

Министерство образования и науки РФ  
Смоленский государственный университет

---

# **Системы компьютерной математики и их приложения**

*Материалы XIX Международной научной конференции,  
посвященной 100-летию физико-математического  
факультета Смоленского государственного университета*

Выпуск 19

Смоленск  
Издательство СмолГУ  
2018

УДК 621.396.218  
ББК 32.97  
С 409

*Печатается по решению  
редакционно-издательского  
совета СмолГУ*

**Редакционная коллегия:** *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *И.Б. Болотин*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *С.А. Гомонов*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *Е.П. Емельченков*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Н.М. Тимофеева*, канд. пед. наук, доц.; *И.В. Тихонов*, д-р физ.-мат. наук, проф.

**Системы компьютерной математики и их приложения:**  
С 409 материалы XIX Международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета СмолГУ. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. – Вып. 19. – 423 с.  
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XIX Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 18–20 мая 2018 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218  
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,  
*продолжающееся издание*

© Авторы, 2018  
© Издательство СмолГУ, 2018

## СЕКЦИЯ 1

### Системы компьютерной математики

**Т.А. Агасиев, А.П. Карпенко**

*Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана*

УДК 519.6

#### **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ СТРАТЕГИЙ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННОГО СОДЕРЖАНИЯ ЛАНДШАФТА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ**

Ключевые слова: *оптимизация, мета-оптимизация, ландшафтный анализ, метод информационного содержания, автоматизированная настройка параметров.*

*В статье рассматривается задача автоматизированной настройки параметров алгоритмов оптимизации с применением методов ландшафтного анализа. Для оценки характерных признаков ландшафта целевой функции используется метод информационного содержания. Настраивается категориальный параметр алгоритма роя частиц, определяющий топологию соседства частиц. Эффективность алгоритма оценивается по лучшему найденному значению целевой функции за ограниченное число испытаний. Предложенный подход к настройке параметров позволяет выбирать наиболее эффективные значения параметров алгоритма оптимизации на основании вектора характерных признаков решаемой задачи.*

#### **1. Постановка задачи**

Современные системы автоматизированного проектирования и инженерного анализа включают в себя программы, реализующие, в том числе, алгоритмы непрерывной глобальной оптимизации. Рассматриваем задачу  $q$  глобальной оптимизации

$$\min_{X \in D_X} f(X) = f(X^*) = f^*,$$

где  $X$  –  $n$ -мерный вектор варьируемых параметров;  $D_X$  – область поиска;  $f(X)$  – целевая функция;  $X^*, f^*$  – искомые оптимальный вектор  $X$  и значение  $f(X)$ .

В современном программном обеспечении при решении задач оптимизации широко применяют различные методы предварительного анализа постановки задачи [1]. Результатом предварительной оценки свойств задачи  $q = q(C)$  является вектор характерных признаков (ХП)  $C = (c_1, \dots, c_m)$  этой задачи. Различают априорные и апостериорные ХП. Априорные ХП прямо вытекают из постановки задачи оптимизации, например размерность пространства варьируемых параметров. Апостериорные ХП, в отличие от априорных, требуют некоторого числа испытаний целевой функции в области поиска с целью последующей экспертной и/или автоматической оценки результатов испытаний. К числу апостериорных ХП задачи оптимизации относят, прежде всего, ХП целевой функции. Методы оценки значений апостериорных ХП целевой функции без использования экспертных оценок называют методами ландшафтного анализа [2].

Современные алгоритмы оптимизации имеют, как правило, значительное число свободных параметров, от значений которых может существенно зависеть эффективность этих алгоритмов. Отсюда возникает задача настройки алгоритма – задача определения наилучших значений этих параметров. Вектор  $B = (b_1, \dots, b_k)$  свободных параметров алгоритма оптимизации называют *стратегией* алгоритма. Выделяют числовые и категориальные параметры в составе стратегии. Категориальные параметры имеют небольшое число допустимых значений, например топология соседства в алгоритме роя частиц [3].

## 2. Метод анализа характерных признаков целевой функции

Для определения значений апостериорных характерных признаков целевой функции методами ландшафтного анализа необходима *обучающая выборка* – набор точек  $X$  и соответствующих значений целевой функции  $f(X)$ . *Метод информационного содержания (Information Content)* [4] позволяет оценить численные характеристики зашумленности и мультимодальности ландшафта целевой функции. Сначала точки  $X_i, i \in [1:l]$  обучающей выборки упорядочивают тем или иным образом и вычисляют перепад значений  $f(X)$  между соседними точками выборки. Затем последовательность значений  $f(X_i) = f_i$  преобразуют в символичный набор  $S(\varepsilon) = \{s_1, \dots, s_{l-1}\}$  по правилу



$$s_i = \begin{cases} 1, & \delta_i < -\varepsilon \\ 0, & |\delta_i| \leq \varepsilon \\ 1, & \delta_i > \varepsilon \end{cases}, \quad \delta_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\|X_{i+1} - X_i\|}, \quad i \in [1:l-1],$$

где  $\varepsilon$  – параметр, определяющий чувствительность метода. Полученную последовательность символов используют для вычисления искомым характерных признаков на основании значений функции информационного содержания

$$ic(\varepsilon) = -\sum_{a \neq b} p_{ab}(\varepsilon) \log_6 p_{ab}(\varepsilon), \quad a, b \in \{\bar{1}, 0, 1\},$$

где  $ab$  – блок последовательных символов из  $S(\varepsilon)$ ;  $p_{ab}$  – оценка вероятности обнаружения блока  $ab$  в наборе  $S(\varepsilon)$ . Определяем значение функции частичного информационного содержания

$$icp(\varepsilon) = \frac{|S'(\varepsilon)|}{l-1},$$

где  $S'(\varepsilon)$  – последовательность символов, полученная путем удаления из последовательности  $S(\varepsilon)$  всех повторений и символов 0. Координаты наиболее информативных точек функций  $ic(\varepsilon)$  и  $icp(\varepsilon)$  используют в качестве компонентов вектора  $C$  для различения оптимизационных задач. На рисунке 1 изображены соответствующие точки для тестовых функций Экли и Розенброка.

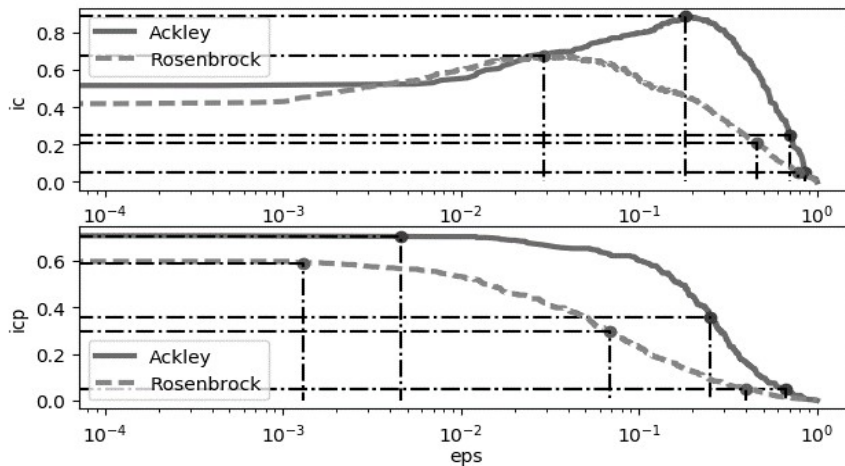


Рис. 1. Функции информационного и частичного информационного содержания для оценки значений характерных признаков тестовых функций Экли и Розенброка

Метод информационного содержания характеризует особенности одномерной кусочно-линейной кривой, полученной путем упорядочивания точек обучающей выборки. Точность оценки значений признаков ландшафта целевой функции зависит от размера обучающей выборки и используемого метода упорядочивания. На рисунке 2 представлены различные способы упорядочивания результатов

полнофакторного эксперимента при помощи заполняющих пространство кривых на примере функции Розенброка. Малая вычислительная сложность тестовых оптимизационных задач позволяет выполнить обширное исследование ландшафта целевой функции, используя результаты достаточно большого числа испытаний.

В общем случае необходимо проложить маршрут по произвольной и, скорее всего, нерегулярной выборке (упорядочить выборку) точек пространства варьируемых параметров. Объем обучающей выборки для ландшафтного анализа практически значимых оптимизационных задач также ограничен. Актуальна проблема выбора наиболее информативного маршрута для получения точных оценок характеристик ландшафта целевой функции.

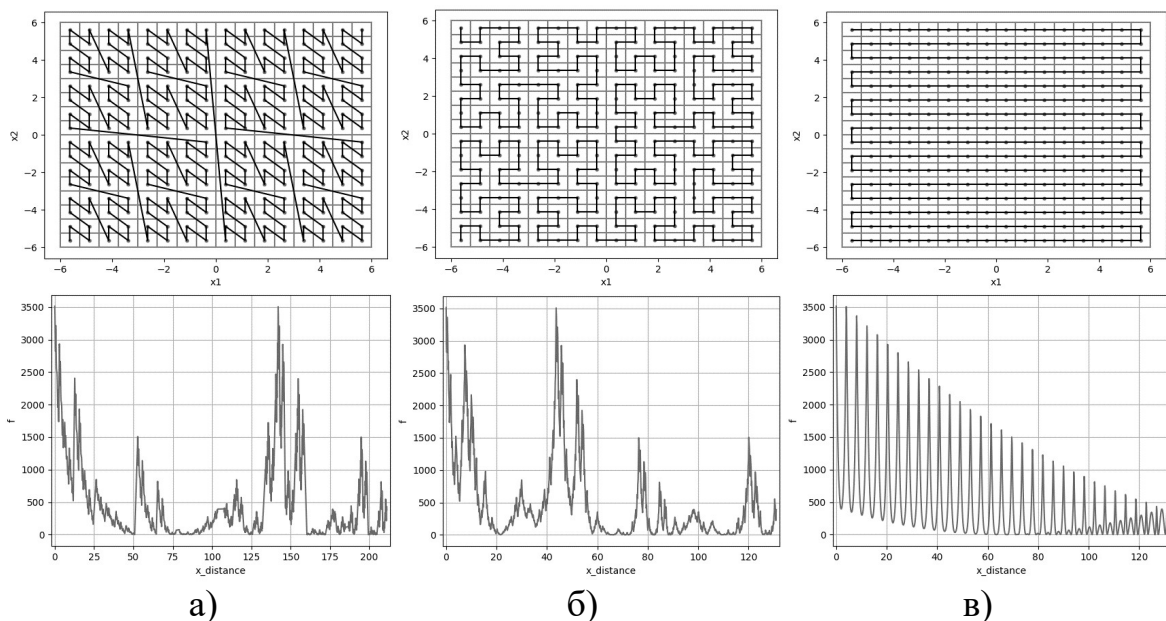


Рис. 2. Развертка ландшафта двухмерной функции Розенброка при помощи кривой Мортон (а), кривой Гильберта (б) и простого обхода всех точек (в)

Целью данной работы является подтверждение концепции автоматизированной настройки алгоритмов оптимизации путем построения приближенного отображения  $C \mapsto B^*$ , где  $B^*$  – эффективная стратегия для решения задачи  $q(C)$ .

### 3. Вычислительный эксперимент

Для проведения вычислительного эксперимента необходим набор тестовых оптимизационных задач [5]. Часть этих задач используем для построения отображения  $C \mapsto B^*$ , остальные – для оценки точности предсказаний эффективной стратегии алгоритма оптимизации. В качестве настраиваемого алгоритма оптимизации выбран алгоритм роя частиц в связи с простотой реализации алгоритма и интерпретации результатов исследования.

Алгоритм имеет категориальный параметр, определяющий топологию соседства частиц. Доступно четыре значения этого параметра: кольцо (*ring*), клика (*gbest*), кластер (*cluster*) и двумерный тор (*von Neumann*). Для каждой тестовой задачи определяем значения ХП и наиболее эффективную топологию соседства частиц. Вектор ХП задач вычисляем при помощи метода информационного содержания, используя три упомянутых выше способа упорядочивания тестовой выборки. Также варьируем размер обучающей выборки для оценки устойчивости метода ландшафтного анализа. В качестве индикатора эффективности  $e(B)$  алгоритма оптимизации используем лучшее найденное значение целевой функции  $f^*$  за ограниченное число испытаний.

Выбрано 20 тестовых оптимизационных задач, 15 из которых использовано для построения отображения  $C \mapsto B^*$ . Каждой задаче ставим в соответствие 27-мерный вектор ХП, вычисленный девятью различными способами. Таким образом для построения отображения  $C \mapsto B^*$  использовано 135 пар значений  $C_i, B_i^*$ . Для предсказания оптимальной топологии соседства частиц решаем задачу классификации векторов  $C_i, i \in [1:135]$ . Класс некоторого вектора  $C_i$  соответствует наиболее эффективной топологии соседства  $B_i^*$  для решения задачи  $q(C_i)$ . На рисунке 3 представлены результаты оценки эффективности алгоритма роя частиц при решении пяти тестовых задач, представленных 45 различными векторами ХП, которые не участвовали в процессе построения приближенного отображения  $C \mapsto B^*$ .

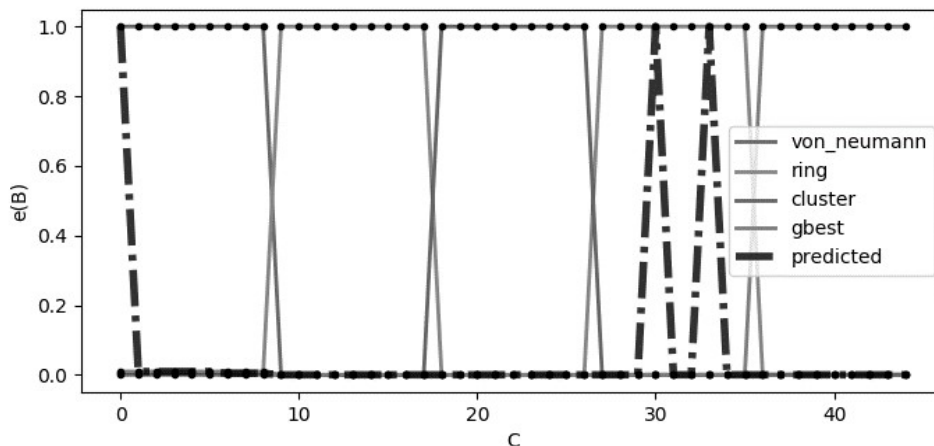


Рис. 3. Сравнение эффективности решения тестовых оптимизационных задач с каждой из топологий соседства частиц и с предсказанной наиболее эффективной топологией (*predicted*)

Для наглядности результатов применения приближенного отображения  $C \mapsto B^*$  для предсказания наиболее эффективной стратегии использованы нормализованные в пределах  $[0,1]$  значения индикатора

$e(B)$ . Из рисунка 3 видно, что эффективность алгоритма роя частиц при решении тестовых задач с предсказанной стратегией (черная линия на графике) в большинстве случаев значительно выше эффективности произвольно выбранной стратегии.

### Литература

1. Shan S., Wang G.G. Survey of modeling and optimization strategies to solve high-dimensional design problems with computationally-expensive black-box functions // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2010. Vol. 41, No. 2. P. 219–241. DOI: 10.1007/s00158-009-0420-2.

2. Mersmann O. et al. Exploratory landscape analysis // Proceedings of the 13th annual conference on Genetic and evolutionary computation. ACM. 2011. P. 829–836. DOI: 10.1145/2001576.2001690.

3. Poli R., Kennedy J., Blackwell T. Particle swarm optimization // Swarm intelligence. 2007. Vol. 1. No. 1. pp. 33–57. DOI: 10.1007/s11721-007-0002-0.

4. Muñoz M.A., Kirley M., Halgamuge S.K. Exploratory landscape analysis of continuous space optimization problems using information content // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2015. Vol. 19, No. 1. P. 74–87. DOI: 10.1109/TEVC.2014.2302006.

5. Jamil M., Yang X.S. A literature survey of benchmark functions for global optimisation problems // International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation. 2013. Vol. 4, No. 2. P. 150–194. DOI: 10.1504/IJMMNO.2013.055204.

**T.A. Agasiev, A.P. Karpenko**

Bauman Moscow State Technical University

### **EXPLORATORY LANDSCAPE ANALYSIS BASED ON INFORMATION CONTENT FOR PREDICTION OF EFFICIENT STRATEGIES OF OPTIMIZATION ALGORITHM**

**Keywords:** *optimization, meta-optimization, exploratory landscape analysis, information content method, automated parameter tuning.*

**Abstract.** *The article considers an approach to automated parameter tuning of optimization algorithms with the use of exploratory landscape analysis methods. The information content method has been applied for assessing the features of objective function of a problem to be solved. The research is based on tuning the categorical parameter defining the particles' neighbouring topology of the particle swarm optimization algorithm. The algorithm's efficacy is measured in terms of the best reached objective value at a fixed total number of evaluations. In accordance with the experiment results the proposed approach allows to predict effectively the better values of the algorithm's parameter using calculated vector of the problem features.*

## **ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ К АНАЛИЗУ ВЫИГРЫШНЫХ СТРАТЕГИЙ ДЛЯ ПОЛНОЙ ГРУППЫ СОБЫТИЙ**

Ключевые слова: *полная группа событий, нелинейное программирование, выигрышная стратегия, целевая функция, система уравнений, функция Леонтьева.*

*Статья посвящена изучению одной математической модели нелинейного программирования, позволяющей провести анализ стратегий для полной группы событий, максимизирующих выигрыш игрока. С помощью СКМ Wolfram Mathematica моделируется поведение игрока и формулируется теорема об оптимальности выбора стратегий распределения бюджета между событиями полной группы, которая затем доказывается аналитически.*

**1. Постановка задачи.** Пусть дано  $n$  событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , образующих полную группу событий, а также даны соответствующие этим событиям коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , определяющие ожидаемый выигрыш от наступления каждого из данных событий. Предположим, что игрок располагает бюджетом равным  $S$  ( $S > 0$ ), и платит налог на выигрыш, равный  $p$  ( $0 \leq p < 1$ ).

Рассмотрим следующую задачу. *Требуется определить оптимальные стратегии игрока по распределению бюджета  $S$  между событиями данной полной группы событий, такие, что ожидаемый выигрыш будет максимально возможным и большим  $S$ .*

**Замечание.** Ради краткости будем называть сформулированную задачу задачей  $Z_n$ .

**2. Математическая модель задачи  $Z_n$ .** Не ограничивая общности можно считать, что коэффициенты, соответствующие каждому событию полной группы, расположены в порядке не убывания, т.е.  $1 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ .

Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – стратегия игрока, соответствующая распределению бюджета  $S$  между событиями полной группы событий. Представим условие задачи  $Z_n$  в виде следующей таблицы 1.

Таблица 1

Событие	$A_1$	...	$A_n$	Ограничения
Коэффициенты	$a_1$	...	$a_n$	$1 < a_1 \leq \dots \leq a_n$
Стратегия	$x_1$	...	$x_n$	$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$
Выигрыш	$a_1 x_1$	...	$a_n x_n$	
Налог	$p$			$0 \leq p < 1$
Чистый доход	$a_1 x_1 (1 - p)$	...	$a_n x_n (1 - p)$	
Бюджет	$S$			$S > 0$
Целевая функция	$z = \min \{a_1 x_1 (1 - p), \dots, a_n x_n (1 - p)\}$			

Построим систему ограничений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j = S \\ a_j (1 - p) x_j > S, j = \overline{1, n} . \end{cases} \quad (1)$$

Целевая функция задачи  $Z_n$  имеет вид

$$z = \min_{1 \leq j \leq n} \{(1 - p) a_j x_j\} . \quad (2)$$

Таким образом, решение задачи  $Z_n$  сводится к отысканию значений переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , удовлетворяющих системе ограничений (1) и обращающих в максимум целевую функцию (2).

**Замечание.** Функция вида (2) обычно называется производственной функцией Леонтьева [1].

**3. Компьютерное моделирование и решение задачи  $Z_n$ .** Для исследования рассматриваемой задачи при различных параметрах  $n$ ,  $S$  и  $p$  воспользуемся системой компьютерной математики Wolfram Mathematica [2].

**Программа в СКМ Wolfram Mathematica для решения задачи  $Z_n$**

*Зададим количество событий в полной группе*

**n = 3;**

*Зададим бюджет*

**S = 100;**

*Зададим налог*

**p = 1/10;**

*Зададим коэффициенты для каждого события группы*

**A = {10, 20, 30};**

*Зададим переменные задачи*

**X = Array[x, n];**

*Построим систему ограничений*

**Cond1 = {Sum[X[[j]], {j, 1, n}] == S};**

**Cond2 = Table[A[[j]]\*(1 - p)\*X[[j]] > S, {j, 1, n}];**

**Cond = Join[Cond1, Cond2];**

*Зададим целевую функцию задачи*

**z = Min[Table[A[[j]]\*(1 - p)\*X[[j]], {j, 1, n}];**

*Найдем максимальное значение целевой функции*

**M = Maximize[{z, Cond}, X];**

*Выделим оптимальное решение задачи*

**sol = Table[x[j] /. M[[2, j]], {j, 1, n}];**

*Сформулируем результат*

**Print["Оптимальное решение имеет вид: ", \**  
**sol]**

**Print["Максимальное значение целевой функции равно: ", M[[1]]]**

Анализ результатов работы, приведенной выше программы, позволяет сформулировать следующее утверждение.

**Теорема.** *Задача  $Z_n$  имеет решение при выполнении условия*

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} < 1 - p, \quad (3)$$

*причем  $\max z = z(M)$ , где*

$$M \left( \frac{\frac{S \prod_{i=1}^n a_i}{a_1 \prod_{i=1}^{n-1} a_i}}{\prod_{j=1}^{n-1} a_j + a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} a_j}{a_i}}; \frac{\frac{S \prod_{i=1}^n a_i}{a_2 \prod_{i=1}^{n-1} a_i}}{\prod_{j=1}^{n-1} a_j + a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} a_j}{a_i}}; \dots; \frac{\frac{S \prod_{i=1}^n a_i}{a_n \prod_{i=1}^{n-1} a_i}}{\prod_{j=1}^{n-1} a_j + a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} a_j}{a_i}} \right), \quad (4)$$

$$\max z = \frac{S \prod_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n a_i} (1 - p). \quad (5)$$

### Доказательство

Для доказательства первой части теоремы 1 воспользуемся системой ограничений (1), получим

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j = S, \\ x_j > \frac{S}{a_j(1-p)}, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Откуда следует (3).

Для доказательства второй части теоремы 1 заметим, что система ограничений (1) линейна относительно переменных, а целевая функция (2) представляет собой «многогранный угол» в пространстве  $R^n$ .

Поэтому если экстремум функции (2) существует, то он достигается в точке  $M$ , координаты которой определяются следующей системой линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1 x_1 (1-p) = a_i x_i (1-p), i = \overline{2, n}, \\ \sum_{j=1}^n x_j = S. \end{cases} \quad (6)$$

Исследуем систему уравнений (6), используя систему компьютерной математики Wolfram Mathematica.

### Программа в СКМ Wolfram Mathematica для решения СЛУ

*Зададим количество событий*

**n = 3;**

*Зададим коэффициенты на каждое из событий*

**A = Array[a, n];**

*Зададим переменные системы уравнений*

**X = Array[x, n];**

*Построим систему уравнений*

**Cond = List[];**

**For[i = 2, i <= n, i++,**

**Cond = Join[Cond, {A[[1]]\*X[[1]] == A[[i]]\*X[[i]]}]**

**Cond = Join[Cond, {Sum[X[[i]], {i, 1, n}] = S}];**

*Найдем решение системы уравнений*

**Sol = Table[x[i] /. Solve[Cond, X][[1, i]], {i, 1, n}];**

*Построим основную матрицу системы*

**DA = Table[0, {i, 1, n}, {j, 1, n}];**

**For[i = 1, i <= n-1, i++,**

**DA[[i, i+1]] = -A[[i+1]]]**

**For[i = 1, i <= n-1, i++,**

**DA[[i, 1]] = A[[1]]]**

**For[i = 1, i <= n, i++,**

**DA[[n, i]] = 1]**

*Найдем определитель основной матрицы.*

**AD = Det[DA];**

*Определитель основной матрицы равен*

**AD**

Анализ результатов, полученных при различных значениях  $n$ , позволяет сформулировать следующее утверждение.

**Лемма.** *Определитель основной матрицы системы уравнений (6) имеет вид*

$$D_n = \prod_{j=1}^{n-1} a_j + a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} a_j}{a_i}. \quad (7)$$



Для доказательства леммы 1 воспользуемся методом математической индукции.

При  $n = 2$  основная матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и ее определитель равен  $D_2 = a_1 + a_2$ .

Предположим, что утверждение верно для произвольного фиксированного  $n$ . Покажем, что оно верно для  $n + 1$ . А именно, что

$$D_{n+1} = \prod_{j=1}^n a_j + a_{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{j=1}^n a_j}{a_i}. \quad (8)$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1 x_1 (1-p) = a_i x_i (1-p), i = \overline{2, n+1}, \\ \sum_{j=1}^{n+1} x_j = S. \end{cases} \quad (9)$$

Основная матрица системы (9) имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n+1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Найдем определитель матрицы (10), разложив его по предпоследней строке, получим

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (-1)^{n+n-1} (-a_{n+1}) \cdot D_n + (-1)^{n+1} a_1 \cdot \begin{vmatrix} -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ a_1 & 0 & \dots & -a_n & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{2n-1} (-a_{n+1}) \cdot D_n + (-1)^{n+1} a_1 \cdot \underbrace{(-a_2) \cdot (-a_3) \cdot \dots \cdot (-a_n)}_{n-1} = \\ &= a_{n+1} \cdot D_n + \prod_{j=1}^n a_j = a_{n+1} \cdot \left( \prod_{j=1}^{n-1} a_j + a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} a_j}{a_i} \right) + \prod_{j=1}^n a_j = a_{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{j=1}^n a_j}{a_i} + \prod_{j=1}^n a_j. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (8) верно и на основании метода математической индукции можно заключить, что исходное равенство (7) справедливо для любого  $n \in N$ .

**Замечание.** Так как все коэффициенты  $a_i > 1$ , определитель (7) отличен от нуля, т.е. система уравнений (6) имеет единственное решение.

Решив систему уравнений (6) по формулам Крамера, получим (4).

Далее, подставим полученную точку (4) в целевую функцию (2), получим (5).

Теорема полностью доказана.

### Литература

1. Allen R.G.D. Macro-economic Theory: A Mathematical Treatment. – L.: Macmillan, 1968.

2. Wellin Paul. Essentials of Programming in Mathematica. Cambridge University Press, 2016.

**S.P. Trofimov, I.B. Bolotin**  
Smolensk State University

## APPLICATION OF COMPUTER MATHEMATICS SYSTEMS TO THE ANALYSIS OF WINNING STRATEGIES FOR A COMPLETE GROUP OF EVENTS

**Keywords:** *complete group of events, nonlinear programming, winning strategy, objective function, system of equations, Leontief function.*

**Abstract.** *The paper is devoted to the study of one mathematical model of nonlinear programming, which allows to analyze the strategies for a complete group of events that maximize the player's winnings. Using Wolfram Mathematica, the behavior of the player is modeled and a theorem about the optimal choice of budget distribution between the events of the full group is formulated, which is then proved analytically.*

**В. М. Викулов, К. О. Лопатко, О. В. Тихонова, С. Н. Тронза**  
*Московский технологический университет МИРЭА*

УДК 654.16

## АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО СИГНАЛА ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

**Ключевые слова:** *математическое моделирование, система цифровой связи, спектр сигнала, узкополосный сигнал, модуляция с минимальным разбросом частот, алгоритм распознавания.*

*Изучаются системы передачи информации, использующие высокочастотные сигналы цифровой связи. Сигналы возможны четырех различных типов. Предлагается алгоритм определения типа сигнала и его качества. Алгоритм основан на логическом анализе характеристик спектра сигнала, а также характеристик спектра для сигнала, возведенного в квадрат, и для диаграммы-созвездия сигнала. Алгоритм протестирован на математической модели. Полученные результаты подтвердили эффективность предложенного метода.*

## **Введение**

Задачей системы цифровой связи является передача информации, зашифрованной в некотором наборе нулей и единиц. В самом общем случае можно считать [1], что формируемая в источнике информация подвергается переводу в цифровую форму, где кодируется и преобразуется в высокочастотный сигнал для последующей передачи по каналу связи. На приемной стороне происходят выделение данных из сигнала, декодирование и обратное преобразование в необходимую для потребителей форму. Качество цифровой системы связи оценивается по степени соответствия между данными источника и данными, получаемыми потребителем. Для проведения таких оценок требуется осуществить как процесс передачи (кодирование данных и модуляция), так и приема (демодуляция и декодирование).

Целью настоящего исследования является задача определения качества работы для конкретной системы цифровой связи только путем анализа полученного высокочастотного сигнала, т. е. сразу после его приема, до последующей обработки. Этот вопрос возникает в том случае, когда в системе связи допускается использование не одной, а нескольких канально-кодовых конструкций, и при приеме неизвестно, какой способ передачи данных осуществляется в реальности.

Более формально, возникающий в процессе кодирования ряд информационных символов  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  можно рассматривать как кусочно-постоянный сигнал

$$a(t) = \sum_n a_n g(t - nT_c),$$

где  $T_c$  – период сигнала,  $t$  – время, а  $g(t)$  – прямоугольный импульс.

Для последующей передачи по линиям связи необходимо преобразовать сигнал  $a(t)$  в высокочастотный сигнал  $s(t)$ , содержащий всю информацию об исходной последовательности, т. е. надо провести процесс модуляции.

Рассмотрим систему цифровой связи, в которой последовательность двоичных данных передается одним из четырех способов – при помощи модуляции сигнала с минимальным разбросом частот MSK (Minimal Shift Keying), с символьными скоростями 15 Мбит/с и 8 Мбит/с, а также посредством MSK + BPSK (Binary Phase Shift Keying) [2]. Кроме того, по каналу связи может проходить тестовый сигнал – синусоида, а при передаче на линию связи действуют помехи, неизбежно проникающие в принимаемый сигнал. Требуется определить, какой из четырех указанных типов сигналов поступил и какой при этом был уровень помех, или же определить факт отсутствия сигнала в канале связи.

MSK сигнал представим в виде

$$s_{\text{MSK}}(t) = A \exp \left\{ 2\pi j \left[ f_c + \frac{f_b}{4} a(t) \right] t + \phi(t)j \right\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $\phi(t) = \sum_n \phi_n g(t - nT_c)$  – ряд начальных фаз, соответствующих каждому информационному символу,  $\phi_n$  – начальная фаза  $n$ -го символа,  $A$  – амплитуда сигнала,  $f_c$  – несущая частота,  $f_b$  – символьная скорость.

Сигнал MSK + BPSK представляет собой сигнал MSK, фаза которого испытывает высокоскоростные скачки на  $\pi$  радиан в соответствии со значениями информационных символов:

$$s_{\text{MSK+BPSK}}(t) = A \exp \left\{ \phi(t)j + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pi j \right\}.$$

Для решения задачи определения характеристик высокочастотного сигнала был предложен логический алгоритм, осуществляющий анализ временных и спектральных составляющих сигнала.

Рассматриваются следующие характерные признаки:

- ширина спектра сигнала;
- вид сигнала, возведенного в квадрат;
- диаграмма-созвездия сигнала.

### Оценка ширины спектра сигналов

Анализ сигналов проводился при помощи математического моделирования канала связи. На рисунке 1 приведены спектры сигналов MSK-15 для различных отношений сигнал–шум при использовании быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Пусть есть  $N$  комплексных отсчетов с результатами БПФ:

$$cs[n], \quad n = 0, \dots, N-1,$$

где  $N$  – размер БПФ, также равный числу отсчетов во временной области, а  $c$  – подходящий множитель для масштабирования.

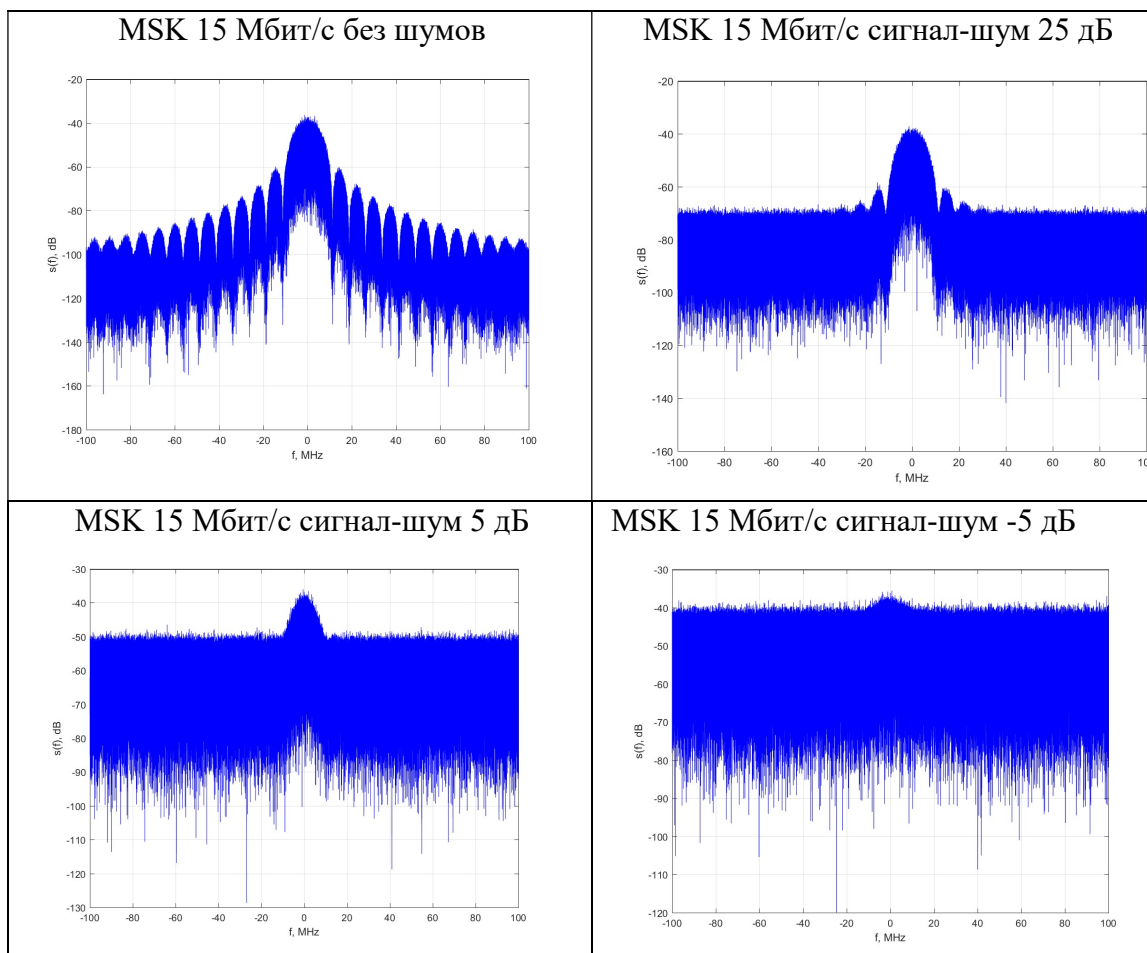


Рис. 1. Спектр сигнала MSK 15 Мбит/с

Спектральная плотность мощности есть величина

$$S_{pwr} [n] = \text{Re}(cs [n])^2 + \text{Im}(cs [n])^2,$$

или переведенная в децибелы:

$$S_{pwr}^{dB} [n] = 10 \cdot \log_{10} (S_{pwr} [n]).$$

Из рисунка видно, что спектр сигналов очень неравномерный – он не является гладкой линией, а дает набор точек с некоторой огибающей. Ситуация особенно усугубляется для граничных значений отношения сигнал-шум (ниже  $-5$  дБ) при рассмотрении более широкополосных сигналов. Подобный неравномерный спектр трудно подвергнуть дальнейшему анализу; необходимо получить огибающую спектра и таким образом убрать неравномерность.

Проведем усреднение следующим образом: пусть на выходе алгоритма надо получить  $N_{out}$  точек спектра. Если  $N$  – степень двойки, то  $N_{out}$  также разумно выбирать степень двойки (128, 256 и т.д.). Тогда, если на выходе мы получаем  $N_{out}$  точек, то каждая из них получена усреднением  $N_{avg} = N/N_{out}$  точек спектра со спектральными мощностями сигналов

$$S_{pwr}^{avg}[m] = \frac{1}{N_{avg}} \sum_{n=mN_{avg}}^{m(N_{avg}+1)-1} S_{pwr}[n], \quad m = 0, \dots, N_{out}.$$

На рисунке 2 приведены усредненные спектры сигналов при наилучшем уровне шума (отношение сигнал–шум, равное -10 дБ).

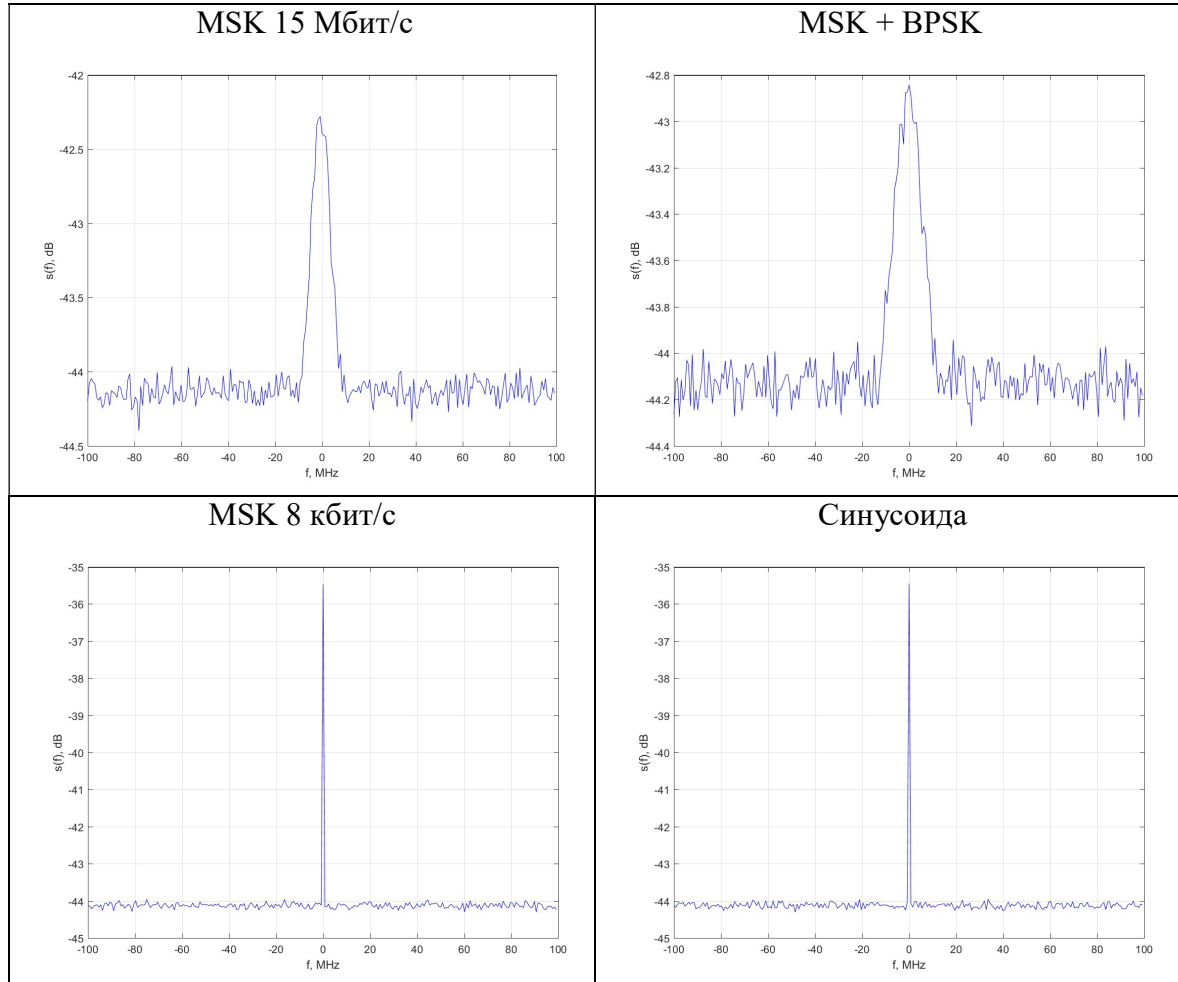


Рис. 2. Усредненные спектры сигналов

Ширина спектра сигналов MSK 15 Мбит/с и MSK + BPSK гораздо больше ширины спектра сигнала MSK 8 кбит/с и сигнала-синусоиды. Отсюда следует, что, анализируя ширину спектра, можно, как минимум, надежно разделить сигналы на две группы: широкополосные (MSK 15 Мбит/с, MSK + BPSK) и узкополосные (MSK 8 кбит/с, синусоида).

