб-сервисов, DCOM для удаленных компонентов, протоколы удаленного доступа к базе данных и другие стандартные или специальные протоколы связи на базе TCP/IP.

На стороне сервера организуются конечные точки, которые принимают, передают и синхронизируют данные клиента в защищенном режиме. При этом создается стратегия выявления и управления конфликтами параллельной обработки, которые возникают при попытке обновления централизованно хранящихся данных многими пользователями.

Наиболее быстрым и удобным решением разработки приложения для всех существующих мобильных платформ является упаковка кода, основанного на HTML5 и JavaScript, в нативное приложение средствами фреймворка Apache Cordova [2]. Для иллюстрации данного подхода нами создана демонстрационная программа, страницы которой иллюстрируют результаты доступа к ресурсам мобильного устройства (рис. 2).

Программа реализована в среде Intel XDK, где фреймворк Apache Cordova позволяет собрать проект под любую из поддерживаемых мобильных операционных систем (iPhone /iPhone 3G, iPhone 3GS и новее, Android 1.0 – 4.0, Windows Phone 7, BlackBerry 4.6 – 4.7, BlackBerry 5.x – 6.0 и новее, Bada, Symbian, webOS, Tizen и Ubuntu Touch) [3]. Тем самым достигается кроссплатформенность приложения практически без изменения его кода. Помимо этого, фреймворк Apache Cordova предоставляет набор API-интерфейсов JavaScript для доступа к

ресурсам мобильного устройства (акселерометр, камера, компас, звуковая подсистема, файловая система т.д.), что позволяет создавать практически не уступающие нативным приложения, в то время как у обычных веб-приложений такой возможности нет.



Рис. 2. Страницы демонстрационной программы

Авторы благодарны компании Microsoft за предоставление средств Windows Azure для Смоленского государственного университета.

Литература

1. Облачный бэкенд как сервис для Windows, iOS, Windows Phone, Android и мобильных HTML5-приложений. URL: <http://msdn.microsoft.com/ru-ru/dn271646.aspx>.
2. Apache Cordova. URL: <http://cordova.apache.org/>.
3. Intel® XDK Разработка мобильных HTML5 приложений. Максим Хухро, Intel. URL: <http://www.slideshare.net/Apps4All/intel-xdk-html5-intel>.

РЕАЛИЗАЦИЯ MPP АРХИТЕКТУРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ МАССОВОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В WINDOWS AZURE

Д.И. МАКАРОВ, В.И. МУНЕРМАН

Смоленский государственный университет,
e-mail: makarov.dmitriy67@gmail.com, vimoon@gmail.com

УДК 004.22

Ключевые слова: *облачные системы и вычисления, параллельная обработка данных, массовая обработка данных, архитектура программно-аппаратных комплексов, методы доступа.*

Рассмотрен метод параллельной реализации операции JOIN на основе принципа симметричного горизонтального распределения. Показано, как можно построить виртуальный программно-аппаратный комплекс с MPP архитектурой для реализации этой операции средствами Windows Azure.

Для параллельной реализации теоретико-множественной модели данных [1] могут использоваться различные архитектуры вычислительных комплексов. В докладе рассматривается возможность построения для этой цели массивно-параллельной системы (MPP) средствами Windows Azure. Единственное требование к таким системам состоит в том, чтобы каждый процессор (ядро) был ассоциирован с собственным устройством массовой памяти (в простейшем случае – дисковым накопителем).

Далее рассматривается возможность параллельной реализации операции соединения файлов, которой соответствует реляционная операция Join [2]. По определению операции в ней участвуют два файла X_M и Y_M . Из определения также следует, что файл-результат $Z_M = \bigcup_{i=1}^n X_{K_{(i)}^*} \times Y_{K_{(i)}^*}$. Файлу X_M можно поставить в соответствие индексный файл $indX_M = (< K_{(1)}^*, I_{1X}, m_{1X} >, \dots, < K_{(n)}^*, I_{nX}, m_{nX} >)$. Здесь I_{jX} – индекс первой записи класса эквивалентности $X_{K_{(j)}^*}$, m_{jX} – количество записей в этом классе эквивалентности. Аналогично файлу Y_M соответствует индексный файл $indY_M = (< K_{(1)}^*, I_{1Y}, m_{1Y} >, \dots, < K_{(n)}^*, I_{nY}, m_{nY} >)$. В обоих индексных файлах, если класс эквивалентности $X_{K_{(j)}^*}$ ($Y_{K_{(j)}^*}$) состоит из единственной универсальной неопределенной записи Θ , то значение I_{jX} (I_{jY}) не определено, а $m_{jX}(m_{jY})=0$. Классы эквивалентности файлов X_M и Y_M распределяются между массовыми памятью вычислителей по следующему правилу: для любого j классы эквивалентности

- 1) $X_{K_{(j)}^*} \neq \Theta$ и $Y_{K_{(j)}^*} \neq \Theta$;

- 2) $X_{K_{(j)}^*}$ и $Y_{K_{(j)}^*}$ находятся в массовой памяти одного и только одного

вычислителя.

В результате вычислитель, в массовой памяти которого находится p пар классов эквивалентности файлов X_M и Y_M , должен сформировать

$$R = \sum_{i=1}^p m_{iX} \times m_{iY} \text{ записей файла-результата } Z_M.$$

При использовании облачных технологий прямой доступ к хранилищу затруднителен, вместо этого предоставлены стандартные

средства управления данными, такие как SQL. С другой стороны, облачные технологии обеспечивают высокую скорость работы и легкую масштабируемость.

Для выполнения операции соединения нестрогих упорядоченных файлов необходима операция получения данных по ключу. В SQL данной операцией является `SELECT ... WHERE <Ключ>=<Значение>`. Данная операция будет использоваться для создания индексно последовательных файлов. В случае с облачным хранилищем индекс первой записи в индексном файле не требуется.

Windows Azure [3] предоставляет два вида хранилища данных в облаке:

1. Windows Azure Table Storage – это отказоустойчивый сервис хранилища NoSQL (ключ-значение), хранящий большие объемы нереляционных данных.

2. Windows Azure SQL Database является сервисом реляционных баз данных, расширяющих базовую функциональность SQL Server в облако.

Windows Azure Table Storage позволяет выполнять операции INSERT, UPDATE, DELETE, SELECT, отдельная пользовательская таблица, принадлежащая, SQL Database, также позволяет выполнять все эти операции. С точки зрения вычислителя не имеет значения, к какому источнику данных обращаться для их получения, так как оба этих типа хранилища позволяют извлекать данные, используя одинаковые операции SELECT.

Облачные технологии, такие как Windows Azure, позволяют создать синхронизированные копии источников данных, что позволит вычислителям обращаться к различным источникам данных, тем самым повышая скорость обработки.

Авторы благодарят корпорацию Microsoft за предоставленную возможность провести экспериментальные исследования в рамках гранта, выделенного для проведения учебного курса в СмолГУ.

Литература

1. Мунерман В.И. Объектно-ориентированная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2011. - Т. 7, № 1. – С. 72-74.
2. Левин Н.А., Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности.– 2013. - Т. 9, №1. – С. 35-43.
3. Redkar T., Guidici T. Windows Azure Platform. - 2nd ed. – APRESS, 2011. – P. 602.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАЦИИ СОЕДИНЕНИЯ СРЕДСТВАМИ WINDOWS AZURE

В.И. МУНЕРМАН, Д.В. МУНЕРМАН
Смоленский государственный университет,
e-mail: vimoon@gmail.com

УДК 681.3.06

Ключевые слова: облачные системы и вычисления, параллельная обработка данных, массовая обработка данных, архитектура программно-аппаратных комплексов, методы доступа.

Рассмотрен метод параллельной реализации операции JOIN на основе принципа симметричного горизонтального распределения. Приведено описание виртуального программно-аппаратного комплекса, который реализует распараллеливание на уровне обработки запросов в облачной системе. Показано, как можно построить виртуальный программно-аппаратный комплекс для реализации этой операции средствами Windows Azure. Приведены экспериментальные данные, подтверждающие эффективность предложенного подхода.

Рассматривается использование облачной технологии для параллельной реализации операции JOIN. Эта операция выбрана потому, что она имеет более высокую вычислительную сложность, чем остальные операции, определенные в моделях данных. Для параллельной реализации выбрана следующая разновидность операции JOIN:

$R \text{ INNER JOIN } Q \text{ ON } \pi(R.K, Q.K);$

Таблицы R и Q имеют разные схемы, в каждую из которых входит простой или составной ключ K . Предикат π определен на множествах экземпляров ключа K в таблицах R и Q . Далее, для простоты, но без нарушения общности предполагается, что в операции JOIN используется предикат $\pi: R.K = Q.K$.

Для построения параллельной реализации JOIN-операции необходимо использовать промежуточную модель данных. Промежуточная модель должна обеспечить решение проблемы эффективного отображения алгоритма, который реализует эту операцию, на SMP архитектуру программно-аппаратного комплекса. Теоретико-множественная модель (файловая модель) [2] лучше, чем остальные модели, подходит для этой цели.

Основной агрегат данных в теоретико-множественной модели – файл, который определяется как фактор-множество множества

однотипных записей X по отношению эквивалентности, порожденному множеством K , и обозначается X_K .

Соответствие между файлами и таблицами устанавливается легко, потому что запись файла есть способ представления схемы таблицы. Запись должна содержать набор таких полей (множество ключей K), которые можно использовать для построения составного ключа. Основное требование состоит в том, что по множеству ключей K строго упорядоченному файлу должна соответствовать таблица в третьей нормальной форме. В общем случае, при выполнении операции JOIN предикат π определен на множестве $M \subset K$. Тогда файлы нестрого упорядочены, а таблицы, им соответствующие, будут в первой нормальной форме. В этом случае таблицы, как и файлы, состоят из классов эквивалентности, в которых все строки содержат один и тот же экземпляр составного ключа K . Тогда для параллельной реализации операции JOIN можно использовать метаданные, определяющие распределение строк таблицы по классам эквивалентности. Такой подход называется индексно-последовательным и основан на одноименном методе доступа – ISAM.

Пусть K_1, \dots, K_n – множество значений ключа K . Таблицы $P(K, \dots)$ и $Q(K, \dots)$ имеют схемы, которые содержат составной ключ K и произвольные наборы полей (как правило, различные). Таблице P можно поставить в соответствие индексную таблицу со схемой $indP(K, I, M)$. Эта таблица – есть множество строк

$$indP = \{ \langle K_1, I_1, M_1 \rangle, \dots, \langle K_n, I_n, M_n \rangle \},$$

где I_j – индекс первой записи класса эквивалентности, строки которого содержат значение K_j ключа K ; M_j – количество записей в этом классе эквивалентности. Таблица $indP$ может быть получена в результате двух запросов:

1. Q1=INSERT INTO indPt (K, M) SELECT P.K, 1 AS M FROM P ORDER BY P.K;

2. Q2=SELECT indPt.K, First(indPt.NR) AS [First-I], Sum(IndPt.M) AS [Count-M] INTO indP FROM IndPt GROUP BY indPt.K ORDER BY indPt.K;

Таблица $indQ$ для таблицы P может быть получена аналогично.

Очевидно, что таблица - результат операции JOIN будет содержать только те классы эквивалентности, которые принадлежат пересечению индексных таблиц $indP \cap indQ$. Запрос, в результате которого получается это пересечение, имеет вид:

SELECT indP![Count-M]*indQ![Count-M] AS MM, indP.K, indP.[First-I], indQ.[First-I], indP.[Count-M], indQ.[Count-M] INTO ComInd FROM indP, indQ

WHERE (((indP.K)= indQ.[K])) ORDER BY indP![Count-M]*indQ![Count-M] DESC;

Результат запроса – таблица ComInd. Она содержит составной ключ K, поля I и M обеих индексных таблиц, а также поле MM, по которому она упорядочена по убыванию. Поле MM вычисляется как произведение количества строк в обоих классах эквивалентности, строки которых содержат одно и то же значение составного ключа K. Его значение определяет число выходных строк, которое получится в результате обработки этих классов эквивалентности операцией JOIN.

Использование таблицы ComInd позволяет распределить таблицы P и Q между несколькими независимыми базами данных. Если имеется N таких баз данных, то эти таблицы разделяются на N фрагментов. Каждая база данных DB_i содержит пару фрагментов <P_i, Q_i> таблиц P и Q. При этом классы эквивалентности, записи которых содержат одинаковые значения составного ключа K, полностью расположены в одном и только одном фрагменте. Такой способ распределения таблиц называется принципом симметричного горизонтального распределения данных.

Пусть база данных DB_i содержит фрагменты P_i и Q_i, каждый из которых содержит p_i пар классов эквивалентности таблиц P и Q. Операция P_i INNER JOIN Q_i создаст таблицу, которая будет содержать

$R_i = \sum_{j=1}^{p_i} MM_j$ строк. Очевидно, что чем меньше значение разности $R_{max} - R_{min}$, тем более эффективно распараллеливание операции JOIN.

Для распределения пар классов эквивалентности между базами данных используется эвристический алгоритм бустрофедона [3].

Симметричное горизонтальное распределение таблиц P и Q между N базами данных фактически приводит к построению виртуального программно-аппаратного комплекса с SMP архитектурой, который располагается в облачной системе (рис. 1).

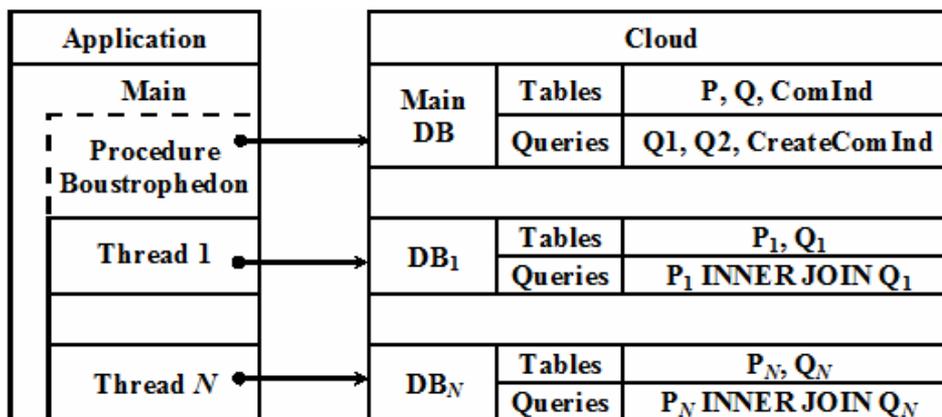


Рис. 1. Структура виртуального программно-аппаратного комплекса для массовой обработки данных

Для оценки качества распараллеливания операции JOIN проведен вычислительный эксперимент. Виртуальный комплекс был построен на основе Windows Azure – платформы Microsoft, разработанной для реализации облачных вычислений. В состав комплекса входили пять независимых баз данных. Из них четыре использовались для симметричного горизонтального распределения таблиц. Результаты эксперимента приведены на рисунке 2.

Эксперимент проводился для таблиц P и Q, число строк в которых изменялось от 400 000 до 2 500 000. Распределение таблиц производилось на основе алгоритма бустрофедона. На рисунке 2 приведены экспериментальные данные, подтверждающие тот факт, что применение предложенного авторами метода параллельного выполнения операции JOIN дает существенное повышение производительности при реализации задач массовой обработки данных.

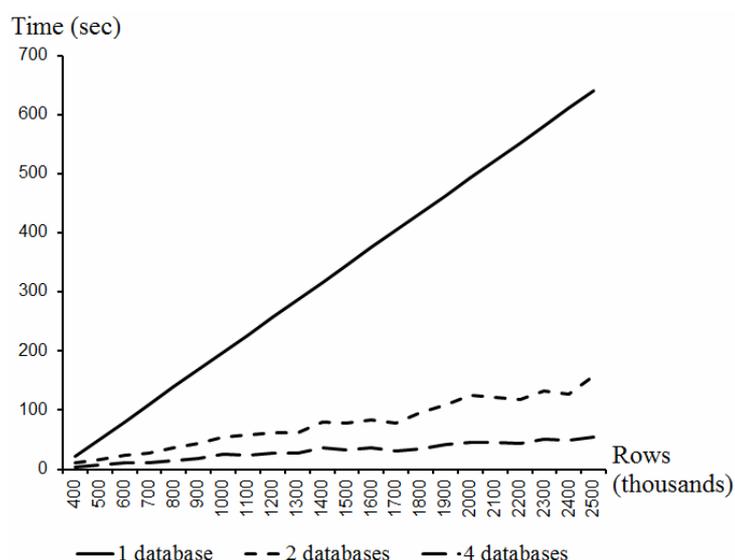


Рис. 2. Сравнительный анализ времени последовательного и параллельного выполнения операции JOIN

Авторы благодарят корпорацию Microsoft за предоставленную возможность провести экспериментальные исследования в рамках гранта, выделенного для проведения учебного курса в Смоленском государственном университете.

Литература

1. Redkar T., Guidici T. Windows Azure Platform. - 2nd ed. – APRESS, 2011. – P. 602.
2. Мунерман В.И. Объектно-ориентированная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2011. - Т. 7, № 1. – С. 72-74.
3. Левин Н.А., Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности. – 2013. - Т. 9, № 1. – С. 35-43.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЛАЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В WINDOWS AZURE

В.И. МУНЕРМАН, В.В. УСАЧЕВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: vimoona@gmail.com, vitek319@yandex.ru

УДК 681.3.06

Ключевые слова: *модели данных, массивно-параллельные системы, симметричные мультипроцессорные системы.*

В докладе предложен метод многоуровневого распараллеливания операции умножения матриц, основанный на формуле Фробениуса.

Существует целый ряд отраслей, в которых возникает необходимость решения задач обработки структурированных данных большого объема. Для этой цели используются модели, основанные на алгебрах матриц. Далее рассматривается подход к повышению эффективности параллельной реализации умножения матриц в зависимости от числа ядер процессора [1].



Рис. 1. Зависимость времени умножения матриц от их размерности и способа распараллеливания алгоритма

Предложен метод многоуровневого распараллеливания операции умножения матриц, основанный на формуле Фробениуса [2]. В опыте не используется ленточный и другие алгоритмы распараллеливания, так

как эти алгоритмы могут использовать предложенный метод на нижнем уровне вычислений. Рассматриваемый метод позволяет использовать возможности SIMD-архитектуры процессора. Для этого блоки матриц располагаются в XMM-регистрах и умножаются с использованием аппаратного параллелизма.

Для проверки качества распараллеливания умножения матриц и выявления зависимостей был проведен вычислительный эксперимент на четырёхядерном процессоре при следующих условиях.

1. Для сравнения рассмотрены варианты параллельного умножения квадратных матриц с целочисленными элементами, следовательно, размерность блоков нижнего уровня – 4×4 .

2. Размерности индексов матриц выбирались из диапазона: 100, 300 и далее с шагом 300 до 3000, которые подгружались в программу из Data Storage Windows Azure.

3. На каждом шаге выполнялось два умножения матриц: с использованием SSE-технологии и без ее использования.

4. Распараллеливание умножения матриц осуществлялось посредством двух, трех и четырех параллельных процессов.

Результаты эксперимента представлены на рисунке 1.

Поскольку матрицы ограничены объемом оперативной памяти и возможностью адресации процессора и языка программирования, мы можем себе позволить $(3 \cdot 10^3)^2$. Возникает проблема их хранения в виде типизированных файлов i, j, v , где i, j – индексы, v – значение элементов. Облака предоставляют объекты типа таблиц. Можно использовать Windows Azure для этой цели, используя многомерные матрицы средствами оптимизации обработки структуры Big Data.

С использованием данного хранилища получена следующая зависимость $Z = \frac{M_{np^4}}{M_{посл.}}$. Зависимость получается отношением

параллельного умножения на четырёх потоках и последовательного умножения на одном потоке.

Авторы благодарны корпорации Microsoft за возможность проведения экспериментов в облачной системе Windows Azure в рамках гранта предоставленного Смоленскому государственному университету.

Литература

1. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2012. - Т. 8, № 3. – С. 19-22.

2. Ефимов С.С. Обзор методов распараллеливания алгоритмов решения некоторых задач вычислительной дискретной математики // Математические структуры и моделирование. – 2007. - Вып. 17. - С. 72–93.

3. Мунерман В.И., Усачев В.В. Один способ параллельной реализации умножения матриц // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013. - Вып. 14. - С. 88-90.

ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА МЕТОДА ОРГАНИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ ДАННЫХ

В.И. МУНЕРМАН, И.М. ШАШЕРО

Смоленский государственный университет
e-mail: vimoon@gmail.com, imshashero@gmail.com

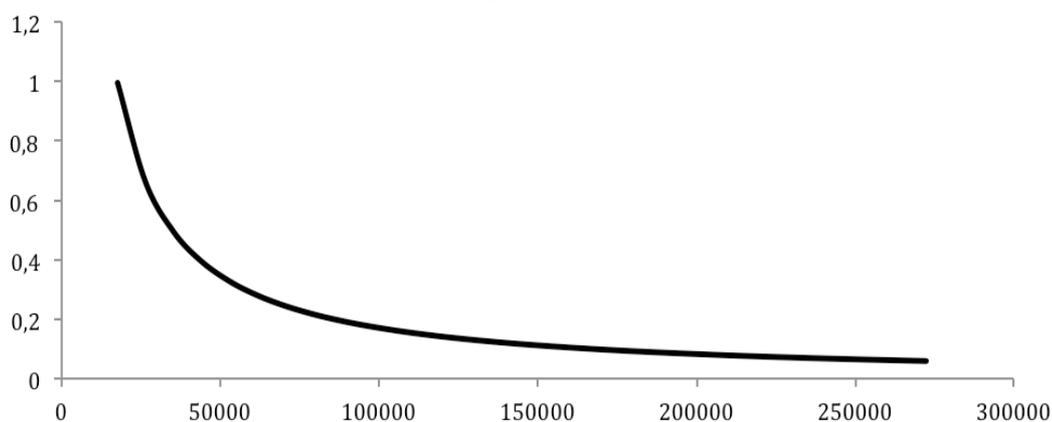
УДК 681.3.06

Ключевые слова: *Massive data processing, big data.*

В докладе рассматривается зависимость объема индексного файла от размеров классов эквивалентности. На основании этих данных принимается решение об использовании симметричного горизонтального распределения данных или представлении данных в виде многомерных матриц для дальнейшей их обработки на кластерах.

Любую базу данных можно разделить на классы эквивалентности по ключевому полю. В зависимости от природы данных, эти классы могут быть разного размера. Например, в базе данных заказов интернет-магазина классы эквивалентности будут небольшими, если в качестве ключа выступает имя лица, совершившего заказ. В другом же случае, например, в базе данных какого-нибудь завода, одно изделие может иметь множество различных комплектаций, может быть представлено в нескольких цветах, а значит, классы эквивалентности будут большими.

Для исследования зависимости объема индексного файла от размеров классов эквивалентности были сгенерированы несколько таблиц. В каждой из таблиц количество классов эквивалентности было одним и тем же, изменялись лишь размеры классов.



Ключевые поля таблиц представляют собой всевозможные трехбуквенные слова из букв английского алфавита. Каждое значение ключевого поля повторяется произвольное число раз в интервале от 1 до заданного числа R. Выше приведен график зависимости отношения

количества классов эквивалентности к общему числу элементов от значения R.

Таким образом, обработка индексных файлов эффективнее обработки исходных для случая, когда индексный файл по объёму существенно отличается от основного. Выгодно использование симметричного горизонтального распределения данных и соответствующей ему архитектуры программно аппаратных комплексов. В случае, когда индексный файл близок по объёму к исходному, более эффективно представление исходных данных в виде многомерных матриц и обработка их на традиционных архитектурах суперкомпьютеров, например кластерах.

Литература

1. Левин Н.А., Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности. – 2013. - Т. 9, № 1. – С. 35-43.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАЦИЙ СОЕДИНЕНИЯ В СИСТЕМЕ РАЗРАБОТКИ ПРИЛОЖЕНИЙ 1С

В.И. МУНЕРМАН¹, А.Ю. ШИНЕЛЕВ²
Смоленский государственный университет
e-mail: ¹vimoon@gmail.com, ²alhinelev@mail.ru

УДК 681.3.06

Ключевые слова: *большие данные, параллельное программирование, распределенные базы данных, big data, parallel programming, distributed databases.*

В докладе рассмотрена возможность эффективного использования системы разработки приложений 1С для параллельной обработки больших данных. Предложен алгоритм параллельной реализации операции соединения на основе горизонтального симметричного распределения данных. Приведен результат эксперимента, подтвердившего данный алгоритм.

Систему управления данными 1С можно рассматривать как NoSQL-систему. Это означает что основной тип данных – справочник представляет собой таблицу, к которой возможны любые запросы, основанные на выборках. Сложные бинарные операции, подобные операции соединения, программисты должны разрабатывать самостоятельно. Это даёт возможность (используя особенности архитектур современных вычислительных комплексов) повышать

эффективность операций с использованием методов параллельной обработки данных.

При слиянии нескольких справочников решение проблемы повышения скорости слияния состоит в использовании метаданных, описывающих распределение записей справочника по классам эквивалентности. Такой подход называется индексно-последовательным и основан на одноименном методе доступа – ISAM.

В операции слияния нестрого упорядоченных справочников участвуют два справочника X_M и Y_M , справочник-результат $Z_M = \bigcup_{i=1}^n X_{K(i)}^* \times Y_{K(i)}^*$. Справочнику X_M можно поставить в соответствие индексный справочник $indX_M = (< K_{(1)}^*, I_{1X}, m_{1X} >, \dots, < K_{(n)}^*, I_{nX}, m_{nX} >)$. Здесь I_{jX} – индекс первой записи класса эквивалентности $X_{K(j)}^*$, m_{jX} – количество записей в этом классе эквивалентности. Аналогично справочнику Y_M соответствует индексный справочник

$$indY_M = (< K_{(1)}^*, I_{1Y}, m_{1Y} >, \dots, < K_{(n)}^*, I_{nY}, m_{nY} >).$$

Тогда справочник-результат будет содержать только те классы эквивалентности, множества ключей которых принадлежат пересечению индексных справочников операндов $(indX_M \cap indY_M)$. Исходя из сказанного оба исходных справочника разбиваются на пары подсправочников. Число пар равно числу процессоров (ядер) вычислительной системы, которые выделяются для процессов, реализующих операцию слияния. Классы эквивалентности справочников X_M и Y_M распределяются между подсправочниками таким образом, что $X_{K(j)}^*$ и $Y_{K(j)}^*$ находятся в подсправочниках одной и только одной пары.

Для оценки качества распараллеливания операции слияния нестрого упорядоченных файлов на симметричной мультипроцессорной системе был проведен вычислительный эксперимент, в котором симметричное горизонтальное распределение справочников производилось между двумя независимыми вычислителями (ядрами).

Подсправочники-операнды каждой пары генерировались таким образом, что содержали классы эквивалентности с одинаковыми значениями экземпляров множества ключей, но различными количествами записей. На каждом шаге генерировалось по две пары подсправочников, которые одновременно обрабатывались двумя параллельными процессами, результаты которых объединялись в один справочник-результат. Затем все подсправочники-операнды объединялись в два справочника-операнда. И выполнялся один процесс, реализовавший операцию слияния нестрого упорядоченных файлов последовательно. Количество обрабатываемых на каждом этапе записей приведено в таблице 1.

Таблица 1. Объемы данных на каждом шаге эксперимента

Шаг	Количество записей (тысячи)	
	Подсправочники пар (X_M, Y_M)	Справочники (X_M, Y_M)
1	100	200
2	200	400
3	300	600
4	400	800
5	500	1000

В ходе эксперимента были получены приведенные на рисунке 1 соотношения между объемами базы данных и временами обработки этой базы двумя параллельными процессами и одним последовательным процессом.

На графике видно, что параллельная реализация операции слияния нестрого упорядоченных справочников двумя процессами требует в среднем в два раза меньше времени, чем при последовательной реализации.

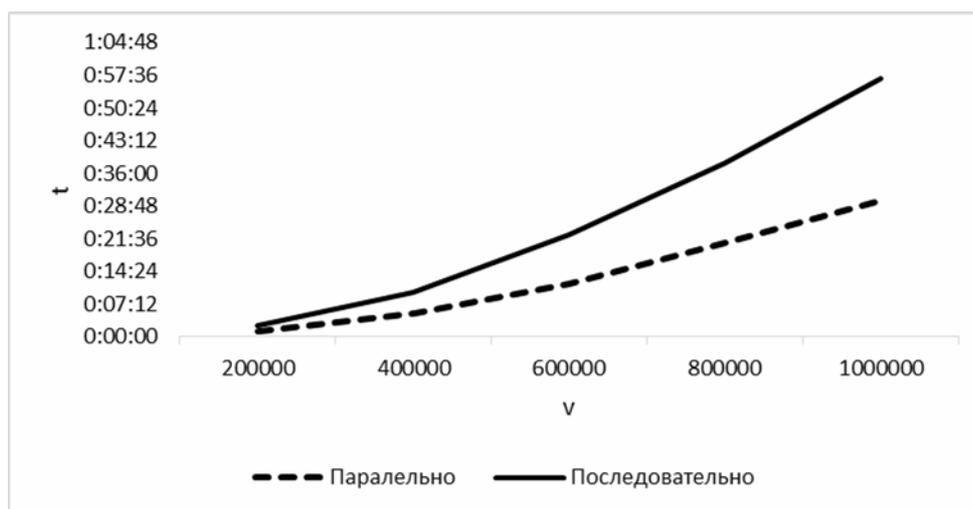


Рис. 1. Зависимость времени выполнения операции слияния от объема данных

Таким образом, на основе полученных экспериментальных данных можно сделать заключение о том, что в системе разработки приложений 1С возможна эффективная параллельная обработка больших объемов данных в различных прикладных областях.

Литература

1. Мунерман В.И. Объектно-ориентированная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2011. - Т. 7, № 1. – С. 72-74.
2. Левин Н.А., Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности. – 2013. - Т. 9, № 1. – С. 35-43.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ГРАФИЧЕСКИХ БРАУЗЕРНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ

А.В. ПОТАПОВА, Т.А. САМОЙЛОВА
Смоленский государственный университет,
e-mail: tatsam@hotmail.ru

УДК 681.3.06

Ключевые слова: *параллельные вычисления, браузерное приложение, JavaScript API, WebGL, OpenCL, River Trail, анимация, 3D-сцена.*

Рассмотрена возможность повышения производительности 3D-графики средствами River Trail-расширения для языка JavaScript, разработанного фирмой Intel для параллельных вычислений на многоядерных процессорах. Представлена связь River Trail с компонентами процессора и открытым фреймворком OpenCL, дополняющим графическую библиотеку WebGL средствами параллелизма. Приводятся результаты работы демонстрационного приложения, производящего средствами WebGL отрисовку анимации 3D-сцены. Приведена JavaScript-функция анимации, обеспечивающая одновременное вращение объектов.

С развитием входящих в HTML5 интернет-технологий, таких как JavaScript API, Canvas, SVG, WebGL и CSS3, стало реальностью создание производительных и кросс-платформенных браузерных offline-приложений, способных конкурировать по предлагаемому функционалу с их настольными аналогами. Однако скорость обработки 3D-графики средствами браузера в настольных и мобильных приложениях оставляет желать лучшего. Нами рассмотрена возможность повышения производительности 3D-графики средствами River Trail - расширения для языка JavaScript, разработанного в лабораториях Intel для параллельных вычислений на многоядерных процессорах [1]. Подобный метод стал реальным, благодаря появлению многоядерных CPU и векторных инструкций SSE/AVX, используемых для повышения производительности [2]. В нем реализована технология параллельного программирования средствами JavaScript, в который теперь включена функция создания новых объектов с типом *ParallelArray*.

На рисунке 1 представлена связь River Trail с компонентами процессора и открытым фреймворком OpenCL, дополняющим графическую библиотеку WebGL средствами параллелизма на уровне инструкций и на уровне данных, пользуясь средствами видеокарты (GPU).

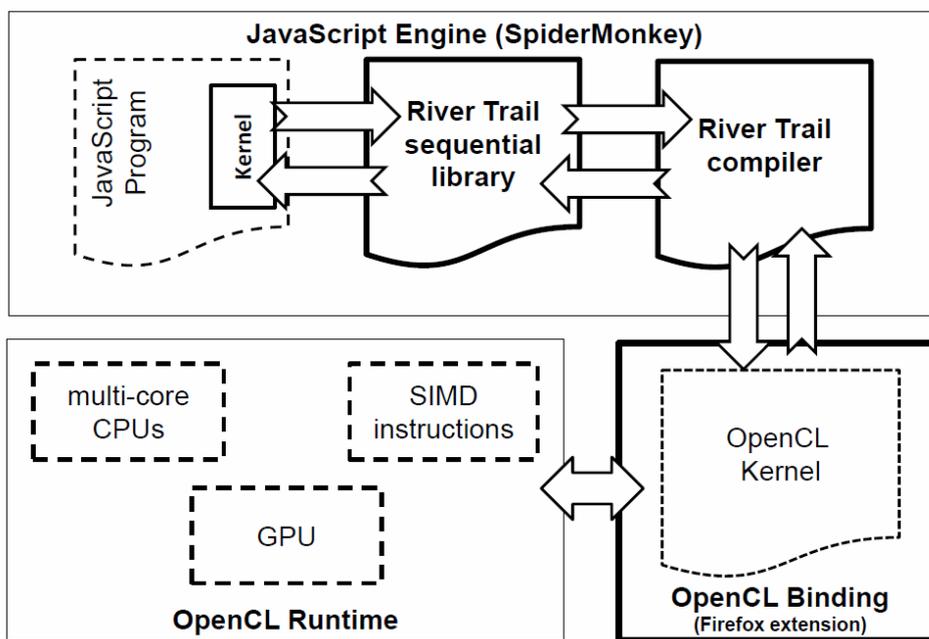


Рис. 1. Средства параллельной обработки графических данных

Параллельное программирование открывает перед разработчиками браузерных приложений новые горизонты. Так, в ходе тестирования работы River Trail выяснилось, что подобное расширение может позволить увеличить скорость работы приложения не в два и даже не в три раза, а намного больше. К примеру, при создании физических процессов на сцене, состоящей из 4 тысяч объектов, скорость отрисовки при применении традиционных Java-технологий не превысила и трех кадров в секунду, в то время как с использованием River Trail производительность увеличилась до 45 кадров.

Помимо увеличения производительности, новый подход позволит делать приложения с более красивой графикой. Таким образом, в браузере можно будет не только еще быстрее просматривать фотографии или загружать видео, но и играть в игры с трехмерной графикой. В итоге функциональность браузеров значительно расширится, что обеспечит пользователям более комфортную и быструю работу.

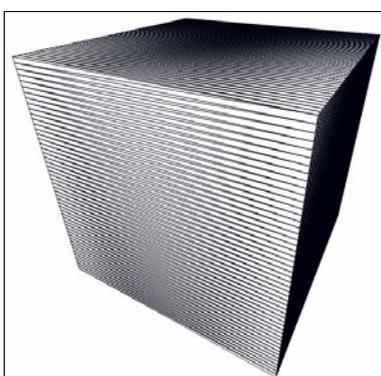
В качестве примера потенциальных возможностей River Trail на рисунке 2 приводятся результаты работы демонстрационного приложения, производящего средствами WebGL отрисовку анимации 3D-сцены из двух вращающихся объектов – квадрата и цилиндра.

При реализации демонстрационной программы нами была использована WebGL - библиотека three.min. Далее приведена JavaScript - функция анимации, обеспечивающая одновременное вращение объектов.

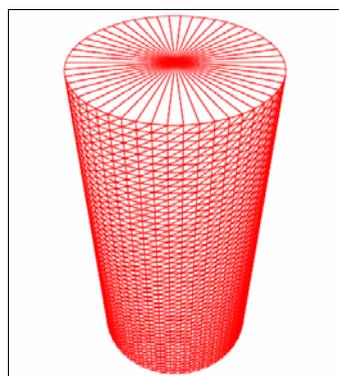
```

// функция анимации
function animate() {
    requestAnimationFrame(animate);
    // вращение меша куба вокруг осей
    mesh_Cube.rotation.x += 0.01;
    mesh_Cube.rotation.y += 0.02;
    // вращение меша цилиндра вокруг осей
    mesh_Cylinder.rotation.x += 0.01;
    mesh_Cylinder.rotation.y += 0.02;
    // рендеринг - отрисовка сцены
    renderer.render(scene, camera);
}

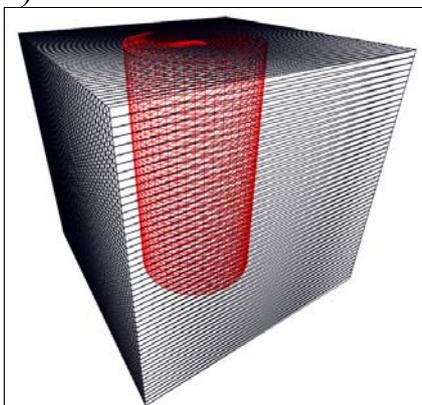
```



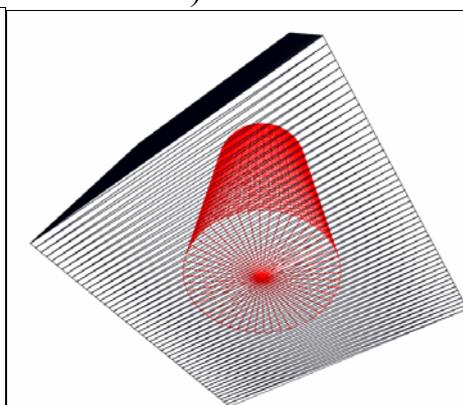
а)



б)



в)



г)

Рис. 2. Сцены анимации, полученные средствами WebGL:
 а), б) - последовательная; в), г) - параллельная совмещенная

Таким образом, рассмотренное расширение River Trail, являющееся открытым программным обеспечением, позволит приблизить к нативным программам возможности приложений, работающих внутри браузера. Станет реальным использовать данные приложения в таких требующих интенсивных вычислений областях, как обработка фотографий, редактирование видео, моделирование физических процессов и создание современных 3D-игр.

Литература

1. Stephan Herhut Richard L. Hudson Tatiana Shpeisman Jaswanth Sreeram. River Trail: A Path to Parallelism in JavaScript, Intel Labs, 2013/8/10. <http://herhut.eu/files/herhut-oopsla-2013-preprint.pdf>.

2. Мунерман В.И., Самойлова Т.А. Параллельная реализация алгоритмов вычисления хеш-функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2011. - Вып. 12. - С. 113-116.

СИСТЕМНАЯ ПОДДЕРЖКА ВЫЧИСЛЕНИЙ В МНОГОЯДЕРНОЙ КОНВЕЙЕРНОЙ СЕРВЕРНОЙ АРХИТЕКТУРЕ

А.Е.ШИРАЙ

ООО «СайнГрейн», г. Москва,
e-mail: aesheerai@gmail.com

УДК 519.283

Ключевые слова: *многоядерная конвейерная серверная архитектура, объект-сегмент, объект-сервер, объект-сообщение, интерфейс клиент-сервер, вычислительное ядро, сервер памяти, ядро сервера памяти, потоковый процессор.*

В данной работе рассматривается реализация традиционной модели вычислений в вычислительной системе, базирующейся на многоядерной конвейерной серверной архитектуре (МКСА).

Основными особенностями архитектуры МКСА являются объектная организация памяти и отказ от использования глобальных переменных.

1. Сегментно-страничная организация памяти используется в МКСА только менеджером памяти ОС.

2. Все сегменты памяти являются объектами некоторого типа. Каждый тип объектов имеет собственный интерфейс, текущее состояние, набор свойств. В частности, исполняемый код также является объектом, интерфейс которого обеспечивает выборку блоков кода для обработки структур данных, работу с метаданными и т.п.

3. Традиционные режимы адресации памяти используются в основном в системных программах, таких, например, как тесты аппаратуры.

4. К объектам-сегментам относятся многие объекты ОС, процессы, исполняемые потоки команд, что обеспечивает реализацию режимов вытесняющей многозадачности и т.п.

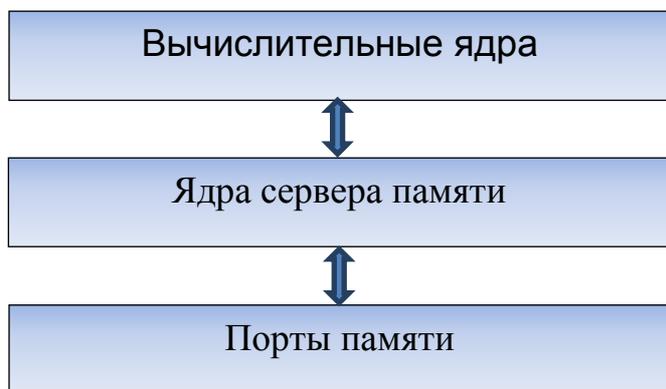
5. Организация работы программ с памятью базируется на клиент-серверной идеологии и не требует поддержки механизмов «когерентности» кеш-памятей, так как прикладные программы не используют глобальные переменные. Вместо этого аппаратно поддержана реализация объектов-серверов, предоставляющих необходимые безопасные интерфейсы доступа к общим данным, включая реализацию барьерной синхронизации.

6. Система названа конвейерной потому, что потоки процессов обрабатывают не данные, расположенные в общей памяти, а объекты-сообщения, полученные от других объектов. Это непосредственно отражается на аппаратной организации кеш-памятей системы.

7. Объектные интерфейсы в большинстве случаев обеспечивают высокий темп предварительной выборки команд и данных, так как запрос к объекту-серверу не обязан содержать их адрес. Например, для получения данных из объекта, реализующего очередь, достаточно выдать ему запрос вида «Дай элемент», не заботясь о внутреннем состоянии этого объекта. Это позволяет компенсировать задержки доступа при отсутствии зависимостей по данным.

8. Транспортные объекты обеспечивают безопасную работу многопоточных конвейеров вида «многие ко многим», разрешая все возможные коллизии. При таком интерфейсе не требуется производить никаких проверок состояния объектов синхронизации, что кардинально упрощает создание параллельных программ.

9. Процессы задач и входящие в них потоки вычислений, объекты ОС, являются объектами-сегментами со своими интерфейсами, что кардинально упрощает реализацию ядра операционной системы. Достаточно создать соответствующую библиотеку классов, реализующую требуемые интерфейсы API. Виртуализация обеспечивается также просто.



Для реализации данного подхода в архитектуре МКСА предусмотрены процессорные ядра двух типов: вычислительные ядра и

ядра сервера памяти, содержащие процессорные элементы и блоки кеш-памяти.

Ядра сервера памяти и вычислительные ядра относятся к разным архитектурным уровням и между ними реализованы отношения вида клиент-сервер с обменом сообщениями.

В большинстве современных процессоров, использующих общую память, существует иерархия кеш-памяти вида L3-L2-L1. Кеш-памяти строго отображают участки памяти, соответствующие адресам. В МКСА тоже есть похожая иерархия, но кеш-памяти структурированы иначе и поделены между объектами соответствующего уровня. Активные потоки, локализованные в вычислительных ядрах, не могут непосредственно обращаться в кеш-память уровня сервера памяти и наоборот. Тем не менее, как и в традиционных вычислительных системах, вся информация из вычислительных ядер строго отображается в общую память – в структуры объектов-сегментов, относящихся к процессам и потокам вычислений. Это позволяет сохранять их в памяти и восстанавливать, что необходимо для реализации вытесняющей многозадачности.

Объекты – сегменты памяти, включая потоки вычислений, локализуются в сервере памяти. При активизации потока его активная часть иницируется в вычислительном ядре. В памяти ядра располагаются его локальные данные (стек, копии регистров, очередь сообщений), а также глобальный контекст процесса (константы периода исполнения, включая узлы программного кода). Состояние потока может быть в любое время сохранено в памяти объекта – сегмента в сервере памяти. В активном состоянии поток принимает сообщения непосредственно в вычислительном ядре, а в пассивном состоянии - в сервере памяти.

Из-за того, что активные потоки не работают непосредственно с общей памятью, а программный код рассчитан на работу с локальным контекстом определённого типа, кардинально сокращается число возможных исключительных ситуаций. Архитектура позволяет запускать обработчики ситуаций, включая отладчики, в параллельном потоке вычислений без смены контекста, что часто является проблемой.

Вычислительное ядро содержит несколько потоковых процессоров, имеющих свои регистры и кеш-память уровня L1, отображаемую в кеш-память вычислительного ядра (L2).

Предполагается, что объекты-процессы будут самостоятельно управлять состоянием и активностью объектов-потоков. От объектов планирования ОС, потребуется только общий контроль и задание общих параметров управления (распределение процессов по вычислительным ядрам, режим исполнения, параметры вычисления приоритетов и т.п.) и выдача сигналов принудительного завершения.

Как системный, так и прикладной программный код может содержать свою библиотеку классов для сервера памяти либо использовать готовые системные библиотеки, позволяющие существенно оптимизировать процесс выполнения программ, алгоритмы использования ресурсов памяти.

Программный код потоков вычислений строится оптимизирующим компилятором таким образом, что в нем выделяются узлы программы, рассчитанные на обработку сообщений конкретного типа в конкретном контексте, как это делается для многих параллельных систем (например, Blue gene).

Выводы.

Архитектура МКСА не только обеспечивает традиционные механизмы системной поддержки вычислений, но и позволяет кардинально сократить накладные расходы на системную поддержку вычислений в серверах различного типа. Она позволяет создавать семейства frameworks, оптимизированных для решения различных задач с минимальными накладными расходами.

Литература

1. Stokes J. (February 9, 2010). «Two billion-transistor beasts: POWER7 and Niagara 3». – 2010.

2. Ширай А.Е, Гайдаенко Т.И., Провоторова А.О. Аппаратная поддержка векторно-матричной модели данных // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2012. – Вып. 13. – С. 135-138

3. Ширай А.Е. Использование объектно-ориентированного подхода в архитектуре многоядерного микропроцессора для ускорения параллельных конвейерных вычислений // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2011. – Вып. 12. – С. 141-145.

4. http://www.opensparc.net/pubs/t2/docs//OpenSPARCT2_Core_Micro_Arch.pdf.

5. http://www.spscicomp.org/ScicomP16/presentations/Power7_Performance_Overview.pdf.

СЕКЦИЯ 3

Математика и её приложения

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП В ЗАДАЧЕ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА – ХОПФА

В.М. АДУКОВ

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
e-mail: vicmikhad@mail.ru

УДК 517.53

Ключевые слова: *теория представлений конечных групп, факторизация Винера–Хопфа матриц-функций, частные индексы.*

Рассматривается задача факторизации Винера–Хопфа для матрицы-функции, полностью определяющейся своим первым столбцом: все остальные столбцы получены из первого с помощью конечной группы перестановок. Симметрия такой матрицы-функции позволяет применить теорию представлений конечных групп для понижения размерности задачи. Получены соотношения между частными индексами, часть частных индексов может быть вычислена явно. В некоторых случаях можно получить явное решение задачи факторизации.

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур в комплексной плоскости \mathbb{C} , ограничивающий область D_+ . Дополнение $D_+ \cup \Gamma$ в расширенной комплексной плоскости обозначим D_- . Считаем, что $0 \in D_+$. Пусть $A(t)$ – непрерывная и обратимая на Γ матрица-функция порядка n . *Правой факторизацией Винера–Хопфа* матрицы-функции $A(t)$ называется ее представление в форме $A(t) = A_-(t)d(t)A_+(t)$, $t \in \Gamma$. Здесь $A_{\pm}(t)$ – непрерывные и обратимые на контуре Γ матрицы-функции, которые допускают аналитическое продолжение в области D_{\pm} и их продолжения обратимы там. Множитель $d(t)$ имеет вид $d(t) = \text{diag}[t^{\rho_1}, \dots, t^{\rho_n}]$, где ρ_1, \dots, ρ_n – целые числа (*частные индексы* $A(t)$).

Пусть $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_n\}$ – конечная группа порядка n . В работе изучается задача факторизации для матриц-функций вида

$$A(t) = \left\| a(g_i g_j^{-1}) \right\|_{i,j=1}^n,$$

где $a_j = a(g_j)$ принадлежит алгебре Винера $W(\mathbf{T})$, \mathbf{T} – единичная окружность. Наличие характерной симметрии в этой матрице-функции позволяет использовать теорию представлений конечных групп для понижения размерности n задачи.

Пусть s – число сопряженных классов G , $\{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$ – полный набор неэквивалентных неприводимых унитарных матричных представлений группы G и n_1, \dots, n_s – их степени, для которых, как известно, справедливо соотношение $n_1^2 + \dots + n_s^2 = n$. По матричным элементам представлений составляется унитарная матрица F порядка n , которая приводит $A(t)$ к блочно диагональной форме: $A(t) = F^* \Lambda(t) F$. Здесь $\Lambda(t) = \text{diag} [\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_s(t)]$, $\Lambda_k(t)$ – матрица-функция порядка n_k^2 , также имеющая блочно диагональную структуру: $\Lambda_k(t) = \text{diag} [\lambda_k(t), \dots, \lambda_k(t)]$,

$$\lambda_k(t) = \sum_{g \in G} a(g) \varphi_k(g), \quad k = 1, \dots, s.$$

Таким образом, задача факторизации Винера–Хопфа для $A(t)$ приводится к s задачам для матриц-функций порядка n_k , причем каждая из этих задач имеет кратность n_k .

Например, для матрицы-функции $A(t)$, соответствующей симметрической группе S_3 , имеем $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$, и исходная 6-мерная задача факторизации приводится к двум скалярным задачам для функций $\lambda_1(t) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$, $\lambda_2(t) = a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 + a_6$ и двум одинаковым задачам для матрицы-функции

$$\lambda_3(t) = \begin{pmatrix} a_1 + \varepsilon a_5 + \varepsilon^{-1} a_6 & a_2 + \varepsilon a_3 + \varepsilon^{-1} a_6 \\ a_2 + \varepsilon^{-1} a_3 + \varepsilon a_4 & a_1 + \varepsilon^{-1} a_5 + \varepsilon a_6 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

порядка 2.

Матрица-функция $A(t)$ может рассматриваться как отображение \mathbf{T} в групповую алгебру $C[G]$. В [1] таким же методом был рассмотрен случай отображения в центр групповой алгебры. В этом случае задача факторизации решается явно, поскольку она приводится к s скалярным задачам.

Литература

1. Адуков В.М. О факторизации Винера–Хопфа функционально-коммулативных матриц-функций // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». - 2013. - Т. 5, №2. - С. 6–12.

О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГИЛЬБЕРТА В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.П. АНДРЕЕНКОВ, К.М. РАСУЛОВ
Смоленский государственный университет,
e-mail: kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *метааналитические функции, краевая задача типа Гильберта, линия скачков, приближенные методы.*

В работе рассматривается одна из основных краевых задач типа Гильберта в классах метааналитических функций. Предлагается алгоритм для приближенного метода решения рассматриваемой задачи.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром L .

Всюду в дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Напомним [1, с. 139], что метааналитическими функциями в области T^+ называются решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 F^+(z)}{\partial \bar{z}^2} + a_1 \frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} + a_0 F^+(z) = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – дифференциальный оператор Коши-Римана,

a_k ($k = 0, 1$) – произвольные комплексные постоянные.

Пусть λ_0 и λ_1 – корни характеристического уравнения

$$\Lambda^2 + a_1 \Lambda + a_0 = 0. \quad (2)$$

Известно [1], что всякую метааналитическую в T^+ функцию можно задавать в виде

$$F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] \exp\{\lambda \bar{z}\}, \quad z \in T^+, \text{ если } \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda, \quad (3)$$

или

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_0 \bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_1 \bar{z}\}, \quad z \in T^+, \text{ если } \lambda_0 \neq \lambda_1, \quad (4)$$

где $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ – произвольные аналитические в T^+ функции.

Обычно функцию $F^+(z)$, задаваемую формулой (3), называют *метааналитической в T^+ функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулой (4), – *метааналитической в T^+ функцией второго типа*.

Будем говорить, что метааналитическая в области T^+ функция $F(z)$ принадлежит классу $M_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_k^+(z)$ ($k=0,1$) непрерывно продолжаются на границу L вместе со своими производными $\frac{\partial \varphi_k^+(z)}{\partial z}$ ($k=0,1$), причем так, что граничные значения функций $\varphi_k^+(z)$ ($k=0,1$) и указанных производных удовлетворяют на L условию Гёльдера.

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все метааналитические функции $F^+(z)$ класса $M_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$\operatorname{Re} \left\{ \lambda_k(t) \frac{\partial F^+(t)}{(\partial x)^{2-k} (\partial y)^{k-1}} \right\} = q_k(t) \quad (k=1, 2), \quad (5)$$

где $\lambda_k(t) = a_k(t) + ib_k(t)$, $q_k(t)$ ($k=1, 2$) – заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, причем $\lambda_k(t) = a_k(t) + ib_k(t) \neq 0$ ($k=1, 2$).

Отметим, что в частном случае, когда решения ищутся в классе бианалитических функций (т.е. функций, задаваемых формулами (3), где $\lambda = 0$), краевая задача (5) представляет собой одну из основных краевых задач типа Гильберта для бианалитических функций, сформулированных в известной монографии Ф.Д. Гахова [2]. Поэтому, следуя [1], краевую задачу (5) будем называть *первой основной краевой задачей типа Гильберта в классах метааналитических функций* или, короче, *задачей $\Gamma_{1,M}$* .

В 80-х годах прошлого столетия в работах К.М. Расулова (см. [1] и имеющуюся там библиографию) были разработаны точные (аналитические) методы решения задачи $\Gamma_{1,M}$ для полианалитических функций. В начале нашего столетия В.Р. Кристалинский [3] получил эффективные алгоритмы приближенного решения задачи $\Gamma_{1,M}$ в классах бианалитических функций.

В настоящем сообщении предлагается приближенный метод решения задачи $\Gamma_{1,M}$ в классах метааналитических функций в круге $T^+ = \{t : |t| < 1\}$.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. - Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 344 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. Кристалинский В.Р. Приближенные методы решения краевых задач типа Гильберта и типа Римана для бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Смоленск, 2001. – 113 с.

О НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ, УПРОЩАЮЩИХ ПОЛУЧЕНИЕ ИХ ЧЕТЫРЕХЦВЕТНЫХ РАСКРАСОК

А.Л. АРЗАМАСЦЕВ, С.А. ГОМОНОВ
Смоленский государственный университет,

УДК 519.171

Ключевые слова: *планарный граф, хроматический граф, 4-раскраска графа.*

В данной статье указаны некоторые приемы, применение которых к плоским графам упрощает нахождение их четырехцветных раскрасок.

1. Как известно, теорема о четырех красках утверждает, что всякую расположенную на сфере карту государств-областей можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета. При этом считается, что каждая область является односвязной, а под общим участком границы понимается только часть линии, но не точка, то есть стыки нескольких областей в одной точке общей границы отнюдь не делают никакие две из этих областей граничащими. Эта теорема была сформулирована Френсисом Гутри в 1852 году, однако доказать ее долгое время не удавалось, хотя было предпринято множество попыток как ее обоснования, так и опровержения, так что эта задача даже получила название проблемы четырех красок (стоит напомнить, что задача раскраски карты на плоскости эквивалентна аналогичной задаче на сфере).

В 1976–1977 годах доказательство гипотезы 4 красок было наконец получено научным коллективом под руководством К. Аппеля и В. Хакена и опубликовано в двух статьях (Appel K., Haken W. "Every planar map is four colorable"). Причем доказательство удалось получить с помощью ЭВМ: примерно за 2000 часов работы ЭВМ нашла правильные 4-раскраски всех 1482 неустранимых конфигураций [1].

2. Напомним, что правильной n -раскраской плоского неориентированного, не псевдо и не мультиграфа $G = (V, R)$ называется всякое отображение φ множества вершин V во множество $\{1, 2, \dots, n\}$, удовлетворяющее условию: для всякого ребра (v_1, v_2) из R ($v_1 \neq v_2$) $\varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$.

Впрочем, наличие кратных ребер и петель у графа не является существенным препятствием для введения понятия n -раскраски этого графа. Напомним также, что хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называют минимальное число цветов, в которые можно раскрасить

вершины графа G так, чтобы концы любого его ребра имели разные цвета, так что теорема Ф. Гутри может быть сформулирована совсем просто: для любого планарного графа G справедливо неравенство

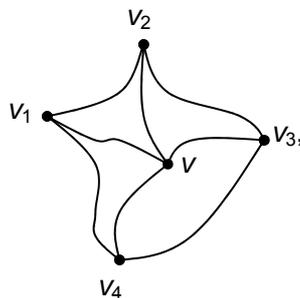
$$\chi(G) \leq 4.$$

3. Перечислим теперь возможные преобразования конечного неориентированного плоского графа G (не содержащего ни петель, ни кратных ребер), позволяющие считать у G наличие некоторых дополнительных свойств, упрощающих поиск его 4-раскраски:

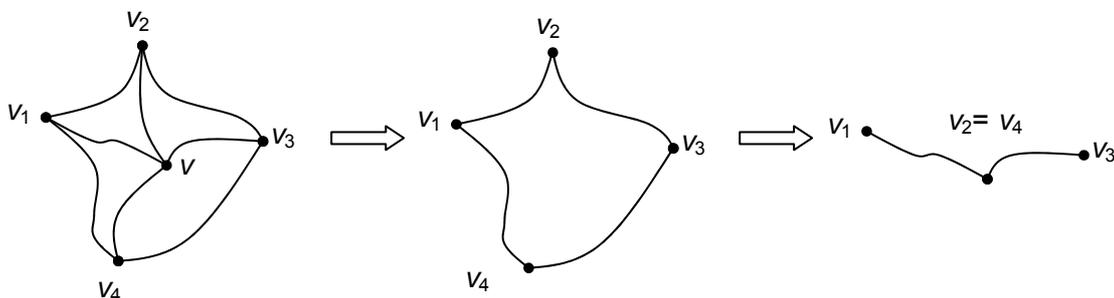
а) G можно считать связным, в частности, можем считать, что у G нет изолированных вершин (в противном случае можно перейти к окрашиванию каждой компоненты связности в отдельности);

б) можно считать, что число ребер, инцидентных любой вершине v графа G , т.е. степень графа в любой его вершине $\rho(v)$, не меньше четырех (в противном случае такие вершины графа можно удалить вместе с инцидентными им ребрами, затем раскрасить 4 красками то, что осталось от исходного графа, а затем вернуть ранее удаленные ребра и «докрасить» то, что еще окажется неокрашенным);

в) можно считать, что нет у рассматриваемого графа и вершин степени 4, так как если v – таковая, т.е. соответствующая часть графа имеет вид:

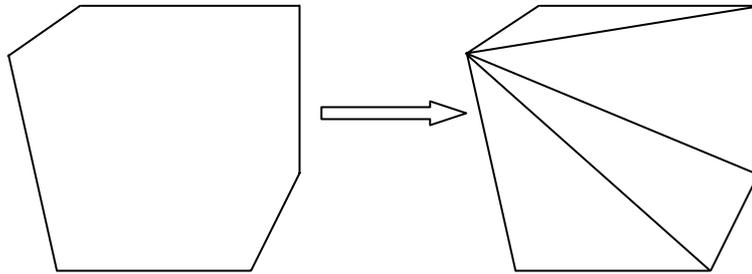


то, удаляя v , а затем отождествляя v_2 и v_4 , получим следующую цепочку преобразований графа (точнее, только рассматриваемой части):



причем наличие 4-раскраски у преобразованного графа немедленно обеспечит наличие таковой и у исходного графа (независимо от того, две или три краски использованы для окрашивания трех вершин v_1, v_3 и $v_2 = v_4$);

г) не нарушая общности рассуждения, можем считать, что все грани рассматриваемого графа – «треугольные», так как при наличии грани с большим числом сторон мы всегда можем «добавить» соответствующее число ребер; например, так:



Если после всех вышеуказанных преобразований мы получим некоторый нетривиальный граф \mathbf{G} , то, используя следующие обозначения:

$V = |\mathbf{V}(\mathbf{G})|$ – число вершин графа \mathbf{G} ,

$R = |\mathbf{R}(\mathbf{G})|$ – число ребер графа \mathbf{G} ,

$D = |\mathbf{D}(\mathbf{G})|$ – число граней графа \mathbf{G} (все они треугольные),

мы получим, что

$$2 \cdot |\mathbf{R}(\mathbf{G})| = 3 \cdot |\mathbf{D}(\mathbf{G})|,$$

то есть короче, $D = \frac{2}{3}R$, а значит, используя теорему Эйлера [2]:

$$|\mathbf{V}(\mathbf{G})| - |\mathbf{R}(\mathbf{G})| + |\mathbf{D}(\mathbf{G})| = 2,$$

получаем

$$V = R - D + 2 = R - \frac{2}{3}R + 2 = \frac{1}{3}R + 2.$$

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма. *Всякий плоский конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер после преобразований (а)-(г) либо превратится в тривиальный граф, либо в граф, число вершин (V), граней (D) и ребер (R) которого связаны соотношениями:*

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}R + 2, \\ D = \frac{2}{3}R. \end{cases}$$

Теперь, предполагая, что степень каждой из вершин не меньше 5, имеем

$$\begin{cases} R \geq \frac{5}{2}V, \\ R = 3(V - 2), \end{cases}$$

а значит, $3(V-2) \geq \frac{5}{2}V \Leftrightarrow \frac{1}{2}V \geq 6 \Leftrightarrow V \geq 12$, что позволяет получить

простое следствие, причем существенно для его обоснования то, что многократные применения преобразований (а), (б) и (в) (без применения (г)) хоть и могут на некоторых промежуточных этапах, а именно, после преобразования (в), привести к росту степени некоторых вершин графа, но всегда, как оказалось, в этой ситуации будет затем возможно применение преобразований (а) и (б), что и приведет к понижению степеней вершин до исходных значений (или даже сделает их ниже).

Следствие. *Любой плоский граф с числом вершин, меньшим 12, допускает правильную 4-раскраску.*

Литература

1. Шапорев С.Д. Дискретная математика: курс лекций и практических занятий.– СПб.: БХВ–Петербург, 2009.
2. Оре. О. Теория графов.– М.: Наука, 1968.

О НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ В ГЕОМЕТРИИ УПЛОЩАЮЩИХСЯ 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ ОКТАВ

М.Б. БАНАРУ, Г.А. БАНАРУ

Смоленский государственный университет,
e-mail: mihail.banaru@yahoo.com

УДК 513.82

Ключевые слова: *почти эрмитова структура, уплощающиеся подмногообразия алгебры октав, почти контактная метрическая структура, гиперповерхность.*

Представлены три теоремы об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли.

1. Шестимерные подмногообразия алгебры октав дают исследователю весьма интересные, содержательные и разнообразные примеры почти эрмитовых структур. Такие структуры изучались систематически с 60-х годов прошлого века выдающимися американскими геометрами Е. Калаби и А. Греем, а позже замечательным отечественным специалистом В.Ф. Кириченко и многими другими авторами. Например, в [1] получена полная классификация 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли. Эта тематика ни в коей мере не утратила своего значения и сейчас. Большое количество современных геометров из США, Китая, Японии, Бельгии, Южной Кореи, Польши и других стран каждый год публикуют

статьи в научных журналах с результатами, полученными в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что 6-мерная сфера S^6 с канонической приближенно келеровой структурой исследовалась такими известными математиками как А. Абу-Салим, Л. Вранкен, Р. Дещч, Ф. Диллен, В.Ф. Кириченко, Т. Кода, К. Машима, Й.-С. Пак, К. Секигава, Ш. Фунабаши, Хайжонг Ли, Х. Хашимото.

В настоящей работе анонсируется ряд новых результатов авторов о 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли. Эти результаты, полученные за последние полтора года, будут в ближайшее время опубликованы с полными доказательствами в математических журналах. Отметим, что работа является продолжением исследований авторов об уплощающихся подмногообразиях алгебры октав, начатых относительно давно (см., например, [2; 3; 4] и другие).

2. Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ - алгебра Кэли. Как известно [1; 4], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X, Y, Z) = -X(\bar{Y}Z) + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y;$$

$$P_2(X, Y, Z) = -(X\bar{Y})Z + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение в \mathbf{O} , $X \rightarrow \bar{X}$ - оператор сопряжения в \mathbf{O} . При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных.

Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ - 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением:

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ - произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p , $X \in T_p(M^6)$ [1]. Подмногообразие M^6 называется эрмитовым, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема, и келеровым, если $\nabla F = 0$ [5]. Напомним [1; 4; 6], что точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 - единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа [1; 4; 6]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа. 6-мерное подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется уплощающимся, если оно содержится в гиперплоскости алгебры октав.