### Анализ спектров сигналов, возведенных в квадрат

При возведении MSK сигнала в квадрат он принимает вид:

$$s^2(t) = A^2 \exp \left\{ 4\pi j \left[ f_c + \frac{a(t)}{4T_b} \right] t + 2\phi_0 j \right\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $T_b = 1/f_b$ , а  $\phi_0$  – эквивалентная фаза.

Из уравнения квадрата сигнала видно [3], что в спектре появляются две составляющие с частотами  $f_1 = 2f_c + 1/(2T_b)$ ,  $f_2 = 2f_c - 1/(2T_b)$ .

Расстояние между  $f_1$  и  $f_2$  равно

$$\Delta f = f_1 - f_2 = 2f_c + \frac{1}{2T_b} - \left( 2f_c - \frac{1}{2T_b} \right) = \frac{1}{T_b} = f_b.$$

Отсюда следует, что  $f_1$  и  $f_2$  центрированы относительно несущей частоты  $f_c$  и, вычислив  $\Delta f$ , можно определить символьную скорость MSK сигнала.

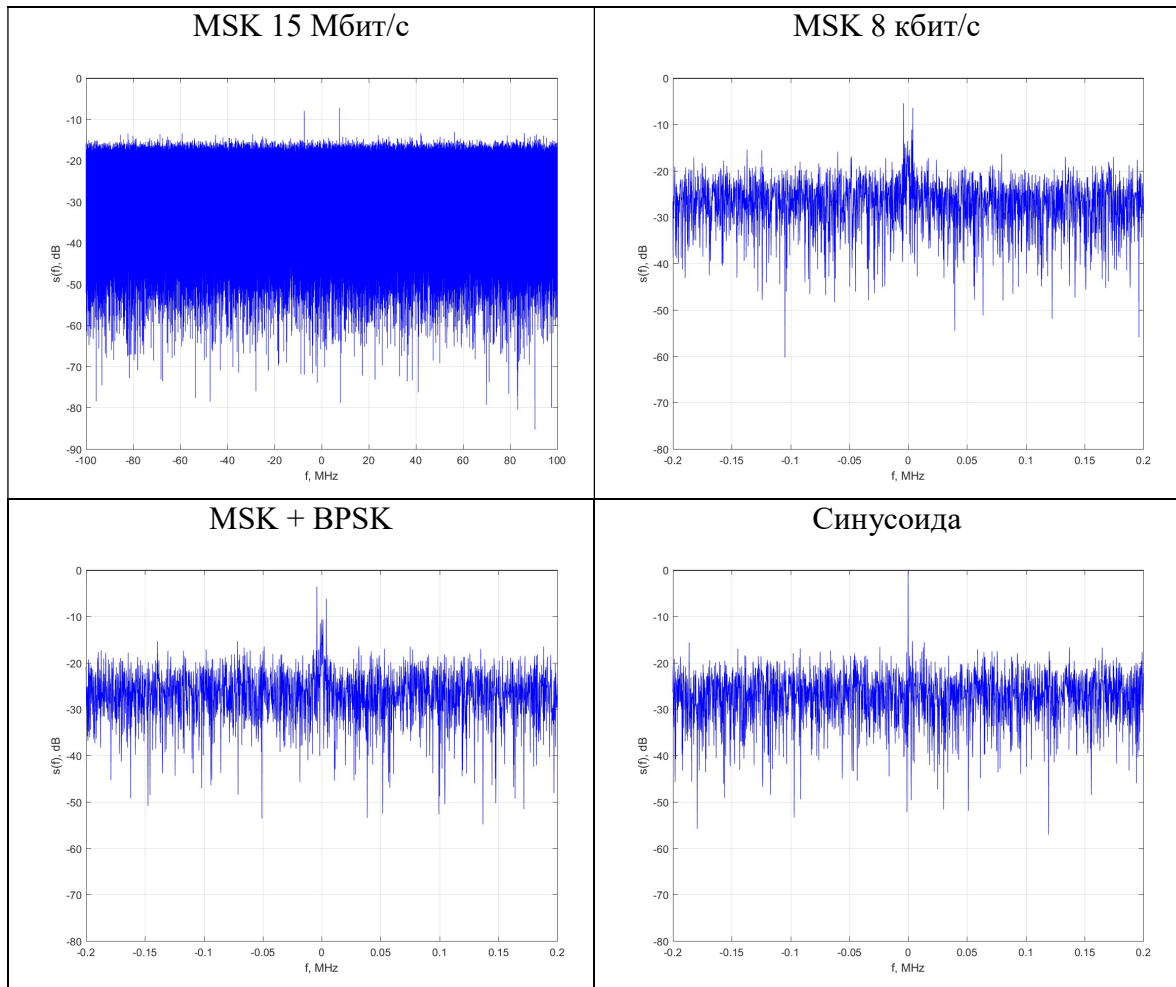


Рис. 3. Спектры сигналов, возведенных в квадрат

При возведении сигнала MSK + BPSK в квадрат получим

$$s_{\text{MSK+BPSK}}^2(t) = A^2 \exp \left\{ 2\phi(t)j + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pi j \right\} = A^2 \exp \left\{ 2\phi(t)j + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \pi j \right\} = \\ = A^2 \exp \{ 2\phi(t)j \} = s^2(t).$$

Таким образом, квадрат любого комплексного сигнала, на который наложены скачки фазы «на  $\pi$ », равен квадрату первичного сигнала.

На рисунке 3 приведены спектры сигналов, возведенных в квадрат, при наихудшем варианте отношения сигнал-шум ( $-10$  дБ). Сравнив полученные спектры, можно сделать следующие выводы.

1) Спектр сигнала MSK, возведенного в квадрат, содержит две хорошо выделяющиеся спектральные составляющие. Расстояние между ними соответствует символьной скорости MSK сигнала, а именно,  $15$  МГц для сигнала MSK  $15$  Мбит/с и  $8$  кГц для сигналов MSK  $8$  кбит/с и MSK + BPSK.

2) Спектр сигнала MSK + BPSK не отличается от спектра сигнала MSK с символьной скоростью  $8$  кбит/с.

Благодаря предложенному методу удастся надежно отличить сигнал MSK  $15$  Мбит/с от сигнала MSK + BPSK. Результат получается лучшим, чем через метод оценки ширины спектра сигнала.

Также с помощью нашего подхода можно надежно различить сигнал-синусоиду по наличию всего одного, а не двух сильных пиков в спектре.

### **Анализ диаграммы-созвездия сигналов**

Диаграмма-созвездие (IQ-диаграмма) является удобным средством визуализации для принимаемого сигнала с цифровой модуляцией. Сигнал в таком случае (в его комплексной форме) в каждый момент времени представляется точкой на комплексной плоскости. Поскольку все исследуемые сигналы являются сигналами с постоянной огибающей, можно предположить, что большинство точек на IQ-диаграмме будут находиться от центра на расстоянии, равном амплитуде сигнала.

На рисунке 4 приведены IQ-диаграммы рассматриваемых сигналов.

Видно, что IQ-диаграммы сохраняют структуру окружности при отношении сигнал-шум выше  $10$  дБ. При отношении сигнал-шум ниже, чем  $0$  дБ, структура окружности полностью нарушается. При крайнем нижнем отношении сигнал-шум  $-10$  дБ сигнал уже невозможно визуально отличить от шума. Следовательно, IQ-диаграммы являются одним из средств для индикации наличия сигнала в канале и для определения уровня шумов.

### **Алгоритм определения типа сигнала**

На первом шаге алгоритма последовательно вычисляются следующие величины:

- спектр сигнала и его усреднение;
- спектральная мощность плотности шума;
- пики в усредненном спектре;
- спектр квадрата сигнала и его пики.

Определение типа сигнала производится по следующим признакам.



1) Анализируется наличие высокого пика в спектре сигнала вблизи центральной несущей частоты. Невыполнение этого условия означает отсутствие сигнала, что можно проверить визуально, построив диаграмму-созвездие и определив разброс точек в ней.

2) При наличии высокого пика в спектре сигнала и при узкой ширине самого спектра диагностируется наличие узкополосного сигнала. Он определяется как MSK-8 при наличии двух отдельных пиков в спектре квадрата сигнала и как синусоида – при одном пике.

3) При наличии высокого пика в спектре сигнала и условии широкого спектра диагностируется наличие широкополосного сигнала. Он определяется как MSK-15 или MSK + BPSK в зависимости от расстояния между двумя пиками в спектре квадрата сигнала.

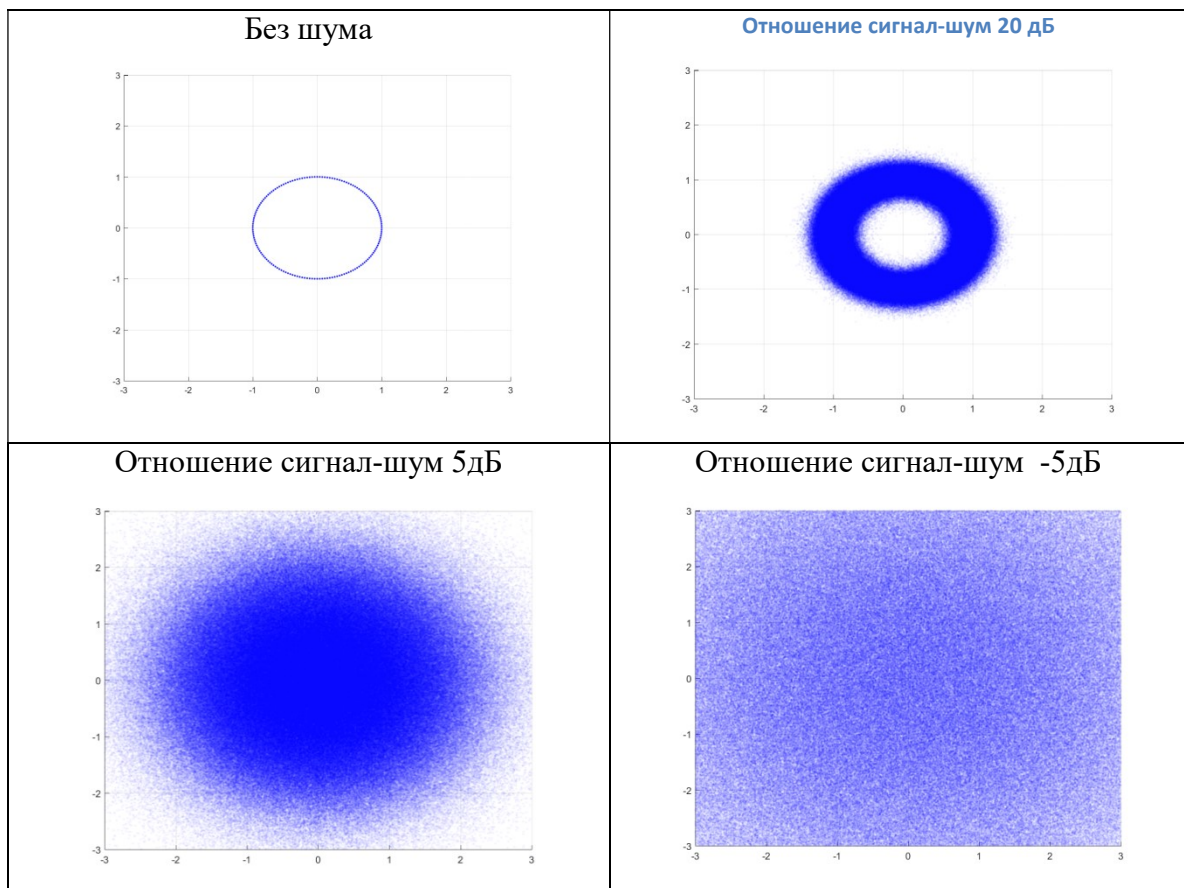


Рис. 4. IQ-диаграмма сигналов MSK и MSK+BPSK

### Анализ эффективности алгоритма определения типа сигнала

Эффективность работы алгоритма была проверена путем математического моделирования. Имитировались соответствующие высокочастотные сигналы с помехами. Для каждого из четырех возможных типов сигнала оценивалось процентное соотношение верной идентификации. Результаты приведены в таблице 1.

Вероятность успешного определения типа сигнала

Тип сигнала	Вероятность успешного определения типа сигнала
MSK 15 Мбит/с	100.0%
MSK 8 Мбит/с	96.4%
MSK+BPSK	97.3%
Синусоида	100%

Полученные данные подтверждают правильность предложенного подхода.

### Литература

1. Бернард С. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. 1104 с.
2. Баланов М. Ю. Поиск по задержке сигнала с минимальной частотной модуляцией и прямым расширением спектра / М. Ю. Баланов, А. А. Парамонов // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. – 2012. – № 12. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/dec12/text.pdf> (дата обращения: 22.03.2018).
3. Guobing HU, Shanshan WU, Xiaoyan HU, Min JING, Yan GAO. Blind Frequency and Symbol Rate Estimation for MSK Signal under Low Signal-to-Noise Ratio // Journal of Computational Information Systems. 2013. 9: 16. P. 6651-6659. Available at <http://www.Jofcis.com>.

V. M. Vikulov, K. O. Lopatko, O. V. Tikhonova, S. N. Tronza  
Moscow Technological University

## THE ALGORITHM FOR ESTIMATING THE TYPE OF A HIGH FREQUENCY SIGNAL OF DIGITAL COMMUNICATION

**Keywords:** *mathematical simulation, digital communication system, spectrum of signal, narrowband signal, Minimal Shift Keying modulation, recognition algorithm.*

**Abstract.** *The digital information transmission systems are considered. There are four possible types of signals. The algorithm of the signal type determination is proposed. It is based on logical analysis of the signal spectrum characteristics, the squared spectrum and charts–constellation of signal. The results of the algorithm were tested on a mathematical model and were proved to be effective.*

В.М. Викулов, А.А. Парамонов  
Московский технологический университет  
УДК 621.396.44

## ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АНТЕННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ИНТЕРНЕТА ВЕЩЕЙ

Ключевые слова: *IoT, антенна, диаграмма направленности, топология, передача информации.*

*В статье предложен метод организации канала передачи информации для интернета вещей. Рассмотрены возможные антенные структуры для приёма и передачи информации. Проведено моделирование и поставлен стендовый эксперимент. Дана оценка возможности организации подобного канала связи.*

В настоящее время протоколы беспроводного обмена данными проникли в подавляющее большинство областей человеческой жизни. Особенно широкое распространение получили протоколы на основы сетей WI-FI, так как они имеют наиболее оптимальные скоростные и энергетические характеристики и широкую номенклатуру производителей оборудования.

Сегодня смартфон, связанный с домашним или рабочим компьютером посредством облачного сервиса, – обычный функционал многих устройств.

Следующий шаг на пути к «информатизации» бытовых устройств – интернет вещей (InternetofThings – IoT). Основная идея заключается в том, чтобы снабдить подавляющее число электронных устройств модулем беспроводного обмена данными, позволяющим конфигурировать сеть в рамках квартиры, офиса, склада или производства. Рассказать о потенциальных возможностях, которые открываются при повсеместном внедрении технологии IoT, – тема отдельной работы.

Особенно важным является вопрос технической организации канала передачи данных внутри подобных сетей и подсетей. В связи с потенциальными ограничениями, такими как миниатюрность, низкое энергопотребление, простота исполнения, универсальность, появляется большое количество инженерных и научных задач, связанных с организацией канала связи, топологией антенных структур, электромагнитной совместимостью и т.д.

Целью данной статьи является предложить технический метод организации канала передачи на основе полосковых антенн и излучения чисто цифровых сигналов с их поверхности.

Оценка возможности передачи чисто цифровой информации более подробно описана в статье [1].

Ниже будет рассмотрен подход к антенной части.

Вопрос построения излучателя сигнала в системах IoT – один из важнейших. Так как объект размещения источника информации представляют собой печатные платы (ПП) с генератором цифрового сигнала, то накладываются некоторые ограничения на полосковые антенные структуры. Основная причина – необходимость обеспечения их миниатюрности на ПП.

В настоящее время теория полосковых антенн шагнула очень далеко, особенно благодаря развитию различных компьютерных сред разработки, которые существенно упростили этап расчёта.

Сегодня полосковые антенны используются во многих устройствах, что обусловлено их миниатюрностью и технологичностью изготовления. В частности, они широко применяются в хорошо отработанных системах RFID, отличающихся массовостью применения.

Благодаря высокому спросу в самых различных областях применения номенклатура геометрии полосковых антенн очень широка, начиная от простых патч-антенн, заканчивая сложными антенными структурами и ФАР[2].

Для первых этапов исследования размеры антенн были ограничены типовыми размерами компьютерных плат: материнская плата, видеоконтроллер. Их размеры не выходят за диапазон 20 см.

Отдельный важный фактор – направленность антенн. Если исходить из соображений передачи информации, то предполагаемый источник может находиться под любым углом к приёмной или передающей антенне. Поэтому при выборе типа антенны следует стремиться к обеспечению всенаправленности излучения. Это значит, что диаграмма направленности (ДН) не должна иметь максимумов, а быть близка к ДН изотропного излучателя.

На начальном этапе исследования, исходя из ограничений, было выбрано три варианта топологии антенн: одиночный вибратор (рис. 1), дипольная антенна (рис. 2), рамочная антенна (рис. 3).

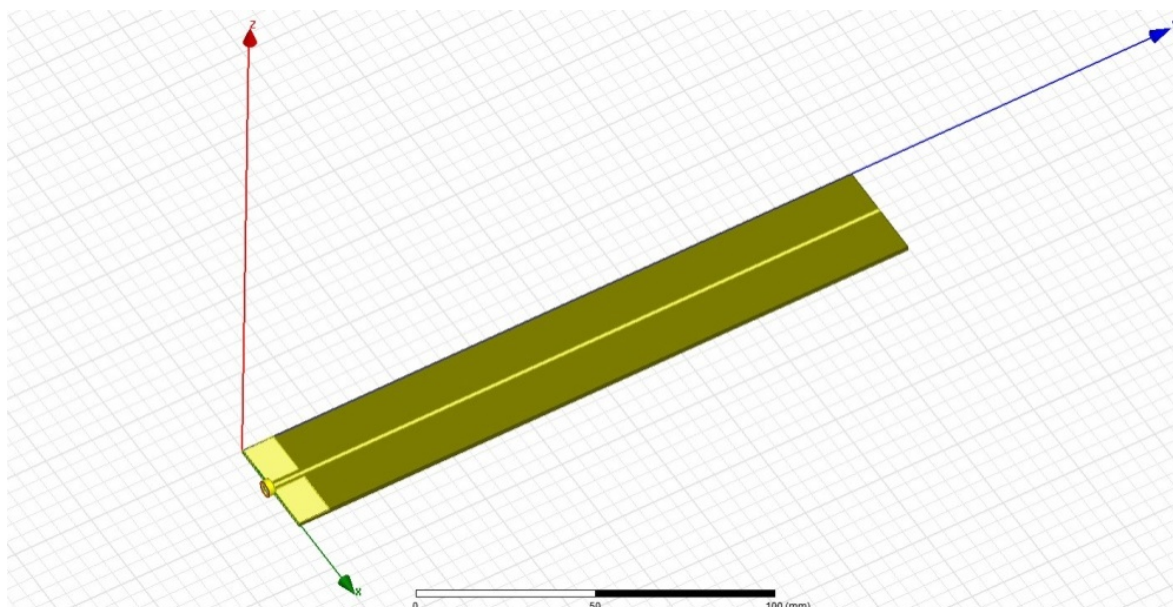


Рис. 1. Вид модели антенны в HFSS

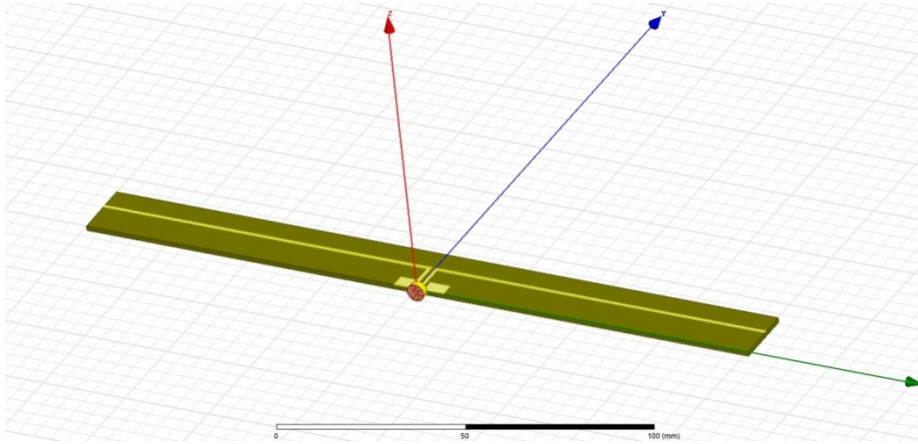


Рис. 2. Вид модели антенны в HFSS

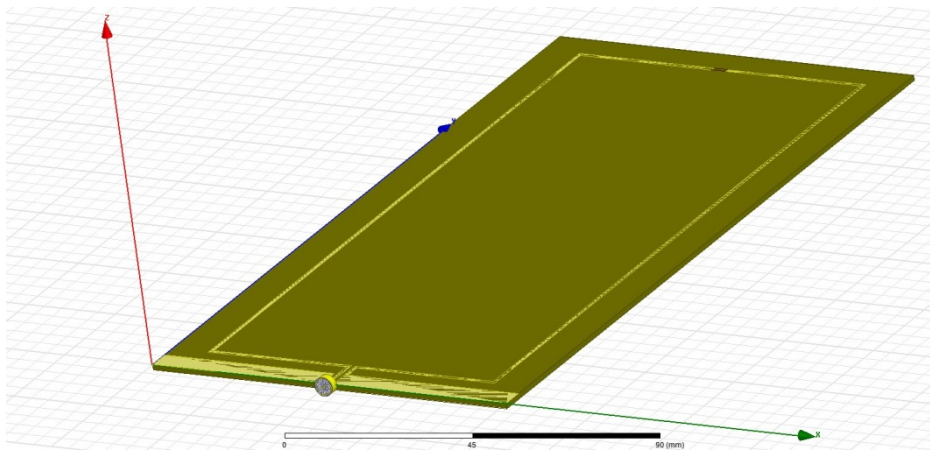


Рис. 3. Вид рамочной антенны

Определившись с видом и размером антенн, было проведено компьютерное моделирование в среде HFSS [3]. В результате были получены ДН на резонансных частотах антенн: ДН для одиночного вибратора (рис. 4), ДН для дипольной антенны (рис. 5), ДН для рамочной антенны (рис. 6).

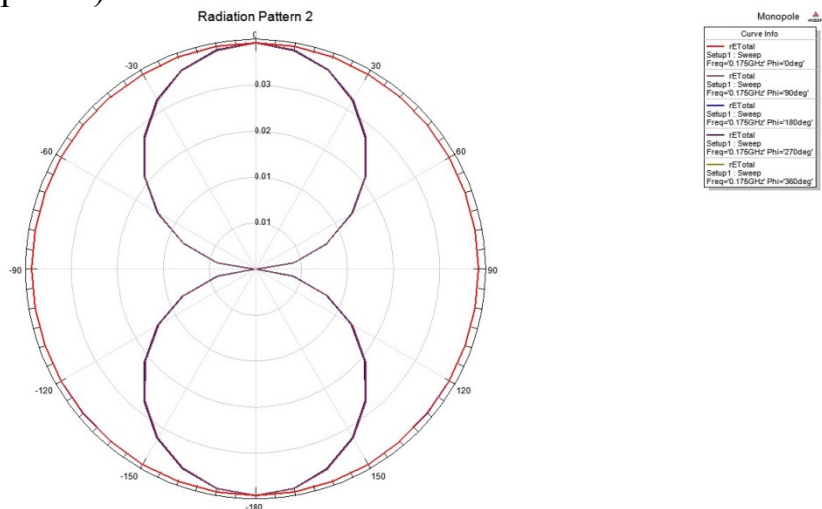


Рис.4. Расчётная диаграмма направленности в двух плоскостях на частоте резонанса



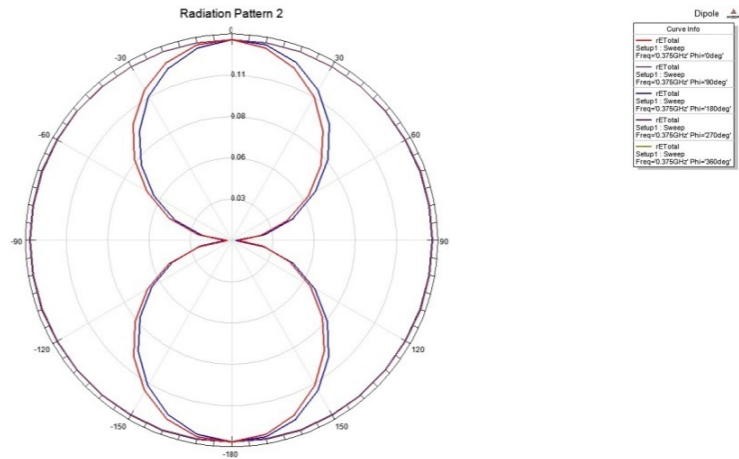


Рис. 5. Сечения расчётной диаграммы направленности на частоте резонанса

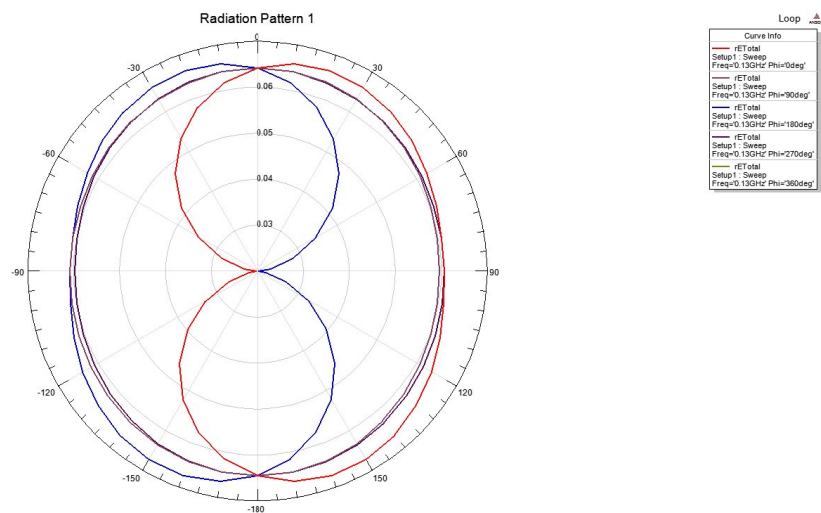


Рис. 6. Сечения ДН рамочной антенны

После моделирования антенн были изготовлены аналогичные антенны для стендового моделирования при соблюдении всех размеров и материалов.

На диэлектрической подложке из материала FR-4 были вытравлены отрезки полосков нужных размеров. На каждую плату с антенной был напаян разъём SMA для удобства измерений, на рамочную антенну был запаян ещё и SMD конденсатор рассчитанной ранее ёмкости.

На рисунках 7, 8 и 9 приведены фотографии получившихся антенн.

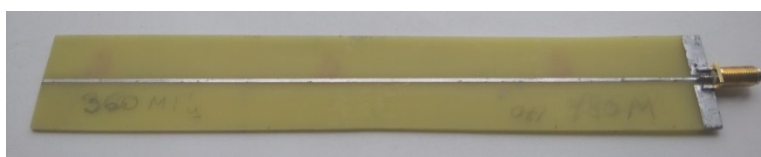


Рис. 7. Штыревая антенна

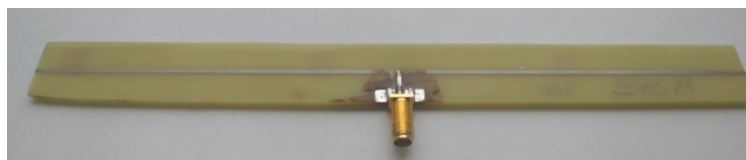


Рис. 8. Дипольная антенна



Рис. 9. Рамочная антенна

На следующем этапе был проведён эксперимент в помещении для конкретного случая излучения цифровых сигналов через полосковую рамочную антенну.

Приёмная часть состояла из приёмника Rohde&SchwarzESPI7, который работал в режиме анализатора спектра, и направленной широкополосной антенны (рабочий диапазон от 80 МГц до 2 ГГц).

Передающая часть состояла из источника цифрового сигнала на базе микросхемы SN65CML100 и полосковой рамочной антенны с резонансной частотой 165 МГц. Цифровые сигналы представляли собой дифференциальную пару 165МГц. Сигнал снимался с одной из линий дифференциальной пары.

Таблица 1

**Результаты измерений**

№ п/п	Пояснение	Расстояние, м	Уровень сигнала, дБм
0	Ближняя зона	1	-40
1	Изм. 1	5	-55
2	Изм. 2	18	-67
3	Изм. 3	18	-65
4	Изм. 4	20	-68
5	Изм. 5	22	-72

Помещение представляло собой аудиторию с железобетонными стенами толщиной не менее 20 см.

Уровень шума в полосе составлял –90 дБм.

Все результаты измерений сведены в таблицу 1.

На рисунке 10 приведена схема, иллюстрирующая расположение приёмной части и мест измерения.



Рис. 10. Схема проведения эксперимента

По итогам измерений можно сделать вывод, что подобный способ организации канала передачи для IoT возможен. Его основные плюсы - это отсутствие аналоговых узлов передачи и простота организации.

### Литература

1. Викулов В.М., Парамонов А.А. Модель коммуникационного компонента внутриофисной сети // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVIII международной научной конференции. Смоленск, 2017. Вып. 18. С. 5–7
2. Balanis K. Antenna Theory. Analysis and Design. 2nd ed. Wiley, 2001.
3. Банков С.Е., Курушин А.А. Расчет антенн и СВЧ структур с помощью HFSS Ansoft. М.: ЗАО«НПП«РОДНИК», 2009. 256 с.

**V.M. Vikulov, A.A. Paramonov**  
Moscow Technological University

## ELECTRODYNAMIC MODELING OF ANTENNA SYSTEMS FOR THE INTERNET OF THINGS

**Keywords:** *IoT, antenna, radiation pattern, topology, communication*

**Abstract.** *The article suggests a method of organizing a communication channel for the Internet of things. Possible antenna structures for receiving and transmitting information are considered. It was performed a simulation and a bench experiment. An assessment of the possibility of organizing such a communication channel was given.*



**МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛА С МОДУЛЯЦИЕЙ MSK  
ДЛЯ ПРОВЕРКИ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ДОПЛЕРОВСКОГО СДВИГА ЧАСТОТЫ**

Ключевые слова: *MSK модуляция, математическое моделирование, доплеровский сдвиг, белый аддитивный гауссовский шум, синфазная и квадратурные составляющие сигнала, IQ-диаграмма; Mathcad.*

*В статье рассматривается метод определения доплеровского сдвига частоты сигнала с MSK модуляцией. В качестве такого метода предлагается фазовый метод. Рассмотрены основные соотношения предложенного метода для вычисления доплеровского сдвига. Приведена оценка доплеровского сдвига частоты сигнала S-диапазона. Доплеровский сдвиг рассчитывается в предположении приема сигнала с космического аппарата, находящегося на высокой эллиптической орбите. Анализируется математическая запись модулированного сигнала, а также математическая модель принимаемого сигнала. Для определения погрешности предложенного метода приведен расчет доплеровского сдвига частоты по моделируемому сигналу.*

Для измерения скорости движения различных объектов с помощью радиосигналов может использоваться когерентный или некогерентный метод [1]. Для проведения измерения когерентным методом необходимо иметь информацию о фазе излученного сигнала. Таким методом возможно определение скорости тихоходных объектов. Использование некогерентного метода, такого как метод определения доплеровского сдвига частоты принимаемого сигнала, затруднителен при определении скорости тихоходных объектов, поскольку доплеровский сдвиг в таких случаях составляет порядка нескольких единиц или десятков герц, что сопоставимо со стабильностью опорных генераторов. Однако скорость некоторых объектов, таких как космические аппараты, достаточна велика. Поэтому определение их скорости по доплеровскому смещению становится относительно простым.

Доплеровское смещение при приеме будет проявляться в том, что спектр сигнала приобретет некоторый сдвиг и будет растянут или сжат в зависимости от взаимных скоростей приемника и передатчика. Во временной же области эффект Доплера проявит себя как укорочение или удлинение длительности принимаемого символа. Изменение частоты принимаемого сигнала можно также интерпретировать как увеличение

или уменьшение скорости изменения фазы. Исходя из всего вышесказанного, можно выделить два метода определения доплеровского смещения частоты: 1) непосредственно по спектру принимаемого сигнала, 2) по изменению скорости изменения фазы. Далее рассмотрим второй метод.

Если информационный сигнал с тактовой частотой символов  $f_{\text{так}}$  рассматривать как вектор на IQ-диаграмме, то такой вектор за время  $\tau$  произведет поворот на угол  $\Delta\varphi$ , равный:

$$\Delta\varphi = 2\pi f_{\text{так}} \tau. \quad (1)$$

В то же время сигнал с доплеровским смещением  $f_{\text{доп}}$  совершает поворот на угол, равный:

$$\Delta\varphi' = 2\pi(f_{\text{так}} + f_{\text{доп}}) \tau. \quad (2)$$

Различие значений углов, на который повернется сигнальный вектор, обуславливается разной скоростью поворота, т.е. различием частот. Если из выражения (2) вычесть выражение (1) и преобразовать его относительно  $f_{\text{доп}}$ , получим выражение для вычисления доплеровского сдвига по разности набегов фаз:

$$f_{\text{доп}} = \frac{\Delta\varphi' - \Delta\varphi}{2\pi\tau}. \quad (3)$$

Из соотношения (3) видно, что для получения математической модели фазового метода определения доплеровского смещения необходимо получить значения набег фаз двух сигналов – сигнала, получившего доплеровское приращение частоты, и опорного сигнала, чья частота соответствует частоте передатчика. Для этого далее приведено описание формирования модели принимаемого сигнала.

Для моделирования сигнала, получившего доплеровский сдвиг частоты, необходимо получить оценку доплеровского приращения, которая определяется выражением [2]:

$$f_{\text{доп}} = f_0 \frac{u}{c}, \quad (4)$$

где  $f_{\text{доп}}$  – доплеровское смещение частоты колебания,  $f_0$  – частота колебания,  $u$  – скорость передатчика относительно приемника,  $c$  – скорость света.

Из выражения (4) очевидно, что каждая спектральная составляющая получает свое приращение, пропорциональное своей величине, поэтому спектр сигнала, как было отмечено выше, будет растянут или сжат. Однако влияние этого факта проявляется только при приеме сверхширокополосных сигналов, и в данном случае будем считать, что спектр принимаемого сигнала не искажается, а лишь приобретает частотный сдвиг. Для расчета скорости движения передатчика относительно приемника  $u$ , в данном случае – радиальную скорость космического аппарата, были взяты параметры орбиты типа «Молния».

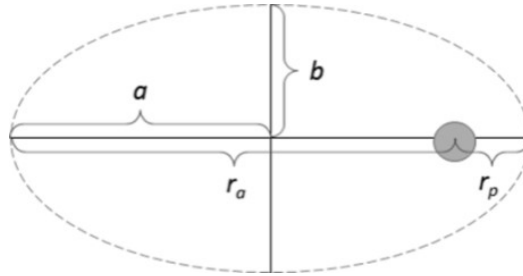


Рис. 1. Схематическое представление орбиты

$$v_r = e \frac{c}{p} \sin(\theta), \quad (5)$$

здесь  $v_r$  – радиальная составляющая линейной скорости космического аппарата [3],  $e$  – эксцентриситет орбиты:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}, \quad (6)$$

$r_p$  – радиус перигея ( $r_p = 500$  км),  $r_a$  – радиус апогея ( $r_a = 40000$  км),

$$c = a e, \quad (7)$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}, \quad (8)$$

$a$  – большая полуось эллипса орбиты (рис. 1),

$$p = \frac{2 \cdot r_a r_p}{r_a + r_p}, \quad (9)$$

где  $p$  – фокальный параметр,

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(E)}{1 - e \cos(E)}, \quad (10)$$

а  $E$  определяется из трансцендентного уравнения

$$E - e \sin(E) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau), \quad (11)$$

где  $\tau$  – время прохождения перигея орбиты,  $\mu$  – гравитационная постоянная ( $\mu = 398,6005 \cdot 10^{12} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ).

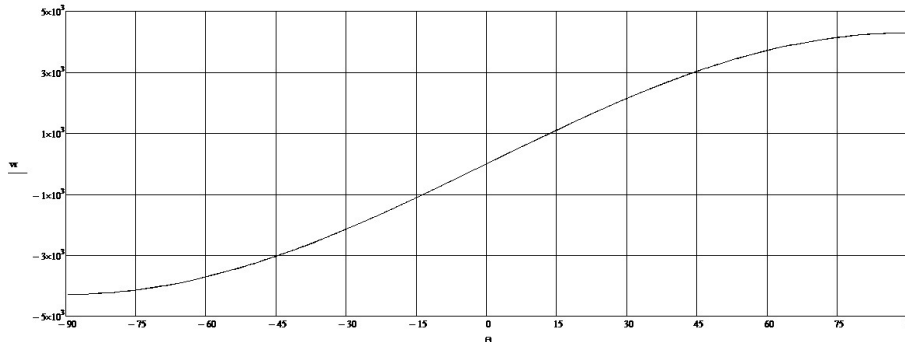


Рис. 2. График зависимости скорости аппарата от углового положения аппарата на орбите

На рисунке 2 приведен график зависимости скорости аппарата от углового положения на орбите. В качестве начала отсчета угла взято направление из точки приема к апоцентру орбиты.

По соотношению (4), связывающему скорость движения аппарата и частоту несущего колебания с доплеровским сдвигом, в программе Mathcad был построен график зависимости доплеровского смещения от углового положения (рис. 3).

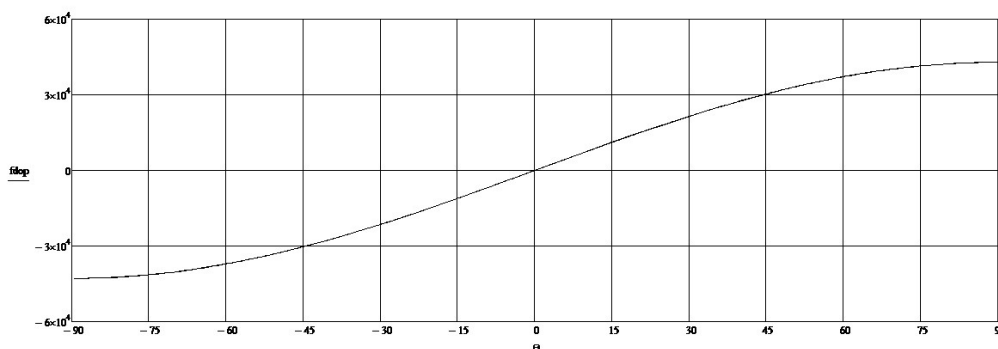


Рис. 3. График зависимости доплеровского смещения от углового положения аппарата на орбите

Из графика, представленного на рисунке 3, видно, что максимальный доплеровский сдвиг составляет порядка 42 кГц, однако если учесть, что это значение соответствует положению аппарата непосредственно на горизонте точки приема, и то, что обычно зона радиовидимости начинается от 5-10 градусов угла места, то максимум доплеровского сдвига можно оценить в 39 кГц. Минимум сдвига равен 0 Гц и соответствует нахождению аппарата в зените над местом приема. Для практических измерений скоростей достаточно определения с точностью  $\pm 400-500$  Гц. Таким образом, диапазон изменений доплеровского сдвига по оценочным расчетам составляет от 39 кГц до 400 Гц.

Рассматриваемый в данной работе сигнал (MSK-сигнал) относится к классу сигналов с непрерывной фазой и постоянной огибающей. Информация при таком виде модуляции передается с помощью поворота сигнального вектора на  $+\pi/2$  при передаче 1 и на  $-\pi/2$  при передаче 0. Математическая запись модулированного сигнала определяется следующим соотношением:

$$S(t) = S_I(t) \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{T}\right) \cos(\omega_0 t) \right) + S_Q(t) \left( \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{T}\right) \sin(\omega_0 t) \right), \quad (12)$$

где  $S(t)$  – функция модулированного высокочастотного сигнала,  $S_I$  – сигнал синфазного канала,  $S_Q$  – сигнал квадратурного канала,  $t$  – время,  $T$  – длительность информационного символа,  $\omega_0$  – частота несущего колебания. При формировании сигнала с MSK модуляцией входной поток  $a_i$  бит преобразуется в поток бит  $b_i$  по соотношению:

$$b_i = a_i \oplus a_{i-1}. \quad (13)$$

Сигнал синфазного канала  $S_I(t)$  получается после выделения всех нечетных битов потока  $b_i$  и последующего удвоения длительности каждого бита [4]. Аналогичным образом получается сигнал квадратурного канала  $S_Q$ . В программе Mathcad в соответствии с выражениями (12) и (13) были получены осциллограммы MSK-сигнала (рис. 4)

Поскольку шум приводит к случайному сдвигу сигнального вектора, а соответственно и к изменению его фазы, для оценки влияния шума на погрешность определения доплеровского сдвига предложенным методом необходимо к сигналу добавить случайные отсчеты белого гауссовского шума с мощностью  $\sigma^2$  [5]. На рисунке 4б приведена осциллограмма сигнала с шумом.

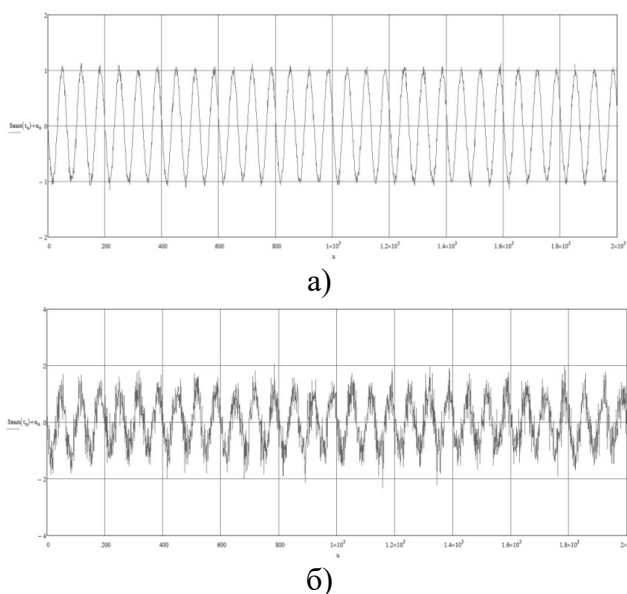


Рис. 4. Осциллограммы MSK-сигнала при разных отношениях сигнал-шум: а) 25 дБ; б) 7 дБ

После получения модели зашумленного сигнала с доплеровским смещением необходимо найти изменение фазы во времени демодулированного сигнала. Для этого можно прибегнуть к квадратурному представлению, умножив исходный сигнал на функции синуса и косинуса с частотой передачи сигнала (в данном случае 3 ГГц). Затем для фильтрации комбинационных составляющих необходимо найти свертку произведения с импульсной характеристикой  $h(t)$  фильтра нижних частот:

$$S_I(t) = S(t) \cos(\omega_0 t) * h(t), \quad (14)$$

$$S_Q(t) = S(t) \sin(\omega_0 t) * h(t). \quad (15)$$

Получив значения  $I$ -и  $Q$ -составляющих во времени, фазу сигнала можно найти из соотношения:

$$\varphi(t) = \arctg\left(\frac{S_I(t)}{S_Q(t)}\right). \quad (16)$$

На рисунке 5 приведен график зависимости изменения фазы демодулированного сигнала от времени.

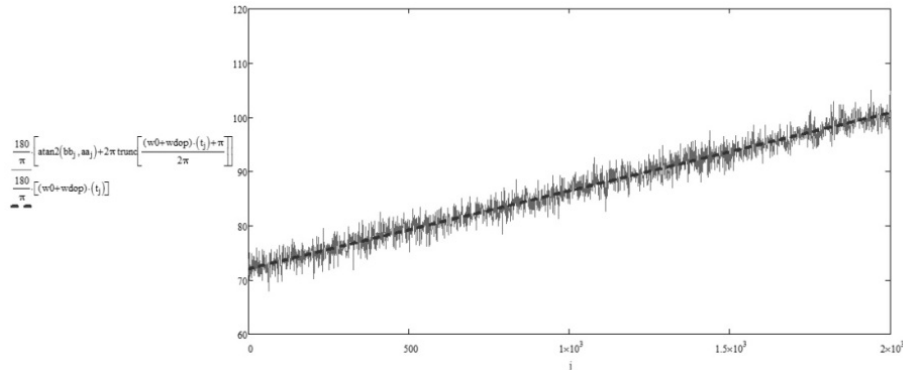


Рис. 5. График зависимости изменения фазы демодулированного сигнала от времени

Полученные значения фазы дают возможность рассчитать набег фазы  $\Delta\varphi'$  (3) на любом интервале времени  $\tau$ , а поскольку набег фазы  $\Delta\varphi$  (3) можно рассчитать исходя из (1), то для определения доплеровского сдвига предложенным фазовым методом необходимо задать исходное значение доплеровского смещения  $f_{\text{доп}}$ , время  $\tau$  и отношение сигнал-шум, задав величину дисперсии белого гауссовского шума  $\sigma^2$  [6].

В программе Mathcad для проверки алгоритма определения доплеровского сдвига частоты и установления взаимосвязи между точностью, обеспечиваемой алгоритмом и вышеназванными параметрами, было проведено математическое моделирование. Изменяя эти параметры можно получить зависимость точности измерения от отношения сигнал-шум, интервала  $\tau$  и величины самого доплеровского смещения. В таблицах 1-3 приведены оценки среднего и дисперсии доплеровского смещения по массиву расчетов из 2500 элементов для разных исходных данных. Массив элементов был получен путем равномерной выборки значений фаз на интервале времени  $10 \cdot T_{\text{так}}$ . Интервал времени  $\tau$  выражен в единицах периода модулирующего сигнала  $T_{\text{так}}$ .

Таблица 1

Оценки среднего и дисперсии доплеровского сдвига (вариант 1)

S/N ( $\tau=100T$ так, $f_{\text{доп}}=400$ Гц)	-	-5	5	10	15	20	2
	10						5
$m_{\text{доп}}$ , кГц	1,	0,	0,	0,4	0,4	0,4	0,
	1	8	3	5	2	1	4
$\sigma_{\text{доп}}$ , кГц	6,	6	1,	0,5	0,3	0,1	0,
	3		3				1

Таблица 2

**Оценки среднего и дисперсии доплеровского сдвига (вариант 2)**

ак, $f_{\text{доп}}=100$ 0 Гц)	S/N ( $\tau=500T_T$ )	-	-5	5	10	15	20	25
	$m_{\text{доп}}$ , кГц	1, 7	0, 7	0, 9	0,9 9	0,9 9	1 1	1 1
	$\sigma_{\text{доп}}$ , кГц	5, 2	2, 1	2	1	0,5	0, 2	0, 1

Таблица 3

**Оценки среднего и дисперсии доплеровского сдвига (вариант 3)**

ак, $f_{\text{доп}}=3000$ Гц)	S/N ( $\tau=1000T_T$ )	-	-5	5	10	15	20	25
	$m_{\text{доп}}$ , кГц	4, 1	3, 4	3, 3	3, 2	3	3	3
	$\sigma_{\text{доп}}$ , кГц	4, 3	2, 1	1, 8	0, 6	0, 3	0, 2	0, 1

В данной работе рассмотрен фазовый метод определения скорости движения космического аппарата, рассмотрена аналитическая запись сигнала с MSK модуляцией. Получены оценки точности определения скорости движения при различных отношениях сигнал-шум, времени накопления набега фазы, скорости космического аппарата. Результаты моделирования подтверждают корректную работу алгоритма определения доплеровского смещения частоты принимаемого сигнала.

**Литература**

1. Полтавский А.В. Метод когерентного контроля подвижных объектов // Вестник МГТУ ГА. 2015. № 211. С. 5-13.
2. Новые способы траекторных измерений дальних космических аппаратов / С.А. Ежов [и др.] // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2015. Т. 2, № 2. С. 32-40.
3. Шалыгин А.С., Санников В.А., Петрова И.Л. Баллистика космических аппаратов: учебное пособие. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т., 2006. 131 с.
4. Svedek T., Hergek M., Matic T.A simple signal shaper for GMSK/GFSK and MSK modulator based on sigma-delta look-up table. // Osijek, Croatia. P.230-237.
5. Мякинков А.В. Математическое моделирование радиотехнических устройств и систем. – Н. Новгород: НГТУ, 2011. 20 с.
6. Алейников Н.А. Практическое использование пакета Mathcad при решении задач. – М.: Российский государственный открытый технический ун-т путей сообщения, 2002. 114 с.

**R. R. Vishnyakov**  
Moscow Technological University (MIREA)

## **MODELING OF MSK MODULATION SIGNAL FOR DETERMINING DOPPLER FREQUENCY SHIFT ALGORITHM VERIFICATION**

**Keywords:** *MSK modulation, math modeling, Doppler shift, additive white Gaussian noise, in-phase and quadrature components of the signal, IQ-diagram; Mathcad.*

**Abstract.** *In this paper Doppler frequency shift of signal with MSK modulation determining method is considered. As such a method the phase method is proposed. The basic equations of the proposed method for computing the Doppler shift are considered. The estimate of S-band signal Doppler frequency shift is given in this paper. The Doppler shift is calculated assuming a signal from a spacecraft. The spacecraft is located in a high elliptical orbit. The mathematical recording of the modulated signal is analyzed, as well as the mathematical model of the received signal. The Doppler frequency shift is calculated from the simulated signal to determine the error of the proposed method.*

**А.В. Игнатенков, А.М. Ольшанский**  
*Самарский государственный университет путей сообщения,  
АО «НИИАС»*

УДК 517.9+656.22

## **О ПРИМЕНЕНИИ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ОПЕРАТИВНОЙ КОРРЕКТИРОВКИ РАСПИСАНИЙ<sup>1</sup>**

**Ключевые слова:** *искусственная нейронная сеть, расписание, управление, адаптивность, график.*

*В статье анализируются некоторые аспекты задач нейросетевого управления. Даются предложения по использованию ИНС для оперативной корректировки графика движения поездов при наличии внешних возмущений. Приводятся примеры получившихся графиков.*

---

<sup>1</sup> Исследование проведено при поддержке гранта РФФИ 17-20-01065 «Разработка теории нейросетевого управления железнодорожными транспортными системами».



До настоящего времени нейросетевое управление эксплуатацией железнодорожного транспорта достаточно подробно не исследовано.

В работе [1] упоминается о нейросетевом управлении монорельсовыми системами, но конкретных сведений о топологии, свойствах такой нейронной сети не приводится.

В работе [2] содержится важный вывод, касающийся применения нейронных сетей к моделированию сложных систем. Он состоит в том, что «нейросетевая модель объекта управления при успешном обучении является более точной, чем модель, в основе которой лежит передаточная функция...» [2, с. 4].

Также отмечается, что не решен вопрос преобразования нейросетевой модели объекта управления и самого объекта управления в одну нейронную сеть, а также говорится о том, что требуется инвертирование объекта управления, причем еще необходимо разработать алгоритм нейросетевого инверсного представления.

В работе [4] применяется прием построения нейронной сети в соответствии с топологией управляемого объекта, а также наличие обучения с подкреплением в задачах управления и расчета, в то время как задача классификации ситуаций представляется как классическая задача обучения с учителем. Модель автомобильного перекрестка задается многослойным персептроном с четырьмя выходами, что освобождает исследователя от необходимости проектировать индивидуальную структуру нейронной сети. Обучение с подкреплением декларируется, но конкретных приемов его интеграции в систему управления в работе [4] не приведено.

В работе [5] применяется искусственная нейронная сеть для управления курсом судна, задаваемого нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. В этом случае для подстройки весов нейронной сети вводится структура, в которой «интегрирующее звено охвачено нелинейной обратной связью, соответствующей некоторой функции» [5, с. 15]. Из материалов, изложенных в работе [5], видно, что  $A$  – некоторая неизвестная функция, которая зависит от значения весов в иные моменты времени, от значения выхода нейронов и т.п. Между тем, реализация указанной схемы – эвристическая с введением нейроэмулятора и нейроконтроллера. «Нейроконтроллер обучается на инверсной модели объекта управления, а нейроэмулятор – на обычной модели объекта управления» [5, с. 16]. Эта схема аналогична иным, применяемым на практике.

Основные выводы по применению нейронных сетей в управлении процессами различного уровня на транспорте, которые можно сделать на основании исследованной практики, таковы.

1. Наиболее распространенной архитектурой используемых нейронных сетей для задач – как классификации, так и аппроксимации – выступает многослойный персептрон.

2. Задачи прогнозирования, получения управляющих функций на основании входной информации об объекте управления и внешней среды, задачи идентификации объекта управления с помощью ИНС сводятся к задачам аппроксимации.

3. Неизученными остались вопросы описания объекта управления в терминах нейронных сетей, установления зависимости топологии искусственной нейронной сети от конкретной задачи управления, оценки необходимости инвертирования поведения ИНС в ряде задач управления. Не сформулированы также правила, которые соотносят функционал качества управления с типом искусственных нейронных сетей.

4. В ряде работ предлагается принцип проекции объекта управления на топологию искусственной нейронной сети, который для некоторых задач является перспективным, однако не приведено ни одной оценки сложности такой топологии, равно как и оценки устойчивости нейросетевых управляющих решений.

Между тем ранее в [6] была предложена модель многослойной искусственной нейронной сети для решения задачи построения расписания на железнодорожном транспорте.

Эта сеть может быть трансформирована для решения задачи оперативного управления.

Пусть задана многослойная нейронная сеть с переменной проводимостью, состоящая из  $n$  слоев, и входной вектор  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ , который обозначает моменты начала передачи сигналов по слоям сети.

Задан желаемый вектор выхода сигналов с последнего слоя сети, в качестве которого принимается желаемое значение выхода нулевого слоя  $X^{(0)}$ .

При этом важно отметить, что в данном случае мы говорим о некоторых пространственно-временных координатах точки поступления и точки выхода сигнала, а не о задаче регрессии или классификации, которые традиционно решают нейронные сети, когда ответом сети выступает нормированное или стандартизованное значение величины или номер класса, к которому относится данный объект. Эта особенность принципиальна для вычисления в дальнейшем функции ошибки нейронной сети.

Представим, что каждый нейрон слоя рассматриваемой сети имеет набор весов, соединяющих его с нейронами соседнего слоя. Запишем,

что между слоями сети существует матрица весов  $W_{i,i+1}$ , где  $i = 1, 2, \dots$  – число слоев сети.

Пусть существует некоторый оператор  $A$ , который определяет, каким образом происходит взвешивание сигналов, поступивших на вход каждого нейрона или слоя. Это может быть оператор взвешенного суммирования, оператор выбора наибольшего (наименьшего) значения веса или взвешенной суммы и т.п., выбор которого производится исходя из смысла той задачи, которую решает нейронная сеть.

Тогда базис работы нейрона (нейронов) может быть записан как  $R = A(W) * X$ , если работа происходит со слоем в целом, или как  $R = A(W_i) * x_i$ , где  $W_i$  – строка матрицы  $W$ , отвечающая за связь конкретного нейрона с остальными,  $x_i$  – элемент вектора входа, подаваемый на  $i$ -й нейрон.

При наличии функции активации нейрона, которая может быть как непрерывной, так и пороговой, выход каждого нейрона определяется как

$$out_i = f(R),$$

где  $f$  – функция активации.

Выход нейрона подается на входы нейронов следующего слоя, для которого уже  $R = A(W, out_i)$ . После этого все действия повторяются. Выход нейронов последнего слоя является выходом сети. Так как мы рассматриваем прохождение сигнала по слоям сети, то ошибка рассчитывается как

$$E = dist(X_i^{(0)}, X_i^{(0)*}),$$

где  $X_i^{(0)*}$  – расчетная точка выхода сигнала,  $dist$  – оператор взятия расстояния, определяется видом метрики, задаваемой исследователем.

Возможны и более сложные формы ошибки сети вида

$$E = dist(X_i^{(0)}, X_i^{(0)*}) + \sum_j Cost_j(X_i^{(0)}, X_i^{(0)*}, net).$$

Здесь  $Cost_j(X_i^{(0)}, X_i^{(0)*}, net)$  – некоторая задаваемая пользователем функция от состояния нейронной сети, это обозначено символом  $net$ .

Таким образом, функционирование такой сети осуществляется по следующему алгоритму:

1. Инициализация весов сети в слоях;
2. Подача входного вектора;
3. Расчет передачи сигнала по слоям;
4. Расчет выхода сети (состояния последнего слоя);
5. Расчет величины ошибки сети.

Шаги 2-5 составляют одну эпоху функционирования сети с переменной проводимостью сигнала.

Рассмотрим способ управления, заключающийся в функционировании двух идентичных многослойных искусственных нейронных сетей, описывающих график движения поездов на одном участке. Первая ИНС – сеть-визуализатор – работает в режиме отображения фактического графика движения поездов.



Рис. 1. Использование двух ИНС для управления

Вторая ИНС, которая работает как полноценная ИНС для построения графика, использует в качестве входа данные  $R = A(W, out_i)$ . То есть вторая ИНС используется не от начальной станции, а от станции, относительно которой у нас есть сведения о том, что далее режим движения должен измениться.

К сожалению, при этом с пользователя не снимается требования задания целевых времен выхода.

На рисунке 1 изображена принципиальная схема такого подхода.

Таким образом, одним из вариантов решения задачи управления перестроением графика движения как на однопутных, так и на двухпутных линиях является применение многослойных ИНС, что и показано в настоящей статье.

## Литература

1. Шептунов С.А., Соломенцев Ю.М., Суханова Н.В., Кабак И.С. Совершенствование работы городского транспорта на базе системы управления с элементами искусственного интеллекта // Вестник Брянского государственного технического университета. 2014. №3 (43). С.93-98.

2. Михайлов А.С., Староверов Б.А. Проблемы и перспективы использования искусственных нейронных сетей для идентификации и диагностики технических объектов // Вестник ИГЭУ. 2013. Вып.3. С. 1-6.

3. Киселев Е.С., Козловский А.А. Выбор оптимального маршрута грузоперевозок автомобильным транспортом с использованием искусственных нейронных сетей // Молодой ученый. 2015. № 24. С. 64-66.

4. Тимофеева О.П., Малышева Е.М., Соколова Ю.В. Проектирование интеллектуальной системы управления светофорами на основе нейронной сети // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6.

5. Виткалов Я.Л. Исследование проблем синтеза нейросетевого контроллера в задаче управления курсом судна: автореферат дис. ... канд. техн. наук. Владивосток, 2006. 25 с.

6. Игнатенков А.В., Ольшанский А.М. Об одном подходе к построению искусственных нейронных сетей для прогнозирования элементов графика движения поездов // Перспективные информационные технологии (ПИТ-2015): труды Международной научно-технической конференции. 2015. Т. 2. С. 73-78.

**Alexander V. Ignatenkov, Alexey M. Olshansky**  
Samara State Railway University, JSC “Railway Signalling Institute”

**Key words:** *artificial neural network, schedule, control, adaptiveness, railway traffic plan.*

**Abstract.** *The article is devoted to analyzes some aspects of neural network control technique for railway operation. Artificial neural networks are presented as an efficient way to adaptive railway scheduling due to traffic conditions and outer disturbances.*

**Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов**  
Казанский федеральный университет

УДК 551.5.001.57+517.957

## **ПАКЕТ ПРОГРАММ В СКМ MAPLE АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ТЕНЗОРНЫХ ОБЪЕКТОВ ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ**

Ключевые слова: *теория гравитации, возмущения метрики, второй порядок теории возмущений, прикладные математические пакеты.*

*Пакет GravPerturbations позволяет вычислять в аналитической форме основные геометрические объекты релятивистской теории гравитации во втором порядке по возмущениям относительно невозмущенного гравитационного поля: тензор Эйнштейна,  $G_{ik}$ , тензор Риччи,  $R_{ik}$  и скалярную кривизну,  $R$ .*

Пусть  $g_{ik}^0(x)$  – ковариантный метрический тензор невозмущенного гравитационного поля, где  $x = [x^1, x^2, x^3, x^4] \equiv coords$  – упорядоченный список координат 4-мерного риманова пространства, а  $h_{ik}(x) = g_{ik}(x) - g_{ik}^0(x)$  – малые возмущения гравитационного фона  $g_{ik}^0(x)$ . Тогда искомые тензорные величины могут быть записаны в виде:  $R = R^{(0)} + R^{(1)} + R^{(2)} + \dots$ , где  $R^{(k)}$  тензоры, пропорциональные  $k$ -ым степеням  $h_{ik}$  и их производным. Вычисление этих величин, особенно во втором порядке теории возмущений, приводит к необходимости производить громоздкие аналитические вычисления, каждый элемент которых элементарен, однако большое их количество приводит к значительным временным затратам, а также нередко к вычислительным ошибкам.

Авторский пакет **GravPerturbations** предназначен для автоматизации этих вычислений в системе компьютерной математики Maple на основе ее внутренней библиотеки Physics. Для вычисления указанных геометрических величин необходимо задать координаты, невозмущенную метрику  $g_{ik}^0(x)$  и ее ковариантные возмущения  $h_{ik}(x)$ , а также указать тип выводимой величины, ее валентность и порядок возмущения. При этом как невозмущенный метрический тензор, так и его возмущения можно задавать в виде функциональной зависимости от неизвестных функций. В данном пакете пока реализована программа вычислений возмущений геометрических объектов включительно до второго порядка по малости возмущений. Отметим, что данная программа применялась уже одним из авторов при построении модели макроскопической Вселенной [1; 2].

Для начала работы с программным комплексом необходимо прочитать файл `Perturb.m` и подключить библиотеку **GravPerturbations** следующим образом:

```
> restart;
read `Perturb.m`;
> with(GravPerturbations);
[Einstein_Comb, RicciScalar, Ricci_Comb, perturb]
```

Основная многопараметрическая программная процедура библиотеки – **perturb(coords, g0, h, n, mode)**. Обязательные параметры процедуры приводятся в строгом порядке:

`Coords` – [тип: список] список координат;  
`g0` – [тип: symbol] матрица ковариантных компонент невозмущенной метрики;

$h$  – [тип:symbol] матрица ковариантных компонент возмущений метрического тензора;

$n$  – [тип:целое] порядок возмущений (в данной программе эта величина может принимать только значения 0, 1, 2);

$mode$  – [тип:symbol] вычисляемая величина: Einstein – тензор Эйнштейна; Ricci – тензор Риччи; RicciScalar – скаляр Риччи.

Необязательным параметром процедуры является валентность тензора,  $char$  (для тензора Эйнштейна и Риччи). Этот параметр задается в формате **char=[e1, e2]**, где  $e_i = \pm 1$ : [-1,-1] – дважды ковариантный тензор; [-1,1] – тензор со смешанными компонентами; [1,1] – дважды контравариантный тензор; по умолчанию  $char = [-1,-1]$ . При выполнении процедуры искомые компоненты тензора выводятся в виде матриц.

Рассмотрим пример использования программного комплекса. Определим матрицу ковариантного невозмущенного метрического тензора  $g_{ik}^0$ :

```
> g0:=array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
g0[1,1] := -a(eta)^2:
g0[2,2] := -a(eta)^2:
g0[3,3] := -a(eta)^2:
g0[4,4] := a(eta)^2:
> evalm(g0);
```

$$\begin{bmatrix} -a(\eta)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(\eta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(\eta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(\eta)^2 \end{bmatrix}$$

Зададим матрицу малых ковариантных гравитационных возмущений  $\delta g_{ik} = g_{ik} - g_{ik}^0 = h_{ik}$ :

```
> h:=array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
h[1,1] := -a(eta)^2*(eta)*exp(I*k*z):
h[2,2] := a(eta)^2*(eta)*exp(I*k*z):
h[3,3] := 0:
h[4,4] := 0:
> evalm(h);
```

$$\begin{bmatrix} -a(\eta)^2 \eta e^{I k z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(\eta)^2 \eta e^{I k z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Далее вычислим возмущения смешанных компонент тензора Эйнштейна первого порядка:

> **G\_comb1 := perturb ([x, y, z, eta], g0, h, 1, Einstein) ;**

$$G\_comb1 := \left[ \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{a(\eta)^2} \left( e^{1kz} \left( a(\eta)^2 \eta k^2 + 2 \left( \frac{d}{d\eta} a(\eta) \right)^2 \eta - 4 \left( \frac{d^2}{d\eta^2} a(\eta) \right) a(\eta) \eta + 2 a(\eta) \left( \frac{d}{d\eta} a(\eta) \right) \right) \right], 0, 0, 0 \right], \right. \\ \left. \left[ 0, -\frac{1}{2} \frac{1}{a(\eta)^2} \left( e^{1kz} \left( a(\eta)^2 \eta k^2 + 2 \left( \frac{d}{d\eta} a(\eta) \right)^2 \eta - 4 \left( \frac{d^2}{d\eta^2} a(\eta) \right) a(\eta) \eta + 2 a(\eta) \left( \frac{d}{d\eta} a(\eta) \right) \right) \right], 0, 0 \right], \right. \\ \left. \left[ 0, 0, 0, 0 \right], \right. \\ \left. \left[ 0, 0, 0, 0 \right] \right]$$

Выведем отдельно одну компоненту возмущения тензора Эйнштейна первого порядка:

> **G10 [1, 1] ;**

$$\frac{1}{2} \frac{1}{a(\eta)^2} \left( e^{1kz} \left( a(\eta)^2 \eta k^2 + 2 \left( \frac{d}{d\eta} a(\eta) \right)^2 \eta - 4 \left( \frac{d^2}{d\eta^2} a(\eta) \right) a(\eta) \eta + 2 a(\eta) \left( \frac{d}{d\eta} a(\eta) \right) \right) \right)$$

Библиотека **GravPerturbations** также содержит три упрощенные программные процедуры **Einstein\_Comb**, **RicciScalar**, **Ricci\_Comb**, позволяющие выводить смешанные компоненты искоемых тензорных величин.

### Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Макроскопические уравнения Эйнштейна и космология ранней вселенной. I. Математическая модель для поперечных флуктуаций // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. Вып. 2. С. 47-61.

2. Ignat'ev Yu.G.. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with a Lambda Term // Gravitation and Cosmology. 2016. Vol. 22, № 3. P. 264-269.

3. Игнатъев Ю.Г., Агафонов А.А. Программа аналитических вычислений в теории возмущений второго порядка уравнений Эйнштейна в прикладном математическом пакете Maple, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016616385. 09.06.2016. Федеральная служба по интеллектуальной собственности.



4. Игнатъев Ю.Г., Агафонов А.А. Пакет программ «GravPerturbations» в СКМ Maple автоматизированного вычисления тензорных объектов во втором порядке теории возмущений // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. Вып. 4. С. 145-146.

**Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agafonov**  
Kazan Federal University

**THE SOFTWARE PACKAGE IN SCM MAPLE  
OF THE AUTOMATIC COMPUTATION OF TENSOR OBJECTS  
IN THE SECOND ORDER OF PERTURBATION THEORY**

**Keywords:** *theory of gravitation, perturbations of the metric, the second order of perturbation theory, applied mathematical packages.*

**Abstract.** *Package GravPerturbations allows to calculate in analytical form the basic geometry of the relativistic theory of gravity in the second order in the perturbations relative to the unperturbed gravitational field: Einstein tensor, Gik, the Ricci tensor, Rik and scalar curvature, R.*

**Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов**  
Казанский федеральный университет

УДК 19.711.3+551.5.001.57+517.957

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СКМ  
КОСМОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ  
СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ С САМОДЕЙСТВИЕМ**

Ключевые слова: *нелинейные динамические системы, математическое моделирование, качественная теория дифференциальных уравнений, космология, системы компьютерной математики.*

*Проведены детальный качественный анализ и численное моделирование эволюции космологических моделей, основанных на нелинейных классических и фантомных скалярных полях с самодействием.*

**1. Качественный анализ космологической модели, основанной на скалярном поле.** Рассмотрим самосогласованную систему уравнений космологической модели, основанную на свободном скалярном поле и пространственно-плоской метрики Фридмана,

приведенную к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости  $\{\Phi, Z\}$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= x; Z = y; \\ x' &= P(x, y) = y; \end{aligned} \quad (1)$$

$$y' = Q(x, y) = -\sqrt{3}y \sqrt{e_1 y^2 + e_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4 + \lambda_m} - e_1 e_2 x + e_1 \alpha_m x^3,$$

где  $\alpha$  – константа самодействия,  $m$  – масса квантов скалярного поля, для классического скалярного поля  $e_1 = 1$ , для фантомного скалярного поля  $e_1 = -1$ ,  $e_2 = 1$  – скалярное поле с притяжением,  $e_2 = -1$  – скалярное поле с отталкиванием,  $\lambda \geq 0$  – космологическая постоянная,  $\tau = mt$  – безразмерное комптоновское время,  $\Phi' = Z(\tau)$ ,  $\lambda_m \equiv \frac{\lambda}{m^2}$ ;  $\alpha_m \equiv \frac{\alpha}{m^2}$ . Система имеет вещественное решение в области:  $e_1 y^2 + e_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4 + \lambda_m \geq 0$ .

Особые точки динамической системы определяются уравнениями:  $M: P(x, y) = 0; Q(x, y) = 0$ . При любых значениях  $\alpha_m$  и  $\lambda_m \geq 0$  система алгебраических уравнений (1) всегда имеет тривиальное решение

$$x = 0; y = 0 \Rightarrow M_0(0, 0), \quad (2)$$

а при  $e_2 \alpha > 0$  – еще два симметричных:

$$x = x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{e_2 \alpha_m}}; y = 0 \Rightarrow M_{\pm}(x_{\pm}, 0). \quad (3)$$

Характеристическое уравнение и его корни  $k_{\pm}$  в нулевой особой точке  $M_0$  (2) при  $\lambda_m \geq 0$ :

$$k_{\pm} = -\frac{\sqrt{3\lambda_m}}{2} \pm \frac{\sqrt{3\lambda_m - 4e_1 e_2}}{2}. \quad (4)$$

Для классического поля с притяжением ( $e_1 = e_2 = 1$ ) и фантомного поля с отталкиванием ( $e_1 = e_2 = -1$ ) в зависимости от космологической постоянной нулевая особая точка может относиться к одному из типов: центр, притягивающий фокус, устойчивый притягивающий узел.

В случае классического поля с отталкиванием ( $e_1 = 1; e_2 = -1$ ) или фантомного поля с притяжением ( $e_1 = -1; e_2 = 1$ ) имеем два вещественных собственных значения с противоположными знаками – нулевая особая точка является седлом. Корни характеристического уравнения  $k_{\pm}$  для симметричных точек  $M_{\pm}$  (3):

$$k_{\pm} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ -\sqrt{\lambda_m + \frac{1}{2\alpha_m}} \pm \sqrt{\lambda_m + \frac{1}{2\alpha_m} + \frac{8e_1 e_2}{3}} \right]. \quad (5)$$

Для классического поля с притяжением ( $e_1 = e_2 = 1$ ) или фантомного поля с отталкиванием ( $e_1 = e_2 = -1$ ) оба собственных значения

вещественны и противоположны по знаку. Таким образом, точки  $M_{\pm}$  являются седловыми точками при любом направлении времени. Для классического поля с отталкиванием ( $e_1 = 1; e_2 = -1$ ) или фантомного поля с притяжением ( $e_1 = -1; e_2 = 1$ ) в зависимости от знака выражения  $\lambda_m + 1/2\alpha_m - 8/3$  возможны три случая: два симметричных притягивающих (устойчивых) невырожденных узла, два симметричных вырожденных узла или два симметричных притягивающих фокуса.

**2. Численное моделирование космологической эволюции для типичных случаев.** В результате численного моделирования в СКМ Mathematica были подтверждены результаты качественных исследований и установлено асимптотическое поведение траекторий на бесконечности.

Для численного интегрирования динамической системы (3) необходимо выбирать начальные значения функции  $\Phi$ ,  $Z$ , удовлетворяющих положительному подкоренному выражению системы. Области вблизи симметричных притягивающих фокусов на рисунке 2 не удовлетворяют условию вещественности решения, поэтому траектории, имеющие начало в  $\tau = -\infty$  (полнос), обрываются на границе этой области.

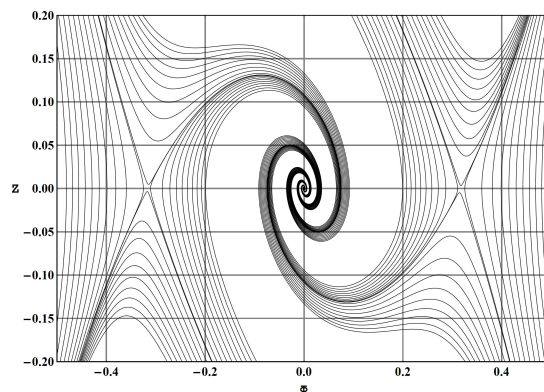


Рис. 1. Фазовые траектории системы (1) для классического поля:  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 1$ ,  $\alpha_m = 10$ ,  $\lambda_m = 0.1$

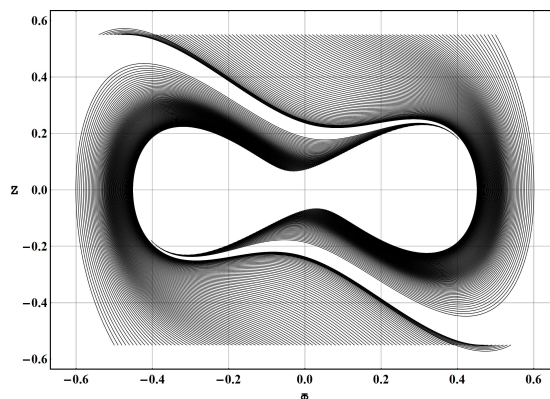


Рис. 2. Фазовые траектории системы (1) для классического поля:  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = -1$ ,  $\alpha_m = -10$ ,  $\lambda_m = 0$

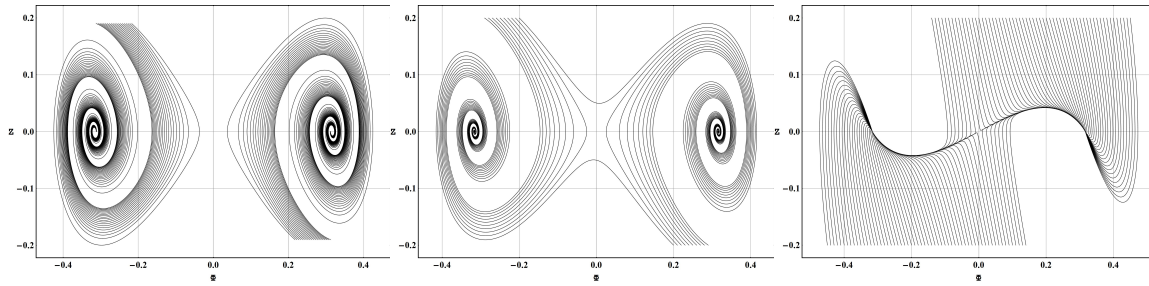


Рис. 3. Фазовые траектории системы (3) для фантомного поля:  $e_1 = -1$ ,  $e_2 = 1$ ,  $\alpha_m = 10$ ,  $\lambda_m = 0$  (слева),  $\lambda_m = 0.01$  (по центру),  $\lambda_m = 2.7167$  (справа) – случай бифуркации

Для более детального исследования поведения траекторий динамической системы на бесконечности были построены проекции фазовых траекторий на сферу Пуанкаре.

**3. Выводы.** Сравнивая проекции фазовых портретов динамических систем, основанных на скалярных полях с самодействием, заметим следующее:

- все фазовые портреты обладают центральной симметрией  $\{\Phi, Z\} \rightarrow \{-\Phi, -Z\}$ . Это позволяет нам проанализировать фазовые траектории, начинающимися в одной полуплоскости, скажем, для определенности, в верхней;

- в случае нулевого значения космологической постоянной и отсутствия самодействия ( $\alpha = 0$ ) все фазовые траектории разделяются сепаратриссами, выходящими из экватора  $\{\Phi_\infty = \pm\infty, Z_\infty = 0\}$  на два динамических потока, выходящих из полюсов  $\{\Phi_\infty = 0, Z_\infty = \pm\infty\}$  и асимптотически наматывающихся на фокус  $\{0,0\}$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;

- в случае  $\lambda > 0$ ,  $e_2 = -1$ ,  $\alpha < 0$  возникают два притягивающих центра и одна седловая центральная точка: все фазовое пространство разбивается на четыре динамических потока, выходящих из полюсов, причем поток, выходящий из каждого полюса разбивается на пару потоков, траектории одного из которых наматываются на левый притягивающий центр, а второго – на правый;

- в случае  $\lambda > 0$ ,  $e_2 = 1$ ,  $\alpha > 0$  возникает один притягивающий центр и две симметричные седловые точки: все фазовое пространство разбивается на шесть динамических потоков, причем пара из них выходит из полюсов и попадает в противоположные полюса, другая пара, выходящая из полюсов, возвращается обратно, наконец, потоки третьей пары, выходя из полюсов, наматываются на притягивающий центр;

- при  $\lambda > 0$ ,  $e_2 = -1$ ,  $\alpha < 0$  существует переходный тип фазовой диаграммы – бифуркации, когда все траектории делятся на два

динамических потока, выходящих из полюсов и после достаточно сложной петли возвращающихся обратно.

В интересном случае модели  $\lambda \geq 0$  с классическим скалярным полем с самодействием  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = -1$ ,  $\alpha < 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  Вселенная может стремиться к евклидовой Вселенной со скалярным вакуумом, полностью компенсирующим космологический член. Процесс перехода к этому режиму расширения требует дополнительного исследования.

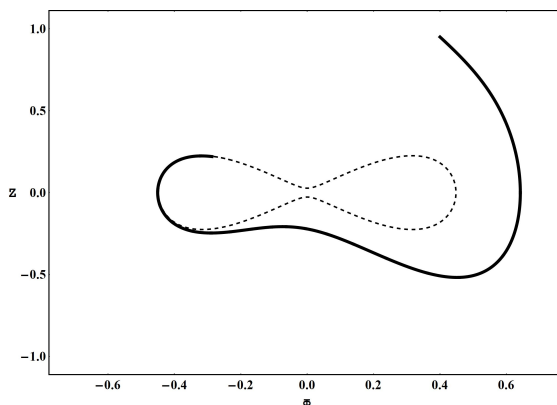


Рис. 4. Приближение фазовой траектории динамической системы (1) в случае классического скалярного поля (сплошная линия) к траектории свободных потенциальных колебаний (пунктирная линия):  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = -1$ ,  $\alpha = -10$ ;  $\lambda = 0$

### Литература

1. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием. II. Сравнительный анализ моделей с классическим и фантомным полями, Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. Вып. 1(18). 2017. С. 46-65.
2. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.
3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, Серия «Справочная математическая библиотека». Вып. 11. М.: Наука, 1989.

**Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agafonov**  
Kazan Federal University

### NUMERICAL AND ANALYTICAL MODELING IN SCM OF THE COSMOLOGICAL SYSTEMS ON THE BASIC SCALAR FIELDS WITH SELF-ACTION

**Keywords:** *nonlinear dynamical systems, mathematical modeling, qualitative theory of differential equations, cosmology, systems of computer mathematics.*

**Abstract.** *A detailed qualitative analysis and numerical simulation of evolution of cosmological models based on nonlinear classical and phantom scalar fields with self-action are carried out.*

## КАЧЕСТВЕННЫЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОСНОВАННОЙ НА АСИММЕТРИЧНОМ СКАЛЯРНОМ ДУБЛЕТЕ В СКМ MAPLE

Ключевые слова: *фантомные скалярные поля, асимметричный скалярный дублет, космологические модели, качественный анализ, численное моделирование, СКМ Maple.*

*Методами качественного и численного анализа исследуются космологические модели, основанные на асимметричном скалярном дублете, состоящем из классического и фантомного скалярного полей. Показано, что космологическая модель, основанная на асимметричном скалярном дублете, в случае минимального взаимодействия имеет девять особых точек. Показано, что наличие даже весьма слабого фантомного поля существенно изменяет динамику космологической модели. Численным интегрированием в СКМ Maple построены двумерные и трехмерные фазовые диаграммы для всех значимых случаев. Созданы специальные графические процедуры для адекватного отображения четырехмерных фазовых портретов.*

**1. Постановка задачи.** В работе [1] была рассмотрена космологическая модель, основанная на асимметричном скалярном дублете, то есть системе, состоящей из двух скалярных полей – классического ( $\Phi$ ) и фантомного ( $\phi$ ). В результате преобразований модель была сведена к 4-мерной динамической системе:

$$\Phi' = Z;$$

$$Z' = -\sqrt{3}Z \sqrt{\left( Z^2 + e_2 \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2} \Phi^4 \right) - \left( z^2 - e_2' \mu^2 \phi^2 + \frac{\beta_m}{2} \phi^4 \right) + \lambda_m - e_2 \Phi + \alpha_m \Phi^3};$$
(1)

$$\phi' = z;$$

$$z' = -\sqrt{3}z \sqrt{\left( Z^2 + e_2 \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2} \Phi^4 \right) - \left( z^2 - e_2' \mu^2 \phi^2 + \frac{\beta_m}{2} \phi^4 \right) + \lambda_m + e_2' \mu^2 \phi - \beta \phi^3}.$$

Для приведения системы (1) к стандартным обозначениям качественной теории (см., например, [2])

$$\frac{dx_i}{d\tau} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}$$

примем следующие обозначения:

$$\Phi = x; \quad \phi = y; \quad F_1 \equiv P = Z; \quad F_3 \equiv p = z;$$

$$F_2 \equiv Q = -\sqrt{3}Z \sqrt{\left(Z^2 + e_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4\right) - \left(z^2 - e_2' \mu^2 y^2 + \frac{\beta_m}{2} y^4\right) + \lambda_m - e_2 x + \alpha_m x^3};$$

$$F_4 \equiv q = -\sqrt{3}z \sqrt{\left(Z^2 + e_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4\right) - \left(z^2 - e_2' \mu^2 y^2 + \frac{\beta_m}{2} y^4\right) + \lambda_m + e_2' \mu^2 y - \beta_m y^3}.$$

Соответствующая нормальная система уравнений в стандартных обозначениях имеет вид:

$$x' = P; \quad Z' = Q; \quad y' = p; \quad z' = q. \quad (2)$$

Необходимое условие вещественности решения системы (2) имеет вид:

$$\left(Z^2 + e_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4\right) - \left(z^2 - e_2' \mu^2 y^2 + \frac{\beta_m}{2} y^4\right) + \lambda_m \geq 0. \quad (3)$$

## 2. Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы определяются системой алгебраических уравнений (см., например, [2]-[3]):

$$M : F_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Согласно (2), (4), приходим к следующим условиям для нахождения особых точек динамической системы:

$$\begin{aligned} Z &= 0, \quad z = 0; \\ x(e_2 - \alpha_m x^2) &= 0; \\ y(e_2' \mu^2 - \beta_m y^2) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, динамическая система (2) имеет девять особых точек.