Напомним, что почти эрмитово многообразие удовлетворяет аксиоме U -гиперповерхностей Кенмоцу (аксиоме 1-косимплектических гиперповерхностей), если через каждую точку такого многообразия проходит вполне омбилическая гиперповерхность Кенмоцу

(косимплектическая гиперповерхность с типовым числом 1, соответственно).

3. Приведем основные результаты.

Теорема 1. *Если упищающаяся б-мерное эрмитово подмногообразии алгебры Кэли удовлетворяет аксиоме U – гиперповерхностей Кенмоцу, то оно является келеровым многообразием.*

Теорема 2. *Симметрическое некелерово эрмитово б-мерное подмногообразие типа Риччи алгебры октав не допускает вполне омбилических гиперповерхностей со структурой Кенмоцу.*

Теорема 3. *Если упищающаяся б-мерное эрмитово подмногообразии алгебры Кэли удовлетворяет аксиоме I – косимплектических гиперповерхностей, то оно является келеровым многообразием.*

Отметим, что Теорема 1 является усилением результата, полученного А. Абу-Салимом и Г.А. Банару для б-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав [7]. Теорема 2 продолжает тематику симметрических б-мерных типа Риччи подмногообразий алгебры Кэли, введенных в рассмотрение В.Ф. Кириченко [8] и исследуемых в [4] и [9]. Наконец, Теорема 3 имеет отношение к характеристизации гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий в терминах типового числа (характеризации Такаджи-Курихары [10]).

Литература

1. Кириченко В.Ф. Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на б-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Известия вузов. Математика. – 1980. - №8. - С. 32-38.
2. Banaru M., Banaru G. About six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. – Bul. Stin. Univ. Politehnica. Timisoara. – 2001. - Т. 46(60), №1. - Р. 13-17.
3. Банару М.Б., Банару Г.А. О спектрах некоторых тензоров упищающихся б-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения». – М.: МГУ, 2001. - Ч.2. - С. 250-253.
4. Банару М.Б. Эрмитова геометрия б-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Математический сборник. -2002. - Т.193, №5. - С.3-16.
5. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. – Одесса: Печатный дом, 2013. – 458 с.
6. Банару М.Б. О сасакиевых гиперповерхностях б-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Математический сборник. – 2003. - Т. 194, № 8. - С. 13-24.
7. Abu-Saleem A., Banaru G. On some contact metric structures on hypersurfaces in a Kählerian manifold // Acta Universitatis Apulensis. – 2012. - V. 31. - P.179-189.
8. Кириченко В.Ф. Эрмитова геометрия б-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник МГУ. - Сер.1: Матем. Механ. -1994. - № 3. - С. 6-13.

9. Abu-Saleem A., Banaru M. On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. – 2014. - V. 8, № 1. - P. 35-46.

10. Банару М.Б. О типовом числе косимплектических гиперповерхностей 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Сибирский математический журнал. – 2003. - Т. 44, № 5. - С. 981-991.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОТРЫВНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНТАКТИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

С.Н. БЕШЕНКОВ, И.С. БЕРЕЗНЯК

Смоленский филиал МИИТ, СГАФКСиТ, г. Смоленск,
e-mail: bis1605@mail.ru

УДК 534.1: 539.3

Ключевые слова: *метод конечных разностей, контактирующие элементы, нестационарное деформирование, зоны отрыва.*

Излагается и на примере круглых пластин апробируется конечно-разностный метод решения задач нестационарного деформирования контактирующих элементов конструкций с учетом возможности образования в процессе их колебаний зон отрыва друг от друга.

Теоретический анализ нестационарного деформирования контактирующих балок и вложенных одна в другую цилиндрических оболочек с учетом возможности образования в процессе их колебаний зон отрыва друг от друга выполнен в работе [1]. Предложенный подход заключается в рассмотрении движения каждого из элементов составной конструкции под действием внешней нагрузки и (или) неизвестного контактного давления, аппроксимируемого кусочно-постоянной функцией координат и времени. На каждом шаге по времени значения давления на участках элементов конструкции находятся из системы уравнений, к которым приводит равенство их перемещений на этих участках. Если при этом какие-то из значений реакции получаются удерживающими, то они полагаются равными нулю и проводится их пересчет.

В данной работе излагается и на задаче о нестационарном отрывном деформировании контактирующих круглых пластин апробируется значительно более простой подход к решению подобных задач, основанный на использовании метода конечных разностей.

Процесс деформирования контактирующих в момент времени $t = 0$ круглых пластин описывается дифференциальными уравнениями

$$D_j \nabla^2 \nabla^2 w_j + \rho_j h_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} = f_j(r, t); \quad j = 1, 2; \quad (1)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad f_1 = Q(r, t) - R(r, t); \quad f_2 = R(r, t),$$

в которых $R(r, t)$ - неизвестное контактное давление, возникающее при деформации пластины; w, D, ρ, h - прогиб, цилиндрическая жесткость, плотность материала и толщина пластины.

Индексом 1 отмечены величины, относящиеся к пластине, на которую действует внешняя нагрузка $Q(r, t)$.

Разобьем пластину на N кольцевых участков точками $r_0 = 0, r_1 = \Delta r, r_2 = 2\Delta r, \dots, r_N = N\Delta r = a$, где a - радиус пластины. Обозначим через $w_{1,i}^{(n)}, w_{2,i}^{(n)}$ прогибы пластин в точке r_i в момент времени $t_n = n\Delta t, n = 1, 2, \dots$ и заменим входящие в уравнение (1) производные

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

соответствующими центрально-разностными операторами [2].

В результате получаем следующие выражения для $w_{j,i}^{(n+1)}$:

$$w_{j,i}^{(n+1)} = 2w_{j,i}^{(n)} - w_{j,i}^{(n-1)} - \frac{D_j \Delta t^2}{\rho_j h_j \Delta r^4 \cdot 2i^3} F_{j,i}^{(n)} + \frac{f_{j,i}^{(n)}}{\rho_j h_j}, \quad (2)$$

где

$$F_{j,i}^{(n)} = w_{j,i-2}^{(n)} \cdot 2i^2(i-1) + w_{j,i-1}^{(n)} \cdot (-8i^3 + 4i^2 - 2i - 1) + w_{j,i}^{(n)} \cdot (4i(3i^2 + 1) +$$

$$+ w_{j,i+1}^{(n)} \cdot (-8i^3 - 4i^2 - 2i + 1) + w_{j,i+1}^{(n)} \cdot 2i^2(i+1),$$

$$f_{1,i}^{(n)} = Q_i^{(n)} - R_i^{(n)}; \quad f_{2,i}^{(n)} = R_i^{(n)}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Неизвестные величины $R_i^{(n)}$ находим из равенства

$$w_{1,i}^{(n+1)} = w_{2,i}^{(n+1)}, \quad (3)$$

которое дает

$$R_i^{(n)} \left(\frac{1}{\rho_1 h_1} + \frac{1}{\rho_2 h_2} \right) = 2 \left(w_{1,i}^{(n)} - w_{2,i}^{(n)} \right) - \left(w_{1,i}^{(n-1)} - w_{2,i}^{(n-1)} \right) -$$

$$- \frac{\Delta t^2}{\Delta r^2 \cdot 2i^3} \left(\frac{D_1}{\rho_1 h_1} F_{1,i}^{(n)} - \frac{D_2}{\rho_2 h_2} F_{2,i}^{(n)} \right) + \frac{1}{\rho_1 h_1} Q_i^{(n)}. \quad (4)$$

Если при этом какие-то из $R_i^{(n)}$ оказываются отрицательными, то их необходимо положить равными нулю.

Из начальных условий

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t} |_{t=0} = 0 \quad (5)$$

следует, что

$$w_{i,j}^{(0)} = 0, \quad w_{i,j}^{(-1)} = w_{i,j}^{(1)}, \quad (6)$$

поэтому для расчета на первом шаге по времени ($n = 0$) получаем

$$R_i^{(0)} = Q_i^{(0)} \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}; \quad w_{1,i}^{(1)} = \frac{Q_i^{(0)} - R_i^{(0)}}{2\rho_1 h_1}; \quad w_{2,i}^{(1)} = \frac{R_i^{(0)}}{2\rho_2 h_2}. \quad (7)$$

Сеточные значения $w_{j,-1}^{(n)}$ и $w_{j,0}^{(n)}$, необходимые для расчета по формулам (3) при $i = 1$, найдем, используя разностные аппроксимации условия $w_r'|_{r=0} = 0$:

$$w_{j,-1}^{(n)} = w_{j,1}^{(n)}; \quad w_{j,0}^{(n)} = (4w_{j,1}^{(n)} - w_{j,2}^{(n)})/3. \quad (8)$$

Значения $w_{j,N}^{(n)}$ и $w_{j,N+1}^{(n)}$, необходимые для расчета при $i = N - 1$, находим посредством конечно-разностной аппроксимации краевых условий.

Например, при заземлении контура ($w = w_r' = 0$ при $r = a$) получаем

$$w_{j,N}^{(n)} = 0; \quad w_{j,N+1}^{(n)} = w_{j,N-1}^{(n)}, \quad (9)$$

а при шарнирном опирании ($w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0$ при $r = a$)

$$w_{j,N}^{(n)} = 0; \quad w_{j,N+1}^{(n)} = -w_{j,N-1}^{(n)} \frac{2N-\nu}{2N+\nu}, \quad (10)$$

где ν - коэффициент Пуассона материала соответствующей пластины.

Приведем результаты расчета контактного деформирования круглых заземленных по контуру пластин толщиной $h = 0,03$ м и радиусом $a = 0,3$ м при возбуждении нагрузкой

$$Q(r, t) = \left[H(t) - H\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \right] \sin \omega t,$$

где $\omega = 2,5 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$, $H(t)$ – функция Хевисайда.

На рисунке 1 кривыми 1 и 2 показаны зависимости прогибов от времени в центре стальной и медной пластин для случая, когда нагрузка действует на стальную пластину. Из рисунка видно, что пластины находятся в контакте почти до момента достижения максимума прогиба в центре стальной пластины. Далее её прогиб начинает уменьшаться, в то время как прогиб медной пластины, имеющей более низкую основную частоту колебаний, продолжает расти. После отрыва пластины движутся независимо друг от друга, пока в какой-то момент времени снова не вступят в контакт. Очевидно, что значение этого момента зависит от соотношения основных частот колебаний пластин, а направление движения от отношения количеств движения пластин в этот момент времени. В рассмотренном примере стальная пластина, вступив в контакт с медной, «заставила» её изменить направление

движения. Распределение прогибов по радиусу пластин для некоторых моментов времени показано на рисунке 2, из которого видно, как изменяется зона отрыва пластин в процессе колебаний.

Иная картина наблюдается на рисунке 3, где такие же, что и на рисунке 1, зависимости приведены для случая, когда нагрузка действует на медную (кривая 1) пластину. Здесь, «убежав» в начале от медной пластины и достигнув максимума своего прогиба, стальная пластина начинает движение в обратную сторону, встречает медную и заставляет последнюю изменить направление своего движения. Далее они какое-то время движутся в контакте, после чего обладающая большей жесткостью стальная пластина начинает «отставать» от медной. Как при этом изменяются распределение контактного давления по радиусу пластин, показано на рисунке 4.

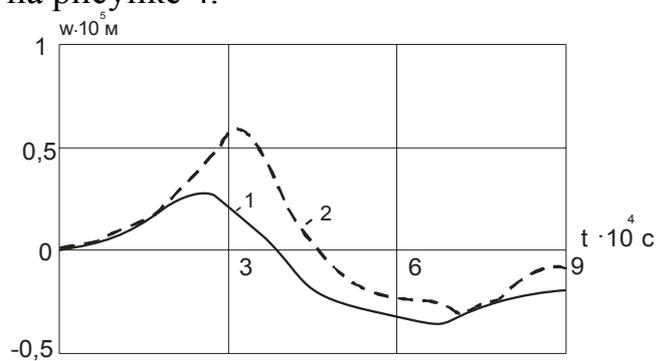
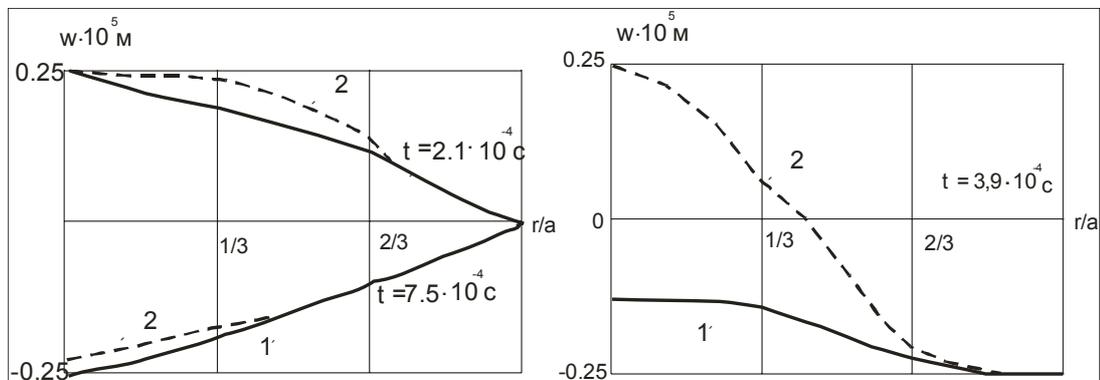


Рис. 1



а)

б)

Рис. 2

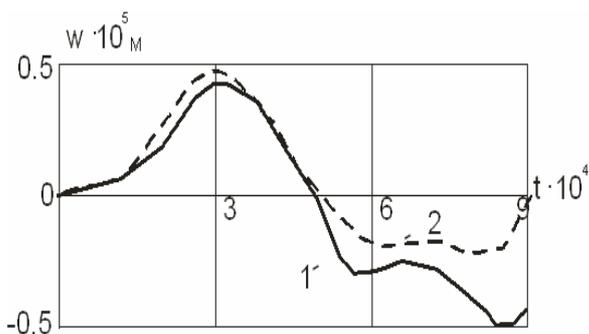


Рис. 3

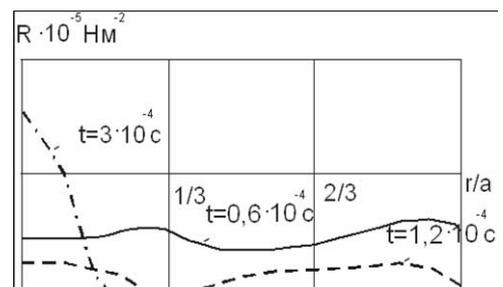


Рис. 4

В заключение отметим, что использование соответствующих сеточных операторов позволяет решать аналогичные задачи и для других элементов конструкций.

Литература

1. Янютин Е.Г. Импульсивное деформирование упругих элементов конструкций. Киев: Наукова думка. 1993 – 146 с.
2. Пирумов У.Г. Численные методы. - М.: Дрофа, 2006.

ОБ ОДНОЙ ЧЕТЫРЁХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ЗАДАЧИ КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНТУРА

Н.Н. БОГДАНОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: nadingioia@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *аналитическая функция, бианалитическая функция, четырёхэлементная задача типа задачи Карлемана, интегральное уравнение типа Фредгольма.*

В сообщении рассматривается одна из основных четырёхэлементных краевых задач типа задачи Карлемана в классах кусочно бианалитических функций. Получены условия разрешимости и конструктивный алгоритм решения исследуемой задачи в случае, когда линией скачков искомым кусочно бианалитических функций является произвольный замкнутый гладкий контур.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на расширенной плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром L . Через T^- обозначим область, дополняющую $T^+ \cup L$ до полной плоскости, и для определённости положим, что начало координат принадлежит области T^+ . В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографиях [1; 2]. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $A_2(T^{\pm}) \cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на линии скачков L следующим граничным условиям:

$$A_{11}(t) \overline{\partial F^+(t)} + A_{12}(t) \partial F^+[\alpha(t)] = G_{11}(t) \overline{\partial F^-(t)} + G_{12}(t) \partial F^-[\alpha(t)] + g_1(t), \quad (1)$$

$$A_{21}(t) \frac{\overline{\partial F^+(t)}}{\partial n_+} + A_{22}(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+} = G_{21}(t) \frac{\overline{\partial F^-(t)}}{\partial n_-} + G_{22}(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial n_-} + g_2(t), \quad (2)$$

где $A_{kj}(t)$, $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ ($k=1, 2; j=1, 2$) – заданные на L комплекснозначные функции класса $H(L)$ (Гёльдера), $\frac{\partial}{\partial n_+} \left(\frac{\partial}{\partial n_-} \right)$ – производная по внутренней (внешней) нормали к L , $\alpha(t)$ – прямой или обратный сдвиг контура L , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \quad (3)$$

причём $\alpha'(t) \in H(L)$, $L \in C_\mu^3$.

Сформулированную задачу назовём *второй основной четырёхэлементной краевой задачей типа задачи Карлемана в классах бианалитических функций* или, короче, *задачей K_{42}* .

Будем предполагать, что коэффициенты краевой задачи (1)-(3) на произвольном достаточно гладком контуре L удовлетворяют следующим условиям:

$$\Delta(t) \neq 0, \Delta_1(t) \neq 0, \Delta_2(t) \neq 0, V(t) \neq 0, \quad (4)$$

где

$$\Delta(t) = A_{11}(t) \cdot \overline{G_{11}[\alpha(t)]} - \overline{A_{12}[\alpha(t)]} G_{12}(t), \quad \Delta_1(t) = A_{11}(t) \cdot \overline{A_{11}[\alpha(t)]} - A_{12}(t) \overline{A_{12}[\alpha(t)]},$$

$$\Delta_2(t) = G_{11}(t) \cdot \overline{G_{11}[\alpha(t)]} - G_{12}(t) \cdot \overline{G_{12}[\alpha(t)]}, \quad V(t) = \overline{A_{11}[\alpha(t)]} \cdot G_{12}(t) - A_{12}(t) \cdot \overline{G_{11}[\alpha(t)]}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если выполняются условия (4), то решение задачи K_{42} в классах кусочно бианалитических функций сводится к последовательному решению обобщённой скалярной задачи типа Римана со сдвигом и сопряжением относительно кусочно аналитической функции и интегрального уравнения Фредгольма второго рода.*

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 344 с.
3. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
4. Расулов К.М. Об одном методе конструктивного решения четырёхэлементной краевой задачи типа Римана в классах аналитических функций // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции. – СПб, 2004. – С. 71-76.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
6. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 379 с.

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.П. ВАСИЛЕНКОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: kaf-matinfo@yandex.ru

УДК 517.54

Ключевые слова: *граничные теоремы единственности, метааналитическая функция, угловые граничные значения, множества положительной меры, множества первой и второй категории, согласованная функция.*

В работе устанавливается, что известные граничные теоремы единственности для полианалитических функций остаются справедливыми в более широком классе метааналитических функций.

Напомним (см., например, [1]), что функция $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ называется метааналитической порядка n в некоторой односвязной области D , если она в этой области имеет непрерывные частные производные до n -го порядка включительно и удовлетворяет там дифференциальному уравнению:

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial \bar{z}^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial \bar{z}^{n-1}} + a_{n-2} \frac{\partial^{n-2} f}{\partial \bar{z}^{n-2}} + \dots + a_0 f = 0.$$

Для простоты будем рассматривать метааналитическую функцию порядка $n = 2$.

Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Тогда каждую метааналитическую функцию можно в области D представить в виде

$$f(z) = (f_1(z) + \bar{z}f_2(z))e^{\lambda_0\bar{z}}, \text{ если } \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2,$$

или

$$f(z) = f_1(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + f_2(z)e^{\lambda_2\bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – аналитические в области D функции.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ – метааналитическая порядка $n = 2$ имеет угловые граничные значения, равные нулю на некотором множестве E положительной меры, лежащем на аналитической дуге Γ с уравнением Шварца $\bar{z} = A(z)$, где $\Gamma \subset \partial D$, то на этом множестве угловые граничные значения согласованной функции*

$F_{\Gamma}(z) = (f_1(z) + A(z)f_1(z))e^{\lambda_0 A(z)}$ или $F_{\Gamma}(z) = (f_1(z)e^{\lambda_1 A(z)} + f_2(z)e^{\lambda_2 A(z)})$ будут равны нулю.

Теорема 2. Если функция $f(z)$ - метааналитическая порядка $n = 2$ в области D , чья граница содержит две неродственные аналитические дуги, согласованные с областью D и на каждой аналитической дуге имеется множества E_1 и E_2 положительной меры, на которых угловые граничные значения функции $f(z)$ равны нулю, то функция $f(z) \equiv 0$ в D .

Теорема 3. Пусть: 1) функция $f(z)$ является метааналитической порядка $n = 2$ в некоторой области D , чья граница содержит правильную аналитическую дугу γ ; 2) на γ имеется множество M второй категории, а в D - такое равномерно-непрерывное семейство некасательных к Γ путей $L_1 = \{L_1^{\xi} : \xi \in M_1\}$, что при любом ξ из M_1 $\infty \notin C_{L_1^{\xi}}(f(z)/|z - \xi|; \xi)$; 3) на γ имеется такое множество M_2 метрически плотное на γ , а в D семейство некасательных к γ путей $L_2 = \{L_2^{\xi} : \xi \in M_2\}$, что для каждого $\xi \in M_2$ $0 \in C_{L_2^{\xi}}(f(z)/|z - \xi|; \xi)$. Тогда $f(z) \equiv 0$ в D .

Если область D есть круг $|z| < 1$, то из теоремы 2 можно получить ряд следствий, которые являются аналогами теорем братьев Рисс, Лузина-Павлова, Коллиингвуда и др.

Следствие 1. Пусть: 1) функция $f(z)$ - метааналитическая порядка $n = 2$ в единичном круге D ; 2) функция $f(z)/(1 - |z|)$ ограничена в D и её радиальный предел равен нулю в каждой точке некоторого множества M , расположенного на единичной окружности и имеющего положительную меру. Тогда $f(z) \equiv 0$ в D .

Следствие 2. Пусть $f(z)$ - метааналитическая функция порядка $n = 2$ в единичном круге D и пусть функция $f(z)/(1 - |z|)$ имеет радиальный предел нуль в каждой точке множества M , лежащего на единичной окружности второй категории и метрически плотном на дуге Γ . Тогда $f(z) \equiv 0$.

Литература

1. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ / Сер. Совр.пробл.математики. Фунд.напр. - Т.85. - М.:ВИНТИ, 1991. - С. 187-246.
2. Балк М.Б., Василенков В.П. О некоторых граничных теоремах единственности для полианалитических функций // Исследования по полианалитическим функциям и их обобщениям. - Смоленск, 1988. - С. 16-22.

ОБОБЩЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ю.М. ВУВУНИКЯН

Гродненский государственный университет,
e-mail: vuv64@mail.ru.

УДК 517.98

Ключевые слова: *полиномиальный эволюционный оператор, обобщенная спектральная характеристика, тензорное произведение, тензорная степень, свертка, композиция операторов, композиция натурального числа.*

Определяется основной объект исследования – обобщенные спектральные характеристики полиномиального эволюционного оператора. Целью исследования является изучение спектральных характеристик композиции полиномиальных эволюционных операторов.

Для любого числа a обозначим через X_a пространство бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси, носители которых содержатся на полупрямой $[a; +\infty)$, а через X – индуктивный предел семейства пространств X_a , $a \in R$.

Полиномиальным эволюционным оператором степени k будем называть оператор A , определяемый равенством

$$Ax = \sum_{n=1}^k S_n(a_n * x^{\otimes n}) \quad (x \in X),$$

где $x^{\otimes n}$ – n -я тензорная степень функции $x \in X$, a_n – обобщенная функция на пространстве R^n , носитель которой содержится в положительном гипероктанте $[0; +\infty)^n$, $*$ – операция свертки, S_n – оператор сокращения переменных степени n : $S_n f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t, t, \dots, t)$.

Обобщенную функцию a_n назовем *импульсной характеристикой порядка n оператора A* . Обобщенное преобразование Лапласа \tilde{a}_n обобщенной спектральной характеристикой порядка n оператора A , а семейство спектральных характеристик $(\tilde{a}_n)_{n=1}^k$ – *системой обобщенных спектральных характеристик A* .

Рассмотрим композицию полиномиальных эволюционных операторов. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Пусть A и B – полиномиальные эволюционные операторы степеней k и l соответственно:

$$Ax = \sum_{n=1}^k S_n(a_n * x^{\otimes n}) \quad (x \in X), \quad By = \sum_{m=1}^l S_m(b_m * y^{\otimes m}) \quad (y \in X).$$

Тогда их композиция $C = B \circ A$ является полиномиальным эволюционным оператором степени kl с импульсными характеристиками

$$c_n = \sum_{\alpha \in \Xi_{n,l,k}^\#} b_m^* a_\alpha \quad (n=1,2,\dots,kl), \quad (1)$$

где $\Xi_{n,l,k}^\#$ – множество всех композиций натурального числа n с не более чем l частями, каждая из которых не превосходит k , $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \Xi_{n,l,k}^\#$, $a_\alpha = \bigotimes_{j=1}^m a_{n_j}$.

Применяя теперь к равенству (1) обобщенное преобразование Лапласа, получим следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $(\tilde{a}_n)_{n=1}^k$ – система обобщенных спектральных характеристик эволюционного оператора A , $(\tilde{b}_m)_{m=1}^l$ – система обобщенных спектральных характеристик эволюционного оператора B .

Тогда для любого $n \leq kl$ спектральная характеристика \tilde{c}_n оператора композиции $C = B \circ A$ определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = & \sum_{\alpha \in \Xi_{n,l,k}^\#} \tilde{b}_m(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n_1}, \lambda_{n_1+1} + \lambda_{n_1+2} + \dots + \\ & + \lambda_{n_1+n_2}, \dots, \lambda_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1} + \lambda_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2} + \dots + \lambda_n) \tilde{a}_{n_1}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1}) \times \\ & \times \tilde{a}_{n_2}(\lambda_{n_1+1}, \lambda_{n_1+2}, \dots, \lambda_{n_1+n_2}) \dots \tilde{a}_{n_m}(\lambda_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}, \lambda_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

Литература

1. Эндрюс Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
2. Вувуникян Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками: монография. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 224 с.

МОДЕЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ ИСТОЧНИКОВ

Ю. В. ГАВРИСЬ, И. В. ТИХОНОВ

МПГУ, МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва,

e-mail: yvgavris@mail.ru, ivtikh@mail.ru

УДК 517.9

Ключевые слова: обратная задача, уравнение теплопроводности, функции экспоненциального роста.

Рассматривается модельная обратная задача с финальным переопределением для одномерного уравнения теплопроводности. Показано, что возможно провести полное исследование задачи в классах функций экспоненциального роста.

Для неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T,$$

рассмотрим обратную задачу о нахождении функций $u = u(x, t)$, $f = f(x)$ из условий $u(x, 0) = 0$, $u(x, T) = 0$.

Решением задачи назовем пару функций $u \in C^{2,1}(\mathbf{R} \times [0, T])$, $f \in C(\mathbf{R})$, для которых выполнены указанные соотношения. Очевидно, что задача имеет тривиальное решение $u(x, t) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$. Но есть и нетривиальные решения. По схеме работы [1] можно получить полное описание всех комплексных элементарных решений с разделяющимися переменными у функции u . С точностью до умножения на константу эти решения выглядят так:

$$u = \frac{T}{2\pi n i} \exp\left(\sqrt{\frac{\pi n}{T}} \omega x\right) \left(\exp\left(\frac{2\pi n i}{T} t\right) - 1\right), \quad f = \exp\left(\sqrt{\frac{\pi n}{T}} \omega x\right).$$

Здесь $n \in \mathbf{N}$, $\omega \in \{1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$, $i^2 = -1$.

Отсюда находятся вещественные элементарные решения

$$u = \frac{T}{\pi k} \exp\left(\pm \sqrt{\frac{\pi k}{T}} x\right) \sin\left(\frac{\pi k}{T} t\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\pi k}{T}} x \pm \frac{\pi k}{T} t\right), \quad f = \exp\left(\pm \sqrt{\frac{\pi k}{T}} x\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\pi k}{T}} x\right);$$

$$u = \frac{T}{\pi k} \exp\left(\pm \sqrt{\frac{\pi k}{T}} x\right) \sin\left(\frac{\pi k}{T} t\right) \sin\left(\sqrt{\frac{\pi k}{T}} x \pm \frac{\pi k}{T} t\right), \quad f = \exp\left(\pm \sqrt{\frac{\pi k}{T}} x\right) \sin\left(\pm \sqrt{\frac{\pi k}{T}} x\right),$$

где $k \in \mathbf{N}$.

Итак, поставленная задача имеет бесконечно много нетривиальных решений. Впрочем, все эти решения экспоненциально растут на бесконечности. Следующая теорема восходит к [1; 2] и дает точное условие единственности решения обратной задачи.

Теорема. Пусть пара функций $u = u(x, t)$, $f = f(x)$ является решением поставленной обратной задачи, причем

$$|u(x, t)| \leq M \exp(\sigma|x|), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T,$$

с константой $\sigma < \sqrt{\pi/T}$ и некоторой константой $M > 0$. Тогда $u(x, t) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$.

Этот результат можно трактовать как теорему единственности для аналогичной обратной задачи с тем же уравнением и неоднородными условиями:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, T) = u_1(x).$$

Здесь $u_0(x)$, $u_1(x)$ – заданные функции. Согласно отмеченной теореме класс единственности для неоднородной обратной задачи образуют функции с допустимым экспоненциальным ростом на бесконечности, меньшим, чем $\sqrt{\pi/T}$.

Для неоднородной обратной задачи с помощью преобразования Фурье найдена разрешающая формула, позволяющая восстановить правую часть в уравнении теплопроводности:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-s)w(s) ds - w''(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Здесь функция $w(x)$ определяется данными задачи

$$w(x) = u_1(x) - \frac{1}{\sqrt{4\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4T}\right) u_0(y) dy,$$

а $g(x)$ – специальная функция Грина

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2}{\exp(\xi^2 T) - 1} \exp(i\xi x) d\xi.$$

Функция $u(x, t)$ восстанавливается по функции $f(x)$ через интеграл Пуассона. Проведено полное исследование разрешающих формул в классах функций экспоненциального роста с показателем $\sigma < \sqrt{\pi/T}$. Использована методика, разработанная ранее в [2; 4] для задачи теплопроводности с условием нелокального среднего по времени.

Литература

1. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференциальные уравнения. - 2000. - Т. 36, № 8. - С. 1132–1133.
2. Попов А. Ю., Тихонов И. В. Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности // Доклады РАН. - 2003. - Т. 389, № 4. - С. 465–467.
3. Попов А. Ю., Тихонов И. В. Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференциальные уравнения. - 2004. - Т. 40, № 3. С. 396-405.
4. Попов А. Ю., Тихонов И. В. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Математический сборник. - 2005. - Т. 196, № 9. - С. 71–102.

ЗАДАЧА ЧИРНГАУЗЕНА И НЕКОТОРЫЕ ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ

И.Г. ГАЛЯУТДИНОВ¹, Е.Е. ЛАВРЕНТЬЕВА², Э.Д. ХУСАИНОВА³

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e-mail: ¹ildarhan.galyautdinov@mail.ru, ²ialeee-4@mail.ru, ³ence_khusainova@mail.ru

УДК 511.62Т.511.542

Ключевые слова: алгебраические числа и их минимальные многочлены, круговые поля и их подполя.

Находятся минимальные многочлены чисел вида $tg^2 \frac{\pi}{n}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$).

Строится поле корней многочлена $\varphi(x) = x^3 - 7x - 7$.

В 1683 году Э.В. Чирнгаузен опубликовал способ преобразования алгебраических уравнений, который, как ему казалось, позволял решить в радикалах уравнение любой степени. Он считал, что можно найти такой многочлен $g(x)$ четвертой степени, что с помощью преобразования $y = g(x)$ в уравнении пятой степени можно избавиться от всех членов, кроме двух крайних. Однако Г.В. Лейбниц обнаружил, что уравнение, определяющее коэффициенты многочлена $g(x)$, имеет степень больше пяти, и поэтому считал этот способ безнадежным. Несмотря на это, преобразование Чирнгаузена имеет важные приложения.

Пусть α – алгебраическое число степени n , $f(x)$ – его минимальный многочлен. Рассмотрим простое алгебраическое расширение $Q(\alpha)$ и число $t = g(\alpha)$, где $g(x) \in Q[x]$, $\deg g(x) \leq n-1$. Очевидно, что $[Q(\alpha):Q] = n, t \in Q(\alpha)$. Поэтому число t также является алгебраическим, причем $Q \subset Q(t) \subset Q(\alpha)$. Отсюда следует, что если степень алгебраичности числа t равняется k , то $n = ks$, где $s = [Q(\alpha):Q(t)]$. Значит, степень алгебраического числа t является делителем $\deg f(x) = n$. Ставится задача: найти многочлен $\varphi(x) \in Q[x]$, корнем которого является число t , а также выяснить степень алгебраичности этого числа. Задачу нахождения многочлена $\varphi(x)$ по данным многочленам $f(x)$ и $g(x)$ называют задачей Чирнгаузена. В литературе приводятся два метода решения этой задачи.

Мы предлагаем два новых метода решения этой задачи и, используя их, решаем две задачи.

Первая задача – это нахождение минимальных многочленов чисел вида $tg^2 \frac{\pi}{n}$ для всех натуральных чисел $n > 2$.

Вторая задача более частная. Она связана с изучением уравнения $\varphi(x) = x^3 - 7x - 7 = 0$. Это уравнение относится к случаю неприводимости. Все три его корня – действительные числа и формулы нахождения этих корней содержат комплексные числа.

Используя преобразование Чирнгаузена, удастся найти точные значения всех трех (действительных) корней этого уравнения.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ШОТТКИ НА ТОРЕ С УДАЛЕННЫМ ДИСКОМ

О.Б. ДОЛГОПолоВА, Э.И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет, г. Минск,
e-mail: Dolgopolova@tut.by

УДК 517.54

Ключевые слова: риманова поверхность, базис абелевых дифференциалов, функции Шоттки, краевые задачи, проблема обращения Якоби, тэта-функция Римана.

В работе изучается вопрос о построении функций Шоттки на римановой поверхности рода один с удаленным диском. Приводится вид функций Шоттки, кратных заданному дивизору.

Пусть $M = M^0 \cup \partial M$ - компактная риманова поверхность рода 1 с краем ∂M , состоящим из одной связной компоненты (рис. 1). Разрезав ее по циклу b , не гомологичному нулю, получаем трехсвязную поверхность, подобную однолистной. По теореме Римана она конформно эквивалентна плоской трехсвязной области.

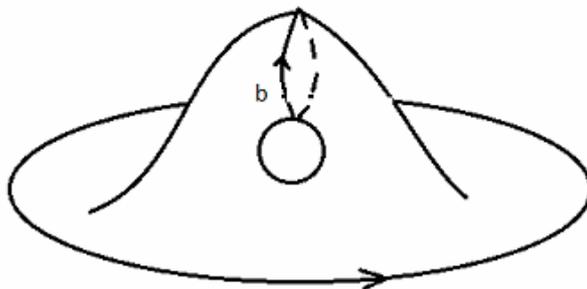


Рис. 1

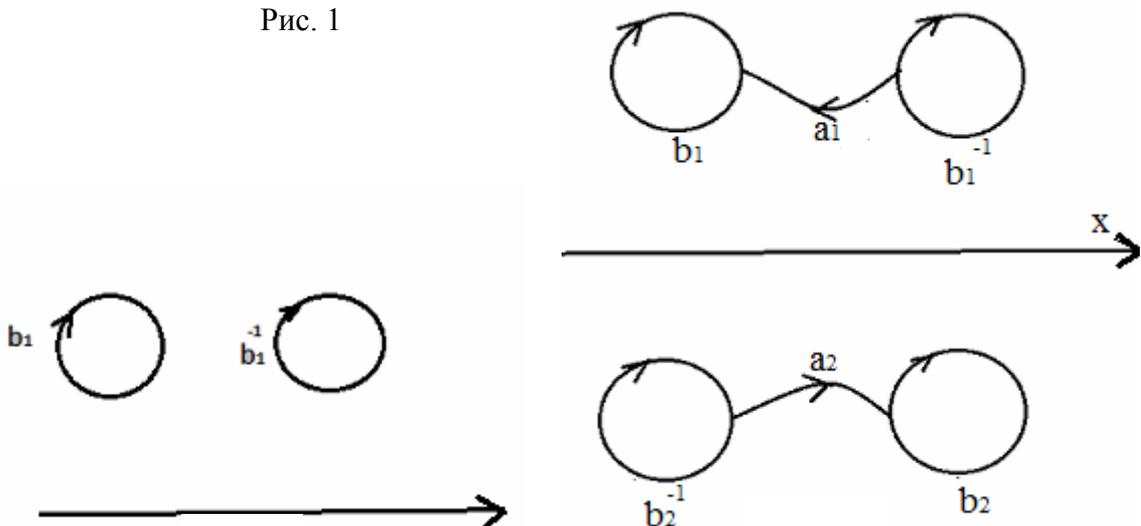


Рис. 2

Рис. 3

Пусть $z = f(p)$ - функция, реализующая конформный гомеоморфизм разрезанной поверхности M на полуплоскость $\text{Im} z > 0$, из которой удалены два диска. Будем считать, что образом края ∂M при отображении $z = f(p)$ является вещественная ось (рис. 2). Линии b_1 и b_1^{-1} на рисунке 2 связаны изменяющим ориентацию гомеоморфизмом $\alpha(t) = f^+ \circ (f^-)^{-1}(t)$, $t \in b_1$, где $f^+(p)$ ($f^-(p)$) - предельное значение функции $f(p)$ слева (справа) на b_1 . В качестве координат точек поверхности M будем использовать точки плоскости z , считая, что линии b_1 и b_1^{-1} склеены с помощью отождествления точек t и $\alpha(t)$. Построим дубль \mathfrak{R} поверхности M с помощью отображения симметрии $z \mapsto \bar{z}$ (рис. 3). Дубль является замкнутой римановой поверхностью рода 2. Построим на нем каноническое рассечение a_1, b_1, a_2, b_2 , ориентированное стандартно (т.е. так, как на рис. 3). Будем считать, что при отображении симметрии $z \mapsto \bar{z}$ линия a_1 переходит на линию a_2^{-1} , а линия b_1 переходит на линию b_2^{-1} . Используя теорему существования абелевых дифференциалов [1], возьмем базис абелевых дифференциалов первого рода (т.е. аналитических всюду на \mathfrak{R})

$$dw_1(z), \quad dw_2(z), \quad (1)$$

комплексно нормированных относительно выбранного канонического рассечения. Они на вещественной оси принимают чисто мнимые значения, а их матрица периодов выглядит так:

	a_1	a_2	b_1	b_2
$dw_1(z)$	1	0	B_{11}	B_{12}
$dw_2(z)$	0	1	B_{21}	B_{22}

причем, как известно, $B_{21} = B_{12}$, а матрица $\begin{pmatrix} \text{Im} B_{11} & \text{Im} B_{12} \\ \text{Im} B_{21} & \text{Im} B_{22} \end{pmatrix}$ положительно определена. Возьмем абелевы дифференциалы 1 рода:

$$-d\overline{w_1(\bar{z})}, \quad -d\overline{w_2(\bar{z})}. \quad (2)$$

Учитывая, что $a_2 = \overline{a_1^{-1}}$, $b_2 = \overline{b_1}$, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{a_1} [-d\overline{w_1(\bar{z})}] &= -\int_{a_1} d\overline{w_1(z)} = \int_{a_2} dw_1(z) = 0; \\ \int_{a_2} [-d\overline{w_1(\bar{z})}] &= -\int_{a_2} d\overline{w_1(z)} = \int_{a_1} dw_1(z) = 1; \\ \int_{b_1} [-d\overline{w_1(\bar{z})}] &= -\int_{b_1} d\overline{w_1(z)} = -\int_{b_2} dw_1(z) = -B_{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{b_2} [-d\overline{w_1(\bar{z})}] &= -\int_{b_2} d\overline{w_1(z)} = -\overline{\int_{b_1} dw_1(z)} = -\overline{B_{11}}; \\
\int_{a_1} [-d\overline{w_2(\bar{z})}] &= -\int_{a_1} d\overline{w_2(z)} = \overline{\int_{a_2} dw_2(z)} = 1; \\
\int_{a_2} [-d\overline{w_2(\bar{z})}] &= -\int_{a_2} d\overline{w_2(z)} = \overline{\int_{a_1} dw_2(z)} = 0; \\
\int_{b_1} [-d\overline{w_2(\bar{z})}] &= -\int_{b_1} d\overline{w_2(z)} = -\overline{\int_{b_2} dw_2(z)} = -\overline{B_{22}}; \\
\int_{b_2} [-d\overline{w_2(\bar{z})}] &= -\int_{b_2} d\overline{w_2(z)} = -\overline{\int_{b_1} dw_2(z)} = -\overline{B_{12}}.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что базис (2) - комплексно нормированный. В силу единственности базисы (1) и (2) должны совпадать, т.е.

$$-d\overline{w_2(\bar{z})} \equiv dw_1(z), -d\overline{w_1(\bar{z})} \equiv dw_2(z). \quad (3)$$

В частности, должны совпадать и их B -периоды: $-\overline{B_{22}} = B_{11}$, $-\overline{B_{21}} = B_{12}$. Из этих равенств и из того, что $B_{12} = B_{21}$, следует, что $B_{11} = A + iB$, $B_{22} = -A + iB$, $B_{12} = B_{21} = iC$, причем $B > C > 0$. Мы наложим на данную поверхность ограничение: $A = 0$. Тогда матрица B -периодов базиса абелевых интегралов первого рода

$$w_1(z) = \int_{\infty}^z dw_1(t), w_2(z) = \int_{\infty}^z dw_2(t) \quad (4)$$

будет выглядеть так:

	a_1	a_2	b_1	b_2
$w_1(z)$	1	0	iB	iC
$w_2(z)$	0	1	iC	iB

В интегралах (4) пути интегрирования лежат в M^0 и не пересекают линий канонического рассечения. Введем обозначение $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$.

Функциями Шоттки (см. [2, с. 279]), заданными на римановой поверхности M , называются мероморфные на M функции $\varphi(p)$, имеющие конечное число полюсов и удовлетворяющие краевому условию:

$$\operatorname{Im} \varphi(t) = 0, \quad t \in \partial M. \quad (5)$$

Очевидно, что множество всех функций Шоттки на M является полем, в котором константами являются вещественные числа. Для

построения функций Шоттки на M будем использовать следующую тэта-функцию Римана:

$$\theta(\mathbf{w}(z) - i\mathbf{e}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\{-\pi {}^t \mathbf{n} \mathbf{B} \mathbf{n} + 2\pi i {}^t \mathbf{n} [\mathbf{w}(z) - i\mathbf{e}]\}, \quad (6)$$

где $\mathbf{w}(z) = \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \in \Sigma^2$, ${}^t \mathbf{n} = (n_1, n_2)$, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \in R^2$.

Так как при $z \in \partial M$ все члены ряда (6) положительны, то и сумма его положительна при $z = x \in \partial M$. Значит, $\theta(\mathbf{w}(z) - i\mathbf{e})$ не равна тождественно нулю. Но тогда она обращается в нуль ровно в двух точках z_0 и $\overline{z_0}$, которые лежат в M^0 ($\text{Im} z_0 > 0, \text{Im} \overline{z_0} < 0$) и образуют единственное решение проблемы обращения Якоби, т.е. системы сравнений

$$\begin{cases} w_1(z_0) + w_1(\overline{z_0}) \equiv ie_1 - k_1, \\ w_2(z_0) + w_2(\overline{z_0}) \equiv ie_2 - k_2 \end{cases} \quad (7)$$

по модулю периодов. Входящие сюда числа k_1, k_2 - это «римановы константы» [3]:

$$\begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} B - \int_{a_2} w_1(t^-) dw_2(t), \\ k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} B - \int_{a_1} w_2(t^-) dw_1(t). \end{cases}$$

Учитывая, что $w_\nu(z) = -\overline{w_\nu(\overline{z})}$, можно переписать систему (7) в виде

$$\begin{cases} 2i \cdot \text{Im} w_1(z_0) \equiv ie_1 - k_1, \\ 2i \cdot \text{Im} w_2(z_0) \equiv ie_2 - k_2. \end{cases} \quad (7')$$

Итак, функция (6) имеет в M^0 единственный простой нуль z_0 , являющийся решением системы (7) или (7').

Задавая точки $z_1, z_2, \dots, z_n \in M^0$, рассмотрим дивизор $\Delta = (z_1)(z_2) \dots (z_n)$ и будем искать функции Шоттки, кратные дивизору Δ^{-1} . С этой целью будем использовать тэта-функцию (6). Напомним, что она аналитична на M^0 , положительна на ∂M , имеет линию разрыва a_1 , а также имеет единственный простой нуль в точке $z_0 \in M^0$. Предельные значения ее на линии a_1 удовлетворяют равенству

$$\theta(\mathbf{w}(t^+) - i\mathbf{e}) = \theta(\mathbf{w}(t^-) - i\mathbf{e}) \exp\{-\pi B + 2\pi i [w_1(t^-) - ie_1]\}, \quad t \in a_1. \quad (8)$$

Систему (7) можно кратко записать в виде:

$$2i \cdot \text{Im} \mathbf{w}(z_0) \equiv i\mathbf{e} - \mathbf{k} \quad (\text{по модулю периодов}).$$

Подставляя в функцию (8) $i\mathbf{e} = 2i \cdot \text{Im} \mathbf{w}(z_k) + \mathbf{k}$, получим функцию $\theta(\mathbf{w}(z) - 2i \cdot \text{Im} \mathbf{w}(z_k) - \mathbf{k})$, имеющую единственный простой нуль в точке

z_k . Таким образом, функцию Шоттки, кратную дивизору Δ^{-1} , можно искать в виде:

$$\varphi(z) = \frac{\prod_{k=1}^n \theta(\mathbf{w}(z) - 2i \cdot \text{Im } \mathbf{w}(z'_k) - \mathbf{k})}{\prod_{k=1}^n \theta(\mathbf{w}(z) - 2i \cdot \text{Im } \mathbf{w}(z_k) - \mathbf{k})}, \quad z \in M^0, \quad (9)$$

где $z'_1, z'_2, \dots, z'_n \in M^0$ □ пока неопределённые точки, которые будем искать из условия, чтобы функция (9) не имела разрыва на линии a_1 . Используя условия (8) для отдельных множителей, входящих в числитель и знаменатель формулы (9), получим уравнение

$$\sum_{k=1}^n \text{Im } \mathbf{w}(z'_k) = \sum_{k=1}^n \text{Im } \mathbf{w}(z_k), \quad (10)$$

где z_1, z_2, \dots, z_n - заданные точки, а точки z'_1, z'_2, \dots, z'_n неизвестны. Уравнение (10) есть обобщение системы (7). При $n=1$ единственным решением уравнения (10) является точка $z'_1 = z_1$. Это соответствует тому, что не существует функций Шоттки, имеющих единственный простой полюс. При $n \geq 2$ точки z'_2, \dots, z'_n можно задать произвольно, а точку z'_1 можно тогда найти из уравнения (10). Это означает, что при $n \geq 2$ функции Шоттки, кратные дивизору Δ^{-1} , можно найти в виде (9).

Литература

1. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. - М.: ИЛ, 1960.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1966.
3. Зверович Э. И. Проблема обращения Якоби, ее аналоги и обобщения // Актуальные проблемы современного анализа. - Гродно: ГрГУ, 2009. - С. 69-83.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВИРТУАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Г.С. ЕВДОКИМОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: evgalsema@gmail.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: *входящий поток, переменные параметры, ведущая мера, среднее значение интенсивности, порядок поступления, периодические параметры, Марковский процесс, эргодические свойства.*

В работе изучен вопрос о существовании предельного распределения виртуального времени ожидания для системы массового обслуживания с периодическим входящим потоком

При исследовании реальных систем массового обслуживания в последние годы вплотную столкнулись с необходимостью учитывать наличие зависимости интенсивности поступления требований на обслуживание от момента времени. В предлагаемой работе методами теории восстановления исследован вопрос о существовании предельного распределения виртуального времени ожидания для системы массового обслуживания $M(t)/G/1/\infty$ в следующих предположениях: входящий поток требований пуассоновский с ведущей мерой $\Lambda(\Delta) = \int_{\Delta} \lambda(u) du$,

которая имеет период τ , иными словами, для любого борелевского множества Δ на прямой $\Lambda(\Delta + \tau) = \Lambda(\Delta)$; среднее значение интенсивности

$\lambda(t)$ по периоду конечно, то есть $\lambda = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \lambda(t) dt < \infty$; требования

обслуживаются в порядке поступления; длительности обслуживания $\{\xi_k\}$ – случайные величины с распределением $F(x) = P(\xi_k \leq x)$, причем

$0 < \mu = \int_0^{\infty} x dF(x) < \infty$; длительности обслуживания $\{\xi_k\}$ не зависят друг от

друга и от входящего потока; обслуживающий прибор не выходит из рабочего состояния и немедленно после окончания обслуживания одного требования приступает к обслуживанию следующего из очереди.

Время ожидания в момент t обозначим через $\gamma(t)$ и определим как время, необходимое для завершения обслуживания всех требований, находящихся в системе в момент t . Если требование поступило в момент t , то его время ожидания равно $\gamma(t-0)$.

Теорема. Если распределение $F(x)$ имеет конечный первый момент и $\lambda\mu < 1$, то функцию распределения $\gamma(t)$ можно представить в виде $P\{\gamma(t) \leq x\} = M_t(x) + N_t(x)$, где функция $M_t(x)$ является периодической по t с периодом τ , а $N_t(x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Распределение $M_t(x)$ не зависит от начального распределения для $\gamma(t)$ и является невырожденным. В противном случае при $\lambda\mu \geq 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\gamma(t) \leq x\} = 0$ для всех x .

Наряду с потоком требований, поступающих в систему, рассмотрим еще два потока, которые сконструируем следующим образом. Все требования первого из этих потоков поступают лишь в моменты $n\tau$, причем в момент $n\tau$ поступает столько требований, сколько для истинного потока поступает в полусегменте $(n-1)\tau < t \leq n\tau$. Второй поток получается из истинного путем сдвига моментов поступления требований на величину τ вправо. Доказательство теоремы разобьем на ряд этапов – четырех лемм:

Лемма 1. Для каждого $k \geq 1$ с вероятностью единица

$$t_k + \omega_k \leq t'_k + \omega'_k < t_k + \omega_k + \tau,$$

где ω_k – длительность ожидания начала обслуживания k -м требованием.

Лемма 2. Для каждого n с вероятностью 1

$$\begin{aligned} \gamma'(n\tau) &= \gamma'(n\tau - \mathbf{0}) + \chi'(n\tau), \\ \gamma'((n+1)\tau - \mathbf{0}) &\leq \gamma(n\tau), \quad \gamma(n\tau) \leq \gamma'(n\tau), \end{aligned}$$

где $\chi'(n\tau)$ – полное время обслуживания всех требований, прибывших в момент времени $n\tau$.

Лемма 3. Для систем с простейшим входящим потоком интенсивности λ в условиях теоремы верно следующее: каковы бы ни были начальные условия, всегда найдется требование, которое застанет систему свободной; среднее расстояние между последовательными точками перехода системы из занятого состояния в свободное конечно.

Лемма 4. Для любого $l \geq 1$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^l = P^l$,

который не зависит от начального состояния системы $\sum_{i=1}^{\infty} P^i = 1$.

На основании теоремы можно сделать вывод: системы описанного типа из любого начального состояния с течением времени входят в режим работы, при котором распределения характеристик являются периодическими функциями. Поэтому очередной и достаточно трудной является следующая задача: как, зная исходные распределения длительности обслуживания и потока требований, найти «стационарные решения», существование которых доказано.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. - М.: КомКнига, 2005. - 400 с.

АФФИННЫЕ ИНЦИДЕНТНОСТНЫЕ СТРУКТУРЫ. ОСЕВЫЕ КОЛЛИНЕАЦИИ

Е. П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: ypy1101@gmail.com

УДК 514.14 + 514.16

Ключевые слова: *аффинные инцидентностные структуры, АЕ-структуры, аффинные коллинеации.*

Изучаются коллинеации аффинных инцидентностных структур. Приведен пример АЕ-структуры, не являющейся аффинной плоскостью, с нетождественной аффинной коллинеацией с двумя осями.

В работе рассматриваются АЕ-структуры [1] - аффинные инцидентностные структуры (АІ-структуры), допускающие координатизацию с помощью Е-алгебр $A = \langle A; T, 0, I \rangle$.

АЕ-структура $\langle P, L; I, \parallel \rangle$ состоит из множества точек P и множества прямых L , $P \cap L = \emptyset$, на которых определены два отношения – отношение инцидентности $I \subseteq P \times L$ и бинарное отношение эквивалентности $\parallel \subseteq L \times L$, называемое отношением параллельности.

Е-алгебра $A = \langle A; T, 0, I \rangle$ является алгеброй типа $\langle 3, 0, 0 \rangle$. Элементы 0 и I алгебры удовлетворяют условиям:

$$("a, b \hat{I} A) T(a, 0, b) = T(0, a, b) = b,$$

$$("a \hat{I} A) T(I, a, 0) = T(a, I, 0) = a.$$

Определение 1. Коллинеацией аффинной инцидентностной структуры $\langle P, L; I, \parallel \rangle$ (АІ-структуры) называется пара биекций (α_1, α_2) , $\alpha_1 : P \rightarrow P$ и $\alpha_2 : L \rightarrow L$, такая, что:

$$(\forall p \in P) (\forall L \in L) (p I L \Leftrightarrow \alpha_1(p) I \alpha_2(L)).$$

Определение 2. Коллинеация АІ-структуры, сохраняющая отношение параллельности, называется *аффинной коллинеацией*.

Определение 3. Коллинеация АІ-структуры, обладающая прямой L инвариантных точек, называется *осевой коллинеацией* или коллинеацией с осью L .

Определение 4. Направление Π АІ-структуры называется *инвариантным направлением* коллинеации, если все прямые направления Π инвариантны относительно данной коллинеации.

Определение 5. Коллинеация АІ-структуры с инвариантным направлением Π с осью L , с инвариантным направлением Π и осью L называется соответственно Π -, L -, (Π, L) - коллинеацией.

В аффинных плоскостях нетождественная коллинеация не может иметь более одной оси. Для произвольных АІ-структур указанное утверждение не выполняется. Ниже мы приведем пример АЕ-структуры, в которой существует нетождественная коллинеация с двумя осями.

Пример 1. Пусть S — АЕ-структура над кольцом Z_4 классов вычетов по модулю 4. Точками структуры S являются кортежи в круглых скобках (a, b) , где $a, b \in Z_4$. Прямыми структуры S служат кортежи в квадратных скобках $[k, l]$ и кортежи в угловых скобках $\langle m \rangle$, где $k, l, m \in Z_4$. Прямые первого вида ассоциируются с уравнениями $y = kx + l$, прямые второго вида - с уравнениями $x = m$. Инцидентность точки и прямой определяется следующими условиями:

$$(x, y) \in [k, l] \Leftrightarrow y = kx + l;$$

$$(x, y) \in \langle m \rangle \Leftrightarrow x = m.$$

Ниже для обозначения прямых $[k, l]$ и $\langle m \rangle$ мы будем также использовать традиционные записи $y = kx + l$ и $x = m$ соответственно.

Матрица инцидентности AE -структуры S приведена на рисунке 1.

	$[0, 0]$	$[0, 1]$	$[0, 2]$	$[0, 3]$	$[1, 0]$	$[1, 1]$	$[1, 2]$	$[1, 3]$	$[2, 0]$	$[2, 1]$	$[2, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 0]$	$[3, 1]$	$[3, 2]$	$[3, 3]$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 3 \rangle$
$(0, 0)$	•				•				•				•				•			
$(0, 1)$		•				•				•				•			•			
$(0, 2)$			•				•				•				•		•			
$(0, 3)$				•				•				•				•	•			
$(1, 0)$	•							•			•			•				•		
$(1, 1)$		•			•							•			•			•		
$(1, 2)$			•			•			•							•		•		
$(1, 3)$				•			•			•			•					•		
$(2, 0)$	•						•		•						•					•
$(2, 1)$		•						•		•						•				•
$(2, 2)$			•		•						•		•							•
$(2, 3)$				•		•						•		•						•
$(3, 0)$	•					•				•					•					•
$(3, 1)$		•					•				•	•								•
$(3, 2)$			•					•	•					•						•
$(3, 3)$				•	•					•					•					•

Рис. 1. Матрица инцидентности AE -структуры S

Заметим, что приведенная AE -структура S не является аффинной плоскостью. В структуре S имеются различные точки, не инцидентные одной прямой, например, точки $(0, 0)$ и $(2, 1)$, и различные точки инцидентные двум различным прямым, например, точки $(0, 0)$ и $(2, 0)$ инцидентны прямым $[0, 0]$ и $[2, 0]$.

Приступим теперь к построению осевой коллинеации AE -структуры S . Определим биекцию $\alpha_2: L \rightarrow L$:

$y = x$	\rightarrow	$y = 3x + 2;$
$y = x + 1$	\rightarrow	$y = 3x + 1;$
$y = x + 2$	\rightarrow	$y = 3x;$
$y = x + 3$	\rightarrow	$y = 3x + 3;$
$y = 2x$	\rightarrow	$y = 2x + 2;$
$y = 2x + 1$	\rightarrow	$y = 2x + 1;$
$y = 2x + 2$	\rightarrow	$y = 2x;$
$y = 2x + 3$	\rightarrow	$y = 2x + 3;$
$y = 3x$	\rightarrow	$y = x;$
$y = 3x + 1$	\rightarrow	$y = x + 1;$
$y = 3x + 2$	\rightarrow	$y = x;$
$y = 3x + 3$	\rightarrow	$y = x + 3;$
$y = 2x$	\rightarrow	$y = 2x + 2;$
$y = 2x + 1$	\rightarrow	$y = 2x + 1;$
$y = 2x + 2$	\rightarrow	$y = 2x;$
$y = 2x + 3$	\rightarrow	$y = 2x + 3;$
$y = 0$	\rightarrow	$y = 2;$
$y = 1$	\rightarrow	$y = 1;$
$y = 2$	\rightarrow	$y = 0;$
$y = 3$	\rightarrow	$y = 3.$
$x = 0$	\rightarrow	$x = 0;$
$x = 1$	\rightarrow	$x = 1;$
$x = 2$	\rightarrow	$x = 2;$
$x = 3$	\rightarrow	$x = 3$

и биекцию $\alpha_1: P \rightarrow P$:

$$(\forall a, b \in Z_4) \alpha_1(a, b) = (a, 3b + 2).$$

Пара биекций $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ является коллинеацией AE -структуры S , так как сохраняет инцидентность точек и прямых.

Коллинеация α является аффинной, так как любая пара параллельных прямых отображается в пару параллельных прямых.

Коллинеация α имеет две оси $y = 2x + 1$ и $y = 2x + 3$. Каждая точка p этих прямых инвариантна $\alpha_1(p) = p$.

Коллинеация α имеет одно инвариантное направление $\Pi_{x=0}$. Каждая прямая $x = a$, $a \in Z_4$, этого направления инвариантна $\alpha_2(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$.

Таким образом, построенная в примере 1 коллинеация AE -структуры является нетождественной аффинной коллинеацией с двумя осями.

Литература

1. Емельченков Е.П. Геометрии над алгебрами типа $\langle 3 \rangle$. Аффинные тернарные структуры // Известия Смоленского государственного университета. - 2013. - № 3(23). - С. 365-379.

Π-ТРАНЗИТИВНЫЕ АЕ-СТРУКТУРЫ

Е. П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ

Смоленский государственный университет,

e-mail: ypy1101@gmail.com

УДК 514.14 + 514.16

Ключевые слова: *аффинные инцидентностные структуры (AI-структуры), АЕ-структуры, трансляции AI-структур, Π-транзитивные АЕ-структуры, АЕ-структура трансляций; E-алгебры, алгебраические эквиваленты Π-транзитивности.*

Изучаются трансляции аффинных инцидентностных структур. Исследованы некоторые свойства Π-транзитивных АЕ-структур. Найдены алгебраические эквиваленты $\Pi_{x=0}$ -, $\Pi_{y=0}$ - и $\Pi_{y=x}$ -транзитивности АЕ-структур. Дана алгебраическая характеристика АЕ-структур трансляций.

В работе рассматриваются АЕ-структуры [1] - аффинные инцидентностные структуры (AI-структуры), допускающие координатизацию с помощью E-алгебр $A = \langle A; T, 0, I \rangle$.

АЕ-структура $\langle P, L; I, \parallel \rangle$ состоит из множества точек P и множества прямых L , $P \cap L = \emptyset$, на которых определены два отношения – отношение инцидентности $I \subseteq P \times L$ и бинарное отношение эквивалентности $\parallel \subseteq L \times L$, называемое отношением параллельности.

E-алгебра $A = \langle A; T, 0, I \rangle$ является алгеброй типа $\langle 3, 0, 0 \rangle$.

Элементы 0 и I алгебры удовлетворяют условиям:

$$("a, b \hat{I} A) T(a, 0, b) = T(0, a, b) = b,$$

$$("a \hat{I} A) T(I, a, 0) = T(a, I, 0) = a.$$

Тернарная операция T E-алгебры порождает две бинарные операции:

$$a \cdot b = T(a, b, 0);$$

$$a + b = T(I, a, b).$$

Определение 1. Коллинеацией аффинной инцидентностной структуры $\langle P, L; I, \parallel \rangle$ (AI-структуры) называется пара биекций $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 : P \rightarrow P$ и $\alpha_2 : L \rightarrow L$, такая, что:

$$(\forall p \in P) (\forall L \in L) (p \hat{I} L \Leftrightarrow \alpha_1(p) \hat{I} \alpha_2(L)).$$

Ниже вместо $\alpha_1 : P \rightarrow P$ и $\alpha_2 : L \rightarrow L$ будем писать $\alpha : P \rightarrow P$ и $\alpha : L \rightarrow L$ без указания индексов.

Определение 2. Коллинеация AI-структуры, обладающая прямой L инвариантных точек, называется *осевой коллинеацией* или коллинеацией с осью L .

Определение 3. Направление Π AI -структуры называется *инвариантным направлением* коллинеации, если все прямые направления Π инвариантны относительно данной коллинеации.

Определение 4. Коллинеация AI -структуры с инвариантным направлением Π , с осью L , с инвариантным направлением Π и осью L называется соответственно Π -, L -, (Π, L) - коллинеацией.

Определение 5. Коллинеация α AI -структуры называется *невырожденной дилатацией*, если для любой прямой L : $\alpha(L) \parallel L$.

Определение 6. Невырожденную дилатацию t называют *квазитрансляцией*, если $t(p) \neq p$ для любой точки p AI -структуры или если t - тождественная коллинеация.

Определение 7. Квазитрансляция t , обладающая инвариантным направлением, называется *трансляцией* или *переносом*.

Определение 8. AI -структура называется Π -транзитивной, если для любых точек p и q , инцидентных произвольной прямой из направления Π , существует такая трансляция t , что $t(p) = q$.

Определение 9. AI -структура называется *AI -структурой трансляций*, если для любых точек p и q AI -структуры существует такая трансляция t , что $t(p) = q$.

Очевидно, множество всех трансляций с фиксированным направлением Π образует группу относительно композиции коллинеаций.

Ниже мы исследуем свойства трансляций AE -структур. Координатизация AE -структур с помощью E -алгебр существенно облегчает изучение коллинеаций этих структур. Проиллюстрируем это на примере вычисления необходимых и достаточных свойств E -алгебры (алгебраических эквивалентов) для $\Pi_{x=0}$ -транзитивности AE -структуры.