1.  $M_0$  : При любых значениях  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  система алгебраических уравнений (2) всегда имеет тривиальное решение:  
 $x = 0; \quad Z = 0; \quad y = 0; \quad z = 0 \Rightarrow M_0 : (0,0,0,0).$

2.  $M_{01}, M_{02}$  : При любых  $\alpha_m$  и  $e_2' \beta_m > 0$  – еще два симметричных по  $\varphi$  :

$$x = 0; \quad Z = 0; \quad y_{\pm} = \pm \frac{\mu}{\sqrt{e_2' \beta_m}}; \quad z = 0 \Rightarrow M_{01}(0,0, |y_{\pm}|, 0); \quad M_{02}(0,0, -|y_{\pm}|, 0).$$

3.  $M_{10}, M_{20}$  : При любых  $\beta_m$  и  $e_2 \alpha_m > 0$  – еще два симметричных по  $\Phi$  :

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{e_2 \alpha_m}}; \quad Z = 0; \quad y = 0; \quad z = 0 \Rightarrow M_{10}(|x_{\pm}|, 0, 0, 0); \quad M_{20}(-|x_{\pm}|, 0, 0, 0).$$

4.  $M_{12}, M_{21}, M_{11}, M_{22}$  : При  $e_2 \alpha_m > 0$  и  $e_2' \beta_m > 0$  – еще четыре симметричных по  $\Phi$  и  $\varphi$  :

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{e_2 \alpha_m}}; \quad Z = 0; \quad y_{\pm} = \pm \frac{\mu}{\sqrt{e_2' \beta_m}}; \quad z = 0 \Rightarrow$$

$$M_{11}(|x_{\pm}|, 0, |y_{\pm}|, 0); M_{12}(|x_{\pm}|, 0, -|y_{\pm}|, 0);$$

$$M_{21}(-|x_{\pm}|, 0, |y_{\pm}|, 0); M_{22}(-|x_{\pm}|, 0, -|y_{\pm}|, 0).$$

## 2. Численное моделирование динамической системы

Численное решение системы уравнений (1) определяется четырьмя начальными условиями и шестью безразмерными параметрами  $\alpha_m, \beta_m, e_2, e_2', \mu, \lambda_m$  (индикатор  $e_2(e_2') = \pm 1$ ).

Численное решение в СКМ Maple18 осуществляется с помощью пакета программ DifEqTools (подробности см. [1]), используется команда `DifEq[NumDsolve](Eqs, IC, [method])`, где `Eqs` – система дифференциальных уравнений, `IC` – начальные условия, `method` – метод интегрирования (в данном решении используется `rkf45` – метод Рунге-Кутты-Фелберга 4-5 порядка). Необходимо отметить, что вследствие чрезвычайного разнообразия фазовых треков четырехмерной динамической системы (2) в зависимости от параметров модели и начальных условий невозможно охватить в одном докладе все типы ее характерного поведения.

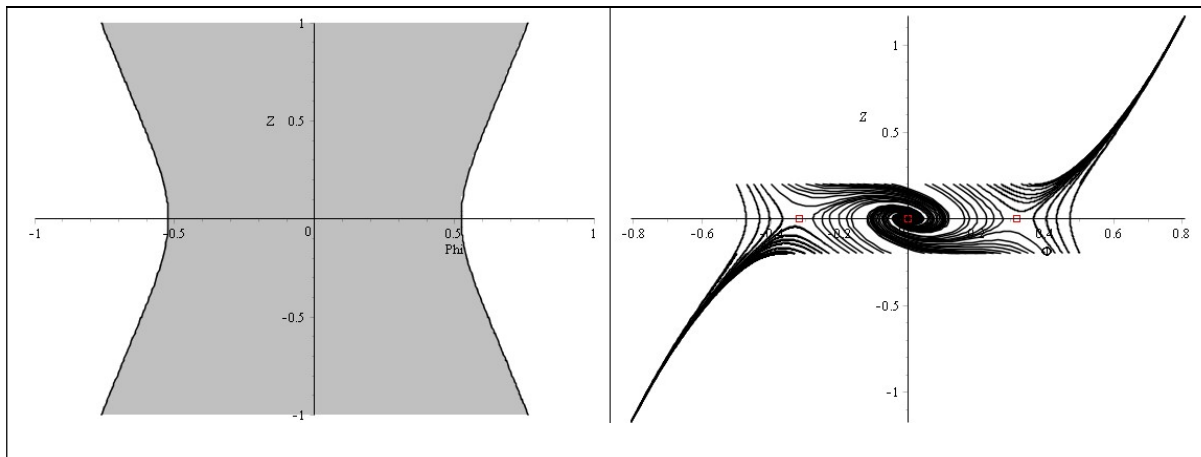


Рис. 1а. Область допустимых значений динамических переменных системы (1):

$$\alpha_m = 10, \beta_m = -10, e_2 = 1, e_2' = -1, \\ \mu = 0.1, \lambda_m = 0.1.$$

Рис. 1б. Двумерная проекция фазовых траекторий динамической системы (1):

$$\alpha_m = 10, \beta_m = -10, e_2 = 1, e_2' = -1, \\ \mu = 0.1, \lambda_m = 0.1.$$



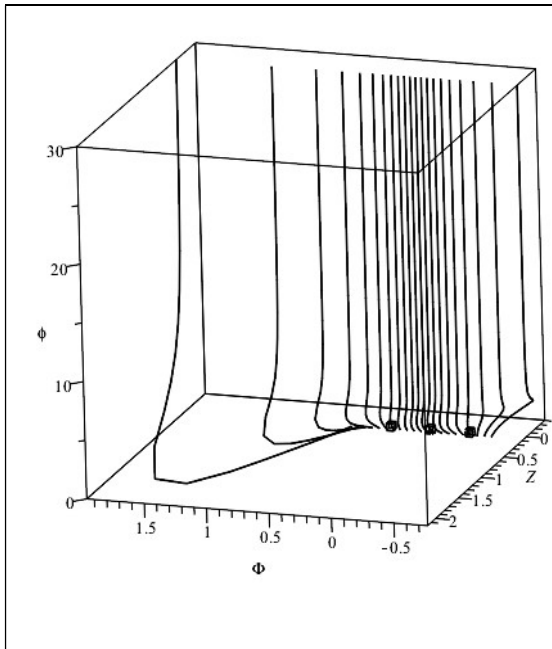


Рис. 2а. Трехмерная проекция фазовых траекторий динамической системы (1):

$$\alpha_m = 10, \beta_m = -10, e_2 = 1, e_2' = -1, \\ \mu = 0.1, \lambda_m = 0.1.$$

Начальные условия:

$$\Phi(0) = -0.56 \div 0.56, Z(0) = 0.2, \\ \varphi(0) = 0.5, z(0) = 0.5\}$$

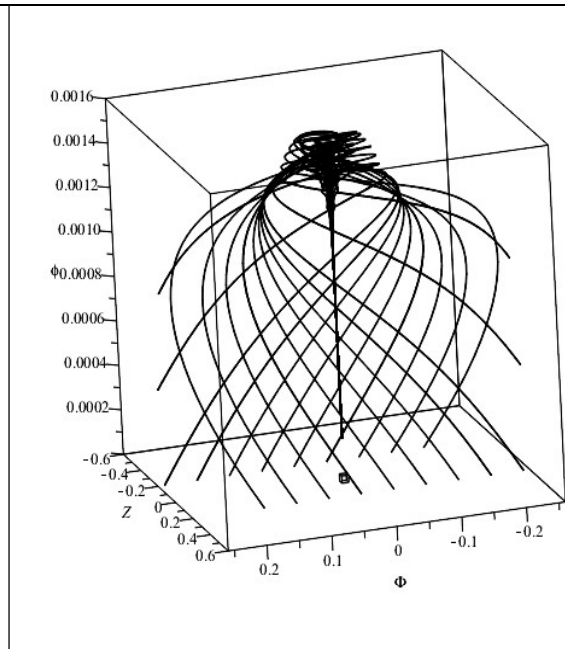


Рис. 2б. Трехмерная проекция фазовых траекторий динамической системы (1):

$$\alpha_m = 10, \beta_m = -10, e_2 = 1, e_2' = -1, \\ \mu = 0.1, \lambda_m = 0.1.$$

Начальные условия:

$$\Phi(0) = -0.54 \div 0.54, Z(0) = 0.2 / -0.2, \\ \varphi(0) = 0.000001, z(0) = 0.001\}$$

На приведенных рисунках продемонстрированы результаты численного моделирования вблизи некоторых указанных выше особых точек. В частности, на рисунке 1а изображена область допустимых значений динамических переменных при следующих значениях параметров:  $\alpha_m = 10, \beta_m = -10, e_2 = 1, e_2' = -1, \mu = 0.1, \lambda_m = 0.1$ ; на рисунке 1б – двумерная проекция фазовой траектории динамической системы (1) на плоскость  $\{\Phi, Z\}$  вблизи особых точек  $M_0, M_{10}, M_{20}$  при этих значениях параметров в случае слабого фантомного поля. На рисунках 2а и 2б показаны трехмерные проекция фазовой траектории динамической системы (1) в подпространстве  $\{\Phi, Z, z\}$  вблизи особых  $M_0, M_{10}, M_{20}$ .

## Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологических моделей, основанных на асимметричном скалярном дублете: классическое + фантомное скалярное поле. I. случай минимально взаимодействующих скалярных полей: качественный анализ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 2. С. 36–52.

2. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 320 с.

3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1989. 489 с.

**Yu.G. Ignatev, I.A. Kokh**  
Kazan Federal University

## **QUALITATIVE ANALYSIS AND NUMERICAL INTEGRATION IN CAS MAPLE OF COSMOLOGICAL MODEL BASED ON ASYMMETRICAL SCALAR DUBBLET**

**Keywords:** *phantom scalar fields, asymmetric scalar dubblet, cosmological models, qualitative analysis, numerical simulation, CAS Maple.*

**Abstract.** *In this article, cosmological models based on asymmetric scalar doublets consisting of classical and phantom scalar fields are investigated on the basis of qualitative and numerical analysis. The presence of phantom scalar field makes it possible to consider classical scalar fields with attraction of the same scalar charged particles, which significantly expands the variety of behaviors of cosmological models. It is show, that cosmological the model, based on asymmetric scalar dubblet, in the case of low interaction has 9 singular points, of which 2 points are attracting, the rest point are unstable saddle. It is show that the presence of even very weak phantom field significantly changes the dynamics of the cosmological model. 2-d or 3-d phase trajectories are constructed by numerical integration in CAS Maple. Special graphic procedures have been created for optimal presentation of 4-d phase portraits.*

**Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина**  
Казанский федеральный университет

УДК 19.711.3+551.5.001.57+517.957

## **ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СКМ MAPLE: АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕДУР ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И ЕГО ВИЗУАЛИЗАЦИИ**

**Ключевые слова:** *нелинейные динамические системы, математическое моделирование, качественная теория дифференциальных уравнений, сплайновая*

*аппроксимация, численные методы интегрирования, визуализация вычислений, нелинейная механика, космология, системы компьютерной математики.*

*Представлены численно-аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем, основанные на применении численных методов интегрирования систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений и методов сплайновой аппроксимации функций в системе компьютерной математики Maple. Описаны инструменты автоматизированной визуализации численных решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усреднения численных решений на основе авторского прикладного пакета программ DifEqTools. Приведены примеры применения этих инструментов к исследованию нелинейных задач механики и космологии.*

Нелинейные динамические системы, с математической точки зрения описываемые системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), являются фундаментальной моделью нелинейных процессов, возникающих как в системах частиц (механических системах), так и в сложных системах частиц и полей (электродинамических системах, системах с гравитационным и скалярным взаимодействием). Многие базовые модели гравитации и космологии, несмотря на их существенно полевой характер, часто также сводятся к нелинейным динамическим системам. Простейшим примером таких систем являются все однородные космологические модели. Как известно, до сих пор не существует универсальных математических методов нахождения точных решений нелинейных систем ОДУ, и проблема исследования таких систем в последние годы становится особенно острой в связи с возросшим интересом теоретической физики к нелинейным процессам. В последние 30 лет в связи с исследованием таких систем, например солитонов, растет понимание того, что линейные модели физических процессов являются весьма приближенными, удовлетворительно описывающими реальные явления лишь при достаточно малых временах, то есть линейные модели являются как бы первым членом разложения Тейлора истинных закономерностей природы. К сожалению, математика пока не отвечает на этот вызов времени. Исключением является лишь качественная теория динамических систем, с помощью которой можно получить и классифицировать некоторые асимптотические свойства таких систем.

В этих условиях для исследования нелинейных динамических систем приходится применять различные методы численного интегрирования систем нелинейных ОДУ, то есть неизбежно переходить к методам компьютерного моделирования. Система компьютерной

математики (СКМ) Maple хорошо приспособлена к такому моделированию. В ней, помимо большого набора инструментов численного интегрирования есть специальные средства для построения фазовых портретов динамических систем, а также очень хорошо проработанные средства сплайновой экстраполяции, что позволяет совместить численные и аналитические методы исследования динамических систем. Важным обстоятельством является наличие в Maple продвинутого пакета тензорных вычислений. Целью статьи является ознакомление ученых, сталкивающихся с проблемами исследования нелинейных динамических систем, с методами численно-аналитического исследования таких систем в СКМ Maple. Указанные методы реализованы в виде программ авторского пакета DifEqTools, являющегося приложением СКМ Maple 17-2016 [1–2].

Важнейшим этапом численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем является визуализация численных результатов компьютерного моделирования. Визуализация математической модели позволяет не только выявить основные закономерности описываемого ею процесса, но и обнаружить некоторые детали, недоступные выявлению аналитическими методами исследования. В этой статье мы будем рассматривать инструменты исследования так называемых *обобщенно-механических* систем [2], описываемых системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [3]:

$$y_i^{(n_i)} = F_i(y_1, \dots, y_N, y_1', \dots, y_N', y_1'', \dots, y_N'', \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_1^{(n_N-1)}, t); \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1)$$

где  $y^{(n)} = d^n y / dt^n$  – обозначение  $n$ -й производной функции  $y(t)$  по независимой переменной  $t$ , временной переменной<sup>2</sup>, а  $F_i$  – непрерывно-дифференцируемые функции своих переменных. Будем в дальнейшем полагать выполненными начальные условия для системы (1):

$$y_i^{(k)}(t) \Big|_{t=t_0} = C_i^k; \quad (k = \overline{1, n_i - 1}; i = \overline{1, N}), \quad (2)$$

соответствующие задаче Коши, где  $C_i^k$  – начальные значения производных  $k$ -го порядка функций  $y_i(t)$ . Ясно, что путем известных преобразований, которые автоматически выполняет представленный ранее пакет программ DifEq [4]<sup>3</sup>, система (2) преобразуется к стандартной нормальной системе (вообще говоря, неавтономной) обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

<sup>2</sup> Хотя это может быть и не обязательно физическое время.

<sup>3</sup> как и расширенный пакет DifEqTools.

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n, t) \quad (i = \overline{1, n}) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(t) \quad (3)$$

с начальными условиями Коши

$$(x^1(t_0), \dots, x^n(t_0)) = (x_{(0)}^1, \dots, x_{(0)}^n) \Rightarrow \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_{(0)}. \quad (4)$$

Поэтому все функции  $y_i(t)$  и их производные до  $n_i - 1$  порядка включительно являются *динамическими переменными*:

$$y_1(t), \dots, y_N(t), y_1'(t), \dots, y_N'(t), y_1''(t), \dots, y_N''(t), \dots, y_1^{(n_1-1)}(t), \dots, y_1^{(n_N-1)}(t).$$

Представленный пакет DifEqTools позволяет в автоматическом режиме решать следующие задачи:

1) выводить графики зависимости одной из динамических переменных от временной переменной,  $x^i(t)$  на заданном интервале  $t \in [t_1, t_2]$ ;

2) выводить графики двумерных фазовых траекторий вида  $[x^i(t), x^k(t)]$  на заданном интервале временной переменной  $t \in [t_1, t_2]$ ;

3) выводить трехмерные графики фазовой траектории вида  $[x^i(t), x^k(t), x^l(t)]$  на заданном интервале временной переменной  $t \in [t_1, t_2]$ ;

4) выводить графики зависимости заданной функции динамических переменных от временной переменной,  $f(x^1(t), \dots, x^N(t))$  на заданном интервале  $t \in [t_1, t_2]$ ;

5) выводить графики зависимости интегралов и производных от заданных функций динамических функций по временной переменной на заданном интервале  $t \in [t_1, t_2]$ ;

6) выводить графики двумерных фазовых траекторий двух заданных функций динамических переменных от временной переменной,  $[f_1(x^1(t), \dots, x^N(t)), f_2(x^1(t), \dots, x^N(t))]$ , на заданном интервале временной переменной  $t \in [t_1, t_2]$ ;

7) выводить графики трехмерных фазовых траекторий трех заданных функций динамических переменных от временной переменной,  $[f_1(x^1(t), \dots, x^N(t)), f_2(x^1(t), \dots, x^N(t)), f_3(x^1(t), \dots, x^N(t))]$ ,  $[x^i(t), x^k(t)]$  на заданном интервале временной переменной  $t \in [t_1, t_2]$ ;

8) выводить динамические графики для всех указанных случаев.

9) автоматизировать вывод средних значений заданных функций динамических переменных, а также осцилляции этих функций и их средне-квадратичные значения.

Последние возможности являются особенно ценными при численном моделировании нелинейных быстропеременных процессов. Заметим, что пакет программ предусматривает автоматизированную разметку координатных осей соответственно именам выводимых функций. При этом начала и концы фазовых траекторий автоматически помечаются соответствующими маркерами. Приведем несколько примеров автоматизированного вывода фазовых траекторий нелинейных динамических систем.

**Пример 1.** Динамическая визуализация существенно нелинейной трехмерной динамической системы, описываемой системой уравнений:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} - x^3; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - y^3; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (5)$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 1, \quad y(0) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1, \quad z(0) = 0, \quad \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 1. \quad (6)$$

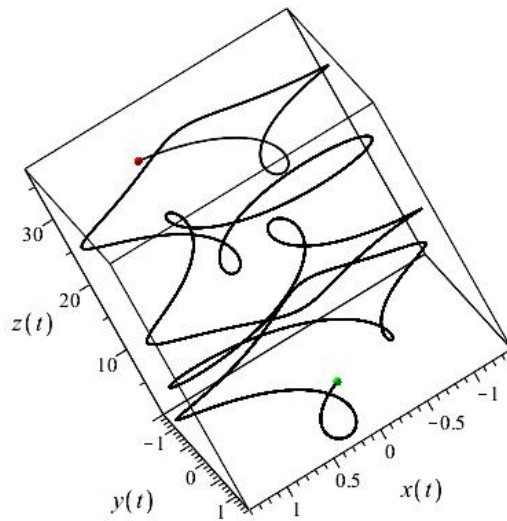


Рис. 1. Заключительный кадр анимационной картины 3-мерной проекции фазового портрета динамической системы (5) на подпространство  $V_3(x, y, z)$

**Пример 2.** Уравнение стандартной космологической модели со скалярным полем

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \Phi(\tau) = -\sqrt{3}\sqrt{\pi} \sqrt{\Lambda + 8\pi \left( \left( \frac{d}{d\tau} \Phi(\tau) \right)^2 + \Phi(\tau)^2 \right)} \frac{d}{d\tau} \Phi(\tau) - \Phi(\tau).$$

Ниже показаны фазовые диаграммы для стандартной космологической модели, основанной на массивном скалярном поле  $\Phi(\tau)$ , где  $\tau$  – безразмерное космологическое время, измеренное в единицах комптоновского времени  $t_c = \frac{1}{m}$ , где  $m$  – масса квантов скалярного поля,  $\Lambda$  – космологическая постоянная.

На рисунке 2 видно, как простой метод интегрирования gkf45 может приводить к принципиальным ошибкам при больших временах эволюции космологической модели ( $\tau = 10^4$ ). Фазовая траектория, полученная этим методом, приближается к квадрату, при этом «квадрат» еще и поворачивается с течением времени. Следующий пример (см. Рис. 3) показывает, как применение более точного метода Рунге-Кутты 7-8 порядков приводит к правильному результату, подкрепляемому качественной теорией дифференциальных уравнений [5].

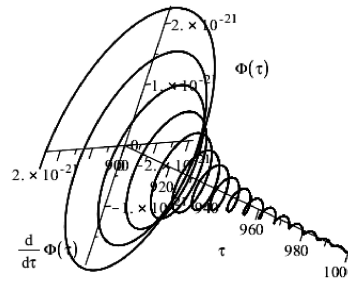
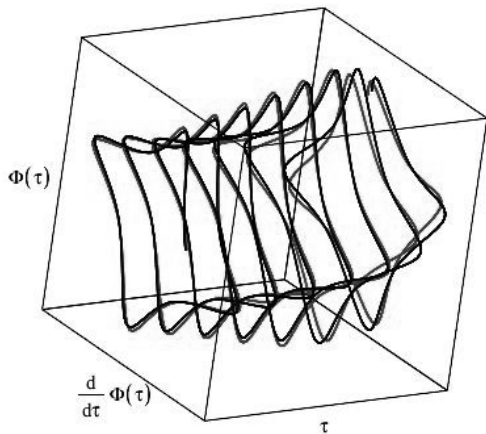


Рис. 2. Метод Рунге-Кутты-Фелберга 4-5 порядка

Рис. 3. Метод Рунге-Кутты 7-8 порядка

**Выводы.** Таким образом, пакет DifEqTools позволяет автоматизировать исследование нелинейных динамических систем любого порядка и построение их фазовых портретов в любых проекциях. При этом предусмотрены возможности автоматизированного построения динамических моделей этих систем. Отметим, что этот процесс требует больших затрат времени даже на достаточно мощных компьютерах. Для решения проблемы оптимизации этого процесса пакет DifEqTools может использовать сплайновую аппроксимацию численных решений дифференциальных уравнений. Таким образом, в руках ученого оказывается мощный инструмент для всестороннего исследования нелинейных динамических систем.

## Литература

1. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программный комплекс численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple. [Пакет программ] // <http://www.stfi.ru/ru/software.html>.
2. Свидетельство № 2017616336 Российская Федерация. Программный комплекс численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина; заявитель и правообладатель ФГАО ВО Каз. фед. ун-т. № 2017613415; заявл. 17.04.2017; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 06.06.2017. [1] с.
3. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Численно-аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple. III. Визуализация нелинейных динамических систем и приложения к механике и космологии // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2017. Вып. 3(20). С. 28-54.
4. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Averaging of the equations of the standard model over rapid oscillations // *Russian Physics Journal*. 2017. Vol. 60, No. 7. P. 1173-1181.
5. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Численно-аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple. II. Автоматизация математического анализа нелинейных математических моделей // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2017. Вып. 2. С. 74-83.

**Yu.G. Ignat'ev, A.R. Samigullina**  
Kazan Federal University

### **NUMERICAL-ANALYTICAL METHODS OF MATHEMATICAL MODELING OF THE NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS IN SCM MAPLE: AUTOMATION OF NUMERICAL SOLUTION AND ITS VISUALIZATION PROCEDURES**

**Keywords:** *nonlinear dynamical systems, mathematical modeling, qualitative theory of differential equations, spline approximation, numerical integration methods, computational visualization, nonlinear mechanics, cosmology, computer mathematics systems.*

**Abstract.** *Numerical analytical methods for mathematical modeling of nonlinear dynamical systems based on the application of numerical methods for integrating systems of ordinary nonlinear differential equations and methods of spline approximation of functions in the system of computer mathematics Maple are described. The tools for automated visualization of numerical solutions of systems of nonlinear ordinary differential equations and averaging numerical solutions on the basis of the author's application package of DifEqTools programs are described too. Examples of the application of these tools to the study of nonlinear problems in mechanics and cosmology are given.*



**В.Р. Кристаллинский**  
Смоленский государственный университет  
**С.Н. Черный**  
ВА ВПВО ВС РФ

УДК 330.46

## **О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМЫ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ПУНКТА УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ**

Ключевые слова: *нечеткий вывод, техническая система.*

*В статье рассматривается система нечеткого вывода, предназначенная для прогнозирования состояния пункта управления технической системой, реализованная в системе MatLab. Описаны входные и выходные лингвистические переменные, используемые в системе, их функции принадлежности, приведен примерный вид правил, используемых для вывода. Представлены возможности ее применения. Описан используемый в системе интерфейс и интерпретация получаемых с ее помощью результатов. Использование предлагаемой системы на практике поможет повысить эффективность управления производственными и другими процессами, в которых предусмотрена работа систем управления.*

Работа любой системы управления представляет собой сложный процесс, включающий в себя большое количество разнообразных факторов, связанных с внешними условиями, состоянием управляемой системы и с самой системой управления.

По этим причинам получение большинства исходных данных для прогнозирования затруднительно, еще сложнее определить истинность полученной информации. Эти задачи обычно решаются различными методами: путем накопления статистических сведений в процессе производства и эксплуатации; аналитически с использованием точных и приближенных методов расчета статистических характеристик параметров; путем экспериментальных статистических испытаний. Все эти методы требуют сложных математических вычислений и большого числа экспериментов, что не всегда реально. Это приводит к неточности и неполноте используемой при прогнозировании стоимости перспективного изделия информации.

На этом основании можно сделать вывод о том, что при прогнозировании работы таких систем оправдано применение нечеткой логики и систем нечеткого вывода. Это позволяет описать работу

системы управления на языке, близком к естественному языку, что делает работу прогнозирующей модели понятной специалистам в предметной области. Возможность применения математического аппарата нечеткой логики при прогнозировании работоспособности пункта управления определяется теоремой Б. Коско, доказавшего, что любая система может быть аппроксимирована системой, основанной на нечеткой логике.

Применение нечетких моделей для прогнозирования продиктовано их способностью гибкого объединения разнородных показателей (как количественных, так и качественных), различающихся по физической природе, диапазону значений, степени важности. Математический аппарат нечеткой логики предоставляет возможность получать количественные оценки прогнозируемой величины, значения которой ставятся в зависимость от множества показателей, являющихся исходными данными.

Исходя из специфики процесса прогнозирования, сформулированы следующие требования к нечетким моделям:

1) возможность определения агрегированного показателя на основе изменяющихся наборов частных показателей, что позволяет реализовать интегрированный подход к прогнозированию, так как прогнозирование эффективно только в том случае, если при этом учитывается весь спектр показателей;

2) возможность простой перенастройки модели при добавлении или изменении показателей;

3) обеспечение возможности учета различных требований к получаемому прогнозу;

4) «чувствительность» модели к изменению требований.

В данной работе предлагается система нечеткого вывода, предназначенная для прогнозирования состояния пункта управления, например, на крупном производстве.

Система нечеткого вывода, реализованная в системе MatLab, предназначена для прогнозирования состояния пункта управления технической системой (предприятием, цехом) в зависимости от трех факторов: от укомплектованности органов управления персоналом, укомплектованности и состояния систем связи и обеспеченности иными материально-техническими средствами. Использование системы MatLab и входящего в ее состав расширения Fuzzy Logic Toolbox позволяет применить при проектировании системы удобный интерфейс системы MatLab и не прибегать к программированию процесса нечеткого вывода, что значительно ускоряет процесс построения системы. Однако при этом уменьшается степень вариативности при выборе используемых функций принадлежности для лингвистических переменных и алгоритмов нечеткого вывода. Разумеется, система MatLab используется

в данной работе только для иллюстрации возможности практической реализации предлагаемой системы и может быть заменена другими средствами компьютерной реализации системы.

Каждому из факторов и прогнозируемому результату сопоставим нечеткую переменную. Каждая из трех получившихся входных нечетких переменных и одна выходная содержат четыре лингвистические переменные: НС (неспособна к функционированию), ЧС (частично способна к функционированию), ОС (ограниченно способна к функционированию) и С (способна к функционированию). Строим функции принадлежности (треугольного вида) для всех лингвистических переменных на основе экспертных оценок и нормативно-правовых документов. С помощью экспертных оценок степени влияния факторов на выходную переменную – состояние ПУ – составим систему правил, связывающих входные и выходную переменные, например: «ЕСЛИ органы управления НС и системы связи НС И иные МТС НС, ТО система управления НС».

Общий вид используемых правил может быть представлен в виде:

ЕСЛИ  $P_1$  есть  $\delta_1 V_{P_1}$  И  $P_2$  есть  $\delta_2 V_{P_2}$  И  $P_3$  есть  $\delta_3 V_{P_3}$ , ТО  $G_1$  принадлежит к классу  $V_i$ .

На рисунке 1 представлено окно ввода правил разработанной системы нечеткого вывода.

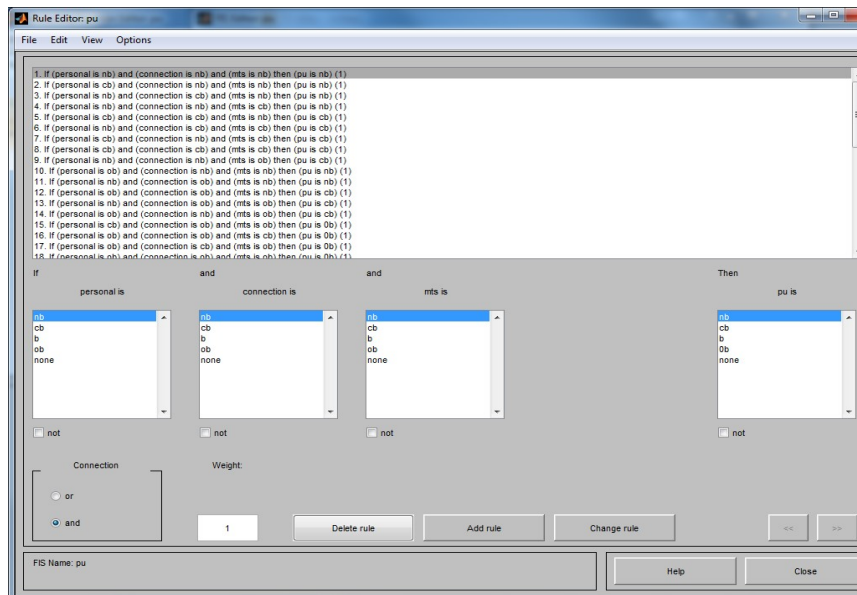


Рис. 1. Окно ввода правил системы нечеткого вывода для прогнозирования работы пункта управления

На основе построенных функций принадлежности для лингвистических переменных и правил вывода в системе MatLab строится система нечеткого вывода, реализующая поставленную задачу. При этом есть возможность выбора алгоритма нечеткого вывода, используемого в системе. В построенной системе используется алгоритм

Мамдани. Как известно (см., например, [1]), нечеткий вывод по алгоритму Мамдани состоит из следующих этапов.

1. Фаззификация входных переменных.

2. Агрегирование подусловий. Для нахождения степени истинности условий каждого из правил нечетких продукций используются парные нечеткие логические операции. Те правила, степень истинности условий которых отлична от нуля, считаются активными и используются для дальнейших расчетов.

3. Активизация подзаключений в нечетких правилах продукций. При этом используется min-активизация, при этом для сокращения времени вывода учитываются только активные правила нечетких продукций.

4. Дефаззификация выходных значений переменных. При этом используется метод центра тяжести или метод центра площади. Система MatLab позволяет выбрать используемый метод дефаззификации.

Составление системы правил представляет основную сложность в построении системы нечеткого вывода. Для того чтобы построить систему правил, нужно располагать статистическими данными, описывающими взаимосвязь значений входных и выходной переменной и привлечь к работе высококвалифицированных экспертов в области теории систем и в той области техники, в которой работает управляемое системой предприятие. Адекватность полученной таким образом модели может быть проверена только путем многократного тестирования системы в различных условиях и при управлении различными процессами. При этом возможно изменение не только системы правил, но и вида используемых функций принадлежности, параметров этих функций, а также используемого алгоритма нечеткого вывода.

Поскольку входные переменные системы носят качественный характер, их значения определяются экспертным путем и оцениваются в баллах от 1 до 10. Результирующее значение выходной переменной также определяется в баллах.

Для того чтобы воспользоваться этой системой, нужно запустить систему MatLab, подключить расширение, реализующее нечеткий вывод (команда fuzzy), загрузить построенную систему нечеткого вывода (File → Import → From file → ru.fis). На экране появится главное окно системы нечеткого вывода. После этого открывается окно просмотра правил (View→Rules) и в имеющемся внизу экрана окне Input (Ввод) через пробел вводятся значения (от 0 до 1) экспертных оценок для трех рассматриваемых факторов. Затем нажимаем клавишу ввода и сверху считываем значение выходной переменной ru.

На основе полученного значения выходной переменной делаем вывод о способности к функционированию системы управления в данных условиях. В случае если степень работоспособности системы

недостаточна, лицо, принимающее решение, должно внести изменение в один из входных факторов, если это возможно.

Таким образом, построенная система позволяет легко оценивать состояние ПУ с помощью достаточно эффективного алгоритма нечеткого вывода. Ее использование позволит прогнозировать функционирование систем управления, не прибегая к натурным экспериментам для самых разных управляемых систем, что позволит значительно сэкономить средства. Разумеется, при изменении характера управляемой системы, возможно, придется поменять вид функций принадлежности и правил системы.

Кроме того, эта система может использоваться для обучения персонала. При подготовке персонала к работе на пункте управления с помощью предлагаемой системы можно «проиграть» различные ситуации, чтобы сотрудники могли «вживую» почувствовать, как изменение условий влияет на работоспособность пункта управления.

Поскольку рассматриваемая система реализована в пакете MatLab, для ее работы требуется наличие на ЭВМ данного пакета. Однако в принципе на ее основе может быть разработано самостоятельное приложение, в котором алгоритм нечеткого вывода реализован иными средствами.

### **Литература**

1. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MatLab и fuzzyTECH. СПб:БХВ-Петербург, 2003.

**V. R. Kristalinskii**

Smolensk State University

**S.N. Chernyi**

Military Academy of Anti-aircraft Defense of the Military Forces of the Russian Federation

### **ABOUT THE CONSTRUCTION OF THE FUZZY INFERENCE SYSTEM FOR THE FORECASTING OF THE STATE OF THE CONTROLLING CENTRE OF THE TECHNICAL SYSTEM**

**Keywords:** *fuzzy inference, technical system.*

**Abstract.** *The article is devoted to the fuzzy inference system for the forecasting of the state of the controlling centre of the technical system, realized in MatLab. The input and output linguistic variables, their membership functions and the form of the rules are described. The using of the system is represented. The interface and interpretation of results are shown. Practical using of this system can help to make better the effectiveness of the control of the industrial and other processes, for which the control systems are necessary.*

**Р.Ф. Мифтахов**  
*Казанский федеральный университет  
Поволжская государственная академия  
физической культуры, спорта и туризма*

УДК 51-37

## **РАЗРАБОТКА БАНКА ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЛАЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ СОCALC**

Ключевые слова: *облачные технологии, облачные вычисления, тестовые задания, система компьютерной алгебры, SageMath, CoCalc.*

*В статье рассматриваются способы использования системы компьютерной алгебры SageMath и системы облачных вычислений CoCalc для создания банка индивидуальных заданий по математике. В частности, описаны приемы создания тестовых заданий по некоторым вопросам линейной алгебры. Показаны возможности интегрирования символьных вычислений в полнотекстовые математические документы на основе CoCalc.*

*Система облачных вычислений (англ. cloud computing) – информационная модель обеспечения удобного сетевого доступа по требованию к некоторым вычислительным ресурсам.*

*В данной работе рассматривается облачный сервис с открытым кодом CoCalc, разработанный на основе СКА SageMath.*

*SageMath – это система компьютерной алгебры, с открытым исходным кодом. Она основывается на многих существующих пакетах и СКА с открытым исходным кодом: NumPy, SciPy, SymPy, Maxima, GAP, FLINT и некоторых других.*

*Облачное решение – CoCalc (ранее, SageMathCloud) – является полноценным онлайн-сервисом совместного доступа и работы над математическими расчетами. Основным форматом документов в CoCalc является вычисляемый документ SageMath. Расчёты при этом можно комбинировать с LaTeX, HTML, Markdown, JavaScript, CSS, Wiki и др.*

*В CoCalc можно создавать документы в формате LaTeX, используя для этого онлайн-редактор, и встраивать в них вычисления на SageMath или Python. При этом мы получим именно вычисляемые TeX-документы.*

*Для работы с командами SageMath используется специальный пакет SageTeX. При компиляции TeX-документов автоматически будет запускаться вычислительное ядро SageMath, а при необходимости и предустановленный в «облаке» компилятор Python.*

*В данной работе в качестве примера эффективного использования данного пакета создадим индивидуальные задания по высшей*

математике. При этом варианты заданий будут автоматически генерироваться при компиляции TeX-документа.

В преамбуле документа им подключаются стандартные пакеты LaTeX и также указывается пакет SageTeX:

```
\documentclass[12pt,a4paper]{article}
\usepackage{sagetex}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[english,russian]{babel}
\usepackage{amssymb,latexsym,amsmath}
```

Этот пакет позволяет создавать в документе LaTeX специальные окружения. Основными окружениями являются:

- 1) окружение *sageblock* – позволяет создавать блоки с описанием программы вычислений, процедур и функций. В тексте документа данный блок будет выглядеть как блок описания кода (на подобии окружения *verbatim*). Например, создадим блок с описанием процедуры генерирования случайного вектора:

```
\begin{sageblock}
def V(n):
    return VectorSpace(QQ,n).random_element()
\end{sageblock}
```

- 2) окружение *sagesilent* аналогично *sageblock*, но содержимое блока не выводится в скомпилированном документе. Тот же пример, но уже «скрытый» в тексте

```
\begin{sagesilent}
def V(n):
    return VectorSpace(QQ,n).random_element()
\end{sagesilent}
```

К описанным в окружениях элементам можно обращаться в тексте, используя команды `\sage{}`.

Создадим индивидуальные задания по линейной алгебре. Используя окружение *sagesilent*, создадим процедуру генерирующую произвольную матрицу.

В теле процедуры используется стандартная функция SageMath (класс) для создания пространства матриц *MatrixSpace* и метод случайного выбора элементов *random\_element()*. Результат выполнения процедуры – матрица размера  $n$  на  $m$ .

И процедуры создания системы с возможностью выбора количества линейно зависимых векторов:

```
\begin{sagesilent}
import random
def lzv(n,k,l):
    a = []
    an = []
```

```

ak = []
for i in range(k-1):
    an.append(VectorSpace(AA, n).random_element())
for i in range(l):
    ak.append(ZZ.random_element(-5,-
1)*random.choice(an)+ZZ.random_element(1,5)*random.choice(an))
a = an + ak
r = rank(matrix(QQ,a))
vectors = tuple(a)
return vectors
\end{sagesilent}

```

В данной процедуре, помимо использования стандартных команд SageMath, для создания произвольной линейной комбинации векторов использована команда `ZZ.random_element(-5,-1)`, генерирующая произвольное целое число из указанного промежутка. Это команда из библиотеки *Random*, подключенной в самом начале окружения. Стандартные библиотеки Python могут быть подключены в любом окружении и использоваться в дальнейшем по тексту.

Обращаясь по тексту к данным процедурам, создадим практические задания в формате LaTeX (для примера, 2 варианта):

```

\textbf{Задание 1.} \textit{Пусть в пространстве } \mathbb{R}^4 \text{ заданы}
\textit{подпространства } \mathbf{A} = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \text{ и } \mathbf{B} = L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3).
\textit{Найдите размерность и базис суммы подпространств } \mathbf{A} + \mathbf{B},
\textit{пересечения } \mathbf{A} \cap \mathbf{B}.

```

```

\textit{Вариант:}
\begin{enumerate}
\item \mathbf{A} = \text{sage}\{lzv(3,3,1)\}, \mathbf{B} = \text{sage}\{lzv(3,3,2)\};
\item \mathbf{A} = \text{sage}\{lzv(3,3,2)\}, \mathbf{B} = \text{sage}\{lzv(3,3,1)\};
\end{enumerate}

```

Для второго задания снова используем окружение *sagesilent*:

```

\textbf{Задание 2.} \textit{Являются ли векторы } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \text{}
\textit{пространства } \mathbb{R}^4 \text{ линейно зависимыми? В случае утвердительного}
\textit{ответа найдите нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю.}

```

```

\begin{sagesilent}
a1 = lzv(4,4,1)
a2 = lzv(4,4,1)
\end{sagesilent}
\begin{enumerate}
\item \mathbf{a}_1 = \text{sage}\{a1[1]\}, \mathbf{a}_2 = \text{sage}\{a1[2]\}, \mathbf{a}_3 = \text{sage}\{a1[3]\},
\mathbf{a}_4 = \text{sage}\{a1[4]\};

```



```

\item $a_2=\sage{a1[1]}, a_2=\sage{a1[2]}, a_3=\sage{a1[3]},
a_4=\sage{a1[4]}$;
\end{enumerate}

```

Задания с возможными вариантами ответов в виде тестов также могут быть созданы непосредственно в TeX-документе. Составим задание по вычислению обратной матрицы с выбором ответа. В TeX-документе получим:

```

\begin{sagesilent}
A = Matr(3,3)
A0 = A.inverse()
A2 = A.echelon_form()
A3 = A.transpose()
A4 = A2.transpose()
\end{sagesilent}

```

**Задание 3.** Вычислить обратную матрицу  $A^{-1}$ . Матрица  $A=\sage{A1}$ . Подчеркните правильный вариант ответа.

Варианты ответов:

```

\begin{enumerate}
\item  $A^{-1}=\sage{A1}$ ;
\item  $A^{-1}=\sage{A2}$ ;
\item  $A^{-1}=\sage{A0}$ .
\end{enumerate}

```

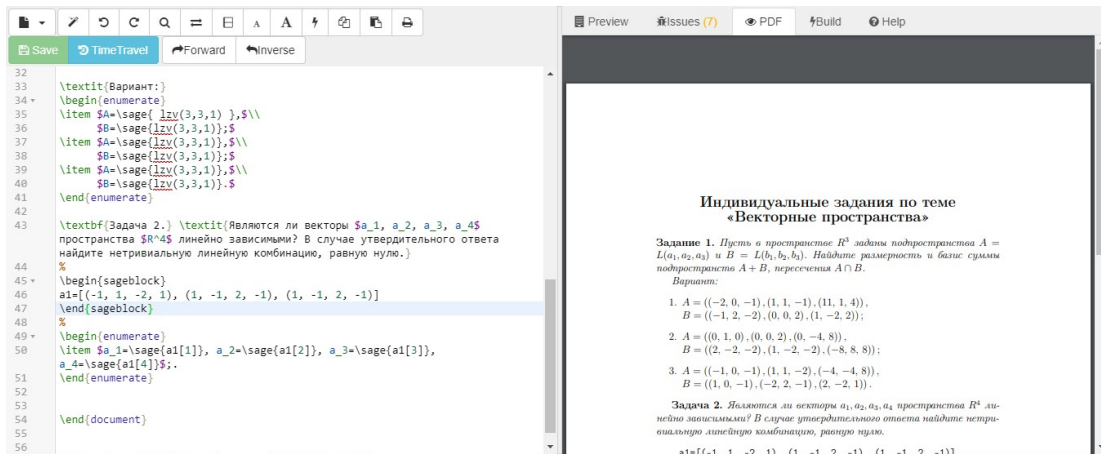


Рис. 1

В первом окружении, используя уже известную процедуру *Matr()*, создается матрица и вычисляются дополнительные матрицы для тестового задания  $A0 = A.inverse()$  – обратная матрица,  $A.echelon\_form()$  – ступенчатая матрица,  $A.transpose()$  – транспонированная матрица.

Далее непосредственно следует код на языке TeX. Для генерации ответов используются матрицы, полученные в первом окружении.

На рисунке 1 показан снимок экрана онлайн-редактора LaTeX документов. В окне предварительного просмотра представлен

окончательный вид скомпилированного документа с вычисляемым кодом.

Таким образом, используя систему облачных вычислений CoCalc, мы получаем возможность создавать банки индивидуальных заданий к различным темам курса высшей математики. Данные банки заданий могут быть разработаны в форме письменных тестовых заданий.

### Литература

1. Golubkov A.Yu., Zobnin A.I., Sokolova O.V. Computer algebra in Sage. М.: ВМСТУ, 2013.
2. Мифтахов Р.Ф. Создание интерактивных образовательных ресурсов в SageMathCloud // Материалы школы-семинара «KAZCAS-16». Казань: КФУ, 2016. С. 55–59.
3. Drake D. The SageTeX package. Atlassian inc. 2009. – URL: <http://www.euler.math.ru/CTAN/macros/latex/contrib/sagetex/sagetexpackage.pdf> (дата обращения: 10.03.2018).
4. Мифтахов Р.Ф. Структурная модель информационно-образовательной среды образовательной организации // Материалы международной научно-практической конференции «ИТОН–2015». Казань: КФУ, 2015. С. 50–52.
5. Мифтахов Р.Ф. Качественное исследование динамических систем с использованием пакета Maple 8 // Материалы международной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения». Смоленск: СмолГУ, 2007.

**R. F. Miftakhov**

Kazan Federal University

**Keywords:** *cloud computing, test tasks, computer algebra system, SageMath, CoCalc, CAS.*

**Abstract.** *The article explores ways to use SageMath and CoCalc cloud computing system to create math tasks. In particular, the techniques of creating tests on certain questions of linear algebra. The possibilities of CoCalc for integrating computations into mathematical documents are considered.*

**А.М. Нигмедзянова, А. Исмоилова**  
*Казанский федеральный университет*

УДК 004.94, 514

### ЗАМОЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ В СИСТЕМЕ GeoGebra

Ключевые слова: *математическое моделирование, системы компьютерной математики, замощение плоскости, система GeoGebra.*

*Работа посвящена визуализации процесса замощения плоскости различными многоугольниками в системе GeoGebra.*

Геометрия – это не только школа логического мышления, но и источник образов. В чем тайна многих великих художников, скульпторов, архитекторов? Есть ли точки соприкосновения у геометрии и искусства? Люди каких профессий (из мира искусства) используют законы геометрии при создании своих произведений?

Актуальность статьи заключается в том, что замощение плоскости активно изучается в физике кристаллов, геометрии, а также встречается в повседневной жизни.

Еще древние художники создавали удивительные геометрические орнаменты. Для создания своих узоров они применяли не простые, случайно придуманные контуры, а фигуры, которые были расположены в определённом порядке. А самое удивительное, что люди снова встретились с ними позже. Древние узоры – не что иное, как то, что спустя столетия назовут решётками Пенроуза и найдут в структуре квазикристаллов.

А знаменитый голландский художник Морис Эшер (1898-1972), создавший знаменитые гравюры и мозаики и никогда не понимавший математику, утверждал: «Все мои произведения — это игры. Серьезные игры». Однако в этих играх математики всего мира вот уже несколько десятилетий рассматривают абсолютно серьёзные, материальные доказательства идей, созданных с помощью исключительно математического аппарата.

В статьях одного из авторов [1-9] построено немало моделей, помогающих наглядно визуализировать ряд непростых задач, связанных с преподаванием математики. В данной статье рассмотрен процесс визуализации замощения плоскости различными многоугольниками с помощью системы GeoGebra.

### **Определение замощения плоскости**

Замощение — это покрытие всей плоскости неперекрывающимися фигурами. Другими словами, замощение — разбиение *плоскости* или пространства на *фигуры* без общих внутренних точек или покрытие всей плоскости неперекрывающимися фигурами.

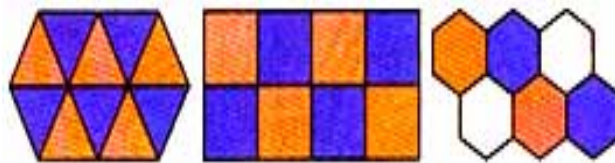
Замощение плоскости можно представить в виде набора склеенных по границам фигур. Один из простейших примеров – так называемое гексагональное замощение, когда плоскость, как соты, составлена из шестиугольников, соединенных по сторонам.



### История появления замощения

Вероятно, впервые интерес к замощению возник в связи с построением мозаик, орнаментов и других узоров. Известно много орнаментов, составленных из повторяющихся мотивов.

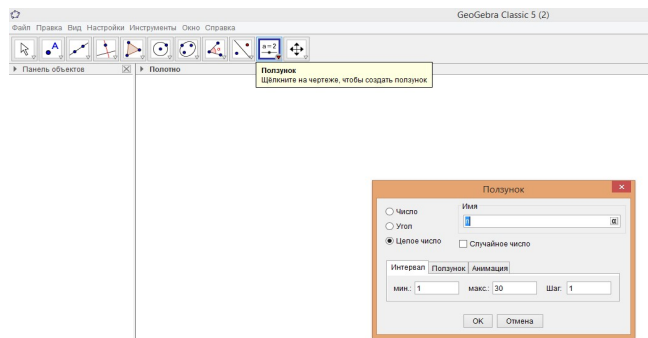
Уже пифагорейцам было известно, что имеется только три вида правильных многоугольников, которыми можно полностью замостить плоскость без пробелов и перекрытий, — треугольник, квадрат и шестиугольник.



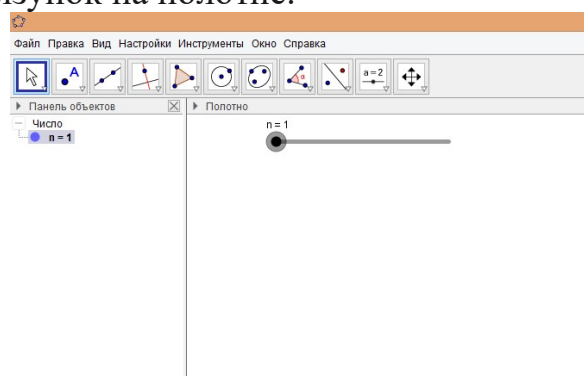
Никакими другими правильными  $n$ -угольниками покрыть плоскость без пробелов и наложений не получится. Вот как можно это объяснить. Как известно, сумма внутренних углов любого  $n$ -угольника равна  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ . Поскольку все углы правильного  $n$ -угольника одинаковые, то градусная мера каждого угла есть  $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ . Если плоскость можно замостить такими фигурами, то в каждой вершине сходится  $k$  многоугольников (для некоторого  $k$ ). Сумма углов при этой вершине должна составлять  $360^\circ$ , поэтому  $k \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = 360$ . После нескольких простых преобразований это равенство превращается в такое:  $\frac{1}{2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$ . Но, как легко проверить, последнее уравнение имеет только три пары решений, если считать, что  $n$  и  $k$  натуральные числа:  $k = 3, n = 6$ ;  $k = 4, n = 4$  или  $k = 6, n = 3$ .

Построим замощения правильными многоугольниками в GeoGebra и убедимся в действительности доказательства.

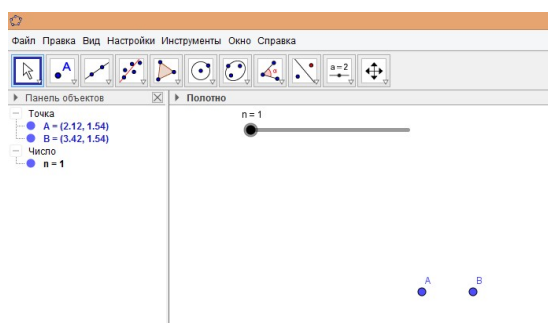
Для начала открываем программу Geogebra и создаем новый файл GeoGebra - «Файл- Создать». Далее нам нужно построить несколько  $n$ -угольников, с которыми мы будем замощать плоскость. Определимся с нашей  $n$ , будем рассматривать  $n = 30$ . Для этого добавим в верхний левый угол полотна ползунок с помощью инструмента «Ползунок».  $n$  будет целым числом, установим интервал для ползунка «мин.:1», «макс.:30».



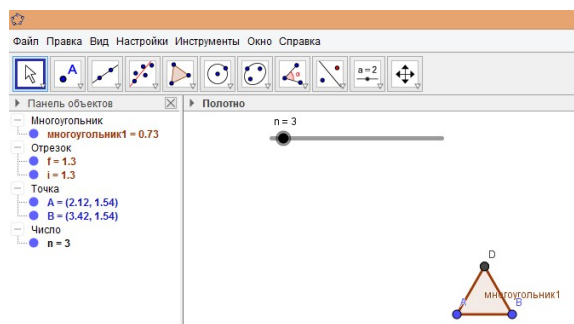
Появился ползунок на полотне.



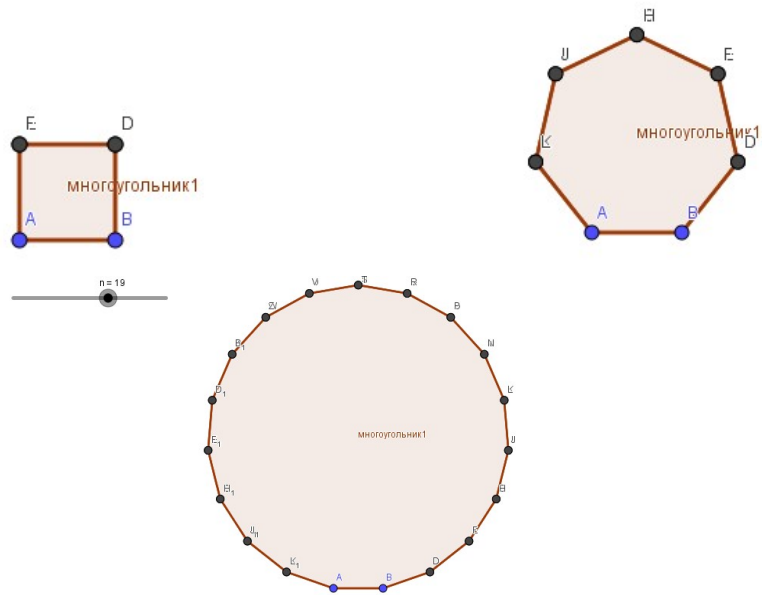
С помощью инструмента «Точка» добавим на полотно две точки А и В.



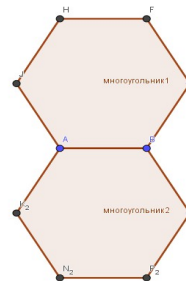
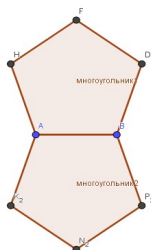
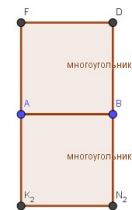
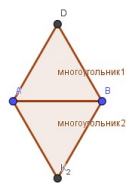
Далее в строке ввода введем «Многоугольник (А, В, n)», нажимаем Enter.

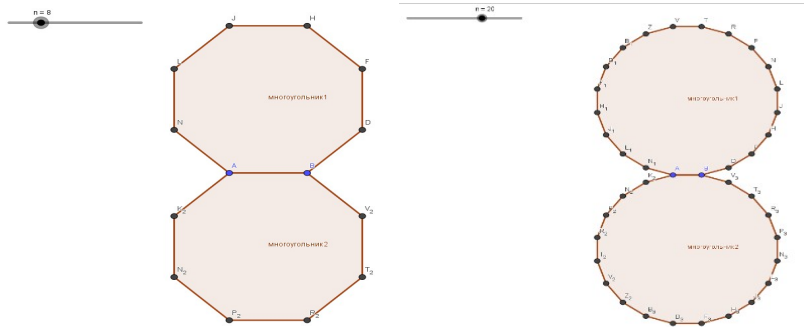


У нас получились многоугольники, зависящие от значения ползунка. Попробуем подвигать наш ползунок.

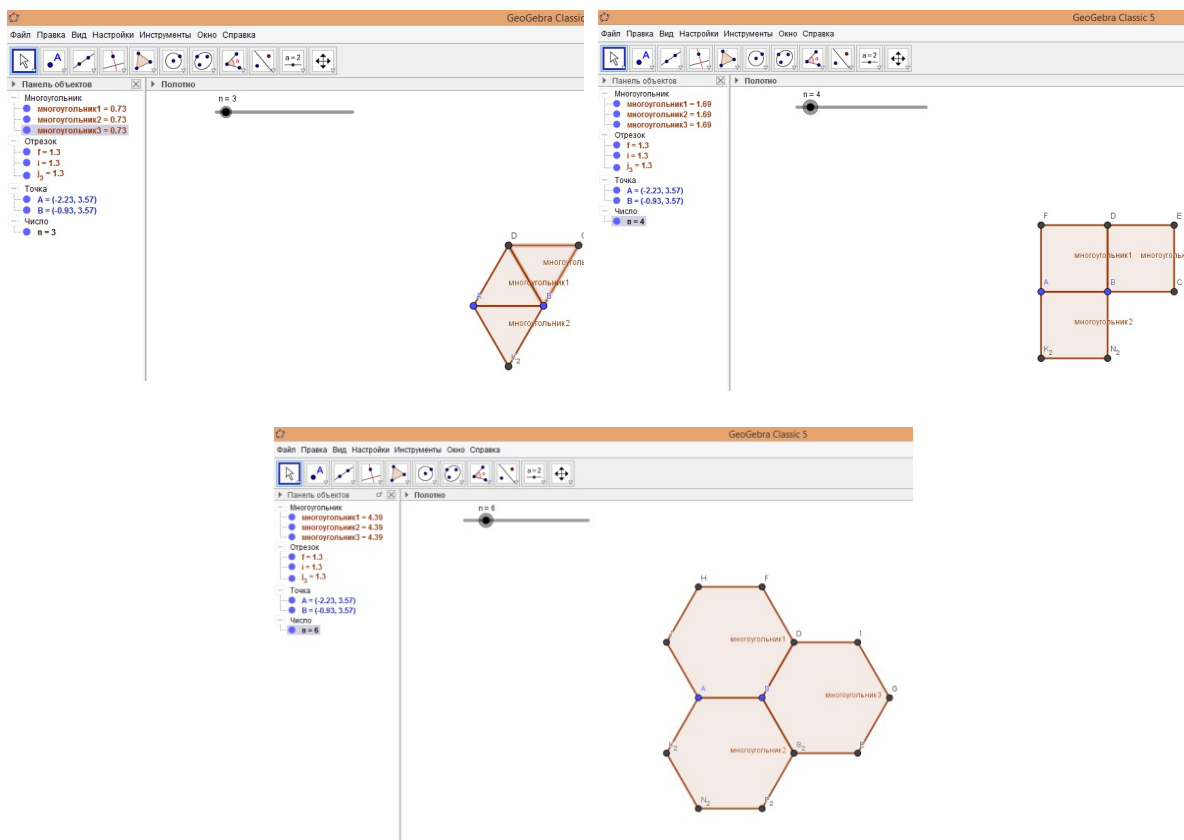


Далее добавим еще один  $n$ -угольник ( $n = 3, \dots, 30$ ), склеенный по границам АВ с предыдущими фигурами. Для этого наберем в строке ввода «Многоугольник (А, В,  $n$ )», нажимаем Enter. Передвигая ползунок, видим две склеенные фигуры.

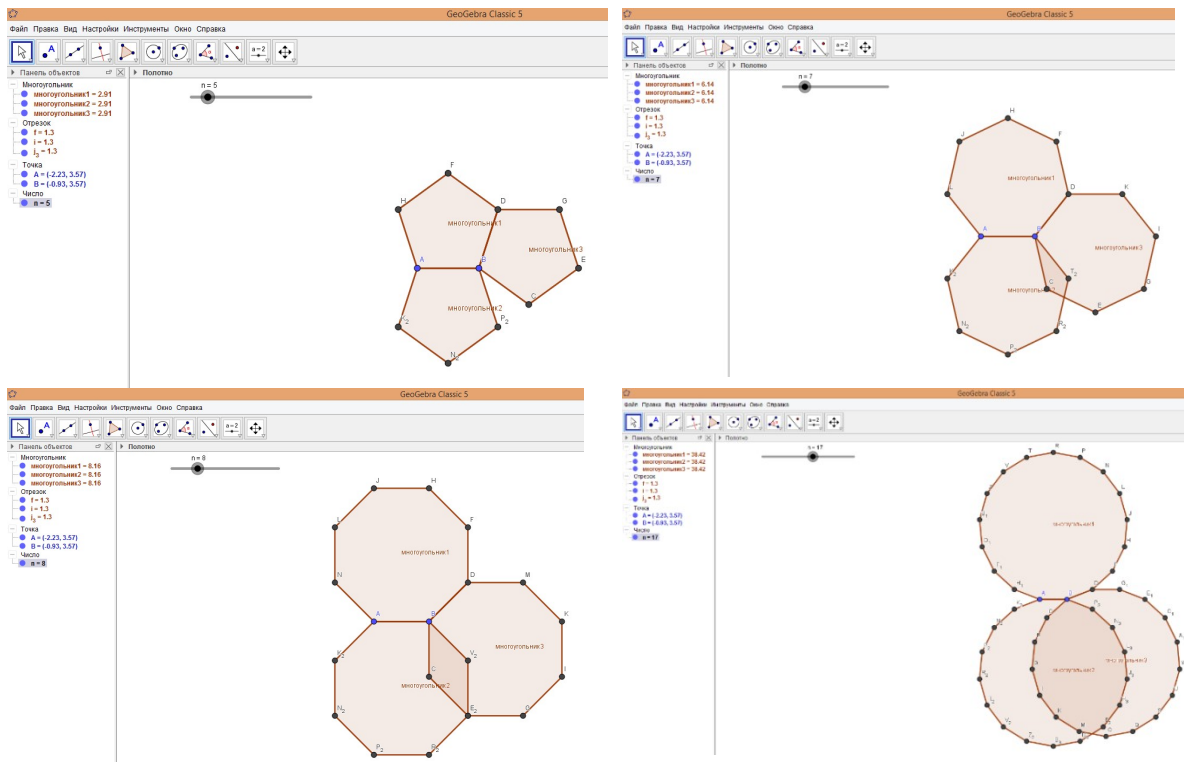




Добавим еще один  $n$ -угольник ( $n = 3, \dots, 30$ ), склеенный по границам с предыдущими фигурами. Для этого наберем в строке ввода «Многоугольник (D, B, n)», нажимаем Enter. Передвигая ползунок, видим три склеенные фигуры и убеждаемся в правоте пифагорейцев. Действительно, существуют только три вида правильных многоугольников, которыми можно полностью замостить плоскость без пробелов и перекрытий — треугольник, квадрат и шестиугольник.

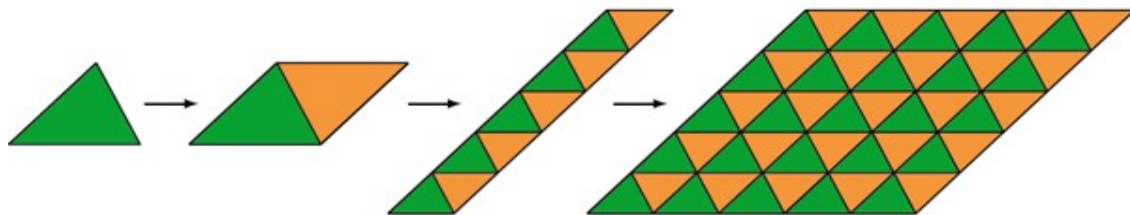


В случае 5-угольника мы видим, что остаются зазоры между фигурами, а при  $n$  больше 6 многоугольники перекрывают друг друга.

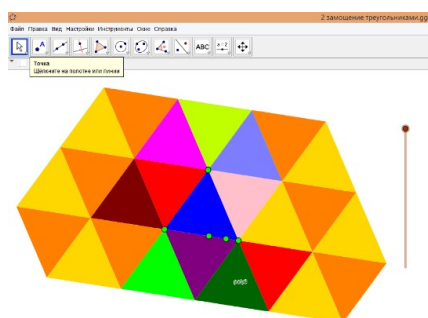


А какими другими многоугольниками можно замостить плоскость без пробелов и наложений?

Докажем, что любым треугольником можно замостить плоскость.

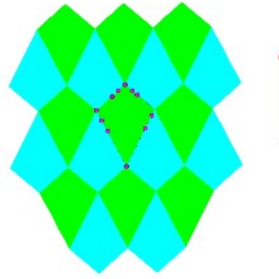


Следуя этой схеме, построили замощение в системе GeoGebra.

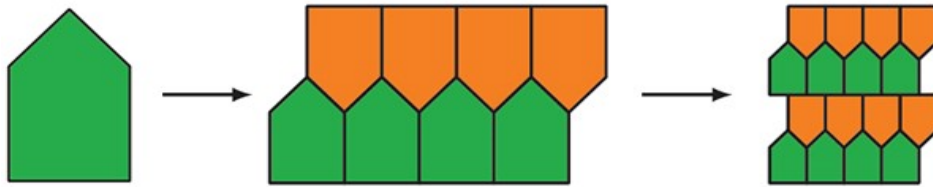


Докажем, что любым четырёхугольником (как выпуклым, так и невыпуклым) можно замостить плоскость.



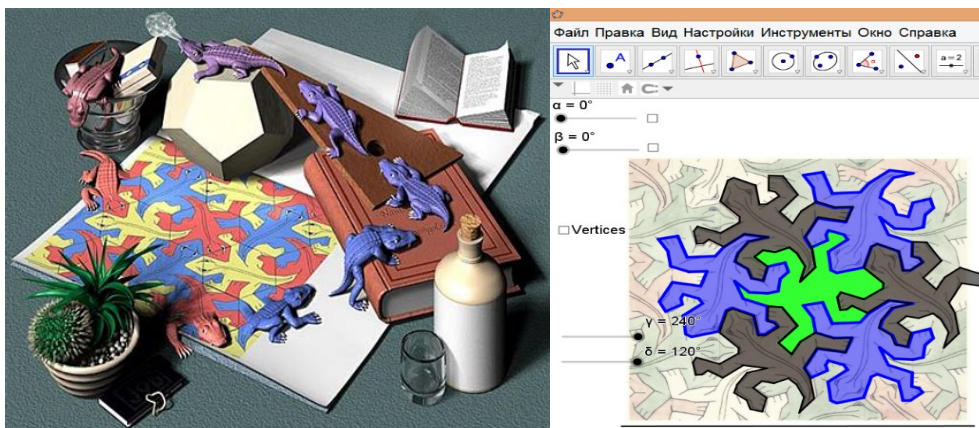


А какими пятиугольниками можно замостить плоскость?  
 Подойдет пятиугольник в форме домика:



Первую классификацию паркетных пятиугольников и шестиугольников осуществил математик Карл Рейнхард в своей диссертации «О разбиении плоскости на многоугольники», представленной в 1918 году Франкфуртскому университету. Он описал пять типов фигур пятиугольников и три типа шестиугольников, способных разбить плоскость без зазоров и наложений. Три типа шестиугольников до сих пор остаются единственной возможностью разбиения плоскости на шестиугольники. А пятиугольники, как самое интересное разбиение плоскости, продолжают наращивать свои возможности. Девять типов пятиугольников нашли учёные в период с 1968 по 1985 год. Через 30 лет, в 2015 году, американские учёные открыли 15-й тип пятиугольника. В 2016 году В.С. Долгушеву удалось открыть два новых типа пятиугольников. Таким образом, сейчас описано 17 типов пятиугольников, способных замостить плоскость без зазоров и наложений.

Сам *Морис Эшер*, как многие гении и до и после него, утверждал: «Все мои произведения — это игры. Серьезные игры». Однако в этих играх математики всего мира вот уже несколько десятилетий рассматривают абсолютно серьёзные, материальные доказательства идей, созданных с помощью исключительно математического аппарата. Периодические замощения могут быть и весьма замысловатыми, некоторые из них очень красивы. Примером может служить периодическое замощение, придуманное Морисом Эшером («Рептилии»).



## Литература

1. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация задач математической физики // Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН-2012: материалы конференции и труды семинара. 8-12 октября 2012 г. Казань, 2012. С.127–121.

2. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построений сечений многогранников // Международный научный семинар «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии» и Российская школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений». Казань, 21-26 октября 2013 г. Казань, 2013. С. 151–157.

3. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построения точки по ее координатам на проективной прямой // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. Смоленск: СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 36–38.

4. Нигмедзянова А.М.. Динамическая визуализация построения точки в пространстве по ее проективным координатам // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики». Казань: Изд-во «Фолиант», 2014. С. 236–239.

5. Нигмедзянова А.М. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16. С. 30–32.

6. Нигмедзянова А.М. Классификация поверхностей второго порядка с помощью метода инвариантов в СКМ Maple // Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН-2015». Казань: КГУ, 2015. С.160–162.

7. Нигмедзянова А.М. Приведение поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple.// Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» (СКМП-2016). Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 17-19.

8. Нигмедзянова А.М. Оснащенная визуализация приведения поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ MAPLE // Информационные технологии в образовании и науке (ИТОН-2016):

сборник V-ой международной науч.-практической конф. Казань, 5-7 ноября 2016 г. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2016. С. 59-63.

9. Нигмедзянова А.М., Ахмадиева Л.Р. Визуализация построения графиков замечательных кривых в СКМ Maple // XVIII Международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (СКМП-2017), посвященная 70-летию В.И. Мунермана, 19-21 мая 2017. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. С. 27-30.

**A.M. Nigmedzianova, A. Ismoilova**  
Kazan Federal University

**Keywords:** *mathematical modeling, systems of computer mathematics, tiling the plane, the system GeoGebra.*

**Abstract.** *The work is devoted to the visualization of the plane hardening process by different polygons in the GeoGebra system.*

**А.М. Нигмедзянова, М.С. Уткина**  
Казанский федеральный университет

УДК 004.94, 514.7

## **ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК И ЛИНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА В СКМ MAPLE**

Ключевые слова: *математическое моделирование, системы компьютерной математики, замечательные точки и линии треугольника.*

*Работа посвящена визуализации графического построения замечательных точек и линий для произвольного треугольника в СКМ Maple.*

Красивая теорема в геометрии треугольника связана, как правило, с замечательными точками, прямыми или окружностями. Но прямая или окружность замечательна, если содержит какие-нибудь замечательные точки треугольника. Значит, эти точки и являются самыми важными.

Значимость данных свойств в современном мире огромна. Знания о них практически применяются в строительстве, архитектуре, промышленном производстве и многих других областях деятельности человека. При решении многих задач по геометрии применяются именно свойства замечательных точек и линий треугольника, а также такие задачи встречаются на ЕГЭ.

Замечательные точки треугольника – точки, местоположение которых не зависит от того, в каком порядке берутся стороны треугольника.

Всем известно, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной в этот треугольник окружности. Также в одной точке пересекаются медианы и высоты треугольника, серединные перпендикуляры к его сторонам. Все точки, получающиеся в результате пересечения перечисленных наборов из трех прямых, назовем замечательными. Замечательное в них, прежде всего то, что три различные прямые на плоскости, как правило, пересекаются в трех различных точках, а не в одной.

Кроме указанных «замечательных» точек, в треугольнике имеется еще множество других «специальных» точек и линий, связанных с треугольником и название которых отражает имя математика, изучавшего эти точки: прямая и окружность Эйлера, точка Жергонна, Нагеля и др.

В век информационных технологий для наглядного представления и усвоения данной темы необходима визуализация графического построения замечательных точек и линий.

В статьях одного из авторов [5-13] построено немало моделей, помогающих наглядно визуализировать ряд непростых задач, связанных с преподаванием математики.

В данной работе авторами написана программа-процедура, входными данными которой являются произвольные координаты вершин треугольника, после чего программа вычисляет необходимые значения векторов. Далее программа прописывает уравнения сторон, медиан, высот и серединных перпендикуляров треугольника, вписанной и описанной окружности и т.д., координаты замечательных точек треугольника, а также изображает график на координатной плоскости. Следует заметить, что область вывода графика для каждого случая определяется «индивидуально», в зависимости от введенных координат вершин.

Визуализация графического построения данных точек осуществлялась в СКМ MAPLE с помощью процедуры `plot`() и таких пакетов, как `plots`, `plottools`. Также для удобства построения графиков и вывода уравнений, использовался пакет `LinearAlgebra`. Вид графиков меняется при изменении соответствующих координат треугольника. Написание программ вытекает из определения данных свойств треугольника.

При построении процедуры понадобилась функция, возвращающая ортогональный вектор заданному, причем заданный и возвращаемый вектор образуют «правую» пару векторов (то есть обход от заданного вектора к возвращаемому осуществляется против часовой стрелки).

$$> Ortho := V :: Vector(2) \rightarrow Vector([-V[2], V[1]]) .$$

Ввели координаты вершин треугольника:

$$A := Vector([2, -7]) : B := Vector([8, 2]) : C := Vector([-2, 1]) :$$

Далее представлена часть программы, показывающая, с помощью каких команд происходит построение, вывод уравнений и координат точек.

### Построение медиан треугольника и точки их пересечения

# Уравнения сторон

$$eqAB := \text{DotProduct}(\text{Transpose}(\text{JustPoint} - A), \text{Ortho}(\text{vec}AB)) = 0;$$

$$eqAC := \text{DotProduct}(\text{Transpose}(\text{JustPoint} - A), \text{Ortho}(\text{vec}AC)) = 0;$$

$$eqBC := \text{DotProduct}(\text{Transpose}(\text{JustPoint} - B), \text{Ortho}(\text{vec}BC)) = 0;$$

# Уравнения медиан

$$eqAA1 := \text{DotProduct}\left(\text{Transpose}(\text{JustPoint} - A), \text{Ortho}\left(\frac{1}{2} \cdot (B + C) - A\right)\right) = 0;$$

$$eqBB1 := \text{DotProduct}\left(\text{Transpose}(\text{JustPoint} - B), \text{Ortho}\left(\frac{1}{2} \cdot (A + C) - B\right)\right) = 0;$$

$$eqCC1 := \text{DotProduct}\left(\text{Transpose}(\text{JustPoint} - C), \text{Ortho}\left(\frac{1}{2} \cdot (A + B) - C\right)\right) = 0;$$

# Точка пересечения медиан

$$M := \frac{1}{3} \cdot (A + B + C);$$

"Координаты вершин треугольника ABC:", " A = ",  $\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ , " B = ",  $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ , " C = ",  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

"Площадь треугольника:", 42, "кватратных единиц"

"Уравнение стороны AB:",  $-9x + 60 + 6y = 0$

"Уравнение стороны AC:",  $-8x - 12 - 4y = 0$

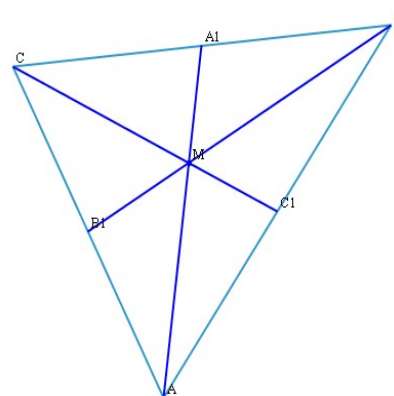
"Уравнение стороны BC:",  $x + 12 - 10y = 0$

"Уравнение медианы AA1:",  $-\frac{17}{2}x + 24 + y = 0$

"Уравнение медианы BB1:",  $5x - 24 - 8y = 0$

"Уравнение медианы CC1:",  $\frac{7}{2}x + 7y = 0$

"Точка пересечения медиан M:",  $\begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$



### Построение высот треугольника и точки их пересечения

# Уравнения высот

$$eqAA2 := \text{DotProduct}(\text{Transpose}(\text{JustPoint} - A), B - C) = 0;$$

$$eqBB2 := \text{DotProduct}(\text{Transpose}(\text{JustPoint} - B), C - A) = 0;$$

$$eqCC2 := \text{DotProduct}(\text{Transpose}(\text{JustPoint} - C), A - B) = 0;$$

# Точка пересечения высот

$$\text{solve}(\{eqAA2, eqBB2\}); H := \text{Vector}([\text{rhs}(\%[1]), \text{rhs}(\%[2])]);$$

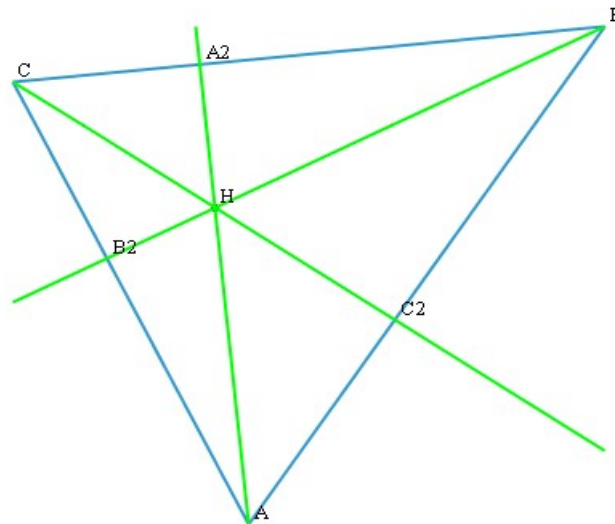


"Уравнение высоты AA2:",  $10x - 13 + y = 0$

"Уравнение высоты BB2:",  $-4x + 16 + 8y = 0$

"Уравнение высоты CC2:",  $-6x - 3 - 9y = 0$

"Точка пересечения высот H:",  $\begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ -\frac{9}{7} \end{bmatrix}$



### Построение биссектрисы треугольника и вписанной окружности

Для примера применили другие координаты вершин треугольника.

$A := \text{Vector}([10, 3])$  :  $B := \text{Vector}([-6, 15])$  :  $C := \text{Vector}([1, -9])$  :

"Уравнение биссектрисы AA3:",  $\frac{1}{5}x + \frac{11}{5} - \frac{7}{5}y = 0$

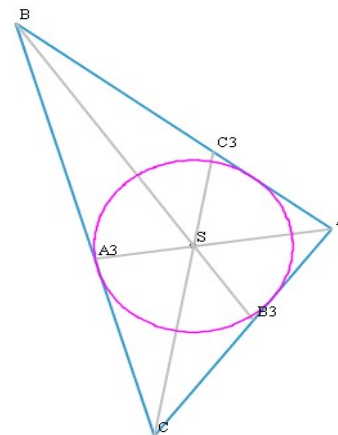
"Уравнение биссектрисы BB3:",  $\frac{39}{25}x - \frac{171}{25} + \frac{27}{25}y = 0$

"Уравнение биссектрисы CC3:",  $-\frac{44}{25}x + \frac{116}{25} + \frac{8}{25}y = 0$

"Точка пересечения биссектрис S:",  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

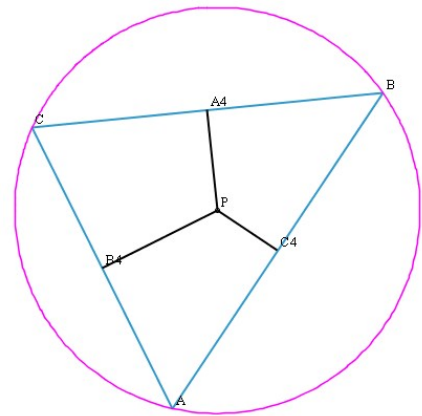
"Радиус вписанной окружности:", 5, "единиц"

"Уравнение вписанной окружности:",  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$



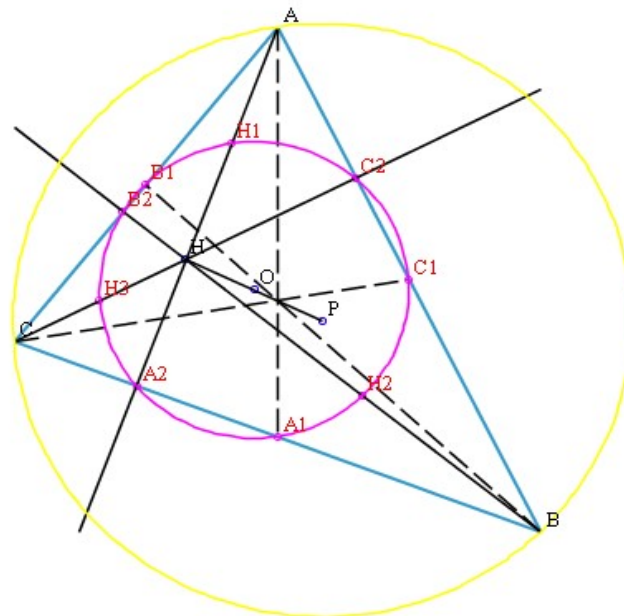
### Построение серединного перпендикуляра и описанной окружности

"Уравнение серединного перпендикуляра BB<sub>4</sub>":  $-4x + 8y + 24 = 0$   
 "Уравнение серединного перпендикуляра CC<sub>4</sub>":  $-6x + \frac{15}{2} - 9y = 0$   
 "Точка пересечения серединных перпендикуляров P":  $\begin{bmatrix} \frac{23}{7} \\ -\frac{19}{14} \end{bmatrix}$   
 "Радиус описанной окружности":  $\frac{1}{14} \sqrt{13} \sqrt{5} \sqrt{101}$ , "единиц"  
 "Уравнение описанной окружности":  $\left(x - \frac{23}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{19}{14}\right)^2 = \frac{6565}{196}$



### Построение окружности Эйлера

"Уравнение окружности Эйлера":  $\left(x - \frac{95}{26}\right)^2 + \left(y - \frac{95}{52}\right)^2 = \frac{14965}{2704}$   
 "Радиус окружности Эйлера":  $\frac{1}{52} \sqrt{5} \sqrt{41} \sqrt{73}$ , "единиц"



Таким образом, данная разработка может использоваться не только как наглядный материал для обучающихся, но и для проверки результатов, полученных аналитическим способом.