Теорема 1. AE -структура \mathcal{S} , ассоциированная с E -алгеброй

$$R = \langle \mathbf{R}; T, 0, 1 \rangle,$$

$\Pi_{x=0}$ -транзитивна тогда и только тогда, когда R удовлетворяет условиям:

$$1) T(a, b, c) = a \cdot b + c;$$

$$2) \langle \mathbf{R}; + \rangle - \text{группа.}$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим трансляцию α AE -структуры \mathcal{S} с направлением $\Pi_{x=0}$, переводящую точку $(0, 0)$ в точку $(0, b)$. α действует следующим образом:

$$\begin{array}{ll} (0, n) & \rightarrow (0, n + b); \\ y = T(m, x, n) & \rightarrow y = T(m, x, n + b); \\ (a, T(m, x, n)) & \rightarrow x = a; \\ (a, a) & \rightarrow (a, a + b); \\ y = a & \rightarrow y = a + b; \\ x = c & \rightarrow x = c; \\ (c, a) & \rightarrow (c, a + b). \end{array}$$

Таким образом, для любой точки (x, y) AE -структура:

$$\alpha(x, y) = (x, y + b) .$$

Отсюда, с учетом того, что множество трансляций AE -структуры с направлением $\Pi_{x=0}$ относительно композиции коллинеаций образует группу, в частности, вытекает, что алгебра $\langle R; + \rangle$ является группой.

Далее:

$$\begin{aligned} (0, n) &\rightarrow (0, n + b); \\ y = T(m, x, n) &\rightarrow y = T(m, x, n + b); \\ (a, T(m, a, n)) &\rightarrow (a, T(m, a, n) + b). \end{aligned}$$

Так как трансляция α сохраняет инцидентность, получаем:

$$T(m, a, n) + b = T(m, a, n + b).$$

Положив $n = 0$, получаем условие 1):

$$m \cdot a + b = T(m, a, b).$$

Необходимость. Рассмотрим преобразование AE -структуры S , действующее на точки и прямые следующим образом:

$$\begin{aligned} (x, y) &\rightarrow (x, y + b); \\ y = T(m, x, a) &\rightarrow y = T(m, x, a + b). \end{aligned}$$

Это преобразование является трансляцией с направлением $\Pi_{x=0}$, переводящей произвольную точку (x, y) в любую точку на прямой $\mathbb{K}, y \in \Pi_{x=0}$. Следовательно, AE -структура S является $\Pi_{x=0}$ -транзитивной.

Аналогично доказываются теоремы 2 и 3.

Теорема 2. AE -структура S , ассоциированная с E -алгеброй $R = \langle R; T, 0, 1 \rangle$, транзитивна в направлениях $\Pi_{x=0}$ и $\Pi_{y=0}$ тогда и только тогда, когда E -алгебра R удовлетворяет условиям:

- 1) $T(a, b, c) = a \cdot b + c$;
- 2) $\langle R; + \rangle$ - абелева группа.

Теорема 3. AE -структура S , ассоциированная с E -алгеброй $R = \langle R; T, 0, 1 \rangle$, транзитивна в направлениях $\Pi_{x=0}$, $\Pi_{y=0}$ и $\Pi_{y=x}$ тогда и только тогда, когда E -алгебра R удовлетворяет условиям:

- 1) $T(a, b, c) = a \cdot b + c$;
- 2) $\langle R; + \rangle$ - абелева группа;
- 3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Теорема 4. AE -структура S , ассоциированная с E -алгеброй $R = \langle R; T, 0, 1 \rangle$, является AE -структурой трансляций тогда и только тогда, когда E -алгебра R удовлетворяет условиям:

- 1) $T(a, b, c) = a \cdot b + c$;
- 2) $\langle R; + \rangle$ - абелева группа;
- 3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Доказательство. Так как при выполнении условий 1), 2), 3) преобразование AE -структуры S , действующее на точки и прямые следующим образом:

$$\begin{aligned} (x, y) &\rightarrow (x + a, y + b); \\ Y = T(m, x, n) &\rightarrow y = T(m, x, n + b - m \cdot a), \end{aligned}$$

является трансляцией, переводящей точку (x, y) в произвольную точку $(x + a, y + b)$, то S является AE -структурой трансляций.

Выполнение условий 1), 2), 3) в AE -структуре трансляций следует из теоремы 3.

Литература

1. Емельченков Е.П. Геометрии над алгебрами типа $\langle 3 \rangle$. Аффинные тернарные структуры // Известия Смоленского государственного университета. – 2013. - № 3(23). - С. 365-379.

ФОРМУЛА ПЕРЕСТАНОВКИ В ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет, г. Минск

УДК 517.948.32:517.544

Ключевые слова: замкнутая гладкая кривая, формула перестановки Пуанкаре-Бертрана.

В работе получено обобщение известной в теории сингулярных интегральных уравнений формулы перестановки Пуанкаре-Бертрана на повторные интегралы вида $\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}}$, где последние понимаются в смысле конечной части по Адамару.

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ – гладкая замкнутая ориентированная кривая, а функция $\varphi(\zeta, \tau) : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$ достаточное число раз дифференцируема. Для простоты будем считать, что $\varphi(\zeta, \tau) \in C^\infty(L \times L)$. Формула перестановки Пуанкаре – Бертрана

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{\zeta-\tau} = -\pi^2 \varphi(t, t) + \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)}, \quad t \in L, \quad (1)$$

касается изменения порядка интегрирования в повторном сингулярном интеграле, где оба интеграла (внешний и внутренний) понимаются в смысле главного значения по Коши.

Повторный интеграл

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}}, \quad t \in L, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

существует в смысле конечной части по Адамару [1, с. 123–125] и является более общим по сравнению с интегралом, стоящим в левой части равенства (1). Цель этой работы – обобщить формулу (1) на повторный интеграл (2). Все интегралы, встречающиеся ниже, понимаются в смысле конечной части по Адамару. Предварительно установим следующую простую лемму.

Лемма 1. При любых целых $m \geq 0, n \geq 0$ и при $t \in L, \zeta \in L$ имеем:

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}} = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Выбрасывая из контура L части, попадающие в круги $|z-t| < \rho$ и $|z-\zeta| < \rho$ соответственно с центрами в точках t и ζ , достаточно малого радиуса ρ , и заменяя выброшенные части дугами окружностей, видим, что интеграл (3) равен произведению πi на сумму вычетов подынтегральной функции в точках t и ζ . При $t \neq \zeta$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}} &= \pi i \left[\operatorname{res}_{\tau=t} \frac{1}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}} + \operatorname{res}_{\tau=\zeta} \frac{1}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}} \right] = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi i}{m!} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^m (\tau-\zeta)^{-n-1} \Big|_{\tau=t} + \frac{\pi i}{n!} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^n (\tau-\zeta)^{-m-1} \Big|_{\tau=\zeta} = \\ &= \frac{\pi i}{m!} \frac{(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-m)}{(t-\zeta)^{n+m+1}} + \frac{\pi i}{n!} \frac{(-m-1)(-m-2)\cdots(-m-n)}{(t-\zeta)^{m+n+1}} = \\ &= \frac{\pi i (m+n)!}{m! n!} \left[\frac{(-1)^m}{(t-\zeta)^{n+m+1}} + \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+m+1} (t-\zeta)^{m+n+1}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Если же $\tau = \zeta$, то

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+n+2}} = \pi i \cdot \operatorname{res}_{\tau=t} \frac{1}{(\tau-t)^{m+n+2}} = \frac{\pi i}{(m+n+1)!} \left(\frac{d}{d\tau} \right) (1) = 0.$$

Доказательство окончено.

Будем использовать следующие равенства:

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = m! \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}, \quad t \in L. \quad (4)$$

Первое из них принадлежит Р.С. Исаханову и Ю.М. Крикунову [2, с. 43], а второе является следствием установленных в [3] обобщенных формул Сохоцкого

$$\Phi(t^\pm) = \pm \frac{1}{2} \varphi^{(m)}(t) + \frac{m!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}, \quad t \in L,$$

для интеграла

$$\Phi(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}, \quad z \notin L.$$

Переходя непосредственно к обобщению формулы (1), запишем сначала ее для частной производной $\frac{\partial^n \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^n}$:

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{\partial^n \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^n} \frac{d\zeta}{\zeta-\tau} = -\pi^2 \frac{\partial^n \varphi(\zeta, t)}{\partial \zeta^n} \Big|_{\zeta=t} + \int_L d\zeta \int_L \frac{\partial^n \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^n} \frac{d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)}.$$

В силу (4) это равенство можно переписать в следующем виде:

$$n! \int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau)}{(\zeta-\tau)^{n+1}} = -\pi^2 \frac{\partial^n \varphi(\zeta, t)}{\partial \zeta^n} \Big|_{\zeta=t} + n! \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}}. \quad (5)$$

Действуя на это равенство оператором $\left(\frac{d}{dt}\right)^m$, получим:

$$\begin{aligned} & m!n! \int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}} = \\ & = -\pi^2 \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[\frac{\partial^n \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^n} \Big|_{\zeta=t} \right] + n! \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Осталось показать, что в последнем слагаемом равенства (6) можно дифференцировать под знаком повторного интеграла. С этой целью разложим $\varphi(\zeta, \tau)$ по степеням разности $\tau - \zeta$:

$$\varphi(\zeta, \tau) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=\zeta} \cdot (\tau-\zeta)^k + (\zeta-\tau)^{n+1} r(\zeta, \tau), \quad (7)$$

где $r(\zeta, \tau) \in C^\infty(L, L)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}} = \\ & = \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_L \frac{\partial^k \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=\zeta} d\zeta \int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1-k}} + \int_L \frac{r(\zeta, \tau)}{\tau-t} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу леммы 1 в последнем равенстве все внутренние интегралы под знаком суммы равны нулю. Значит, и вся сумма равна нулю, и мы имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}} &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{r(\zeta, \tau)}{\tau-t} d\tau = \\ &= \int_L d\zeta \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L \frac{r(\zeta, \tau)}{\tau-t} d\tau = m! \int_L d\zeta \int_L \frac{r(\zeta, \tau)}{(\tau-t)^{m+1}} d\tau. \end{aligned}$$

Подставив сюда вместо $r(\zeta, \tau)$ выражение из (7) и опять воспользовавшись леммой 1, будем иметь:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}} &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{r(\zeta, \tau)}{\tau-t} d\tau = \\ &= \int_L d\zeta \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L \frac{r(\zeta, \tau)}{\tau-t} d\tau = m! \int_L d\zeta \int_L \frac{r(\zeta, \tau)}{(\tau-t)^{m+1}} d\tau. \end{aligned}$$

Подставим сюда вместо $r(\zeta, \tau)$ выражение из (7) и опять воспользовавшись леммой 1, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}} &= -m! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_L \frac{\partial^k \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=\zeta} d\zeta \int_L \frac{d\tau}{(\zeta-\tau)^{n+1} (\tau-t)^{m+1}} + \\ &+ m! \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\zeta-\tau)^{n+1} (\tau-t)^{m+1}} = m! \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Подставив это в правую часть равенства (6) и разделив на $m!n!$, получим окончательно

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}} = -\frac{\pi^2}{m!n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n \varphi(\zeta, \tau) \Big|_{\zeta=t} \right] + \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}}, \quad t \in L. \quad (9)$$

Это и есть искомое обобщение формулы (1). При $m=n=0$ формула (9) переходит в формулу (1). В случае, когда $\varphi(\zeta, \tau) \equiv \varphi(\zeta)$, т.е. не зависит от τ , интеграл в правой части равенства (9) исчезает (в силу леммы 1), и мы имеем равенство

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}} = -\frac{\pi^2}{m!n!} \varphi^{(m+n)}(t), \quad t \in L,$$

обобщающее известное свойство инволютивности сингулярного интегрального оператора [2, с. 66].

Литература

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. - М.: Высшая школа, 1966.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука. - 1977.
3. Зверович Э.И. Обобщение формул Сохоцкого // Весці НАН Беларусі. - Сер. физ.-мат. наук. - 2012. - № 2. - С. 24-28.

ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ОТ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

А.М. ЗУЕВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: zueandrej@yandex.ru

УДК 517.98

Ключевые слова: *усреднение функции, интеграл от бесселевых функций, оценка интеграла.*

В работе приводятся основные идеи получения оценки усреднения интеграла специального вида от бесселевых функций.

Пусть f — произвольная функция, зависящая от действительного R и от каких-либо других аргументов. Назовем усреднением такой функции по переменной R на сегменте $\left[\frac{R_0}{2}; R_0\right]$ величину

$$D_{R_0} f = \frac{2}{R_0} \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} f dR.$$

Пусть

$$J_k^{(j)} = \int_0^R r^{j-s-\frac{1}{2}} J_{s+\frac{1}{2}}(\mu r) \cos(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j) dr. \quad (1)$$

Считая $\mu > 0$, $|\mu - |\mu_k|| \geq \varepsilon > 0$, $j > s + 2$, получим оценки для $|D_{R_0} J_k^{(j)}|$. Не нарушая общности, можно считать, что $\mu_k > 0$, а j - четное. Тогда с точностью до знака

$$J_k^{(j)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mu_k} \int_0^R r^{j-s} J_{s+\frac{1}{2}}(\mu r) J_{\frac{1}{2}}(\mu_k r) dr. \quad (2)$$

В [1] автором была получена формула для интеграла

$$I = \int_a^R r^\alpha J_{\beta+\frac{1}{2}}(\mu r) J_{\gamma-\frac{1}{2}}(\mu_k r) dr, \quad (3)$$

а именно

$$\begin{aligned} I \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_k^2}\right) &= \frac{1}{\mu_k} r^\alpha J_{\gamma+\frac{1}{2}}(\mu_k r) J_{\beta+\frac{1}{2}}(\mu r) \Big|_a^R + \frac{\mu}{\mu_k^2} r^\alpha J_{\beta+\frac{3}{2}}(\mu r) J_{\gamma+\frac{3}{2}}(\mu_k r) \Big|_a^R - \\ &- \frac{\mu}{\mu_k^2} (\alpha - \gamma - \beta - 3) \int_a^R r^{\alpha-1} J_{\beta+\frac{3}{2}}(\mu r) J_{\gamma+\frac{3}{2}}(\mu_k r) dr - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\mu_k} \left(\alpha - \gamma + \beta + (2\gamma + 1) \frac{\mu^2}{\mu_k^2} \right) \int_a^R r^{\alpha-1} J_{\gamma+\frac{1}{2}}(\mu_k r) J_{\beta+\frac{1}{2}}(\mu r) dr. \quad (4)$$

Интеграл в (2) является частным случаем (3), и, применяя формулу (4), имеем:

$$J_k^{(j)} \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_k^2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mu_k} \left\{ \frac{1}{\mu_k} \cdot \left[R^{j-s} J_{\frac{1}{2}}(\mu_k R) J_{s+\frac{1}{2}}(\mu R) \right] + \frac{\mu}{\mu_k^2} \left[R^{j-s} J_{s+\frac{3}{2}}(\mu R) \right] \right\} -$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mu_k} \left\{ \frac{\mu}{\mu_k^2} (j-2s-3) \int_0^R r^{j-s-1} J_{\frac{3}{2}}(\mu_k r) dr - \frac{1}{\mu_k} \left(j + \frac{\mu^2}{\mu_k^2} \right) \int_0^R r^{j-s-1} J_{\frac{1}{2}}(\mu_k r) J_{s+\frac{1}{2}}(\mu r) dr \right\}.$$

Применим к выражениям в квадратных скобках операцию усреднения и воспользуемся формулой (4).

Все бесселевы функции оценим с помощью известного неравенства

$$|J(x)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{x}}.$$

В результате получим при $\mu < |\mu_k|$:

$$\left| D_{R_0} J_k^{(j)} \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_k^2} \right) \right| \leq \frac{C_2 \cdot R_0^{j-s-2}}{\mu^{\frac{1}{2}} \mu_k^2},$$

откуда

$$\left| D_{R_0} J_k^{(j)} \right| \leq \frac{C_2 \cdot R_0^{j-s-2}}{\mu^{\frac{1}{2}} \mu_k^2} \cdot \frac{\mu_k^4}{(\mu_k - \mu)^2 (\mu_k + \mu)^2} \leq \frac{C_3 \cdot R_0^{j-s-2} \cdot \mu_k^2}{\mu^{\frac{1}{2}} (\mu_k - \mu)^2 \mu_k^2} =$$

$$= C_3 \cdot R_0^{j-s-2} \mu^{-\frac{1}{2}} \cdot \|\mu - |\mu_k|\|^{-2}.$$

Совершенно аналогично эта же оценка устанавливается и при $\mu > |\mu_k|$. При этом используется другая формула из [1], подобная формуле (4).

Итак,

$$\left| D_{R_0} J_k^{(j)} \right| \leq C_4 R_0^{j-s-2} \mu^{-\frac{1}{2}} \cdot \|\mu - |\mu_k|\|^{-2},$$

где $J_k^{(j)}$ задается равенством (1), $\mu > 0$, $\|\mu - |\mu_k|\| \geq \varepsilon > 0$, $j > s+2$.

Литература

1. Зуев А.М. Формулы для интеграла специального вида от бесселевых функций // Исследования по крайвым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. – Смоленск, 2004. - Вып. 5. – С. 20-22.

О НЕТЕРОВОСТИ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ ТРИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПЛОСКОСТИ СО ЩЕЛЯМИ

И.М. ЗУЕВА, И.Б. БОЛОТИН

Смоленский государственный университет,
e-mail: irishka_15_93@mail.ru, IBBolotin@smolgu.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *трианалитическая функция, краевая задача Римана, плоскость со щелями.*

Работа посвящена изучению одной из основных краевых задач типа Римана в классе трианалитических функций. В ходе исследования установлена нетеровость первой основной краевой задачи типа Римана для трианалитических функций в плоскости со щелями.

Исключим из полной комплексной плоскости попарно непересекающиеся отрезки действительной оси $[a_m; b_m]$ ($m = 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$) и пусть D есть оставшаяся область. Под границей L области D будем понимать выброшенные отрезки (разрезы). Таким образом, $L = \bigcup_{m=1}^n [a_m; b_m]$ и $D = \bar{C} \setminus L$. Концы контура L будем называть узлами и обозначать c_p ($p = 1, 2, \dots, 2n$).

В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1].

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все трианалитические функции $F(z)$, принадлежащие классу $A_3(D) \cap I^{(4)}(L)$, исчезающие на бесконечности, ограниченные вблизи узлов контура L и удовлетворяющие во всех внутренних точках L следующим краевым условиям:*

$$\frac{\partial^2 F^+(t)}{\partial x^2} = G_1(t) \frac{\partial^2 F^-(t)}{\partial x^2} + g_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 F^+(t)}{\partial x \partial y} = G_2(t) \frac{\partial^2 F^-(t)}{\partial x \partial y} + i g_2(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 F^+(t)}{\partial y^2} = G_3(t) \frac{\partial^2 F^-(t)}{\partial y^2} - g_3(t), \quad (3)$$

где $G_k(t)$, $g_k(t)$ – заданные на L функции класса $H^{(2)}(L)$, $k = 1, 2, 3$, причем $G_k(t) \neq 0$ на L . Здесь в равенствах (1)-(3) множитель i^{k-1} при $g_k(t)$ введен для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу будем называть *первой основной краевой задачей типа Римана для трианалитических функций в плоскости со щелями* или задачей $R_{1,3}$ в плоскости со щелями.

Отметим, что задача $R_{1,3}$ представляет собой одну из основных краевых задач типа Римана для трианалитических функций, поставленных в известной монографии Ф.Д. Гахова [2]. В случае, когда контур L состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых гладких замкнутых кривых, задача $R_{1,3}$ была подробно исследована в работах К.М. Расулова. В работах [3; 4] получен конструктивный метод решения данной задачи.

В сообщении устанавливается следующий основной результат.

Теорема. Пусть $L = \bigcup_{m=1}^n [a_m; b_m]$, $D = \bar{C} \setminus L$. Число условий разрешимости неоднородной задачи $R_{1,3}$ в плоскости со щелями, так и число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи, являются конечными, то есть задача $R_{1,3}$ в плоскости со щелями является нетеровой.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.
3. Болотин И.Б., Зуева И.М. Об одной краевой задаче типа Римана для трианалитических функций в плоскости со щелями // Актуальные проблемы современной науки: сборник статей Международной научно-практической конференции. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2013.
4. Болотин И.Б., Зуева И.М. О решении первой основной краевой задачи типа Римана для трианалитических функций в плоскости со щелями // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики: материалы 3-й научно-практической internet-конференции, 20 -21 февраля 2014 г. / отв. ред. Ю.В. Нагорнов. – Ульяновск: SIMJET, 2014.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

В.В. КАРАЧИК

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: karachik@susu.ru

УДК 517.956.223+517.575

Ключевые слова: *полигармоническое уравнение, формула Альманси, полигармонические полиномы, задача Дирихле, полиномиальные решения.*

В работе построено полиномиальное решение задачи Дирихле для неоднородного полигармонического уравнения с полиномиальной правой частью и полиномиальными граничными данными в единичном шаре.

Хорошо известна классическая задача Дирихле для неоднородного полигармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in R^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^m u(x) = f(x), x \in S; \quad u|_{\partial S} = f_0(s), \dots, \left. \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \right|_{\partial S} = f_{m-1}(s), s \in \partial S,$$

где ν - внешняя нормаль к единичной сфере ∂S , $f_i \in C^{l-i-1}(\partial S)$, $f \in C(\bar{S})$.

Множество работ посвящено этой задаче. Из последних отметим работы [1-3], посвященные представлению функции Грина задачи Дирихле и условиям разрешимости различных других краевых задач для полигармонического уравнения. Условия разрешимости другой классической задачи для полигармонического уравнения - задачи Неймана можно найти в [4]. Настоящая работа является продолжением исследований автора, начатых в [5-6].

Однородная задача. Рассмотрим следующую однородную краевую задачу для неоднородного l -гармонического уравнения в единичном шаре:

$$\Delta^l u(x) = Q(x), x \in S; \quad u|_{\partial S} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial S} = 0, \dots, \left. \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}} \right|_{\partial S} = 0 \quad (1)$$

с полиномиальной правой частью $Q(x)$ и при $n \geq 2$.

Обозначим $t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)$ (это факториальная степень t), $(a, b)_k = a(a+b)\dots(a+(k-1)b)$, с условием $(a, b)_0 = 1$ и $\Delta u(x) = \sum_{k=1}^n x_k u_{x_k}(x)$.

Лемма 1. *Решение однородной задачи Дирихле (1) при $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ имеет вид*

$$v_s(x) = (|x|^2 - 1)^l \frac{R_{m-2s}}{C_{m,s,l}} \sum_{k=1}^s \binom{s+l}{i+l} (|x|^2 - 1)^i,$$

где $R_{m-2s}(x)$ - однородный гармонический полином степени $m-2s$ и $C_{m,s,l} = (2s+2, 2)_l (m-2s+n, 2)_l$.

С помощью этой леммы построим решение задачи Дирихле (1).

Теорема 1. *Решение задачи Дирихле (1) можно записать в виде*

$$u_l(x; Q) = \frac{(|x|^2 - 1)^l}{2(2l-2)!!} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha |x|^2)^s (1-\alpha)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!} \Delta^s Q(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha.$$

Неоднородная задача. Рассмотрим теперь неоднородную задачу Дирихле

$$\Delta^l u(x) = 0, x \in S; \quad u|_{\partial S} = Q_0(s), \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial S} = Q_1(s), \dots, \left. \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}} \right|_{\partial S} = Q_{l-1}(s), s \in \partial S, \quad (2)$$

с полиномиальными граничными данными $Q_k(x)$, $k = 0, l-1$.

Пусть $p(\lambda)$ - некоторый полином от λ . Рассмотрим его разностную производную k -го порядка в виде $p^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} p(\lambda+i)$.

Теорема 2. Пусть

$$P_s(x) = \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} H_s^{(j)}(\lambda) Q_j(x), \quad s = \overline{0, l-1},$$

где обозначено

$$H_s(\lambda) = \frac{1}{(2s)!!} \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2s+2), \quad s \in N,$$

причем $H_0(\lambda) = 1$, а $H_s^{(k)}(\lambda)$ - разностная производная порядка k от полинома $H_s(\lambda)$. Тогда полином

$$U(x) = \sum_{k=0}^{l-1} (P_k(x) - u_{l-k}(x; \Delta^{i-k} P_k)) (|x|^2 - 1)^k$$

является решением задачи Дирихле (2).

Литература

1. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2012. - Т. 48, № 3 - С. 441-445.
2. Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимский математический журнал. – 2010. - Т. 2, № 2. - С. 41-52.
3. Карачик В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сибирский математический журнал. – 1991. - Т. 32, № 5. - С.51-58.
4. Карачик В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. - Т. 16, № 4. - С.61-74.
5. Карачик В.В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // ЖВМиМФ. – 2011. - Т. 51, № 9. - С. 1674-1694.
6. Карачик В.В. О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // Математические труды. – 2013. - Т. 16, № 2. - С. 69-88.

АППРОКСИМАЦИЯ ЗАВИСИМОСТИ КОЭРЦИТИВНОЙ СИЛЫ ОТ УСЛОВИЙ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В МОДЕЛИ ФЕРРИТОВОГО СЕРДЕЧНИКА

А.А. КАТКОВА

Филиал НИУ «МЭИ», г. Смоленск
e-mail: Anna11235813@yandex.ru

УДК 519.711.3

Ключевые слова: ферритовый сердечник, намагничивание, гистерезис, модель Джилса-Атертона, коэрцитивная сила.

В работе рассматривается получение аппроксимирующих уравнений для зависимости коэрцитивной силы магнитопровода К16х10х4,5 М2000НМ1 и применение полученных уравнений в модели Джилса-Атертона. Для определения параметров модели проведены измерения характеристик реального образца.

Индуктивные элементы можно отнести к наиболее значимым компонентам силовой электроники. Эти компоненты изготавливаются с использованием различных ферромагнитных материалов.

Главной особенностью проектирования радиоэлектронной аппаратуры является значительная стоимость и продолжительность испытаний. Создание SPICE и VHDL моделей магнитных сердечников, основанных на реальных характеристиках, дает возможность провести моделирование устройств с целью предсказания характеристик.

Модель Джилса-Атертона [1] является фактически стандартной моделью в различных симуляторах. Значительный ее недостаток — невозможность точно моделировать петли гистерезиса при изменяющихся условиях перемагничивания. Требуется дополнительная оптимизация, в частности, установление зависимости коэрцитивной силы от максимального приложенного поля и частоты перемагничивания.

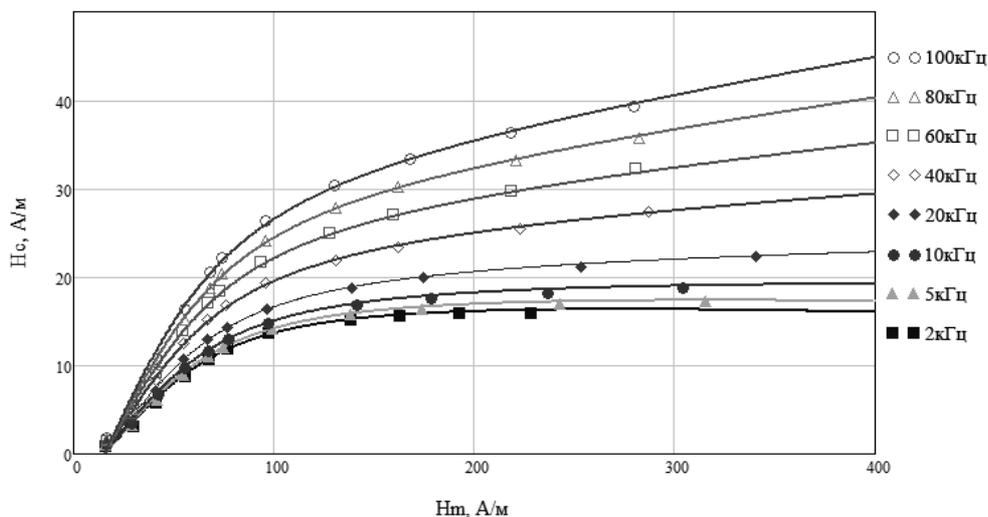


Рис. 1. Зависимость $H_c(H_m)$ ($H_m > 30$ А/м) на частотах 2–100кГц.
 $\circ \circ$ — данные измерений, — — аппроксимирующие кривые.

Для получения аппроксимирующих уравнений проведены измерения петель гистерезиса магнитопровода К16х10х4,5 М2000НМ1 на частотах 2–100кГц и температуре 23°C. Зависимость $H_c(H_m, f)$ для H_m свыше 30 А/м (рис. 1):

$$H_c(H_m, f) = \left\{ \frac{1}{\tanh((H_m - 15,5)/a)} - \frac{a}{H_m - 15,5} \right\} \cdot A(f) + (H_m - 15,5) \cdot B(f),$$

где $a = 25$ – параметр, определяющий резкость изгиба петли, $A(f)$ и $B(f)$ – числовые коэффициенты, зависящие от частоты перемангничивания.

Полученные уравнения могут быть использованы в модели Джилса-Атертона [1] при определении параметра K модели для более корректного описания поведения петель при изменении условий перемангничивания.

Литература

1. Jiles D.C., Atherton D.L. Theory of ferromagnetic hysteresis // Journal of Magnetism and Magnetic Materials 61. – 1986. - P. 48-60.

КВАДРАТУРНЫЕ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА НЕРЕГУЛЯРНОМ ШАБЛОНЕ

В.И. КИРЕЕВ¹, Т.К. БИРЮКОВА², М.М. ГЕРШКОВИЧ³

¹Московский государственный горный университет,

^{2,3}Институт проблем информатики РАН, г. Москва

e-mail: ¹Vladimir-Kireyev@mail.ru, ²yukonta@mail.ru, ³makmg@mail.ru

УДК 519.644

Ключевые слова: *интеграл, квадратурная формула, кубатурная формула, нерегулярный шаблон*

В работе рассматриваются формулы численного интегрирования в одномерном и двумерном случае применительно к сеточным функциям, заданным на нерегулярной сетке.

При конструировании разностных схем, вычислении различных параметров в механике жидкости и газа, при расчетном обосновании обводов конструктивных элементов сложных поверхностей используются алгоритмы вычисления определенных интегралов в одномерном случае (квадратурные формулы - КФ) и двумерном случае (кубатурные формулы) [1-5].

Классические квадратурные формулы не являются универсальными в том смысле, что не позволяют проводить расчеты интегралов на переменной сетке $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$, где $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i = \text{var}$, проводить расчеты интегральных характеристик при переходе с одной неравномерной расчетной сетки на другую в алгоритмах численных схем для решения задач математической физики и т.д.

С целью восполнения универсальных свойств алгоритмов численного интегрирования в данной работе излагаются и математически обосновываются:

– обобщенная на нерегулярный шаблон двухинтервальная квадратурная формула парабол, записанная через параметр нерегулярности $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$ на трехточечном шаблоне;

– неявные алгоритмы численного интегрирования, основанные на определении интегралов $I_i^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) из

трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ);

– обобщенная функционально-дифференциальная квадратурная формула;

– кубатурные формулы для вычисления двумерных интегралов.

Пусть на неравномерной сетке Δ_n с точностью $O(H^3)$ ($H = \max_{i=1, \dots, n} h_i$) задана сеточная функция $f_i = f(x_i)$ как сеточное представление формульной функции $f(x)$. (Точность $O(H^3)$ соответствует точности вычисления интеграла по рассматриваемым в данном сообщении КФ).

Сетка Δ_n может быть выбрана исходя из характера $f(x)$. Так, в зонах больших изменений функции $f(x)$, или резких изменений производных, или их разрывов, выявляемых, например, путем предварительного численного или визуального анализа, шаг сетки для снижения погрешности численного интегрирования желательно уменьшать. Закон мельчения сетки может выбираться, например, по формулам арифметической прогрессии.

Из соотношений для параболических интегродифференциальных сплайнов (ИД-сплайнов) [5; 6] на трехточечном нерегулярном шаблоне $\Pi_{3,i,v} = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ получаются следующие одноинтервальные функциональные лево- и правосторонние квадратурные формулы порядка точности $O(H^4)$:

$$\hat{I}_{i-1,v}^i = \frac{h_i^3}{6H_i^{i+1}} \left(-\frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} + \frac{H_i^{i+1} H_i^{3(i+1)}}{h_i^2 h_{i+1}} f_i + \frac{H_{2i}^{3(i+1)}}{h_i^2} f_{i-1} \right) \left(\frac{H^4}{24} M_{3,i} \right), \quad (1)$$

$$\hat{I}_{i,v}^{i+1} = \frac{h_{i+1}^3}{6H_i^{i+1}} \left(\frac{H_{3i}^{2(i+1)}}{h_{i+1}^2} f_{i+1} + \frac{H_i^{i+1} H_{3i}^{(i+1)}}{h_{i+1}^2 h_i} f_i - \frac{1}{h_i} f_{i-1} \right) \left(\frac{H^4}{24} M_{3,i} \right), \quad (2)$$

где $H_{ki}^{l(i+1)} = kh_i + lh_{i+1}$ ($k, l > 0$ – натуральные числа), $M_{3,i} = \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f'''(x)|$.

Порядки аппроксимации здесь и далее приведены после КФ в круглых скобках.

На регулярном шаблоне $\Pi_{3,i,c}$ (при $h = \text{const}$ – условная аппроксимация) КФ (1), (2) упрощаются:

$$\hat{I}_{i-1,c}^i = \frac{h}{12}(5f_{i-1} + 8f_i - f_{i+1}); \quad \hat{I}_{i,c}^{i+1} = \frac{h}{12}(-f_{i-1} + 8f_i + 5f_{i+1}).$$

Суммируя левые и правые части КФ (1) и (2), после преобразований получаем компактную, двухинтервальную, трехточечную *обобщенную квадратурную формулу парабол* функционального типа, справедливую для неравномерной сетки:

$$\hat{I}_{i-1}^{i+1} = \frac{h_i(\delta_{i+1} + 1)}{6} \left[(2 - \delta_{i+1})f_{i-1} + \frac{(\delta_{i+1} + 1)^2}{\delta_{i+1}} f_i + \left(2 - \frac{1}{\delta_{i+1}}\right) f_{i+1} \right]. \quad (3)$$

В предположении, что разбиение отрезка $[a, b]$ четное, т.е. $n = 2k$, где k – количество пар разбиения, просуммируем (3) по k . Получаем *обобщенную составную квадратурную формулу парабол*:

$$\begin{aligned} \hat{I}_a^b = & \frac{h_1(1+\delta_2)(2-\delta_2)}{6} f_0 + \sum_{i=1}^k \frac{(\delta_{2i} + 1)^3 h_{2i-1}}{6 \delta_{2i}} f_{2i-1} + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{k-1} f_{2i} \left[(1+\delta_{2i})h_{2i-1} \left(2 - \frac{1}{\delta_{2i}}\right) + (1+\delta_{2i+2})h_{2i+1} (2 - \delta_{2i+2}) \right] + \frac{(1+\delta_{2n})}{6} h_{2k-1} \left(2 - \frac{1}{\delta_{2n}}\right) f_{2k}. \end{aligned}$$

Если коэффициенты КФ положительны, то обеспечивается минимум погрешности вычисления интеграла по данной КФ, а также сходимость вычислительного процесса на последовательно сгущающихся сетках [2].

В КФ (3) свойство положительности коэффициентов выполняется, если $2 - \delta_{i+1} > 0$, $2 - \frac{1}{\delta_{i+1}} > 0$, то есть если параметр нерегулярности δ_{i+1} находится в пределах: $0,5 < \delta_{i+1} < 2$.

В общем случае (на нерегулярном шаблоне – безусловная аппроксимация) КФ (3) имеет четвертый порядок аппроксимации. Возможны также условные аппроксимации следующих двух типов.

1. При $\delta_{i+1} = 1$ реализуется регулярный шаблон, и тогда порядок условной аппроксимации повышается на единицу, а (3) переходит в классическую формулу парабол (Симпсона).

2. При $|\delta_{i+1} - 1| \leq h_i$ реализуется нерегулярный шаблон, и тогда порядок аппроксимации может быть повышен на единицу за счет небольшого отклонения δ_{i+1} от единицы: $h_i - h_i^2 \leq h_{i+1} \leq h_i + h_i^2$. В этом случае шаблон является квазирегулярным. Такие разбиения с локальными сгущениями узлов сетки могут формироваться при численном интегрировании с помощью КФ (3) функций, сильно изменяющихся на малом отрезке или имеющих в некоторых окрестностях разрывы производных.

Анализ параметрических соотношений для ИД-сплайнов позволяет получить трехдиагональную СЛАУ относительно интегралов:

$$\frac{1}{h_i^2} I_{i-1}^i + \frac{2}{h_{i+1}^2} I_i^{i+1} + \frac{1}{h_{i+2}^2} I_{i+1}^{i+2} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{h_i} f_{i-1} + \left(\frac{2}{h_i} + \frac{3}{h_{i+1}} \right) f_i + \left(\frac{3}{h_{i+1}} + \frac{2}{h_{i+2}} \right) f_{i+1} + \frac{1}{h_{i+2}} f_{i+2} \right], \quad n = 1, \dots, n-2. \quad (4)$$

Система (4) при $h = \text{const}$ преобразуется к виду

$$I_{i-1}^i + 2I_i^{i+1} + I_{i+1}^{i+2} = \frac{h}{3} [f_{i-1} + 5 \cdot (f_i + f_{i+1}) + f_{i+2}], \quad i = 1, \dots, n-2. \quad (5)$$

Для замыкания СЛАУ (4), (5) их нужно дополнить двумя граничными условиями – например, путем вычисления I_0^1 и I_{n-1}^n по односторонним КФ (1), (2) соответственно.

Если исходная сеточная функция $f(x_i)$ задана с точностью не ниже $O(H^4)$, то легко получить *одноинтервальную функционально-дифференциальную КФ Эйлера–Маклорена* пятого порядка аппроксимации [4]:

$$\hat{I}_i^{i+1} = \frac{h_{i+1}}{2} (f_i + f_{i+1}) - \frac{h_{i+1}^2}{12} (f'_{i+1} - f'_i) \quad \left(\frac{h_{i+1}^5}{720} M_{4,i} \right). \quad (6)$$

Суммируя (6) по всем отрезкам, образованным сеткой Δ_n , получаем составную КФ четвертого порядка аппроксимации на нерегулярной сетке:

$$\hat{I}_{a,v}^b = \frac{h_1}{2} f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} H_i^{i+1} f_i + \frac{h_n}{2} f_n - \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{n-1} h_{i+1}^2 \Delta f'_{i+1}. \quad (7)$$

Отметим, что получать составную формулу Эйлера с учетом точных значений производных, как это делается в большинстве учебников, нельзя, так как при этом производные во всех внутренних узлах сокращаются и таким образом теряется порядок аппроксимации этой формулы (вместо четвертого она будет иметь второй порядок).

Для расчета производных, входящих в формулы (6), (7) можно использовать формулы третьего порядка аппроксимации, приведенные в [5].

Если функция $f(x_i)$ определена на равномерной сетке, то из (7) получаются *одноинтервальные функциональные квадратурные формулы* – центральная и лево- и правосторонняя:

$$\hat{I}_{i,\text{центр}}^{i+1} = \frac{h}{24} (-f_{i-1} + 13(f_i + f_{i+1}) - f_{i+2}) \quad \left(\frac{11}{720} h^5 M_{4,i} \right), \quad (8)$$

$$\hat{I}_{i,\text{лев.}}^{i+1} = \frac{h}{24} (9f_i + 19f_{i+1} - 5f_{i+2} + f_{i+3}) \quad \left(\frac{19}{720} h_i^5 M_{4,i} \right), \quad (9)$$

$$\hat{I}_{i,\text{прав.}}^{i+1} = \frac{h}{24} (f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1}) \quad \left(\frac{19}{720} h_i^5 M_{4,i} \right). \quad (10)$$

Квадратурные формулы (8) – (10) могут быть объединены в составную КФ на отрезке $[a, b]$:

$$\hat{I}_a^b = \hat{I}_{0,\text{лев.}}^1 + \frac{h}{24} \left(-f_0 + 12f_1 + 25f_2 + 24 \sum_{i=3}^{n-3} f_i + 25f_{n-2} + 12f_{n-1} - f_n \right) + \hat{I}_{n-1,\text{прав.}}^n.$$

Из анализа КФ (8) следует, что хотя ее порядок аппроксимации не выше соответствующего порядка аппроксимации КФ парабол, однако при $h = \text{const}$ их аппроксимационные свойства различаются. Это связано с тем, что КФ (8) получается при $h = \text{const}$ из полинома третьей степени, а КФ парабол – из полинома второй степени. Поэтому КФ (8) учитывает, например, наличие точки перегиба функции, в то время как формула парабол этого не позволяет. Это обуславливает преимущество по точности вычисления интегралов от функций, имеющих указанную, а также, возможно, и другие особенности.

Неявная квадратурная формула получается после преобразования параметрических соотношений для кубических ИД-сплайнов [6] на нерегулярном шаблоне $\mathcal{M}_{4i,v} = (x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$:

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i+1}^3}{3h_i^2 H_i^{i+1}} I_{i-1}^i + \left(1 - \frac{h_i}{3H_i^{i+1}} - \frac{h_{i+2}}{3H_{i+1}^{i+2}} \right) I_i^{i+1} + \frac{h_{i+1}^3}{3h_{i+2}^2 H_{i+1}^{i+2}} I_{i+1}^{i+2} = \\ & = \frac{h_{i+1}^3}{12h_i H_i^{i+1}} f_{i-1} + \frac{h_{i+1}}{2} \left(1 - \frac{h_{i+2}}{6H_{i+1}^{i+2}} + \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{2h_i H_i^{i+1}} \right) f_i + \\ & + \frac{h_{i+1}}{2} \left(1 + \frac{h_{i+1}^2 - h_{i+2}^2}{2h_{i+2} H_{i+1}^{i+2}} - \frac{h_i}{6H_i^{i+1}} \right) f_{i+1} + \frac{h_{i+1}^3}{12h_{i+2} H_{i+1}^{i+2}} f_{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (11)$$

На регулярном шаблоне соотношение (11) преобразуется к симметричному виду:

$$I_{i-1}^i + 4I_i^{i+1} + I_{i+1}^{i+2} = \frac{h}{4} [f_{i-1} + 11 \cdot (f_i + f_{i+1}) + f_{i+2}], \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (12)$$

Системы (11), (12) для вычисления интегралов на всех отрезках необходимо дополнить значениями I_0^1 и I_{n-1}^n , которые могут быть найдены по КФ (6) при $h_i = \text{var}$ или по формулам (9), (10) при $h = \text{const}$. Система (12) имеет безусловное диагональное преобладание, что гарантирует устойчивость вычислений.

Рассмотрим теперь способ вычисления двумерных интегралов на неравномерной сетке узлов.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ функция двух переменных $f(x, y)$ задана своими значениями $\{f_{i,j} = f(x_i, y_j)\}_{i=0, j=0}^{n_x, n_y}$ в прямоугольной области $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ на сетке узлов

$$\Delta_{n_x, n_y} = \Delta_{n_x} \times \Delta_{n_y}, \quad \text{где } \Delta_{n_x} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_x} = b, \quad \Delta_{n_y} : c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n_y} = d.$$

Сетка Δ_{n_x, n_y} делит область Ω на прямоугольники (частичные области) $\Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.

На основе анализа полученных авторами формул двумерных интегродифференциальных многочленов (ИД-многочленов) и ИД-сплайнов, рассмотренных в [7], выведены кубатурные формулы для вычисления двумерных интегралов в частичных областях $\Omega_{i,j}$.

Пусть $I2_{i,j}^{i+1,j+1} = \iint_{\Omega_{i,j}} f(x,y) dx dy$, $(i = 0, \dots, n_x - 1, j = 0, \dots, n_y - 1)$ –

двумерный интеграл в частичной области $\Omega_{i,j}$; $I_{xi(j)}^{i+1}$ – одномерный интеграл от функции $f(x,y)$ вдоль оси Ox на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ при

фиксированном значении $y = y_j$: $I_{xi(j)}^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y_j) dx$ ($i = 0, \dots, n_x - 1, j = 0, \dots, n_y$);

$I_{yj(i)}^{j+1}$ – одномерный интеграл от функции $f(x,y)$ вдоль оси Oy на

отрезке $[y_j, y_{j+1}]$ при фиксированном значении $x = x_i$: $I_{yj(i)}^{j+1} = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y) dy$

($i = 0, \dots, n_x, j = 0, \dots, n_y - 1$). Пусть $\hat{I}2_{i,j}^{i+1,j+1}$, $\hat{I}_{xi(j)}^{i+1}$, $\hat{I}_{yj(i)}^{j+1}$ – приближенные значения интегралов $I2_{i,j}^{i+1,j+1}$, $I_{xi(j)}^{i+1}$, $I_{yj(i)}^{j+1}$ соответственно, найденные с использованием известных значений функции $f_{i,j}$ ($i = 0, \dots, n_x, j = 0, \dots, n_y$) в узлах сетки Δ_{n_x, n_y} .

Вычисление $\hat{I}2_{i,j}^{i+1,j+1}$ выполняется последовательно – сначала в направлении оси Ox по значениям функции $f_{i,j}$ вычисляются интегралы $\hat{I}_{xi(j)}^{i+1}$ на границах $y = y_j$ ($j = 0, \dots, n_y$) частичных областей $\Omega_{i,j}$, а затем в направлении оси Oy находятся значения $\hat{I}2_{i,j}^{i+1,j+1}$ по значениям $\hat{I}_{xi(j)}^{i+1}$.

Таким образом, алгоритм $\hat{I}2_{i,j}^{i+1,j+1}$ вычисления имеет вид:

1) вычисляются значения $\hat{I}_{xi(j)}^{i+1}$ ($i = 0, \dots, n_x - 1, j = 0, \dots, n_y$) с порядком аппроксимации $O(H_x^4)$ ($H_x = \max_{i=1, \dots, n_x} h_{xi}$, $h_{xi+1} = x_{i+1} - x_i$) по формулам, аналогичным (1), (2) (в правых частях которых используется h_{xi+1} вместо h_{i+1} и $f_{i,j}$ вместо f_i) для $j = 0, \dots, n_y$:

$$\hat{I}_{xi-1(j)}^i = \frac{h_{xi}^3}{6H_{xi}^{i+1}} \left(-\frac{1}{h_{xi+1}} f_{i+1,j} + \frac{H_{xi}^{i+1} H_{xi}^{3(i+1)}}{h_{xi}^2 h_{xi+1}} f_{i,j} + \frac{H_{x2i}^{3(i+1)}}{h_{xi}^2} f_{i-1,j} \right), \quad (13)$$

$$\hat{I}_{xi(j)}^{i+1} = \frac{h_{xi+1}^3}{6H_{xi}^{i+1}} \left(\frac{H_{x3i}^{2(i+1)}}{h_{xi+1}^2} f_{i+1,j} + \frac{H_{xi}^{i+1} H_{x3i}^{i+1}}{h_{xi} h_{xi+1}^2} f_{i,j} - \frac{1}{h_{xi}} f_{i-1,j} \right), \quad (14)$$

где $H_{xki}^{p(i+1)} = kh_{xi} + ph_{xi+1}$;

2) вычисляются значения $\hat{I}2_{i,j}^{i+1,j+1}$ ($i=0,\dots,n_x-1, j=0,\dots,n_y-1$) с порядком аппроксимации $O(H_x^4 + H_y^4)$ ($H_y = \max_{i=1,\dots,n_y} h_{yi}, h_{yj+1} = y_{j+1} - y_j$) по формулам, аналогичным (1), (2) (в правых частях которых используется j вместо i , h_{yj+1} вместо h_{i+1} , значения $\hat{I}_{xi(j)}^{i+1}$ для $i=0,\dots,n_x-1$, найденные по формулам (13), (14) вместо f_i):

$$\hat{I}2_{i,j-1}^{i+1,j} = \frac{h_{yj}^3}{6H_{yj}^{j+1}} \left(-\frac{1}{h_{yj+1}} \hat{I}_{xi(j+1)}^{i+1} + \frac{H_{yj}^{j+1} H_{yj}^{3(j+1)}}{h_{yj}^2 h_{yj+1}} \hat{I}_{xi(j)}^{i+1} + \frac{H_{yj}^{3(j+1)}}{h_{yj}^2} \hat{I}_{xi(j-1)}^{i+1} \right), \quad (15)$$

$$\hat{I}2_{i,j}^{i+1,j+1} = \frac{h_{yj+1}^3}{6H_{yj}^{j+1}} \left(\frac{H_{yj}^{2(j+1)}}{h_{yj+1}^2} \hat{I}_{xi(j+1)}^{i+1} + \frac{H_{yj}^{j+1} H_{yj}^{j+1}}{h_{yj} h_{yj+1}^2} \hat{I}_{xi(j)}^{i+1} - \frac{1}{h_{yj}} \hat{I}_{xi(j-1)}^{i+1} \right), \quad (16)$$

где $H_{yk}^{p(j+1)} = kh_{yj} + ph_{yj+1}$.

Указанный способ нахождения двойных интегралов является корректным [1] на основании того, что частичные области $\Omega_{i,j}$ являются

прямоугольниками и, следовательно, $I2_{i,j}^{i+1,j+1} = \iint_{\Omega_{i,j}} f(x,y) dx dy = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y) dx \right] dy$.

Подчеркнем, что изложенный алгоритм позволяет, в отличие от известных работ, вычислять интегралы на неравномерной сетке и, следовательно, учитывать локальные свойства аппроксимируемой функции. Таким образом, формулы (13)-(16) можно применять с учетом локальных свойств аппроксимируемой функции.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987. - 598 с.
2. Никольский С.М. Квадратурные формулы. - М.: Наука, 1979. - 224 с
3. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. - М.: Наука, 1981. - 336 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. - 512 с.
5. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 2008. - 480 с.
6. Киреев В.И., Бирюкова Т.К. Полиномиальные интегро-дифференциальные одномерные и двумерные сплайны // Вычислительные технологии. Новосибирск: Изд-во ИВТ СО РАН. - 1998. - Т.3. № 36. - С. 19-34.
7. Бирюкова Т.К., Гершкович М.М., Киреев В.И. Интегро-дифференциальные многочлены и сплайны произвольной четной степени в задачах анализа параметров функционирования распределенных информационных систем // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2012. - Вып. 13. - С. 67–72.

О КОРНЯХ ОБОБЩЕННОГО МНОГОЧЛЕНА

Д. КИРЬЯЦКИС, Э. КИРЬЯЦКИЙ

ЗАО «Оракулас», г. Вильнюс,

e-mail: dmitr.kir@gmail.com

УДК 517.54

Ключевые слова: комплексная область, система Чебышева, обобщенный многочлен, кратность корня.

Рассматриваются система аналитических линейно независимых в области D функций $u_0(z), \dots, u_n(z)$ и обобщенные многочлены, являющиеся линейными комбинациями этих функций. Изучается поведение корней таких обобщенных многочленов.

Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема. Пусть задана система линейно независимых в области D аналитических в этой области функций $u_0(z), \dots, u_n(z)$. Пусть существует обобщенный многочлен $P_n(z) = c_0 u_0(z) + \dots + c_n u_n(z)$, который имеет в области D попарно различные корни z_1, \dots, z_m с соответствующими кратностями k_1, \dots, k_m . Тогда существует обобщенный многочлен $P_n^*(z) = c_0^* u_0(z) + \dots + c_n^* u_n(z)$, имеющий в области D не менее $s = k_1 + \dots + k_m$ попарно различных корней.

Доказательство. Существуют в области D обобщенный многочлен $Q_n(z) = b_0 u_0(z) + \dots + b_n u_n(z)$ и непересекающиеся между собой открытые круги $O(z_p)$, $p = 1, \dots, m$, с центрами в точках z_p , $p = 1, \dots, m$, с соответствующими окружностями Γ_p , $p = 1, \dots, m$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $Q_n(z_p) \neq 0$, $p = 1, \dots, m$;
- 2) $Q_n(z) \neq 0$ в $\bar{O}(z_p)$, $p = 1, \dots, m$;
- 3) $\left(\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\right) \neq 0$, в $\bar{O}(z_p) \setminus \{z_p\}$, $p = 1, \dots, m$;
- 4) $\left(\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\right)' \neq 0$, в $\bar{O}(z_p) \setminus \{z_p\}$, $p = 1, \dots, m$.

Обозначим: $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$, $\varphi(z) = \frac{P_n^*(z)}{Q_n(z)} = f(z) + a$, где $a \neq 0$.

Для достаточно малого по модулю числа a , $a \neq 0$, будут одновременно выполняться неравенства

$$|f(z)| = \frac{|P_n(z)|}{|Q_n(z)|} > |a| \text{ на контурах } \Gamma_p, p=1, \dots, m.$$

Тогда по теореме Руше общее количество корней функции $f(z)$ и общее количество корней функции $\varphi(z)$, расположенных внутри кругов $O(z_p)$, $p=1, \dots, m$, одинаково и равно s с учетом кратности каждого корня. Возьмем многочлен $P_n^*(z) = P_n(z) + aQ_n(z)$. Заметим, что для этого многочлена справедливо соотношение

$$P_n^*(z_p) = P_n(z_p) + aQ_n(z_p) = aQ_n(z_p) \neq 0, p=1, \dots, m.$$

Кроме того, имеем

$$\varphi'(z) = f'(z) \neq 0 \text{ в } \bar{O}(z_p) \setminus \{z_p\}, p=1, \dots, m.$$

Значит, все s корней функции $\varphi(z)$, лежащих внутри контуров Γ_p , $p=1, \dots, m$, являются простыми. Но тогда все s корней обобщенного многочлена $P_n^*(z) = P_n(z) + aQ_n(z)$, лежащих внутри контуров Γ_p , $p=1, \dots, m$, также являются простыми. В итоге получаем, что обобщенный многочлен $P_n^*(z) = P_n(z) + aQ_n(z)$ имеет в области D не менее $s = k_1 + \dots + k_m$ попарно различных корней. Теорема доказана.

Следствие. Пусть любой обобщенный многочлен $P_n(z) = c_0u_0(z) + \dots + c_nu_n(z)$, где $u_0(z), \dots, u_n(z)$ – аналитические линейно независимые в области D функции, имеет в области D не более n попарно различных корней. Тогда любой такой многочлен имеет в области D не более n корней с учетом их кратностей.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ

Е. КИРЬЯЦКИС, Э. КИРЬЯЦКИЙ

Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса,

e – mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

УДК 517.54

Ключевые слова: замкнутое множество, комплексная область, однолистная функция, рациональная дробь.

В работе ставится вопрос об интерполяции и аппроксимации однолистной в области D функции с помощью рациональных дробей специального вида.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть M – замкнутое конечное или бесконечное множество точек из односвязной области D . Обозначим $P(M)$ множество всех полиномов со старшими коэффициентами, равными единице, все корни которых принадлежат множеству M . Пусть $f(z)$ – голоморфная в области D функция и $P_n(z)$, $n=1,2,\dots$ – последовательность полиномов степени n из $P(M)$. Для того чтобы каждое из уравнений

$$f(z) = \frac{Q_n(z)}{P_n(z)}, \quad n=1,2,\dots,$$

имело в области D не более $n+1$ корней для любого полинома $Q_n(z)$ степени не выше n , необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была однолистной в области D функцией вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0.$$

Следствие. Пусть $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ – аналитическая в единичном круге $|z|<1$ функция. Если для любых z_0, \dots, z_n , взятых из единичного круга $|z|<1$, и любом $n \geq 1$, эта функция удовлетворяет условию $[z^{n-1}f(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$, то она является однолистной в единичном круге $|z|<1$ функцией и имеет вид

$$f(z) = \frac{z}{1-az}, \quad |a| \leq 1.$$

О НЕТЕРОВОСТИ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГИЛЬБЕРТА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Д.А. КЛИМЕНКО, И.Б. БОЛОТИН

Смоленский государственный университет,
e-mail: dn.klimenko@yandex.ru, IBBolotin@smolgu.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: бианалитическая функция, краевая задача Гильберта, разрывные коэффициенты.

Работа посвящена изучению одной из основных краевых задач типа Гильберта в классе бианалитических функций в случае полуплоскости. В ходе исследования установлена нетеровость рассматриваемой задачи.

Пусть $L = \{t \mid \text{Im} t = 0\}$, $D^+ = \{z \mid \text{Im} z > 0\}$ и $D^- = \bar{C} \setminus \{D^+ \cup L\}$. В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1].

Пусть $G_k(t)$ ($k = 0, 1$) – заданные на L функции, $G_0(t) \in H_0^{(2)}$, $G_1(t) \in H_0^{(1)}$, причем $G_k(t) \neq 0$ всюду на L . Обозначим точки разрыва функции $G_0(t)$ через c_1, c_2, \dots, c_m . Точки разрыва функции $G_0(t)$ и ее производных будем относить к узлам функции $G_1(t)$. Все остальные точки контура L будем считать обыкновенными.

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все бианалитические функции $F^+(z)$, принадлежащие классу $A_2(D^+) \cap I^{(2)}(L)$ (см. [2]), ограниченные вблизи узлов контура L , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие во всех обыкновенных точках L следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) = G_0(t) \overline{F^+(t)} + g_0(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} = -G_1(t) \overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+}} + i g_1(t), \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_+}$ – производная по внешней нормали к контуру L , $g_k(t)$ –

заданные на L функции класса $H^{(1-k)}(L)$, $k = 0, 1$, причем $g_0(t) = (t - c)^{\gamma_c} g^*(t)$, c – любой из узлов c_1, c_2, \dots, c_m ; $\gamma_c > 0$ – вполне определенные числа. Здесь в равенстве (2) множители -1 и i при $G_1(t)$ и $g_1(t)$ соответственно введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу будем называть *второй основной краевой задачей типа Гильберта с разрывными коэффициентами для бианалитических функций в случае полуплоскости* или задачей $G_{2,2}$ в случае полуплоскости, а соответствующую однородную задачу ($g_0(t) \equiv g_1(t) \equiv 0$) назовем задачей $G_{2,2}^0$ в случае полуплоскости.

Отметим, что задача $G_{2,2}$ представляет собой одну из основных краевых задач типа Гильберта для бианалитических функций, поставленных в известной монографии Ф.Д. Гахова (см. [3]). В случае непрерывных коэффициентов и произвольных гладких замкнутых контуров данная задача была подробно исследована в работах К.М. Расулова (см., например, [1]). В работе [4] получен конструктивный метод решения данной задачи.

Справедлив следующий основной результат.

Теорема. Пусть $L = \{t \mid \operatorname{Im} t = 0\}$, $D^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ и $D^- = \bar{C} \setminus \{D^+ \cup L\}$. Число p условий разрешимости задачи $G_{2,2}$ в случае полуплоскости и число l линейно независимых решений над полем R соответствующей однородной задачи $G_{2,2}^0$ являются конечными, т.е. задача $G_{2,2}$ в случае полуплоскости является нетеровой.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Болотин И.Б. Кусочно-непрерывные краевые задачи типа Римана в классах бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Смоленск, 2004. – 106 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. Клименко Д.А., Болотин И.Б. О решении второй основной краевой задачи типа Гильберта с разрывными коэффициентами для бианалитических функций в случае полуплоскости // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики: Материалы 2-й научно-практической конференции. Тольятти, 7-14 октября 2013 г. – Тольятти: SIMJET, 2013. – С. 58–62.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Д.А. КОМИССАРОВА

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
e-mail: darya-komissar@mail.ru

УДК 517.929.2

Ключевые слова: *устойчивость, разностная система, характеристическое уравнение.*

Рассматривается проблема устойчивости разностной системы $x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-k}$, где A, B – действительные матрицы, а запаздывание $k \in N$. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости указанной системы.

Исследована проблема асимптотической устойчивости разностной системы с запаздыванием

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-k}, \quad (1)$$

где A, B – действительные матрицы размера $m \times m$, $x_n : N \mapsto R^m$, запаздывание $k \in N$.

Под $\|\bullet\|$ будем понимать любую матричную норму, удовлетворяющую четырем аксиомам нормы и согласованную с векторной нормой $\|\bullet\|_*$, т.е. $\|Ax\|_* \leq \|A\| \cdot \|x\|_*$ для всех $x \in R^m$ и для любой матрицы A размера $m \times m$.

Доказано, что, если $\|A\| + \|B\| < 1$, то уравнение (1) асимптотически устойчиво. Это достаточное условие аналогично условию Кона $|a| + |b| < 1$ для схожего скалярного уравнения $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-k}$, где $a, b \in N$.

Наряду с этим получено необходимое и достаточное условие устойчивости. Уравнение (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения

$$\det(B + Az^{k-1} - Ez^k) = 0$$

лежат внутри единичного круга. Если хотя бы один из корней лежит вне единичного круга, то уравнение (1) неустойчиво.

Кроме того, рассмотрен частный случай уравнения (1), а именно система

$$x_n = -x_{n-1} + Bx_{n-k}. \quad (2)$$

Доказано, что система (2) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B лежат внутри области комплексной плоскости, ограниченной кривой

$$\Gamma = \left\{ z \in C : z = (-1)^k 2i \sin \frac{\varphi}{2k-1} e^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Если k – четное, то овал устойчивости расположен в левой полуплоскости комплексной плоскости, а если k – нечетное, то – в правой полуплоскости. Если $k=1$, то область устойчивости – единичный круг с центром в точке $1+0i$.

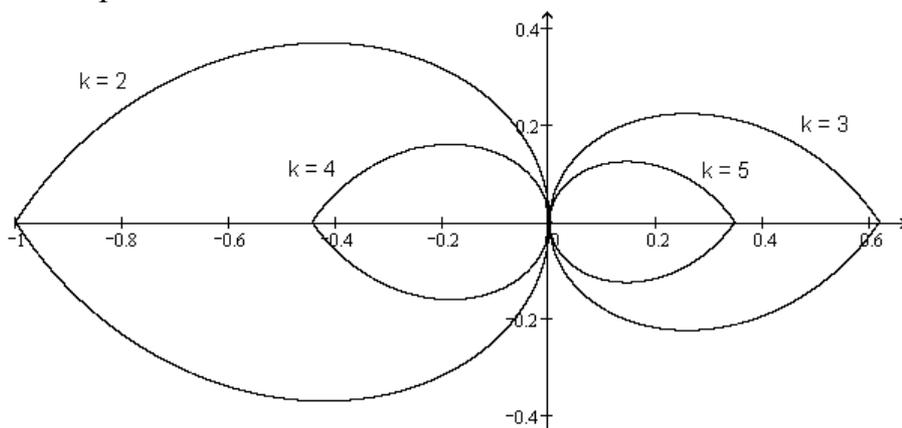


Рис. 1. Овалы устойчивости системы (2)

Как следствие получен признак неустойчивости системы (2).

Если существуют собственные значения λ_1, λ_2 матрицы B , такие, что $\operatorname{Re} \lambda_1 \cdot \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$, то уравнение (2) неустойчиво.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Далее, раскрывая левую часть (2), получаем уравнения в случаях четного и нечетного n :

1) для $n = 2k, k \in N$:

$$\lambda^{2k} - \lambda^{2k-1}B_1 + \lambda^{2k-2}B_2 - \dots + \lambda^2B_{2k-2} - \lambda B_{2k-1} + \Delta A = 0; \quad (3)$$

2) для $n = 2k + 1, k \in N$:

$$-\lambda^{2k+1} + \lambda^{2k}B_1 - \lambda^{2k-1}B_2 + \lambda^{2k-2}B_3 - \dots + \lambda^2B_{2k-1} - \lambda B_{2k} + \Delta A = 0, \quad (4)$$

где ΔA - определитель матрицы системы первого приближения (1),

$B_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, $B_k = \sum_{i=1}^k M_{ik}$, $B_n = \Delta A$, M_{ik} - определитель k -го порядка.

Определение 1. Определитель k -го порядка понимаем как определитель матрицы k -го порядка, главной диагональю которой является произвольный набор k элементов главной диагонали исходной матрицы и полученный из основной матрицы вычеркиванием тех строк и столбцов, на пересечении которых находятся элементы главной диагонали исходной матрицы, не вошедшие в главную диагональ данного определителя.

Пример 1. Если в матрице 4×4 выбраны элементы a_{11} и a_{33} , то нужно вычеркнуть вторую строку и второй столбец, четвертую строку и четвертый столбец и посчитать определитель получившейся матрицы размерностью 2×2 .

Доказательства соотношений (3) и (4) получаются в результате вычисления определителей произвольного порядка методом разложения по строкам и столбцам.

Отметим, что достаточным условием асимптотической устойчивости решений линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является отрицательность действительных частей всех корней характеристического уравнения [1; 2; 5].

Таким образом, необходимым условием устойчивости нулевого решения в рассматриваемой ситуации является отрицательность коэффициентов уравнений (3) и (4), а для получения его достаточных условий используется теорема Рауса-Гурвица [3; 4]. Составим матрицу Гурвица в случаях четного и нечетного n , затем для составленных матриц используется критерий Рауса-Гурвица [3; 4], который заключается в положительности всех миноров полученных матриц.

Пример использования критерия для квазилинейной системы дифференциальных уравнений пятого порядка.