### Литература

1. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех, 1997. С. 58–67.
2. Лопаткина Е.В. Элементарная математика: учебное пособие. Владимир, 2015. С. 10–19, 38.
3. Игнатъев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Казань, 2014. С. 8–34.
4. Атанасян, Л.С. Геометрия: учебник для общеобразовательных учреждений 7-9 классы. М.: Просвещение, 2010. 384 с.

5. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация задач математической физики // Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН-2012: материалы конференции и труды семинара. 8-12 октября 2012 г., Казань, 2012. С. 127–121.

6. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построений сечений многогранников // Международный научный семинар «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии» и Российская школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений». Казань, 21-26 октября 2013 г. Казань, 2013. С. 151–157.

7. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построения точки по ее координатам на проективной прямой // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 36–38.

8. Нигмедзянова А.М. Динамическая визуализация построения точки в пространстве по ее проективным координатам // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики». Казань: Изд-во «Фолиант», 2014. С. 236–239.

9. Нигмедзянова А.М. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16. С. 30–32.

10. Нигмедзянова А.М. Классификация поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple // Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН-2015». Казань: КГУ, 2015. С. 160–162.

11. Нигмедзянова А.М. Приведение поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple. // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» (СКМП-2016). Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 17–19.

12. Нигмедзянова А.М. Оснащенная визуализация приведения поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ MAPLE // Информационные технологии в образовании и науке (ИТОН-2016): сборник V-ой международной науч.-практической конф. Казань, 5-7 ноября 2016 г., Казанский (Приволжский) федеральный университет. Казань, 2016. С. 59-63.

13. Нигмедзянова А.М., Ахмадиева Л.Р. Визуализация построения графиков замечательных кривых в СКМ Maple // XVIII Международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (СКМП-2017), посвященная 70-летию В.И. Мунермана, 19-21 мая 2017. Смоленск: СмолГУ, 2017. С. 27-30.

**A.M. Nigmedzianova, M.S. Utkina**  
*Kazan Federal University*

**Keywords:** *mathematical modeling, systems of computer mathematics, remarkable points and lines of a triangle.*



**Abstract.** *The work is dedicated to the visualization of graphical representation of the remarkable points and lines of an arbitrary triangle in the SCM Maple.*

**А. В. Подорога**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

УДК 517.955+519.63

## **ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ С НЕВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОТОКА**

Ключевые слова: *квазилинейный закон сохранения, невыпуклая функция потока, численные методы, моделирование разрывных решений.*

*Изучается задача Коши для квазилинейного закона сохранения. Выделен специальный класс кусочно линейных функций потока и кусочно постоянных начальных условий. Тогда обобщенные решения также являются кусочно постоянными с конечным набором сильных разрывов. Эволюцию таких решений можно представить, наблюдая за динамикой движения разрывов. Предложен конструктивный подход, реализующий данную идею. Подробно объяснены поправки, необходимые в случае невыпуклой функции потока. Рассмотрены примеры и приведены иллюстрации.*

Во многих областях математической физики возникает квазилинейное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) называют также *квазилинейным законом сохранения*, а выбранную нелинейную функцию  $f(u)$  – *функцией потока*. Будем рассматривать задачу Коши с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

При теоретическом исследовании задачи (1), (2) функция потока  $f(u)$  часто предполагается выпуклой вверх или вниз (см. [1–4]). Сделаем сейчас акцент на общем случае без каких-либо дополнительных требований выпуклости (см. [5]).

Несмотря на внешнюю простоту, квазилинейное уравнение (1) весьма нетривиально, и корректное построение классических решений не всегда возможно. Поэтому приходится рассматривать *обобщенные решения с сильными разрывами (ударными волнами)*, что существенно

затрудняет моделирование решений задачи Коши (1), (2) и требует разработки специальных численных методов (см. [6]).

Ниже будет представлен алгоритм, решающий поставленную задачу Коши (1), (2) на основе оригинального *метода движения разрывов* (см. [6], [7]). Предложенный подход прост в применении и использует лишь базовые аналитические принципы общей теории. Напомним необходимые факты.

Обобщенным решением уравнения (1) называют функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(u(a, t)) - f(u(b, t)) \quad (3)$$

при почти всех  $a, b \in \mathbf{R}$  и почти всех  $t \geq 0$ . Для любого классического решения  $u(x, t)$  тождество (3) заведомо выполняется. Но, помимо классических, возможны обобщенные решения с сильными разрывами.

Допустим, что обобщенное решение имеет сильный разрыв  $x = \xi(t)$  со значениями

$$u^+ = u^+(t) = u(\xi(t) + 0, t), \quad u^- = u^-(t) = u(\xi(t) - 0, t) \quad (4)$$

справа и слева от него. Тогда из интегрального тождества (3) выводится известное *условие Гюгонио*

$$\xi'(t) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}, \quad (5)$$

характеризующее скорость движения разрыва, пока данный разрыв существует (см. [3]).

Само по себе условие Гюгонио еще не гарантирует единственность обобщенного решения поставленной задачи Коши (1), (2) (примеры неединственности см. в [1–4]). Поэтому вводят дополнительное *условие Олейник*, которое допускает лишь те решения, у которых все разрывы «правильные» (см. [5]). Разрыв  $x = \xi(t)$  считается *правильным*, если для значений (4) выполняется неравенство Олейник

$$(f(u) - l(u))(u^+ - u^-) \geq 0 \quad (6)$$

при всех промежуточных значениях  $u$  между  $u^+$  и  $u^-$ . Линейная функция

$$l(u) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} (u - u^-) + f(u^-) \quad (7)$$

определяет секущую, соединяющую точки  $(u^+, f(u^+))$  и  $(u^-, f(u^-))$  на графике функции потока  $f(u)$ .

Итак, требуется найти обобщенное решение задачи Коши (1), (2), для разрывов которого выполнены условия Гюгонио и Олейник. Выделим специальный класс функций потока  $f(u)$  и специальный класс начальных условий  $\varphi(x)$  так, чтобы нужное нам обобщенное решение удавалось построить конструктивно.

**Основное предположение.** Считаем, что функция потока  $f(u)$  является кусочно линейной, заданной на промежутке  $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ . Считаем также, что начальная функция  $\varphi(x)$  является кусочно постоянной по  $x \in \mathbf{R}$ , принимающей значения из промежутка  $[u_{\min}, u_{\max}]$ . Тогда нужное нам обобщенное решение  $u(x, t)$  при любом фиксированном  $t \geq 0$  также будет кусочно постоянным по  $x \in \mathbf{R}$  со значениями из промежутка  $[u_{\min}, u_{\max}]$ .

Приведем схему построения такого решения. Допустим, что в момент времени  $t \geq 0$  решение  $u(x, t)$  имеет конечный набор разрывов

$$x_1 = \xi_1(t), \quad x_2 = \xi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \xi_n(t).$$

Поскольку функция  $u(x, t)$  предполагается кусочно постоянной, то значения  $u_i^+$  и  $u_i^-$  справа и слева от каждого разрыва  $x_i = \xi_i(t)$  являются константами до тех пор, пока такой разрыв существует.

Как и ранее, считаем разрыв  $x = \xi(t)$  *правильным*, если всюду вдоль него выполняется неравенство Олейник (6). Эволюция правильных разрывов происходит простым образом. Каждый такой разрыв  $x_i = \xi_i(t)$  движется согласно условию Гюгонио (5) со скоростью

$$\xi_i'(t) = \frac{f(u_i^+) - f(u_i^-)}{u_i^+ - u_i^-} \equiv \text{const}, \quad (8)$$

постоянной из-за постоянства значений  $u_i^+$  и  $u_i^-$ .

При пересечении двух или более разрывов они объединяются в один новый результирующий разрыв  $x = \xi(t)$  так, что значение  $u^+$  справа от разрыва  $x = \xi(t)$  соответствует значению справа для самого правого из пересекающихся разрывов, а значение  $u^-$  слева от разрыва  $x = \xi(t)$  соответствует значению слева для самого левого из пересекающихся разрывов. Если образовавшийся новый разрыв правильный, то он также начинает двигаться по условию Гюгонио.

Допустим, что в какой-то момент времени  $t_0 \geq 0$  возник неправильный разрыв  $x = \xi(t)$  со значениями  $u^+$  и  $u^-$ , не удовлетворяющими неравенству Олейник (6). Тогда, используя кусочно линейную природу закона сохранения  $f(u)$ , можно заменить неправильный разрыв  $x = \xi(t)$  новым набором правильных разрывов, выходящих из той же точки  $(\xi(t_0), t_0)$  и образующих так называемый *веер разрывов* (см. рис. 1). В случае выпуклого закона сохранения  $f(u)$  (неважно, выпуклого вверх или вниз) построение веера разрывов происходит сравнительно просто (подробнее см. [6]). Но если выпуклость закона сохранения не предполагается, то построение веера разрывов усложняется. Изложим необходимые поправки.

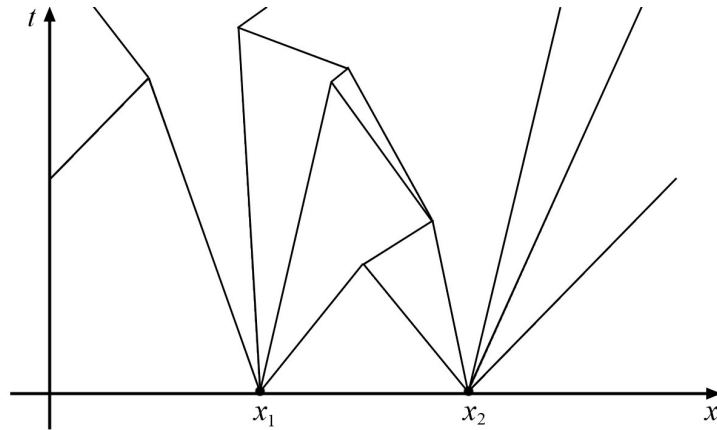


Рис. 1. Карта разрывов на плоскости  $(x, t)$ . На графике в момент времени  $t_0 = 0$  в точках  $x_1$  и  $x_2$  образовались два веера разрывов. Зоны между разрывами отвечают постоянным значениям решения

Рассмотрим некоторую фиксированную функцию потока  $f(u)$  и конкретную пару значений  $u^+, u^-$ . В зависимости от соотношения между  $u^+$  и  $u^-$  для неправильного разрыва  $x = \xi(t)$  имеем два случая (см. рис. 2 и рис. 3).

**Случай 1.** Предположим, что  $u^- < u^+$ . Построим вспомогательную функцию  $f_\alpha(u)$ , определенную на отрезке  $[u^-, u^+]$ , которая обладает следующими свойствами:

- 1)  $f_\alpha(u) \leq f(u)$  для любого  $u \in [u^-, u^+]$ ;
- 2)  $f_\alpha(u)$  выпуклая вниз на  $[u^-, u^+]$ ;
- 3)  $f_\alpha(u)$  является мажорантой среди всех таких функций.

Для краткости будем называть функцию  $f_\alpha(u)$  *выпуклой вниз огибающей* для  $f(u)$  на отрезке  $[u^-, u^+]$  (см. рис. 2).

Как и  $f(u)$ , функция  $f_\alpha(u)$  также будет кусочно линейной. Множество точек излома функции  $f_\alpha(u)$  является подмножеством множества точек излома самой  $f(u)$ . Пусть  $N \geq 2$  – количество линейных участков функции  $f_\alpha(u)$  с границами

$$u^- \equiv \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{N-1} < \alpha_N \equiv u^+. \quad (9)$$

Выпуклую вниз огибающую можно записать в виде

$$f_\alpha(u) = \frac{f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} (u - \alpha_{j-1}) + f(\alpha_{j-1}) \quad (10)$$

на каждом из участков  $u \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$  для  $j = 1, \dots, N$ . Используя введенную функцию  $f_\alpha(u)$ , построим веер разрывов, исходящий из точки  $(\xi(t_0), t_0)$  в момент появления неправильного разрыва.

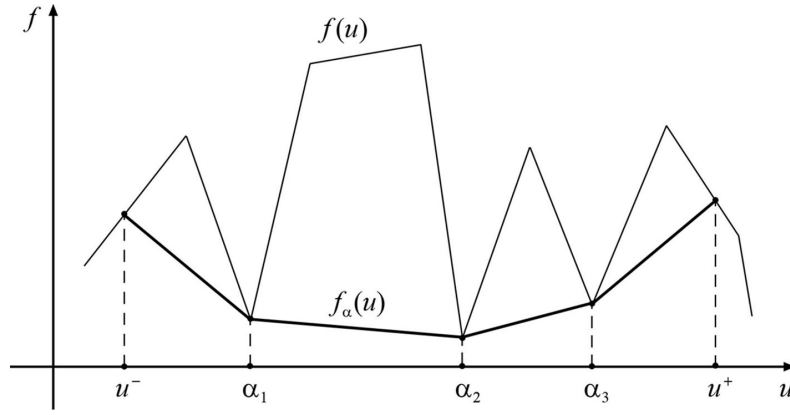


Рис. 2. Пример с соотношением  $u^- < u^+$ . Жирной ломаной обозначен график выпуклой вниз огибающей  $f_\alpha(u)$  для кусочно линейной функции потока  $f(u)$  при  $u \in [u^-, u^+]$

При  $t = t_0$  разобьем неправильный разрыв  $x = \xi(t)$  на  $N$  новых разрывов  $x = \xi_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , с соответствующими значениями

$$u_j^- = \alpha_{j-1} < u_j^+ = \alpha_j, \quad (11)$$

взятыми из набора (9). Для каждого такого нового разрыва  $x = \xi_j(t)$  условие Олейник уже выполняется. Действительно, подставив в формулу (7) значения  $u^+ = \alpha_j$  и  $u^- = \alpha_{j-1}$ , получим, согласно (10), что  $l(u) \equiv f_\alpha(u)$  на  $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ . Отсюда, по свойству 1), имеем  $l(u) \leq f(u)$  на  $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ , что и означает выполнение неравенства (6) для разрыва  $\xi_j(t)$  со значениями (11).

Совокупность новых правильных разрывов  $x = \xi_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, N$  образует веер, выходящий из точки  $(\xi(t_0), t_0)$ . Скорости движения разрывов монотонно возрастают

$$\xi_1'(t) < \xi_2'(t) < \dots < \xi_{N-1}'(t) < \xi_N'(t). \quad (12)$$

Соотношение (12) следует из того, что, по условию Гюгоньо,

$$\xi_j'(t) = \frac{f(u_j^+) - f(u_j^-)}{u_j^+ - u_j^-} = \frac{f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, N,$$

с точками (9), попадающими в изломы выпуклой вниз кусочно линейной функции  $f_\alpha(u)$ .

На графике  $u(x, t)$  веер разрывов дает «лестницу», ступени которой отдаляются друг от друга по мере возрастания времени  $t$  (см. рис. 4).

Для нашей конструкции весьма важна кусочно линейная природа функции  $f(u)$ . Благодаря данному требованию выпуклая вниз огибающая  $f_\alpha(u)$  также оказывается кусочно линейной с конечным числом звеньев, что позволяет строить веер из конечного числа лучей.

**Случай 2.** Теперь пусть  $u^+ < u^-$ . Тогда в качестве вспомогательной функции берется *выпуклая вверх огибающая*  $f_\beta(u)$  функции  $f(u)$  на отрезке  $[u^+, u^-]$  (см. рис. 3). Она обладает следующими свойствами:

- 1)  $f_\beta(u) \geq f(u)$  для любого  $u \in [u^+, u^-]$ ;
- 2)  $f_\beta(u)$  выпуклая вверх на  $[u^+, u^-]$ ;
- 3)  $f_\beta(u)$  является минорантой среди всех таких функций.

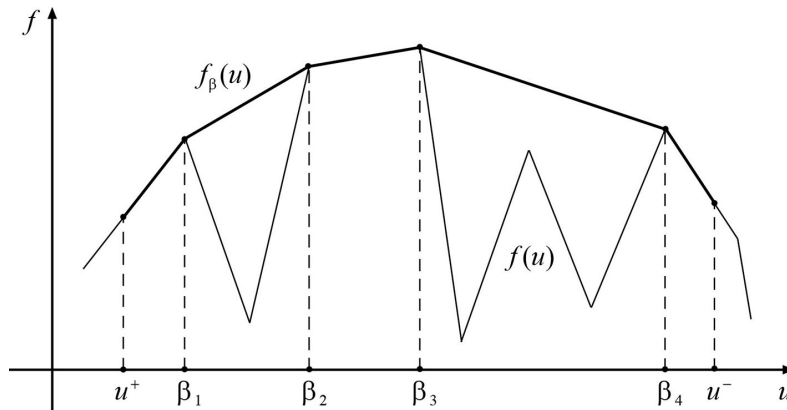


Рис. 3. Пример с соотношением  $u^+ < u^-$ . Жирной ломаной обозначен график выпуклой вверх огибающей  $f_\beta(u)$  для кусочно линейной функции потока  $f(u)$  при  $u \in [u^+, u^-]$

Функция  $f_\beta(u)$  является кусочно линейной на  $[u^+, u^-]$  с границами линейных участков

$$u^+ \equiv \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{N-1} < \beta_N \equiv u^- \quad (13)$$

Аналогично представлению (10) выпуклую вниз огибающую можно записать в виде

$$f_\beta(u) = \frac{f(\beta_j) - f(\beta_{j-1})}{\beta_j - \beta_{j-1}} (u - \beta_{j-1}) + f(\beta_{j-1})$$

на каждом отрезке  $u \in [\beta_{j-1}, \beta_j]$  для  $j = 1, \dots, N$  (см. рис. 3, где число  $N$  линейных участков равно пяти).

Построение веера правильных разрывов происходит аналогично предыдущему случаю с соответствующими изменениями. Последовательность (13) дает набор постоянных значений для  $u(x, t)$  при движении по разрывам веера «справа-налево»; при этом  $u^+ \equiv \beta_0$  – самое правое значение, а  $u^- \equiv \beta_N$  – самое левое. Кусочно постоянные участки решения также образуют «лестницу» (см. рис. 4).

Итак, в обоих случаях после замены в точке  $t_0$  неправильного разрыва  $x = \xi(t)$  на конечное число правильных разрывов образуется веер разрывов на плоскости  $(x, t)$ , исходящий из точки  $(\xi(t_0), t_0)$ . Для новых разрывов (из веера) неравенство Олейник (6) будет выполнено.

Если по ходу построения решения  $u(x, t)$  снова возникнет неправильный разрыв, его опять заменяют на конечное число правильных разрывов, каждый из которых начинает двигаться по условию Гюгонио.

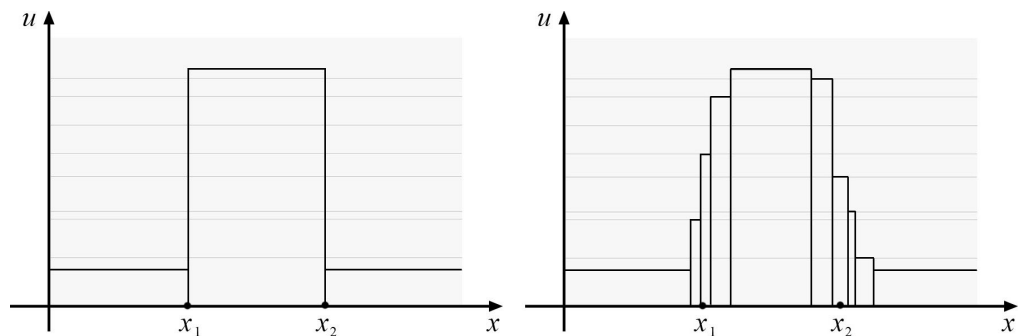


Рис 4. Эволюция решения  $u(x, t)$  для функции потока  $f(u)$ , соответствующей рис. 2 и 3. Слева представлен график начальной функции  $\varphi(x)$ , справа – решение при некотором  $t > 0$ . Видно появление новых разрывов, расходящихся «лестницей».

Полная карта разрывов на плоскости  $(x, t)$  представлена на рис. 1

Коротко, алгоритм построение решения задачи Коши (1), (2) при сделанном **основном предположении** можно описать так.

**Шаг 0.** По заданной начальной кусочно постоянной функции  $\varphi(x)$  определяется набор первичных разрывов.

**Шаг 1.** Для всех разрывов в наборе проверяется неравенство Олейник (6). Каждый неправильный разрыв заменяется конечным числом правильных «промежуточных» разрывов по описанным выше правилам.

**Шаг 2.** Разрывы двигаются с постоянными скоростями по условию Гюгонио (8) до тех пор, пока какие-то соседние разрывы не пересекутся.

**Шаг 3.** При пересечении разрывов формируется новый разрыв. Набор разрывов обновляется. Возвращаемся к шагу 1.

Визуализировать построенное кусочно постоянное решение  $u(x, t)$  можно при любом значении  $t \geq 0$ .

При произвольной кусочно гладкой функции потока  $f(u)$  и кусочно непрерывной начальной функции  $\varphi(x)$  удобно использовать соображения аппроксимации, заменив кусочно гладкую функцию потока на близкую кусочно линейную, а кусочно непрерывное начальное условие на близкое кусочно постоянное. Качество такого приближения сохранится для  $u(x, t)$  весьма длительное время  $t \geq 0$ .

В докладе будут представлены результаты численных расчетов, выполненных описанным методом.

Выражаю искреннюю признательность В. Б. Шерстюкову за большую помощь при работе над текстом статьи.

## Литература

1. Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка: учебное пособие. М.: Мех-мат МГУ, 1999. 96 с.
2. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 576 с.
3. Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. М.-Ижевск: НИЦ «РХД», 2010. 296 с.
4. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1957. Т. 12, № 3. С. 3–73.
5. Олейник О. А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи математических наук. 1959. Т. 14, № 2(86). С. 165–170.
6. Подорога А. В., Тихонов И. В. Компьютерное моделирование решений квазилинейного уравнения дорожного движения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. С. 216–225.
7. Подорога А. В., Тихонов И. В. Метод движения разрывов для специальных квазилинейных уравнений // Современные проблемы теории функций и их приложения. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 242–245.

**A. V. Podoroga**

Lomonosov Moscow State University

### FEATURES OF SOLUTION SIMULATION FOR QUASILINEAR CONSERVATION LAW WITH NON-CONVEX FLOW FUNCTION

**Keywords:** *quasilinear conservation law, non-convex flow function, numerical methods, simulation of discontinuous solutions.*

**Abstract.** *The Cauchy problem for the quasilinear conservation law is studied. We focus on a special class of piecewise linear flow functions and piecewise constant initial conditions. Then the weak solution is also a piecewise constant function with a finite set of strong discontinuities. The evolution of such solutions can be traced by observing the motion dynamics of discontinuities. The proposed constructive algorithm implements this idea using the method of shocks movement. We consider special case of a non-convex flow function in detail. Some examples and illustrations are presented.*

**А.А. Парамонов**

Московский технологический университет

УДК 621.391

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ В.И. ТИХОНОВА

Ключевые слова: *фазовая автоподстройка частоты, винеровская фаза, апостериорная плотность вероятности, распределение В.И. Тихонова.*



*В статье рассмотрена система фазовой автоподстройки частоты в предположении, что апостериорная плотность вероятности фазы есть распределение В.И. Тихонова. Компьютерное моделирование позволило установить, что оценка фазы может оказаться смещенной на  $\pi$ . Предложена модификация алгоритма, исключающая появление смещенной оценки.*

Практически во всех областях радиотехники – в радиолокации, связи, навигации, радиотелеметрии и т.д. – стоит задача извлечения информации из радиосигнала, представляющего собой промодулированный тем или иным образом высокочастотный переносчик этого сообщения. В качестве такого переносчика выступает гармоническое колебание, что объясняется удобством его генерирования, излучения в пространство и приема. К сожалению, абсолютно достоверное извлечение информации из радиосигнала принципиально невозможно, так как этому препятствуют помехи, всегда присутствующие в смеси с сигналом. Вид и природа этих помех могут быть самыми разнообразными, но шумовая помеха всегда сопутствует сигналу, так как такая помеха (тепловой шум радиоэлементов) генерируется в самом приемнике. Адекватной моделью шумовой помехи принято считать дельта-коррелированный гауссовский процесс с нулевым средним, т.е. белый гауссовский шум (БГШ). Этой же моделью хорошо описывается и ряд других помех иной природы – широкополосные излучения от других радиосредств, галактические шумы и т.д.

Итак, обычная постановка задачи извлечения информации из принимаемой смеси сигнала  $s(t)$  и БГШ  $n(t)$  с двухсторонней спектральной плотностью мощности  $N_0/2$

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

заключается в такой обработке принимаемого колебания  $r(t)$ , при которой влияние БГШ окажется минимальным.

Не останавливаясь детально на причинах данного факта, укажем, что минимизация влияния БГШ на качество приема сигнала реализуется при когерентном приеме, для которого необходимо знание фазы приходящего сигнала.

Фаза приходящего сигнала не является константой: она флуктуирует из-за несовершенства аппаратуры формирования и приема сигнала, из-за влияния среды распространения, из-за изменения расстояния между приемником и передатчиком и по ряду иных причин. Поэтому в процессе приема приходится осуществлять слежение за этой фазой, что реализуется системами фазовой автоподстройки частоты.

Пусть принимаемый сигнал имеет вид

$$s(t, \varphi) = A \cos(\omega_0 t + \varphi(t)),$$

где  $\varphi(t)$  – флуктуирующая начальная фаза, поведение которой хорошо описывается винеровским процессом:

$$\frac{d\varphi}{dt} = n_\varphi(t).$$

Здесь  $n_\varphi(t)$  – БГШ с двухсторонней спектральной плотностью мощности  $N_\varphi / 2$ .

Как известно, априорная плотность вероятности некоторого векторного марковского процесса  $\Psi(t)$  удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова [1]:

$$\dot{w}(t, \Psi) = \mathbf{L}\{w(t, \Psi)\},$$

где точкой сверху обозначена производная по времени, а через  $\mathbf{L}\{\cdot\}$  обозначен оператор

$$\mathbf{L}\{\cdot\} = -\sum_{s=1}^l \frac{\partial}{\partial \Psi_s} [a_s(t, \Psi)] + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^l \frac{\partial^2}{\partial \Psi_s \partial \Psi_r} [\beta_{rs}(t, \Psi)].$$

Здесь  $a_s(t, \Psi)$  – элемент вектора коэффициента сноса,  $\beta_{rs}(t, \Psi)$  – элемент матрицы коэффициентов диффузии,  $l$  – размерность вектора  $\Psi(t)$ .

В соответствии с теорией оптимальной нелинейной фильтрации марковских процессов [1] апостериорная плотность вероятности вектора  $\Psi(t)$  подчиняется уравнению

$$\dot{w}(t, \Psi) = \mathbf{L}\{w_{ps}(t, \Psi)\} + [F(t, \Psi) - F(t)]w_{ps}(t, \Psi),$$

где

$$F(t, \Psi) = -\frac{1}{N_0} [r(t) - s(t, \Psi)]^2,$$

$$F(t) = \int_{\Psi} F(t, \Psi) w_{ps}(t, \Psi) d\Psi.$$

Применительно к решаемой задаче  $\Psi(t) = \varphi(t)$ ,  $l = 1$ ,  $a_1(t, \varphi) = 0$ ,  $\beta_{11}(t, \varphi) = N_\varphi / 2$ . В результате уравнение для апостериорной плотности вероятности фазы приобретает следующий вид:

$$\dot{w}_{ps}(t, \varphi) = \frac{N_\varphi}{4} \frac{\partial^2 w_{ps}(t, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{N_0} r(t) \left[ s(t, \varphi) - \int_{-\pi}^{\pi} s(t, \varphi) w_{ps}(t, \varphi) d\varphi \right] w_{ps}(t, \varphi).$$

К сожалению, это уравнение, являясь формально правильным, непосредственно не может быть использовано при построении радиоаппаратуры. Во-первых, решить его численно в реальном времени затруднительно, а во-вторых, как правило, сама апостериорная плотность вероятности и не нужна: необходима оценка текущего значения фазы.

Эта проблема обходится, если на основании каких-либо разумных соображений принять конкретный вид апостериорной плотности вероятности, тогда задача сведется к оценке в текущем времени параметров этого распределения. Общепринятой является гауссовская аппроксимация апостериорного распределения. Действительно, в установившемся режиме слежения причины появления ошибок оценки многочисленны и независимы, т.е. происходит нормализация ошибок, которые сами по себе невелики. В качестве оценки фазы берется ее текущее математическое ожидание. Гауссовская аппроксимация хорошо работает в установившемся режиме слежения, когда дисперсия ошибки невелика. На начальном этапе слежения это не так: слежение начинается в условиях полной неопределенности о фазе, т.е. апостериорная плотность вероятности должна изменяться от равномерной до той, которая имеет место в установившемся режиме.

Более удачной аппроксимацией апостериорного распределения фазы оказывается распределение В.И. Тихонова:

$$w(t, \varphi) = \frac{\exp\{D(t) \cos[\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)]\}}{2\pi I_0[D(t)]}, |\varphi(t) - \hat{\varphi}(t) \leq \pi|$$

Здесь и далее  $I_\nu(x)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода  $\nu$ -го порядка,  $\hat{\varphi}(t)$  – оценка фазы, а  $D(t)$  – параметр распределения.

Интересно, что при  $D(t) = 0$  распределение В.И. Тихонова вырождается в равномерное, а при увеличении этого параметра оно начинает «стягиваться» в симметричную одновершинную кривую.

В.И. Тихонов рассмотрел работу системы фильтрации фазы, применив указанную аппроксимацию апостериорной плотности вероятности фазы. В результате алгоритм фильтрации приобретает вид [1]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\varphi}} &= \frac{2A}{N_0 D(t)} r(t) \sin[\omega_0 t + \hat{\varphi}(t)], \\ \dot{D}(t) &= \frac{2A}{N_0} t(t) \cos[\omega_0 t + \hat{\varphi}(t)] - \frac{N_\varphi}{4} f_1[D(t)], \end{aligned}$$

где

$$f_1[D] = \frac{D I_0(D)}{I_0(D) - I_1(D)}.$$

Компьютерное моделирование алгоритма показало неожиданный результат: в процессе слежения за фазой оценка равновероятно может оказаться несмещенной или смещенной на  $\pi$ . Последнее имеет место, если в процессе слежения параметр  $D$  приобретает отрицательное значение. Такая возможность не была учтена автором алгоритма, хотя нет никаких причин считать этот параметр неотрицательным. Плотность

вероятности В.И. Тихонова при положительных и отрицательных значениях  $D$  приведена на рисунке 1. Как видим, действительно, при отрицательных  $D$  оценка фазы смещается на  $\pi$ . При этом алгоритм оценки фазы оказался неоптимальным (при его выводе считалось, что параметр  $D$  неотрицателен).

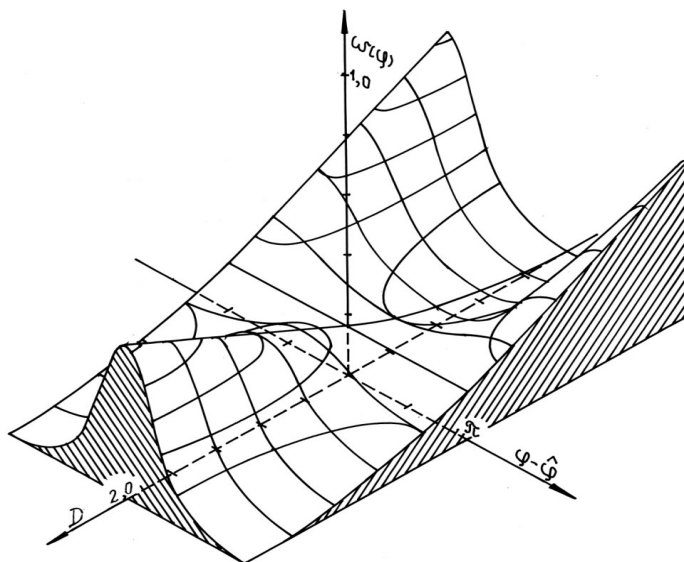


Рис. 1

Не останавливаясь подробно на выводе алгоритма фильтрации фазы, в котором снято ограничение на знак параметра  $D$  (вывод аналогичен выводу, приведенному в [1]), приведем полученный алгоритм:

$$\dot{\hat{\varphi}}(t) = -\frac{2A}{N_0 D(t)} r(t) \sin[\omega_0 t + \hat{\varphi}(t)],$$

$$\dot{D}(t) = \frac{2A}{N_0} r(t) \cos[\omega_0 t + \hat{\varphi}(t)] - \frac{N_\varphi}{4} f_2[D(t)],$$

где

$$f_2[D] = \frac{D I_0(D)}{I_0(D) - |I_1(D)|}.$$

Как видим, изменение алгоритма коснулось только входящей в него нелинейной функции  $f_2[D]$ .

Результаты моделирования этого алгоритма на фиксированном интервале времени  $T$  при дисперсии набега фазы на этом интервале  $\frac{N_\varphi T}{2} = 0,01$  и для двух отношений сигнал/шум  $Q = \frac{A^2 T}{N_0}$  приведены на рисунке 2. По оси абсцисс отложено нормированное время  $\nu = t/T$ , а по оси ординат – параметр  $D$  и ошибка оценки фазы  $\delta = \varphi(t) - \hat{\varphi}(t)$ .

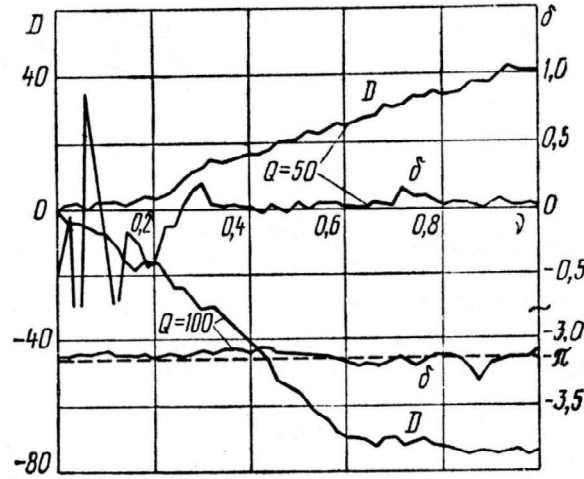


Рис. 2

На рисунке 2 хорошо видно, что возможно появление как несмещенной, так и смещенной оценки. Во многих радиотехнических приложениях смещение оценки на  $\pi$  допустимо, но не всегда. Если необходима строго несмещенная оценка, то в распределении В.И. Тихонова необходимо использовать в качестве параметра  $D$  неотрицательную величину, например,  $D = d^2$ . В этом случае алгоритм оценки фазы приобретет такой вид:

$$\dot{\hat{\phi}}(t) = -\frac{2A}{N_0 d^2(t)} r(t) \sin[\omega_0 t + \hat{\phi}(t)],$$

$$\dot{d}(t) = \frac{2A}{N_0 d(t)} r(t) \cos[\omega_0 t + \hat{\phi}(t)] - \frac{N_\phi}{8} f_3[d(t)],$$

где

$$f_3[d] = \frac{dI_0(d^2)}{I_0(d^2) - |I_1(d^2)|}.$$

Этот алгоритм обеспечивает такую же ошибку слежения, как и предыдущий алгоритм при  $D \geq 0$ .

### Литература

1. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических систем и устройств. М.: Горячая линия – Телеком, 2015. 608 с.

**A.A. Paramonov**

Moscow Technological University

### MODELING OF THE SYSTEM PHASE-LOCKED LOOP IN THE APPROXIMATION V. I. TIKHONOV

**Keywords:** *phase-locked loop, wiener phase, a posteriori probability density, V.I. Tikhonov distribution.*

**Abstract.** *The article deals with the system of phase-locked loop in the V.I. Tikhonov approximation of a posteriori probability distribution of phase. Computer simulation has allowed to establish that the phase estimation can be shifted to  $\pi$ . A modification of the algorithm is proposed, which excludes the appearance of a biased estimate.*

**А.А. Семиряжко**

*Смоленский государственный университет*

УДК 316.6

## **СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СЕМАНТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА**

Ключевые слова: *факторный анализ, метод главных компонент, метод семантического дифференциала, обработка данных в SPSS.*

*В данной статье рассматривается математическая обработка результатов исследования правового сознания студентов факультета экономики и управления группы 42ЭБ Смоленского государственного университета. Исследование проводилось с помощью метода семантического дифференциала, созданного в 1940-1950-х годах американским психологом Чарльзом Эгертоном Осгудом. Представленная реализация факторного анализа с помощью программного обеспечения SPSS Statistic позволяет существенно облегчить статистическую обработку данных исследования.*

Развитие гражданского общества предполагает формирование у его представителей правового сознания. Этим определяется необходимость научного познания процессов становления и функционирования правового сознания как отдельной личности, так и общества в целом. Прежде всего необходимо изучение взаимосвязей представлений личности о праве, правовых нормах и правовом поведении с менталитетом той группы (групп), которой(-ым) она принадлежит. Выявление соответствующих механизмов позволит скорректировать не только способы воспитывающего и обучающего воздействия на личность, но и сами правовые нормы и их формулировки в законодательных документах [1].

В рассматриваемом исследовании изучалось правовое сознание студентов Смоленского государственного университета факультета экономики и управления группы 42 ЭБ (Экономическая безопасность) в количестве 21 человека. Выявление особенностей правового сознания у студентов первой группы направления «Экономическая безопасность» рассматривалось ранее [2].

Семантический дифференциал является методом построения семантических пространств (индивидуальных или групповых). С помощью него проводится большое количество исследований. В частности, связанных с поведением индивида и его восприятием различных социальных явлений. Обнаружение значимых систем установок человека выявляется в его оценочных суждениях. Сознание классифицирует эти оценки по схеме дихотомий (опасный – безопасный, справедливый – несправедливый, ответственный – безответственный и др.), которые в свою очередь можно измерить количественно методом семантического дифференциала и произвести статистическую обработку этих данных.

Проведение семантического дифференциала подразумевает следующие этапы:

- 1) создание бланка семантического дифференциала;
- 2) опрос респондентов и оцифровка данных;
- 3) математическая обработка;
- 4) интерпретация результатов.