При моделировании реальных задач исследователи получают системы дифференциальных уравнений, порядок которых чаще всего не превосходит пяти. Для систем второго и третьего порядка, используя полученные теоремы [6], достаточно легко оценить устойчивость нулевого решения исходной системы. Для систем дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядка при подсчете определителей, возможно, потребуются системы компьютерной математики.

В качестве примера подробно рассмотрим условие асимптотической устойчивости решений для систем 5-го порядка. Характеристическое уравнение (4) примет вид:

$$-\lambda^5 + B_1\lambda^4 - B_2\lambda^3 + B_3\lambda^2 - B_4\lambda + B_5 = 0, \quad (5)$$

где $B_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{55}$, $B_2 = \sum_{i=1}^{10} M_{i2}$, $B_3 = \sum_{i=1}^{10} M_{i3}$, $B_4 = \sum_{i=1}^5 M_{i4}$, $B_5 = \Delta A$.

Необходимым условием устойчивости в рассматриваемой ситуации будет отрицательность коэффициентов уравнения (5):

$$B_1 < 0, B_2 > 0, B_3 < 0, B_4 > 0, B_5 < 0.$$

Для получения достаточных условий асимптотической устойчивости нулевого решения исходной системы составим матрицу Гурвица (6):

$$\begin{pmatrix} -B_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -B_3 & B_2 & -B_1 & 1 & 0 \\ -B_5 & B_4 & -B_3 & B_2 & -B_1 \\ 0 & 0 & -B_5 & B_4 & -B_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_5 \end{pmatrix} \quad (6)$$

и потребуем положительность всех ее диагональных миноров:

$$\begin{vmatrix} -B_1 & 1 & 0 & 0 \\ -B_3 & B_2 & -B_1 & 1 \\ -B_5 & B_4 & -B_3 & B_2 \\ 0 & 0 & -B_5 & B_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} -B_1 & 1 & 0 \\ -B_3 & B_2 & -B_1 \\ -B_5 & B_4 & -B_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} -B_1 & 1 \\ -B_3 & B_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{matrix} -B_1 > 0, \\ -B_5 > 0. \end{matrix} \quad (7)$$

Примером неустойчивой системы дифференциальных уравнений пятого порядка является система вида (1), матрица коэффициентов которой имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Запишем соответствующее характеристическое уравнение

$$-\lambda^5 - 5\lambda^4 - 11\lambda^3 - 15\lambda^2 - 26\lambda - 18 = 0.$$

Несмотря на то, что необходимые условия выполняются: $B_1 < 0, B_2 > 0, B_3 < 0, B_4 > 0, B_5 < 0$, достаточное условие нарушается. Существуют отрицательные диагональные миноры матрицы Гурвица, в частности,

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 11 & 5 & 1 \\ 18 & 26 & 15 & 11 \\ 0 & 0 & 18 & 26 \end{vmatrix} = -4,864 \cdot 10^3 < 0.$$

Данные вычисления были произведены с помощью систем компьютерной математики MatCAD и Mathematica 6.0.

Литература

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – М.: Наука и техника, 1979. – 745 с.
3. Краснов М. Л., Киселев А. И. Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. - Изд. 3-е, испр. и доп. - М.: Едитория УРСС, 2003. – 176 с.
4. Тихонов А.Н., Ильина В.Л., Свешников А.Г. Курс высшей математики и математической физики / вып. 7. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 231 с.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М.: Наука, 1969. - 425 с.
6. Конашенко А.В., Родионова Г.С. Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений второго третьего и четвертого порядка // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 4. - URL: <http://www.science-education.ru/110-9669>.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ РЕКЛАМНОГО БЮДЖЕТА В ДУОПОЛИИ

К.Н. КУДРЯВЦЕВ, В.М. МЕШКОВ

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск,
e-mail: kudrk@mail333.com

УДК 519.837

Ключевые слова: *многошаговая игра, равновесие по Нэшу, реклама.*

В работе рассматривается многошаговая игровая модель планирования рекламного бюджета в дуополии

Вопрос оптимального планирования рекламного бюджета на конкурентном рынке неоднократно привлекал к себе внимание исследователей, таких как Sorger [1], Prasad, Sethi [2] и многих других. Однако, как правило, все рассматриваемые модели предполагали непрерывную во времени динамику, в то время как бюджет на проведение рекламной компании выделяется и расходуется дискретно. В данной работе рассматривается дискретная игровая модель управления рекламным бюджетом.

Предположим, что на рынке некоторого товара доминируют две фирмы (примером здесь может быть конкуренция компаний Pepsi и Coca-Cola). Изменение доли рынка x_i , принадлежащей компании i ($i=1,2$), описывается системой разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\delta)x_1(t) + \rho u_1[t]\sqrt{1-x_1(t)} - \rho u_2[t]\sqrt{1-x_2(t)}, \\ x_2(t+1) &= (1-\delta)x_2(t) - \rho u_1[t]\sqrt{1-x_1(t)} + \rho u_2[t]\sqrt{1-x_2(t)}, \end{aligned} \quad (1)$$

момент времени $t=0,1,\dots,T-1$. Здесь управление i -го игрока (фирмы) $u_i[t]$ есть объем средств, выделяемой ей на рекламную компанию в момент времени t , параметр δ определяет, как сильно падает доля рынка, если компания отказывается от расходов на рекламу, постоянная ρ - коэффициент чувствительности рынка к рекламе. В силу доминирования игроков на рынке в любой момент времени t выполняется равенство $x_1(t) + x_2(t) = 1$. Заданы начальные условия $x_i(0) = x_{i0}$ ($i=1,2$).

Принимая решения, игрок i ($i=1,2$) стремится максимизировать функционал

$$J_i(x, u_i) = \frac{m_i x_i(T)}{(1+r)^T} + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{m_i x_i(k) - c_i u_i^2[k]}{(1+r)^k}. \quad (2)$$

В (2) константа r - ставка дисконтирования, m_i и c_i - коэффициенты, переводящие долю рынка x_i и управление u_i в их «денежные» эквиваленты.

Увеличивая значение функционала (2), игрок, с одной стороны, стремится увеличить свою долю рынка, а с другой - не допустить «непропорционально больших» расходов на проведение рекламной компании. В то же время все «доходы» и «расходы» дисконтированы к начальному моменту времени.

Процесс конкуренции между компаниями может быть смоделирован с помощью бескоалиционной многошаговой игры двух лиц

$$\langle \{1,2\}, \Sigma, \{U_i\}_{i=1,2}, \{J_i(x,u)\} \rangle, \quad (3)$$

в которой динамика управляемой системы Σ описывается разностным уравнением (1), стратегия игрока i (выбор размера рекламного бюджета)

представляет последовательность применяемых им управлений $u_i = (u_i(0, x), u_i(1, x(1)), \dots, u_i(T-1, x(T-1)))$. Функционал (2) представляет собой функцию выигрыша игрока i .

Используя модификацию метода динамического программирования, предложенную в [3], для игры (3) удалось построить ситуацию равновесия по Нэшу и найти равновесные по Нэшу выигрыши.

Литература

1. Sorger, G. "Competitive Dynamic Advertising: A Modification of the Case Game // Journal of Economic Dynamics and Control. – 1989. – 13 (1). - P.55–80.
2. Prasad, A.; Sethi, S. P. Competitive Advertising under Uncertainty: Stochastic Differential Game Approach // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2004. - 123 (1). - P.163–185.
3. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов и приложения. – М.: URSS, Ленанд, 2012. – 304 с.

О ВИДОИЗМЕНЕННОЙ ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

О.Н. КУПРИКОВА

Смоленский филиал МИИТ,
e-mail: onkuprikova@mail.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: квазигармоническая функция, видоизмененная краевая задача Неймана, исключительный случай, дифференциальное уравнение, единичный круг.

В статье разработан конструктивный алгоритм решения видоизмененной краевой задачи Неймана для квазигармонических функций первого рода в единичном круге в исключительном случае, т.е. когда коэффициенты краевого условия обращаются в нуль в отдельных точках контура.

Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $L = \{t : |t| = 1\}$, а $G(t) = G_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j}$, $t, \beta_j \in L$,

где $G_1(t)$ – заданная на окружности L функция класса Гельдера, причем $G_1(t) \neq 0$ на L ; β_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) – некоторые точки на L , называемые нулями функции $G(t)$ на L , а ρ_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) – фиксированные натуральные числа (кратности соответствующих нулей функции $G(t)$). Рассматривается следующая видоизмененная задача Неймана в исключительном случае (см. также [1, с. 180]): *найти все*

квазигармонические функции первого рода, принадлежащие классу $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n} + G_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \overline{W(t)} = g(t), \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к L , а $G_1(t)$ и $g(t)$ – заданные на окружности L функции класса $H^{(s+1)}(L)$, где $s = \max_j \{\rho_j\}$.

Следуя [1], сформулированную задачу будем называть задачей \mathbf{GN}_1^* .

Основной целью настоящего сообщения является разработка конструктивного метода решения задачи \mathbf{GN}_1^* в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

Известно (см., например, [1, с. 158]), что всякую квазигармоническую первого рода в круге T^+ функцию $W(z)$, принадлежащую классу $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, можно представить в виде

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi^+(z), \quad (2)$$

где $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$.

Так как имеет место соотношение (см., например, [1, с. 37])

$$\frac{\partial}{\partial n} = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad (3)$$

то с учетом представления (2), краевое условие (1) можно переписать так:

$$t \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + G_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \left(\frac{d\varphi^+(t)}{dt} - t \cdot \overline{\varphi^+(t)} \right) = g(t), \quad t \in L. \quad (4)$$

Далее, вводя в рассмотрение вспомогательную аналитическую в $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ функцию вида

$$\varphi^-(z) = \overline{\varphi^+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad z \in T^-, \quad (5)$$

краевое условие (4) перепишем в виде

$$t \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - \varphi^+(t) - t^2 G_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \left\{ t \frac{d\varphi^-(t)}{dt} + \varphi^-(t) \right\} = t \cdot g(t), \quad t \in L. \quad (6)$$

Наконец, вводя в рассмотрение вспомогательные функции вида

$$\Phi^+(z) = z \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{d\varphi^+(z)}{dz}, \quad z \in T^+, \quad (7)$$

$$\Phi^-(z) = z \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + \varphi^-(z), \quad z \in T^-, \quad (8)$$

где $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, а $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(1)}(L)$, равенство (6) запишем в виде

$$\Phi^+(t) = t^2 G_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L. \quad (9)$$

Но равенство (9) представляет собой краевое условие задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ с линией скачков L в так называемом *исключительном случае*, методы решения которой хорошо известны (см., например, [1, с. 59]).

Таким образом, для решения искомой задачи \mathbf{GN}_1^* получаем следующий алгоритм.

1. Сначала указанным выше способом редуцируем задачу \mathbf{GN}_1^* к краевой задаче Римана (9) относительно кусочно аналитических функций $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ и переходим к пункту 2.

2. Решаем задачу Римана (9). Если задача (9) неразрешима, то и исходная задача \mathbf{GN}_1^* также неразрешима и на этом завершается алгоритм. Если же задача Римана (9) разрешима, то находим ее общее решение $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ и переходим к пункту 3.

3. В классах $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ и $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(1)}(L)$ соответственно решаем два дифференциальных уравнения Эйлера вида

$$z \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{d\varphi^+(z)}{dz} = \Phi^+(z), \quad z \in T^+, \quad (10)$$

и

$$z \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + \varphi^-(z) = \Phi^-(z), \quad z \in T^-, \quad (11)$$

где $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ – решение задачи Римана (9). Если хотя бы одно из уравнений (10) и (11) неразрешимо в указанных классах функций, то искомая задача \mathbf{GN}_1^* также неразрешима и на этом завершается алгоритм. Если же оба уравнения (10) и (11) разрешимы, то находим их общие решения в указанных классах функций и переходим к пункту 5.

5. Среди решений дифференциальных уравнений (10) и (11) выбираем те, которые удовлетворяют на L условию «симметрии»:

$$\overline{\varphi^+(t)} = \varphi^-(t), \quad t \in L. \quad (12)$$

Если не существует ни одной пары $(\varphi^+(z), \varphi^-(z))$, составленной из решений дифференциальных уравнений (10) и (11), компоненты которой удовлетворяют условию (12), то искомая задача \mathbf{GN}_1^* неразрешима и на этом завершается алгоритм. Если же существуют пары $(\tilde{\varphi}^+(z), \tilde{\varphi}^-(z))$,

составленные из решений дифференциальных уравнений (10) и (11), для компонент которых выполняется условие (12), то по формуле

$$W(z) = \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\tilde{\varphi}^+(z) \quad (13)$$

получаем все решения исходной задачи \mathbf{GN}_1^* .

Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013. – 189 с.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.Ю. КУРИЦЫН, К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет,
KuritsynSergey@me.com, kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *метааналитическая функция, краевая задача типа Римана, интегральные члены, единичный круг.*

Рассматривается обобщенная краевая задача типа Римана с интегральными членами. Целью статьи является описание метода решения задачи в случае, когда контур представляет собой единичную окружность.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром L , а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Напомним (см., например, [1, с. 139]), что *кусочно метааналитической функцией с линией скачков L* будем называть функцию $F(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, которая в двух дополняющих друг друга до расширенной комплексной плоскости областях T^+ и T^- определяется так:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]\exp\{\lambda_0\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)]\exp\left\{\lambda_0\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (1)$$

или

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_1 \bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_2 \bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) \exp\left\{\lambda_1 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\} + \varphi_1^-(z) \exp\left\{\lambda_2 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi_k^\pm(z) \in A(T^\pm)$, $k=0,1$, а $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ – некоторые постоянные ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), $m \in \mathbb{N}$ и $m \geq 2$, причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

Обычно функцию $F(z)$, задаваемую формулой (1), называют *кусочно метааналитической функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулой (2), – *кусочно метааналитической функцией второго типа*.

Кроме того, кусочно метааналитическую функцию $F(z)$ вида (1) (или (2)) будем называть *исчезающей на бесконечности*, если $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq k+1$ (или $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1$), где $k=0,1$.

Наконец, будем говорить, что кусочно метааналитическая функция $F(z)$ с линией скачков L принадлежит классу $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_k^\pm(z)$ ($k=0,1$) непрерывно продолжаются на границу L вместе со своими производными $\frac{d\varphi_k^\pm(z)}{dz}$ ($k=0,1$), причем так, что граничные значения функций $\varphi_k^\pm(z)$ ($k=0,1$) и указанных производных удовлетворяют на L условию Гёльдера.

Рассматривается следующая краевая задача (см. также [1, с. 141]). *Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) - G_1(t)F^-(t) + \int_L A_1(t, \tau)F^+(\tau)d\tau + \int_L B_1(t, \tau)F^-(\tau)d\tau = g_1(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} - G_2(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + \int_L A_2(t, \tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial n_+}d\tau + \int_L B_2(t, \tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial n_-}d\tau = ig_2(t), \quad (4)$$

где $G_k(t), g_k(t)$ ($k=1,2$) – заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, причем $G_k(t) \neq 0$, а $A_k(t, \tau), B_k(t, \tau)$ ($k=1,2$) – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(1)}(L \times L)$, $\frac{\partial}{\partial n_\pm}$ – производная по внутренней (внешней) нормали к контуру L .

В равенстве (4) множитель i при $g_2(t)$ введен для удобства в дальнейших обозначениях.

Следуя [1], сформулированную выше краевую задачу будем называть *второй основной обобщенной краевой задачей типа Римана в*

классах метааналитических функций или, короче, задачей $GR_{2,M}$, а соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) – задачей $GR_{2,M}^0$.

Отметим, что в частном случае, когда на L выполняются условия

$$A_k(t, \tau) \equiv B_k(t, \tau) \equiv 0 \quad (k = 0, 1), \quad (5)$$

задача $GR_{2,M}$ подробно исследована в работах К.М. Расулова (см. [1] и имеющуюся там библиографию).

Основной целью настоящего сообщения является изложение конструктивного метода решения задачи $GR_{2,M}$ в классах кусочно метааналитических функций с линией скачков L в случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $L = \{t : |t| = 1\}$.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. - Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 344 с.

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ, ДЛЯ ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Р.М. МАВЛЯВИЕВ¹, И.Б. ГАРИПОВ²

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e-mail: ¹mavly72@mail.ru, ²ilnur_garipov@mail.ru

УДК 517.956.2

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, потенциалы, интегральное уравнение.

Внутренняя задача Дирихле с помощью потенциала двойного слоя сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Доказано, что последнее имеет единственное решение.

Пусть D – конечная область в верхней полуплоскости E_2^+ координатной плоскости Oxy , ограниченная кривой Γ с концами в точках $P_1(p_1; 0)$ и $P_2(p_2; 0)$ и отрезком $\Gamma_0 = [P_1, P_2]$ оси координат Ox .

Рассмотрим линейное эллиптическое уравнение, заданное в E_2^+ :

$$L(u) = 0, \quad (1)$$

где $L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^{-k} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^k \frac{\partial}{\partial y} \right) + 2a \frac{\partial}{\partial x} - c^2$, $B_y \equiv y^{-k} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^k \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – оператор Бесселя, $c > a > 0$ и $k > 0$ – заданные действительные числа. Фундаментальным решением этого уравнения с особенностью в произвольной точке $M_0(x_0, y_0)$ является функция

$$\varphi(x, y; x_0, y_0) = C_k (yy_0)^{-\frac{k}{2}} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + \varphi_0(x, y; x_0, y_0), \quad (2)$$

где $\varphi_0(x, y; x_0, y_0)$ – регулярная в точке M_0 функция.

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D} \cup \Gamma_0); \quad (3)$$

$$L(u) = 0, \quad (x, y) \in D; \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\Gamma_0} = 0; \quad (5)$$

$$u|_{\Gamma} = f_0(\xi, \eta), \quad f_0 \in C(\Gamma). \quad (6)$$

Решение задачи (3) – (6) ищем в виде потенциала двойного слоя

$$W(M) = \int_{\Gamma} \nu(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P} \eta^k d\Gamma, \quad (7)$$

где φ определяется формулой (2), $\Gamma \in \Lambda$, $\nu(P) \in C$.

Ядро этого потенциала представляется в виде

$$(y\eta)^{-\frac{k}{2}} \frac{\cos \theta}{r_{MP}} + \tau = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta; x, y)}{\partial n_P},$$

где τ – достаточно гладкая функция, θ – угол между радиус-вектором $\vec{r}_{MP} = \vec{MP}$ и внешней нормалью \vec{n}_P к Γ в точке $P \in \Gamma$.

Если плотность ν непрерывная функция на Γ и $\Gamma \in \Lambda$, то справедливо предельное соотношение

$$W^{\pm} = \pm \frac{\nu}{2} + \bar{W}. \quad (8)$$

Знаки «+» и «-» обозначают предельные значения изнутри и извне области D соответственно, \bar{W} обозначает прямое значение потенциала на границе Γ .

Функция (7) в D удовлетворяет уравнению (1). Для нахождения неизвестной плотности ν подставим функцию (7) в условие (6). В результате, с учетом формулы скачка (8), умножая на 2, получаем

$$v(P_0) = -2 \int_{\Gamma} v(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P} \eta^k d\Gamma + 2f_0(P_0). \quad (9)$$

Уравнение (9) относительно плотности v является интегральным уравнением с ядром со слабой особенностью. Поэтому для этого уравнения справедлива альтернатива Фредгольма.

Доказано, что однородное интегральное уравнение, соответствующее данному уравнению (9), не имеет ненулевых решений. Доказательство проведено методом от противного.

По альтернативе Фредгольма неоднородное уравнение (9) имеет единственное решение. Тем самым единственное решение имеет внутренняя краевая задача Дирихле.

Литература

1. Лободзинская И.Г. О краевых задачах для уравнения $\Delta^m u = 0$ // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т. 3. – № 8. – С. 1355–1363.
2. Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б. Фундаментальное решение эллиптического уравнения высшего порядка с младшими членами // Известия СмолГУ, 2012, - № 4. - С. 357–363.

ПЛОТНО-ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

С.В. МЕДВЕДЕВ

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
e-mail: medv@math.susu.ac.ru

УДК 515.124.3

Ключевые слова: *CDH-пространство, λ -пространство, пространство первой категории, h -однородное пространство.*

Изучаются свойства CDH-пространств первой категории. Например, пусть дано h -однородное несчётное λ -пространство X . Тогда X является CDH-пространством. Более того, X гомеоморфно подпространству $X \setminus A$ для любого счётного множества $A \subset X$.

Ниже рассматриваются только сепарабельные метризуемые пространства.

За последнее время опубликовано много работ о свойствах CDH-пространств.

Сепарабельное пространство X называется *счётно плотно-однородным* (кратко, *CDH-пространством*), если для любых двух счётных всюду плотных подмножеств A и B пространства X существует гомеоморфизм $f: X \rightarrow X$, отображающий множество A на B , т.е. $f(A) = B$. Фактически это понятие появилось около ста лет назад (см. [1]), когда Фреше и Брауэр доказали (независимо), что обычное евклидово

пространство R^n является CDH-пространством. Несложно проверить, что каждое счётное CDH-пространство всегда дискретно. Следующая важная теорема показывает, что сравнительно просто устроенные CDH-пространства всегда гомеоморфны полным метрическим пространствам.

Теорема 1 [1]. *Любое борелевское CDH-пространство метризуемо полной метрикой.*

Куратовский (см. [2]) ввел так называемые λ -пространства. Сепарабельное пространство X называется λ -пространством, если любое счётное подмножество из X является G_δ -множеством в X . Можно доказать [2], что любое несчётное польское пространство содержит несчётное λ -пространство. Напомним, что пространство X называется пространством *первой категории*, если его можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Отметим следующие важные свойства λ -пространств.

Лемма 1 [2]. *Любое λ -пространство является пространством первой категории.*

Лемма 2 [3]. *Любое CDH-пространство первой категории является λ -пространством.*

Из теоремы 1 следует, что поиск других CDH-пространств нужно вести среди более сложно устроенных множеств. В теореме 2 указан ещё один класс CDH-пространств. Нульмерное пространство называется *h-однородным*, если любое его непустое открыто-замкнутое подмножество гомеоморфно всему пространству. Теорема 2 усиливает результат из статьи [4, теорема 4.9].

Теорема 2. *Любое h-однородное несчётное λ -пространство является CDH-пространством.*

Отметим два любопытных свойства h-однородных λ -пространств.

Теорема 3. *Пусть дано h-однородное несчётное λ -пространство X . Тогда для любого счётного множества $A \subset X$ пространство X гомеоморфно своему подпространству $X \setminus A$.*

Теорема 4. *Пусть дано нульмерное несчётное λ -пространство X . Тогда X можно вложить в качестве замкнутого множества в некоторое h-однородное несчётное λ -пространство $h(X)$, причём мощность пространства $h(X)$ равна мощности пространства X .*

Теперь опишем случаи, когда пространство не является CDH-пространством.

Теорема 5. *Если пространство X первой категории содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное канторову совершенному множеству, то X не является CDH-пространством.*

Последнее утверждение можно усилить, если ввести следующее понятие. *Типом* счётного всюду плотного множества D из пространства X называется семейство $\{f(D): f - \text{гомеоморфизм пространства } X \text{ на}$

себя}. Несложно убедиться, что X является CDH-пространством тогда и только тогда, когда в нем существует ровно один тип счётных всюду плотных подмножеств.

Теорема 6. Пусть в пространстве X существуют открытое подмножество U первой категории и замкнутое множество F такие, что F гомеоморфно канторову совершенному множеству и $F \subset U$. Тогда в пространстве X существует континуум счётных всюду плотных множеств различных типов.

Теорема 6 обобщает результат из [5]. В статье [5] аналогичное утверждение было доказано для пространства X , удовлетворяющего свойству совершенного ядра для открытых подмножеств в случае, когда само X не обладает свойством Бэра.

Литература

1. Hrusak M, Zamora-Aviles B. Countable dense homogeneity of definable spaces // Proc. Amer. Math. Soc.. – 2005. - V. 133, is. 11. - P. 3429-3435.
2. Куратовский К. Топология. Т. 1. – М.: Мир, 1966.
3. Fitzpatric Jr.B., Zhou H-X. Countable dense homogeneity and the Baire property // Topology Applic. – 1992. - V. 43. - P. 1-14.
4. Hernandez-Gutierrez R., Hrusak J. van Mill. Countable dense homogeneity and λ -sets. – preprint, 2013.
5. Kunen K., Medini A., Zdomskyy L. Seven characterizations of non-meager P-filters. – Arxiv 1311.1677, 2013.

СЛУЧАЙ СИММЕТРИЧНОГО ОТРЕЗКА В ТЕОРИИ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

М.А. ПЕТРОСОВА, И.В. ТИХОНОВ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

НИЯУ МИФИ, МПГУ, МГУ, г. Москва,
e-mail: petrosova05@mail.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

УДК 517.518.82

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, симметричный отрезок.

Строится теория классических полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1,1]$. Показано, как видоизменяются основные формулы, известные ранее для стандартного отрезка $[0,1]$.

Полиномы Бернштейна для функции $f \in C[-1,1]$ на симметричном отрезке $[-1,1]$ определяются формулой

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Случай симметричного отрезка важен с практической точки зрения, поскольку на нем полиномы Бернштейна наследуют свойства четности

или нечетности исходной функции f . В частности, полиномы, построенные по четной функции, имеют в своей записи только четные степени x , а по нечетной функции – только нечетные степени x .

Для систематической работы с полиномами Бернштейна на $[-1, 1]$ удобно иметь в распоряжении достаточный запас стандартных формул, аналогичных известным ранее для $[0, 1]$ (см. [1]–[4]). Приведем соответствующие результаты с указанием аналогов на $[0, 1]$.

Явная алгебраическая запись, аналогичная формулам Вигерта [5], имеет на $[-1, 1]$ более сложный вид:

$$B_n(f, x) = \sum_{m=0}^n a_{n,m}(f) x^m,$$

$$a_{n,m}(f) = \frac{(-1)^m}{2^n} C_n^m \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j}.$$

Равномерная оценка уклонения в духе теоремы Поповичу [6] выглядит так:

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq 2 \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbf{N},$$

где $\omega(f, \delta)$ – модуль непрерывности функции $f(x)$.

Для функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой $L > 0$, оценка уклонения отдельно уточняется:

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{L}{\sqrt{n}}, \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Для разности двух последовательных полиномов Бернштейна действует аналог формулы Темпла [7], а именно

$$B_{n+1}(f, x) - B_n(f, x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n A_{n,k}(f) (1+x)^k (1-x)^{n-k+1},$$

$$A_{n,k}(f) = C_{n+1}^k f\left(\frac{2k}{n+1} - 1\right) - C_n^k f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) - C_n^{k-1} f\left(\frac{2(k-1)}{n} - 1\right).$$

Данные соотношения находят применение при изучении полиномов Бернштейна для симметричного модуля.

Пусть $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$. Обозначим полиномы Бернштейна такой функции через $B_n(x)$. Используя аналог формулы Темпла, получаем, что

$$B_{2m+1}(x) = B_{2m}(x), \quad m \in \mathbf{N},$$

$$B_{2m+2}(x) = B_{2m+1}(x) - \frac{1}{m+1} 2^{-2(m+1)} C_{2m}^m (1-x^2)^{m+1}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Отсюда выводим разложение

$$B_{2m}(x) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (1-x^2)^k,$$

упомянутое без доказательства в работе Поповичу [6]. Взяв вторую производную, имеем

$$B_{2m}''(x) = 2^{-2(m-1)} (2m-1) C_{2m-2}^{m-1} (1-x^2)^{m-1}.$$

После раскрытия бинома и двукратного интегрирования устанавливаем явную алгебраическую запись:

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m} C_{2m}^m \left[1 + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} C_m^k x^{2k} \right], \quad m \in \mathbf{N}.$$

На основе перечисленных соотношений можно провести полное исследование полиномов Бернштейна для симметричного модуля, аналогично проделанному в [8] для стандартного отрезка $[0,1]$.

Литература

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 688 с.
2. Lorentz G. G. Bernstein Polynomials. – Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. – x+130 p.
3. DeVore R.A., Lorentz G.G. Constructive Approximation. – Berlin, Heidelberg, N.Y.: 1993. – 450 p.
4. Davis P.J. Interpolation and Approximation. – N.Y.: Dover, 1975. – xvi+394 p.
5. Wigert S. Réflexions sur le polynome d'approximation $\sum_{v=0}^n C_n^v \varphi\left(\frac{v}{n}\right) x^v (1-x)^{n-v}$
// Arkiv för matematik, astronomi och fysik. -1927. - Bd. 20. Häfte 2. - S. 1–15.
6. Popoviciu T. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica. - 1935. -Vol. 10. - P. 49–54.
7. Temple W. B. Stieltjes integral representation of convex functions // Duke Math. Journal. - 1954. - Vol. 21. № 3. - P. 527–531.
8. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. - 2012. - Т. 15, № 26. - С. 6–40.

О НЕТЕРОВОСТИ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ ТРИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.В. РАСТОРГУЕВА, И.Б. БОЛОТИН

Смоленский государственный университет, ,
e-mail: avrastorgueva@yandex.ru, IBBolotin@smolgu.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *трианалитическая функция, краевая задача Римана, разрывные коэффициенты.*

Работа посвящена изучению первой основной краевой задачи типа Римана с разрывными коэффициентами в классе трианалитических

функций в случае полуплоскости. В ходе исследования установлена нетеровость рассматриваемой задачи.

Пусть $L = \{t \mid \text{Im} t = 0\}$, $D^+ = \{z \mid \text{Im} z > 0\}$ и $D^- = \bar{C} \setminus \{D^+ \cup L\}$. В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1].

Рассмотрим следующую краевую задачу. Требуется найти все трианалитические функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$, принадлежащие классу $A_3(D^\pm) \cap I^{(4)}(L)$, ограниченные вблизи узлов контура L , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие во всех обыкновенных точках L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial^2 F^+(t)}{\partial x^2} = G_1(t) \frac{\partial^2 F^-(t)}{\partial x^2} + g_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 F^+(t)}{\partial x \partial y} = G_2(t) \frac{\partial^2 F^-(t)}{\partial x \partial y} + i g_2(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 F^+(t)}{\partial y^2} = G_3(t) \frac{\partial^2 F^-(t)}{\partial y^2} - g_3(t), \quad (3)$$

где $G_k(t)$, $g_k(t)$ – заданные на L функции класса $H_0^{(2)}$ ($k=1, 2, 3$), причем $G_k(t) \neq 0$ всюду на L . Здесь множители i^{k-1} при $g_k(t)$ соответственно введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу будем называть *первой основной краевой задачей типа Римана с разрывными коэффициентами для трианалитических функций в случае полуплоскости* или задачей $R_{1,3}$ в случае полуплоскости, а соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv g_3(t) \equiv 0$) назовем задачей $R_{1,3}^0$ в случае полуплоскости.

Конструктивный метод решения поставленной задачи получен авторами в работах [2, 3]. А именно, установлено, что решение задачи $R_{1,3}$ в случае полуплоскости сводится к последовательному решению трех краевых задач Римана с разрывными коэффициентами в классах аналитических функций. Таким образом, картина разрешимости задачи $R_{1,3}$ будет складываться из картин разрешимости вспомогательных краевых задач.

Для полного исследования картины разрешимости задачи $R_{1,3}$ в случае полуплоскости требуется рассмотреть 27 случаев.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Число l линейно независимых решений задачи $R_{1,3}$ в случае полуплоскости и количество p условий разрешимости

соответствующей однородной задачи $R_{1,3}^0$ конечны, то есть задача $R_{1,3}$ в случае полуплоскости является нетеровой.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998.
2. Болотин И.Б. Об одном обобщении теоремы Лорана // Известия Смоленского государственного университета. –2011. – № 2. – С. 127–133.
3. Болотин И.Б., Расторгуева А.В. Об одной краевой задаче типа Римана с разрывными коэффициентами для трианалитических функций в случае полуплоскости. – Уфа: Изд-во БашГУ, 2013. – С. 289–292.
4. Болотин И.Б., Расторгуева А.В. О решении одной краевой задачи типа Римана с разрывными коэффициентами для трианалитических функций в случае полуплоскости. – Ульяновск: Изд-во SIMJET, 2014. – С. 122–127.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТИПА ШВАРЦА ДЛЯ БИНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: kahrیمانr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *бианалитическая функция, краевая задача типа Шварца, задача Дирихле для гармонических функций, прямоугольник.*

В настоящем сообщении разработан конструктивный алгоритм решения одной из модельных краевых задач типа Шварца в классах бианалитических функций в прямоугольнике.

Пусть $L = \sum_{k=1}^p L_k$ - простой замкнутый кусочно-гладкий контур на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$, где $L_k = \overline{c_k c_{k+1}}$ - гладкие дуги ($c_1 = c_{p+1}$), задаваемые уравнениями $z = t_k(s)$, $s \in [0, l_k]$, причем $t_k(s) = x_k(s) + iy_k(s)$ и $[x'_k(s)]^2 + [y'_k(s)]^2 = 1$ ($k = 1, 2, \dots, p$). Следуя [1], угловые точки $c_k \in L$ ($k = 1, 2, \dots, p$), которые служат концами гладких дуг L_k , будем называть узлами контура L , а точки t контура L , отличные от узлов, - обыкновенными точками.

Обозначим через T^+ - конечную односвязную область, ограниченную кусочно-гладким контуром $L = \sum_{k=1}^p L_k$. Для определенности будем считать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ .

Напомним (см., например, [2], [3]), что функция $F^+(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ называется *бианалитической в области T^+* , если она в T^+ имеет непрерывные частные производные по x и y до второго порядка включительно (т.е. $F^+ \in C^2(T^+)$) и удовлетворяет там уравнению

$$\frac{\partial^2 F^+(z)}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ - дифференциальный оператор Коши-Римана.

Известно (см., например, [2-4]), что всякую однозначную бианалитическую в области T^+ функцию $F^+(z)$ можно представить в виде

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z), \quad (2)$$

где $\bar{z} = x - iy$, а $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ - однозначные аналитические функции в области T^+ , называемые *аналитическими компонентами* бианалитической функции $F^+(z)$ - соответственно *нулевой* и *первой*.

Всюду в дальнейшем класс бианалитических в области T^+ функций будем обозначать через $A_2(T^+)$.

Наконец, будем говорить, что бианалитическая функция $F^+(z)$ принадлежит классу $A_2(T^+) \cap H(L_*)$, если функция $F^+(z)$ непрерывно продолжается на все *обыкновенные точки* контура L , причем так, что граничные значения этой функции удовлетворяют по z условию Гельдера.

В качестве модельной краевой задачи типа Шварца в классах бианалитических функций можно рассмотреть следующую *задачу S_2* : *требуется найти все бианалитические функции $F^+(z)$ класса $A_2(T^\pm) \cap H(L_*)$, удовлетворяющие во всех обыкновенных точках контура*

$L = \sum_{k=1}^p L_k$ *краевым условиям:*

$$\operatorname{Re}\{F^+(t)\} = q_0(t), \quad (3)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}}\right\} = q_1(t), \quad (4)$$

где $q_0(t)$, $q_1(t)$ - заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гельдера на всех замкнутых дугах $L_k = \overline{c_k c_{k+1}}$ ($k = 1, 2, \dots, p$).

Ниже предлагается конструктивный метод решения задачи S_2 в случае, когда областью T^+ служит произвольный прямоугольник $ABCD$ с вершинами в точках $z_1 = a + ib$, $z_2 = -a + ib$, $z_3 = -a - ib$, $z_4 = a - ib$, где $a > 0$ и $b > 0$.

Во-первых, заметим, что с учетом (2) краевые условия (3) и (4) соответственно можно записать так:

$$\operatorname{Re}\{\varphi_0^+(t) + i\bar{t}\varphi_1^+(t)\} = q_0(t), \quad t \in L, \quad (5)$$

$$\operatorname{Re}\{\varphi_1^+(t)\} = q_1(t), \quad t \in L. \quad (6)$$

Вводя обозначение $u_1(x, y) = \operatorname{Re}\varphi_1^+(z)$, краевое условие (6) перепишем в виде

$$u_1(t) = q_1(t), \quad t \in L. \quad (7)$$

Но равенство (7) есть краевое условие обычной задачи Дирихле относительно гармонической в прямоугольнике $T^+ = ABCD$ функции $u_1(x, y)$ (см., например, [6-8]).

Решая задачу Дирихле (7), например, методом изложенным в [8, с. 11], находим ее решение $u_1(x, y)$.

Далее, по заданной в $T^+ = ABCD$ гармонической функции $U_1(x, y)$ определяем все аналитические в $T^+ = ABCD$ функции $\varphi_1^+(z)$, удовлетворяющие условию (6) (т.е. решаем обычную задачу Шварца):

$$\varphi_1^+(z) = Su_1 + ic_1, \quad (8)$$

где S - оператор Шварца (см., например, [6, с. 265], а c_1 - произвольная действительная постоянная.

Подставив граничные значения $\varphi_1^+(t)$ найденной аналитической функции (8) в левую часть краевого условия (6), получим

$$\operatorname{Re}\varphi_0^+(t) = Q_0(t), \quad t \in L, \quad (9)$$

где $Q_0(t) = q_0(t) - \operatorname{Re}\{i\bar{t}[Su_1 + c_1]\}$.

Равенство (9) есть краевое условие обычной задачи Шварца относительно аналитической в прямоугольнике $T^+ = ABCD$ функции $\varphi_0^+(z)$. Решая задачу Шварца (9) указанным выше способом, находим $\varphi_0^+(z)$:

$$\varphi_0^+(z) = Su_0 + ic_0, \quad (10)$$

где $u_0(x, y) = \operatorname{Re}\varphi_0^+(z)$, а c_0 - произвольная действительная постоянная.

Наконец, с учетом (2), (8) и (10), решение искомой задачи можно задавать формулой

$$F^+(z) = Su_0 + \bar{z}(Su_1) + i(\bar{z}c_1 + c_0).$$

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
2. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013. – 189 с.
3. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.
4. Balk M.V. Polyanalytic functions. – Berlin: Akademie Verlag, 1991. – 192 p.
5. Балк М.В. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. «Сов. пробл. матем. фун. напр.» – Т. 85. – М.: ВИНТИ, 1991. – С. 187–246.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
8. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 695 с.

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

К.М. РАСУЛОВ, А.Ю. СМИРНОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *квазигармоническая функция, видоизмененная краевая задача Дирихле, исключительный случай, единичный круг.*

Рассматривается видоизмененная краевая задача Дирихле для квазигармонических функций. В докладе предлагается конструктивный алгоритм решения рассматриваемой задачи в классах квазигармонических функций в исключительном случае, т.е. когда коэффициент краевого условия обращается в нуль в некоторых точках контура.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L .

Напомним (см., например, [1]), что *квазигармоническими функциями рода n в области T^+* называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, n – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1], что всякую квазигармоническую функцию рода n в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W(z)$.

Определение 1. Будем говорить, что квазигармоническая функция $W(z)$ принадлежит классу $C^m(T^+ + L)$, если в представлении (2) аналитическая компонента $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, где m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число.

Рассматривается следующая краевая задача (см. также [1, с. 158]).

Задача GD_n . Требуется найти все квазигармонические функции рода n ($n \geq 1$), принадлежащие классу $C^{n+1}(T^+ + L)$ и удовлетворяющие на L условию:

$$W(t) + G(t)\overline{W(t)} = g(t), \quad (3)$$

где $G(t)$ и $g(t)$ – заданные на контуре L функции класса Гельдера $H(L)$.

Следуя [1], краевую задачу GD_n будем называть *видоизмененной задачей Дирихле для квазигармонических функций рода n* .

В монографии [1] задача GD_n была решена в случае, когда $n=1$, $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ и $G(t) \neq 0$ на $L = \{t: |t| = 1\}$. Основной целью настоящего сообщения является изложение метода решения задачи GD_n в так называемом исключительном случае, т.е. когда $G(t) = G_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j}$, $t, \beta_j \in L$, где $G_1(t)$ – заданная на окружности L функции класса Гельдера, причем $G_1(t) \neq 0$ на L ; β_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) – некоторые точки на L , называемые *нулями* функции $G(t)$ на L , а ρ_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) – фиксированные натуральные числа (*кратности* соответствующих нулей функции $G(t)$).

Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013. – 189 с.

РАЦИОНАЛЬНАЯ КВАЗИ-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЭРМИТА-ФЕЙЕРА

Е.А. РОВБА, Е.В. ДИРВУК

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, г. Гродно,
e-mail: rovba.ea@gmail.com, dirvuk@gmail.com

УДК 513.51

Ключевые слова: *рациональная квази-интерполяция, рациональные операторы, интегрирование на отрезке, сходимость интерполяционных процессов.*

В работе изучен вопрос о построении интерполяционных рациональных операторов типа Эрмита-Фейера.

Интерполирование рациональными функциями на отрезке $[-1, 1]$ впервые было рассмотрено В.Н. Русаком [1] в 1962 году. В качестве узлов интерполирования выбирались нули рациональных функций Чебышева-Маркова, частным случаем которых являются классические узлы Чебышева первого рода. В работе [2] были построены рациональные интерполяционные функции типа Эрмита-Фейера.

Рациональная квази-интерполяция впервые была рассмотрена в работе Г. Мина [3]. В этой работе был построен соответствующий интерполяционный процесс и доказана его равномерная сходимость для функций $f \in C[-1, 1]$ при весьма жестких условиях на полюсы – полюсы аппроксимирующих рациональных функций не должны иметь предельных точек на отрезке $[-1, 1]$. В таком случае рациональные функции ведут себя подобно полиномам. Специфические свойства аппроксимирующие рациональные функции проявляют именно в этом случае, когда полюса располагаются вблизи промежутка, на котором рассматривается приближение.

В настоящей работе построены интерполяционные рациональные операторы типа Эрмита-Фейера на основании иных подходов в сравнении с [3]. В основе нашего метода лежат идеи работы [2]. При этом доказывается равномерная сходимость рассматриваемого интерполяционного процесса для функции $f \in C[-1, 1]$ при условии полноты соответствующей системы рациональных функций. В качестве узлов интерполирования выбираются нули рациональных функций Чебышева-Маркова второго рода.

Литература

1. Русак В.Н. Об интерполировании рациональными функциями с фиксированными полюсами // ДАН БССР. – 1962. – Т. 4, № 9. – С. 548-550.

2. Ровба Е.А. Интерполяционные рациональные операторы типа Фейера и Валле-Пуссена // Математические заметки.– 1993.– Вып. 2. – Т. 53. – № 3. – С. 114 -121.

3. Min G. Lobatto-type quadrature formula in rational space // J. of Computation and Applied Mathematics. – 1998. – № 94. – P. 1-12.

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ ОТ ПАРАМЕТРА

Ю.С. РОМАНЕНКОВА

Смоленский государственный университет»,

УДК 517.925.7

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения первого порядка с параметром на комплексной плоскости, непрерывная зависимость решений.*

В докладе рассматриваются дифференциальные уравнения с параметром на комплексной плоскости. Изучается вопрос о непрерывной зависимости решения от параметра и начальных данных.

Пусть дано дифференциальное уравнение I порядка:

$$\frac{df}{dz} = F(f, z(t), t), \quad (*)$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$, а t - параметр, причем для любого t выполняются условия теоремы существования и единственности и $f(z(t), t) = u(t) + iv(t)$ — решение уравнения (*), удовлетворяющее начальному условию $f(z_0) = u_0 + iv_0$, где z — некоторая функция параметра t ($z_0 = z(t_0)$).

Замечание. Параметр t может либо возникнуть из-за изменения начальных данных в задаче, либо играть роль времени, если дифференциальное уравнение возникло в процессе описания какого-либо динамического процесса. К тому же параметр t может быть как действительным, так и комплексным.

Теорема (о зависимости решения дифференциального уравнения (*) от параметра). Пусть правая часть $F(f, z(t), t)$ дифференциального уравнения (*) непрерывна по всем аргументам в области

$$D: \{ |z_0(t) - z_0^1(t)| \leq a; |f_0(z) - f_0^1(z)| \leq b; |t - t_0| \leq T \}$$

и функция $F(f, z(t), t)$ удовлетворяет условию Липшица по $f(z(t), t)$, а $f = f(z(t), t)$ — решение дифференциального уравнения (*) с начальными

условиями $f(z_0) = f_0$, определено при $|z_0(t) - z_0^1(t)| \leq a$ и выполняется условие $|f_0(z) - f_0^1(z)| \leq b$. Тогда решение $f = f(z(t), t)$ непрерывно зависит от t .

Доказательство. Придадим t два значения t^1 и t^2 и рассмотрим два решения $f^1(z, t^1)$ и $f^2(z, t^2)$, каждое из которых удовлетворяет своему уравнению

$$\frac{df^1}{dz} = F(f^1, z(t), t^1) \text{ и } \frac{df^2}{dz} = F(f^2, z(t), t^2) \quad (**)$$

и одинаковым начальным условиям $f(z_0) = f^0$.

Правые части этих систем зависят от t и, вообще говоря, не совпадают тождественно. Оценим модуль разности функций $|f^1(z(t), t^1) - f^2(z(t), t^2)|$, используя дифференциальное соотношение, которое получается почленным вычитанием первого и второго уравнений (**), которые после подстановки $f^1(z, t^1)$ и $f^2(z, t^2)$ выполнены тождественно:

$$\left| \frac{d}{dz} (f^1(z, t^1) - f^2(z, t^2)) \right| \equiv |F(f^1, z, t^1) - F(f^2, z, t^2) + F(f^1, z, t^2) - F(f^1, z, t^2)|.$$

Проинтегрируем последнее тождество, учитывая тот факт, что функции $f^1(z, t^1)$ и $f^2(z, t^2)$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям, и перегруппируем слагаемые в правой части. Получим

$$|f^1(z(t), t^1) - f^2(z(t), t^2)| = \int_{z_0}^z |F(f^1, z, t^1) - F(f^1, z, t^2)| dz + \int_{z_0}^z |F(f^1, z, t^2) - F(f^2, z, t^2)| dz.$$

Оценим правую часть, используя условия теоремы:

$$|f^1(z, t^1) - f^2(z, t^2)| \leq \max_{f^1, z \in C} |F(f^1, z, t^1) - F(f^2, z, t^2)| \cdot a + \int_{z_0}^z K \|f^1(z, t^1) - f^2(z, t^2)\| dz,$$

где второй интеграл оценен из условия Липшица (K - константа в условии Липшица), а под нормой $\|\cdot\|$ понимается сумма модулей компонент

$$|f^1(z(t), t^1) - f^2(z(t), t^2)|.$$

Суммируя, получим

$$\begin{aligned} \|f^1(z, t^1) - f^2(z, t^2)\| &\leq n \cdot a \cdot \max_{f^1, z \in C} |F(f^1, z, t^1) - F(f^2, z, t^2)| + \\ &+ n \cdot K \int_{z_0}^z \|f^1(z, t^1) - f^2(z, t^2)\| dz. \end{aligned}$$

Обозначив $\max_{f^1, z \in C} |F(f^1, z, t^1) - F(f^2, z, t^2)| = \delta(t^1, t^2)$, получим

$$\|f^1(z, t^1) - f^2(z, t^2)\| \leq n \cdot a \cdot \delta(t^1, t^2) + n \cdot K \int_{z_0}^z \|f^1(z, t^1) - f^2(z, t^2)\| dz.$$

По лемме Гронуолла получаем окончательную оценку

$$\|f^1(z, t^1) - f^2(z, t^2)\| \leq n \cdot a \cdot \delta(t^1, t^2) \cdot e^{n \cdot K \cdot a}.$$

Из непрерывности функций $F(f, z(t), t)$ по t следует, что $\delta(t^1, t^2) \rightarrow 0$, если $t^1 \rightarrow t^2$, откуда $\|f^1(z, t^1) - f^2(z, t^2)\| \rightarrow 0$ при $t^1 \rightarrow t^2$, и, следовательно, решение $f(z, t)$ дифференциального уравнения (*) непрерывно зависит от параметра t .

Литература

1. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения. - МГИУ, 2007. - 254 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1969. - 425 с.

НОРМАЛЬНЫЕ И ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

И.Н. СИНИЦЫН¹, В.И. СИНИЦЫН²

Институт проблем информатики РАН, г. Москва

e-mail: ¹sinitsin@dol.ru, ²vsinitsin@ipiran.ru

УДК 519.62

Ключевые слова: *интегродифференциальная стохастическая система, метод нормальной аппроксимации, метод статистической линеаризации, метод эллипсоидальной аппроксимации.*

Представлены новые методы и алгоритмы аналитического моделирования одно- и многомерных распределений в интегродифференциальных стохастических системах, приводимых к дифференциальным.

В 2013 году вышла книга [1], в которой сделана попытка систематически изложить методы и алгоритмы нормальной и эллипсоидальной аппроксимации одно- и многомерных распределений в стохастических системах (СтС) в конечно- и бесконечномерных пространствах. Книга предназначена для читателя со скромной математической подготовкой. Она состоит из предисловия, списка обозначений и сокращений, пяти глав:

- 1) Сведения из стохастического анализа и процессов;
- 2) Теория стохастических систем. Линейные системы;
- 3) Нормальная аппроксимация распределений и статистическая линеаризация в стохастических системах;
- 4) Эллипсоидальная аппроксимация распределений и линеаризация в стохастических системах

5) Применение в задачах компьютерной поддержки статистических научных исследований;

а также литературы и 10 приложений.

В докладе на основе развития [1, 2] рассматриваются методы и алгоритмы анализа и моделирования (аналитического, статистического) одно- и многомерных распределений в интегродифференциальных стохастических системах (ИДСтС) с винеровскими и пуассоновскими шумами. Приводятся нелинейные стохастические интегродифференциальные уравнения. Для затухающих физически возможных ядер рассматриваются два способа их аппроксимации (на основе линейных операторных уравнений и вырожденных ядер). Устанавливаются алгоритмы приведения ИДСтС к дифференциальным стохастическим системам (ДСтС).

Приводится подробный анализ подходов к аналитическому моделированию распределений в ИДСтС, приводимых к ДСтС. В основу подходов положены как методы прямого численного интегрирования уравнений ДСтС, так и численного интегрирования для параметров методов нормальной (гауссовской) аппроксимации и эллипсоидальной аппроксимации. Получены условия устойчивости алгоритмов.

Разработан комплекс тестовых примеров для разрабатываемого в ИПИ РАН инструментального программного обеспечения «IDStS» в среде MATLAB.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы ОНИТ РАН «Интеллектуальные информационные технологии, системный анализ и автоматизация» (проект 1.7).

Литература

1. Сеницын И.Н., Сеницын В.И. Лекции по нормальной и эллипсоидальной аппроксимации распределений в стохастических системах. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2013.
2. Сеницын И.Н. Анализ и моделирование распределений в эргодических стохастических системах // Информатика и ее применения. - 2014. - Т. 8. Вып. 1. - С. 3–12.

ГАРАНТИИ ПО ИСХОДАМ И РИСКАМ В ОДНОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ

И.С. СТАБУЛИТ

Челябинская государственная агроинженерная академия,
e-mail: irisku76@mail.ru

УДК 519.833.7

Ключевые слова: *кооперативная игра, неопределенность, риск, седловая точка.*

В работе рассмотрено понятие гарантированного по исходам и рискам решения в кооперативной игре двух лиц при неопределенности.

Под кооперативной игрой двух лиц (без побочных платежей) при неопределенности в нормальной форме, следуя [1], будем понимать упорядоченный кортеж

$$\Gamma = \langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \rangle.$$

В игре Γ 1 и 2 – порядковые номера игроков, $X_i \subseteq R^{n_i}$ – множество стратегий x_i у i -го игрока ($i=1,2$). У игроков не имеется никакой статистической информации о неопределенности $y \in Y \subseteq R^m$, им известна лишь область ее возможных значений Y .

Партия игры разворачивается следующим образом. Игроки, согласуя свои действия друг с другом, выбирают свои стратегии x_i ($i=1,2$), в результате чего образуется ситуация $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$. Независимо от действий игроков и одновременно с их выбором реализуется конкретное значение неопределенности $y \in Y$. На образующихся таким образом парах $(x, y) \in X \times Y$ определены скалярные функции выигрыша игроков $f_i(x, y)$ ($i=1,2$), значения которых называются *выигрышами*.

Риском i -го игрока ($i=1,2$), следуя Сэвиджу [2], будем называть значение функции риска [3]

$$\Phi_i(x, y) = f_i(x^P(y), y) - f_i(x, y) \quad (i=1,2),$$

где $x^P(y)$ – максимальная по Парето альтернатива в двухкритериальной задаче

$$\Gamma(y) = \langle X, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle,$$

полученной из игры Γ при каждой фиксированной неопределенности $y \in Y$.

Целью игрока является такой, согласованный с партнером, выбор своей стратегии, чтобы его выигрыш был, по возможности, больше, а риск, по возможности, меньше. При этом игроки должны ориентироваться на возможность реализации любой неопределенности из множества Y .

Следуя [4], определим решение в игре Γ как «аналог седловой точки».

Определение. Гарантированным по исходам и рискам решением в игре Γ назовем пятерку $(x^*, f_1^*, f_2^*, \Phi_1^*, \Phi_2^*) \in X \times R^4$, для которой существует неопределенность $y^* \in Y$ и выполнены следующие условия:

1) ситуация x^* удовлетворяет условию индивидуальной рациональности в игре, полученной из (1) при фиксированной неопределенности $y = y^*$;

2) ситуация x^* максимальна по Слейтеру в четырехкритериальной задаче

$$\langle X, \{f_i(x, y), -\Phi_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle,$$

полученной из (1) при фиксированной неопределенности $y = y^*$;

3) неопределенность $y^* \in Y$ минимальна по Слейтеру в четырехкритериальной задаче

$$\langle Y, \{f_i(x, y), -\Phi_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle,$$

полученной из (1) при фиксированной ситуации $x = x^*$.

При этом, $f_i^* = f_i(x^*, y^*)$, $\Phi_i^* = \Phi_i(x^*, y^*)$ ($i = 1, 2$).

При стандартных для теории игр ограничениях установлены достаточные условия существования введенного определения.

Литература

1. Жуковский В.И. Кооперативные игры при неопределенности. – М.: URSS, 1999.
2. Savage L.Y. The theory of statistical decision // J. American Statistic Association. – 1951. № 46. – P. 55-67.
3. Кудрявцев К.Н. О существовании гарантированных по выигрышам и рискам решений в кооперативных играх при неопределенности // Системы управления и информационные технологии. 2010. - № 1. 1(39). – С. 148-152.
4. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. - Т. 5, № 1. - С. 27-44.

О РЕШЕНИИ ЧЕТЫРЁХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.М. ТИМОТИН

ООО «Конкорд», г. Смоленск

e-mail: antej82@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *краевая задача, бианалитическая функция; сдвиг Карлемана, краевая задача Римана, контур Ляпунова.*

Статья посвящена нахождению некоторых достаточных условий разрешимости одной четырехэлементной краевой задачи типа Римана со сдвигом Карлемана для бианалитических функций.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L , а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Требуется найти все кусочно бианалитические функции класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L условиям:

$$A_1(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + B_1(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} + C_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + D_1(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial x} = g_1(t), \quad (1.1)$$

$$A_2(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial y} + B_2(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} + C_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + D_2(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial y} = ig_2(t), \quad (1.2)$$

где i – мнимая единица, взятая для удобства в дальнейших обозначениях, а $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $g_k(t)$ ($k=1,2$) – заданные на L функции класса Гельдера, $\alpha(t)$ – сдвиг контура L , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t. \quad (1.3)$$

Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что выполняется следующее «начальное условие»:

$$F^+(0) = 0. \quad (1.4)$$

Сформулированную задачу будем называть первой краевой задачей со сдвигом Карлемана в классах бианалитических функций, или короче – GK_{41} , а соответствующую ей однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) задачей GK_{41}^0 .

2. Об одном методе решения задачи GK_{41} . Будем решать задачу GK_{41} при следующих дополнительных ограничениях на коэффициенты краевых условий (1.1) и (1.2):

$$\Delta_k(t) = B_k(t)D_k[\alpha(t)] - A_k[\alpha(t)]C_k(t) \neq 0, \quad (2.1)$$

$$V_k(t) = B_k(t)C_k[\alpha(t)] - A_k[\alpha(t)]D_k(t) \equiv 0, \quad (2.2)$$

$$A_k(t) \neq 0, B_k(t) \neq 0, C_k(t) \neq 0, D_k(t) \neq 0, \quad (2.3)$$

где $k=1,2$.

Известно, что всякую исчезающую на бесконечности кусочно бианалитическую функцию $F(z)$ с линией скачков L можно представить в виде (см. [1, с. 26-27])

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $\varphi_k^+(z)$ и $\varphi_k^-(z)$ – аналитические соответственно в T^+ и T^- функции, для которых выполняются условия $P\{\varphi_k^-(z), \infty\} \geq 1+k$, $k=1,2$; здесь $P\{\varphi_k^-(z), \infty\}$ означает порядок функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z = \infty$.

С учётом представления (2.4) и соотношений

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

краевые условия (1.1) и (1.2) можно переписать соответственно в следующем виде:

$$A_1(t)\left(\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{i}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} + \varphi_1^+(t)\right) + B_1(t)\left(\frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt} + \overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt} + \varphi_1^+[\alpha(t)]\right) +$$

$$+ C_1(t)\left(\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{i}\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \varphi_1^-(t)\right) + D_1(t)\left(\frac{d\varphi_0^-[\alpha(t)]}{dt} + \overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^-[\alpha(t)]}{dt} + \varphi_1^-[\alpha(t)]\right) = g_1(t),$$

$$A_2(t)\left(\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{i}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t)\right) + B_2(t)\left(\frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt} + \overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt} - \varphi_1^+[\alpha(t)]\right) +$$

$$+ C_2(t)\left(\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{i}\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \varphi_1^-(t)\right) + D_2(t)\left(\frac{d\varphi_0^-[\alpha(t)]}{dt} + \overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^-[\alpha(t)]}{dt} - \varphi_1^-[\alpha(t)]\right) = g_2(t).$$

Соотношение (2.5) можно записать в следующем виде

$$A_1(t)\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + B_1(t)\frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt} + C_1(t)\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + D_1(t)\frac{d\varphi_0^-[\alpha(t)]}{dt} = Q_1(t),$$

где

$$Q_1(t) = g_1(t) - A_1(t)\left(\bar{i}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} + \varphi_1^+(t)\right) - B_1(t)\left(\overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt} + \varphi_1^+[\alpha(t)]\right) -$$

$$- C_1(t)\left(\bar{i}\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \varphi_1^-(t)\right) - D_1(t)\left(\overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^-[\alpha(t)]}{dt} + \varphi_1^-[\alpha(t)]\right).$$

Введя в рассмотрение обозначение $\Phi_0^\pm(z) = \frac{d\varphi_0^\pm(z)}{dz}$, равенство (2.7)

можно переписать в виде

$$A_1(t)\Phi_0^+(t) + B_1(t)\Phi_0^+[\alpha(t)] + C_1(t)\Phi_0^-(t) + D_1(t)\Phi_0^-[\alpha(t)] = Q_1(t).$$

Временно предположим, что функция $Q_1(t)$ является известной. Тогда равенство (2.9) представляет собой краевое условие четырёхэлементной краевой задачи Римана со сдвигом Карлемана относительно кусочно аналитической функции $\Phi_0(t) = \{\Phi_0^+(t), \Phi_0^-(t)\}$.

В силу условий (2.1)-(2.3) четырёхэлементная краевая задача (2.9) сводится к двухэлементной краевой задаче Римана вида (см. [2, с. 247]):

$$\Phi_0^+(t) = \frac{-C_1(t)}{A_1(t)}\Phi_0^-(t) + \frac{C_1(t)}{A_1(t)} \cdot \frac{C_1[\alpha(t)]Q_1(t) - D_1(t)Q_1[\alpha(t)]}{\tilde{\Delta}_1(t)}, \quad (2.10)$$

где

$$\tilde{\Delta}_1(t) = C_1(t)C_1[\alpha(t)] - D_1(t)D_1[\alpha(t)].$$

Для более компактной записи введём обозначения:

$$G_1(t) = \frac{-C_1(t)}{A_1(t)}; \quad (2.11)$$

$$\tilde{Q}_1(t) = \tilde{g}_1(t) - \left(\bar{t} \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} + \varphi_1^+(t) \right) + G_1(t) \cdot \left(\bar{t} \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \varphi_1^-(t) \right), \quad (2.12)$$

где

$$\tilde{g}_1(t) = \frac{C_1[\alpha(t)]g_1(t) - D_1(t)g_1[\alpha(t)]}{\tilde{\Delta}_1(t)}. \quad (2.13)$$

С учётом обозначений (2.11) и (2.12) краевое условие (2.10) можно записать в следующем виде

$$\Phi_0^+(t) = G_1(t)\Phi_0^-(t) + \tilde{Q}_1(t). \quad (2.14)$$

Далее, считая временно $\tilde{Q}_1(t)$ известной функцией и решая обычную задачу Римана (2.14) относительно кусочно аналитической функции $\Phi_0(t) = \{\Phi_0^+(t), \Phi_0^-(t)\}$, при $\tilde{\chi}_1 \geq 0$, получаем

$$\Phi_0^\pm(z) = X_1^\pm(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{Q}_1(\tau)}{X_1^\pm(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X_1^\pm(z)P_{\tilde{\chi}_1-1}(z), \quad (2.15)$$

где $\tilde{\chi}_1 = \chi_1 - 1$, $\chi_1 = \text{Ind}G_1(t)$, а $X_1^\pm(z)$ – канонические функции краевой задачи Римана (2.14); $P_{\tilde{\chi}_1-1}(z)$ – многочлен с произвольными комплексными коэффициентами степени не выше $\tilde{\chi}_1 - 1$.

Если же $\tilde{\chi}_1 < 0$, то решение задачи Римана (2.14) по-прежнему будет задаваться формулой (2.15), где $P_{\tilde{\chi}_1-1}(z) \equiv 0$, при соблюдении следующих $-\tilde{\chi}_1$ условий разрешимости:

$$\int_L \frac{\tilde{Q}_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \cdot \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, -\tilde{\chi}_1). \quad (2.16)$$

Поскольку $[\varphi_1^+(t)]^{(k)}$ и $[\varphi_1^-(t)]^{(k)}$, $k = 0, 1$, – граничные значения аналитических соответственно в T^+ и T^- функций $[\varphi_1^+(z)]^{(k)}$, $[\varphi_1^-(z)]^{(k)}$ (причём $[\varphi_1^-(z)]^{(k)}|_{z=\infty} = 0$), устремив z к $t \in L$ из (2.15) с учётом (2.12) и формул Сохоцкого-Племеля, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi_0^+(t) &= \frac{1}{2}\tilde{Q}_1(t) + \frac{X_1^+(t)}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{Q}_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - t} + X_1^+(t)P_{\tilde{\chi}_1-1}(t) = \\ &= -\bar{t} \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t) + \frac{X_1^+(t)}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\bar{\tau}}{X_1^-(\tau)} - \frac{\bar{t}}{X_1^-(t)} \right] \frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\tau - t} + \\ &+ \frac{X_1^+(t)}{2\pi i} \int_L \left[\frac{1}{X_1^-(\tau)} - \frac{1}{X_1^-(t)} \right] \varphi_1^-(\tau) d\tau - \frac{X_1^+(t)}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\bar{\tau}}{X_1^+(\tau)} - \frac{\bar{t}}{X_1^+(t)} \right] \frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\tau - t} - \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{X_1^+(t)}{2\pi i} \int_L \left[\frac{1}{X_1^+(\tau)} - \frac{1}{X_1^+(t)} \right] \frac{\varphi_1^+(\tau) d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{2} \tilde{g}_1(t) + \frac{X_1^+(t)}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-t} + X_1^+(t) P_{\tilde{z}^{-1}}(t), \\
& \Phi_0^-(t) = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}_1(t)}{G_1(t)} + \frac{X_1^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{Q}_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau-t} + X_1^-(t) P_{z_1^{-1}}(t) = \\
& = -\bar{t} \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \varphi_1^-(t) + \frac{X_1^-(t)}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\bar{\tau}}{X_1^-(\tau)} - \frac{\bar{t}}{X_1^-(t)} \right] \frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\tau-t} + \\
& + \frac{X_1^-(t)}{2\pi i} \int_L \left[\frac{1}{X_1^-(\tau)} - \frac{1}{X_1^-(t)} \right] \frac{\varphi_1^-(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{X_1^-(t)}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\bar{\tau}}{X_1^+(\tau)} - \frac{\bar{t}}{X_1^+(t)} \right] \frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\tau-t}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$-\frac{X_1^-(t)}{2\pi i} \int_L \left[\frac{1}{X_1^+(\tau)} - \frac{1}{X_1^+(t)} \right] \frac{\varphi_1^+(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{g}_1(t)}{G_1(t)} + \frac{X_1^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-t} + X_1^-(t) P_{\tilde{z}^{-1}}(t)$$

(при выводе (2.17), (2.18) учитываем, что $G_1(t) = \frac{X_1^+(t)}{X_1^-(t)}$).

Перейдём теперь к рассмотрению краевого условия (2.6). Нетрудно проверить, что в силу (2.1)-(2.3) из краевого условия (2.6) получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{t} \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t) = -\frac{C_2(t)}{A_2(t)} \left(\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{t} \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \varphi_1^-(t) \right) + \\
& + \frac{C_2(t) C_2[\alpha(t)] g_2(t) - D_2(t) \cdot g_2[\alpha(t)]}{\tilde{\Delta}_2(t)},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где

$$\tilde{\Delta}_2(t) = C_2(t) C_2[\alpha(t)] - D_2(t) D_2[\alpha(t)].$$

Для более компактной записи равенства (2.19) введём обозначения:

$$G_2(t) = \frac{-C_2(t)}{A_2(t)}; \tag{2.20}$$

$$\tilde{g}_2(t) = \frac{C_2(t) C_2[\alpha(t)] g_2(t) - D_2(t) \cdot g_2[\alpha(t)]}{\tilde{\Delta}_2(t)}. \tag{2.21}$$

С учётом обозначений (2.20), (2.21) из (2.19) получаем

$$\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{t} \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t) = G_2(t) \left(\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{t} \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \varphi_1^-(t) \right) + \tilde{g}_2(t). \tag{2.22}$$

Подставляя в (2.22) граничные значения кусочно аналитической функции $\Phi_0^\pm(z) = \frac{d\varphi_0^\pm(z)}{dz}$, после несложных преобразований получаем краевое условие обобщённой задачи Римана нормального типа для определения исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$:

$$\varphi_1^+(t) - \tilde{G}_2(t)\tilde{\varphi}_1^-(t) + \int_L A_{11}(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \int_L B_{11}(t,\tau)\tilde{\varphi}_1^-(\tau)d\tau = Q_2(t), \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(t) &= \frac{G_2(t)}{t}, \quad \tilde{\varphi}_1^-(t) = t\varphi_1^-(t), \quad \Delta(t) = G_2(t)X_1^-(t) - X_1^+(t), \\ A_{11}(t,\tau) &= \Delta(t) \left[\frac{\partial A_1^+(t,\tau)}{\partial \tau} - A_0^+(t,\tau) \right], \quad B_{11}(t,\tau) = \frac{\Delta(t)}{\tau} \left[A_0^-(t,\tau) - \frac{\partial A_1^-(t,\tau)}{\partial \tau} \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$A_k^\pm(t,\tau) = \frac{1}{4\pi i} \left[\frac{\bar{\tau}^k}{X_1^\pm(\tau)} - \frac{\bar{t}^k}{X_1^\pm(t)} \right] \frac{1}{\tau - t},$$

$$Q_2(t) = \tilde{g}_1(t) \frac{G_1(t) + G_2(t)}{4G_1(t)} - \frac{\Delta(t)}{4\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2} \tilde{g}_2(t) - \frac{1}{2} \Delta(t) P_{\chi_1-1}(t).$$

Нетрудно проверить, что $A_{11}(t,\tau), B_{11}(t,\tau) \in H_*^{(1)}(L \times L)$, $Q_2(t) \in H^{(1)}(L)$.

Пусть $\chi_2 = \text{Ind} G_2(t)$, $\tilde{\chi}_2 = \text{Ind} \tilde{G}_2(t) = \chi_2 - 1$. Тогда общее решение задачи (2.23) (в случае её разрешимости) будет задаваться формулами (см. [1, с. 91-92],):

$$\varphi_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_2(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L R_{11}^+(z,\tau) Q_2(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \beta_{1k} d_{1k}^+(z), \quad z \in T^+, \quad (2.25)$$

$$\tilde{\varphi}_1^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_2(\tau)}{\tilde{G}_2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_L R_{11}^-(z,\tau) Q_2(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \beta_{1k} d_{1k}^-(z), \quad z \in T^-, \quad (2.26)$$

где $R_{11}^\pm(z,\tau), d_{1k}^\pm(z)$ – вполне определённые функции, выражаемые через $G_j(t), g_j(t)$ ($j=1,2$), β_{1k} ($k=1,\dots,l_1$) – произвольные постоянные;

$$l_1 = \begin{cases} \tilde{\chi}_2 + \nu_2 - r_2, & \tilde{\chi}_2 \geq 0, \\ \max(0, \nu_2 - |\tilde{\chi}_2|), & \tilde{\chi}_2 \leq 0, \end{cases}$$

а ν_2 – число линейно независимых решений определённого однородного уравнения Фредгольма второго рода, r_2 – ранг определённой матрицы, причём $\nu_2 \geq r_2$ и $\beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{1l_1} = 0$ при $l_1 = 0$. Но поскольку $\tilde{\varphi}_1^-(z) = z\varphi_1^-(z)$, то из (2.26) получаем:

$$\varphi_1^-(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_2(\tau)}{\tilde{G}_2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_L R_{11}^-(z,\tau) Q_2(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \beta_{1k} d_{1k}^-(z) \right), \quad z \in T^-. \quad (2.27)$$

Подставив в свободный член $\tilde{Q}_1(t)$ краевого условия (2.14) вместо $\varphi_1^\pm(z)$ и $\frac{d\varphi_1^\pm(z)}{dz}$ граничные значения функций $\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)$, определённых по формулам (2.25) и (2.27), и их производные $\frac{d\varphi_1^\pm(z)}{dz}$, а затем решив обычную скалярную задачу Римана (2.14), найдём функции $\Phi_0^\pm(z) = \frac{d\varphi_0^\pm(z)}{dz}$. Отсюда с помощью интегрирования получаем:

$$\varphi_0^+(z) = \int_{\Gamma^+} \Phi_0^+(\xi) d\xi, \quad \varphi_0^-(z) = \int_{\Gamma^-} \Phi_0^-(\xi) d\xi, \quad (2.28)$$

где Γ^+ - произвольная гладкая кривая, лежащая в T^+ и соединяющая точки 0 и z , а Γ^- - произвольная гладкая кривая, лежащая в T^- и соединяющая точки ∞ и z .

Тогда решение искомой задачи GK_{41} в рассматриваемом случае получаем по формуле $F^\pm(z) = \varphi_0^\pm(z) + \bar{z}\varphi_1^\pm(z)$, где $\varphi_0^\pm(z)$ определяется по формуле (2.28), а $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_1^-(z)$ по формулам (2.25) и (2.27).

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.
2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА И КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

И.В. ТИХОНОВ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ, Д.Г. ЦВЕТКОВИЧ
МГУ им. М.В. Ломоносова, НИЯУ МИФИ, МПГУ, г. Москва,
e-mail: ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, dianacve@inbox.ru

УДК 517.518.82+519.65

Ключевые слова: *полиномы Бернштейна, компьютерная математика.*

Обсуждается теория классических полиномов Бернштейна и ее связи с компьютерной математикой. Показано, что естественные примеры, возникающие в теории полиномов Бернштейна, порождают нетривиальные задачи, допускающие как аналитическое описание, так и численное исследование.

Полиномы Бернштейна для функции $f \in C[0, 1]$ вводятся по правилу

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где C_n^k – обычные биномиальные коэффициенты. Полиномы $B_n(f, x)$ обладают многими замечательными свойствами, связанными с качественными характеристиками порождающей функции $f(x)$. Подробное изложение теории полиномов Бернштейна дано в [1–5].

Сейчас укажем на возможные связи между теорией полиномов Бернштейна и задачами компьютерной математики. Движение может идти в двух направлениях. С одной стороны, удобно привлекать

компьютерные средства при исследовании тех или иных соотношений, возникающих в теории полиномов Бернштейна. С другой стороны, сами полиномы служат прекрасным объектом для тестирования современных компьютерных систем с точки зрения вычислительных и графических возможностей.

Для лучшего понимания происходящего напомним теоретические основы, связанные с полиномами Бернштейна. Согласно классической теореме Бернштейна полиномы $B_n(f, x)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходятся на $[0, 1]$ к порождающей функции $f(x)$. Представление о скорости равномерной сходимости дают несколько утверждений, которые мы приведем в слегка упрощенной, удобной для восприятия форме.

Для любой функции $f \in C[0, 1]$ с модулем непрерывности $\omega(f, \delta)$ справедлива универсальная оценка Поповичу:

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Для функций, удовлетворяющих на $[0, 1]$ условию Липшица с константой $L > 0$, можно утверждать, что

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{L}{2} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Если $f \in C^2[0, 1]$, то

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{1}{8n} \max_{0 \leq s \leq 1} |f''(s)|, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Эти оценки допускают небольшие уточнения, но ничего принципиально лучшего сказать нельзя. Как видим, сходимость является довольно медленной (особенно для негладких функций), и традиционно считается, что полиномы Бернштейна малоприспособны для практических приближений.

Впрочем, есть одно исключение: если $f''(x) = 0$ на $[\alpha, \beta] \subset (0, 1)$, то

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq C(x) e^{-\gamma(x)n} \max_{0 \leq s \leq 1} |f(s)|, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad n \in \mathbf{N},$$

с некоторыми $C(x) = C(x; \alpha, \beta) > 0$, $\gamma(x) = \gamma(x; \alpha, \beta) > 0$, не зависящими от функции f . Иными словами, если функция $f(x)$ имеет в своем составе линейный кусок, то на этом участке скорость сходимости оказывается не степенной, а экспоненциальной.

Другой важный феномен, связанный с полиномами Бернштейна, состоит в возможном экспоненциальном росте коэффициентов в явной алгебраической записи

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}(f) x^k$$

при увеличении номера n . Точнее, для многих естественных функций величина

$$\mu_n(f) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_{n,k}(f)|$$

экспоненциально стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

Этот неожиданный эффект детально исследован в работе [6], посвященной полиномам Бернштейна для простого симметричного модуля

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0, 1].$$

Указанная функция весьма интересна. Она является липшицевой с константой $L = 2$, имеет в своем составе два линейных куска и точку излома $x = 1/2$. Для такой ломаной полиномы Бернштейна попарно склеиваются, т. е. $B_{2m}(f, x) = B_{2m+1}(f, x)$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Как следует из результатов [6], величина $\mu_n(f)$ подчинена асимптотике

$$\mu_n(f) \sim \frac{16\sqrt{2}}{9\pi} \frac{(2\sqrt{2})^n}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

и уже при не очень больших номерах явная алгебраическая запись полиномов $B_n(f, x)$ содержит огромные коэффициенты. Картина же приближения функции $f(x) = |2x - 1|$ весьма неравномерна. На крыльях модуля, на некотором удалении от точки излома происходит стремительное сближение полиномов Бернштейна $B_n(f, x)$ с функцией $f(x) = |2x - 1|$. Здесь проявляется экспоненциальный характер стремления к нулю уклонения $|B_n(f, x) - f(x)|$. Но в малой окрестности точки излома зазор остается видным невооруженным глазом на сверхбольших полиномах типа $B_{100}(f, x)$.

Еще несколько лет назад практическое вычисление подобных полиномов и построение их графиков представляло значительные трудности. В последнее время ситуация принципиально изменилась. Например, стандартные версии *Mathematica 8* с привлечением базовых встроенных функций без труда справляются с такими задачами. Теоретические расчеты показывают, что для приближения функции $f(x) = |2x - 1|$ в точке $x = 1/2$ с погрешностью менее 10^{-2} требуется полином с номером $n = 6366$ (это точный результат). Большинство коэффициентов этого полинома невообразимо. Однако сам полином удалось смоделировать в среде *Mathematica 8* на стандартном ноутбуке и получить точный график по явной алгебраической записи при том, что файл с коэффициентами «весит» порядка 130 МБ.

Проблему роста коэффициентов можно трактовать как эффект неустойчивости, когда при малых «шевелениях» порождающей функции коэффициенты полиномов Бернштейна могут сколь угодно сильно измениться. В качестве примера укажем пару функций $f(x) = |2x - 1|$ и $f_1(x) = |2x - 0.999|$. При номерах $n \geq 30$ явные записи их полиномов Бернштейна, сохраняя некие структурные сходства, имеют совсем разные коэффициенты. Попросту говоря, малейшая погрешность,

допущенная при записи функции, может фатально сказаться на явной алгебраической записи полиномов Бернштейна. Численные эксперименты в этом направлении весьма интересны.

Компьютерное моделирование дает новые ориентиры и в самих аналитических исследованиях. Так, некоторое время назад для полиномов Бернштейна функции $f(x) = |2x-1|$ авторам удалось установить оценки уклонения

$$\frac{1}{2(m+2)\sqrt{\pi m}} \frac{(4x(1-x))^{m+1}}{(2x-1)^2 + \frac{6x(1-x)}{m+2}} < B_{2m}(f, x) - f(x) < \frac{1}{2(m+1)\sqrt{\pi m}} \frac{(4x(1-x))^{m+1}}{(2x-1)^2 + \frac{x(1-x)}{m+1}},$$

верные при всех $x \in (0, 1)$ и всех $m \in \mathbb{N}$. Эти оценки весьма точны и хорошо передают суть происходящего. Однако компьютерный расчет показывает, что оценку сверху можно заменить следующей оценкой феноменальной точности:

$$B_{2m}(f, x) - f(x) < \frac{1}{2(m+1)\sqrt{\pi m}} \frac{(4x(1-x))^{m+1}}{(2x-1)^2 + \frac{2x(1-x)}{m+1}}, \quad x \in (0, 1), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Изменение всего одного множителя в знаменателе дает почти идеальное совпадение с приближаемой величиной. Аналитическое обоснование такой улучшенной формулы требует особых усилий и представляется серьезным «спортивным» вызовом.

Пример с «модулем» весьма характерен. Выявленные на нем закономерности переносятся *mutatis mutandis* на другие кусочно линейные функции. Изложенные соображения могут представлять интерес и в задачах компьютерного дизайна, где полиномы Бернштейна активно используются в записи кривых Безье (см. [7]).

Литература

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 688 с.
2. Виденский В.С. Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1990. – 64 с.
3. Lorentz G.G. Bernstein Polynomials. – Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. – x+130 p.
4. Davis P.J. Interpolation and Approximation. – N.Y.: Dover, 1975. – xvi+394 p.
5. DeVore R.A., Lorentz G.G. Constructive Approximation. – Berlin, Heidelberg, N.Y.: 1993. – x+450 p.
6. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. - 2012. - Т. 15, № 26. - С. 6–40.
7. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 2001. – 575 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕКУЛЬТИВАЦИИ ПОЧВ ПОЛОСЫ ОТВОДА ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ

Э.В. ЧЕБОТАРЕВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e-mail: elvchb@mail.ru

УДК 51-74

Ключевые слова: *математическое моделирование в экологии, модель рекультивации почв.*

В докладе приводится одномерная математическая модель процесса очистки с помощью сорбентов загрязненных почв, прилегающих к железнодорожному полотну.

Почва, прилегающая к железнодорожным путям, подвергается загрязнению тяжелыми металлами, нефтепродуктами и другими вредными веществами. Такие загрязнения приводят к тяжелым экологическим последствиям. При планировании мероприятий по очистке почв полосы отвода возникает необходимость в адекватных математических моделях последствий применения различных методов обезвреживания почв.

Предлагаемая нами математическая модель описывает процессы очистки почв полосы отвода с помощью природных сорбентов - поглотителей загрязнений, изготовленных из природных минералов [1].

Для моделирования процессов очистки загрязненных почв, прилегающих к железнодорожному полотну, нами предлагается использовать следующую математическую модель:

$$N(t) = N_0 - N_1(t) - N_2(t), \quad (1)$$

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = a(N(t) - N_2(t) - bN_1(t)), \quad (2)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -c(N(t) - N_1(t)), \quad (3)$$

$$N(0) = N_0, N_1(0) = 0, N_2(0) = 0. \quad (4)$$

Здесь $N(t)$ - концентрация загрязняющего вещества в почве в момент времени t , $N_1(t)$ - часть загрязняющего вещества, поглощенная сорбентом, $N_2(t)$ - часть загрязняющего вещества, разложившаяся под действием физико-химических факторов, N_0 - концентрация загрязняющего вещества в почве в начальный момент времени, коэффициенты a, b, c определяются исходя из сорбционных свойств

сорбента, зависящих от свойств грунта, а также свойств загрязняющего вещества.

На рисунке 1 представлены результаты математического моделирования изменения концентрации нефтепродуктов и тяжелых металлов в почве при внесении сорбента на основе бентонита, а также результаты экспериментов.

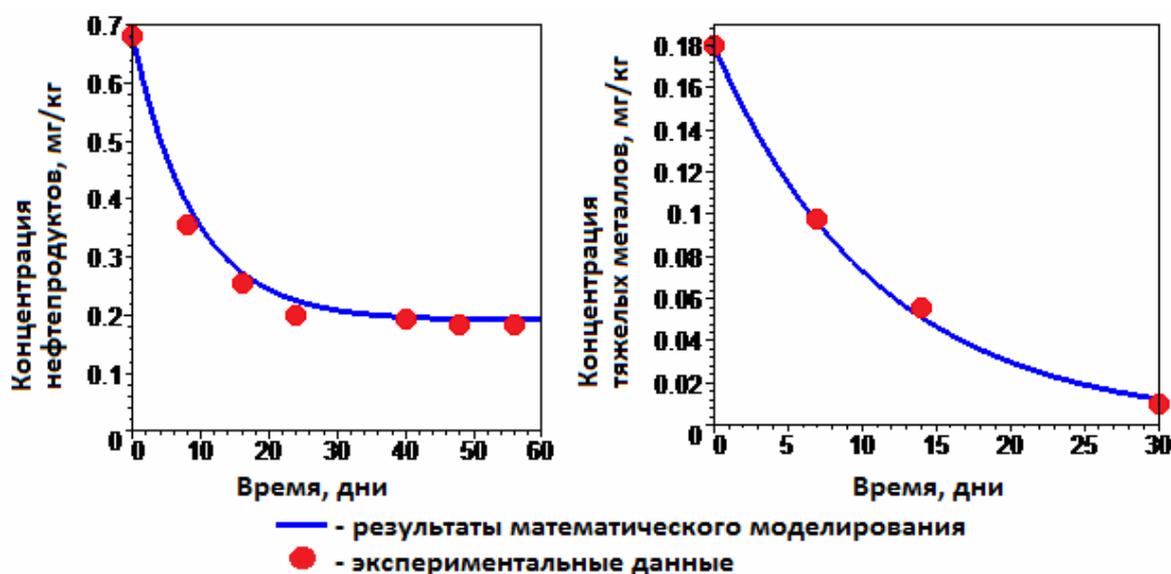


Рис. 1. Сравнение результатов экспериментов и математического моделирования

Как правило, концентрация загрязнений вдоль железнодорожных путей не меняется. Однако по мере удаления от железной дороги концентрация загрязняющих веществ в почве снижается. Поэтому построенная математическая модель может быть использована для моделирования изменения концентрации загрязняющих веществ в почве при непосредственном внесении сорбента в полосу отвода. В этом случае неизвестные функции $N(t), N_1(t), N_2(t)$ снабжаются пространственным параметром x , а в начальном условии (4) константа N_0 заменяется функцией от x .

Литература

1. Крошечкина И.Ю., Зубрев Н.И., Чеботарева Э.В. Снижение нефтяного загрязнения в почвенном слое полосы отвода железнодорожного транспорта // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2012. – № 02(06).– С. 206–215.
2. Водопьянов В.В., Гузаиров М.Б., Киреева Н.А. Математическое моделирование процессов в антропогенно нарушенных почвенных биосистемах. – М.: Машиностроение, 2008.

О НУЛЯХ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ¹

Ф.А. ШАМОЯН, В.А. БЕДНАЖ, О.В. ПРИХОДЬКО

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского,
e-mail: shamoyanfa@yandex.ru, verabednazh@rambler.ru, olyaprix@mail.ru

УДК 517.5

Ключевые слова: *верхняя полуплоскость, голоморфные функции, корневые множества.*

В докладе получено полное описание корневых множеств функций из классов $N_\alpha(\mathbf{C}_+)$ и $\tilde{N}_\alpha(\mathbf{C}_+)$.

Пусть $\mathbf{D} = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости \mathbf{C} , $\mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C} : \text{Im } z > 0\}$ – верхняя полуплоскость. Если G – некоторая область, $G \subset \mathbf{C}$, то обозначим через $H(G)$ – множество голоморфных в G функций.

В монографии [1] Р. Неванлинна ввёл класс функций N_α :

$$N_\alpha(\mathbf{D}) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r)^\alpha \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi dr < +\infty \right\}, \alpha > -1,$$

где $\ln^+ |a| = \max_{a \in \mathbf{C}} (\ln |a|, 0)$, и получил необходимое условие на нули функции из класса N_α .

В дальнейшем первый автор (см. [2]) установил, что найденное Р. Неванлинной необходимое условие является также достаточным, доказав следующий результат: для того, чтобы существовала функция $f \in N_\alpha(\mathbf{C}_+)$ такая, что $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $f(z) \neq 0$ при $z \neq z_k$, $k = 1, 2, \dots$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2}$. При этом им было построено факторизационное представление класса N_α (см. [3]).

В работе [4] (см. также [5]) А. Джрбашян распространил некоторые результаты первого автора на случай полуплоскости, изучив класс $N_{\alpha,\beta}(\mathbf{C}_+)$:

$$N_{\alpha,\beta}(\mathbf{C}_+) = \left\{ f \in H(\mathbf{C}_+) : \int_{\mathbf{C}_+} \frac{(\text{Im } \zeta)^\alpha}{1 + (\text{Im } \zeta)^\beta} |\ln |f(\zeta)|| dm_2(\zeta) < +\infty \right\},$$

при существенных ограничениях на поведение функции в бесконечности и $0 \leq \beta < \alpha + 1$. Однако полным аналогом класса N_α в случае

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 13-01-97508 «Линейные операторы, вопросы аппроксимации и интерполяции в весовых пространствах аналитических функций».

полуплоскости, на наш взгляд, являются следующие два класса функций $N_\alpha(\mathbf{C}_+)$ и $\tilde{N}_\alpha(\mathbf{C}_+)$:

$$N_\alpha(\mathbf{C}_+) = \left\{ f \in H(\mathbf{C}_+): \int_{\mathbf{C}_+} \frac{\ln^+ |f(\zeta)| d\varphi}{1 + |\zeta|^\alpha} dm_2(\zeta) < +\infty \right\},$$

$$\tilde{N}_\alpha(\mathbf{C}_+) = \left\{ f \in H(\mathbf{C}_+): \int_{\mathbf{C}_+} (\operatorname{Im} \zeta)^\alpha \ln^+ |f(\zeta)| d\varphi dm_2(\zeta) < +\infty \right\},$$

где dm_2 – плоская мера Лебега на \mathbf{C}_+ , поскольку в данном случае граница области состоит из двух частей, $z = \infty$, и конечных точек вещественной оси.

В работе получено полное описание корневых множеств функций из классов $N_\alpha(\mathbf{C}_+)$ и $\tilde{N}_\alpha(\mathbf{C}_+)$. В частности, устанавливаются следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbf{C}_+$, причём $z_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) существует функция $f \in N_\alpha(\mathbf{C}_+)$ такая, что $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $f(z) \neq 0$ при $z \neq z_k$, $k = 1, 2, \dots$;

2)
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^{\alpha+2}} < +\infty.$$

Теорема 2. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbf{C}_+$, причём $|z_k| \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) существует функция $f \in N_\alpha(\mathbf{C}_+)$ такая, что $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $f(z) \neq 0$ при $z \neq z_k$, $k = 1, 2, \dots$;

2)
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\operatorname{Im} z_k)^{\alpha+2} < +\infty.$$

Получены аналоги этих теорем и для класса $\tilde{N}_\alpha(\mathbf{C}_+)$.

Литература

1. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции / Пер. с нем. (М.В. Келдыш, М.А. Лаврентьев). – М.: ГИТЛ, 1941. – 388 с.
2. Шамоян Ф.А. Факторизационная теорема М.М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических функций с мажорантой конечного роста // Известия АН Арм. ССР. Математика. – 1978. – Т. 13, № 5. – С. 405-422.
3. Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н. Введение в теорию весовых L^p -классов мерморфных функций // РИО БГУ. – 2009. – Т. 13, № 5. – 152 с.
4. Djrbashian A.M. Functions of α -bounded type in the half space. Advances complex analysis and its Applications. Springer, 4, 2005. – 194 p.
5. Джрбашян А.М. Параметрические представления классов мерморфных функций с неограниченными характеристиками Цудзи // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1987. – Т. 22, № 5. – С. 451-477.

К ВОПРОСУ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ ФУНКЦИЙ¹

Ф.А. ШАМОЯН, С.М. КУРИЛЕНКО

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского,
e-mail: shamoyanfa@yandex.ru, SergKurilenko@gmail.com

УДК 517.55

Ключевые слова: *единичный шар, аналитическая функция, пространства Соболева, оператор Теплица, радиальная производная, плюрисубгармоническая функция.*

В работе получено полное описание плюригармонических на единичной сфере N -мерного комплексного пространства функций, при которых теплицев оператор с соответствующим символом ограничен в аналитических пространствах С.Л. Соболева.

Пусть $B_N = \{z \in C^N : |z| < 1\}$ - единичный шар в N -мерном комплексном пространстве C^N , S_N - его граница. Пусть ω - функция типа модуля непрерывности на $R_+ = [0, +\infty)$. Символом $H(B_N)$ обозначим множество всех голоморфных в B_N функций.

Если $f \in H(B_N)$ имеет однородное разложение: $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$, $z \in B_N$, и $\beta \geq 0$, то дробной производной порядка β в смысле Римана-Лиувилля назовем функцию

$$D^\beta f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\beta + k + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(k + 1)} f_k(z), \quad z \in B_N.$$

ω -весовым пространством Лебега назовем пространство с нормой

$$\|f\|_{L_\omega(\alpha)} = \int_{B_N} |f(\zeta)| \omega(1-|\zeta|)(1-|\zeta|)^{\alpha-1} d\nu(\zeta) < +\infty,$$

где $d\nu(\zeta)$ - $2N$ -мерная мера Лебега в B_N .

Пусть далее $H(B_N) \cap L_\omega(\alpha) = A_\omega(\alpha)$, $\alpha > 0$; обозначим через $A_\omega(\alpha, n)$ следующее пространство голоморфных в B_N функций

$$A_\omega(\alpha, n) = \{f \in H(B_N) : \|f\|_{A_\omega(\alpha, n)} = \int_{B_N} |D^n f(\zeta)| \omega(1-|\zeta|)(1-|\zeta|)^{\alpha-1} d\nu(\zeta) < +\infty\}.$$

Определим пространство Λ_ω^α голоморфных в B_N функций следующим образом:

¹ Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 13-01-97508)

$$\Lambda_\omega^\alpha = \left\{ f \in H(B_N) : \sup_{z \in B_N} \left(|D^{\alpha+2} f(z)| \frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)} \right) \right\}.$$

Определим оператор Теплица с символом на пространстве $C(B_N \cup S_N) \cap H(B_N)$:

$$T_\varphi(f)(z) = \int_{S_N} \frac{f(\zeta)\varphi(\zeta)}{(1-\langle z, \zeta \rangle)^N} d\sigma(\zeta), \quad z \in B_N.$$

Основным результатом работы является доказательство следующей теоремы:

Теорема. Пусть $\alpha \geq 0$, причем если $\alpha = 0$, то $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} < +\infty$, ω - функция типа модуля непрерывности на R_+ , h - плюригармоническая функция из $L^1(S_N)$, тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) T_h является ограниченным оператором в пространстве $A_\omega(\alpha, n)$;
- 2) функцию h можно представить в виде $h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}$, $\zeta \in S_N$, где при этом

а) при $n > \alpha + N$: h_1 имеет аналитическое продолжение в B_N , $h_1 \in A_\omega(\alpha, n)$, а h_2 является граничным значением некоторой ограниченной аналитической функции в B_N ;

б) при $n < \alpha$: h_1 и h_2 - граничные значения аналитических в B_N функций, кроме того h_1 мультипликатор пространства $A_\omega(\alpha, n)$, а $D^{-n}h_2 \in \Lambda_\omega^\alpha$, D^{-n} - оператор, обратный к оператору D^n ;

в) при $n = \alpha + \beta$, $\beta \in [1, N]$, h_1 и h_2 - граничные значения аналитических в B_N функций, h_1 - мультипликатор пространства $A_\omega(\alpha, n)$, а $D^{-n}h_2 \in \Lambda_\omega^\alpha$, при этом выполняется условие

$$\sup_{t \in B_N} \sup_{s \in \mathbb{Z}^N, |s|=k} \left(\omega(1-|t|)(1-|t|)^k \left| \frac{\partial^s h_2(t)}{\partial t^s} \right| \right) \leq +\infty.$$

Замечание. Данная теорема в одномерном случае установлена в работе [2].

Литература

1. Kehe Zhu, Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball, Springer. – 2005 - 274 p.
2. Шамоян Ф.А. Об ограниченности Тёплицевых операторов в весовых соболевских пространствах голоморфных в круге функций // Записки научных семинаров ПОМИ. - 2011. - Т. 389, Вып. 39. – С. 257-282.
3. Антоненкова О.Е., Шамоян Ф.А. Преобразование Коши линейных непрерывных функционалов и проекторы в весовых пространствах аналитических функций // Сиб. мат. журн. - 2005. - Т. 46, № 6. - С. 1208-1234.

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ ПРОСТРАНСТВ $H_{\tilde{\alpha}}^{\bar{p}}$ И $H^{\bar{p}}(\tilde{\alpha})$ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛИКРУГЕ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ¹

Р.Ф. ШАМОЯН, С.М. КУРИЛЕНКО

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского,
e-mail: rsham@mail.ru, SergKurilenko@gmail.ru

УДК 517.55

Ключевые слова: *единичный поликруг, пространства типа Бергмана, смешанная норма, мультипликатор.*

В работе получен ряд новых утверждений о мультипликаторах типа Бергмана весовых пространств аналитических в поликруге функций.

Пусть $U^n = \{z \in C^n : z = (z_1, \dots, z_n), |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$ - единичный полидиск комплексного пространства C^n , $T = \{|z_j| = 1\}$ - единичная окружность, $H(U^n)$ - пространство аналитических в U^n функций. Введем классы функций:

$$H^{\bar{p}}(\tilde{\alpha}) = \{f \in H(U^n) : (\int_U (1 - |\xi_n|)^{\tilde{\alpha}_n} (\int_U (1 - |\xi_{n-1}|)^{\tilde{\alpha}_{n-1}} \dots (\int_U (1 - |\xi_1|)^{\tilde{\alpha}_1} |f(\xi_1, \dots, \xi_n)|^{p_1} \times \\ \times dm_2(\xi_1))^{p_2} \dots dm_2(\xi_{n-1}))^{p_{n-1}} dm_2(\xi_n))^{p_n} < +\infty\}.$$

$$H_{\tilde{\alpha}}^{\bar{p}} = \{f \in H(U^n) : \sup_{r_j < 1} (\int_T \dots (\int_T |f(r\xi)|^{p_1} d\xi_1)^{p_2} d\xi_2)^{p_3} \dots d\xi_n)^{p_n} \prod_{j=1}^n (1 - r_j)^{\alpha_j} < +\infty\},$$

где $p_j \in (0; \infty)$; $\alpha_j \geq 0$, $\tilde{\alpha} > -1$, $j = 1, \dots, n$, $I^n = (0, 1)^n$, $n \geq 1$.

При $p_i \geq 1$ $H_{\tilde{\alpha}}^{\bar{p}}$ и $H^{\bar{p}}(\tilde{\alpha})$ - Банаховы пространства. Пространства функций $H_{\tilde{\alpha}}^{\bar{p}}$ и $H^{\bar{p}}(\tilde{\alpha})$ при $n=1$ совпадают с хорошо известными пространствами Бергмана и Харди (см. [1]) в единичном круге. Вопрос об их исследовании возникает естественным образом. Функцию $M_p(f, r)$, классы $A_{\gamma}^{p,q}$ и $F_{\gamma}^{p,q}$ определим так же, как и в [4].

Нами будет приведен целый ряд новых утверждений о коэффициентных мультипликаторах этих аналитических классов в единичном круге или из классических пространств Харди H^p и со смешанной нормой в поликруге, тем самым обобщаются некоторые ранее хорошо известные утверждения из [1] в этом направлении. В частности справедлива теорема.

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-97508)

Теорема 1. 1) Если $0 < p, q < \infty$, $g \in H(U^n)$ и $g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$,

причем $g(z)$ является мультипликатором из $H^{\bar{p}}(\bar{\alpha})$ в $A_{\gamma}^{p,q}(U^n)$, то

$$\sup_{r \in I^n} M_p(D^{\beta} g, r) \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\gamma + \beta_j + 1 - 2/p_j - \alpha_j/p_j} < \infty,$$

для всех $\beta_j > \beta_0, j = 1, \dots, n$ для некоторого достаточно большого β_0 , и всех $0 < p_j < \infty, \alpha_j > -1, \gamma > 0, j = 1, \dots, n$.

2) Если $0 < p, q < \infty$, $g \in H(U^n)$ и $g(z) = \sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0} c_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, причем

$g(z)$ является мультипликатором из $H^{\bar{p}}(\bar{\alpha})$ в $F_{\gamma}^{p,q}(U^n)$, то при $q \leq p$

$$\sup_{r \in I^n} M_p(D^{\beta} g, r) \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\gamma + \beta_j + 1 - 2/p_j - \alpha_j/p_j} < \infty,$$

для всех $\beta_j > \beta_0$, для некоторого достаточно большого β_0 , и всех $0 < p_j < \infty, \alpha_j > -1, \gamma > 0, j = 1, \dots, n$.

Литература

1. Шведенко С.В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ, 23, ВИНТИ. - М., 1985. - С. 3–124.
2. Ярославцева О.В. О мультипликаторах в некоторых анизотропных пространствах аналитических функций // Исследования по линейным операторам и теории функций. 26, Зап. научн. сем. ПОМИ, 255, ПОМИ. - СПб., 1998. - С. 244–248
3. Шамоян Ф.А., Ярославцева О.В. Непрерывные проекторы, двойственность и диагональное отображение в весовых пространствах голоморфных функций со смешанной нормой // Исследования по линейным операторам и теории функций. 25, Зап. научн. сем. ПОМИ, 247, ПОМИ. - СПб., 1997. – С. 268–275.
4. Шамоян Р. О мультипликаторах одного класса аналитических в поликруге функций // Известия Вузов. Математика. - 2000.

ОЦЕНКИ УКЛОНЕНИЙ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ОТ ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В. Б. ШЕРСТЮКОВ

НИЯУ МИФИ, г. Москва,
e-mail: shervb73@gmail.com

УДК 517.518.82

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, условие Липшица, биномиальная сумма Муавра–Пуанкаре.

Приведены уточненные оценки уклонений полиномов Бернштейна от липшицевых функций.

Классические полиномы Бернштейна для функции $f \in C[0,1]$ определяются формулой

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N},$$

с обычными биномиальными коэффициентами C_n^k .

Как известно (см. [1], [2]), при $n \rightarrow \infty$ полиномы $B_n(f, x)$ сходятся равномерно на $[0,1]$ к порождающей функции $f(x)$. Если эта функция удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|, \quad x, y \in [0,1],$$

с константой $L > 0$, то справедлива универсальная оценка уклонения (см., например, [3]):

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}, \quad x \in [0,1], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Обсудим вопрос об уточнении этого соотношения при заданном значении $n \in \mathbf{N}$.

Зафиксируем номер $n \in \mathbf{N}$ и обозначим через $\theta_n > 0$ наименьшее возможное число в уточненной оценке

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq L \theta_n, \quad x \in [0,1],$$

которая должна выполняться всюду на $[0,1]$ для всех функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Липшица с константой $L > 0$. Ясно, что θ_n не зависит от выбора $L > 0$ и

$$0 < \theta_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Требуется указать истинное значение θ_n для каждого $n \in \mathbf{N}$. Полный ответ на поставленный вопрос выглядит так.

Теорема. Значения θ_n вычисляются в зависимости от четности n по следующему правилу.

Если $n = 2m + 1$ – нечетное число, то

$$\theta_n = \theta_{2m+1} = 2^{-(2m+1)} C_{2m}^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Все эти значения достигаются в уточненной оценке на общей функции $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$ с константой Липшица $L = 1$.

Если $n = 2m$ – четное число, то

$$\theta_n = \theta_{2m} = \frac{m^m (m+1)^{m+1}}{(2m+1)^{2m+1}} C_{2m}^m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Каждое из этих значений достигается в уточненной оценке на своей функции $f_n(x) = f_{2m}(x) = \left| x - \frac{m}{2m+1} \right|$, $m = 1, 2, \dots$, с константой Липшица $L = 1$.

Значения θ_n образуют строго убывающую последовательность

$$\frac{1}{2} = \theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \dots > \theta_n > \theta_{n+1} > \dots$$

с асимптотикой

$$\theta_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

независимо от четности n .

Доказательство основано на формуле Муавра–Пуанкаре для биномиальной суммы

$$\sum_{k=0}^n C_n^k |k - nx| x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

вычисляемой на $[0, 1]$. Подробнее про формулу Муавра–Пуанкаре см. [4]. Отметим, что основные элементы, использованные при доказательстве теоремы, имелись еще в известной работе Поповичу [5]. Однако подобный вопрос в [5] не ставился и результат не формулировался.

Автор признателен С. А. Теляковскому за постановку задачи и обсуждения.

Литература

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 688 с.
2. Виденский В.С. Многочлены Бернштейна: учебное пособие к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ им. А.И.Герцена, 1990. – 64 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 1. – М.: ГИФМЛ, 2-е изд., 1962. – 464 с.
4. Diaconis P., Zabell S. Closed form summation for classical distributions: variations on a theme of de Moivre // Statistical Science. - 1991. - Vol. 6, № 3. - P. 284 - 302.
5. Popoviciu T. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica. -1935. - Vol. 10. - P. 49–54.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

М.Ф. ШТЫКОВА¹, А.В. КОНАШЕНКО²

¹Негосударственное образовательное учреждение
«Физико-математический лицей при МИФИ», г.Смоленск¹

²Смоленский государственный университет, г.Смоленск²
e-mail: shtykova97@yandex.ru; andrey_konashenko@mail.ru

УДК 514.172.45

Ключевые слова: *ортогональное проектирование, экстремальные значения проекций, вероятности наборов граней.*

В работе изучается площадь ортогональной проекции выпуклого многогранника на плоскость. Вычислены вероятности наборов при случайном изотропно распределённом направлении проектирования. Доказано, что множество точек M , расстояние от которых до фиксированной точки O обратно площади проекции выпуклого многогранника P на плоскость, перпендикулярную OM , образует поверхность центрально симметричного выпуклого многогранника P_{pr} .

Определение устойчивых, неустойчивых и абсолютно неустойчивых наборов граней. Набор граней γ будем называть *устойчивым*, если существует вектор n_0 и существует $\varphi > 0$ такие, что для всех векторов n , для которых $n \wedge n_0 < \varphi$, видимыми являются грани набора γ . Набор граней γ назовём *абсолютно неустойчивым*, если единственно направление проектирования, при котором набор видимых граней это γ . *Неустойчивым* назовём набор граней, для которого при $\forall \varphi > 0$ и $\forall n, n \wedge n_0 < \varphi$ существуют n , для которых набор γ сохраняется, и такие, для которых набор меняется. Соответствующие направления проектирования - устойчивые, абсолютно неустойчивые и неустойчивые.

Вероятности наборов граней. Пусть направление проектирования случайно и распределено изотропно.

Теорема 1. 1. Вероятность того, что грань Γ_i видима, равна 0,5 для любой грани Γ_i .

2. Вероятность того, что набор видимых граней есть данный устойчивый набор $\{\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}, \dots, \Gamma_{i_r}\}$, равна $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - (n-2)\pi}{4\pi}$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ - углы сферического многогранника $\sigma_{i_1}^+ \cap \sigma_{i_2}^+ \cap \dots \cap \sigma_{i_r}^+$ (вероятности неустойчивых наборов равны нулю).

3. Вероятность того, что данная вершина многогранника видима, равна $\frac{1}{4\pi} S\left(\bigcup_{k=1}^r \sigma_{i_k}^+\right) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r} (-1)^{r-1} S\left(\bigcap_{j=1}^k \sigma_{i_j}^+\right)$, где $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}, \dots, \Gamma_{i_r}$ - все грани многогранника, содержащие данную вершину. Вероятность того, что эта вершина является внутренней точкой видимой части, равна $\frac{1}{4\pi} S\left(\bigcap_{k=1}^r \sigma_{i_k}^+\right)$.

4. Вероятность того, что ребро являющееся пересечением граней $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}$, видимо, равна $\frac{1}{4\pi} S(\sigma_{i_1}^+ \cup \sigma_{i_2}^+) = \frac{1}{4\pi} (S(\sigma_{i_1}^+) + S(\sigma_{i_2}^+) - S(\sigma_{i_1}^+ \cap \sigma_{i_2}^+))$. Вероятность того, что это ребро лежит внутри видимой части поверхности, равна $S(\sigma_{i_1}^+ \cap \sigma_{i_2}^+)$.

Доказательство. Первый пункт теоремы следует из того, что множество концов радиус-векторов, задающих направления

проектирования, при которых видима данная грань, является полусферой. Второй пункт вытекает из формулы для площади сферического многоугольника ([3, с. 207]). Третий и четвёртый пункты получаются из формулы включения и исключения для площади объединения множеств.

Отметим, что углы областей на сфере могут быть подсчитаны на стереографической проекции, поскольку при стереографической проекции сохраняются величины углов.

Пусть n_1, n_2, \dots, n_m - единичные векторы внешних нормалей граней $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$, и пусть S_1, S_2, \dots, S_m - площади этих граней соответственно. Изучим свойства площади проекции $S(n)$ многогранника P на плоскость π как функции направления проектирования n .

Предложение.

1) $S(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m S_i |\langle n_i, n \rangle|$, где $\langle \dots \rangle$ - скалярное произведение векторов;

2) $S(n) = \langle s(n), n \rangle$, где $s(n) = \sum_{i: \langle n_i, n \rangle > 0} S_i n_i$.

Доказательство. Площадь проекции грани $\Gamma_i = S_i \cos \gamma_i = S_i |\langle n_i, n \rangle|$, где γ_i - угол между плоскостью грани Γ_i и плоскостью проекции π . В каждую внутреннюю точку проекции многогранника P на плоскость π проектируются ровно две точки его поверхности. Следовательно, площадь проекции $S(n)$ равна половине суммы площадей $S_i |\langle n_i, n \rangle|$ проекций граней $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$. С другой стороны, площадь проекции P на плоскость π равна сумме площадей проекций тех граней, внешние нормали которых образуют острый или прямой угол с вектором n .

Следовательно, $S(n) = \sum_{i: \langle n_i, n \rangle > 0} S_i |\langle n_i, n \rangle| = \langle s(n), n \rangle$.

Функции описанного в предложении вида появляются и в ряде других задач.

Примеры

1. Пусть в пространстве зафиксирована точка O и конечный набор точек A_1, A_2, \dots, A_m , отличных от O . Будем рассматривать всевозможные плоскости π , проходящие через точку O . Пусть S_1, S_2, \dots, S_m - длины векторов $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_m}$ и n_1, n_2, \dots, n_m - единичные векторы, сонаправленные этим векторам. Тогда сумма расстояний от точек A_1, A_2, \dots, A_m до плоскости π , перпендикулярной единичному вектору n , равна $\sum_{i=1}^m S_i |\langle n_i, n \rangle|$.

2. Пусть в пространстве зафиксирована точка A и конечный набор плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$, проходящих через точку O . Тогда сумма расстояний от точки A до плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$, равна $\sum_{i=1}^m S_i |\langle n_i, n \rangle|$, где

n_1, n_2, \dots, n_m – единичные векторы нормалей этих плоскостей $n = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$,

$$S = |\overrightarrow{OA}|.$$

Основное свойство функции $S(n)$ следующее.

Теорема 2. Множество $P_{pr} = \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = \lambda n, n \in \sigma, 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{S(n)} \right\}$ есть

центрально симметричный выпуклый многогранник с центром O . Для любой точки M поверхности многогранника P_{pr} площадь проекции многогранника P на плоскость π , перпендикулярную прямой OM , равна $1/OM$.

(Здесь и далее сферу σ отождествляем с множеством единичных векторов с началом в точке O).

Доказательство. Снова рассмотрим разбиение сферы σ плоскостями $\pi_i = \left\{ M \mid \langle n_i, \overrightarrow{OM} \rangle = 0 \right\}$, $i = 1, 2, \dots, i_m$, параллельными граням многогранника P . Эти плоскости разбивают сферу σ на области $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$, каждая из которых есть множество вида $\delta_i = \{n \in \sigma, n_i, n \geq 0, i \in J_i\}$ для некоторого множества индексов $J_i \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ (это те области, которые соответствуют устойчивым наборам видимых граней). Функция $s(n) = \sum_{i: \langle n_i, n \rangle > 0} S_i n_i$ на множествах $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ принимает постоянные

значения, которые мы обозначим через a_1, a_2, \dots, a_k . Множество

$\Pi_l = \left\{ M \mid a_l, OM = 1 \right\}$ есть плоскость, перпендикулярная вектору a_l , расстояние от которой до точки O равно $1/a_l$. В силу пункта 2

предложения $\left\langle \frac{s(n)}{S(n)}, n \right\rangle = 1$, т.е. $\left\langle a_l, \frac{n}{S(n)} \right\rangle = 1$ при $n \in \delta_l$. Следовательно,

конец вектора $\frac{n}{S(n)}$ лежит в плоскости Π_l при $n \in \delta_l$. Рассмотрим

выпуклый многогранник, являющийся пересечением полупространств

$\Pi_l = \left\{ M \mid \langle a_l, \overrightarrow{OM} \rangle \leq 1 \right\}$, $l = 1, 2, \dots, l_k$. При $n \in \delta_l$ имеем:

$$\left\langle a_p, \frac{n}{S(n)} \right\rangle = \frac{1}{S(n)} \sum_{i \in J_p} S_i \langle n_i, n \rangle \leq \frac{1}{S(n)} \sum_{i: \langle n_i, n \rangle > 0} S_i \langle n_i, n \rangle = \left\langle a_l, \frac{n}{S(n)} \right\rangle = 1$$

для всех $p = 1, 2, \dots, m$. Поэтому концы векторов $\frac{n}{S(n)}$, $n \in \sigma$ описывают

поверхность многогранника $\bigcap_{l=1}^k \Pi_l$. С другой стороны,

$$\bigcap_{l=1}^k \Pi_l = \bigcap_{l=1}^k \left\{ M \mid \langle a_l, \overrightarrow{OM} \rangle \leq 1 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{l=1}^k \left\{ M \mid \langle a_l, \overrightarrow{OM} \rangle \leq 1, \overrightarrow{OM} \uparrow \uparrow n, n \in \sigma_l \right\} = \bigcup_{l=1}^k \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = \mu \frac{n}{S(n)}, 0 \leq \mu \leq 1, n \in \sigma_l \right\} = \\
&= \bigcup_{l=1}^k \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = \lambda n, n \in \sigma_l, 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{S(n)} \right\} = P_{pr}.
\end{aligned}$$

Второе утверждение теоремы следует из того, что $|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{S(n)}$, при $\overrightarrow{OM} = \frac{n}{S(n)}$, $n \in \sigma$.

Таким образом, откладывая от точки O в направлении единичных векторов n отрезки длины, обратной площади проекции многогранника P на плоскость, перпендикулярную вектору n , получим выпуклый многогранник P_{pr} . На рисунке 1 изображён многогранник P_{pr} в случае, когда P – тетраэдр.

Опишем более подробно вершины, рёбра и грани многогранника P_{pr} . Как видно из доказательства теоремы 2, грани многогранника P_{pr} лежат в плоскостях, перпендикулярных векторам a_l , расстояния от которых до точки O равны $1/|a_l|$, $l = 1, 2, \dots, l_k$. Для смежных областей на сфере, общая дуга которых лежит в плоскости, перпендикулярной вектору n , справедливо равенство $a_l - a_k = \pm(S_i^+ + S_i^-)n_i$, где S_i^+ и S_i^- – площади граней многогранника P с внешними нормальными $\pm n_i$.

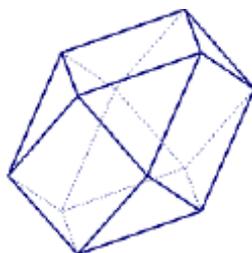


Рис. 1

Поэтому разным областям на сфере отвечают разные грани P_{pr} . Вершины многогранника P_{pr} лежат на прямых пересечения плоскостей α_i , проходящих через O и перпендикулярных векторам n_i . Для тех p и q , для которых $n_p \neq \pm n_q$, пара плоскостей π_p и π_q определяет две симметричные относительно O вершины с радиус-векторами

$$\pm \left(S \left(\frac{[n_q, n_p]}{[n_q, n_p]} \right) \right)^{-1} \frac{[n_q, n_p]}{[n_q, n_p]}, \text{ где } [..] \text{ – векторное произведение векторов.}$$

По пункту 1 предложения

$$S \left(\frac{[n_q, n_p]}{[n_q, n_p]} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m S_i \left| \left\langle n_i, \frac{[n_q, n_p]}{[n_q, n_p]} \right\rangle \right| = \frac{1}{2[n_q, n_p]} \sum_{i=1}^m S_i |(n_i, n_p, n_q)|,$$

где (\cdot, \cdot) - смешанное произведение векторов. Таким образом, радиус-векторы вершин многогранника P_{pr} есть $\pm \frac{2[n_q, n_p]}{\sum_{i=1}^m S_i(n_i, n_p, n_q)}$. Поскольку

многогранник P_{pr} полностью определяется своими вершинами, то справедливо следующее утверждение: значение площади проекции выпуклого многогранника на любую плоскость полностью определяется значениями площадей проекций на всевозможные плоскости, каждая из которых перпендикулярна двум непараллельным граням многогранника P . Число вершин, рёбер и граней многогранника P_{pr} равно соответственно $2\sum_{i=2}^{m-2} k_i$, $4\sum_{i=2}^{m-2} ik_i$, $2 + 2\sum_{i=2}^{m-2} (i-1)k_i$ (где k_i - число прямых, через которые проходит ровно i плоскостей, параллельных граням многогранника P , и k_i' - то же самое, но плоскости, параллельные двум граням, считаются дважды, $i = 2, 3, \dots, m-2$, k_{24} - число прямых, параллельных двум парам параллельных граней P ; доказывается с помощью формулы Эйлера для плоских графов). Из теоремы 2 можно получить некоторые факты об экстремальных проекциях многогранника P . В силу этой теоремы функция $S(n)$ принимает наименьшее (наибольшее) значение на тех направлениях n , для которых точка M пересечения луча $[OM) = \{\lambda n \mid \lambda \geq 0\}$ с поверхностью многогранника P_{pr} наиболее (наименее) удалена от O . Наиболее удалёнными точками могут быть только вершины многогранника P_{pr} . Им соответствуют проекции многогранника P на плоскости, перпендикулярные по крайней мере двум непараллельным граням этого многогранника. Наименее удалёнными точками могут быть только основания перпендикуляров из точки O на грани многогранника P_{pr} . Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 3. 1) *Наименьшее значение площади ортогональной проекции многогранника P равно $\min_{\substack{1 \leq p \leq q \leq m \\ n_p \neq \pm n_q}} \frac{\sum_{i=1}^m S_i(n_i, n_p, n_q)}{2[n_q, n_p]}$ и достигается при*

проектировании на плоскость, перпендикулярную некоторым двум его непараллельным граням. 2) *Наибольшее значение площади ортогональной проекции многогранника P равно $\frac{1}{2} \max_{1 \leq l \leq k} \frac{1}{|a_l|} \sum_{i=1}^m S_i(n_i, a_l)$.*

Литература

1. Арнольд В.И. Математический тривиум // УМН. - 1991. - Т. 46, Вып. 1(277), - С. 225-232.
2. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. - М.: Наука, 1989.
3. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть вторая. Стереометрия. - М., ОНТИ, 1951.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

М.Ф. ШТЫКОВА¹, А.В. КОНАШЕНКО²

¹Негосударственное образовательное учреждение
«Физико-математический лицей при МИФИ», г.Смоленск¹

²Смоленский государственный университет, г.Смоленск²
e-mail: shtykova97@yandex.ru; andrey_konashenko@mail.ru

УДК 514.172.45

Ключевые слова: *ортогональное проектирование, экстремальные значения проекций, площадь проекции как функция направления проектирования, наборы граней.*

В работе изучается площадь ортогональной проекции выпуклого многогранника на плоскость как функция направления проектирования. Описано множество различных наборов граней, обращённых к плоскости проекции, и подсчитано число таких наборов. Установлено, что значение площади проекции P как функции направления проектирования полностью определяется значениями площадей проекций на плоскости, перпендикулярные по крайней мере двум непараллельным граням P , причём наименьшее значение площади проекции P достигается при проектировании на одну из таких плоскостей.

Возьмём модель какого-нибудь выпуклого многогранника P . Пусть многогранник P лежит по одну сторону от плоскости π .

Определение. Будем говорить, что точка M многогранника P видима с плоскости π , если перпендикуляр из M на плоскость π не имеет общих точек с многогранником P , отличных от M . Будем говорить, что грань многогранника P видима с плоскости π , если с плоскости π видимы все её точки.

Для всех параллельных плоскостей, для которых многогранник P лежит по одну сторону, набор видимых граней один и тот же. Поэтому плоскость проекции π можно идентифицировать единичным вектором нормали n направленным в полупространство не содержащее многогранник P . Мы будем говорить, что проектирование производится в направлении вектора n . Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ все грани многогранника P и n_1, n_2, \dots, n_m – единичные векторы их внешних нормалей. Грань Γ_i видима при проектировании в направлении вектора n тогда и только тогда, когда угол между векторами n и n_i острый. Отложим всевозможные векторы единичных нормалей плоскостей проекций от фиксированной точки O . Концы этих векторов образуют сферу σ радиуса единица с центром в точке O . Множество концов векторов n ,

которые образуют острый угол с вектором n_i , есть полусфера σ_i^+ без граничной окружности. Она лежит внутри полупространства, ограниченного плоскостью π_i , перпендикулярной вектору n и проходящей через O . Вектор n_i направлен внутрь этого полупространства. Поскольку плоскость π_i перпендикулярна вектору n_i , то она параллельна плоскости грани Γ_i . Таким образом, плоскость π_i разбивает сферу σ на две полусферы σ_i^+ и $\sigma_i^- = \sigma \setminus \sigma_i^+$ так, что для векторов n , концы которых принадлежат σ^+ , грань Γ_i видима с плоскости π , а для векторов с концами из σ^- – невидима. Проведём теперь через точку O все m плоскостей, параллельных граням $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ многогранника P . Они разбивают сферу σ на области, каждая из которых представляет собой множество концов таких векторов n , при проектировании в направлении которых видимы одни и те же грани многогранника P . Действительно, каждая область есть пересечение полусфер σ_i^+ или σ_i^- по всем $i = 1, 2, \dots, m$, где для каждого i берётся ровно одна из двух полусфер.

Определение. Набор граней γ будем называть устойчивым, если существует n_0 и существует $\varphi > 0$ такие, что для всех векторов n , для которых $n \wedge n_0 < \varphi$, видимыми являются грани набора γ . Набор граней γ назовём абсолютно неустойчивым, если единственно направление проектирования, при котором набор видимых граней это γ . Неустойчивым назовём набор граней, для которого при $\forall \varphi > 0$ и $\forall n$, $n \wedge n_0 < \varphi$ существуют n , для которых набор γ сохраняется, и такие, для которых набор меняется. Соответствующие направления проектирования - устойчивые, абсолютно неустойчивые и неустойчивые.

Например, для куба все направления проектирования, при которых видимы не более двух граней, являются неустойчивыми. Те из них, при которых видима только одна грань (т. е. направления, перпендикулярные граням), являются абсолютно неустойчивыми. Остальные направления являются устойчивыми. Для тетраэдра все направления являются устойчивыми.

Неустойчивое направление существует тогда и только тогда, когда у многогранника имеется несколько граней, нормальные векторы которых параллельны одной плоскости и линейно зависимы. Направление является неустойчивым, когда задающий его вектор n параллелен таким граням. В частности, если у многогранника есть две параллельные грани, то все параллельные им векторы n задают неустойчивые направления. Концы этих векторов образуют окружность большого круга на сфере σ . Такие окружности мы будем называть исключительными. Направление является абсолютно неустойчивым

тогда и только тогда, когда задающий его вектор n параллелен по крайней мере трём граням многогранника, причём существует равная нулю линейная комбинация нормальных векторов этих граней, в которой все коэффициенты ненулевые.

Из сказанного заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1. Устойчивые наборы видимых граней многогранника P находятся во взаимно однозначном соответствии с открытыми областями на сфере, на которые её разбивают всевозможные плоскости, параллельные граням многогранника P проходящие через центр сферы.

2. Неустойчивые наборы видимых граней, не являющиеся абсолютно неустойчивыми, соответствуют открытым дугам исключительных окружностей, на которые они разбиваются пересекающимися их плоскостями, параллельными граням P .

3. Абсолютно неустойчивые наборы видимых граней соответствуют точкам сферы, в которых пересекаются три окружности больших кругов, лежащие в плоскостях, параллельных граням многогранника P , или две исключительные окружности.

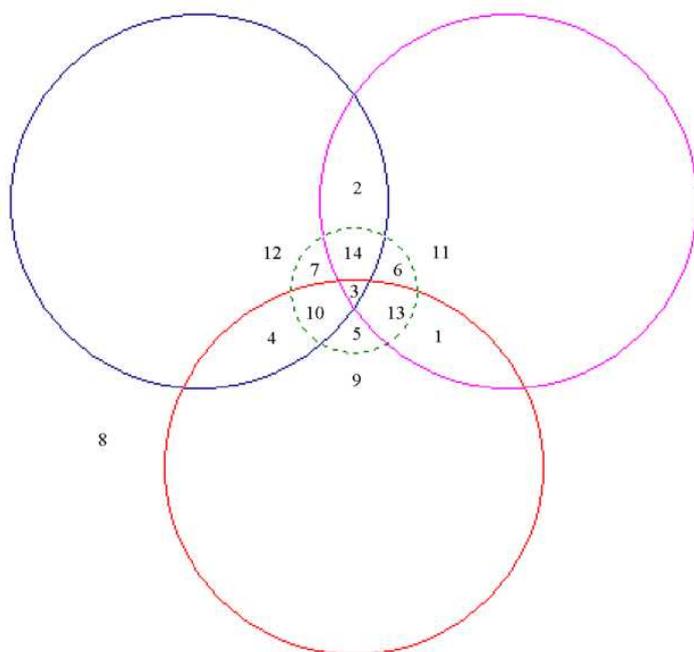
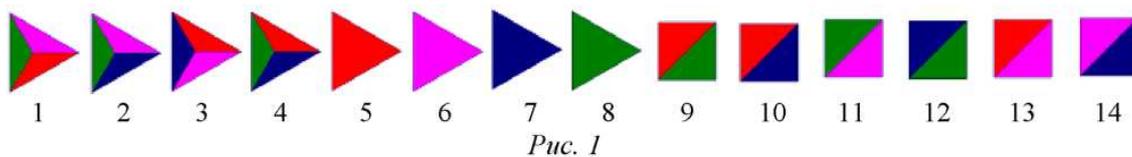


Рис. 2

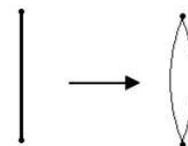


Рис. 3

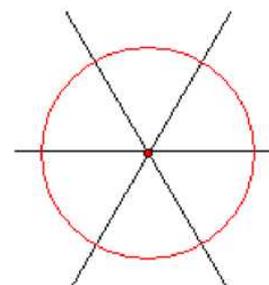


Рис. 4

Отметим, что области, соответствующие устойчивым наборам, могут включать некоторые отрезки границы, а другие отрезки не

включать. Если точка границы принадлежит области, то она соответствует «неустойчивому положению» данного устойчивого набора граней, т. е. для некоторых близких направлений проектирования видим тот же набор граней, а для других – уже другой набор граней.

Предполагается, что грани тетраэдра имеют тот же цвет, что и соответствующие нормали. Четыре плоскости, параллельные граням тетраэдра, разбивают сферу σ на 14 областей, для каждой из которых набор видимых граней один и тот же. На рисунке 1 перечислены все 14 наборов видимых граней тетраэдра. На рисунке 2 изображена стереографическая проекция сферы на плоскость. Полусферы σ_i^+ , σ_i^- переходят в области плоскости, лежащие внутри или снаружи соответствующих окружностей. Мы изображаем окружность сплошной линией, если σ_i^+ переходит в область, лежащую внутри окружности, и штриховой линией, если снаружи окружности. Пересечения областей соответствуют наборам видимых граней фигуры. Нумерация на рисунке 2 соответствует нумерации на рисунке 1.

Построенная модель позволяет подсчитать число наборов видимых граней многогранника.

Проведём всевозможные плоскости, параллельные граням многогранника P , через фиксированную точку O пространства. Пусть k_i – число прямых, через которые проходит ровно i плоскостей, параллельных граням многогранника P , и k_i' – то же самое, но плоскости, параллельные двум граням, считаются дважды, $i = 2, 3, \dots, m-2$; k_{24} – число прямых, параллельных двум парам параллельных граней P .

Теорема 2. Число различных устойчивых наборов видимых граней P равно $2 + 2 \sum_{i=2}^{m-2} (i-1)k_i$. Число неустойчивых наборов равно $2 \sum_{i=2}^{m-2} (i-1)(k_i' - k_i)$.

Число абсолютно устойчивых наборов равно $2k_{24} + 2 \sum_{i=2}^{m-2} (i-1)k_i$.

Доказательство. Пусть через центр сферы σ проведены все плоскости, параллельные граням многогранника P . Рассмотрим на сфере σ плоский граф, вершинами которого являются концы диаметров сферы, по которым пересекаются плоскости, параллельные граням многогранника, а рёбрами – кратчайшие дуги больших кругов, соединяющие соответствующие вершины (эти большие круги есть пересечения сферы с плоскостями, параллельными граням многогранника). Пусть B , P и Γ – число вершин, рёбер и граней этого графа соответственно. По формуле Эйлера $B - P + \Gamma = 2$. Число вершин степени $2i$ в рассматриваемом плоском графе равно $2k_i$.

По теореме о сумме степеней вершин графа $\sum_{i=2}^{m-2} 2i \times 2k_i = 2P$, а общее число вершин графа $B = \sum_{i=2}^{m-2} 2k_i$. Подставляя эти выражения в формулу

Эйлера и выражая число граней, получаем: $\Gamma = 2 + 2 \sum_{i=2}^{m-2} (i-1)k_i$. Это число устойчивых наборов граней.

Заменим каждое ребро плоского графа, которое лежит в плоскости, параллельной двум граням многогранника P , двумя рёбрами, ограничивающими область на сфере (рис. 3). Образовавшиеся области соответствуют неустойчивым наборам граней, не являющимся абсолютно неустойчивыми. Разность чисел областей и даёт число неустойчивых наборов, не являющихся абсолютно неустойчивыми. Это доказывает второе утверждение теоремы.

Абсолютно неустойчивые направления соответствуют тем вершинам исходного графа, полустепени которых не меньше трёх, а также тем вершинам, полустепени которых в исходном графе равнялись двум, а в модифицированном графе равны четырём. Отсюда следует третье утверждение теоремы.

Например, для m -угольной призмы, в основании которой лежит многоугольник имеющий q пар параллельных сторон, через точку O проходит $m-q+1$ плоскостей, $m-q$ из которых проходят через одну прямую, а $m-q+1$ -я плоскость пересекает их по $m-q$ различным прямым. Следовательно, $k_2=m-q$, $k_{m-q}=1$, $k_i=0$ для остальных значений i . По теореме 2 получаем, что число устойчивых наборов видимых граней равно $4(m-q)$. Далее, $k'_3 = m-2q$, $k'_4 = q$, $k'_m = 1$, $k'_i = 0$ для остальных значений i , $k'_{2q}=q$. Отсюда $2(m+q)$ – число неустойчивых наборов граней, не являющихся абсолютно неустойчивыми, $2q+2$ – число абсолютно неустойчивых наборов (формулы подходят и для малых значений m , хотя в этом случае k_i и k'_i могут принимать иные значения).