	X1														
	Закон	Умышленное правонарушение	Неумышленное правонарушение	Насилие	Безнаказанность	Правосудие	Коррупция	Преступление	Наказание	Права	Правослушание	Обязанности	Свобода	Правосократительные органы	Обращение в ПО
Справедливый	7	3	2	2	4	4	2	1	3	2	2	3	5	3	4
Честный	7	1	4	6	4	4	1	1	2	3	2	4	5	4	4
Законный	7	1	4	4	2	3	1	1	4	4	3	3	6	6	4
Объективный	6	5	3	3	4	1	4	3	4	5	6	3	4	2	2
Необходимый	7	1	2	2	1	6	2	4	4	3	2	3	3	5	7
Разумный	5	4	2	3	1	7	5	3	4	2	3	4	5	2	6
Беспристрастный	7	6	3	1	2	4	3	7	6	2	4	3	4	2	3
Защищающий	4	6	7	2	3	5	6	3	2	2	6	5	1	3	4
Лояльный	2	5	5	3	4	2	3	3	3	4	7	3	2	4	6
Жестокый	2	4	2	1	3	5	4	6	2	4	3	5	6	7	3
Долгосрочный	3	1	3	2	4	6	7	3	4	5	2	4	3	4	3

Рис. 1. Фрагмент матрицы первичных данных респондента X1

Этап 1. В данной статье применялся авторский семантический дифференциал, в котором в качестве шкал-дескрипторов использовались двадцать характеристик объектов: «справедливый», «честный», «законный», «объективный», «необходимый», «разумный», «беспристрастный», «защищающий», «лояльный», «жестокый», «долгосрочный», «обязательный», «ответственный», «общественный», «обоснованный», «гуманный», «конкретный», «безопасный», «идеальный», «регулирующий». Соответствующие дескрипторы были отобраны методом ассоциативного эксперимента. В качестве объектов были взяты выделенные нами пятнадцать основных явлений правовой системы и правовых отношений: закон, умышленное правонарушение,

неумышленное правонарушение, насилие, безопасность, правосудие, коррупция, преступление, наказание, правопослушание, права, обязанности, свобода, правоохранительные органы, обращение в ПО.

Этап 2. На этом этапе испытуемые заполняли бланк СД, оценивая по 7-балльной шкале степень выраженности каждого из 20 признаков в феномене правовой системы. Полученные данные с помощью математического пакета Microsoft Office Excel были занесены в следующую таблицу (см. рис. 1).

Этап 3. Перед переносом анализируемого массива данных из пакета Microsoft Office Excel в пакет SPSS Statistics проводилась процедура усреднения групповых оценок и транспонирования. После этого была произведена процедура факторного анализа с помощью метода главных компонент. Факторный анализ – метод анализа, предназначенный для нахождения объясняющих переменных, скрывающихся за данными. В свою очередь метод главных компонент представляет собой метод анализа «рекордсменов» по общим показателям. Для проведения анализа необходимо задать количество факторов. Определить их можно с помощью критерия каменистой осыпи (критерий Кэтелла) и критерия Кайзера [3]. В нашем случае количество факторов равно двум. После применения процедуры варимакс-вращения произошло перераспределение значений факторных нагрузок, что помогло лучше интерпретировать результаты исследования (см. рис. 2).

	Компонента	
	1	2
Необходимый	,989	,049
Обязательный	,985	,051
Конкретный	,983	,029
Беспристрастный	,981	,072
Ответственный	,978	,049
Справедливый	,976	,092
Разумный	,971	,192
Регулирующий	,961	-,042
Безопасный	,961	,202
Идеальный	,959	,099
Законный	,958	,184
Защищающий	,953	,193
Объективный	,952	,188
Честный	,949	,163
Обоснованный	,946	,055
Гуманный	,941	,276
Лояльный	,933	,308
Общественный	,911	,074
Долгосрочный	,896	-,070
Жестокий	-,065	-,988

Рис. 2. Матрицы факторных нагрузок после вращения

Этап 4. В результате мы получили факторную модель представлений испытуемых о правовых объектах. При анализе



содержания выделенных факторов обнаруживаем, что после вращения все исходные шкалы имеют большие весовые нагрузки в Факторе 1. Переменная «Жестокий» (-,065) хоть и является отрицательной, но ее значение не оказывает влияния, поэтому Фактор 1 является униполярным и усиливается всем остальным исходным переменными. Значения данного фактора указывает на наличие в сознании респондентов более обобщенной категории, отражающей универсальность и независимость правовых явлений от субъективного мнения личности или группы. Смысл Фактора 2 задан переменными: «Жестокий» (-,988), «Гуманный» (+0,276), «Безопасный» (+0,202), «Разумный» (+0,192), «Объективный» (+0,188), «Законный» (+0,184). Отрицательное значение фактора «Жестокий» говорит о противоположном его значении, близком к таким понятиям, как: гуманность, безопасность, разумность, объективность и законность. Полученные результаты подобны результатам исследования первой группы, что говорит о схожем отношении студентов групп 41ЭБ и 42 ЭБ к правовым понятиям.

Компонента	Начальные собственные значения			Суммы квадратов нагрузок извлечения			Суммы квадратов нагрузок вращения		
	Итого	% Дисперсии	Кумулятивный %	Итого	% Дисперсии	Кумулятивный %	Итого	% Дисперсии	Кумулятивный %
1	17,70	88,502	88,502	17,70	88,502	88,502	17,421	87,106	87,106
2	1,126	5,630	94,132	1,126	5,630	94,132	1,405	7,026	94,132

Рис. 3. Полная объясненная дисперсия, построенная методом главных компонент

Проверка точности результатов в методе главных компонент определяется по величине суммарного вклада. Он в свою очередь находится последовательным суммированием удельных вкладов главных компонент, начиная с первой. В данном случае количество главных компонент и их суммарный вклад показаны в таблице выводов в столбце «Кумулятивный %» (см. рис. 3). До и после вращения он составляет 94%, что является достаточно внушительным числом, а значит, можно с точностью 94% утверждать точность нашего исследования.

### Литература

1. Кузьмина К.Е, Семиряжко А.А. Особенности правового сознания студентов // Социально-психологические проблемы ментальности / менталитета: сборник научных статей XIII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-воСмолГУ, 2017. С. 42–51.
2. Кузьмина К.Е, Семиряжко А.А. Применение факторного анализа для обработки и интерпретации данных, полученных с помощью метода семантического дифференциала // Социально-психологические проблемы ментальности / менталитета: сборник научных статей XIII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. С. 51–63.

3. Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования: анализ и интерпретация данных: учебное пособие. 3-е изд., стер. СПб.: Речь, 2007. 392 с.

**A.A. Semiriazhko**  
Smolensk State University

## STATISTICAL PROCESSING OF THE RESULTS OF THE SEMANTIC DIFFERENTIAL

**Keywords:** *factor analysis; the principal component method; method of semantic differential, data processing in SPSS.*

**Abstract.** *This article deals with the mathematical processing of the results of the study of the legal consciousness of students of the Faculty of Economics and Management of the Group of 42EB of Smolensk State University. The study was carried out using the method of the semantic differential, created in the 1940s-1950s by the American psychologist Charles Egerton Osgood. The implementation of factor analysis using the SPSS Statistic software makes it possible to significantly simplify the statistical processing of research data.*

**А.Г. Суханова**  
Смоленский государственный университет

УДК 519.688

## ФОРМИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ СРЕДСТВАМИ СИСТЕМЫ MATHCAD

**Ключевые слова:** *эффективный инвестиционный портфель, вероятностное пространство, матрица доходностей, ковариационная матрица доходностей, нелинейное программирование.*

*В работе использованы методы нелинейного программирования для формирования эффективного инвестиционного портфеля. В качестве инструментальной среды разработки выбрана система Mathcad. При построении модели эффективного портфеля было построено вероятностное пространство рынка ценных бумаг с использованием значений индекса РТС. Показан пример построения эффективного инвестиционного портфеля, обеспечивающего его максимальную доходность при заданном уровне риска.*

Успешное долгосрочное инвестирование основано на распределении активов и диверсификации. Инвестиционный портфель представляет собой набор некоторых активов. Инвестирование средств в

различные активы повышает вероятность того, что инвестор не выиграет и не проиграет на всех активах одновременно.

В данной статье представлено построение эффективного портфеля с использованием системы Mathcad методами нелинейного программирования. Ранее автором был предложен нечетко-множественный подход [1] для формирования инвестиционного портфеля. Применение теории нечетких множеств в Mathcad рассмотрено также в [2].

Согласно [3], под эффективным портфелем понимается портфель, обеспечивающий или максимальную ожидаемую доходность при некотором заданном уровне риска, или минимальный риск при заданном уровне доходности.

При построении модели эффективного портфеля были использованы значения индекса РТС [4]. По значениям доходностей индекса РТС за период 17.07.2013 по 17.07.2014 было определено вероятностное пространство рынка ценных бумаг (табл. 1).

Возможные состояния  $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$  рынка ценных бумаг можно охарактеризовать следующим образом:

$S_1$  – «плохое» состояние, при изменении значений индекса РТС  $< -4\%$ ;

$S_2$  – «удовлетворительное» состояние, изменения значений индекса РТС лежат в интервале от  $-4$  до  $0,15\%$ ;

$S_3$  – «хорошее» состояние - при изменении значений индекса РТС  $> 0,15\%$ .

Вероятностное пространство можно определить как совокупность конечного числа состояний исследуемого объекта с известными вероятностями для каждого из них [5].

Таблица 1

**Вероятностное пространство рынка ценных бумаг**

$S_i$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$P_i(\%)$	29,3	42,6	28,1

Для построения модели эффективного инвестиционного портфеля были выбраны акции следующих эмитентов: Транснефть, Норникель, Магнит, Верхнесалдинское МПО, ФосАгро, Северсталь.

Сформированная с учетом вероятностного пространства матрица доходностей акций эмитентов представлена на рисунке 1.

Пусть  $r_i(s)$  – будущая доходность ценной бумаги типа  $i$  при условии, что наступит событие  $s$ , и пусть  $p(s)$  – вероятность события. Ожидаемую доходность ценной бумаги  $i$  можно определить по формуле (1) как средневзвешенную по всем вероятностям доходность при каждом из возможных событий [6]:

$$E(r_i) = \sum_i r_i(s)p(s). \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ORIGIN} := 1 \\
 & i := 1..6 \quad n := 6 \quad j := 1..6 \\
 & p := \begin{pmatrix} 29.3 \\ 42.6 \\ 28.1 \end{pmatrix} \quad \text{Веса векторного пространства} \\
 & \text{Матрица доходностей акций эмитентов} \\
 & r := \begin{pmatrix} -0.175 & -0.203 & 0.214 & -0.024 & -1.025 & -0.265 \\ 0.583 & 0.19 & 0.397 & 0.804 & 0.667 & 0.881 \\ 0.822 & 1.917 & 2.143 & 3.011 & 0.197 & 1.26 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 1. Задание матрицы доходностей акций в системе Mathcad

Расчет ожидаемых доходностей акций представлен на рисунке 2.

$$\begin{aligned}
 & i := 1..3 \quad d_i := \frac{\sum_1 (r_{1,i} \cdot p_1)}{100} \\
 & d = \begin{pmatrix} 0.428 \\ 0.56 \\ 0.834 \\ 1.182 \\ 0.039 \\ 0.652 \end{pmatrix} \quad \text{Оценка вектора ожидаемых доходностей}
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Вектор ожидаемых доходностей акций

Ковариацию доходностей ценных бумаг можно рассчитать по формуле (2). Она представляет собой математическое ожидание произведения линейного отклонения доходностей ценных бумаг  $i$  и  $j$  от их математических ожиданий  $\bar{r}_i, \bar{r}_j$  [6]:

$$\text{cov}(r_i, r_j) = E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)]. \quad (2)$$

Построение ковариационной матрицы

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov}_{i,j} := \frac{\sum_{k=1}^3 [(r_{k,i} - d_i)(r_{k,j} - d_j) \cdot p_k]}{100} \\
 & \text{Cov} = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.261 & 0.226 & 0.391 & 0.247 & 0.244 \\ 0.261 & 0.746 & 0.707 & 1.027 & 0.199 & 0.401 \\ 0.226 & 0.707 & 0.675 & 0.962 & 0.134 & 0.348 \\ 0.391 & 1.027 & 0.962 & 1.427 & 0.356 & 0.6 \\ 0.247 & 0.199 & 0.134 & 0.356 & 0.507 & 0.374 \\ 0.244 & 0.401 & 0.348 & 0.6 & 0.374 & 0.373 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 3. Построение ковариационной матрицы доходностей акций в системе Mathcad

Построение эффективного портфеля Марковица, обеспечивающего максимальную доходность и заданный риск, представляет собой задачу нелинейного программирования.

Задаем риск  $rs := 1.4$

$$Mp(x) := \sum_{i=1}^n (x_i \cdot d_i) \quad Np(x) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i \cdot x_j \cdot Cov_{i,j})$$

Given

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i \cdot x_j \cdot Cov_{i,j}) = rs \quad x \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  Начальные значения поиска  $x$

Рис. 4. Начало документа построения модели эффективного портфеля в системе Mathcad

На рисунке 4 представлено задание целевой функции и системы ограничений для оптимизации портфеля ценных бумаг.

Если предполагаемая сумма при формировании инвестиционного портфеля составляет 1 000 000 рублей, то, согласно рисунку 5, необходимо вложить 984 000 рублей в акции компании Верхнесалдинского МПО и 16000 рублей в акции компании Северсталь. Это должно позволить получить максимальную доходность при заданном уровне риска.

$x := \text{Maximize}(Mp, x) \quad Mp(x) = 1.173$  Показатель максимальной доходности

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.984 \\ 0 \\ 0.016 \end{pmatrix}$  Доли вложения в акции

Рис. 5. Рассчитанные доли вложения в акции портфеля, при которых обеспечивается заданный риск и максимальная доходность

Построение эффективных портфелей может быть использовано для построения оптимального портфеля [3] – портфеля, который можно определить как точку пересечения множества эффективных портфелей и кривой безразличия, отражающей комбинации доходности и риска.

## Литература

1. Суханова А.Г. Нечетко-множественный подход к выбору инвестиционного портфеля в системе Mathcad // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16. С.38 – 41.
2. Стримжа М.М., Мазур М.В., Седова Н.А. Реализация в Mathcad элементов теории нечетких множеств // Международна научна школа «Парадигма». Лято-2015. В 8 т. Варна, 2015. С. 288-296.
3. Ковалев В.В. Финансовый менеджмент: теория и практика. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Проспект, 2013. 1104 с.
4. finanz.ru. URL:<http://www.finanz.ru>.
5. Мосунова Т.Г. Комплекс адаптивных моделей управления портфелем ценных бумаг: автореф. дис. ... канд. экон. наук. Иваново, 2008. 22 с.
6. Маренков Н.Л. Ценные бумаги. Ростов-на-Дону: Феникс, 2003. 608 с.

**A.G. Sukhanova**

*Smolensk State University*

### FORMATION OF EFFECTIVE INVESTMENT PORTFOLIO BY MEANS OF MATHCAD SYSTEM

**Keywords:** *effective investment portfolio, probability space, yield matrix, yield covariance matrix, nonlinear programming.*

**Abstract.** *The work uses nonlinear programming methods to form an effective investment portfolio. The Mathcad system was chosen as a development environment tool. When constructing an efficient portfolio model, a probabilistic space of the securities market was constructed using the values of the RTS index. An example of constructing an effective investment portfolio that ensures its maximum yield at a given level of risk is shown.*

**М. И. Тихонова**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

УДК 512.643+519.76

### НОВЫЙ МЕТОД ВЕКТОРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЛОВ ПОСРЕДСТВОМ РАЗЛОЖЕНИЯ PSD-МАТРИЦЫ В ЗАДАЧАХ NLP

**Ключевые слова:** *матричная алгебра, спектральное разложение матрицы, сингулярное разложение матрицы, собственные значения матрицы, обработка естественного языка, векторное представление слов.*

*Изучаются специальные задачи матричной алгебры, связанные с математической обработкой естественных языков. Предлагается новый метод для векторного представления слов. Используется*

спектральное разложение матрицы, построенной на основе частоты совместной встречаемости слов в корпусе текстов. Важно, что матрица оказывается неотрицательно определенной. Это позволяет использовать единое векторное представление для слов и их контекстов. Помимо общего описания теоретического алгоритма, дано краткое изложение проделанных экспериментов.

**1. Введение в проблематику.** Проблема векторного представления слов, т. е. отображение множества слов из рассматриваемого корпуса текстов в евклидово векторное пространство  $\mathbf{R}^n$ , актуальна в задачах, связанных с обработкой естественного языка (задачи *NLP* от английского *natural language processing*). Основная цель – на основе выбранного корпуса текстов построить отображение из множества слов в подходящее пространство  $\mathbf{R}^n$  так, чтобы отображение «улавливало» семантические и синтаксические связи между словами. Тогда близость между словами вычисляется, как косинусное расстояние между векторами. Векторное представление слов позволяет интерпретировать слова как точки в пространстве; при этом точки, соответствующие близким словам, оказываются расположенными близко друг к другу.

Современные методы, позволяющие получить векторные представления слов, основаны на *дистрибутивной гипотезе*: лингвистические единицы, встречающиеся в схожих контекстах, имеют близкие значения. Тогда в предположении о том, что слово определяется своим контекстом (то есть соседними с ним словами), из корпуса текста извлекаются закономерности о совместной встречаемости слов, на основании чего и строится искомое векторное представление.

Векторные представления слов нашли применение при решении целого ряда задач естественного языка, среди которых выявление семантической близости слов и словосочетаний, автоматическая кластеризация слов по степени их семантической близости, определение тематики текстового документа и пр.

Существующие методы можно разделить на две большие категории: а) нейросетевые методы, к которым относится, например, широко известный *Word2Vec*, б) методы, основанные на низкоранговом матричном разложении.

В методах второй группы на базе статистик о совместной встречаемости слов строится матрица  $M$ , для которой ищется затем низкоранговое разложение на матрицу слов  $V$  и матрицу контекстов  $C$ . Например, в [1] авторы применяют канонический корреляционный анализ *CCA* (*canonical correlation analysis*) к матрице слов и матрице контекстов, используя полученные векторы в качестве искомого векторного представления слов. В [2] и [3] авторы выбирают языковую модель Брауна (*Brown language model*) и доказывают, что применение

ССА к матрице частотности биграмм эквивалентно нахождению трансформированного решения для языковой модели.

Однако методы данного вида обладают рядом недостатков. Во-первых, они отображают слова и контексты в различные векторы, что ведет к усложнению модели и к неопределенности в выборе решения, поскольку  $M = VC^T = (VS)(S^{-1}C^T) = V_1C_1^T$ . Во-вторых, для нахождения низкорангового приближения матрицы  $M$  авторы данных методов предлагают использовать сингулярное разложение, при котором производится разложение матрицы  $M^T M$ , а не исходной, что ведет к потере информации.

В [3] и [4] авторы выбирают иной подход, который дает возможность объединить векторные представления слов и их контекстов через нахождение неотрицательного приближения для матрицы  $PMI$  (*pointwise mutual information*). Это позволяет избежать потери информации, но вызывает трудности, связанные с плохой масштабируемостью метода.

В настоящей работе предлагается новый метод низкорангового матричного приближения. Из корпуса текстов извлекается информация о совместной встречаемости слов. На основе этой информации строится разреженная матрица  $X$ , неотрицательно определенная по построению (*PSD-матрица* от английского *positive semi-definite*). Затем для  $X$  находится низкоранговое матричное приближение путем разложения по собственным векторам, отвечающим максимальным собственным значениям. К преимуществам такого подхода можно отнести то, что матрица  $X$  разложима в виде  $X = V^T V$ . Это позволяет использовать единое векторное представление для слов и их контекстов. Поскольку алгоритм работает так, что  $X$  всегда оказывается разреженной, то появляется ценная возможность улучшить масштабируемость метода.

**2. Построение векторного представления слов.** Построение векторного представления слов осуществляется в несколько этапов. Выбирается корпус текстов, и все его слова нумеруются по порядку индексом  $j$ . Для каждого слова определяется своя окрестность. При этом окрестность может быть определена по-разному: это может быть окно фиксированной ширины, предложение, содержащее слово или даже абзац. В настоящей работе считается, что слово входит в окрестность другого, если между ними стоит не более одного слова. При этом каждое слово автоматически включается в свою собственную окрестность.

**Пример.** Рассмотрим предложение: «Петя весь вечер готовился к экзамену по математическому анализу». Тогда окрестностью слова «Петя» будет «Петя весь вечер», а окрестностью слова «готовился» – «весь вечер готовился к экзамену».



Отдельно выделяются уникальные слова, когда каждое слово из корпуса текстов берется только один раз независимо от числа повторений. Уникальные слова нумеруются индексом  $i$ .

Затем происходит построение разреженной матрицы  $A$  размера  $n \times N$ , где  $n$  – число уникальных слов в корпусе текстов, а  $N$  – общее количество слов (не обязательно уникальных). Элементы разреженной матрицы  $A$  определяются правилом:  $A_{ij} = 1$ , если в окрестности  $j$ -го слова есть уникальное слово под номером  $i$ ; во всех остальных случаях полагаем  $A_{ij} = 0$ . Таким образом, в матрице  $A$  в каждом столбце может находиться не более пяти единиц, а все остальные элементы нулевые.

Матрица  $X$  вводится формулой  $X = A^T A$ . По построению она неотрицательно определена. При этом  $X_{ij}$  выражает число совместных вхождений слов  $i$  и  $j$  в одни и те же общие окрестности.

Для построения  $k$ -мерного векторного представления слов из выбранного корпуса текстов используют спектральное разложение матрицы  $X$ . Сначала для  $X$  вычисляют  $k$  максимальных собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  с собственными векторами  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ . Затем определяют матрицу векторного представления слов

$$V = (\sqrt{\lambda_1} \bar{v}_1 \dots \sqrt{\lambda_k} \bar{v}_k),$$

составленную из перечисленных векторов-столбцов. При этом  $i$ -я строка в полученной матрице  $V$  считается  $k$ -мерным векторным представлением для  $i$ -го слова. То есть матрица  $V$  представляет собой *модель зависимости* или просто *модель*, которая каждому слову сопоставляет  $k$ -мерный вектор.

**3. Метрика качества.** Для оценки качества построенной модели, был использован стандартный набор данных, известный как SimLex-999 (см. <https://www.cl.cam.ac.uk/~fh295/simlex.html>). Набор состоит из попарных сочетаний слов, для которых известно значение *similarity rating* – экспертной оценки в диапазоне от 0 до 10, отражающей семантическую близость слов в паре по типу следующего примера

Word1	Word2	Similarity rating
new	old	1.58
hard	difficult	8.77

На основе подобного набора данных была подсчитана *средняя точность* метода (*mean average precision* –  $Map@k$ ), описанная ранее в работах [6], [7]. Вычисление  $Map@k$  производится следующим образом.

1. Все пары слов в SimLex-999 разбивают на группы по заданному фиксированному первому слову.

2. В каждой группе вычисляют медианное значение *similarity rating* и затем выделяют  $K$  релевантных пар. Пара объявляется *релевантной*, если для нее значение *similarity rating* больше медианного значения в группе либо равно ему. Подчеркнем, что  $K$  определяется независимо для каждой конкретной группы, т. е. число релевантных пар зависит от группы.

3. Для каждой пары слов в группе рассматривают их векторное представление, полученное посредством модели, чье качество хотят оценить. В нашем случае векторами модели будут соответствующие строки матрицы  $V$ . Между парами векторов вычисляют косинусное расстояние. После чего пары слов в группе сортируют в порядке убывания косинусного расстояния.

4. Для каждого  $k$  в диапазоне от 1 до  $K$  включительно берут  $k$  первых отсортированных пар и считают долю релевантных среди них:

$$p@k = \frac{\#relevant}{k}.$$

5. Вычисляют *average precision*:

$$ap@k = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K p@k.$$

6. *Average precision* усредняют в конце по всем группам. Таким образом, величина *mean average precision* равна:

$$Map@k = \frac{1}{N} \sum ap@k.$$

Именно величина  $Map@k$  была выбрана в качестве метрики качества, поскольку  $Map@k$  отражает способность модели улавливать семантическую близость слов и одновременно с этим показывает ранжирующую способность модели на наборах пар.

**4. Эксперименты.** При проведении экспериментов было опробовано несколько модификаций модели. Помимо базовых 100- и 200-мерных представлений, рассматривались также векторные представления для усеченного словаря. А именно, перед спектральным разложением из матрицы  $X$  были удалены строки и столбцы, отвечающие наиболее частотным стоп-словам, и оставлены лишь строки и столбцы, отвечающие первым 100 тысячам из наиболее частотных слов (не считая, разумеется, стоп-слов). Последующие этапы построения матрицы  $V$  оставались без изменений. Такое отсеивание малочастотных слов дало заметный прирост качества.

Кроме того, поскольку при построении матрицы  $A$  предполагалось, что каждое слово входит в свою окрестность, то на диагонали  $X$  оказались «гигантские» значения, оказывающие негативное влияние при спектральном разложении. Поэтому отдельно была рассмотрена

модификация метода, при которой диагональ матрицы  $X$  искусственно обнулялась. Это также позволило повысить качество модели.

В экспериментах производилось сравнение качества нашей модели с известным нейросетевым методом *Word2Vec*. При этом для  $k$ -мерного векторного представления был взят *Word2Vec* с числом компонент  $k/2$ , поскольку во время работы метод *Word2Vec* оптимизирует как матрицу слов, так и матрицу контекстов. Кроме того, при рассмотрении векторного представления по усеченному словарю в *Word2Vec* вводилось ограничение «5» на частотность слова в корпусе текстов.

Также на основе корпуса текстов была построена матрица *pPMI* (*positive pointwise mutual information*) [8], для которой затем аналогичным образом было произведено спектральное разложение. Заметим, что матрица *pPMI* не является положительно определенной. Поэтому для нее не существует представления  $pPMI = V^T V$ . Но так как число отрицательных собственных значений достаточно мало, то построение векторного представления по векторам, отвечающим максимальным собственным значениям, оказывается возможным.

Сравнительный анализ качества методов представлен в следующей таблице.

Размерность представления, словарь	$V$	$V$ зануленная диагональ	<i>Word2Vec</i>	<i>pPMI</i>
100-мерное, полный словарь	0.6403	0.6578	0.6697	0.6454
200-мерное, полный словарь	0.6518	0.6794	0.6636	0.6447
100-мерное, короткий словарь	0.6548	0.6845	0.6715	0.6073
200-мерное, короткий словарь	0.6766	0.6909	0.6797	0.6259

По результатам экспериментов становится ясно, что описанный метод векторного представления слов дает качество, вполне сравнимое с *Word2Vec*. При этом модификация нашей модели с предварительным обнулением диагонали позволяет добиться улучшения качества и даже превзойти *Word2Vec*. Представление, полученное путем спектрального разложения *pPMI*, существенно проигрывает в качестве.

Эксперименты свидетельствуют также о том, что использование короткого словаря (без стоп-слов и без слов с малой частотностью) оказывается более эффективным.

**5. Выводы.** Предложенный в работе метод для векторного представления слов хорошо улавливает семантическую близость между словами и позволяет достичь качества, сравнимого с классическим *Word2Vec* подходом, а в некоторых случаях и превзойти его.

Для дальнейшего улучшения модели можно рассматривать окрестности другого вида. Например, учитывать границы предложений в корпусе текстов или рассматривать окна другой ширины.

Автор выражает искреннюю признательность А. И. Зобнину за постановку задачи и поддержку в работе.

### Литература

1. Dhillon P. S., Foster D. P., Ungar L. H. Eigenwords: Spectral word embeddings // The Journal of Machine Learning Research. 2015. Vol. 16. P. 3035–3078.
2. A spectral algorithm for learning class-based n-gram models of natural language / K. Stratos [et al.] // Proceedings of the Association for Uncertainty in Artificial Intelligence. 2014. P. 762–771.
3. Stratos K., Collins M., Daniel H. Model-based word embeddings from decompositions of count matrices // Proceedings of ACL. 2015. P. 1282–1291.
4. Li S. A generative word embedding model and its low rank positive semidefinite solution / S. Li, J. Zhu, C. Miao // 2015.
5. Li S., Zhu J., Miao C. PSDVec: a toolbox for incremental and scalable word embedding // Neurocomputing. 2016. Vol. 237. P. 405–409.
6. RUSSE: семинар по оценке семантической близости для русского языка / А. Панченко [et al.] // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: по материалам ежегодной Международной конференции «Диалог». М.: РГГУ, 2015. Вып. 14 (21), Т. 2. С. 89–105. <http://www.dialog-21.ru/digests/dialog2015/materials/pdf/PanchenkoAetal.pdf>.
7. Zesch T., Gurevych I. Wisdom of crowds versus wisdom of linguists – measuring the semantic relatedness of words // Natural Language Engineering. 2010. Vol. 16, Is. 1. P. 25–59.
8. Jurafsky D., Gurevych J.H. Speech and Language Processing // Draft of August 7, 2017. <https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/15.pdf>.

**M. I. Tikhonova**

Lomonosov Moscow State University

### NEW METHOD OF WORD EMBEDDING VIA PSD-MATRIX DECOMPOSITION IN NLP TASKS

**Keywords:** *matrix algebra, spectral matrix decomposition, matrix singular value decomposition, matrix eigenvalues, natural language processing, word embedding.*

**Abstract.** *In the paper, special problems of matrix algebra connected with natural language processing are discussed. A new method of word embedding is proposed. Spectral decomposition of the word co-occurrences matrix is used. It is important that the matrix is a PSD-matrix by construction. This in turn allows using the same word embedding for words and their contexts. In addition to the theoretical description of the algorithm, a brief description of the experiments is given.*

## СЕКЦИЯ 2

### Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

**В.В. Борисов, А.С. Федулов**

*Филиал Национального исследовательского  
университета в г. Смоленске*

УДК 004.8

#### **НЕЧЕТКИЙ КОГНИТИВНЫЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛАБО ФОРМАЛИЗУЕМЫХ ПРОБЛЕМ<sup>1</sup>**

Ключевые слова: *нечеткая когнитивная модель, слабо формализуемые проблемы.*

*Выполнен сравнительный анализ наиболее популярных разновидностей нечетких когнитивных моделей. Рассмотрены основные задачи нечеткого когнитивного анализа и моделирования слабо формализуемых проблем, а также приведены примеры решения задач анализа устойчивости, оценки системных характеристик, моделирования системной динамики, прямого и обратного нечеткого когнитивного моделирования.*

Активно развиваемые методы нечеткого когнитивного анализа и моделирования наиболее востребованы для исследования слабо формализуемых проблем в условиях неопределенности. К таким задачам прежде всего относится анализ устойчивости, выявление циклов, оценка системных характеристик, анализ непосредственного и опосредованного взаимовлияния системных факторов, анализ сценариев, анализ достижимости целевых состояний, прогноз состояния системных факторов, моделирование динамики.

Наиболее востребованными нечеткими когнитивными моделями (НКМ) являются: нечеткие когнитивные карты Б. Коско [1], нечеткие когнитивные карты В. Силова [2] и нечеткие продукционные

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект №16-19-10568.

когнитивные карты [3]. Однако ограничениями этих моделей являются следующие:

- не полностью нечеткий подход при анализе и моделировании;
- сложность представления системных факторов с использованием нечетких множеств и четких значений;
- сложность задания взаимовлияний концептов в виде нечетких отображений;
- проблема учета отрицательных весов влияния и аккумуляирования влияний разных знаков;
- сложность учета совместимости системных факторов в НКМ.

В докладе рассмотрены следующие предложенные авторами разновидности НКМ, реализующие расширенные возможности анализа и моделирования слабо формализуемых проблем:

- обобщенные нечеткие продукционные когнитивные модели (Generalized Rule-Based Fuzzy Cognitive Maps) [4];
- нечеткие реляционные когнитивные модели (Relational Fuzzy Cognitive Maps) [5];
- «совместимые» нечеткие когнитивные модели (“Compatible” Fuzzy Cognitive Maps) [6].

Обобщенные нечеткие продукционные когнитивные карты ([4]), пример структуры которых проиллюстрирован рисунке 1, позволяют обеспечить:

- достаточную для конструктивного анализа степень формализации слабо формализуемой проблемы и реализацию полностью нечеткого подхода при ее анализе;
- представление системных факторов в виде нечетких множеств или в виде четких значений;
- представление нечетких влияний между системными факторами в виде нечетких отображений;
- совместный учет положительных и отрицательных взаимовлияний системных факторов;
- учет нелинейности моделируемых процессов за счет нечетких состояний и приращений;
- учет агрегированного вклада влияний от всех системных факторов вне зависимости от их порядка и значимости.

Для обеспечения максимально возможной гибкости интеллектуального анализа различных слабо формализуемых проблем в работе [5] предложены нечеткие реляционные когнитивные модели (НРМ), развивающие известные методы нечеткого когнитивного моделирования за счет реляционного представления нечетких соотношений влияния между концептами (рис. 2).

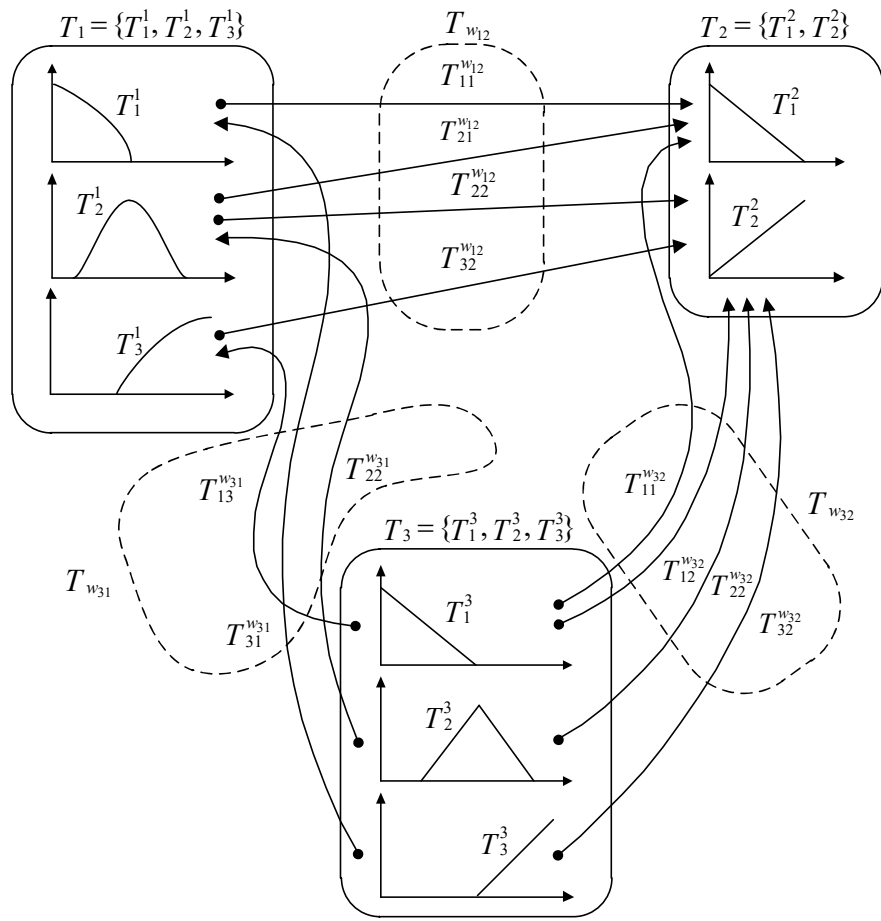


Рис. 1

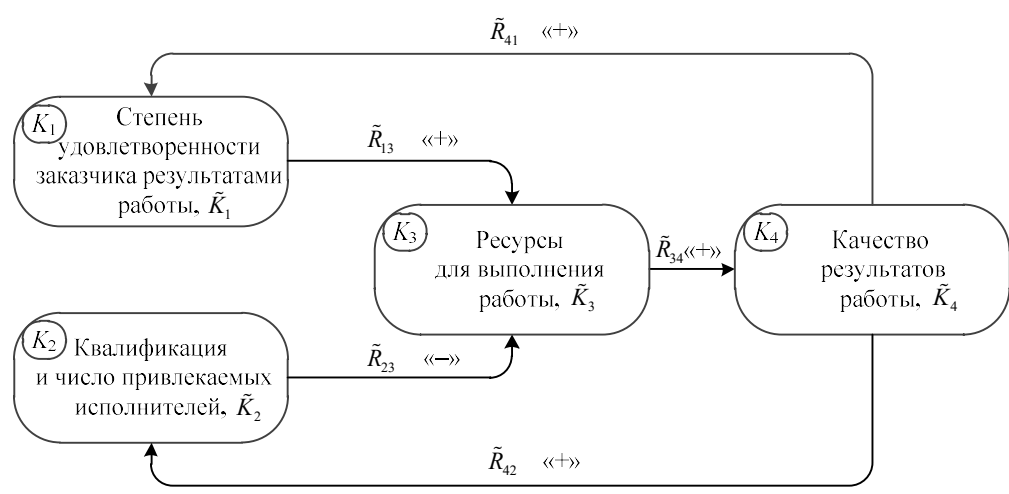


Рис. 2

Здесь нечеткие соотношения влияния между концептами НРМ задаются соответствующими нечеткими бинарными отношениями  $\tilde{R}_{ij}$  в виде матрицы нечетких отношений:

$$\tilde{M} = \begin{vmatrix} \tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12} & \dots & \tilde{R}_{1N} \\ \tilde{R}_{21} & \tilde{R}_{22} & \dots & \tilde{R}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{R}_{N1} & \tilde{R}_{N2} & \dots & \tilde{R}_{NN} \end{vmatrix}$$

На рисунке 3 приведен пример нечеткого отношения влияния  $\tilde{R}_{42}$  концепта  $K_4$  на концепт  $K_2$  [7].

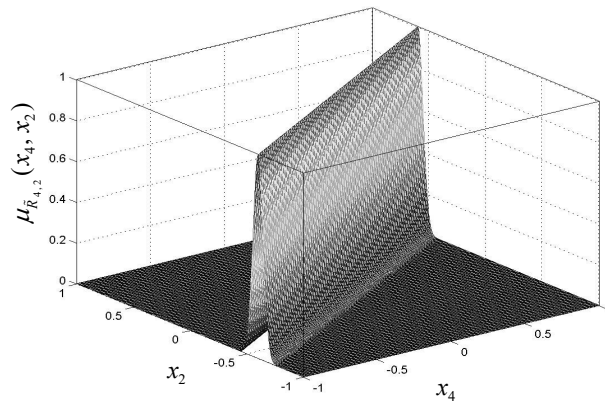


Рис. 3

Предложенные в работе [6] так называемые «совместимые» нечеткие когнитивные модели (СНКМ) позволяют, помимо прочих возможностей, при анализе проблемных ситуаций учесть совместимость концептов (проблемных факторов) при оценке их взаимовлияния. Пример структуры такой СНКМ приведен на рисунке 4.

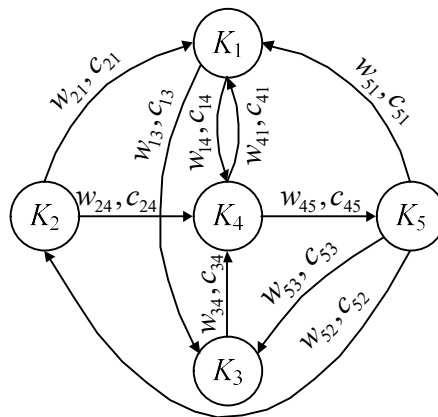


Рис. 4

При этом степени совместимости концептов СНКМ учитываются при обосновании выбора операций для распространения влияния по модели, а также для объединения влияния концептов-источников на концепт-приемник. Для обеспечения больших выразительных возможностей в СНКМ реализованы различные стратегии объединения



влияния нескольких концептов на один концепт-приемник: во-первых, от наименьшей к наибольшей совместимости проблемных факторов, во-вторых, от наибольшей к наименьшей их совместимости.

Проиллюстрирован предлагаемый подход, позволяющий обобщить учет совместимости проблемных факторов для различных типов НКМ.

В докладе также предметно рассматривается решение прямых и обратных задач нечеткого когнитивного моделирования слабо формализуемых проблем.

Предлагаемые модели и методы позволяют существенно повысить гибкость и обеспечить требуемый уровень достоверности нечеткого когнитивного анализа и моделирования слабо структурированных проблем.

### Литература

1. Kosko B. Fuzzy cognitive maps // Int. Journal of Man-Machine Studies. 1986. Vol. 24, P. 65–75.
2. Силов В.Б. Принятие стратегических решений в нечеткой обстановке. М.: ИНПРО–РЕС, 1995.
3. Carvalho J.P., Tome J.A.B. Rule Based Fuzzy Cognitive Maps in Socio-Economic Systems // IFSA-EUSFLAT 2009. 2009. P. 1821–1826.
4. Борисов В.В., Круглов В. В., Федулов А. С. Нечеткие модели и сети. 2-е изд. стереотип. М.: Горячая линия – Телеком, 2012. – 284 с.
5. Федулов А.С. Нечеткие реляционные когнитивные карты // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 1. С. 120–132.
6. Borisov V., Fedulov A., Fedulov Ya. “Compatible” Fuzzy Cognitive Maps for Direct and Inverse Inference // Proceedings of the 18th International Conference on Computer Systems and Technologies, CompSysTech’17, June 23-24, Ruse, Bulgaria // ACM International Conference Proceeding Series. Vol. 1369. ACM Inc., N.Y. P. 20-27, doi: 10.1145/3134302.3134347.
7. Федулов А.С., Борисов В.В. Анализ нечетких реляционных когнитивных карт // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2016. № 7. С. 7–14.