На рисунке 4 изображена стереографическая проекция сферы, разбитой на области плоскостями, параллельными граням правильной треугольной призмы (полюс выбран в точке пересечения трёх больших кругов, поэтому при проектировании они переходят в прямые).

Красным выделены линии и точка, соответствующие неустойчивым и абсолютно неустойчивым направлениям. Бесконечно удалённая точка также соответствует абсолютно неустойчивому направлению.

Пусть n_1, n_2, \dots, n_m - единичные векторы внешних нормалей граней, и пусть S_1, S_2, \dots, S_m - площади граней $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ соответственно. Изучим свойства площади проекции $S(n)$ многогранника P на плоскость π как функции направления проектирования n .

Предложение. 1) $S(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m S_i |\langle n_i, n \rangle|$, где $\langle \dots \rangle$ - скалярное произведение векторов. 2) $S(n) = \langle s(n), n \rangle$, где $s(n) = \sum_{i: \langle n_i, n \rangle > 0} S_i n_i$.

Рассмотрим вопрос о том, какая часть информации о многограннике P может быть восстановлена по многограннику P_{pr} .

Нормальными граней являются векторы $a_i = \sum_{i \in J_i} S_i n_i$, где $J_i = \{j \mid \langle n, n_j \rangle \geq 0, \text{ при } \forall n \in \delta_i\}$, где δ_i - область на единичной сфере, соответствующая данной грани. Пусть n_i - единичный вектор нормали плоскости проходящей через центр сферы, и общее ребро двух смежных граней P_{pr} , имеющих нормальные векторы a_1 и a_k . Тогда $a_1 - a_k = \pm (S_i^+ + S_i^-) n_i$, где S_i^+ и S_i^- - площади граней многогранника P с внешними нормальными $\pm n_i$ (если одной из этих граней нет, то полагаем $S_i^- = 0$ или $S_i^+ = 0$). Таким образом, по многограннику P_{pr} однозначно восстанавливается множество векторов

$$\{\pm (S_1^+ + S_1^-) n_1, \pm (S_2^+ + S_2^-) n_2, \dots, \pm (S_m^+ + S_m^-) n_m\},$$

то есть восстанавливаются плоскости, которым параллельны грани многогранника P , и суммы площадей граней, параллельных таким плоскостям.

Обратно, многогранник P_{pr} полностью определяется множеством своих вершин. Множество радиус-векторов вершин многогранника P_{pr}

есть $\left\{ \pm \frac{[n_q, n_p]}{2[n_q, n_p]^2} \sum_{i=1}^m S_i |(n_i, n_q, n_p)| \middle| n_p \neq \pm n_q \right\}$. Поэтому, если задано множество

векторов $\{\pm n_1, \pm n_2, \dots, \pm n_m\}$, а также значения всех сумм S_m^+ и S_m^- , то однозначно определяются все суммы $\sum_{i=1}^m S_i |(n_i, n_q, n_p)|$, а значит и все вершины P_{pr} (каждая сумма $\sum_{i=1}^m S_i |(n_i, n_q, n_p)|$ равна $\sum_{i \in I} S_i |(n_i, n_q, n_p)| (S_i^+ + S_i^-)$, где суммирование ведётся по такому множеству I , что $\{\pm n_i \mid i \in I\} = \{\pm n_1, \pm n_2, \dots, \pm n_m\}$ и $\pm n_j \neq \pm n_i$, при всех $i, j \in I, i \neq j$). Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 3. *Площади ортогональных проекций многогранников на любую плоскость равны тогда и только тогда, когда грани этих многогранников параллельны одним и тем же плоскостям и для любой из этих плоскостей сумма площадей параллельных им граней многогранников одинакова.*

Согласно теореме Минковского, для любого множества попарно различных единичных векторов n_1, n_2, \dots, n_m , линейная оболочка которых есть всё пространство, и любых положительных действительных чисел S_1, S_2, \dots, S_m таких, что $\sum_{i=1}^m S_i n_i$, существует ровно один выпуклый многогранник с внешними нормальными граней n_1, n_2, \dots, n_m и площадями соответствующих граней S_1, S_2, \dots, S_m . Это утверждение позволяет дать следующее описание множества многогранников P , которым соответствует данный многогранник P_{pr} .

Как отмечено выше, по многограннику P_{pr} однозначно восстанавливается множество $\{\pm(S_1^+ + S_1^-)n_1, \pm(S_2^+ + S_2^-)n_2, \dots, \pm(S_m^+ + S_m^-)n_m\}$ нормалей плоскостей граней многогранника P вместе с суммами площадей соответствующих граней. Выберем такое множество I , что $\{\pm n_i \mid i \in I\} = \{\pm n_1, \pm n_2, \dots, \pm n_m\}$ и $\pm n_j \neq \pm n_i$ при всех $i, j \in I, i \neq j$. Тогда многогранники P с данным P_{pr} соответствуют точкам $(c_i)_{i \in I}$ пространства $R^{|I|}$ таким, что $\sum_{i \in I} c_i n_i = 0$ и $|c_i| \leq \tilde{S}_i$ для всех $i \in I$. А каждому такому набору, согласно теореме Минковского, соответствует многогранник P с множеством нормалей граней $\{\pm n_i \mid i \in I\}$ и набором площадей соответствующих граней $(\{S_i^+ + S_i^-\})_{i \in I}$.

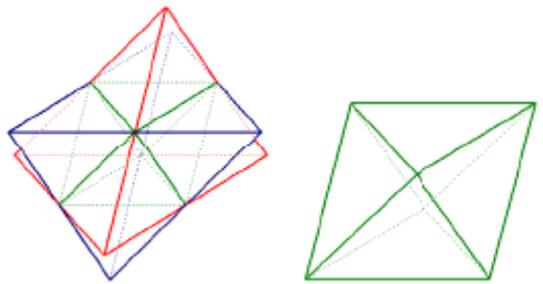


Рис. 5

Множество точек $(c_i)_{i \in I}$, удовлетворяющих условиям $\sum_{i \in I} c_i n_i = 0$ и $|c_i| \leq \tilde{S}_i$ для всех $i \in I$, есть выпуклое множество точек C в пространстве $R^{|I|}$. Оно состоит из одной точки тогда и только тогда, когда P_{pr} - октаэдр. В этом случае многогранник P - параллелепипед. Таким образом, из всех выпуклых многогранников только параллелепипед однозначно восстанавливается по значениям площадей ортогональных проекций на всевозможные плоскости. Если P - тетраэдр, то C - отрезок, концам которого соответствуют данный тетраэдр P и тетраэдр, центрально симметричный P относительно точки пересечения медиан. Середине отрезка соответствует октаэдр, гомотетичный с коэффициентом 2 октаэдру, являющемуся пересечением этих двух тетраэдров (рис. 5).

Литература

1. Арнольд В.И. Математический тривиум // УМН. - 1991. - Т. 46, Вып. 1(277), - С. 225-232.
2. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. - М.: Наука, 1989.
3. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть вторая. Стереометрия. - М., ОНТИ, 1951.

ERDOS-SZEKERES PROBLEM OF EMPTY CONVEX POLYGONS REVISITED

RAMAMANO HAR R. REDDY

Ph. D., Round Rock Independent School District, Round Rock, Texas 78681, USA
e-mail: ramareddy656@gmail.com

Keywords: *computational geometry, combinatorial geometry, Erdos-Szekeres conjecture, convex polygon, Ramsey theory, graph theory, the Happy End problem.*

In a seminal paper published in 1935 Paul Erdos and George Szekeres proved that, for all natural numbers n greater than, or equal to, 3, there exists a smallest positive integer $f(n)$ such that $f(n)$ points in the plane, no three of which are collinear, contain the vertex set of an empty convex n -gon and, furthermore, $f(n)$ is bounded from above and from below, and conjectured that the lower bound is identically equal to $f(n)$ for all admissible values of n .

Although this problem has been studied and written about for nearly 70 years now, it remains far from being solved. This paper reviews the status of past and current research into this problem, identifies some of the difficulties encountered in trying to solve it, and suggests promising lines of enquiry for further research.

References

1. Erdos P., Szekeres G. A combinatorial problem in geometry // *Compositio Math.*, 2, 1935. - P. 463–470.
2. Erdos P., Szekeres G. On some extremum problems in elementary geometry // *Ann. Univ. Sci. Budapest Eotvos Sect. Math.*, 3 – 4, 1961. - P. 53 – 62.
3. Morris W., Soltan V. The Erdos Szekeres problem on points in convex position // *Bulletin (new series) of the Amer. Math. Soc.*, 37, 2000, N4. - P. 437 – 458.
4. Szekeres G., Peters L. Computer solution to the 17-point Erdos-Szekeres problem // *ANZIAM J.*, 48, 2006. - P. 151 – 164.
5. Chung F., Graham R., Forced convex n -gons in the plane // *Discrete Comput. Geom.*, 19, 1998. - P. 367 – 371.
6. Kleitman D., Pachter L. Finding convex sets among points in the plane // *Discrete Comput. Geom.*, 19, 1998. - P. 405 – 410.
7. Toth G., Valtr P. Note on the Erdos Szekeres theorem // *Discrete Comput. Geom.*, 19, 1998. - P. 457 – 459.
8. Toth G., Valtr P. The Erdos-Szekeres theorem: upper bounds and related results // *Combinatorial and Computational geometry*, MSRI Publication 52, 2005. - P. 557 – 568.
9. Erdos P., Some more problems in elementary geometry // *Austral. Math. Soc. Gaz.*, 5, 1978. - P. 52 – 54.
10. Horton J.D. Sets with no empty 7-gons // *Canad. Math. Bull.*, 26, 1983. - P. 482 – 484.
11. Кошелев В.А. О проблеме Эрдеша-Секереша // *Доклады Академии наук*. 2007. – Т. 415, №6. - С. 734 – 736.
12. Кошелев В.А. Вокруг проблем Эрдеша-Секереша // *Доклады Академии наук*. 2009. – Т. 426, №3. - С. 304 – 306.

СЕКЦИЯ 4

Новые информационные и педагогические технологии в образовании и прикладная лингвистика

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛЕКСИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ В АВТОРСКИХ ТЕКСТАХ

В.В. АВХИМОВИЧ, Е.А. КАЛИНИНА, Т.А. САМОЙЛОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: tatsam@hotmail.ru

УДК 004.652; 81.42

Ключевые слова: *корпусный менеджер, лексический комплекс, статистические коэффициенты, частота совместной встречаемости, переборный алгоритм, авторский текст.*

Существующий программный инструментарий статистической обработки авторских текстов неудовлетворителен. Для того чтобы количественно оценить, насколько значимыми являются интересующие исследователя лексические комбинации, нами было предложено использовать статистические коэффициенты MI, t-score и log-likelihood (LL-score). Для реализации приведенных статистических оценок была разработана C#-программа, представляющая собой корпусный менеджер. Разработанный программный инструментарий позволяет решать проблемы выявления скрытых связей слов, прежде всего в поэтических текстах. С ее помощью пользователь загружает исследуемый авторский текст, задает группы слов, которые предположительно могут образовать лексический комплекс, и указывает максимальное расстояние, допустимое между словами. Работа корпусного менеджера видна на примере анализа поэтических текстов Ю. Верховского.

Известно, что существующий программный инструментарий статистической обработки авторских текстов весьма неудовлетворителен – как в части лингвистического обеспечения, так и с точки зрения выходных интерфейсов, и его следует развивать. В известных корпусных менеджерах [1; 2] полностью отсутствует возможность поиска и статистической оценки совместной встречаемости слов со свободным порядком, характерным для индивидуального стиля того или иного автора. Для решения этих проблем мы предлагаем

методику статистического анализа художественных авторских текстов с целью количественной оценки степени зависимости слов, образующих лексические комплексы, и определения меры их значимости. Разработанный по данной методике программный инструментарий позволяет решать проблемы выявления не только очевидных, но и скрытых связей слов, прежде всего в поэтических текстах.

Для того чтобы количественно оценить, насколько значимыми являются интересующие исследователя комбинации, нами было предложено использовать статистические коэффициенты MI и t -score [3]. Мету MI (mutual information, коэффициент взаимной информации) следует использовать для сравнения зависимых контекстно-связанных частот с независимыми, как если бы слова в лексическом комплексе (разрывные коллокации) появлялись в тексте совершенно случайно. Значение данной меры вычисляется по формуле

$$MI = \text{Log}_2 \frac{f(n,c) * N}{f(n) * f(c)}, \quad (1)$$

где n – ключевое слово (node); c – коллокат (collocate); $f(n, c)$ – частота встречаемости ключевого слова n в паре с коллокатом c ; $f(n)$, $f(c)$ – абсолютные (независимые) частоты ключевого слова n и слова c в тексте; N – общее число словоупотреблений в тексте.

Если значение $MI(n, c)$ больше определенного значения (для русского языка часто называется значение 3 и больше), тогда данное сочетание слов можно считать статистически значимым.

С точки зрения теории вероятности мера MI является способом проверки независимости появления двух слов в тексте – если слова полностью независимы, то вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей появления каждого из них, т.е. произведению частот (использование абсолютных частот вместо относительных увеличивает значение MI для всех коллокаций в корпусе на константу, однако не меняет ее вероятностного смысла). Также из определения видно, что мера MI зависит от размера корпуса – чем больше исследуемый корпус, тем выше в среднем получаемые по нему значения MI . Это свойство, видимо, должно отражать большую степень доверия к данным, полученным на материале большего корпуса. В то же время такая «дискриминация» по размеру корпуса затрудняет сравнение значений мер, полученных на разных корпусах.

Другой мерой, которая использовалась в данном исследовании, стала мера t -score, которая учитывает частоту совместной встречаемости ключевого слова и его коллоката, отвечая на вопрос, насколько не случайной является сила ассоциации (связанности) между коллокатами. Мера t -score рассчитывается по формуле (условные обозначения здесь приняты те же, что и выше для MI).

Меру *t-score* предлагается использовать для учёта частоты совместной встречаемости ключевого слова и его коллоката, отвечая на вопрос, насколько неслучайной является сила ассоциации (связанности) между словами-коллокатами:

$$t - score = \frac{f(n, c) - \frac{f(n) * f(c)}{N}}{\sqrt{f(n, c)}}. \quad (2)$$

Для нахождения значимой лексики автора (лексических маркеров) предлагается применить меру, известную под названием *log-likelihood* (*LL-score*), или коэффициент логарифмического правдоподобия [4]. Коэффициент используется нами в качестве метрики сравнения, позволяя сравнить частоты встречаемости отдельных слов или словарных комплексов в текстах всего полного корпуса и в текстах подкорпуса. Сравнивая частоты слов или комплексов в разных подкорпусах, можно получить списки значимой лексики («лексические маркеры») для того или иного функционального стиля. Коэффициент логарифмического правдоподобия вычисляется на основе матрицы:

	Подкорпус	Другие тексты	Весь корпус
Частота	A	B	<i>a+b</i>
Размер	C	D	<i>c+d</i>

По этим данным показатель *log-likelihood* можно вычислить по формуле

$$LL - score = 2 * \left(a * \ln \left(\frac{a}{E_1} \right) + b * \ln \left(\frac{b}{E_2} \right) \right),$$

где $E_1 = c * \frac{a+b}{c+d}$, $E_2 = d * \frac{a+b}{c+d}$. Здесь *a, b, c, d* - наблюдаемые величины, а E_1 и E_2 - ожидаемые показатели в сравниваемых подкорпусах.

Показатель *log-likelihood* учитывает как относительную частоту (во сколько раз чаще слово встречается в подкорпусе по сравнению с остальными текстами), так и абсолютную частоту в корпусе и подкорпусе. Последнее обстоятельство важно, поскольку значимость того, что слово (или словарный комплекс) встретилось в подкорпусе в 10 раз чаще, чем в основном корпусе, зависит от того, имеем ли 5 или 500 вхождений этого слова в подкорпус. В первом случае она может быть связана со случайными флуктуациями, во втором - эти данные статистически значимы.

Достоинством критерия правдоподобия является и то, что возможна статистическая оценка значимости различия частот в подкорпусе и

остальном корпусе. Если этот показатель превышает 15.31, с вероятностью более 99% можно отвергнуть гипотезу, что разница в частоте случайна и она не обусловлена существенными различиями в составе корпуса [5].

Для реализации приведенных статистических оценок была разработана C#-программа, представляющая собой корпусный менеджер. С ее помощью пользователь загружает исследуемый авторский текст, задает группы слов, которые предположительно могут образовать лексический комплекс, указывает максимальное расстояние, допустимое между словами, и получает результаты поиска и статистической обработки. Для больших авторских текстов, где количество слов более 50 000, предусмотрено их «разрезание» на блоки с последующей параллельной обработкой средствами библиотеки System.Threading. Реализован переборный алгоритм поиска слов, образующих лексические комплексы, и расчёт статистических коэффициентов, позволяющих количественно оценить степень связи между словами. Методы, представленные в программе C#-классом:

- деление исходного текста на блоки для последующей их параллельной обработки;
- удаление из блоков знаков препинания, выделение в них отдельных слов, упорядочение и группировка слов;
- поиск и расчёт в каждом блоке количеств заданных исследователем лексем;
- поиск и расчёт в каждом блоке лексических комплексов из двух, трёх или даже четырёх слов;
- расчёт статистических коэффициентов.

Приведём результаты исследований, полученных кафедрой литературы и методики её преподавания Смоленского государственного университета, в результате обработки поэтического сборника Юрия Никандровича Верховского (1878-1956) «Разные стихотворения» (1908 год).

Предполагаемые лексические комплексы: слово *Ночь* как ядро, его слова-спутники: *сон, глаз, душа, мир, любовь, любить, здесь, жизнь*.

При подсчёте было выбрано существенное расстояние между словами: 15 (в обе стороны от ядра).

Результаты обработки стихотворений наглядно видны в таблице 1.

Таблица 1

Вторая группа слов	Сколько комбинаций образует	Расстояние в тексте	MI	t-score
Сон	10	15 слов	3,71	2,82
Глаз	3	15 слов	3,63	1,4
Душа	12	15 слов	3,52	3

Вторая группа слов	Сколько комбинаций образует	Расстояние в тексте	MI	t-score
Мир	6	15 слов	2,77	1,4
Любовь	3	15 слов	2,39	1
Любить	5	15 слов	3,85	2,23
Тень	4	15 слов	3,68	2,23
Здесь	3	40 слов (только с таким расстоянием удалось получить коэффициенты)	3,33	1
Жизнь	6	15 слов	4,12	3,46

Значение коэффициента *MI* у большинства лексем оказалось выше 3. Лексемы *любовь* и *мир* показали *MI* ниже 3, однако для данного поэтического материала эти величины оказываются также значимыми.

Мера *t-score*, учитывающая частоту совместной встречаемости и показывающая силу связанности компонентов, везде больше или равна 1, а это значит, что лексемы в обнаруженных парах действительно тяготеют друг к другу в разных стихотворениях сборника.

При подсчёте коэффициентов *MI* и *t-score* выяснилось, что для каждой лексемы существует определённый порог в расстоянии слов, после которого значения коэффициентов остаются неизменными.

Отдельно следует оговорить случаи, когда значимые показатели *MI* и *t-score* появляются только при нахождении лексем на большом расстоянии (случай с лексемой *здесь*). Полученные результаты позволяют утверждать, что пара с такими показателями не является устойчивым маркером поэтического сборника, её появление случайно и не имеет закономерностей.

Таким образом, полученные с помощью программы данные помогают утверждать или опровергать предположение о том, что в художественном тексте некоторые лексемы, располагаясь на определенном расстоянии друг от друга, образуют устойчивую пару.

Литература

1. AntConc 3.2.4w, Dr. Laurence Anthony, Faculty of Science and Engineering at Waseda University, Japan, <http://www.antlab.sci.waseda.ac.jp/>.
2. Heidelberg Tenka. Text 0.1.3.4. –URL. - <http://sourceforge.net/projects/corsis/>.
3. Захаров В.П., Хохлова М.В. Анализ эффективности статистических методов выявления коллокаций в русском языке // Сб.трудов, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт лингвистических исследований РАН, 2010.
4. Ляшевская О.Н., Шаров С.А. Частотный словарь национального корпуса русского языка: концепция и технология создания // Труды международной конференции «Диалог 2008». - С. 345-351.
5. Rayson, Paul & Roger Garside. Comparing corpora using frequency profiling // Proceedings of the Comparing Corpora Workshop at ACL 2000. Hong Kong, 2000. - P. 1–6.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ИНТЕРАКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ГРАФОВ БУДУЩИМИ УЧИТЕЛЯМИ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Н.В. АССОНОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: assonova@mail.ru

УДК 621.396.218

Ключевые слова: *электронный образовательный ресурс, интерактивность, граф, формат вычисляемых документов.*

В статье рассказывается об опыте подбора и использования интерактивных электронных образовательных ресурсов для изучения элементов теории графов. Одним из возможных источников таких ресурсов является адаптация для русскоязычных студентов свободных демонстраций формата вычисляемых документов сайта американской компании Wolfram Research.

В переводе с английского *interactive* означает «диалоговый, взаимодействующий».

Интерактивность электронных образовательных ресурсов (ЭОР) – одно из принципиальных их преимуществ. Оно оправдывает активное включение ЭОР в образовательный процесс.

Крупнейшим отечественным сайтом ЭОР является сайт федерального центра информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) [2]. Его «идейным создателем» является А.В. Осин, по мнению которого «под интерактивным понимается электронный контент, в котором возможны операции с его элементами: манипуляции с объектами, вмешательство в процессы» [3]. Тот же автор выделяет 4 уровня интерактивности: условно-пассивные формы, активные формы, деятельностные формы, исследовательские формы.

Успешному изучению элементов теории графов будущими учителями начальных классов (студентами профиля «Начальное образование и информатика», у которых автор ведет преподавание) и другими студентами, способствует наглядное представление графов. Лучше других ресурсов последнее могут обеспечить ЭОР.

ЭОР для изучения графов мы находим на сайте ФЦИОР [2]. Это два информационных модуля «Основы теории графов. Способы представления графов. Обход графа» и «Задача о кратчайших путях. Алгоритм Флойда, Дейкстры», а также практический модуль «Теория графов». Первые два модуля содержат качественные иллюстрации с необходимыми пояснениями, а также программный код для решения

некоторых задач теории графов. Практический модуль тренирует в написании и отладке программного кода. Уровень интерактивности информационных модулей – условно пассивный, а практического модуля – активные формы или деятельностные формы.

Однако и для ознакомления с новым материалом из теории графов можно создать ЭОР с уровнем интерактивности, приближающимся к четвёртому – исследовательские формы. Такие ресурсы найдены в свободном доступе на сайте американской фирмы Wolfram Research. Они являются динамическими манипуляторами, файлами в формате вычисляемых документов – CDF, о чем сообщалось в работе [4]. Там рассматривались манипуляторы для изучения многогранников.

При помощи любезно предоставленной фирмой Wolfram Research системой Mathematica автором переведены на русский язык демонстрации, эффективно иллюстрирующие понятия, связанные с графами.

Так, на базе демонстрации [5] создан ресурс «Матрица смежности», позволяющий отследить изменение матрицы смежности графа с изменением самого графа. Манипулятор позволяет произвольно изменять число вершин графа от 1 до 10, часть «заполнения» графа рёбрами и генерировать случайный набор рёбер. Кроме того, можно компьютерной мышью перемещать вершины и рёбра графа, не меняя их инцидентности. Каждый граф имеет свою матрицу смежности. Манипулятор позволяет понять, какие изменения графа будут изменять матрицу смежности, а какие – нет.

Переводом ресурса [6] стал манипулятор «Гамильтонов путь». Он показывает пути обхода по одному разу всех вершин правильных и полуправильных многогранников.

Демонстрация [7] стала основой для манипулятора «Планарен ли граф?». Он предлагает несколько примеров графов на плоскости, для которых нужно выяснить, планарны они или нет. Компьютерной мышью можно перемещать вершины и рёбра графа, не меняя их инцидентности. Если удаётся преобразовать граф так, чтобы его рёбра не имели общих точек, кроме, может быть, вершин, то он планарный. Работа с таким манипулятором полезна и увлекательна. Она позволяет не только проверить свою интуицию, но и с лёгкостью закрепить понятие планарности графа.

Использование названных и других демонстраций находится в стадии апробации в учебном процессе автором тезисов.

Литература

1. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов [Электронный ресурс]. - URL: <http://fcior.edu.ru> (дата обращения здесь и далее: 19.03.2014).

2. Осин А.В. Открытые образовательные модульные мультимедиа системы. - М.: Агентство «Издательский сервис», 2010. – URL: <http://www.rnmc.ru/file.asp?4325>.
3. <http://demonstrations.wolfram.com/>.
4. Ассонова Н.В. Использование динамических манипуляторов при изучении многогранников будущими учителями начальных классов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIV Международной научной конференции, посвящённой 90-летию профессора М.Б. Балка – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – Вып. 14. – С. 188-190.
5. <http://demonstrations.wolfram.com/AdjacencyMatricesOfManipulableGraphs/>.
6. <http://demonstrations.wolfram.com/HamiltonianToursOnPolyhedra/>.
7. <http://demonstrations.wolfram.com/IsThisGraphPlanar/>.

ГОТОВНОСТЬ СУБЪЕКТОВ ОБРАЗОВАНИЯ К ВНЕДРЕНИЮ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ: КРИТЕРИАЛЬНО-ПРИЗНАКОВЫЙ АППАРАТ

Р.В. БЛИНДЮК

Смоленский государственный университет,
e-mail: erket.r@gmail.com

УДК 519.6

Ключевые слова: *автоматизация, качество образования, педагогические условия, внедрение информационных систем, общеобразовательная школа.*

Рассматривается перечень критериев, определяющих готовность субъектов образования к внедрению автоматизированных систем оценки качества обучения

Для успешного внедрения автоматизированной информационной системы оценки качества обучения необходимо четкое понимание условий, при которых оно пройдет наиболее успешно [1], для этого разработаем критерии, которые позволят оценить готовность субъектов образования к внедрению такого рода систем. При этом необходимо определить признаки каждого критерия, качественные показатели этого признака, и метод, по которому можно его диагностировать. Результаты представлены в виде таблицы по компонентам готовности: личностно-мотивационному, психологическому, познавательному и технологическому.

Критериально-признаковый аппарат готовности субъектов образования к внедрению автоматизированных систем оценки качества обучения

Структурный компонент	Критерий	Признаки	Характеристика признака (качественные показатели)	Метод диагностирования
личностно-мотивационный компонент	<i>Мировоззренческий</i> является показателем общей и	Понимание роли инновации для развития общества	Позитивное восприятие инновации	Входной тест, наблюдение

		Понимание роли автоматизации в учебном процессе	Понимание возможностей рационализации учебного процесса, разницы между автоматизированными и неавтоматизированными педагогическими процессами	Входной тест
		Понимание роли мониторинга в образовательном процессе	Ориентация на соответствие государственным стандартам, нормам развития (возрастным, психологическим, физическим и др.)	Входной тест
		Широта кругозора	Общая осведомленность об истории и современных трендах развития автоматизированных систем оценки качества обучения	Самооценка, опросная карта для самодиагностики
	Мотивированность показывает степень стремления к достижению поставленной цели	Сила и устойчивость мотивации	Нацеленность на результат, уверенность в успехе поставленной цели	Самооценка, входной тест
Психологический компонент	Психологическая готовность отражает отношение личности	Позитивное отношение к информационным технологиям	Принятие информационных технологий, их преимуществ, конструктивное отношение к техническим неудачам	Самооценка, входной тест
		Гибкость, открытость	Способность быстро перестраиваться, переключаться, адаптироваться, готовность воспринимать новое	Входной тест, наблюдение
		Совладание с фобиями, барьерами, связанными с внедрением новых информационных технологий	Применение копинг-стратегий	Самооценка, наблюдение
Познавательный компонент	Теоретическая подготовка к деятельности по внедрению, отражает знания в области внедрения новых технологий, знания информационных систем, технологий оценки качества обучения	Знание основных понятий в области оценки качества образования	Знание основных понятий в области качества, государственных стандартов, действующих нормативных актов	Входной тест
		Знание основных систем оценки качества образования	Знание систем оценки качества образования, в том числе автоматизированных, области их применения, возможные риски, характеристики	Входной тест
		Знание особенностей процесса оценки качества образования	Знание о построении процесса оценки качества образования без использования автоматизации	Самооценка, входной тест
Технологический компонент	Практическая готовность отражает степень овладения учителем практической стороной деятельности по внедрению систем оценки качества обучения	Сформированность организационных умений и навыков	Умение поставить цель и задачи, выбрать стратегию оценки качества образования, назначение ответственных за работу с информацией	Самооценка, наблюдение, входной тест
		Сформированность методологических умений и навыков	Умение добиться результата с минимальными ресурсами, выбирать оптимальную методику, определить критерии и параметры оценки	Входной тест

		Сформированность специальных технических, аналитических и технологических умений и навыков	Умение выбрать средства автоматизации оценки качества обучения, умение их устанавливать, настраивать и сопровождать	Входной тест
		Рефлексивность	Способность учителя провести самооценку своей деятельности	Самооценка

Литература

1. Блиндюк Р.В., Кочаненков Е.И., Метелица И.Е. Автоматизированное проектирование в образовательном процессе школы // Академия естествознания, 2013.

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Е.Е. БУРЕНИНА¹, Г.Е. СЕНЬКИНА²,

ГАУ ДПОС «СОИРО», Смоленский государственный университет,
e-mail:¹ burenina.elena.68@mail.ru, ² gulzhan.senkina@gmail.com

УДК 37.01

Ключевые слова: *дистанционное обучение, электронное обучение, дети с ограниченными возможностями здоровья, дети-инвалиды, учащиеся с ОВЗ, виртуальная лаборатория, цифровая лаборатория, цифровой микроскоп, Moodle, цифровые образовательные ресурсы, социализация, адаптация.*

Дистанционное обучение как особая форма электронного обучения приобретает особое значение при организации образовательного процесса для детей с ограниченными возможностями здоровья. Оно позволяет значительно расширить границы традиционного образования за счет эффективного применения индивидуальных интерактивных занятий, что способствует созданию условий для адаптации и социализации учащихся с ОВЗ. Дистанционное обучение позволяет реализовать два основных принципа современного образования – «образование для всех» и «образование через всю жизнь».

Система дистанционного обучения развивается в России с начала 90-х годов прошлого века и внедряется как часть государственной политики, с детальной проработкой нормативно-правового, методологического и информационно-технологического обеспечения [8]. Целью дистанционного обучения является предоставление обучающимся в образовательных учреждениях возможности освоения основных и дополнительных образовательных программ непосредственно по месту жительства или временного пребывания [7].

Под дистанционным обучением (ДО) в соответствии с [5] будем понимать комплекс образовательных услуг, предоставляемых широким слоям населения с помощью специализированной информационно-образовательной среды на любом расстоянии от образовательных учреждений. Дистанционное обучение является самостоятельной формой электронного обучения, в котором ведущим средством являются информационные технологии. Для него характерны все присущие учебному процессу компоненты (цели, содержание, методы, организационные формы, средства обучения), реализуемые специфическими средствами Интернет-технологий или другими средствами, предусматривающими интерактивность.

Особое значение дистанционное обучение приобретает при организации образовательного процесса для детей с ограниченными возможностями здоровья, в число которых входят и дети-инвалиды.

В России создана достаточно широкая дифференцированная сеть специальных (коррекционных) образовательных учреждений для обучения детей с нарушениями слуха, зрения, речи, опорно-двигательного аппарата, с задержкой психического развития, умственной отсталостью. Но основным недостатком такого образования детей с ОВЗ является значительная удаленность специальных (коррекционных) учреждений от места жительства семьи, помещение школьника в одно из этих учреждений лишает родителей и ребенка полноценного общения, разрывает в большей степени семейные узы [3].

Дистанционное обучение помогает решить эту проблему, позволяя значительно расширить границы традиционного образования за счет эффективного применения индивидуальных интерактивных занятий.

Преимущества дистанционного обучения учащихся с ОВЗ заключаются в том, что оно:

- позволяет повысить эффективность освоения основной образовательной программы за счет самостоятельного выбора места и времени для занятий, объема изучения дисциплин в соответствии с индивидуальным учебным планом;
- реализует индивидуальный подход к изучению учебных дисциплин, поскольку во время занятий учитель может уделить повышенное внимание тем вопросам, которые вызывают затруднения у учащегося;
- позволяет эффективно реализовать вариативную часть учебного плана за счет проведения индивидуальных курсов по выбору, что способствует профильному самоопределению учащихся с учетом их склонностей и индивидуальных особенностей;
- в силу своей интерактивности помогает обойти психологические барьеры, связанные с коммуникативными качествами детей с ограниченными возможностями здоровья, такими как стеснительность,

страх публичных выступлений и т. д. [6].

Развитие широкой сети высшего дистанционного образования предполагает дальнейшее обучение и получение профессии для тех, кто по состоянию здоровья не может воспользоваться традиционными формами обучения.

Таким образом, дистанционное обучение позволяет реализовать два основных принципа современного образования – **«образование для всех»** и **«образование через всю жизнь»**.

На протяжении нескольких лет в Смоленской области реализуется дистанционное обучение учащихся с ОВЗ на базе ОГБОУ «ССКОШ 1 и 2 видов», что позволило выделить некоторые особенности и проблемы такой формы организации образовательного процесса. При проведении дистанционных занятий с учащимися с ОВЗ мы используем следующие формы организации образовательного процесса:

- видео в режиме реального времени (через веб-камеру);
- аудиосвязь через компьютер в режиме реального времени с использованием наушников или колонок;
- текстовый чат — для сеансов вопросов и ответов в режиме реального времени.
- общий доступ к экрану — совместное использование экрана учителя или ученика для просмотра того, что было отображено на мониторе в реальном времени.

При организации обучения широко используются также ресурсы сети Интернет. Интернет является уникальным по своим объемам и возможностям хранилищем данных. Его как источник информации используют и учителя и обучающиеся. Большое количество интернет-ресурсов посвящено школьной программе. Это действительно интересные информационные ресурсы, находящиеся в свободном доступе. Интернет позволяет найти информацию, которую учащимся сложно или даже невозможно отыскать в библиотеке. Благодаря ресурсам интернета появляется возможность проводить виртуальные экскурсии, знакомить учащихся с основами тех или иных технологических процессов, в основе которых лежат изучаемые химические реакции, физические и биологические явления.

Использование online-тестов позволяет быстро и эффективно организовать контроль и коррекцию знаний учащихся, использование режима онлайн-тренировки - подготовить их к итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

При организации подобной формы обучения большую роль играет использование дистанционных курсов. Дистанционный электронный курс является новой формой представления структуры и содержания учебного предмета. Для того чтобы дистанционный курс соответствовал учебной дисциплине в её традиционной форме представления,

необходима определенная программная среда, имеющая возможности по автоматизированному созданию лекционного материала в электронном виде, настраиваемую систему тестового контроля теоретических знаний, а также позволяющая использовать компьютерные лабораторные комплексы и программы, реализующие лабораторные работы, практические занятия, контрольные работы, тесты и т.д. [1]. Одной из таких систем является Moodle (Modular Object Oriented Digital Learning Environment) – свободно распространяемая под лицензией GPL, популярная, международная платформа поддержки дистанционного обучения. Модульная организация системы Moodle обеспечивает гибкость при модернизации системы с учётом особенностей учебного процесса, а открытый программный код позволяет адаптировать её функции в соответствии с потребностями учителя для достижения поставленных ими целей в ходе процесса дистанционного обучения [2] и оптимизировать работу учащихся с учебными материалами электронных курсов. Материалы курсов могут быть представлены в любом виде: картинки, графики, карты, видео, flash-анимация, аудио, таблицы и текст. Можно разрабатывать разнообразные учебно-методические материалы: рабочие тетради, лекции, практические задания, уроки, диагностические материалы в виде тестов, контрольных работ и рефлексивных анкет, для организации обратной связи с обучающимися.

Однако здесь возникает проблема, которая подстерегает разработчика дистанционного курса и учителя-пользователя. В настоящее время обучение в школах ведется по разным рабочим программам и, соответственно, по разным УМК. Часть авторов предлагает свои оригинальные курсы, которые, к сожалению, не всегда учитывают возрастные возможности учащихся, требования к уровню их подготовки и т. д [4].

Еще одна особенность, с которой сталкиваются при дистанционном обучении учителя естественнонаучного цикла, связана со спецификой предметов: организация и проведение лабораторных и практических работ обучающимися. Ряд опытов можно провести дома, так как они не требуют использования труднодоступных веществ и безопасны для начинающего экспериментатора. Но в некоторых случаях учащиеся должны иметь дело или с агрессивными веществами (уксусная кислота, например), или с ядовитыми (медный купорос), хотя их можно свободно приобрести в магазине. Так появляется еще одна проблема дистанционного обучения — организация безопасной обучающей среды [4]. Она особенно актуальна при обучении детей с нарушениями двигательной активности.

Частично решить эти проблемы призваны виртуальные лаборатории, которые позволяют:

- дистанционно отрабатывать навыки безопасного обращения с

лабораторным оборудованием;

- расширить список экспериментов;
- уменьшить время, затрачиваемое на организацию и проведение эксперимента;
- повысить степень наглядности эксперимента и визуализации его результатов;
- проводить измерения в условиях дистанционного обучения;
- модернизировать традиционные эксперименты.

Для проведения интерактивных лабораторных работ используются ЭОР Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов (<http://school-collection.edu.ru>) и свободный программный продукт «Virtulab» (<http://www.virtulab.net>), который предоставляет возможность учащимся проводить виртуальные эксперименты.

Интерактивные работы позволяют просто и доступно изучать природные явления, химические реакции: меняя параметры в интерактивной лаборатории, ученик видит изменения как результат своих действий.

При изучении физических и химических явлений, температурного режима протекания химических реакций, изменения pH-среды можно использовать цифровую лабораторию Архимед 4.0. Цифровая лаборатория Архимед 4.0 - это новое поколение школьных естественнонаучных лабораторий. Она обеспечивает автоматизированный сбор и обработку данных, позволяет отображать ход эксперимента в виде графиков, таблиц, показаний приборов.

В составе лаборатории Архимед - измерительные устройства (специализированные датчики), регистратор данных, программное обеспечение «MultiLab» для управления сбором и обработкой эксперимента, справочные и методические материалы.

Также при изучении веществ можно использовать цифровые микроскопы (например, «Digital Blue»). Микроскоп подключается через стандартный USB-разъем к ноутбуку или стационарному компьютеру. Микроскоп не только передает получаемое изображение на монитор, но и записывает его в память компьютера. Учащиеся могут создавать фотоальбомы и видеофильмы о своих исследованиях микромира. Большую помощь цифровой микроскоп оказывает в организации учебно-исследовательской деятельности учащихся с ограниченными возможностями здоровья.

Благодаря применению дистанционного образования при обучении детей с ограниченными возможностями здоровья создаются условия:

- для развития познавательных и творческих способностей;
- для освоения учащимися приемов экспериментальной работы с применением информационно-коммуникационных технологий;
- для усиления практической направленности;

- для овладения учащимися более глубокими знаниями о живой природе, общими методами ее изучения, учебными умениями;
- для формирования на базе знаний и умений научной картины мира как компонента общечеловеческой культуры.

Таким образом, можно сделать вывод, что дистанционное обучение является перспективной формой организации образовательного процесса, способствующей повышению эффективности общего образования и созданию условий для социализации и адаптации учащихся с ограниченными возможностями здоровья.

Литература

1. Андреев А.В. Практика электронного обучения с использованием Moodle.– Таганрог: Изд-во. ТТИ ЮФУ, 2008.
2. Белозубов А.В., Николаев Д.Г. Система дистанционного обучения Moodle: учебно-методическое пособие. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2007.
3. Дифференцированное, интегрированное, инклюзивное образование детей с ограниченными возможностями здоровья [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.socrab.ru>.
4. Журин А.А. Дистанционное обучение химии. Портал Mediaeducation.ru [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.mediaeducation.ru>.
5. Концепция создания и развития единой системы дистанционного образования в России. Постановление Государственного Комитета Российской Федерации по высшему образованию от 31 мая 1995 года № 6 [Электронный ресурс]. – URL: <http://de.unicor.ru/science/groundwork/concept.html>.
6. Преимущества дистанционного образования. Портал дистанционного образования ЮРГУЭС [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.do.sssu.ru>.
7. Проблемы и перспективы использования инновационных технологий в учебном процессе школы и вуза [Электронный ресурс]. – URL: <http://ntfmfkonf.ucoz.ru>.
8. Что такое дистанционное образование? // Вечерняя Москва. - 2008. № 204.

ДИСТАНЦИОННАЯ ПОДГОТОВКА К ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ

А.В. ДЮНДИН

Смоленский государственный университет,
e-mail: avdyndin@yandex.ru

УДК 372.853

Ключевые слова: *дистанционное обучение, подготовка к ЕГЭ по физике.*

В работе рассматривается вопрос об организации и техническом обеспечении дистанционной подготовки к ЕГЭ по физике.

В федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» [4] включен п.16, целиком посвященный дистанционному образованию.

Данный вид образования определяется в законе как «образовательные технологии, реализуемые в основном с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном (на расстоянии) взаимодействии обучающихся и педагогических работников». В соответствии с этим пунктом учебные заведения получили возможность осуществлять образование в дистанционной форме на законных основаниях, при наличии социального заказа, обеспечив выполнение ряда описанных в законе требований.

Социальный заказ определяется учащимися, и одним из самых сильных его источников является необходимость успешной сдачи ЕГЭ. Сейчас немаловажным фактором, определяющим дальнейшую жизнь человека, является успешная сдача Единого государственного экзамена по окончании школы. Следовательно, задача любой школы – подготовить ученика к максимально успешной сдаче этого экзамена. Часто школьник не может подготовиться к экзамену достойно по причинам, от него не зависящим, а именно: отсутствие квалифицированных кадров (иногда вовсе учителей физики в школе), тяжёлое материальное положение, проблемы со здоровьем, неудобное географическое положение. Следовательно, вопрос о дистанционном обучении становится очень актуальным, а новая редакция закона – очень своевременной.

Дистанционное обучение создает дополнительные возможности в организации подготовки учащихся к ЕГЭ в рамках дополнительного образования, особенно по дисциплинам, которые не являются обязательными. В данной работе остановимся на подготовке к ЕГЭ по физике с помощью дистанционных технологий, обратив внимание на организационные и технические моменты. Теоретические основы дистанционного образования подробно рассматриваются в работах Е.С. Полат и А.В. Хуторского, например, [3; 5] и многих других, и мы на них останавливаться не будем.

Одним из вариантов организации дистанционной подготовки к ЕГЭ является применение социальных сетей, которыми пользуется большое количество пользователей. Данный вариант работы рассмотрен нами в [1]. Однако в практике работы учебного заведения применение социальных сетей невозможно, так как создает вероятность доступа к запрещенному контенту.

Требования закона предусматривают использование специального программного обеспечения, не обязательно коммерческого, и создание собственных учебно-методических комплексов. Однако у учителя не хватает времени или квалификации для создания подобных материалов, поэтому используются другие варианты работы.

В рамках подготовки имеет смысл организовать изучение фактического материала, разбор теории, выполнение тестовых заданий и

решение тестовых задач. В условиях недостатка времени организатор активно использует ресурсы сети, находящиеся в свободном доступе.

Таким образом, для организации работы по подготовке к ЕГЭ по физике учитель с помощью специального программного обеспечения размещает в сети структурированный материал в виде ссылок на теоретический материал, записи необходимых опытов по физике, тестовые материалы и текстовые задачи и организует общение по обсуждению материалов с помощью специальных средств. Поэтому важно обеспечить техническую подготовку учителя и организовать вспомогательную структуру для быстрого решения технических и организационных проблем.

В качестве отдельной проблемы можно выделить решение текстовых задач, а точнее – представление в сети примеров решения ключевых задач и обмен решениями. Некоторые варианты организации подобной работы приведены автором в [2].

Литература

1. Дюндин А.В., Крылов Д.А. Методика использования социальных сетей в процессе дистанционной подготовки учащихся к ЕГЭ по физике // Инфокоммуникационные технологии в региональном развитии: сборник трудов шестой ежегодной межрегиональной научно-практической конференции. – Смоленск: ОГБОУ СПО СПЭК, 2013. – С. 77-81.

2. Дюндин А.В. Проблема перекодирования информации в процессе обучения // Известия Смоленского государственного университета. – 2008. - №2. – С. 160-169.

3. Полат Е.С. Дистанционное обучение. [Электронный ресурс] // Педагогические и информационные технологии в образовании. Научно-методический журн. URL: http://scholar.urg.ac.ru/ped_journal/numero4/pedag/polat.html. (Дата обращения: 14.03.14).

4. Федеральный закон от 29.12.2012 N 273-ФЗ (редакция от 23.07.2013) «Об образовании в Российской Федерации».

5. Хуторской А.В. Интернет в школе. Практикум по дистанционному обучению. - М.: ИОСО РАО, 2000. - 304 с.

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ПОДДЕРЖКИ РАБОТЫ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ, Г.А. СЕЛЕЗНЕВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: yry1101@gmail.com

УДК 37

Ключевые слова: *автоматизированная поддержка работы преподавателя, математические модели.*

Имеется достаточное количество теоретических разработок, ориентированных на создание системы автоматизированной

поддержки работы преподавателя (САПР преподавателя). Предлагается при практическом внедрении этих разработок воспользоваться интернет-технологиями и в частности облачными технологиями.

Одна из главных тенденций, характеризующих современный этап развития общества в целом и системы образования в частности, – широкое внедрение новых информационных технологий. Их использование в системе образования позволяет решать актуальные проблемы методики преподавания учебной дисциплины.

Необходимым условием использования новых информационных технологий в любой содержательной предметной области является формализация содержания этой предметной области. В настоящее время существует несколько математических моделей для представления знаний. К их числу относятся семантические сети, фреймы, логические языки (модели) и продукционные системы.

Для выполнения исследований по созданию САПР преподавателя авторами в качестве основной модели представления знаний выбрана семантическая сеть или графовая модель. Причиной такого выбора послужили, во-первых, сформировавшаяся в методике преподавания традиция представления предметной области в виде графа, и, во-вторых, наличие в теории графов алгоритмов, позволяющих относительно просто и эффективно решать задачи из области методики преподавания.

В Смоленском государственном университете исследования по созданию САПР преподавателя ведутся с 1985 года большим коллективом преподавателей высших и средних учебных заведений под руководством доктора педагогических наук Г.Е. Сенькиной. За это время были разработаны различные элементы САПР преподавателя, такие как [1-4]:

- *модель учебного пособия;*
- *модель задачи;*
- *модель задачника;*
- *оценка результатов обучения (надежности усвоения знаний);*
- *прочность связей элементов знаний;*
- *модели знаний ученика и цели обучения;*
- *индивидуальная траектория обучения;*
- *индивидуальная траектория обучения с учетом сложности задач;*
- *модель знаний группы учеников;*
- *траектория индивидуального выравнивания знаний;*
- *траектория обучения группы;*
- *модель для оценки набора задач;*

- *понятие ключевой задачи;*
- *автоматизация разработки образовательных стандартов;*
- *алгоритм обучения по различным учебным пособиям;*
- *алгоритм выбора оптимального набора тестовых заданий.*

Таким образом, коллективом проделана большая теоретическая подготовка по созданию САПР преподавателя. Однако практическая реализация проекта затрудняется в связи с недостатком ресурсов. Частичным решением проблемы является использование интернет-ресурсов для расширения коллектива разработчиков путем привлечения заинтересованных лиц к реализации теоретических разработок.

Так как в последнее время в интернет-технологии стали широко применяться облака, представляется перспективным использовать последние для практической реализации проекта.

Литература

1. Емельченков Е.П., Сенькина Г.Е., Киселева О.М. Методы математического моделирования в обучении: монография. – Смоленск, 2007. – 112 с.
2. Емельченков Е.П. Основы САПР: учебное пособие. - Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ, 2009. - 130 с.
3. Бояринов Д.А., Борисов А.П., Емельченков Е.П., Козлов С.В., Нырцова З.А. Информационное образовательное пространство: модели и технологии: монография. – Смоленск, 2010. – 215 с.
4. В.П. Губа [и др]. Математические методы в педагогической теории и практике (измерения, вычисления, методы математического моделирования и статистики): учебное пособие для вузов. - М.: «Принт-экспресс», 2011. - 270 с.

ФОРМИРОВАНИЕ КОМПЕТЕНЦИЙ УЧАЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ С ПОМОЩЬЮ СЕТЕВЫХ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСОВ: РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Д.Г. КИСЕЛЁВА

Смоленский государственный университет,

УДК 37

Ключевые слова: *сетевой учебно-методический информационный комплекс, сетевое обучение, анкетирование.*

В статье рассматриваются основные результаты исследования, проведенного среди учащихся 10-х классов общеобразовательного учреждения, связанные с обучением при помощи сетевого учебно-методического информационного комплекса.

Сегодня для современных школьников компьютер – это часть их окружающего мира, они с детства активно работают с ноутбуками, смартфонами, планшетами, которые используют для получения информации. И в связи с этим интерактивный учебник может оказаться удобнее и интереснее бумажного. Электронная интерактивная версия учебника – это хорошая замена бумажного учебника, но только в том случае, если она будет качественно выполненной и отвечать соответствующим требованиям [1].

Отправной точкой исследования стал вопрос о готовности учащихся к новой форме обучения - с помощью сетевого учебно-методического информационного комплекса (СУМИК).

Под сетевым обучением понимается способ организации обучения с помощью информационных технологий посредством налаженного канала связи для обеспечения обучающихся учебно-методическим материалом и для организации эффективного взаимодействия между участниками образовательного процесса [2].

Таким образом, сетевой учебно-методический информационный комплекс – это одна из разновидностей средств сетевого обучения. Поэтому практическое применение СУМИК предполагает наличие некоторых проблем.

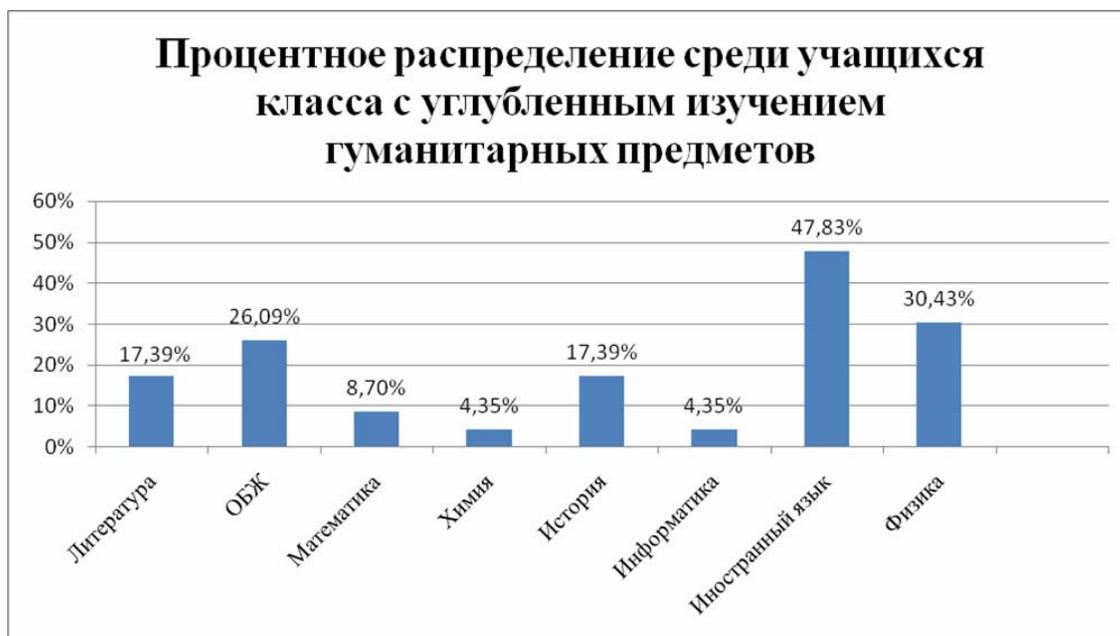
Анкетирование проводилось среди обучающихся 10-х классов общеобразовательной школы Смоленской области. Приняли участие 50 человек – 23 обучающихся гуманитарного профиля и 27 - физико-математического профиля.

Существенным вопросом в исследовании является вопрос о желании обучающихся изучать отдельные предметы с помощью СУМИК. Как показали результаты исследования, среди 50 опрошенных учащихся всего 10% не хотят использовать СУМИК для обучения. Причинами своего нежелания обучающиеся называют следующие: скучно обучаться вне класса одному, занимает много времени, трудно изучать предмет без учителя. Оставшиеся 90% высказываются положительно по этому вопросу и считают, что очень удобно изучать материал в любое свободное для них время. Одним из положительных моментов учащиеся выделяют возможность самому разбивать материал на некоторые блоки, которые можно изучать в течение некоторого времени, а также возможность всегда обратиться к первоисточнику и прочитать дополнительную литературу.

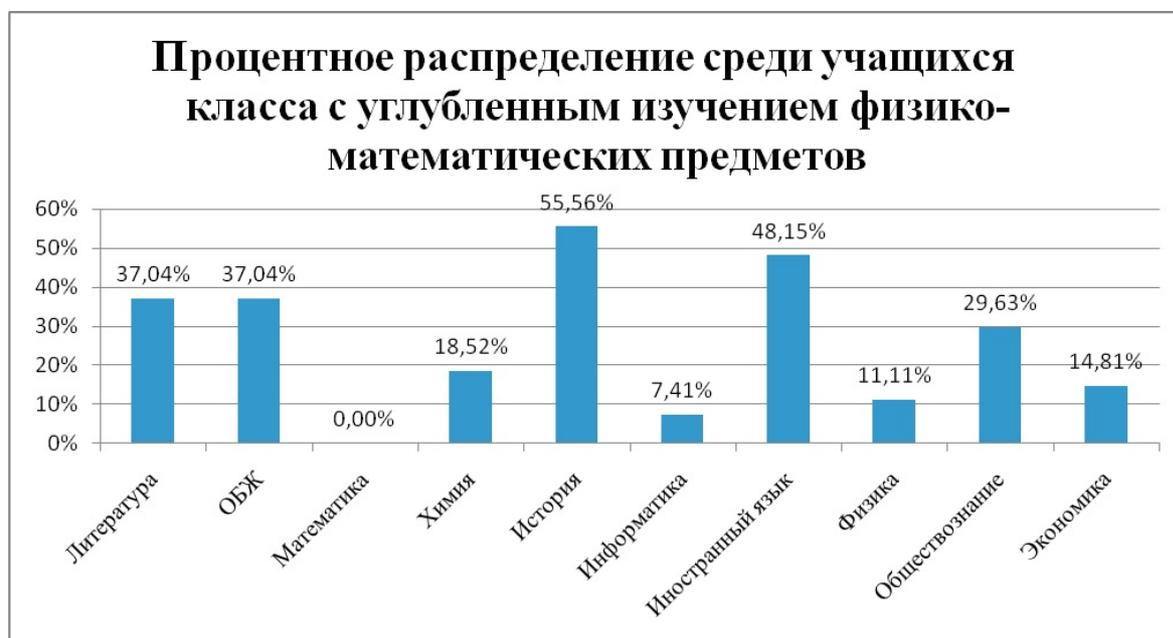
Можно сделать вывод, что для обучения с помощью СУМИК необходимы такие личные качества учащегося, как самоконтроль, самодисциплина и умение учащегося самому распределять свое личное время.

Еще одним из важных моментов проведенного исследования стало выделение предметов, которые обучающиеся хотели бы изучать в данной форме. Результаты приведены в гистограммах 1 и 2.

Гистограмма 1



Гистограмма 2



В результате сравнения процентного соотношения предметов, выбранных обучающимися, можно сделать вывод о том, что обучающиеся отдают предпочтение предметам гуманитарного профиля (история, иностранный язык, литература, ОБЖ) для изучения с помощью СУМИК. Предметы же физико-математического профиля

учащиеся не готовы изучать без учителя. Они обосновывают это тем, что гуманитарные предметы не требуют объяснения преподавателя, их достаточно прочитать и самостоятельно сделать выводы, а математика требует «направления», «толчка» от учителя, помощи в применении той или иной формулы. И самое главное - внимания, которого очень не хватает современному школьнику.

Самым интересным стал вопрос о тех компонентах, которые, по мнению обучающихся, должны присутствовать в сетевом учебно-методическом информационном комплексе. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Визуализация	Простота / понятность
	Структурированность
	Интерактивность
	Вызывать интерес
Разделы	Контрольные работы
	Самостоятельные работы
	Зачетные работы
	Домашнее задание
	Онлайн дневник
	График сдачи работ
Компоненты	Графики, таблицы
	Картинки
	Анимации
	Видео-файлы

В результате проведенного исследования можно сделать вывод, что школьники имеют возможность и желание изучать отдельные школьные предметы с помощью СУМИК. Большинство обучающихся четко представляют себе, каков должен быть качественно разработанный сетевой учебно-методический информационный комплекс. Таким

образом, проблема проектирования и построения сетевого учебно-методического информационного комплекса для общеобразовательных школ – актуальный предмет для целенаправленного научного исследования.

Литература

1. Современные тенденции в образовании и науке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31.10.2013 г.: - Ч. 25. - М.: ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2013. - 147 с .

2. Богомолов А.Н. Сетевое обучение и формы его реализации в учебном процессе (на примере курса дистанционного обучения русскому языку как иностранному «В эфире Россия»): [Электронный ресурс]. [200?]. - URL: <http://www.russia.edu.ru/information/met/rfl/2473/> (дата обращения: 11.12.2012).

ОБУЧЕНИЕ СТУДЕНТОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ФИЗИКИ

В.И. КОНАШЕНКО

Смоленский государственный университет

УДК 378.147.88

Ключевые слова: *информационные технологии, презентация, интернет, подготовка студентов-физиков к педагогической практике.*

Рассматривается процесс подготовки студентов специалитета по направлению «Физика и информатика» к предстоящим педагогическим практикам, к использованию в их период современных информационных технологий, а в качестве одной из форм обучения студентов использованию информационных технологий в процессе изучения физики предлагается презентация.

Обучение студентов использованию информационных технологий в процессе изучения физики может стать одной из эффективных форм организации учебного процесса специалитета, необходимой в предстоящей профессиональной деятельности, в подготовке к инновационной деятельности в школе.

Сегодня учебный процесс происходит в рамках динамического развития информационных технологий, и это ставит перед преподавателем проблему совершенствования образовательных методик. У студентов специалитета по направлению «Физика и информатика» есть две педагогические практики – на четвёртом и пятом

курсах. К использованию современных информационных технологий в период этих педпрактик будущих учителей физики необходимо готовить заранее, а это требует пересмотра содержания и методов обучения студентов физике.

Обучать будущих учителей физики использованию информационных технологий можно при изучении ими базового курса физики и различных спецкурсов. Для этого можно использовать как одну из форм презентации, а для её создания привлекать студентов к разработке материала самой презентации. Для этого студенту придётся глубже ознакомиться с содержанием изучаемых учебных дисциплин; выяснить круг вопросов, отбираемых для презентации; проработать имеющийся в интернете и электронных пособиях материал по теме предстоящей презентации. Размещение материала на слайде презентации требует от студента определённых усилий, так как сделать слайд информативным и наглядным не так просто. Здесь ему пригодятся навыки и знания, получаемые на занятиях по информатике. Делать поясняющие надписи и необходимые анимации, использовать графический ресурс – всему этому надо учиться заранее. Включать вставки текста, рисованные фигуры и рисунки, фотоснимки, другие графические объекты, диаграммы, кино и звук и тому подобное, всему этому можно научиться, если с этим работать. В интернете на различного рода сайтах сегодня можно найти много материалов, но разобраться с ним и отобрать нужный должен сам студент и до начала педпрактики. На занятиях под руководством преподавателя всё это можно опробовать и исправить ошибки, которых достаточно и в интернете.

МЕТОДИКА ЗАМЕРА ЭФФЕКТИВНОСТИ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА: КРИТЕРИИ И ПРИЗНАКИ

Е.И. КОЧАНЕНКОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: hoochimen@gmail.com

УДК 37.01

Ключевые слова: *автоматизация учебного процесса, визуализация данных, удобство интерфейса.*

В статье приведен критериально-признаковый аппарат измерения эффективности автоматизированного визуального представления данных педагогического процесса общеобразовательной организации.

В предшествующих работах [1, 2] нами была обоснована актуальность автоматизации визуального представления данных педагогического процесса общеобразовательной школы, определены основные понятия.

В таблице 1 представлены критерии и параметры методики замера эффективности автоматизированной визуализации представления данных педагогического процесса.

Таблица 1

Кри- терии	Признаки	Характеристика признака (качественные показатели)	Методика / процедура диагностирования
Технические	Скорость ввода / обработки информации	Интегративные показатели: 1. Ресурсы (оплата человеко-часов за выполнение определенного объема работ) 2. Корректность ввода и обработки информации	Для одной группы сформировать два задания, в которых итоговым результатом будет являться заполненная отчетность, одинаковая в первом и во втором случае. Разница заключается в представлении интерфейса для ввода первичных данных, а также их дальнейшей обработки. Для сравнения будет производиться замер времени, потраченного на выполнение каждого задания, а также мониторинг корректности ввода данных их и первичной обработки
	Проверка корректности ввода		
	Скорость восприятия выходной информации		
Психологические	Форма	Инфографика решает такие задачи как понятность и удобство, выделение центров для концентрации внимания и полнота отображения данных, динамика изменения и тенденции к развитию	Наблюдение, интервьюирование, анкетирование
	Размер		
	Яркость		
	Цвет		
	Направление		
	Текстура		
	Расположение объектов		
	Последовательность		
	Группировка		
	Сопровождение дополнительными визуальными объектами		

Педагогические	Обеспечение защиты статуса личности (персональных данных, личного пространства, прав) в педагогическом процессе	1. Педагогические требования к администрированию доступа к информации. 2. Частота выводов результатов мониторинга. 3. Систематичность вывода результатов	Мониторинг результатов на фоне общей статистики обеспечит мотивационную, стимулирующую, организующую, мобилизующую и воспитывающую функции. Замерить их можно по результатам динамики успеваемости как по каждому ученику, так и по любым сформированным группам (классы, параллели, и др.) в любых разрезах (по итогам дня, недели, месяца, четверти года)
	Обеспечение доступа к данным только для персонала, исключаящего огласку информации, способной нанести педагогический вред субъектам образовательного пространства		
	Обеспечение индивидуального доступа к личной успеваемости, а также визуализации динамики в ключевых разрезах по каждому ученику		
	Обеспечение открытого доступа и сопровождение визуализацией информации, относящейся к индивидуальным и коллективным достижениям		

Предложенный критериально-признаковый аппарат позволит диагностировать эффективность разработанной автоматизированной системы визуализации данных педагогического процесса, обозначить основные проблемы и пути их решения.

Литература

1. Блиндюк Р.В., Кочаненков Е.И., Метелица И.Е. Автоматизированное проектирование в образовательном процессе // Современные проблемы науки и образования. - 2013 - № 6. - С. 307-308.
2. Кочаненков Е.И. Педагогические условия визуализации автоматизированного проектирования процесса обучения: постановка проблемы // ФЭн-наука. - 2012. - № 12 (15). - С. 75-76.

ГОТОВНОСТЬ ШКОЛЬНИКОВ К УСКОРЕННОМУ ОБУЧЕНИЮ: РЕЗУЛЬТАТЫ КОНСТАТИРУЮЩЕГО ЭТАПА ЭКСПЕРИМЕНТА

О.О. ЛЕЛЮХИН, Г.Е. СЕНЬКИНА

Школа-интернат имени Кирилла и Мефодия,
Смоленский государственный университет, г. Смоленск,
e-mail: leluhin@ya.ru

УДК 37.01

Ключевые слова: *ускоренное обучение, мотивы обучения, готовность школьников к ускоренному обучению.*

В статье приведены результаты констатирующего этапа эксперимента по выявлению готовности школьников к ускоренному обучению. Сделан вывод о недостаточной сформированности у учащихся мотивов ускоренного обучения в связи с низкой информированностью о его особенностях и возможными рисками.

Современная система образования позволяет учащимся обучаться ускоренно [1], однако на сегодняшний день технология и терминология ускоренного обучения изучены недостаточно полно [2]. Также малоизученной является потребность школьников в ускоренном обучении.

Нами проведено исследование в 10 классе физико-математического профиля школы с углубленным изучением отдельных предметов имени Кирилла и Мефодия Смоленской области с целью выявления отношения школьников к ускоренному обучению, а также содержания, которое они вкладывают в это понятие. В анкетировании приняло участие 27 человек.

Учащимся были предложены 3 варианта определения понятия «ускоренное обучение» для выбора наиболее «подходящего», а также возможность самим определить это понятие. Результаты опроса представлены в виде таблицы.

Таблица 1

Распределение мнений учащихся о содержании понятия «ускоренное обучение»

Вариант определения	Количество респондентов, выбравших этот вариант
Обучение в обычном темпе с сокращением сроков обучения (например, 1 год вместо 2)	2 (7%)
Обучение в быстром темпе (увеличение количества уроков по этому предмету) без сокращения сроков обучения	7 (26%)
Обучение в быстром темпе с сокращением сроков обучения	18(67%)
Свой вариант	0

Желающих обучаться ускоренно оказалось 12 человек (44%), при этом тех, кто дал абсолютно утвердительный ответ «Я хотел(а) бы обучаться ускоренно», еще меньше, всего 3 человека (11%). Остальные 9 человек (33%) все же не совсем уверены в выборе, потому что выбрали ответ «Скорее да, чем нет».

Для изучения мотивов положительного или отрицательного отношения к ускоренному обучению анкета была дополнена рядом уточняющих вопросов.

Среди возможных мотивов, побуждающих учащихся обучаться ускоренно, мы выбрали 4 и предложили респондентам выбрать один или несколько из них или написать свой вариант. На этот вопрос ответили не все, однако результаты ответивших представлены в таблице (табл. 2).

Подводя промежуточный итог, можно отметить, что основной причиной низкой мотивации ускоренного обучения являются опасения учащихся, что их знания будут поверхностными и непрочными, то есть образование будет в этом случае некачественным.

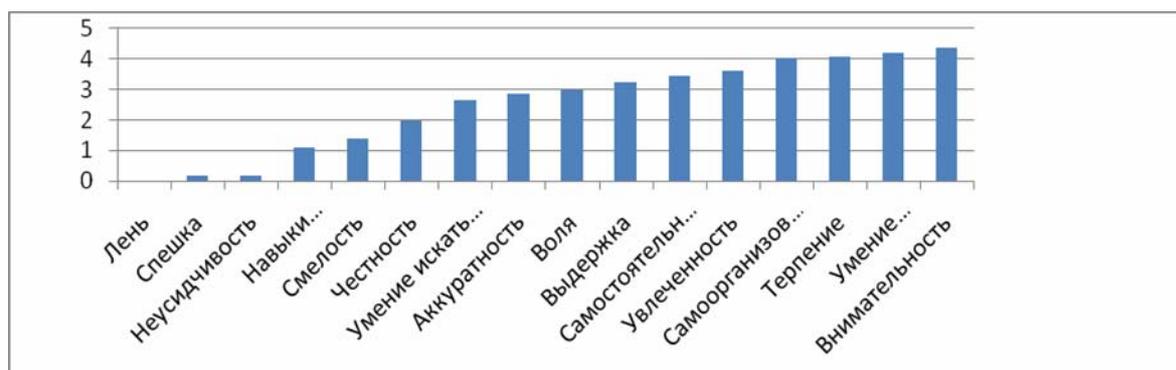
Таблица 2

Рефлексия учащимися возможности ускоренного обучения

Начало фразы	Варианты окончания	Количество респондентов, выбравших этот вариант
Я не хочу обучаться ускоренно, так как...	...при ускоренном обучении полученные знания будут поверхностные и непрочные	8 (53%)
	...я думаю, что уже занимаюсь в достаточном темпе	4 (26%)
	...это сложно	2 (13%)
	...у меня нет подходящих способностей	3 (20%)
Я хотел бы изучать предметы ускоренно для того, чтобы...	... использовать оставшееся время для углубленного изучения других предметов	4 (40% ответивших)
	... сократить сроки обучения в школе.	5 (50% ответивших)
	... догнать одноклассников по программе	0
	... узнать новое раньше других	1 (10% ответивших)

Какие же качества, по мнению школьников, являются необходимыми для ученика, решившего заниматься ускоренно?

Мы предложили респондентам 16 качеств, каждое из которых можно было оценить целыми числами от 1 до 5. Мы вычислили математическое ожидание для каждого качества и построили диаграмму для определения наиболее необходимых качеств (диаграмма 1).



Математическое ожидание качеств личности, необходимых для ускоренного обучения

Самыми главными (математическое ожидание не ниже 4) учащиеся считают *внимание, умение трудиться, терпение и самоорганизованность*, а необязательными (математическое ожидание не выше 1) - *лень, спешку и неусидчивость*.

Таким образом, в результате проведенного исследования, можно сделать вывод о недостаточно высоком уровне готовности учащихся к ускоренному обучению в связи с низкой информированностью, возможными рисками такого обучения.

Литература

1. Лелюхин О. О. Педагогические условия формирования готовности школьников к ускоренному обучению естественнонаучным дисциплинам: постановка проблемы // Современные тенденции в образовании и науке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2013 г.: в 26 ч. Ч.10: - Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2013. - 163 с.

2. Лелюхин О.О., Сенькина Г.Е. Ускоренное обучение математике в школе: проблема, феномен, понятие // Интеграция общего и профессионального математического образования стран европейского содружества в контексте Болонского соглашения. – Брянск: БГУ, 2014.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММЫ ANTCONC 3.2.4W ДЛЯ АНАЛИЗА ХУДОЖЕСТВЕННОГО ТЕКСТА

Е.С. ЛУНЬКОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: ttf32lunkova@yahoo.com

УДК 81.139

Ключевые слова: *лингвистический анализ художественного текста, корпус, AntConc, KWIC.*

Рассматривается использование программы AntConc 3.2.4w для лингвистического анализа художественного произведения на материале повести А.С. Пушкина «Метель».

AntConc 3.2.4w – это программа для выполнения исследований по корпусной лингвистике. Программа работает с ОС Microsoft Windows, Macintosh OS X, Linux; создана на основе языка программирования Perl.

Функции данной программы позволяют получить количественные результаты, существенные для анализа художественного произведения. Для иллюстрации возможностей лингвистического анализа с применением данной программы была выбрана повесть А.С. Пушкина «Метель».

Функция «Concordance Tool» показывает результаты поиска ключевого слова в контексте (формат KWIC, «key word in context»). Например, слово «метель» встретилось в корпусе произведения в общей сложности семь раз, включая название; уточненный поиск по прописным и строчным буквам в начале слова позволил найти три случая употребления прописных и четыре - строчных букв.

Опция Advanced Search делает возможным более сложный поиск по корпусу художественного произведения. Например, один из вариантов такого усложненного поиска – это вывод на экран в формате KWIC целого ряда искомых слов, напечатанного в строке поиска или загруженного списком из отдельного файла. Опция также позволяет пользователю получить расширенные контексты с заданным словом без введения большого количества слов в строке поиска. Например, если нужно изучить, как часто в тексте Пушкина встречается сочетание «Мария Гавриловна», рядом с которым на расстоянии пяти слов справа или слева стоит слово «Бурмин», необходимо набрать «Мария Гавриловна» в окне поиска, слово «Бурмин» в окне контекста (context word) и выбрать границы поиска слева и справа (1L, 2R и т.д.).

Функция «Concordance Plot Tool» позволяет определить, где именно на протяжении произведения используется то или иное слово. Графически результаты исследования представлены в виде «штрихкода». К примеру, слово «метель» в повести Пушкина встречается пять раз в первой части и два раза во второй части произведения.

Функция «File View Tool» предназначена для демонстрации фрагмента текста с заданным для поиска словом в отдельном окне. Эта опция позволяет более детально исследовать результаты, полученные после использования других функций программы, рассмотреть контекстное окружение лексемы, что бывает очень важно для изучения художественных образов.

Функция «Clusters (N-Grams)» предназначена для сканирования всего корпуса художественного произведения с целью поиска сочетаний с длиной N (двух, трех слов и т.д.). Данные сочетания выделяются механически, без соотнесения со смыслом или грамматическими особенностями слов. Полученные результаты (для повести Пушкина - 3178 неповторяющихся парных сочетаний, при общем количестве парных сочетаний 3360) позволяют определить наиболее частотные линейные сочетания слов в корпусе и проанализировать их грамматические особенности. Расширение поиска до трех-пяти единиц позволяет установить наиболее частотные виды сочинительной или подчинительной связи в художественном произведении, т.е. проанализировать роль грамматических конструкций в структуре простого предложения художественного текста.

Функция «Word List» предназначена для составления частотного словаря произведения. Данный вид анализа позволил определить, что в повести Пушкина «Метель» использовано 3434 слова, из них наиболее частотны служебные слова - союз «и» (145 раз), предлог «в» (96 раз) и частица «не» (67 раз). Из знаменательных слов наиболее распространенными являются местоимение «она» (23 раза), а также имена главных героев «Владимир» (23 раза) и «Мария Гавриловна» (20 раз).

Таким образом, программа AntConc позволяет работать с корпусом текста, созданным в интересах исследователя, и получать не только количественные (частотные), но и качественные результаты, касающиеся лексических и грамматических особенностей произведения.

Литература

1. <http://www.antlab.sci.waseda.ac.jp/software.html>.
2. <http://www.rvb.ru/pushkin/01text/06prose/01prose/0859.htm>.

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ САЙТОВ: НАЧАЛЬНЫЙ ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ СРЕЗ ФОРМИРУЮЩЕГО ЭТАПА ЭКСПЕРИМЕНТА

И.Е. МЕТЕЛИЦА

Смоленский государственный университет,
e-mail: ira-for-ira@yandex.ru

УДК 37:004

Ключевые слова: *образовательный сайт, автоматизированное проектирование.*

В данной статье представлены анализ и результаты анкетирования учителей школы № 29 г. Смоленска с целью выявления готовности к проектированию образовательных сайтов. Сделан вывод о необходимости автоматизированного проектирования при создании образовательных сайтов.

Широкое использование информационных технологий позволяет взаимодействовать учителю и ученику не только лично, но и удаленно с использованием образовательного сайта в сети Интернет [2]. Однако на данный момент количество качественных образовательных сайтов общеобразовательных организаций в сети Интернет недостаточно, либо такие сайты не всегда удовлетворяют основным требованиям, как техническим, так педагогическим [1]. Вместе с тем рядовые учителя, как правило, не обладают готовностью к проектированию образовательных сайтов. Очевидна необходимость развивать автоматизированное проектирование образовательных сайтов, что позволило бы повысить качество проектируемых сайтов и готовность учителей к их автоматизированному проектированию [3]. Нами проведено исследование среди учителей школы № 29 города Смоленска, в котором участвовали 20 учителей, по результатам анкетирования осуществлен анализ и математическая обработка данных.

На вопрос об известных программных средствах 50% опрошенных ответили, что им известен конструктор сайтов Яндекс.Народ, 15% опрошенных имеют представление о конструкторе сайтов uCoz, 25%



опрошенных известен конструктор сайтов Jimdo, кроме этих конструкторов в анкетах указывали, как известные, конструкторы Google.Sites и WordPress. Стоит отметить, что 20% респондентов не знают ни одного конструктора сайта. При ответе на вопрос, в котором

необходимо выбрать утверждения, которые характеризуют школьный образовательный сайт, получены следующие результаты: учащиеся младшей, средней и старшей школы должны иметь доступ к различной информации – 60%, учащиеся могут просматривать информацию, только по своему профилю – 20%, родители могут просматривать оценки – 55%, родители могут просматривать задания – 65%, родители могут просматривать учебные материалы – 25%, родители могут задать вопросы на сайте – 50%, учитель может выложить домашнее задание –

55%, учитель может получить домашнее задание от учеников – 35%, учитель может отвечать на вопросы учеников и родителей – 55%, администрация – должна иметь возможность отвечать на вопросы учеников и родителей – 70%, должна быть возможность обучения учащихся дистанционно – 60%.

Из всех респондентов 50% хотели бы создать свой сайт, некоторые отмечают потребность поделиться информацией в обмене опытом работы, в помощи ученикам и учителям. Остальные респонденты отмечают нехватку времени как главную причину отказа. Также необходимо отметить, что 65% респондентов хотели бы создать сайт методического объединения школы, разрабатываемый методическим объединением, 10% хотели бы создать свой собственный сайт, не связанный с сайтом школы, 10% хотели бы создать свой собственный сайт, связанный с сайтом школы, и 15% удовлетворила бы страничка, отведенная на школьном сайте.

Из диаграммы видно, что большинство учителей предпочитает при проектировании пользоваться уже готовой структурой с возможностью добавления страниц либо готовыми шаблонами страниц, что указывает на необходимость применения автоматизированного проектирования образовательных сайтов.

Литература

1. Блиндюк Р. В., Кочаненков Е. И., Метелица И. Е. Анализ информатизации образовательных учреждений города Смоленска // Концепт. – 2013. – № 12.
2. Метелица И. Е. Формирование информационно-образовательной среды в школе при помощи образовательного сайта // Студенческая наука – 2013. Том III: Естественно-математическое направление: сборник статей. - Смоленск: СмолГУ, 2013. – С. 93–96.
3. Метелица И. Е. Педагогические условия автоматизированного проектирования образовательных сайтов: констатирующий этап эксперимента // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIV Междунар. научн. конф. – Смоленск: СмолГУ, 2013. – С. 214–217.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

Е.В. МОРОЗОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: elena_morozova1972@mail.ru

УДК 37.025.7

Ключевые слова: *логическое мышление, логическая рефлексия, компьютерные средства, электронный учебник, тестовая программа, сайт.*

Изучен вопрос о возможностях использования компьютерных средств для развития логического мышления с учетом индивидуальных особенностей и образовательных запросов учащихся.

В условиях современной системы образования проблема развития логического мышления учащихся приобретает особую актуальность. При изучении любой школьной дисциплины учащиеся должны знать определения понятий, составляющих содержание данной науки, уметь анализировать, классифицировать, доказывать. Однако наблюдения показывают, что большинство школьников не имеет достаточного уровня логических умений, необходимого для успешного обучения.

В настоящее время развитие логического мышления учащихся проводится в общеобразовательной практике без определенной системы, недостаточно теоретически обоснованы и практически разработаны цели, содержание, средства, методы, формы развития рефлексивно обусловленного логического мышления. Анализ работы учителей в современной общеобразовательной школе свидетельствует о том, что уровень практических усилий по развитию логического мышления и рефлексии учащихся в процессе обучения недостаточно высок.

В рамках дипломных проектов нами разработаны и апробированы такие компьютерные средства для развития логического мышления учащихся, как:

- тестирующая программа «Проверь свой уровень логического мышления!» (Федорова Ю.Ю., 2007),
- электронное учебное пособие «Учимся доказывать!» (Комбасова Ю.Н., 2008),
- сайт «Логика для школьников ☺» (Евтихова О.В., 2010),
- интерактивный электронный задачник «Учимся решать текстовые задачи!» (Селезнева Г.А., Копаренко Е.Н., 2013).

Тестирующая программа «Проверь свой уровень логического мышления!» является средством оптимизации работы учителя по диагностике уровня логического мышления и логической рефлексии. В основу создания программы положены такие методики, как «Выделение существенных признаков», «Классификация понятий», «Сложные аналогии», «Исключение понятий». Также тестирующая программа «Проверь свой уровень логического мышления!» может использоваться учениками для самодиагностики с целью дальнейшего саморазвития и самосовершенствования.

Электронное учебное пособие «Учимся доказывать!» разработано с целью успешного формирования приёмов открытия фактов и поиска доказательств математических предложений, для проведения систематической и целенаправленной самостоятельной работы

учащихся. Пособие включает в себя: тест на определение исходного уровня сформированности приёмов открытия фактов и поиска доказательств математических предложений, обучающие уроки, в ходе которых учащиеся знакомятся с основными приёмами доказательства, тест на определение итогового уровня сформированности приёмов доказательства математических предложений.

Сайт «Логика для школьников ☺» способствует не только развитию логического мышления и рефлексии, но и формированию логической культуры школьников в целом. В структуре сайта имеются такие вкладки, как: теория, задачи с решением, реши сам, тесты, афоризмы, персоналии. Кроме обучающих логических задач и упражнений имеются ссылки на флэш-игры, позволяющие учащимся проводить логические операции, применять логические формы мышления в игровой форме, что способствует развитию интереса к обучению.

Интерактивный электронный задачник «Учимся решать текстовые задачи!» способствует развитию логического мышления и рефлексии учащихся через текстовые задачи, устранению таких учебных проблем, как анализ условия задачи, составление математической модели, организация поиска решения. В указанном электронном пособии представлен ряд задач по разделам: задачи на повышение и понижение концентрации, задачи на смешивание растворов различной концентрации, задачи на высушивание, задачи на работу. Особенность обучающих задач заключается в том, что к каждой задаче прилагаются подсказки, которые помогают учащимся разобраться с решением. При необходимости учащиеся могут пользоваться встроенным калькулятором прямо в задачнике.

В ходе апробации указанных компьютерных средств выявлена положительная динамика уровня овладения учащимися основными логическими операциями и формами мышления, что способствовало повышению уровня развития логического мышления и логической рефлексии учащихся.

А.Г. КУРОШ И СМОЛЕНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. ПЕТРОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: VAPetrov@smolgu.ru

УДК 37.025.7

Ключевые слова: *Смоленская губерния, выдающийся советский математик А.Г. Курош, архив Смоленского государственного университета.*

В работе излагаются некоторые факты из жизни и деятельности выпускника Смоленского государственного университета А.Г. Куроша – выдающегося алгебраиста прошлого столетия. Материал заметки основывается на документах, обнаруженных в архиве Смоленского государственного университета.

«С большим удовольствием всегда вспоминаю, что я воспитанник Смоленского университета. Когда-нибудь в будущем, когда я лучше созрею для того, чтобы стать автором мемуаров, постараюсь восстановить в памяти многие различные детали, относящиеся к незабываемым пяти годам, проведенным мною в стенах Смоленского университета (четыре студенческих года и первый год аспирантуры)». Эти слова [1] принадлежат А.Г. Курошу – самому крупному математику из всех выпускников Смоленского университета, посвятивших жизнь этой науке.

Александр Геннадьевич Курош (19.01.1908, Ярцево, Смоленская губерния – 18.05.1971, Москва) – выдающийся советский математик-алгебраист, доктор физико-математических наук. Автор многочисленных работ, монографий и учебников, сохраняющих ценность и в наши дни. Удостоен Государственной премии СССР. С 1930 года и до конца жизни работал в Московском университете, возглавлял кафедру высшей алгебры. Высокий престиж московской алгебраической школы – в немалой степени его личная заслуга.

С 1924 по 1929 год А.Г. Курош был студентом и аспирантом (научный руководитель П.С. Александров) Смоленского университета. К сожалению, математик не дожил до мемуарных лет и не описал свои студенческие годы.

В настоящей заметке в качестве штрихов к биографии А.Г. Куроша рассказывается о некоторых документах, обнаруженных в архиве университета (который сильно пострадал в годы войны).

Имеется «Отзыв о квалификационной работе А.Г. Куроша "Иррациональное число и построение системы вещественных чисел"», характеризующий математические способности будущего ученого. Отзыв заканчивается таким выводом: «Работа А.Г. Куроша по своим качествам, по характеру и стилю изложения, по формулировке проблем и анализу условий их разрешения должна быть признана, мне кажется, работой монографического значения, отвечающей более высоким требованиям, чем тем, какие уместно предъявлять к квалификационной работе студента педагогического факультета. А. Ребиков. 12.06.1928 г.».

Об отношении к учебе, участии в жизни факультета студента Куроша (хоть и очень лаконично) говорится в выписке из протокола заседания Математической предметной комиссии от 23.04.1928 г. (приводится в сокращении): «Постановили: кандидатуру А.Г. Куроша в

аспиранты по математике считать вполне желательной. Комиссия отмечает выдающиеся способности и успеваемость т. Куроша в продолжении всех курсов его обучения в университете по всем дисциплинам, особенно по математике, знание немецкого языка, активное участие в Предметной Комиссии, председательство в Математическом студенческом кружке».

Еще один документ из архива – рукописное заявление А.Г. Куроша на имя директора университета Р.И. Белкина от 22.03.1930 г. о переводе в аспирантуру МГУ из-за «почти полного отсутствия в библиотеках Смоленска и Университета текущей журнальной математической литературы, что делает совершенно невозможным ведение плодотворной научной работы» (заявление написано красивым и разборчивым почерком).

В мемуаристике [2] упоминается, что А.Г. Курош не забывал Смоленска. В 1941 году приезжал для чтения лекций студентам и преподавателям. После войны переписывался и встречался с ведущим математиком нашего физмата Б.И. Аргуновым.

Литература

1. Курош А.Г. Педфак Смоленского университета (1924–1929) // СмолГУ в мемуарах и заметках. - Смоленск, 2011.
2. Маллер М.З. Это была трудная, но прекрасная пора // Там же.

ИННОВАЦИОННАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ШКОЛЬНОЙ ПРЕДМЕТНОЙ КАФЕДРЫ КАК УСЛОВИЕ РАЗВИТИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ УЧИТЕЛЯ: ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Т.И. РЫБАЛКИНА

СОШ № 29, г. Смоленск,
e-mail: rybalkinati@gmail.com

УДК 373.1

Ключевые слова: *инновационная деятельность, школьная предметная кафедра, профессиональная компетентность учителя.*

В статье представлено обоснование необходимости исследования особенностей инновационной деятельности школьной предметной кафедры как условия развития профессиональной компетентности учителя.

Стратегическая цель государственной политики в области образования - повышение доступности качественного образования,

соответствующего требованиям инновационного развития экономики, современным потребностям общества и каждого гражданина.

Реализация этой цели предполагает решение приоритетных задач, одной из которых является обеспечение инновационного характера базового образования.

Главным результатом школьного образования должно стать его соответствие целям опережающего развития. Школьников необходимо вовлечь в исследовательские проекты, ученические конференции и семинары, творческие и спортивные конкурсы, в ходе которых они научатся изобретать, понимать и осваивать новшества.

Таким школьникам нужны педагоги, открытые ко всему новому, способные заниматься инновационной деятельностью.

Современный педагог – это человек, готовый к построению своей педагогической деятельности на высоком научно-методическом уровне; человек, который самостоятельно учится, повышает свою квалификацию, развивается; человек, способный инициировать творчество в собственной профессиональной деятельности, вести исследовательскую работу, быстро ориентироваться в профессиональном поле.

На организацию инновационной научно-исследовательской деятельности учителей ориентирована предметная кафедра школы, осуществляющая руководство подготовкой научно-педагогических кадров и повышение их квалификации, ведущая научную работу по профилю кафедры, организующая и руководящая научно-исследовательской работой обучаемых. Она может взять на себя функцию организации подготовки учителя к инновационной деятельности, позволит расширить поле самостоятельной инновационной творческой педагогической деятельности учителя.

Инновационная деятельность школьной предметной кафедры как условия развития профессиональной компетентности учителя стала предметом целенаправленного научного исследования в рамках компетентностного подхода.

Проведенный краткий анализ существующего научного знания и реальной педагогической практики, представленный в статье «Инновационная деятельность школьной предметной кафедры как условия развития профессиональной компетентности учителя: постановка проблемы» [6], позволил определить проблематику инновационной деятельности школьной предметной кафедры как условия развития профессиональной компетентности учителя в виде следующих **противоречий**:

- между существующей традиционно сложившейся практикой деятельности профессиональных объединений педагогов как методических групп, осуществляющих мониторинг и коррекцию

деятельности учителей, и назревшей необходимостью расширения поля самостоятельной творческой инновационной деятельности;

- между объективной потребностью системы образования в компетентных кадрах, способных организовать обучение и воспитание обучающихся, вести инновационную работу в современных социально-экономических условиях, и недостаточным уровнем их подготовленности к инновационной деятельности в рамках существующих школьных объединений учителей.

Исходя из выявленных противоречий, мы определили проблему исследования: каковы особенности инновационной деятельности школьной предметной кафедры как условия развития профессиональной компетентности учителя.

Разрешение данной проблемы обусловило выбор темы нашей работы: «Инновационная деятельность школьной предметной кафедры как условие развития профессиональной компетентности учителя».

Объектом исследования является инновационная деятельность как условие развития профессиональной компетентности учителя.

Предметом исследования определена инновационная деятельность школьной предметной кафедры как условия развития профессиональной компетентности учителя.

Целью исследования является теоретическое обоснование, разработка и апробация системы организации инновационной деятельности школьной предметной кафедры как условия развития профессиональной компетентности учителя.

Гипотеза исследования состоит в предположении, что процесс развития профессиональной компетентности учителя в условиях инновационной деятельности будет эффективным, если:

- будут определены сущность, содержание, особенности организации инновационной деятельности для данной модели образовательного учреждения;

- будут сформулированы и реализованы функции, задачи, содержание, методы работы школьной предметной кафедры с позиции компетентностного подхода;

- инновационная деятельность школьной предметной кафедры будет организована как приоритетная в структуре деятельности кафедры.

В соответствии с объектом, предметом, целью и гипотезой определены следующие задачи исследования:

1) обобщить современные теоретические положения о сущности, содержании и факторах инновационной деятельности как условия развития профессиональных компетенций учителя.

2) выявить сущность понятия «школьная предметная кафедра».

3) построить модель школьной предметной кафедры как условия развития профессиональной компетентности учителя.

4) апробировать разработанную модель инновационной деятельности школьной предметной кафедры как условия развития профессиональной компетентности учителя.

В ходе исследования использованы следующие методы исследования: теоретические – анализ философской и психолого-педагогической литературы, документации, моделирование; эмпирические – наблюдение, анкетирование, тестирование, беседы с субъектами образовательного процесса, ранжирование; экспериментальные – опытно-экспериментальная работа, включающая диагностический и формирующий этапы; статистические – количественный, качественный и сопоставительный анализ данных, полученных в ходе исследования, и их обработка.

Научная новизна исследования состоит в том, что:

- уточнена сущность понятия «школьная предметная кафедра»;
- раскрыто понятие «инновационная деятельность школьной предметной кафедры»;
- разработана модель инновационной деятельности школьной предметной кафедры как условия развития профессиональной компетентности учителя.

Теоретическая значимость исследования определяется раскрытием возможности использования понятий «школьная предметная кафедра» и «инновационная деятельность школьной предметной кафедры» для развития теории инновационной деятельности образовательного учреждения.

Практическая значимость определяется возможностью использования разработанных методических рекомендаций по проектированию инновационной деятельности школьной предметной кафедры, а также методических рекомендаций учителю по самоорганизации инновационной деятельности.

Таким образом, полученная модель и рекомендации могут использоваться в повседневной практической деятельности учителя, администрации, служить основой, алгоритмом проектирования и построения новых моделей организации деятельности для конкретного образовательного учреждения.

Литература

1. Васенина Т.И. Методическое объединение как условие развития профессиональной компетентности педагогов: автореф. дис... канд. пед. наук. - Челябинск, 2008.

2. Козырева О.А. Условия развития профессиональной компетентности педагога в процессе повышения квалификации: автореф. дис... канд. пед. наук. - Томск, 2004.

3. Костылева Н.Е. Психолого-педагогические условия эффективности управления развитием профессиональной компетентности учителя в процессе гуманизации и демократизации школы: автореф. дис... канд. пед. наук. - Казань, 1997.
4. Макарова Т.Н., Макаров В.В. Организация деятельности методического объединения в школе.- М.: Центр «Педагогический поиск», 2010.
5. Мотышева А.А. Профессиональное объединение педагогов как субъект развития образовательного учреждения: автореф. дис... канд. пед. наук. - Омск, 2007.
6. Рыбалкина Т.И. Инновационная деятельность школьной предметной кафедры как условие развития профессиональной компетентности учителя: постановка проблемы // Современные тенденции в образовании и науке: сборник научных трудов по материалам научно-практической конференции 31 октября 2013 г.: в 26 ч. – Ч. 25. - Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2013. - С. 110.
6. Сорокина Т.М. Психологические условия развития профессиональной компетенции учителя начальной школы: автореф. дис... доктора. пед. наук. - Москва, 2002.
7. Концепция модернизации российского образования.
8. Президентская инициатива «Наша новая школа».
9. Федеральная целевая программа развития образования на 2011-2015 годы.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И КАЧЕСТВО ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ. ПРАКТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

В.И. САВЧЕНКОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: smolgreen@mail.ru

УДК 371.31

Ключевые слова: *информационные технологии, дистанционное обучение, электронная литература, возможности Интернета.*

Анализируется влияние даже ограниченного комплекса информационных технологий на качество подготовки специалистов. Приведены практические результаты апробации. Рассмотрены перспективы расширения комплекса.

Немало талантливых вузовских педагогов (технические дисциплины, физика и т.д.), утверждавших, что педагогика не является наукой, на своих занятиях интуитивно использовали «образовательные технологии»: проблемное обучение, игровые технологии и т.д. С другой стороны, школьные учителя, самоотверженно посвятившие себя внедрению яркой педагогической новации, неизменно к ней «охладевали» - явный приоритет той или иной технологии приводил к успеху только при наличии идеально созвучной ей личности педагога.

Например, на длительное применение технологии интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала В.Ф. Шаталова у многих «просто не хватает здоровья». Итак, приоритеты и порядок использования образовательных технологий в конкретных ситуациях определяются на интуитивном уровне из-за огромного числа особенностей и обстоятельств.

Полностью соответствуют понятию «технология» информационные технологии в образовании [1], поскольку действенны с любым набором субъектов образовательного процесса. Многие целеустремленные люди при необходимости интенсивного изучения нового для них научного направления требуют одно и то же – уединения, качественной литературы с иллюстрациями и видео-приложениями, консультаций специалистов, т.е. всего того, что может предоставить дистанционное образование. Наша практика показала, что регулярное использование даже ограниченного комплекса информационных технологий может резко повлиять на качество подготовки специалистов. Около половины студентов приходили на занятия по курсу «Водоснабжение и водоотведение» со своими ноутбуками. Поэтому использование компьютерного класса позволяло каждому студенту индивидуально работать с компьютером на лекционных и семинарских занятиях. Лекция начиналась с пятиминутной вводной части, после которой каждый студент изучал электронный вариант лекции, переданный по сети или полученный заранее. Наряду с лекциями студентам было переданы несколько учебников по курсу «Водоснабжение и водоотведение» в электронном виде с указаниями, где, по мнению преподавателя, качественно изложен тот или иной материал. Преимущество в том, что каждый студент работал с присущей ему скоростью обработки материала. Резко повышался КПД занятия – на «классической» лекции немало слушателей часто не успевают воспринять то или иное положение и до конца рассмотрения вопроса механически записывают лекцию, предполагая разобраться позднее. К тому же, в «классическом» варианте на технических дисциплинах студент до половины лекционного времени тратит на «рисование» схем, чертежей и т.п. В нашем случае лектор по очереди консультирует студентов, устраняет «тупиковые» ситуации. Студенты индивидуально и на большом экране просматривают учебные видео и фото, проходят «электронное» тестирование. На семинарских занятиях приоритет отдается проблемному обучению с широчайшим использованием возможностей Интернета. В нем студенты часто находили способы разрешения тех или иных противоречий. Текущие консультации и консультации перед зачетом проводились и по электронной почте.

Результат следующий. В конце обучения каждый студент составил не менее 12 вопросов для тестирования с четырьмя вариантами

ответа. Причем каждый ответ не в виде числа или слова, а в виде мысли, утверждения. Пример. Для чего проводят озонирование воды? Варианты ответов: уничтожаются вегетативные бактерии; с целью глубокой очистки воды и окисления специфических органических загрязнений антропогенного происхождения; это позволяет уменьшить возможность образования побочных хлорорганических соединений; уничтожают не только вегетативные, но и споровые бактерии. Нескольким десяткам специалистов мы предложили отличить тесты профессора В.И. Сологаева [2], созданные им для проведения экзаменов и зачетов по курсу «Водоснабжение и водоотведение», от версии наших студентов [3]. Более половины ошиблись в предположении. Планируется использование расширенного комплекса информационных технологий.

Литература

1. Информационные и коммуникационные технологии в образовании : монография. - М.: ИИТО ЮНЕСКО, 2013.
2. <http://sologaev.ucoz.ru>.
3. <http://moodle.smolgu.ru>.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ 3D-МОДЕЛИРОВАНИЯ SKETCHUP В ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ

А.Е. САМАРИНА

Смоленский государственный университет,
e-mail: a.e.samarina@gmail.com

УДК 378.147.88

Ключевые слова: *3D-моделирование, SketchUP, обучение, компьютерные модели, строительство.*

В докладе рассматриваются возможности применения программы SketchUP для обучения 3D-моделированию студентов инженерных специальностей.

Одним из важных этапов обучения студентов инженерных специальностей (строительство, ландшафтная архитектура) является обучение основам работы с инженерными САПР, в частности с 3D-редакторами. Это в значительной степени способствует формированию общих и профессиональных компетенций по развитию пространственного мышления и по овладению основными законами

геометрического формирования, построения и взаимного пересечения моделей плоскости и пространства, необходимыми для выполнения и чтения чертежей зданий и сооружений.

Весьма популярны среди инженеров САПР Autocad, 3Ds Max компании Autodesk, их учебные версии можно использовать в вузах для обучения [3]. Однако весьма неплохие результаты даёт использование программы для компьютерного 3D-моделирования SketchUP компании Trimble.

Программа SketchUP не столь требовательна к аппаратным ресурсам компьютера, как Autocad или 3ds Max, хотя и уступает им по возможностям. Однако SketchUP обладает рядом качеств, позволяющих успешно использовать её для 3D-моделирования.

Программа имеет несколько версий, в частности, собственно SketchUp (бесплатную) и Sketchup Pro (платную) [1].

Интуитивно понятный интерфейс позволяет быстро освоить основы работы с программой. Все объемные объекты создаются на основе плоских графических примитивов и применения геометрических преобразований для придания им объёма (Тяни/Толкай, Ведение и т.д.). Программа позволяет создавать самые разнообразные объекты – здания, сооружения, фрагменты ландшафта, памятники и даже предметы мебели. Создание компьютерных моделей любых объектов можно производить по заданным и реальным размерам, что позволяет оценить их внешний вид, соотношение частей.

Программа SketchUp, как и многие аналогичные САПР, имеет библиотеку готовых типовых элементов, которые можно использовать в разрабатываемом проекте (архитектурные формы, растительность, мебель и многое другое). Это значительно облегчает работу и повышает реалистичность проекта. При создании моделей зданий можно настроить внешний вид с помощью типовых и фототекстур, произвести наполнение и оформление интерьеров внутри здания. Кроме того, для созданной 3D-модели с помощью виртуальных камер можно создать её фотографии с разных точек и выполнить видеооблёт по заданной траектории.

Использование программы SketchUP способствует формированию пространственного мышления студентов инженерных специальностей, чёткого понимания составных частей создаваемых объектов, оценке их внешнего вида и дизайна.

Программа SketchUP может использоваться в обучении студентов направления «Строительство» для моделирования зданий, архитектурных сооружений, создания интерьеров. Изучающим ландшафтную архитектуру SketchUP поможет при создании проектов ландшафтного дизайна и благоустройства территории, создании рельефов.

На официальном сайте в коллекции 3DWarehouse можно увидеть примеры применения программы SketchUP [2]. В этой коллекции моделей можно не только просмотреть и скачать имеющиеся модели, но и опубликовать собственную модель, которая в таком случае станет доступна для просмотра всем сообществом разработчиков.

Модели, созданные с помощью программы SketchUP, могут при соблюдении определённых условий размещаться на слое 3D-зданий на картах Google. Такие модели доступны для просмотра в программе Google Earth и в веб-браузере с помощью соответствующего плагина.

В 2013 году студентами СмолГУ направления «Ландшафтная архитектура» было создано несколько 3D-моделей зданий города Смоленска, в частности Никольская башня и фрагмент Смоленской крепостной стены, здание Смоленской филармонии и др. Модель древнерусской церкви Петра и Павла, созданная студенткой Вероникой Головановой, размещена и доступна для просмотра на карте Google (рис. 1) и в программе Google Earth.



Рис. 1. Модель церкви Петра и Павла в г. Смоленске на 3D-картах Google

Литература

1. Официальный сайт программы SketchUP. Электронный ресурс. URL: <http://www.sketchup.com/>.

2. Коллекция моделей 3DWarehouse. Электронный ресурс. URL: <https://3dwarehouse.sketchup.com/>.

3. Петрова Е.В. Новые перспективы для образования инженеров в Смоленском государственном университете // Инфокоммуникационные технологии в региональном развитии: сборник трудов пятой ежегодной межрегиональной научно-практической конференции 9 – 10 февраля 2012 / под ред. П.М. Лопашинова. – Смоленск, 2012. -С. 246–248.

РЕАЛИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ЗНАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В ПРИЛОЖЕНИИ MAPLET

А.Р. САМИГУЛЛИНА

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
e-mail:¹alsu_sam@mail.ru

УДК 004.94, 004.92

Ключевые слова: *высшая математика, аналитическое тестирование, системы компьютерной математики, Maple.*

Описана реализация аналитического тестирования в приложении Maple знаний по высшей математике в системе математического образования для нематематических специальностей.

В последнее время в высшем образовании для оценки качества усвоения знаний применяются различные формы автоматизированного тестирования. В связи с этим актуальным становится вопрос адекватности тестирования уровню знаний. Стандартное жесткое тестирование с выбором ответов из списка малоэффективно для оценки уровня знаний по физико-математическим предметам. В связи с этим актуальна проблема построения более гибких систем тестирования, позволяющих выявить степень владения тестируемыми достаточно абстрактным математическим материалом. В [1] была сформулирована идея аналитического тестирования, основанного на применении систем компьютерной математики, для проведения «формульного тестирования» без указания вариантов правильных ответов. При этом сравнение ответа студента с правильным производится с помощью символического вычисления разности ответов с применением опции false/true. В [2; 3] эта идея была развита на основе приложения Maple для курса математического анализа. Ранее нами описывалась система интегрированного обучения высшей математике с применением СКМ Maple [4-7]. В данной работе описан завершающий и логически неизбежный этап этой системы - система аналитического тестирования в приложении Maple по курсу «Основы математической обработки информации» для нематематических специальностей, входящему в математический и естественнонаучный циклы базовой части ФГОС. Указанный курс читается в течение одного семестра и разбит на четыре модуля. При этом оценивание знаний студентов по данному курсу происходит по балльно-рейтинговой системе, в которой каждому типу задачи приписывается максимальный балл таким образом, чтобы сумма максимальных баллов совпадала с максимальной суммой баллов по

каждому модулю. В процессе тестирования студент получает автоматически сгенерированный балл и определяет свое место в системе аттестации: «зачтено» - «не зачтено».

Титульное окно Maplelet аналитического тестирования содержит название курса и строку основного меню, в котором раздел «Инструкция по прохождению теста» включает инструкции по тестированию и формату ввода ответа. При переходе в окно выбора варианта (рис. 1), студент выбирает свой вариант из списка, при нажатии на кнопку «Вариант №» открывается окно «Данные о студенте», в каждое поле которого необходимо внести соответствующие данные: в поле «Текущий балл» вносится в кавычках количество баллов, набранных в течение всего семестра ($\max=50$, $\min=27,5$). При работе тестирующей программы эти данные автоматически экспортируются в файл xls «Ведомость успеваемости». Кнопка «Тест» (рис. 2) осуществляет переход к тестированию. После завершения тестирования из файла «Ведомость успеваемости.xls» данные автоматически импортируются в окно «Рейтинговый показатель» в виде таблицы.

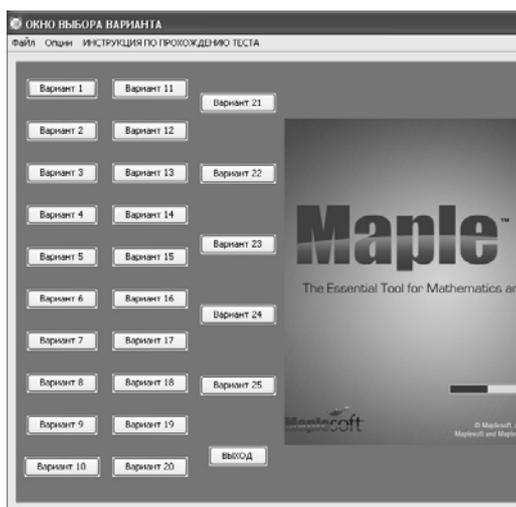


Рис. 1. Окно выбора варианта программы тестирования

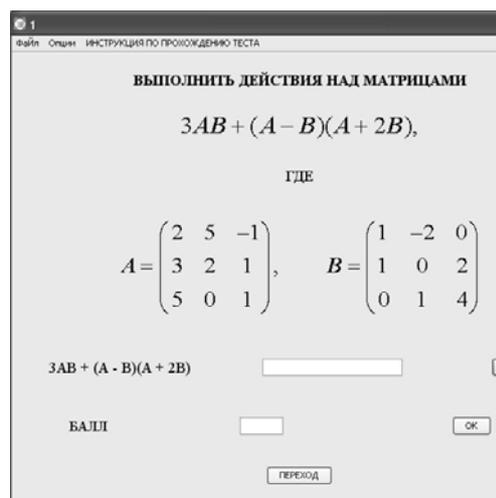


Рис. 2. Окно тестирования по модулю № 1

В докладе будет продемонстрирована работа программы на примере тестирования знаний по модулю №1, содержащему вопросы линейной алгебры (матрицы, определители, системы линейных алгебраических уравнений).

Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Использование аналитических возможностей пакета Maple для создания программ аналитического тестирования, самоконтроля и генерации индивидуальных заданий в курсах высшей математики. Проблемы информационных технологий в математическом образовании: учебное пособие / под ред. Ю.Г. Игнатъева. - Казань: ТГПУ, 2005. - С. 9-24.

2. Адиятуллина Г.Р., Игнатъев Ю.Г. Принципы моделирования системы аналитического тестирования знаний на основе системы компьютерной математики Maple // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. - 2010. - Вып. 2(20). - С. 6-12.

3. Адиятуллина Г.Р., Игнатъев Ю.Г. Взаимодействие маплетов с базами данных в форматах txt и xsl в аналитической системе тестирования // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2011. – Вып. 3(25). - С. 21-25.

4. Самигуллина А.Р. Математическое моделирование объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в системе компьютерной математики Maple // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2010. – Вып. 3(21). – С. 69-74.

5. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Библиотека программных процедур для методического обеспечения курса высшей алгебры в системе компьютерной математики «Maple» // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2011. – Вып. 1(23). – С. 20–24.

6. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программное обеспечение теории кривых второго порядка в пакете компьютерной математики // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2011.– Вып. 4(26). – С. 24–29.

7. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Информационные технологии изучения физико-математических курсов на основе математического моделирования в системе компьютерной математики // Известия Смоленского государственного университета. – 2012. – Вып. 4(20). – С. 471–481.

8. Кирсанов М.Н. Maple 13 и Maplet. Решение задач механики. - М.: Физматлит, 2010.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Б.В. СЕЛЮК

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: 654-998@mail.ru

УДК 37.016:534:004

Ключевые слова: *учебно-исследовательская работа, колебания, Mathcad, «Живая физика».*

Описывается методическая разработка, созданная на базе Mathcad и «Живой физики», которая позволяет учащимся в процессе исследовательской работы за компьютером самостоятельно или под руководством преподавателя познакомиться с малыми колебаниями, которые не являются гармоническими.

Новые стандарты образования предполагают увеличение доли самостоятельных творческих учебных занятий. В вузе это – выполнение отдельных творческих заданий и курсовые работы. Для обучения

технологии творческой деятельности необходимы специальные занятия с преподавателем и методические разработки. Здесь рассказывается об одной из таких разработок. Она позволяет учащимся в процессе исследовательской работы за компьютером (самостоятельно или под руководством преподавателя) познакомиться с малыми, но не гармоническими колебаниями. В результате рассеиваются ошибочные представления о колебаниях и формируются верные. $l = \alpha \cdot l_0$

Учащиеся работают с документами Mathcad, содержащими всю необходимую для работы информацию и «живые» вычислительные блоки. Вычисления сопоставляются с результатами виртуального эксперимента на модели «Живой физики».

Предлагается следующая задача.

Задача. Шарик массой m может перемещаться без трения по горизонтальной направляющей под действием прикрепленной к нему невесомой пружины, второй конец которой соединен с неподвижной точкой, удаленной от направляющей на расстояние l (рис. 1). Коэффициент упругости пружины равен k . В недеформированном состоянии пружина имеет длину l_0 , а расстояние $l = \alpha \cdot l_0$. Исследуйте движение шарика при $\alpha = 1.1$, $\alpha = 0.9$ и при $\alpha = 1$.

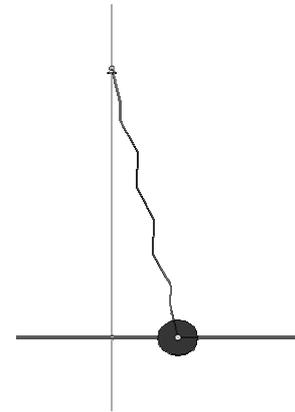


Рис. 1

Учащиеся выводят динамическое уравнение движения шарика:

$$x'' := \begin{cases} 10 \cdot \sqrt{1 - \alpha^2} & \text{if } \alpha < 1, \\ \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

Положение равновесия определяется условием:

$$\frac{d^2}{dt^2} x = -\frac{k}{m} \cdot x \cdot \left(1 - \frac{10}{\sqrt{l^2 + x^2}} \right). \quad (2)$$

Это условие проверяется на виртуальной модели.

При малых отклонениях от положения равновесия уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_1 = \frac{-k}{m} \cdot x_1 \cdot (1 - \alpha^2) \quad \text{при } \alpha < 1, \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x = \frac{k}{m} \cdot x \cdot \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \quad \text{при } \alpha > 1, \quad (4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{x^3}{10^2} \quad \text{при } \alpha = 1. \quad (5)$$

Уравнения (3) и (4) описывают гармонические колебания, периоды которых равны:

$$\tau_0 := \begin{cases} 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k(1-\alpha^2)}} & \text{if } \alpha < 1, \\ 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot \alpha}{k(\alpha-1)}} & \text{if } \alpha > 1. \end{cases} \quad (6)$$

Эти формулы проверяются непосредственными измерениями на модели.

Уравнение (5) решается численным методом. На рисунке 2 приведены графики временных зависимостей отклонений шарика при $\alpha = 0.9$ для малой и для большой амплитуд. Видно, что колебания с большой амплитудой периодические, но не гармонические. При $\alpha = 1$ не гармоническими оказываются и малые колебания.

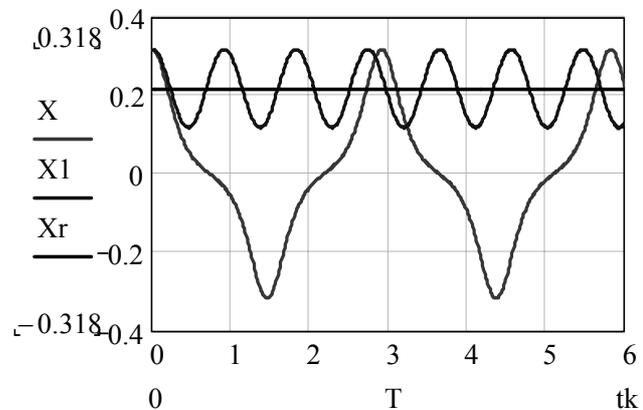


Рис. 2

Все колебания наблюдаются на модели «Живой физики». Измеряются периоды колебаний и сравниваются с вычисленными значениями.

Теоретически и «экспериментально» исследуется амплитудная зависимость частоты колебаний при $\alpha = 1$. Она представлена на рисунке 3.

В результате выполнения работы учащиеся лучше усваивают тему «Колебания», понимают, что гармонические колебания, период которых не зависит от амплитуды, являются лишь простейшим видом колебаний.

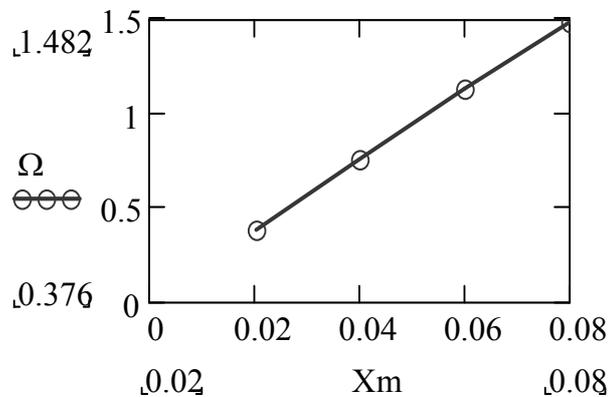


Рис. 3

КАЧЕЛИ

Б.В. СЕЛЮК

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: 654-998@mail.ru

УДК 37.016:534:004

Ключевые слова: учебно-исследовательская работа, параметрические колебания, Mathcad, «Живая физика».

Представлена методическая разработка, созданная на базе Mathcad и «Живой физики», позволяющая учащимся в процессе учебно-исследовательской работы за компьютером освоить параметрические колебания на знакомом с детства примере.

Качели – всем известная любимая детская забава. В то же время это пример системы, в которой осуществляются параметрические колебания. Здесь предлагается методическая разработка, с помощью которой студенты в процессе самостоятельной учебной творческой работы за компьютером могут изучить параметрические колебания на примере знакомого им с детства устройства. Используется система компьютерной математики Mathcad и программа «Живая физика».

Качели можно рассматривать как математический маятник, длина которого периодически немножко увеличивается, когда качающийся на качелях приседает. Для раскачивания качелей нужно присесть дважды за период, то есть частота изменения длины маятника должна быть приблизительно в два раза больше частоты колебаний маятника. В связи с этим студентам предлагается получить динамическое уравнение колебания математического маятника, длина которого изменяется по закону $l = l_0 [1 + h \cos((2w_0 + \varepsilon)t)]$, где w_0 – частота малых собственных колебаний маятника, $|\varepsilon| \ll 2w_0$, $h \ll 1$. Момент сопротивления движению пропорционален угловой скорости ($M_c = I \cdot k \cdot v$, где v – угловая скорость маятника, I – его момент инерции, а k – коэффициент, характеризующий сопротивление).

Получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} x = \frac{-(w_0)^2 \cdot \sin(x)}{1 + h \cdot \cos[(2 \cdot w_0 + \varepsilon) \cdot t]} - k \cdot v, \quad (1)$$

где x – угол поворота маятника, а v – его угловая скорость. Это уравнение интегрируется численно при различных значениях задаваемых параметров.

При отсутствии сопротивления ($k = 0$), без раскачивания ($h = 0$) и при малой начальной угловой скорости ($v = 0.2$) уравнение (1) дает решение, соответствующее гармоническим колебаниям с частотой $2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}$. При наличии небольшого сопротивления ($k = 0.1$) колебания становятся затухающими.

Раскачивание качелей ($h = 0.2$) с частотой $2\omega_0$ ($\varepsilon = 0$) приводит к увеличению амплитуды колебаний (рис. 1) – проявляется параметрический резонанс. На рисунке 1 видно также, что после достижения максимального значения амплитуда колебаний вследствие параметрического резонанса убывает. Учащимся предлагается качественно объяснить наблюдаемые явления, исходя из энергетических соображений.

Исследуется влияние максимальной амплитуды колебаний и времени возрастания этой амплитуды от частоты раскачивания. Максимальная амплитуда достигает наибольшего значения, и происходит это быстрее всего, если частота раскачивания равна удвоенной собственной частоте ($\varepsilon = 0$).

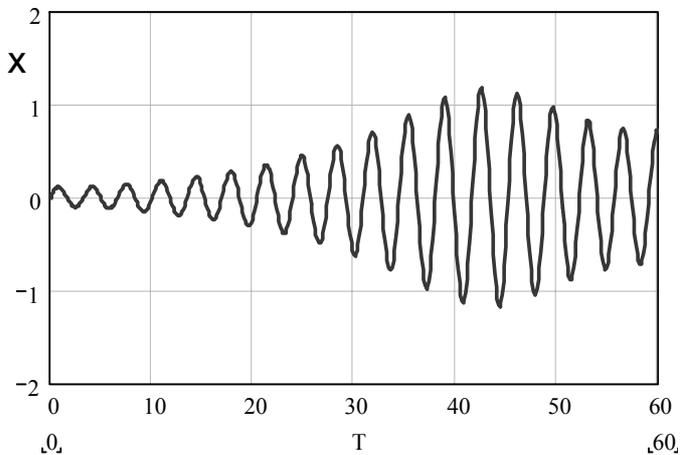


Рис. 1

В теории колебаний показывается, что возрастание амплитуды (то есть возникновение параметрического резонанса) происходит, когда частота изменения длины маятника мало отличается от $2\omega_0$, точнее говоря, когда выполняется неравенство $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, где параметр

$$\varepsilon_0 := \sqrt{\left(\frac{h \cdot \omega_0}{2}\right)^2 - 4k^2}. \quad \text{Эти}$$

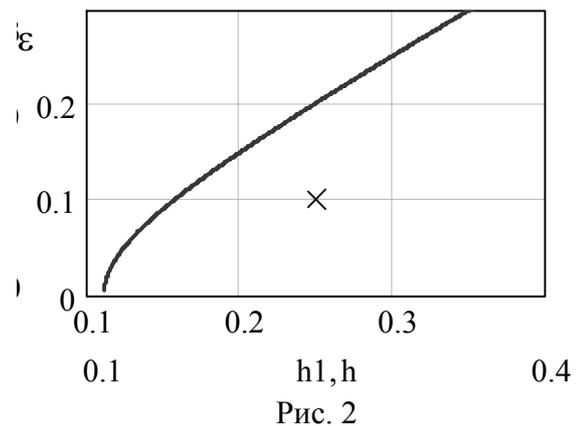


Рис. 2

теоретические гипотезы студенты проверяют, исследуя колебания при различных k , h и ε . Они убеждаются, что параметрический резонанс наблюдается только в том случае, когда точка с координатами (h, ε) расположена ниже кривой $\varepsilon = \varepsilon(h)$ (рис. 2).

Результаты исследования дифференциального уравнения параметрических колебаний в системе Mathcad проверяются «экспериментально» на модели «Живой физики» (рис. 3). Качели моделируются физическим маятником, в нижней части которого вращается с задаваемой скоростью небольшой стержень. Выводится график временной зависимости угла отклонения маятника. Поведение модели согласуется с предсказаниями «теории».

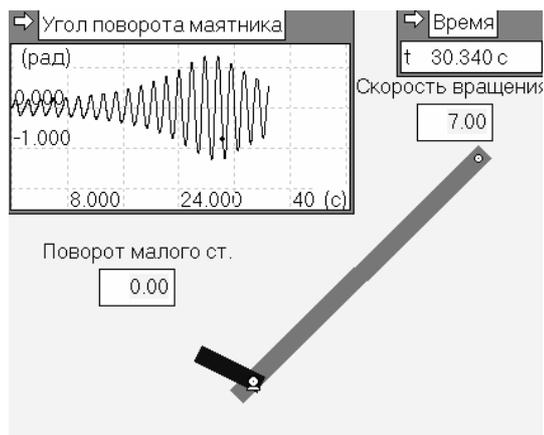


Рис. 3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАЗВИВАЮЩИХ КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГР В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ: ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ОПРОСА

Г.Е. СЕНЬКИНА, Т.И. ГАВРИЛОВА

Смоленский государственный университет;
Смоленский колледж телекоммуникаций (филиал),
e-mail: gulzhan.senkina@gmail.com; diwa18@yandex.ru

УДК 37.01

Ключевые слова: *ИКТ в образовании, компьютерная развивающая игра, элективный курс, проектирование развивающих компьютерных игр.*

В работе представлены результаты исследования по выявлению интереса школьников к развивающим компьютерным играм и их проектированию, а также определению готовности учителей к обучению проектированию развивающих компьютерных игр. Предложена тематика элективного курса по обучению проектированию развивающих компьютерных игр.

В начале третьего тысячелетия в связи со стремительным развитием информационных и компьютерных технологий перед современным образованием возникает новая немаловажная задача – необходимость применения в обучении новых технологий, которые

способствовали бы формированию коммуникативных способностей школьников, развитию их общеучебных умений [2].

В качестве одного из аспектов применения ИКТ в образовании можно выделить использование на уроках развивающих компьютерных программ и игр. Компьютерная развивающая игра - это игра, предназначенная для формирования и развития у детей общих умственных способностей, целеполагания, способности мысленно соотносить свои действия по управлению игрой с создающимися изображениями в компьютерной игре, для развития фантазии и воображения (цит. по [3]). Такая форма деятельности на учебных занятиях позволяет учащимся развивать самостоятельность, способствует позитивной мотивации деятельности, активизирует мыслительные процессы, а также побуждает к получению новых знаний [4].

Нами проведено исследование в одной из городских школ Смоленской области, которое состояло из двух этапов: на первом этапе с помощью анкетирования выявлен интерес школьников к развивающим компьютерным играм и их проектированию, а на втором - определён уровень готовности учителей к обучению проектированию развивающих компьютерных игр. Результаты показали актуальность внедрения данного вида деятельности в образовательный процесс. Именно проектирование игр самими школьниками позволит перейти на новый качественный уровень использования информационных технологий.

В опросе приняло участие 42 школьника (22 учащихся профильного физико-математического класса, 20 учащихся гуманитарного класса) и 20 учителей различного профиля, из которых учителей информатики – 6. Респондентам предлагалось ответить на предложенные вопросы. Обработка и анализ анкет старшеклассников показали следующие результаты: 95% учащихся отметили, что им наскучила традиционная форма уроков («уроки неинтересные», «скучно сидеть на занятиях»), при этом 60% отмечают, что им хотелось бы, чтобы на уроках использовались современные средства ИКТ - мультимедийные проекторы, интерактивные доски, компьютеры. Использование информационных технологий, по мнению школьников, позволяет сделать уроки содержательными, интересными, легче усвоить учебный материал. На блок вопросов, связанных с проектированием компьютерных игр, учащиеся ответили следующим образом: 19% не хотели бы, чтобы на уроках использовались компьютерные игры, 81% высказали противоположную им точку зрения («да, мне кажется, что это будет интересно», «да, компьютерные игры позволят сделать уроки более интересными», «да, такие игры позволят нам развиваться»). На вопрос о готовности проектировать самим развивающие компьютерные игры респонденты ответили следующим образом: 24%

старшеклассников не хотели бы сами заниматься проектированием, так как им это не интересно и не будет использовано в дальнейшей профессиональной деятельности, 31% школьников ответили утвердительно на этот вопрос и 45% ответили, что они хотели бы заниматься этим видом учебной деятельности на школьных занятиях, но не уверены в своих знаниях (см. рисунок 1).



Рис. 1

Результаты второго этапа исследования показали следующее: 85% опрошенных педагогов ответили, что уроки получаются более эффективными и продуктивными именно с применением развивающих компьютерных игр, а 30% уже активно используют их в своей педагогической и обучающей деятельности. Лишь 15% не видят смысла в использовании развивающих компьютерных игр на уроках (см. рисунок 2). Отметим, что на своих занятиях учителя используют уже готовые развивающие программные продукты.



Рис. 2

На вопрос о готовности самим проектировать и обучать этому учащихся 90% респондентов ответили отрицательно в связи с тем, что они не имеют достаточной подготовки. 10% отметили, что освоили методику проектирования развивающих программ в результате самообразования и поэтому готовы обучать учащихся этой форме деятельности (см. рисунок 3).

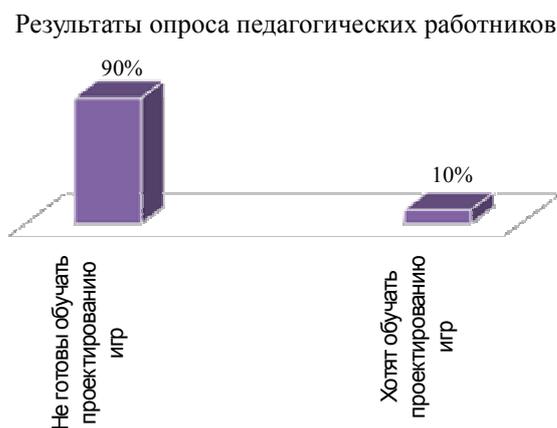


Рис. 3

На основании результатов проведённого исследования нами предложен элективный курс «Обучение проектированию развивающих компьютерных игр» для старшеклассников. Курс является прикладным и направлен на формирование практических навыков по технологии проектирования компьютерных развивающих игр посредством использования языков программирования, СУБД, оболочек по созданию игровых программ.

Содержание курса раскрывается двумя дидактическими линиями:

- 1) теоретические основы проектирования компьютерных игр;
- 2) технологии и методы разработки развивающих компьютерных игр.

Таблица 1

№ п/п	Тема	Содержание	Кол-во часов
1	Теоретические основы проектирования	Концепция развивающих компьютерных игр. Эскизный проект. Документация проектировщика. Методы проектирования. Компоненты развивающей компьютерной игры	3
2	Знакомство с миром компьютерных игр	Классификация компьютерных игр. Обзор направлений и опыта использования развивающих компьютерных	3

3	Разработка архитектуры развивающей компьютерной игры	Современные методы разработки. Влияние технологии на архитектуру игры. Требования к развивающим компьютерным играм. Разработка мотивационного, содержательного, процессуального и регулятивного компонентов игры	4
4	Создание творческого проекта	Выбор программных средств. Моделирование проекта развивающей компьютерной игры. Реализация технического компонента: графический движок, звуковой движок, создание пользовательского интерфейса, управление дополнительными возможностями ПК	6
5	Защита творческого проекта		1

Программа курса предусматривает лекционные и практические занятия и рассчитана на 17 учебных часов (табл. 1). В связи с тем, что элективный курс имеет практико-ориентированный характер, группой учащихся в конце курса должен быть защищён творческий проект, предусматривающий разработку развивающей компьютерной игры.

Элективный курс «Обучение проектированию развивающих компьютерных игр» поможет активизировать учебный процесс, развивать субъектную позицию ученика, повысить мотивацию школьников к обучению, поскольку компьютерные игры способны обогатить педагогический процесс новыми возможностями как для ученика, так и для учителя.

Литература

1. Башмаков А.И., Башмаков И.А. Разработка компьютерных учебников и обучающих систем. - М.: Информационно-издательский дом «Филинь», 2003.- 616 с.
2. Величко Е.В. Психолого-педагогические проблемы информатизации образования в условиях глобализации // Актуальные вопросы современной психологии: материалы междунар. заочной науч. конф. / под общ. ред. Г.Д. Ахметовой. – Челябинск, 2011. - С. 15-17.
3. Кремер О.Б. Оригинальные компьютерные игры как средство педагогической коммуникации для реализации индивидуализированного обучения в коррекционной школе 8-го вида // Вопросы интернет-образования. - 2004. - № 20. - С. 54–58.
4. Сенькина Г.Е., Гаврилова Т.И. Педагогическая поддержка становления субъектности учащихся с применением компьютерных развивающих игр: базовые положения и результаты диагностического исследования // Современные проблемы науки и образования – 2013. - № 6.

ПРИМЕНЕНИЕ ВИРТУАЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЛАБОРАТОРИЙ В ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ

К.Г. СТЕПАНОВ, В.А. ШЕПЕЛИН

Российский государственный университет туризма и сервиса,
филиал в г. Смоленске,
e-mail: stepanovKG@gmail.com, shodin@mail.ru

УДК 004.9

Ключевые слова: *виртуальная лаборатория, объектно-ориентированное программирование, мультимедиа технологии.*

Роль компьютерных технологий в высшем образовании представлена в виде системы научных знаний, методов и средств, которые используются вузом для подготовки специалистов. Отмечаются характерные черты новых форм образования: интерактивность и личностная ориентированность способа обучения информационно-коммуникационным технологиям на всех уровнях образования. Разрабатывается концепция новых форм образования на основе построения виртуальных лабораторий, основанных на принципах объектно-ориентированного программирования в средах компьютерной математики, таких как Electronic workbench, Mathcad, Matlab. Указывается, что разработка концепции новых форм образования на основе компьютерных технологий позволяет: для студентов - перейти от репродуктивной формы обучения к креативной модели; для высшего образовательного учреждения - повысить рентабельность, экономическую эффективность образования.

В последнее время в высшем профессиональном образовании все более возрастает роль компьютерных технологий. Приходит понимание того, что традиционная схема образования зачастую морально устарела и нуждается в новых формах обучения, пригодных в течение всей профессиональной жизни.

Для этих форм образования недопустимы формы застоя и почивания на базе полученных, пусть и фундаментальных, знаний, а характерны интерактивность и личностная ориентированность способов обучения информационно-коммуникационным технологиям.

Для этого необходимо применять новые теории обучения, такие как конструктивизм, образование, ориентированное на личность студента, более интенсивно использовать новые современные образовательные технологии [1].

Под образовательными технологиями в учреждениях высшего образования будем понимать систему научных знаний, методов и средств, которые используются вузом для подготовки специалистов. Важно сформировать прямую зависимость эффективности выполнения учебных программ и степени интеграции в них соответствующих информационно-коммуникационных технологий. Такой алгоритм дает возможность построить современные учебные технологии, предусматривающие формирование у учащихся неординарности мышления, творческого подхода к решению практических задач современности. В итоге такого обучения деятельность студента не основывается на наборе стандартных приемов, а лежит в плоскости понимания причинно-следственных связей процессов в природе, явлений, что значительно повышает ее мотивированность и результативность.

Информационные, коммуникационные и аудиовизуальные технологии создают новую образовательную среду, где они органично включаются в учебный процесс для реализации новых образовательных моделей.

Разработка концепции новых форм образования на основе компьютерных технологий позволяет обеспечить:

а) для студентов - переход от репродуктивного обучения (передачи знаний от преподавателя к студентам) к креативной модели (когда в учебной аудитории с помощью нового технологического и технического обеспечения моделируется жизненная ситуация или процесс, а студенты под руководством преподавателя должны применить свои знания, проявить творческие способности для анализа моделируемой ситуации и получить решение поставленных задач).

б) для высшего образовательного учреждения - рентабельность, экономическую эффективность, которая проявляется за счет уменьшения затрат на содержание площадей образовательных учреждений, экономии материальных ресурсов, во многом за счет приобретения нового оборудования лабораторий, специализированных классов и аудиторий, так как многие практические работы можно проводить в обучающем виртуальном режиме, используя новые компьютерные мультимедиа технологии.

Виртуальные лабораторные работы являются своеобразным аналогом и в большинстве случаев заменяют собой традиционные, с применением лабораторного оборудования. В данном разделе представлены примеры виртуальных лабораторных работ, проводимых на кафедре информационных технологий вуза. В лабораторных работах по таким предметам, как «Радиотехнические цепи и сигналы», «Метрология и стандартизация», «Материаловедение» и др., приобретаются навыки проведения экспериментов, происходит

ознакомление с работой приборов и оборудования. Появляется возможность научиться самостоятельно делать выводы из полученных опытных данных и тем самым более глубоко и полно усваивать теоретический материал. Работы выполняются непосредственно в компьютерном классе с использованием современных программных средств, таких как Electronic workbench, Mathcad, Matlab, Labview и пр.

Виртуальные лабораторные работы используют необходимые комплекты учебно-методических материалов, тестирующие программы, обеспечивающие допуск к выполнению работ, а также виртуальное лабораторное оборудование. Кроме того, любая работа может персонализироваться, для чего вводится уникальный персональный номер, связывающий фамилию студента с лабораторной работой и, следовательно, измеряемыми в ходе выполнения полученными данными для обязательного включения их в отчет по работе.

После выполнения работы учащийся формирует команду «Отчет» и данные лабораторной установки и измерительных панелей с измеренными и расчетными данными, контрольным номером и фамилией переносятся на сервер преподавателя. Далее отчет может быть представлен преподавателю для защиты в распечатанном виде, либо лично предъявляя файл формата DOC на любом современном носителе, либо в дистанционном режиме пересылкой его в студенческий портал сайта университета [2].

В то же время очевидно, что далеко не все эксперименты могут быть виртуальными. Главным критерием применимости здесь будем считать получение тренажера навыков использования реального оборудования, адекватность изображения виртуальных приборов на экране монитора реальным установкам.

Виртуальные лаборатории (ВЛ) вполне применимы, но только вместе с изучением реального оборудования. ВЛ в этом случае весьма полезны для изучения принципов действия, типовых реакций оборудования на какие-либо воздействия, моделирования фактически решаемой задачи, в которой объектом исследования выступает изучаемое измерительное оборудование.

При изучении дисциплины «Радиотехнические цепи и сигналы» виртуальная лаборатория, оснащенная программными средствами, такими как Electronic workbench, Mathcad, является наиболее адекватной ВЛ. Здесь измерительное оборудование выполняет индикаторные функции - отображает некоторые параметры изучаемого объекта, например, напряжение, ток. Сам объект скрыт, а студент видит его модель в виде нарисованной на панели структурной, функциональной или принципиальной схемы. Очевидно, что разница между видом панели лабораторного стенда и схемой, показываемой на экране монитора, незначительна. В этом случае объект исследования может

быть вообще заменен его математической виртуальной моделью (имитатором). Более того, компьютерное моделирование позволяет значительно усилить дидактические свойства эксперимента. К примеру, при изучении радиотехнических цепей компьютерное моделирование позволяет визуализировать процессы, происходящие внутри функциональной схемы, в виде различных графиков, эпюр, векторных диаграмм. Конечно, в реальном эксперименте наблюдать такие явления невозможно.

Рассмотрим типичную для радиотехники задачу изучения резонанса напряжений.

Требуется определить индуктивность катушки, при которой в цепи, представленной на рисунке 1, будет резонанс напряжений и показания приборов при резонансе. Цепь имеет следующие параметры: $U = 30$ В, $f = 50$ Гц, $C = 20$ мкФ, $r_k = 15$ Ом.

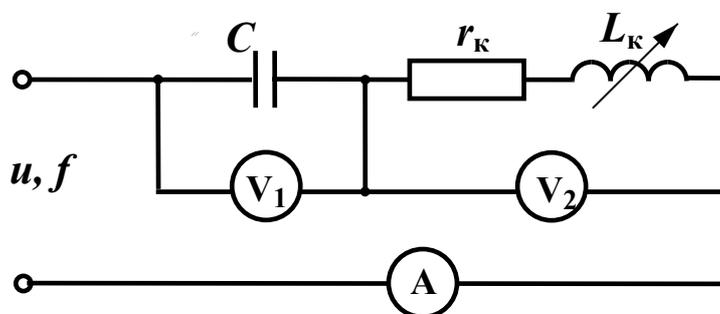


Рис. 1. Электрическая цепь для изучения резонансов контура

Построить на комплексной плоскости векторы тока и напряжений при резонансе. Определить активную реактивную и полную мощность цепи при резонансе, а также зависимость тока в цепи от варьруемого параметра, т. е. от индуктивности катушки и построить график $I = f(L_k)$.

В результате решения задачи в Mathcad мы получаем результаты.

Падение напряжения на активном сопротивлении катушки:

$$U_r := r_k \cdot I, \quad U_r = 30 \text{ V.}$$

Падение напряжения на индуктивном сопротивлении катушки:

$$x_L := x_C, \quad U_L := x_L \cdot I, \quad U_L = 318.31 \text{ V}$$

$$\text{Показания вольтметра } V_2: \quad U_2 := \sqrt{U_r^2 + U_L^2}, \quad U_2 = 319.72 \text{ V.}$$

Активная реактивная и полная мощность цепи при резонансе:

$$P := I^2 \cdot r_k, \quad Q := I^2 \cdot (x_L - x_C), \quad S := U \cdot I, \quad P = 60 \text{ W}, \quad Q = 0 \text{ V} \cdot \text{A}, \\ S = 60 \text{ V} \cdot \text{A}.$$

Строим векторную диаграмму цепи:

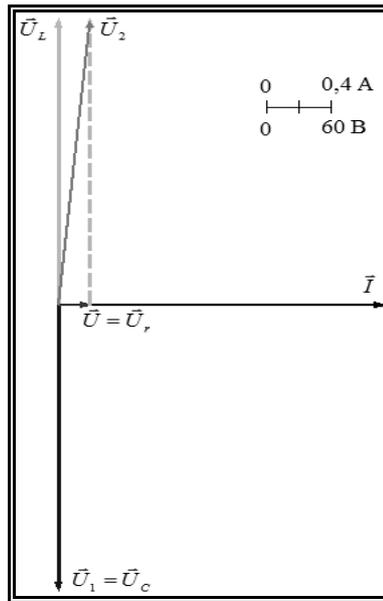


Рис. 2. Векторная диаграмма контура при резонансе

Определим зависимость тока в цепи от индуктивности катушки и построим график $I = f(L_k)$.

Проделав предварительные расчеты электрической цепи, можно провести моделирование этой цепи в виртуальной лаборатории. Для чего соберем электрическую цепь последовательного колебательного контура на экране монитора в среде Electronic workbench (одна из модификаций Мультисим).

На виртуальной модели можно с легкостью определить показания любого из приборов электрической цепи: ваттметра, осциллографа и т.д. При этом панели лабораторного оборудования виртуальных приборов на экране монитора полностью соответствуют реальным измерительным приборам.

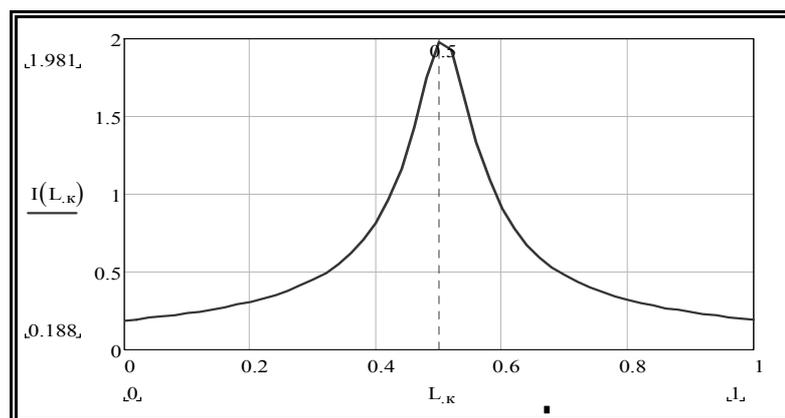


Рис. 3. Резонансная характеристика цепи

Другой случай: построение реальной лаборатории дисциплины «Материаловедение» в вузе предполагает наличие оборудования, в достаточной степени уникального, чтобы организовать к нему совместный доступ многих студентов. Примером могут служить

известные дорогостоящие станки для испытаний материалов на прочность. Здесь построение ВЛ спорно, однако во многих случаях единственно возможно с материальной, технической и многих других организационных аспектов.

Здесь построение ВЛ основывается на принципах объектно-ориентированного программирования в средах компьютерной математики, таких как Mathcad, Matlab [3].

Рассмотрим метод построения лабораторной работы на примере испытания материалов на разрыв.

В начале лабораторной работы в методическом пособии приводится подробное описание лабораторной установки (испытательной машины), ее назначение и принцип действия. Приводится ее функциональная схема (рис. 4). Для понимания предмета деятельности опустим детальное описание машины, отметим только ее состав.

В состав испытательной машины входят: маятниковый силоизмеритель, подвижная траверса 3, неподвижная траверса 1, рабочий цилиндр 5, поршень 4, плунжерный насос 14, электродвигатель 15, масляный резервуар 13, рабочий цилиндр машины 5, рабочий вентиль 12, вентили перемещения траверс 6, 8.

В траверсах укреплены захваты, в которых закрепляется растягиваемый образец 2.

Давление масла из рабочего цилиндра 5, вызывает перемещение поршня 4, связанного с помощью поперечин и тяг с подвижной траверсой 3. Перемещаясь, траверса будет растягивать или сжимать образец в зависимости от того, где он закреплен (снизу или сверху траверсы).

В машине на барабане 11 производится автоматическое вычерчивание на бумаге диаграммы растяжения рейкой 10.

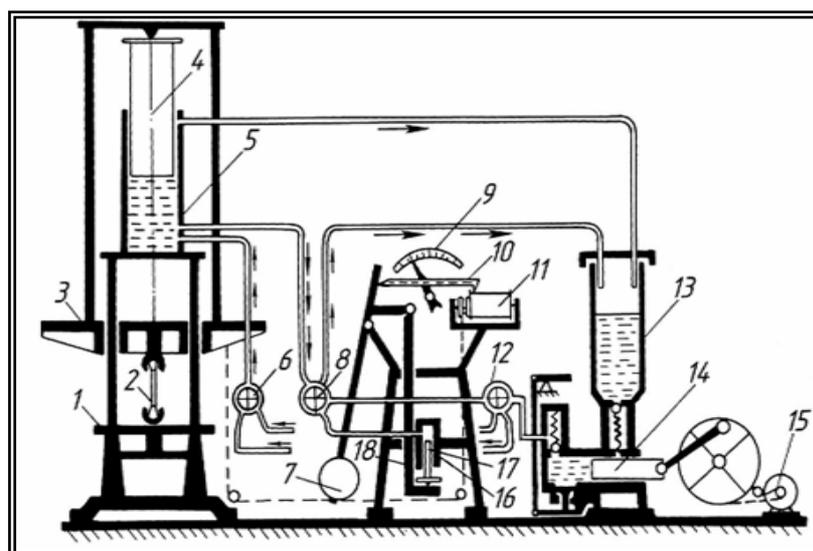


Рис. 4. Функциональная схема испытательной машины

Приводятся основные теоретические положения изучаемого материала, в данном случае - диаграмма растяжения образца материала.

Машинная диаграмма растяжения. В процессе испытания на барабане 11 испытательной машины автоматически вычерчивается диаграмма растяжения, которая показывает зависимость между растягивающей силой P , действующей на образец, и вызываемой ею деформацией A . Типичный вид машинной диаграммы растяжения малоуглеродистой стали изображен ниже. На диаграмме P - A можно указать пять характерных точек, положение которых определяется методом графического построения или методом тензометрирования.

Прямолинейный участок диаграммы OA указывает на пропорциональность между нагрузкой P и удлинением Δl . (Эта пропорциональность впервые была замечена в 1670 году Робертом Гуком и получила в дальнейшем название закона Гука.)

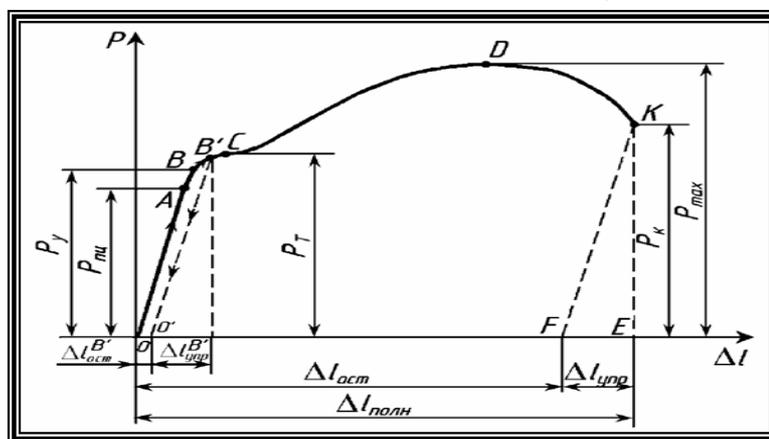


Рис. 5. Теоретическая диаграмма растяжения

Величина силы $P_{пл}$ (точка A), до которой остается справедливым закон Гука, зависит от размеров образца и физических свойств материала.

В экспериментальной части приводится порядок выполнения работы, выбор марки стали, кратность образца и др. на виртуальной панели управления машины.

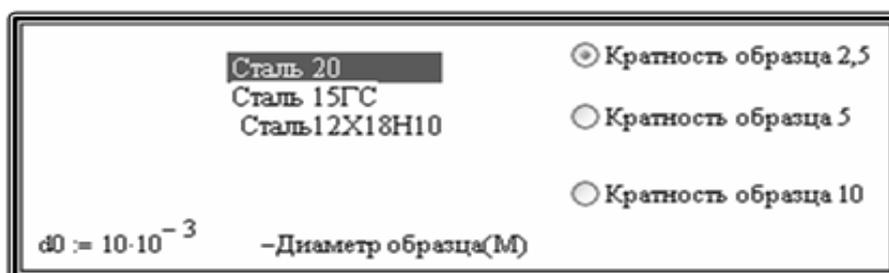


Рис. 6. Виртуальная панель управления машины

После установки необходимых параметров испытания программа выдает «экспериментальную» диаграмму испытаний образца материала на растяжение.

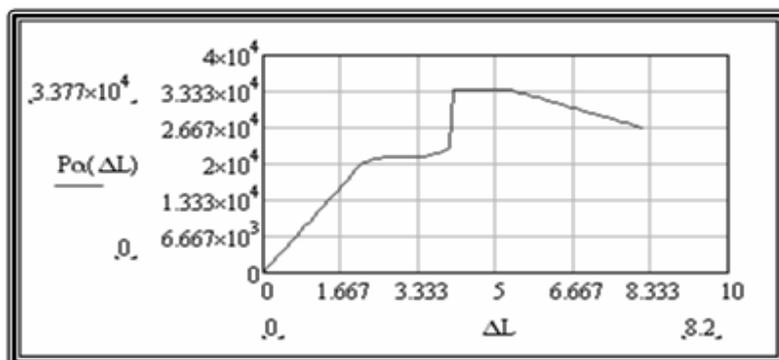


Рис. 7. Экспериментальная диаграмма растяжения

Программа, реализующая описанную выше модель, написана в среде Mathcad с использованием объектно-ориентированной технологии и визуальных средств графического интерфейса пользователя.

Таким образом, применение новых образовательных технологий с использованием современных программных и расчетных информационных комплексов взамен традиционных лабораторных занятий имеет большую практическую значимость, а в некоторых случаях единственно возможно с материальной, технической и организационной сторон.

Литература

1. Новые образовательные технологии в вузе-2013 akvobg.ru/itogi_notv2013.html.
2. Горбов Л.С., Новикова Н.Г., Погодин А.В., Щиканов А.Ю. Применение реляционных баз данных в управлении сайтом образовательного учреждения // Вестник Ассоциации вузов туризма и сервиса. – 2013. - №4. - С. 65-70.
3. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001 и Mathcad 11В. – М.: Солон-Пресс, 2004. - 830 с.

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ИКТ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ

Н.М. ТИМОФЕЕВА, Т.И. ТИМОФЕЕВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: nat.timopheeva@yandex.ru

УДК 37.02

Ключевые слова: *информационные и коммуникационные технологии, online конкурс, математическая логика.*

Рассматриваются вопросы применения интернет-технологий в организации и проведении online конкурсов по информатике для школьников и студентов, приводятся примеры практико-ориентированных заданий с решениями Международного конкурса «Конструируй, Исследуй, Оптимизируй - 2014».

С повсеместным внедрением глобальной сети Интернет появилась возможность организации и проведения дистанционных online олимпиад и конкурсов в сфере образования. Ежегодный Международный конкурс по применению ИКТ в естественных науках, технологиях и математике «Конструируй, Исследуй, Оптимизируй», учредителями которого являются журнал «Компьютерные инструменты в образовании» и Институт продуктивного обучения Российской академии образования, является ярким примером организации подобных мероприятий.

Основная задача данного конкурса – популяризация научных знаний. Конкурс проводится на трех уровнях, и его участниками могут быть как школьники, так и студенты высших учебных заведений. В качестве заданий составителями берутся интересные проблемы из области математики, физики или информатики, и для их решения строятся компьютерные лаборатории с игровыми элементами. За каждым игровым сюжетом стоит серьезная и возможно ещё не решенная в общем виде задача.

Рассмотрим предложенную в 2014 году задачу на применение на практике знаний математической логики «*Мир Тарского*», II уровень, старшие школьники, студенты (рис. 1).

Необходимо написать логические условия, которым удовлетворяют размещения жителей в домах первого поселка, но не удовлетворяют размещения жителей в домах второго поселка. При этом

1) чем больше домов первого поселка и чем меньше домов второго будут удовлетворять записанному условию, тем лучше (нужно увеличивать сумму выделенных домов первого поселка и невыделенных - второго);

2) если условие правильно отделяет дома первого поселка от домов второго, то лучшим считается решение с более коротким условием.

Для описания условия нужно использовать свойства объектов (куб, шар, красный-синий, большой-малый), отношения между объектами («рядом с», «выше», «левее») и логические связки (И, ИЛИ, ЕСЛИ ТО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА). Возможно использование скобок.

Например, если записаны три условия:

1) (X красный И X шар) ИЛИ X куб

2) X большой \Rightarrow X куб

3) X рядом с Y \Leftrightarrow X синий И Y красный,

то будут выделены только те домики, в которых для всех его жителей верно, что в них живут только красные шары и/или кубы (1 условие), нет больших шаров (2 условие) и рядом не могут жить жители одного цвета (3 условие).

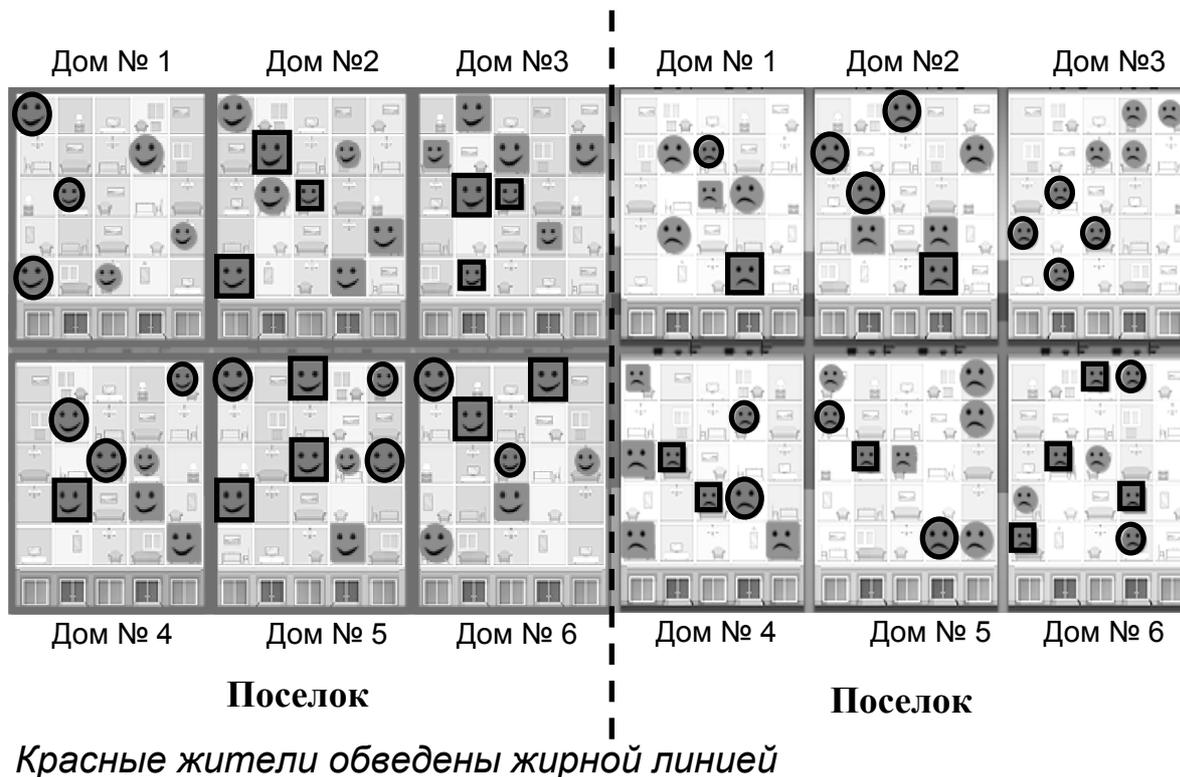


Рис. 1. Задача «Мир Тарского»

Сюжет сделан по мотивам программного продукта, созданного для обучения логике и названного в честь известного математика Альфреда Тарского, основателя формальной теории истинности.

Для решения поставленной задачи мы рассуждали следующим образом. Рассмотрим *жителей дома № 1* первого поселка. Это шары, но, описав их как X шар, мы тем самым опишем и жителей дома № 3 второго поселка. Рассуждая далее, приходим к выводу, что красные жители рассматриваемого дома расположены левее синих, то есть их можно описать следующим образом:

$$X \text{ красный И } Y \text{ синий} \Rightarrow X \text{ левее } Y$$

Рассмотрим *жителей дома № 2* первого поселка – это либо кубы, либо синие шары. Их описание

$$Z \text{ куб ИЛИ } Z \text{ синий}$$

Условие Z куб описывает жителей дома, в котором проживают только кубы, а это *дом № 3* первого поселка.

Для оставшихся трех домов первого поселка красные жители либо левее синих, либо выше них, либо расположены рядом с ними.

Получаем, что жителей первого поселка можно описать следующим логическим выражением:

X красный И Y синий \Rightarrow (X левее Y ИЛИ X рядом с Y ИЛИ X выше Y) ИЛИ Z куб ИЛИ Z синий

При этом ни один из домов второго поселка не попал под описание, а это как раз то, что и требовалось.

Для начального уровня конкурса 2014 года логическая задача была сформулирована следующим образом: Джек Логик построил дом 8×8 и пригласил друзей поселиться в нем, но поставил им жесткие условия на размещение.

- В доме должен жить по крайней мере один большой красный шарик.
- На этажах ниже тех, где есть красные шарик, могут жить только шарик.
- Рядом с каждым красным жителем должен жить хотя бы один кубик (по вертикали, горизонтали или диагонали).
- Рядом с каждым кубиком должен жить хотя бы один синий житель (по вертикали, горизонтали или диагонали).
- На этажах выше того, где живет кубик, должен жить по крайней мере один синий шарик.
- В подъездах левее того, в котором живет большой житель, могут жить только маленькие жители.
- Если житель маленький, то на этажах ниже могут жить только большие шарик.
- В подъездах правее тех, в которых живут шарик, не должно быть маленьких синих жителей.

Одно из возможных решений этого задания представлено на рисунке 2 (красные жители обведены жирной линией).

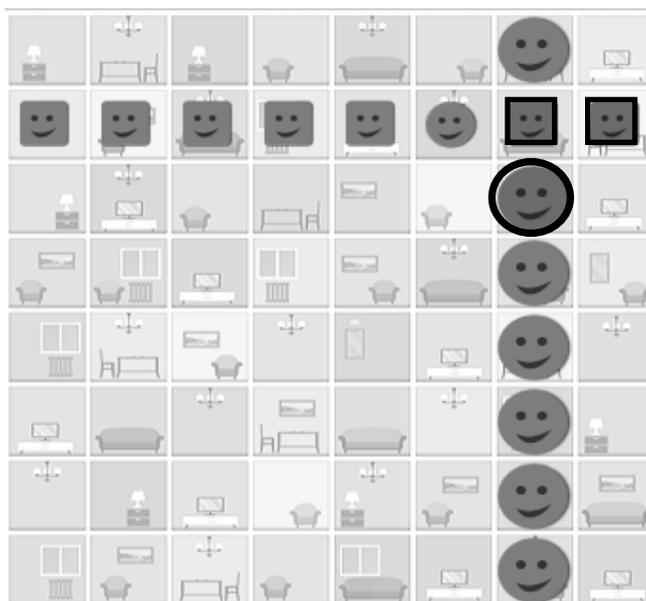


Рис. 2. Задача «Дом, который построил Джек»

В целом участие в подобных конкурсах развивает мышление обучаемых, формирует у них умения принимать правильное решение или предлагать варианты решения в сложной ситуации, развивает умения осуществлять экспериментально-исследовательскую деятельность, а следовательно, направлено на развитие личности и подготовку индивида к комфортной жизни в условиях информационного общества.

Литература

1. Материалы одиннадцатого Международного конкурса КИО – «Конструируй, Исследуй, Оптимизируй». – URL: <http://bebras.ru/kio14/main/go/p> (дата обращения: 08.03.2014).

2. Тимофеева Н.М., Киселева О.М. О применении программных средств в процессе обучения // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 2005. – С. 233-235.

3. Киселева М.П. Занимательная информатика // Педагогическая информатика. - 2009. - № 4. – С. 25-29.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ УРОКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ¹

В.И. УСАЧЕВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: usa-vi@yandex.ru

УДК 372.851

Ключевые слова: *урок математики, компьютер, компьютерный класс, математические пакеты, Derive, Maxima, мотивация, задача о шахматах, задача о величине банковского вклада, большое число.*

В работе предлагается общая схема поэтапного включения математических пакетов в процесс преподавания математики в школе и приводятся несколько примеров конкретных задач, при решении которых необходимо привлечь вычисления на компьютере.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках проекта проведения научных исследований «Теория и практика формирования вероятностно-статистических представлений в процессе профессиональной подготовки учителя математики» проект № 14-16-67009.

Все, о чем говорится ниже, об использовании компьютеров при проведении уроков математики, относится к школам г. Смоленска. Большие города (Москва, Петербург и др.) и сельские школы - это особая статья.

Итак, в каждой школе имеется один или несколько компьютерных классов (лабораторий). Основные пользователи находящейся в них техники – учителя информатики. Остальные предметники или очень редкие гости или не заглядывают туда никогда. В их числе, к сожалению, и математики. Хотя использование математических пакетов и даже просто распространенных офисных программ дает существенный толчок к улучшению математической подготовки школьников (визуализация теоретических положений и решений задач, решение класса задач, более приближенных к практическим, и многое другое). Автор предлагает несколько штрихов из пути учителя математики в компьютерный класс.

Сперва определимся: когда при изучении некоторой темы желательно прибегать к помощи компьютера. Предлагаемая схема очень условна. На первом этапе изучения рассматриваются основные понятия темы и теоремы, выражающие связи между этими понятиями. На втором – отрабатываются приемы решения типовых задач и необходимая вычислительная техника в простейших случаях. На третьем – решаются более сложные задачи, требующие трудоемких выкладок. Вот здесь уже можно прибегать к компьютеру для сравнения результатов полученных «вручную» и предлагаемых выбранным математическим пакетом. Эти сравнения помогают оценить возможности программы и ее ограничения, а также правильность получаемых ответов. На четвертом этапе решаются задачи, значительно приближенные к возникающим на практике (моделируются реальные явления), в которых вычисления произвести «вручную» очень сложно, либо невозможно вообще. Здесь без компьютера уже не обойтись.

Теперь нужно выбрать соответствующее программное обеспечение. Автор присоединяется к одному из нескольких предпочтений – Derive [2, 1]. Этот математический пакет очень хорошо подходит для помощи в обучении математике и школьников и студентов. При том что он занимает всего около 6 Мгб (!) дискового пространства, его возможности просто поразительны: символьные преобразования выражений, решение уравнений, работа с пределами, нахождение производных и интегралов, суммирование рядов, прекрасная 2D и 3D графика, преобразования формул логики и построение таблиц истинности и еще много других возможностей. Поскольку Derive относится к программам типа CAS, то результаты вычислений представляются, по возможности, не приближенно, а точно. Например, можно полюбоваться числом 2^{64000} со всеми его цифрами! Интерфейс

программы весьма дружелюбный. Но есть одно большое «но» – этот пакет платный. Другой вариант – Maxima. В чем-то Maxima, лучше чем Derive, а в чем-то ему уступает. Эта программа относится к свободно распространяемым, то есть совершенно бесплатна (её можно скачать даже с сайта смоленской администрации). Но вот входной язык Maxima более сложен для восприятия. Собственный опыт показывает, что обучить первоначальным навыкам работы с Derive пятиклассника можно минут за 30. С Maxima так не получается. Оба пакета имеют хорошие русскоязычные руководства [3, 4]. Не будем обсуждать другие варианты компьютерного обеспечения математического образования – MuPAD, MathCAD, Maple, Excel. Выбор пакета зависит в основном от финансовых возможностей школы и от предпочтений преподавателя.

Допустим, в расписании проведение урока по математике стоит в компьютерном классе. Нужно программное обеспечение предоставлено. Теперь на первых занятиях надо заинтересовать учеников. Рассмотрим несколько классических примеров для достижения этой цели.

Пример 1. Задача из истории возникновения шахмат [5].

Мудрец предлагает царю расплатиться за изобретение шахмат так – на первую клетку доски положить 1 зерно, на вторую 2 зерна, на третью – 4, и так далее, удваивая на каждой следующей клетке число зерен на предыдущей. И царь согласился! Подсчет общего количества зерен, причитающихся мудрецу, во всех источниках, где встречается обсчет этой сделки, одинаков. Вот наглядные интерпретации такого количества зерна разные. Предложим свой вариант.

На шахматной доске 64 клетки. Мудрец должен получить $S(64)$ зерен.

$$S(64) = 1+2+4+\dots+2^{63} = \sum_{i=1}^{64} 2^{i-1},$$

что равно числу 18 446 744 073 709 551 615 (18 квинтиллионов 446 квадриллионов 744 триллиона 73 миллиарда 709 миллионов 551 тысяча 615 зёрен).

В качестве зерен, выкладываемых на шахматную доску, возьмем зерна риса. В древней Индии существовала единица веса «чавал» - вес одного рисового зерна. Один чавал равен 0,0156 г. Получаем вес $S(64)$ зерен - $2.877692075 \cdot 10^{14}$ кг.

Общая площадь суши планеты Земля $148\,939\,063,133$ км². На один квадратный метр суши таким образом будет приходиться приблизительно 1,932 кг риса (сравните этот «скромный» результат с более большими цифрами из некоторых источников!).

50 мл риса сорта «басмати» весят 39,19 гр. Для вычисления объема рассматриваемой массы зерна берем именно этот сорт, как распространенный в Индии. И получаем, что объем всего этого риса приблизительно $3,671 \cdot 10^{11}$ м³.

А какой высоты было бы хранилище (длину и ширину задать самим) для этого объема? А как эта высота соотносится с расстоянием до Луны?

На этом примере вспоминаются именованя больших чисел, единицы измерения, геометрическая прогрессия, и еще масса нужных сведений.

Пример 2. Представим себе страну, в которой очень-очень стабильная экономика. В этой стране нет инфляции, цены постоянны и банки не банкротятся. Холодильник, например, стоит 14 000 руб. Один из жителей кладет в банк 1 коп. Банковская ставка 4% годовых. Какую сумму могут получить наследники через 50 лет? через 100 лет? через 2000 лет? Через сколько лет этот вклад вырастит до возможности купить холодильник?

Простые выкладки дают формулу для накопленной суммы денег $S(n)$ через n лет хранения денег $S(n)=1,04^n$ коп. Приведем некоторые суммы накопления (в рублях).

Срок хранения	50	100	500	2000
Сумма	0,071	0,505	$3,286 \cdot 10^8$	$1,166 \cdot 10^{34}$

Холодильник можно будет купить через 361 год.

Если годовой бюджет России в 2014 году был равен приблизительно 14,5 триллионов рублей, то сколько таких годовых бюджетов понадобится банку, чтобы выплатить через 2000 лет сумму вклада? Можно подсчитать, какая сумма денег придется на каждый квадратный метр суши. От этих цифр кружится голова.

На этом примере вспоминаются проценты, показательная функция и наглядно представляется ее скорость роста.

Пример 3. Следующий пример показывает, что и у компьютера при работе с большими числами есть ограничения.

Какое самое большое число можно записать, используя только три цифры? Ответ простой, это 9^9 . А какой остаток от деления этого числа на 17? Оказывается, что не только достаточно простые математические пакеты – Derive, Maxima, MathCAD – не могут вычислить 9^9 , но и такие профессиональные пакеты, как Maple 12, Mathematica 8, тоже не могут сделать это! Mathematica 9 уже может, но она не для обучения школьников, да и стоит недешево. Оставим удовольствие сделать окончательный вывод читателю, используя две подсказки. Первая из них легко получается на компьютере.

Таблица. Остатки от деления степеней 9 на число 17

9^n	9	9^2	9^3	9^4	9^5	9^6	9^7	9^8	9^9	9^{10}	9^{11}
остаток	9	13	15	16	8	4	2	1	9	13	15

Вторая подсказка. Пусть a и b - целые числа, n натуральное число. Числа r_1 и r_2 остатки от деления a и b на n соответственно. Тогда остаток от деления произведения $a \cdot b$ на n равен остатку от деления произведения $r_1 \cdot r_2$ на n .

На этом примере вспоминаются сравнения целых чисел по модулю n . И наглядно показывается, что «умение считать» компьютерных программ никак не отменяет знания теории той области, в которой сформулирована задача.

Литература

1. Сисенбаева Д.Б. Сравнительный анализ универсальных математических пакетов [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.enu.kz/repository/repository2012/sravnitelnyi-analiz.pdf>.
2. Паршин А.В., Лебедев А.В. Инновационная компьютерная технология повышения качества математического образования инженеров // ИнВестРегион. – 2012. – № 2. – С. 81-86.
3. Чичкарев Е.А. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов. – М.: ALT Linux, 2009. – 233 с.
4. Половко А.М. Derive для студента. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 352 с.
5. Перельман Я.И. Занимательная арифметика. – Л.: Время, 1926. – 192 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НА ЗАНЯТИЯХ ПО ТЕПЛОГАЗОСНАБЖЕНИЮ

Е.А. ЦАРЕВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: elean@inbox.ru

УДК 378.147.88

Ключевые слова: *компьютерные технологии, теплогазоснабжение, методика преподавания в высшей школе.*

В докладе рассматриваются возможности использования компьютерных технологий при подготовке студентов-строителей на примере занятий по теплогазоснабжению.

Для успешной работы современного инженера-строителя необходимо хорошее владение компьютером. Технический прогресс и повсеместная компьютеризация внесли существенные поправки в процесс проектирования строительных работ. И та работа, которая раньше выполнялась вычислительными центрами проектных институтов, теперь выполняется самим инженером-проектантом.

Нынешний студент-строитель должен овладеть AutoCAD для выполнения чертежей, программами Excel и MathCaD для проведения необходимых расчетов. А формат Word стал практически общепринятым стандартом оформления технической документации, и студентам необходимо уметь работать с ней, в частности, набирать текст и расчетные формулы.

В памяти компьютера можно сохранять заготовленные впрок штампы к чертежам, таблицы титульных листов проектов, заготовки иных документов, которые при необходимости заполняются или дополняются применительно к конкретно выполняемой работе. Наличие подобных заготовок позволяет значительно сократить сроки оформления документации. При расчетах большие возможности дают электронные таблицы Excel. Они имеют встроенный пакет функций, позволяющий составлять достаточно сложные программы практически по всем видам инженерных расчетов вентиляции, отопления и кондиционирования воздуха.

Точный расчет теплотеря дома - занятие кропотливое и небystрое. Для его производства необходимы исходные данные, включая размеры всех ограждающих конструкций дома (стен, дверей, окон, перекрытий, полов). При расчёте теплотеря через ограждающие конструкции исходные и получаемые фактические данные вписывают в специальную таблицу для лучшей организации техники расчёта.

№ помещения	Назначение помещения	$t_{int}, ^\circ\text{C}$	Характеристика ограждающих конструкций				$R_{\Sigma}, \text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{Вт}$	n	$t_{int} - t_{ext}, ^\circ\text{C}$	$Q_h, \text{Вт}$	Добавки к Q_h			$Q_h, \text{Вт}$	$\Sigma Q_h, \text{Вт}$
			наименование	ориентация	размеры, м	площадь, м^2					на ориен.	прочие	$1 + \Sigma \beta$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

В строках таблицы указываются параметры и рассчитываются теплотеря для каждого отдельно взятого ограждения дома.

Поясним, что означают некоторые графы таблицы.

В графе 11 производится авторасчет основных теплотеря на основе введенных данных в предыдущих ячейках строки. В частности,

используются разность температур, площадь, сопротивление теплопередачи R_0 и коэффициент положения n . Формула в ячейке:

=J9*I9*G9*N9.

В графе 5 указывается ориентация наружной стороны ограждения по сторонам света в сокращенном виде: В, ЮВ, Ю, ЮЗ, З, СЗ, С, СВ. Этот параметр влияет на сумму дополнительных потерь. Расчетные формулы Excel анализируют содержимое этой графы и производят расчет дополнительных потерь, помещая результат в графу 12. Формула расчета ячейки выглядит так:

=ЕСЛИ(Е9="В";0,1;ЕСЛИ(Е9="ЮВ";0,05;ЕСЛИ(Е9="Ю";0;ЕСЛИ(Е9="ЮЗ";0;ЕСЛИ(Е9="З";0,05;ЕСЛИ(Е9="СЗ";0,1;ЕСЛИ(Е9="С";0,1;ЕСЛИ(Е9="СВ";0,1;0))))))))

Эта формула учитывает тот факт, что для каждой ориентации свой коэффициент расчета: Восток - 0.1; Юго-восток - 0.05; Юг – 0; Юго-запад – 0; Запад - 0.05; Северо-запад - 0.1; Север - 0.1; Северо-восток - 0.1.

При расчете температуры подачи воды в систему центрального отопления используются логические функции Excel: если температура воздуха меньше определенного значения – повысить температуру воды до такого-то значения, если температура воздуха выше – понизить температуру воды.

Использование современных технологий на занятиях по теплогазоснабжению приводит к тому, что студенты не только получают основные, базовые знания дисциплины, но и осваивают компьютерные программы, которые помогают, экономят время и дают возможность представления результатов в виде графиков и таблиц. Все это позволит повысить качество проектирования.

Фундаментальные знания являются основой для подготовки хорошего специалиста, но современная жизнь не стоит на месте. Наши студенты готовы к этим изменениям.

РЕАЛИЗАЦИЯ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА ПРИ ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ

Н.А. ШЕРСТНЁВА

Смоленский государственный университет»

УДК 378.147.88

Ключевые слова: *компетентностный подход, бакалавриат, вариативность мышления, самостоятельная работа.*

В статье рассматривается один из подходов к формированию общекультурных и профессиональных компетенций, реализуемый в процессе освоения бакалаврами 3 курса направления подготовки 050100 «Педагогическое образование» (профиль «Математика и информатика») курса по выбору БЗ.В.ДВ.1. «Текстовые задачи в ЕГЭ по математике».

Начало XXI века ознаменовалось очередной реформой образовательной системы России. В сентябре 2003 года мы присоединились к Болонскому процессу, что обусловило поиск инновационных подходов к построению системы высшего образования. На смену студентам-специалистам пришли студенты-бакалавры, а ключевыми словами при конструировании и моделировании учебных программ стали общекультурные и профессиональные компетенции. Внедрение компетентного подхода в российское образование обусловлено тенденцией интеграции и глобализации мировой экономики; стремлением повысить конкурентоспособность выпускников российских вузов на рынке труда и уровень их подготовки с ориентацией на международные стандарты; расширением границ образовательного пространства и предоставлением молодым юношам и девушкам возможности продолжить своё образование за рубежом.

Отмеченные тенденции привели к трансформации образовательных программ по различным направлениям подготовки и построении их на новых принципах. Так, в частности, при подготовке бакалавров по направлению подготовки 050100 «Педагогическое образование», профиль «Математика и информатика» во главу угла ставятся следующие составляющие компетентного подхода: владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1); способность использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования (ОК-4); осознание социальной значимости своей будущей профессии, обладание мотивацией к осуществлению профессиональной деятельности (ОПК-1); способность разрабатывать и реализовать учебные программы базовых и элективных курсов в различных образовательных учреждениях (ПК-1); готовность использовать систематизированные теоретические и практические знания для определения и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11), способность разрабатывать современные педагогические технологии с учетом особенностей образовательного процесса, задач воспитания и развития личности (ПК-12) и другие. Данные компетенции формируются в процессе освоения

бакалаврами различных учебных дисциплин, в том числе существенный вклад в их формирование вносят различные курсы по выбору.

В Смоленском государственном университете для студентов 3 курса отмеченного направления в образовательный процесс внедрён курс по выбору БЗ.В.ДВ.1. «Текстовые задачи в ЕГЭ по математике», что также мотивировано веяниями времени. Ведь сегодня ЕГЭ по математике прочно вошёл в практику общеобразовательной школы, объединив в себе выпускные экзамены за курс средней школы и вступительные испытания в вузы. Поэтому умение решать задачи, предлагаемые на государственном экзамене, является неотъемлемой частью подготовки выпускника образовательного учреждения, обучающегося на педагогических специальностях. Одной из разновидностей тестовых заданий, входящих в единый государственный экзамен по математике, являются текстовые задачи, представленные в задании В13 (текстовая задача на построение математической модели ситуации, предполагающая составление уравнения или системы уравнений). Таким образом, успешность написания ЕГЭ по математике зависит и от умения решать подобные задания. А значит, это умение необходимо выработать и у будущих педагогов-математиков. Кроме того, важно не просто научить бакалавров решать конкретную математическую задачу, а выработать у них стремление к поиску различных способов её решения и к их дальнейшему анализу с целью нахождения оптимального пути решения рассматриваемой проблемы. Поиск различных способов решения задачи способствует формированию гибкости и вариативности мышления будущих учителей математики; побуждает их к самообразованию и учит самостоятельности; обогащает навыками проведения научного исследования; а выступление с полученными результатами перед однокурсниками позволяет отточить педагогическое мастерство и лучше подготовиться к практике в школе. Описываемый курс рассчитан на 36 часов и предусматривает рассмотрение 6 типов текстовых задач: задачи на движение; задачи на проценты, сплавы и смеси; задачи на работу и производительность; задачи, связанные с десятичной записью числа; задачи на прогрессии и комбинированные задания. Общие подходы к решению указанных типов заданий сообщаются бакалаврам преподавателем на нескольких первых занятиях курса по выбору. Здесь же даётся иллюстрация решения одной и той же математической проблемы различными способами; происходит коллегиальное обсуждение трудоёмкости, целесообразности и оптимальности предложенных подходов; анализ используемых при решении идей и методов. Это даёт возможность реализовать в образовательном процессе такие компетенции, как ОК-1, ОК-4, ПК-11. Далее бакалавры - будущие педагоги выбирают себе темы для самостоятельной работы; готовят по

ним задачи с обязательной вариативностью подходов к решению и выступают с полученными результатами перед группой, либо самостоятельно предлагая решение математической проблемы, либо инициируя к его получению аудиторию. Тем самым дополнительно к уже отмеченным формируются компетенции ОПК-1, ПК-1, ПК-12. Приведём пример одной творческой работы по теме «Текстовые задачи на проценты, сплавы, смеси».

Задача. Имеется 2 сплава меди и олова. Один сплав содержит 72 % меди, а другой 80 % меди. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получилось 800 грамм сплава, содержащего 75 % меди?

1 способ решения (словесное оформление решения; в качестве математической модели ситуации выступает система уравнений).

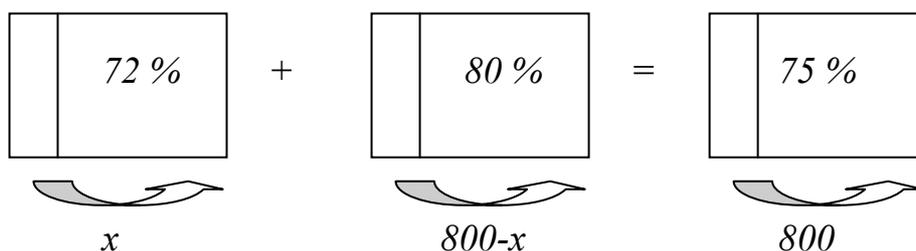
Пусть нужно взять x грамм первого сплава и y грамм второго. Так как масса нового сплава равна 800 грамм, то получим первое уравнение: $x + y = 800$. Из условия следует, что первый сплав содержит $0,72x$ грамм меди, второй - $0,8y$ грамм меди, а третий - $0,75 \cdot 800 = 600$ грамм меди. Получим второе уравнение: $0,72x + 0,8y = 600$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 800, \\ 0,72x + 0,8y = 600; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 800 - x, \\ 0,72x + 0,8 \cdot (800 - x) = 600; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 800 - x, \\ 0,72x + 640 - 0,8x = 600; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 800 - x, \\ 0,08x = 40; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 500, \\ y = 300. \end{cases}$$

Итак, надо взять 500 грамм первого сплава и 300 грамм второго.

2 способ решения (оформление решения в виде блок-схемы; математической моделью является уравнение).



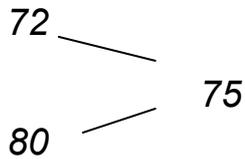
$$0,72x + 0,8 \cdot (800 - x) = 0,75 \cdot 800 \Leftrightarrow 0,72x + 640 - 0,8x = 600 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,08x = 40 \Leftrightarrow x = 500.$$

Если $x = 500$, то $800 - x = 300$.

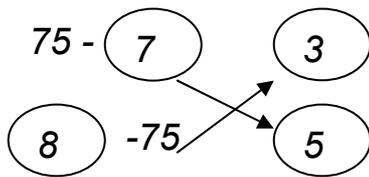
Итак, надо взять 500 грамм первого сплава и 300 грамм второго.

3 способ решения (старинный; арифметическое решение).

Пишем друг под другом процентные содержания меди в имеющихся сплавах, а в центре – процентное содержание меди, которое нужно получить в новом сплаве:



Рассмотрим пары: 72 и 75; 75 и 80. В каждой паре из большего числа вычитаем меньшее, результат записываем справа:



Заключение: 72-процентного сплава надо взять 5 частей, а 80-процентного – 3 части; т.е. 800 грамм приходится на 8 частей; тогда одна часть – это 100 грамм; первого сплава надо взять 500 грамм, а второго – 300 грамм.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики	3
<i>Абраменков А.Д.</i> Методы измерения отклонения электрической емкости датчика от его номинального значения	3
<i>Адуков В.М., Фадеева А.С.</i> Применение пакета Maple для построения минимальной реализации	4
<i>Бычкова А.М., Карасев Е.Д., Никифоров Д.В.</i> Построение в simulink прототипа модели энергосистемы для режимного тренажера диспетчера с учетом электромагнитных переходных процессов	6
<i>Бушкова В.А.</i> Пакет программ оснащенной динамической визуализации геодезических в римановых пространствах размерности $n = 2, 3, 4$	9
<i>Викулов В.М.</i> Методы снижения пик-фактора сигнала OFDM. Компьютерное моделирование	11
<i>Дьяконов В.П.</i> Облачная система компьютерной математики Wolfram Alpha	13
<i>Егоренков И.В.</i> Разработка программного обеспечения для упрощения использования программы моделирования антенн MMANA-GAL	18
<i>Зайцева Н.В.</i> Применение пакета Maple при исследовании модели Лотка-Вольтерра	20
<i>Игнатов В.Д.</i> Применение средств имитационного моделирования в исследовании прикладных задач	21
<i>Игнатъев Ю.Г., Гарипова И.Х.</i> Математическое и компьютерное моделирование решений релятивистского диффузионного уравнения в приближении Фоккера-Планка на основе асимптотических оценок в СКМ Maple	24
<i>Игнатъев Ю.Г., Кох И.А.</i> Компьютерное моделирование диффузии частиц сверхвысоких энергий в точной космологической модели с ускорением на основе сплайновой аппроксимации в СКМ Maple	26
<i>Кристалинский В.Р., Герасенкова М.А.</i> О прогнозировании качества продукции на основе информации о комплектующих	28
<i>Кристалинский Р.Е., Евдокимова Г.С.</i> Компьютерная система МАТНЕМАТІСА в обучении теории вероятностей	30
<i>Мишин А.В., Баланов М.Ю.</i> Статистические характеристики автокорреляционной функции марковских последовательностей с недетерминированной матрицей переходных вероятностей	32
<i>Найдёнов Е.В.</i> Компьютерное проектирование и моделирование в САПР и СКМ узлов микромашиных кибернетических платформ для культивирования саморазвивающихся и функционирующих эндотелиальных капиллярных сетей	34

<i>Нигмедзянова А.М.</i> Оснащенная динамическая визуализация построения точки по ее координатам на проективной прямой	36
<i>Петрова Е.В.</i> Решение паде-аппроксимации в системе MAXIMA	38
<i>Петрова Е.В., Медведев М.И.</i> Реализация методов прогнозирования в системе MAXIMA	40
<i>Подорога А.В.</i> Имитационные компьютерные модели в задачах однополосного дорожного движения	42
<i>Пульнова К.Г.</i> Датчик тока на основе эффекта Холла	44
<i>Рогожкин А.С.</i> Особенности использования пакета расширения SIMRF системы MATLAB при моделировании высокочастотных усилителей мощности	46
<i>Сачкова О.А.</i> Программные процедуры автоматизированного решения обыкновенных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений произвольного порядка и оснащенной динамической визуализации их решений	48
<i>Смолин В.А.</i> Математическое моделирование динамики объемных взаимодействий в бинарной системе этанол – вода как основы метода определения количества свободной воды в биологических тканях	50
<i>Суханова А.Г.</i> Системы компьютерной математики как средство расчета рыночной стоимости объектов недвижимости	52
<i>Тихонова О.В.</i> Комбинированные методы моделирования радиотехнических систем	56
<i>Фоменкова Е.О.</i> Исследование SPICE-моделей операционных усилителей	58
<i>Цветкович Д.Г.</i> Численные оценки количества вещественных нулей полиномов Бернулли	60
<i>Чечулин В.В., Тимофеев Е.А.</i> Методика проектирования высокочастотного фильтра на многослойной низкотемпературной керамике	62
<i>Ястребов М.Ю.</i> Хеширование на основе поиска Фибоначчи	65
СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры	68
<i>Белякова Е.А., Мунерман В.И.</i> Многомерно-матричное представление массовой обработки данных в облачной системе WINDOWS AZURE	68
<i>Будзко В.И., Синицын И.Н.</i> Развитие компьютерных информационных технологий «Большие данные»	69
<i>Быченко А.Ю., Мунерман В.И.</i> Роль многомерных матриц в обработке данных	75
<i>Денисенков М.А.</i> Классификация нечетких ситуационных сетей	77
<i>Емельченков Е.П., Авдеев Д.А., Копаренко Е.М.</i> Большие данные и	

функциональные комплексы данных	80
<i>Захаров А.С., Борисов В.В.</i> Обоснование временных модальностей для прямого и обратного вывода с использованием нечётких байесовых сетей	82
<i>Кравченко В.В., Мунерман В.И., Симакова А.А.</i> Анализ алгоритма Бустрофедона на больших массивах данных	86
<i>Ласточкин Г.Г., Самойлова Т.А.</i> Технология создания гибридных мобильных приложений	88
<i>Макаров Д.И., Мунерман В.И.</i> Реализация MPP архитектуры вычислительного комплекса для массовой обработки данных в WINDOWS AZURE	90
<i>Мунерман В.И., Мунерман Д.В.</i> Параллельная реализация операции соединения средствами WINDOWS AZURE	93
<i>Мунерман В.И., Усачев В.В.</i> Параллельная реализация умножения матриц с использованием облачных вычислений в WINDOWS AZURE	97
<i>Мунерман В.И., Шашеро И.М.</i> Обоснование выбора метода организации параллельной обработки больших данных	99
<i>Мунерман В.И., Шинелев А.Ю.</i> Параллельная реализация операций соединения в системе разработки приложений 1С	100
<i>Потапова А.В., Самойлова Т.А.</i> Параллельная обработка графических браузерных приложений	103
<i>Ширай А.Е.</i> Системная поддержка вычислений в многоядерной конвейерной серверной архитектуре	106
СЕКЦИЯ 3. Математика и ее приложения	110
<i>Адуков В.М.</i> Теория представлений конечных групп в задаче факторизации Винера – Хопфа	110
<i>Андреенков А.П., Расулов К.М.</i> О приближенном методе решения одной задачи типа Гильберта в классах метааналитических функций	112
<i>Арзамасцев А.Л., Гомонов С.А.</i> О некоторых преобразованиях планарных графов, упрощающих получение их четырехцветных раскрасок	114
<i>Банару М.Б., Банару Г.А.</i> О новых результатах в геометрии уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав	117
<i>Бешенков С.Н., Березняк И.С.</i> Конечно-разностный анализ нестационарного отрывного деформирования контактирующих элементов конструкций	120
<i>Богданова Н.Н.</i> Об одной четырёхэлементной краевой задаче типа задачи Карлемана для бианалитических функций в случае произвольного контура	124
<i>Василенков В.П.</i> Граничные свойства метаналитических функций	126

<i>Вувуникян Ю.М.</i> Обобщенные спектральные характеристики полиномиальных эволюционных операторов	128
<i>Гавришь Ю. В., Тихонов И. В.</i> Модельная обратная задача для уравнения теплопроводности с неизвестной функцией источников	129
<i>Галютдинов И.Г., Лаврентьева Е.Е., Хусаинова Э.Д.</i> Задача Чирнгаузена и некоторые её применения	131
<i>Долгополова О.Б., Зверович Э.И.</i> Построение функций Шоттки на торе с удаленным диском	133
<i>Евдокимова Г.С.</i> О существовании предельного распределения виртуального времени ожидания	137
<i>Емельченков Е. П.</i> Аффинные инцидентностные структуры. Осевые коллинеации	139
<i>Емельченков Е. П.</i> Π -транзитивные AE -структуры	143
<i>Зверович Э. И.</i> Формула перестановки в гиперсингулярных интегралах	146
<i>Зуев А.М.</i> Оценка интеграла специального вида от бесселевых функций	150
<i>Зуева И.М., Болотин И.Б.</i> О нетеровости первой основной краевой задачи типа Римана для трианалитических функций в плоскости со щелями	152
<i>Карачик В.В.</i> Построение решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре с полиномиальными данными	153
<i>Каткова А.А.</i> Аппроксимация зависимости коэрцитивной силы от условий перемагничивания и ее применение в модели ферритового сердечника	155
<i>Киреев В.И., Бирюкова Т.К., Гершкович М.М.</i> Квадратурные и кубатурные формулы на нерегулярном шаблоне	157
<i>Кирьяцкис Д., Кирьяцкий Э.</i> О корнях обобщенного многочлена	164
<i>Кирьяцкис Е., Кирьяцкий Э.</i> Об интерполяции однолистных функций рациональными дробями	165
<i>Клименко Д.А., Болотин И.Б.</i> О нетеровости второй основной краевой задачи типа Гильберта с разрывными коэффициентами для бианалитических функций в случае полуплоскости	166
<i>Комиссарова Д.А.</i> Устойчивость линейных многомерных моделей	168
<i>Конашенко А.В., Родионова Г.С.</i> Исследование устойчивости решений квазилинейных систем дифференциальных уравнений	170
<i>Кудрявцев К.Н., Мешков В.М.</i> Об одной модели планирования рекламного бюджета в дуополии	173
<i>Куприкова О.Н.</i> О видоизмененной задаче Неймана для квазигармонических функций в исключительном случае	175

<i>Курицын С.Ю., Расулов К.М.</i> О решении одной обобщенной задачи типа Римана для метааналитических функций	178
<i>Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б.</i> Решение интегрального уравнения, соответствующего внутренней задаче Дирихле, для одного эллиптического уравнения с младшими членами	180
<i>Медведев С.В.</i> Плотно-однородные пространства	182
<i>Петросова М.А., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.</i> Случай симметричного отрезка в теории классических полиномов Бернштейна	184
<i>Рассторгуева А.В., Болотин И.Б.</i> О нетеровости первой основной краевой задачи типа Римана с разрывными коэффициентами для трианалитических функций в случае полуплоскости	187
<i>Расулов К.М.</i> О решении задачи типа Шварца для бианалитических функций в прямоугольнике	188
<i>Расулов К.М., Смирнов А.Ю.</i> Видоизмененная краевая задача типа Дирихле в классах квазигармонических функций в исключительном случае	191
<i>Ровба Е.А., Дирвук Е.В.</i> Рациональная квази-интерполяция Эрмита-Фейера	193
<i>Романенкова Ю.С.</i> Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения первого порядка на комплексной плоскости от параметра	194
<i>Синицын И.Н., Синицын В.И.</i> Нормальные и эллипсоидальные распределения в интегродифференциальных стохастических системах	196
<i>Стабулит И.С.</i> Гарантии по исходам и рискам в одной кооперативной игре	198
<i>Тимотин А.М.</i> О решении четырёхэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана для бианалитических функций	200
<i>Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г.</i> Полиномы Бернштейна и компьютерная математика	206
<i>Чеботарева Э.В.</i> Математическая модель рекультивации почв полосы отвода железной дороги	209
<i>Шамоян Ф.А., Беднаж В.А., Приходько О.В.</i> О нулях одного класса аналитических в полуплоскости функций	211
<i>Шамоян Ф.А., Куриленко С.М.</i> К вопросу об ограниченности теплицевых операторов в весовых пространствах Соболева аналитических в единичном шаре функций	213
<i>Шамоян Р.Ф., Куриленко С.М.</i> Мультипликаторы пространств $H_{\vec{a}}^{\vec{p}}$ и $H^{\vec{p}}(\vec{\alpha})$ аналитических функций в поликруге со смешанной нормой	215
<i>Шерстюков В.Б.</i> Оценки уклонений полиномов Бернштейна от липшицевых функций	216

<i>Штыкова М.Ф., Конашенко А.В.</i> Вероятностные и экстремальные свойства ортогонального проектирования многогранников	218
<i>Штыкова М.Ф., Конашенко А.В.</i> Геометрические свойства ортогонального проектирования многогранников	224
<i>Ramatanohar R. Reddy</i> Erdos-Szekeres problem of empty convex polygons revisited	231
СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании и прикладная лингвистика	232
<i>Авхимович В.В., Калинина Е.А., Самойлова Т.А.</i> Статистический анализ лексических комплексов в авторских текстах	232
<i>Ассонова Н.В.</i> Некоторые примеры интерактивных электронных образовательных ресурсов для изучения элементов теории графов будущими учителями начальных классов	237
<i>Блиндюк Р.В.</i> Готовность субъектов образования к внедрению автоматизированных систем оценки качества обучения: критериально-признаковый аппарат	239
<i>Буренина Е.Е., Сенькина Г.Е.</i> Проблемы и перспективы организации дистанционного обучения учащихся с ограниченными возможностями здоровья	241
<i>Дюндин А.В.</i> Дистанционная подготовка к ЕГЭ по физике	246
<i>Емельченков Е.П., Селезнева Г.А.</i> Системы автоматизированной поддержки работы преподавателя	248
<i>Киселёва Д.Г.</i> Формирование компетенций учащихся в условиях общеобразовательной школы с помощью сетевых учебно-методических информационных комплексов: результаты исследования	250
<i>Конашенко В.И.</i> Обучение студентов использованию информационных технологий в процессе изучения физики	254
<i>Кочаненков Е.И.</i> Методика замера эффективности автоматизированной визуализации педагогического процесса: критерии и признаки	255
<i>Лелюхин О.О., Сенькина Г.Е.</i> Готовность школьников к ускоренному обучению: результаты констатирующего этапа эксперимента	258
<i>Лунькова Е.С.</i> Использование программы ANTCONC 3.2.4W для анализа художественного текста	260
<i>Метелица И.Е.</i> Педагогические условия автоматизированного проектирования образовательных сайтов: начальный диагностический срез формирующего этапа эксперимента	262
<i>Морозова Е.В.</i> Использование компьютерных средств для развития логического мышления учащихся	264

<i>Петров В.А.</i> А.Г. Курош и Смоленский университет	266
<i>Рыбалкина Т.И.</i> Инновационная деятельность школьной предметной кафедры как условие развития профессиональной компетентности учителя: цели и задачи исследования	268
<i>Савченков В.И.</i> Информационные технологии и качество подготовки специалистов. Практический аспект	272
<i>Самарина А.Е.</i> Использование программы для 3D-моделирования SKETCHUP в обучении студентов	274
<i>Самигуллина А.Р.</i> Реализация аналитического тестирования знаний по высшей математике в приложении MAPLET	277
<i>Селюк Б.В.</i> Малые колебания	279
<i>Селюк Б.В.</i> Качели	282
<i>Сенькина Г.Е., Гаврилова Т.И.</i> Проектирование развивающих компьютерных игр в учебном процессе: постановка проблемы и результаты опроса	284
<i>Степанов К.Г., Шепелин В.А.</i> Применение виртуальных компьютерных лабораторий в высшем образовании	289
<i>Тимофеева Н.М., Тимофеева Т.И.</i> Пример применения ИКТ для решения практико-ориентированных задач	296
<i>Усачев В.И.</i> Об использовании прикладных математических пакетов при проведении уроков по математике	300
<i>Царева Е.А.</i> Использование компьютерных технологий на занятиях по теплогазоснабжению	304
<i>Шерстнёва Н.А.</i> Реализация компетентностного подхода при подготовке бакалавров	306

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 15

Издательство Смоленского государственного
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко*

Подписано к печати 17.04.2014. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. п. л. 19,8. Уч.-изд. л. 19,8. Тираж 120 экз.
Заказ №

Отпечатано с оригинал-макета авторов в ИТЦ СмолГУ
214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4.