V.V. Borisov, A.S. Fedulov

### FUZZY COGNITIVE ANALYSIS AND SIMULATION OF NON-FORMALIZED PROBLEMS

**Keywords:** *fuzzy cognitive model, non-formalized problems.*

**Abstract.** *A comparative analysis of the most popular varieties of fuzzy cognitive models is performed. The main problems of fuzzy cognitive analysis and modeling of non-formalized problems are considered, as well as examples of their solutions, including: analysis of stability and system characteristics, modeling of system dynamics, solving direct and inverse problems of cognitive modeling.*

## ПОИСК АССОЦИАТИВНЫХ ПРАВИЛ В РЕЗУЛЬТАТАХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЦВЕТОВЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ<sup>1</sup>

Ключевые слова: ассоциативные правила, алгоритм *FP-Growth*, эксперимент, цветовые предпочтения.

*В статье предложен метод анализа результатов экспериментального исследования цветовых предпочтений, основанный на построении ассоциативных правил. В качестве транзакций использованы данные анкет респондентов, содержащих ответы, характеризующие ассоциации оттенков с заданным набором антропологически значимых концептов. На основе применения к ним алгоритма *FP-Growth* получены ассоциативные правила, соответствующие взаимосвязям между цветовыми предпочтениями.*

Основное назначение метода построения ассоциативных правил – анализ рыночной корзины покупателей с целью нахождения типичных шаблонов покупок. Для обработки данных эмпирических исследований этот метод стал применяться недавно. В европейских социальных обследованиях [1] он использовался для выявления связи между страной проживания респондента и устоявшимися стереотипами. Ассоциативные правила применялись и для определения закономерностей в деятельности общественных организаций российских немцев на основе анализа их базы данных, полученной с помощью анкетирования [2].

В данной работе анализировалась взаимосвязь между антропологически значимыми концептами и цветовыми ассоциациями. Исходная информация бралась из анкет эксперимента, каждая из которых содержала две группы вопросов. Первый тип вопросов собирал данные о социальных характеристиках респондентов: поле, возрасте, профессии и вероисповедании. Второй тип вопросов допускал выбор одного из 27 оттенков атласа Естественной системы цвета (NCS) в качестве ассоциации с набором из 12 пар концептов: тепло – холод, счастье – печаль, старость – молодость и т.п. В качестве транзакции выбиралась одна анкета. Вопросы и ответы кодировались. Вопрос обозначался идентификатором из 2–4 латинских букв, например, 'warm',

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-411-670002.

'cold', 'sorr', 'happ', 'youn', 'old', 'me', 'othe'. Ответ на заданный вопрос кодировался идентификатором вопроса, дополненным цветовым кодом из множества  $a1 \div a9$ ,  $b1 \div b9$ ,  $c1 \div c9$ . Например, ответ аб (светло-голубой) на вопрос об ассоциации с холодом (cold) кодировался как 'cold\_ab'. Таким образом, присутствующие в транзакциях возможные ответы, связанные с цветами, были представлены множеством из  $3 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 2 = 648$  различных идентификаторов, позволяющих находить повторяющиеся наборы ответов в разных транзакциях. В общей сложности было обработано 70 анкет.

Сформулируем задачу поиска ассоциативных правил по результатам проведенного опроса. Имеется база данных, состоящая из транзакций, где каждая транзакция – это набор ответов одного респондента на заданную анкету. Ответы кодируются строковыми константами, позволяющими находить повторяющиеся наборы ответов в разных транзакциях.

Пусть  $I$  – множество всех ответов, которые могут присутствовать в транзакциях. Каждая транзакция  $T$  – это набор ответов из  $I$  ( $T \subseteq I$ ).  $D$  – множество всех транзакций. Будем считать, что транзакция  $T$  содержит набор ответов  $X$ , если  $X \subseteq T$  и  $X \subseteq I$ . Ассоциативным правилом считаем импликацию наборов ответов  $X \Rightarrow Y$ , где  $X \subseteq I$ ,  $Y \subseteq I$  и  $X \cap Y = \emptyset$ .

Известно, что каждое ассоциативное правило характеризуется определенными параметрами. Главный параметр, называемый поддержкой (support), показывает частоту встречаемости данного правила в имеющемся множестве транзакций. Поддержка правила  $X \Rightarrow Y$  вычисляется как процент транзакций, содержащий множество  $X \cup Y$ :  $\text{supp}(X \Rightarrow Y) = (N(X \cup Y) / |D|) \cdot 100\%$ , где  $N(X \cup Y)$  – количество транзакций, содержащих множество  $X \cup Y$ .

Достоверность ассоциативного правила (confidence) показывает, с какой вероятностью из  $X$  следует  $Y$ . Вычисляется достоверность правила  $X \Rightarrow Y$  как процент транзакций, содержащих как  $X$ , так и  $Y$  в базе транзакций, содержащих  $X$ :  $\text{conf}(X \Rightarrow Y) = \text{supp}(X \Rightarrow Y) / \text{supp}(X)$ .

Задача поиска ассоциативных правил состоит в нахождении импликаций наборов ответов респондентов, поддержка которых не ниже, чем  $\text{minsupport}$ . Из найденных наборов выделяются правила с достоверностью не ниже  $\text{minconfidence}$ . Другими словами, цель анализа – установление следующих зависимостей: если в транзакции встретился некоторый набор ответов  $X$ , то на основании приведенных параметров можно сделать вывод о том, что другой набор ответов  $Y$  также должен появиться в этой транзакции. Установление подобных зависимостей дает нам возможность находить связь оттенков с наборами концептов.

Значения для таких параметров, как минимальная поддержка и минимальная достоверность, выбираются эмпирически таким образом, чтобы ограничить количество найденных правил. Если поддержка имеет большое значение, то алгоритмы будут находить правила, хорошо известные аналитикам или настолько очевидные, что нет никакого смысла проводить данный расчет. С другой стороны, низкое значение поддержки ведет к генерации огромного количества правил, что затрудняет анализ, требуя при этом существенных вычислительных ресурсов. Тем не менее большинство интересных правил находится именно при низком значении порога поддержки. Хотя слишком низкое значение поддержки может привести к генерации статистически необоснованных правил.

Таким образом, задача нахождения ассоциативных правил разбивается на две подзадачи:

1) нахождение всех наборов ответов, которые удовлетворяют порогу  $\text{minsupport}$ . Такие наборы ответов называются часто встречающимися.

2) генерация правил из наборов ответов, найденных, согласно п. 1, с достоверностью, удовлетворяющей порогу  $\text{minconfidence}$ .

Особенность задачи в случае обработки анкет – большое число вариантов возможных оттенков. Один из главных алгоритмов, эффективно решающих подобный класс задач, – это алгоритм Frequent Pattern-Growth Strategy (FP-Growth). В основе алгоритма лежит предобработка базы транзакций, в процессе которой эта база данных (БД) преобразуется в компактную древовидную структуру, называемую Frequent-Pattern Tree – *дерево популярных предметных наборов* (откуда и произошло название алгоритма). В дальнейшем для краткости будем называть эту структуру FP-дерево. К основным преимуществам данного метода относятся:

1) сжатие БД транзакций в компактную структуру, что обеспечивает эффективное и полное извлечение частых предметных наборов;

2) при построении FP-дерева используется технология разделения и захвата (англ.: *divide and conquer*), которая позволяет выполнить декомпозицию одной сложной задачи на множество более простых задач.

Цель алгоритма FP-Growth: требуется обнаружить все зависимые наборы ответов с минимальной поддержкой, заданной экспертом. Рассмотрим работу алгоритма FP-Growth для БД транзакций, каждая из которых соответствует множеству ответов одного испытуемого. Фрагмент данных из нескольких транзакций представлен в таблице 1.

Фрагмент данных из нескольких транзакций

N п/п	Наборы ответов на вопросы анкеты (выбранные цвета)
1	warm:a7, cold:b6, sorr:c2, happ:a2, young:a9, old:c3, ....
2	warm:a7, cold:b6, sorr:c1, happ:c1, young:a5, old:c3, ....
3	warm:a7, cold:b6, sorr:c1, happ:b2, young:a5, old:c3, ....
4	warm:a7, cold:b6, sorr:b2, happ:a2, young:a5, old:a2, ....
5	warm:b6, cold:a4, sorr:a7, happ:a3, young:c9, old:b9, ....
6	warm:b6, cold:a4, sorr:a7, happ:a3, young:c9, old:b9, ....
7	warm:c1, cold:c3, sorr:c1, happ:a5, young:c8, old:b7, ....

Алгоритм включает два этапа.

**1 этап.** Строится FP-дерево, которое в компактном виде представляет информацию о часто повторяющихся ответах.

1. Производится первое сканирование транзакций базы данных, и отбирается множество часто встречающихся ответов, т.е. ответов, у которых поддержка больше или равна минимальной. Обнаруженные частые ответы упорядочиваются в порядке возрастания их поддержки.

2. Строится FP-дерево. Сначала упорядочиваются ответы в транзакциях по убыванию значений их поддержек. Для этого создается начальный (корневой) узел FP-дерева (ROOT). И начинается построение дерева с транзакции № 1 для упорядоченных наборов ответов.

**Правило построения:** если для очередного ответа (выбранный цвет) в дереве встречается узел, имя которого совпадает с данным ответом, то ответ не создает нового узла, а индекс соответствующего узла в дереве увеличивается на 1. В противном случае для этого ответа создается новый узел и ему присваивается индекс 1.

Таким образом, после первого прохода БД и выполнения соответствующих манипуляций с наборами ответов на вопросы анкеты мы построим FP-дерево, которое в компактном виде представляет информацию о частых одинаковых ответах и позволяет производить их эффективное извлечение, что и выполняется при втором сканировании данных.

**2 этап.** Производится процесс извлечения из FP-дерева часто встречающихся ответов.

1. Выбирается ответ, и в дереве находятся все пути, которые ведут к узлам этого ответа. Затем для каждого пути производится подсчёт, сколько раз данный ответ встречается в нем.

2. Удаляется сам ответ (суффикс набора) из ведущих к нему путей.

3. Выполняется подсчёт, сколько раз каждый ответ появляется в префиксах путей, полученных на предыдущем шаге, и производится

упорядочение в порядке убывания этих значений. После чего формируется новый набор транзакций.

4. На его основе строится новое FP-дерево, которое будем называть условным FP-деревом (conditional FP-tree), поскольку оно связано только с одним объектом.

5. В этом FP-дереве находятся все ответы (узлы), для которых поддержка (количество появлений в дереве) равна или больше заданной минимальной поддержки. Если ответ встречается два или более раз, то его индексы, т.е. частоты появлений в условном базисе, суммируются.

6. Начиная с верхушки дерева, записываются пути, которые ведут к каждому узлу и для которого поддержка/индекс больше или равна заданной, возвращается назад ответ (суффикс шаблона), удаленный на шаге 2, и подсчитывается индекс (поддержка), полученный в результате.

Анализ анкет посредством данного алгоритма проводился с использованием Python – библиотеки Associate среды Orange3 [3] и ее визуальных элементов (виджетов). Для отражения результатов работы алгоритма было использовано два виджета: один – для определения частых наборов элементов, а другой – для правил ассоциаций. Виджет Frequent Itemsets находит часто встречающиеся ответы в БД на основе меры поддержки правила, поэтому очень важно сосредоточиться именно на этих ответах. Виджет Association Rules позволяет экспериментально подобрать минимальную поддержку и минимальную достоверность для нахождения ограниченного числа ассоциативных правил в формате «Если ПРЕДПОСЫЛКА (Antecedent), то СЛЕДСТВИЕ (Consequent)». Виджет Plot Box показывает распределение значений ответов для анализа статистических свойств исходных данных. Далее (рис. 1) представлена реализация алгоритма в Orange3.

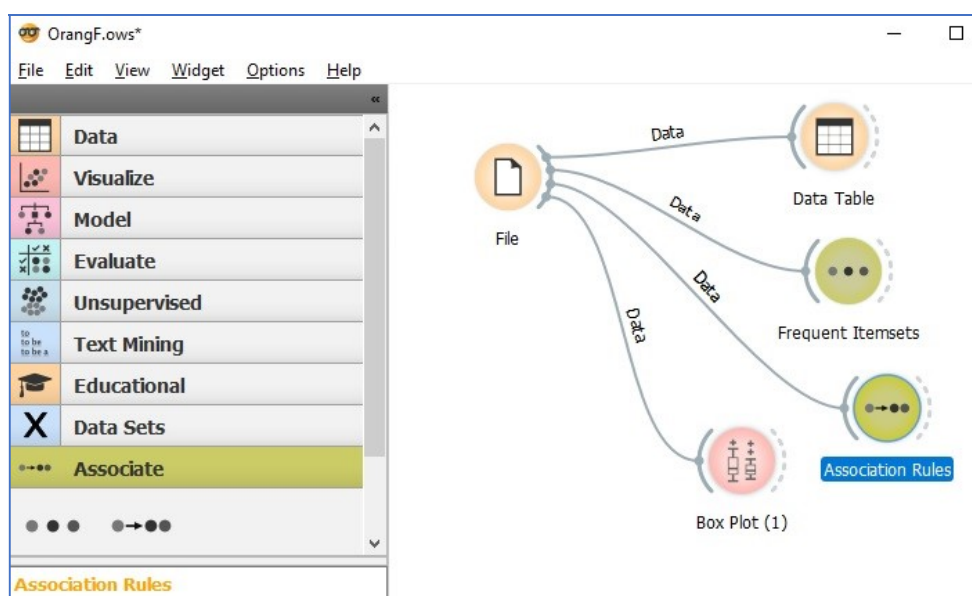


Рис. 1. Реализация алгоритма в Orange3

Для данных эксперимента поиск ассоциативных правил выполнялся с поддержкой не менее 8 % и достоверностью не менее 70 %. В таблицах 2 и 3 приведены фрагменты набора ассоциативных правил для женщин и мужчин, удовлетворяющие данным свойствам.

Таблица 2

**Ассоциативные правила, построенные по результатам опроса женщин**

Supp	Conf	Antecedent (предпосылка)		Consequent (следствие)
0.100	0.714	Warm:b3,b2, happ:b3	→	Femi:a3,a4
0.080	0.800	Calm:a1,a5, stro:b4,c1	→	Happ:b3,b2
0.080	0.800	Femi:a3, b5	→	Upset:c2,b4
0.100	0.833	Masc:c4,b6	→	Upset:c2,b4
0.100	0.833	Warm:b3, a3, cold:a5,a6	→	Happ:b3
0.100	0.833	Warm:b3,a3, happ:b3	→	Cold:a5, a6
0.100	0.833	warm:b3,b2, femi:a3,a4	→	happ:b3
0.100	0.714	calm:a1,a8	→	masc:c4,c6
0.080	0.800	happ:b3,b2, stro:b4,c1	→	calm:a1,a5
0.080	0.800	happ:b3, calm:a1,a3	→	warm:b3,b2
0.100	0.833	happ:b3, femi:a3,a4	→	warm:b3,b2
0.080	1.000	warm:b3,b2, calm:a1,a3	→	happ:b3
0.080	1.000	warm:b3,b2, old:c9,c2	→	happ:b3
0.080	0.800	happ:b3,b2, calm:a1,a5	→	stro:b4,c1
0.080	1.000	happ:b3, old:c9,c2	→	warm:b3,b2

Таблица 3

**Ассоциативные правила, построенные по результатам опроса мужчин**

Supp	Conf	Antecedent		Consequent
0.167	0.750	cold:a6,b1	→	femi:a4
0.111	1.000	old:c2,c8	→	femi:a4
0.111	1.000	cold:a6,b6, old:c2,c8	→	femi:a4
0.111	1.000	stro:b5	→	femi:a4
0.111	1.000	stro:b5,c1	→	femi:a4
0.111	1.000	cold:a6,c1	→	old:c2
0.111	1.000	cold:a6, femi:a4,a5	→	old:c2
0.111	1.000	old:c2,c8	→	cold:a6,b6
0.111	1.000	old:c2,c8, femi:a4	→	cold:a6,b6
0.111	1.000	old:c2,old:c8	→	cold:a6,b6, femi:a4
0.111	1.000	cold:a6, old:c2	→	femi:a4,a5
0.111	1.000	old:c2, femi:a4,a5	→	cold:a6

Анализ показывает, что поиск ассоциативных правил даёт возможность определять наиболее тесно взаимосвязанные цветовые предпочтения респондентов, позволяя выявить как довольно очевидные

факторы взаимосвязи, так и достаточно неожиданные влияния этих факторов друг на друга. Следует отметить, что в формировании ассоциативных правил участвует лишь около 20–25 вариантов ответов из 648 возможных. Связей с достаточно значимыми поддержкой и достоверностью между остальными ответами не наблюдалось.

### Литература

1. Sampling for the European Social Survey. Round VI: Principles and Requirements. Mannheim: European Social Survey; GESIS, 2012. 16 p.
2. Белим С.В., Смирнова Т.Б., Мироненко А.Н. Применение метода построения ассоциативных правил к анализу деятельности общественных организаций // Математические структуры и моделирование. 2017. № 2 (42). С. 49–58.
3. Orange. URL: <https://orange.biolab.si/> (дата обращения: 11.02.2018).

**Yu.A. Griber, T. A. Samoylova**  
Smolensk State University

### SEARCH ASSOCIATIVE RULES IN THE RESULTS OF THE POLLING OF COLORED PREFERENCES

**Keywords:** *associative rules, algorithm FP-Growth, experiment, color preferences.*

**Abstract.** *The article suggests a method for analyzing the results of an experimental research of color preferences, based on the construction of associative rules. Questionnaires of respondents containing answers characterizing associations of colors with a given set of anthropologically relevant concepts are used as transactions. Based on the application of the algorithm FP-Growth, associative rules are obtained, corresponding to the relationships between color preferences.*

**Г.М. Григорьева, В.Ю. Ходченков**  
Смоленский государственный университет

УДК 004.891

### РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ В МЕДИЦИНСКОЙ ПРАКТИКЕ

**Ключевые слова:** *интеллектуальный анализ данных, большие данные, автоматическая обработка клинических текстов.*

*Предложен подход к построению систем компьютерной поддержки принятия решений в медицинской практике на основе диагностических данных пациента. Приведено описание*



*программного проекта, который реализует решаемую задачу с использованием СУБД PostgreSQL и системного программирования для языка Python. Описана архитектура системы, показано, как она взаимодействует с экспертами, обучающими систему и пользователями. Предложено решение, обеспечивающее врача информацией, необходимой для выбора им наилучшего способа лечения.*

Разработка и внедрение в медицину новых методов диагностики заболеваний и их осложнений не только не заменяет традиционного обследования пациента, но и не решает основной проблемы – выбора правильного диагностического вывода. Проявление одного и того же заболевания и развитие одних и тех же осложнений различается у разных пациентов и не всегда соответствует «классической» картине болезни [2].

Главная проблема инфекционных заболеваний, в частности кори, – наличие осложнений, которые могут приводить к летальным исходам. Поэтому для благоприятного исхода лечения возникает необходимость дополнительного контроля пациентов, находящихся в группе риска по формированию осложнений. Это требует поиска способов распознавания проблем со здоровьем на ранних этапах лечения и в амбулаторных условиях.

Таким образом, выбор методов и алгоритмов интеллектуального анализа данных, которые способны решать конкретные медицинские задачи, и разработки на их основе специализированных систем поддержки принятия решений – актуальная задача, а развитие медицинской кибернетики и современной вычислительной техники открывает для ее решения новые возможности.

Интеллектуальный анализ данных (ИАД) в медицинской практике действует на основе правил, формализующих экспертные знания, и благодаря этому стало возможным получение более качественных результатов в диагностике заболеваний и их осложнений [3]. Концепция шаблонов, которые применяются для поиска клинически важной информации, лежит в основе ИАД [1]. При помощи таких шаблонов, используя алгоритмы и методы ИАД, мы разработали систему поддержки принятия решений для медицинских организаций.

Построенная система компьютерного интеллектуального анализа медицинских данных (СКИАМД) решает задачу прогнозирования возможности осложнений у определённых групп пациентов путем анализа диагностических факторов, содержащихся в электронной истории болезни пациента. На вход такой системы

поступает информация из систем ведения электронных историй болезни, которые содержат большие объёмы разнородной информации, генерируемой медицинской организацией. Исходная медицинская информация уже обработана, структурирована и разбита на шесть основных разделов.

Данные представляют собой шесть связанных таблиц, хранящихся в общей базе данных. Распределение данных по таблицам соответствует распределению данных по классификационным разделам. Связь между таблицами осуществляется через идентификатор пациента (ID), что позволяет обрабатывать данные отдельно, а затем внести результаты по каждому пациенту в одну таблицу.

Первая таблица «Anamnesis Vitae» содержит наиболее значимую информацию для определения пациента в группу риска по развитию осложнений данного заболевания и включает в себе четыре столбца: ID, возраст, наличие вакцинаций, перенесенные заболевания.

Вторая таблица «Температурный лист» содержит информацию о колебаниях температуры пациента, находящегося на стационарном лечении. Состоит из пяти столбцов: ID, дата и время, показатель температуры, прием жаропонижающих, наличие гипертермии.

Третья таблица «Anamnesis morbi» – описание течения заболевания со слов пациента. Информация в этой таблице субъективна, так как пациент не всегда точно может описать свое состояние. Таблица включает четыре столбца: ID, период начала заболевания, гипертермия, описание состояния.

В четвертую таблицу «Осмотр» занесены результаты осмотра специалистом в одиннадцать столбцов: ID, гипертермия, рвота (при гипертермии), головная боль (при гипертермии), одышка, кашель, мокрота, менингеальные знаки, выраженная гиперемия зева, гнойный налет, основные признаки заболевания.

Пятая таблица «Лабораторные данные» содержит данные клинической лабораторной диагностики: ID, анализ «Аланинаминотрансфераза (АЛТ)», анализ «Аспартатаминотрансфераза (АСТ)», анализ «Скорость оседания эритроцитов (СОЭ)», анализ «Креатинин», анализ «Мочевина», анализ «Лейкоциты», данные анализа, данные нормы, идентификатор превышения нормы.

Шестая таблица «Динамика клинических данных в процессе лечения» содержит данные о протекании заболевания у пациента, при нахождении в стационаре и включает: ID, дата поступления в стационар, интоксикационный синдром, экзантемный синдром,

предполагаемое начало экзантемного синдрома, катарально-респираторный синдром.

Данный набор диагностических факторов, указанный в базе данных для ассоциации фактора с его «диагностическим значением», основан на медицинской карте стационарного больного по учетной форме № 003/у и медицинской карте пациента, получающего медицинскую помощь в амбулаторных условиях, по учётной форме № 025/у.

Архитектура СКИАМД представляет собой графическую оболочку на языке DLL и на языке Python, в котором реализована нейросеть. Python же был выбран из-за широкого спектра библиотек мирового уровня для работы с искусственным интеллектом, анализом данных и нейросетями.

Для хранения исходных данных и передачи их в программу используется реляционная система управления базами данных PostgreSQL, так как эта СУБД очень хорошо приспособлена для связи с программой, написанной на языке Python.

Данные запрашиваются напрямую из базы данных PostgreSQL. Далее приведен пример запроса для таблицы «Anamnesis Vitae»:

```
Db.query("SELECT id, age, vaccination, diseases FROM tbA");
```

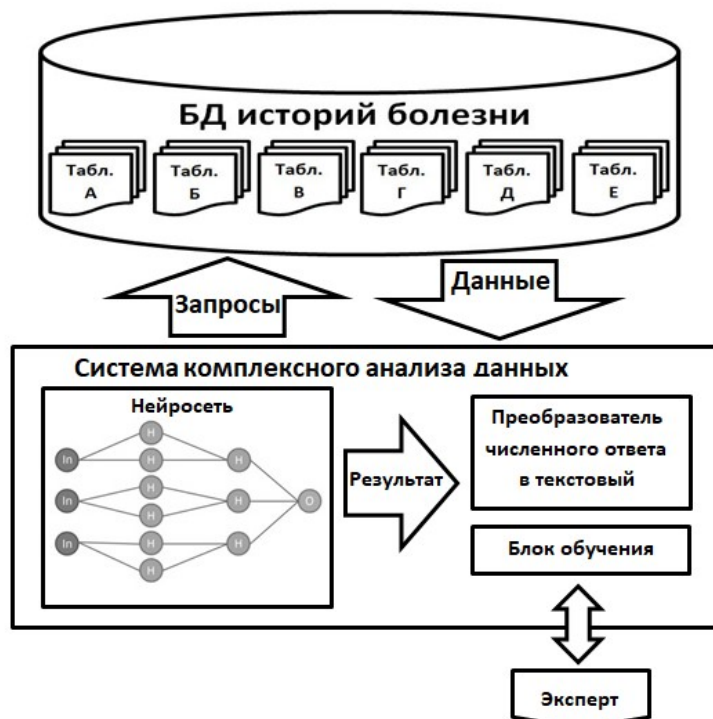


Рис. 1. Процесс обучения нейросети

Процесс обучения системы показан на рисунке 1.

Работа специалиста во время обучения сводится к последовательному указанию системе верных решений по имеющимся диагностическим данным, представленным в электронной истории болезни. То есть в процессе обучения нейросеть отправляет на выход предполагаемое решение по конкретному набору факторов, специалист оценивает, как следует поступить, и выбирает решение из представленных трех (дополнительный осмотр, ранняя терапия, экстренная госпитализация). Сеть переобозначает диагностическое значение каждого используемого фактора и повторяет расчет. Указанные действия повторяются до тех пор, пока не будет совпадения с мнением специалиста.

Для использования в медицинских организациях конечным пользователем (врачом) система включает в себя четыре блока: база данных PostgreSQL, графический интерфейс, нейросеть, обработка результатов. Пользователь взаимодействует напрямую только с графическим интерфейсом, который позволяет получить представление о возможности осложнений заболевания у конкретного пациента, используя стандартную электронную историю болезни.

Для решения задачи реализации системы поддержки принятия решений была выбрана классификационная нейросеть. Выбор этого типа сети обусловлен тем, что окончательное решение остается за человеком.

Таким образом, реализованная система позволяет облегчить работу врача по контролю состояния пациентов. Благодаря обучению на основе знаний специалистов высокой квалификации и использованию для обучения больших и сверхбольших объемов данных обеспечивается высокий уровень достоверности результатов, получаемых врачом, который использует СКИАМД. Применение предложенной системы особенно актуально для работы начинающих врачей. Она позволяет им опираться на многолетний опыт специалистов.

Авторы благодарны доценту В.И. Мунерману за помощь в разработке системы.

### **Литература**

1. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Интеллектуальные информационные системы. М.: Финансы и статистика, 2006. 424 с.
2. Анохин П.К. Узловые вопросы теории функциональной системы. М.: Наука, 1980. 197 с.; Баевский Р.М. Прогнозирование состояний на грани нормы и патологии. М.: Медицина, 1979. 298 с.
3. Кузнецова А.В., Сенько О.В. Возможности использования методов Data Mining при медико-лабораторных исследованиях для выявления

**G.M. Grigoryeva, V.Y. Khodchenkov**  
Smolensk State University

**Keywords:** *data mining, big data, automatic processing of clinical texts.*

**Abstract.** *A method for constructing computer aid systems for decision-making in medical practice based on patient diagnostic data is proposed. The description of the software project that implements the problem being solved using PostgreSQL DBMS and system programming for Python language is given. The architecture of the system is described, it is shown how it interacts with experts training the system and users. A solution is proposed that provides the physician with the information necessary for choosing the best method of treatment.*

**Е.И. Данилюк, В.И. Мунерман**  
Смоленский государственный университет

УДК 004.657

**ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЙ КОМПЛЕКС  
ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ  
БОЛЬШИХ ДАННЫХ**

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы.*

*В статье рассматривается один способ параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов на основе принципа симметричного горизонтального распределения на программно-аппаратном комплексе с MPP архитектурой. В качестве основы системы связи между хост-машиной и вычислителями был использован протокол TCP/IP. Приведено описание эксперимента, в ходе которого данные подвергались симметричному горизонтальному распределению между вычислителями по локальной сети. После обработки результаты по сети собирались на хост-машине. Эксперимент подтвердил эффективность предложенного подхода.*

В работе рассматривается способ параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов на основе принципа симметричного горизонтального распределения на программно-аппаратном комплексе с MPP архитектурой. Этот принцип подробно описан в работах [1; 2]. Там же были приведены описания программно-аппаратных комплексов с SMP и MPP архитектурами и приведены результаты экспериментов, подтверждающие эффективность предложенного подхода. Эксперименты проводились с данными, хранящимися и обрабатываемыми в БД Microsoft SQL Server. Это возможно, поскольку теоретико-множественная (файловая) модель данных, в которой сформулирован принцип симметричного горизонтального распределения, изоморфна SQL-реляционной модели. В этой модели операции слияния нестрого упорядоченных файлов соответствует операция Join.

Вместе с тем, реализация на основе MPP архитектуры была выполнена средствами, которые в наибольшей степени соответствуют использованию локальной сети (ЛВС) в качестве среды, связующей вычислительные средства, которые образуют программно-аппаратный комплекс. Управление ими осуществлялось посредством передачи широковещательных сообщений внутри ЛВС. Такой способ хорош для работы с заранее распределенными данными, но неприемлем для распределения таблиц-операндов операции Join основной БД между БД-фрагментами.

С другой стороны, программно-аппаратный комплекс может быть создан и в глобальных сетях: интранет или интернет. Поэтому была поставлена задача использования стандартных сетевых протоколов для обеспечения связи и управления между вычислителями, а также передачи обрабатываемых данных от основной БД к БД-фрагментам и результатов выполнения операции в обратном направлении.

Для этой цели был выбран протокол TCP/IP. Он гарантирует доставку, нумерует пакеты, подтверждает принятие пакетов, а в случае потери или ошибочного приема пакета обеспечивает возможность повторной передачи. Кроме того, этот протокол применяется как в локальных, так и в глобальных вычислительных сетях.

В этом случае в программе на хост-машине (рис. 1) заданы IP-адреса вычислителей, которые выполняют операцию Join над фрагментами таблиц. Кроме того, совместно с IP-адресом задается номер сетевого порта, по которому осуществляется связь и передача данных. Каждый вычислитель использует свой порт для того, чтобы получить соответствующие ему фрагменты таблиц для выполнения операции и возврата результата. Каждый вычислитель получает от хост-машины номер ассоциированного с ним порта.

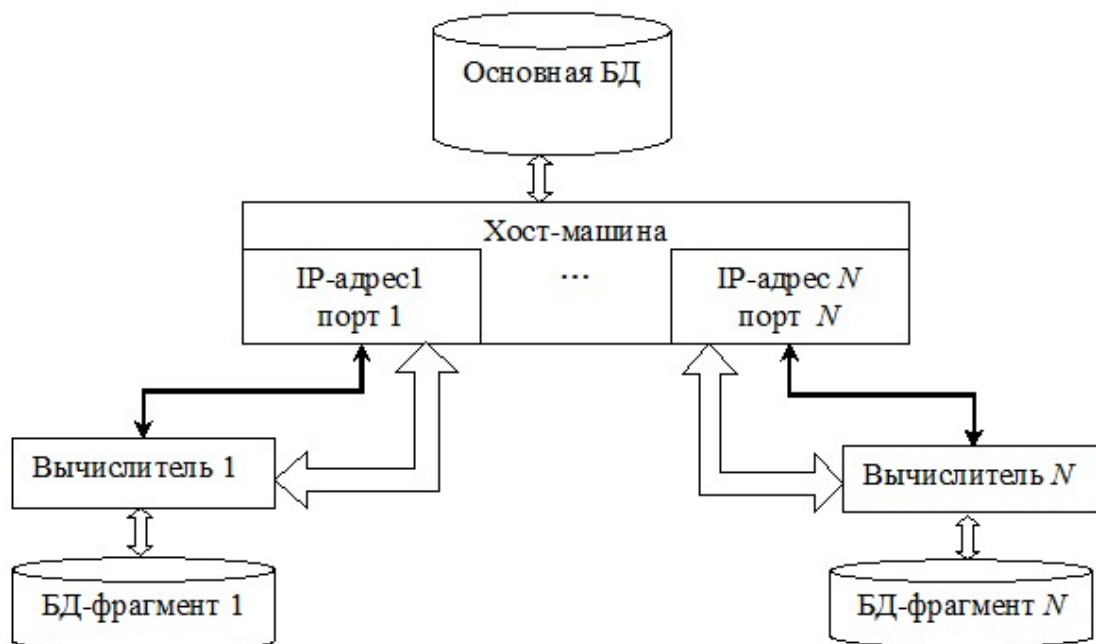


Рис. 1. Архитектура программно-аппаратного комплекса

Алгоритм работы хост-машины в предположении, что все индексные таблицы, используемые при симметричном горизонтальном распределении уже построены алгоритмом бустрофедона [3], состоит из следующей последовательности действий.

1. После загрузки программы, выполняется настройка IP-адресов и номеров портов для вычислителей.

2. Для каждого вычислителя (параллельно для всех) выполняются следующие циклические действия по количеству строк в соответствующем ему фрагменте обобщенной индексной таблицы:

- 2.1. настраиваются запросы считывания очередных классов эквивалентности из таблиц-операндов;
- 2.2. производится считывание класса эквивалентности таблицы в байт-массив;
- 2.3. устанавливается сеансовое соединение с соответствующим вычислителем;
- 2.4. байт-массив по сети передается вычислителю.

3. После завершения отправки всех фрагментов таблиц-операндов программа переходит в режим ожидания результатов работы вычислителей.

4. Когда вычислитель сообщает о готовности результата операции Join над своими фрагментами таблиц, программа:

- 4.1. настраивается на прием данных;
- 4.2. поочередно принимает байт-массив фрагмента-результата и перемещает его в базу данных, в таблицу-результат операции Join.

5. Процесс завершается тогда, когда все результаты от всех вычислителей приняты.

Далее приводится алгоритм работы вычислителя, который состоит из следующих действий.

1. После загрузки программы производится настройка на конкретный IP-адрес и номер порта, соответствующие данному вычислителю.

2. Создает объект класса TcpListener, который обеспечивает ожидание входящих сеансовых соединений с хост-машиной по своему локальному IP-адресу и номеру порта.

3. После установки сеансового соединения с хост-машиной выполняются следующие действия:

3.1. создается сетевой входной/выходной поток данных;

3.2. выполняется прием из входного потока байт-массива с фрагментом-таблицы операнда для каждой таблицы-операнда;

3.3. содержимое байт-массива перемещается в базу данных;

3.4. после того как оба фрагмента таблиц-операндов сформированы, выполняется операция Join над этими фрагментами.

4. После завершения операции ее результат передается хост-машине с использованием созданного в п. 3.1 сетевого потока данных.

Для оценки качества предложенного метода параллельной реализации операции Join на основе принципа симметричного горизонтального распределения таблиц-операндов и сетевого взаимодействия хост-машины с вычислителями по протоколу TCP/IP был проведен эксперимент.

Основная БД содержала две таблицы со схемами T1(A nchar(10), B int) и T2(A nchar(10), C int). Запрос на выполнение операции Join был следующим:

```
INSERT INTO Res SELECT T1.A, SUM(T1.B*T2.C)
FROM T1 INNER JOIN T2 ON T1.A=T2.A
```

Программно-аппаратный комплекс состоял из пяти вычислительных блоков со следующей комплектацией:

процессор – Intel Core i5 (четыре физических ядра);

оперативная память – 8 Гбайт;

жесткий диск – 512 Гбайт.

Связь между блоками осуществлялась по локальной сети со скоростью передачи данных 100 Мбит/сек.

В ходе эксперимента изменялись объемы таблиц, а объемы классов эквивалентности не фиксировались, но оставались достаточно большими. С ростом объема данных эффективность алгоритма была доказана экспериментальным путем. Было отмечено, что данный алгоритм обеспечивает высокую загрузку ресурсов вычислительной системы, чего не скажешь о методе, используемом в СУБД. В ходе



эксперимента были получены следующие временные характеристики, представленные в таблице 1.

Таблица 1

**Зависимость времени выполнения программы**

Количество записей в таблице	Время распределения фрагментов алгоритмом бустрофедона	Время передачи данных вычислителям, выполнение операции Join и возврат результатов вычислителями	Общее время эксперимента
4000000	1,53	3,12	4,65
8000000	3,9	5,18	9,08

Благодаря предложенной архитектуре время, затрачиваемое на обработку больших данных, существенно снижается. Время передачи данных по сети является небольшим и не отражается на полученном времени.

Для выполнения слияния двух таблиц стандартными средствами СУБД Microsoft SQL Server понадобилось 38 минут 44 секунды. Так как эта операция имеет экспоненциальную зависимость, при увеличении количество записей время будет существенно увеличиваться.

Исходя из сказанного, можно утверждать, что предложенный метод организации данных и программно-аппаратного комплекса позволяет существенно повысить качество обработки больших данных.

**Литература**

1. Данилюк Е. И., Мунерман В.И. Анализ параллельного алгоритма слияния нестрого упорядоченных файлов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 44-47.
2. Данилюк Е. И., Мунерман В. И. Сравнительный анализ реализации операции JOIN на комплексах с SMP и MPP структурах // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. Вып. 18. С. 66-67.
3. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т.10, № 4. С. 3-16.

**E.I. Danilyuk, V.I. Munerman**  
Smolensk State University

**PROGRAM-HARDWARE COMPLEX FOR PARALLEL  
PROCESSING OF DISTRIBUTED LARGE DATA**

Keywords: *mass processing of data, parallel programming, software and hardware complexes.*

**Abstract.** *The article considers one way of parallel implementation of the merge operation of loosely ordered files based on the symmetric horizontal distribution principle on the software and hardware complex with MPP architecture. As the basis of the communication system between the host machine and the calculators, the TCP / IP protocol was used. The description of the experiment is given, during which the data was subjected to a symmetric horizontal distribution between the computers over the local network. After processing, the results on the network were collected on the host machine. The experiment confirmed the effectiveness of the proposed approach.*

**О.Е. Диев, В.И. Мунерман**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.657

## **АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫВОДА АССОЦИАТИВНЫХ ПРАВИЛ В ТЕХНОЛОГИИ IN-DATABASE**

*Ключевые слова: искусственный интеллект, ассоциативные правила, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы, PostgreSQL*

*В работе рассматривается задача вывода ассоциативных правил, возможность распараллеливания данного процесса в технологии in-database средствами одной из наиболее эффективных СУБД PostgreSQL. В данной работе используется десятая версия этой СУБД. Представлена детальная информация о времени работы полученных результатов при исполнении запросов на построение ассоциативных правил в различных графических интерфейсах (pgAdmin3 и pgAdmin4) при последовательном построении ассоциативных правил и соответственно их параллельном построении.*

**Задача вывода ассоциативных правил.** Для решения этой задачи возможно применение технологии in-database. В статье [2] говорится, что среди СУБД, в которых можно эффективно решать данную проблему, одной из наиболее эффективных является Postgre, это объясняется тем, что в ней реализованы возможности по параллельной реализации сложных запросов, содержащих операцию JOIN. Поэтому статья посвящается решению задач вывода ассоциативных правил в технологии in-database средствами СУБД PostgreSQL.

**Параллелизм в СУБД PostgreSQL.** PostgreSQL 10 содержит улучшенную поддержку параллельного выполнения запросов – еще

больше частей плана выполнения запроса теперь могут исполняться параллельно. Улучшения заключаются в том, что многие типы операций сканирования данных могут быть распараллелены, а также в том, что в некоторых случаях (например, когда данные уже отсортированы) проводится дополнительная оптимизация. В итоге, пользователь получает данные намного быстрее [6]. Именно по этой причине была выбрана PostgreSQL версии 10.

**Ассоциативные правила.** Ассоциативные правила в настоящее время превратились в мощный инструмент аналитических информационных систем. Поскольку в основе любых информационных систем лежат базы данных, весьма актуально направление, связанное с реализацией алгоритмов интеллектуального анализа на языках манипулирования данными. Это направление получило название «аналитика в базе данных» («in-database analytics»). Оно предполагает разработку технологий, позволяющих осуществлять обработку данных в базе данных путем построения аналитической логики в самой базе данных. В большинстве современных СУБД эти языки, подобные Transact SQL или PL/SQL, приобрели основные черты процедурно-ориентированных языков программирования. Запросы к БД записываются на этих языках как программы, содержащие переменные разных типов и операторы управления. Программы запросов оформляются в виде хранимых процедур, которые транслируются и поэтому выполняются значительно быстрее, чем интерпретируемые запросы. Кроме того, большинство современных СУБД оптимизируют и распараллеливают SQL-запросы. Поэтому реализации вывода ассоциативных правил средствами СУБД посвящено достаточно много исследований. В большинстве работ в этой области в основу вычислений положена операция JOIN.

В общем виде задача вывода ассоциативных правил выглядит следующим образом. Имеется множество объектов  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$  и множество свойств  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ . Каждому объекту из  $I$  соответствует некоторое непустое подмножество свойств из  $P$ . Вывод ассоциативных правил состоит из двух этапов. На первом этапе для каждого подмножества свойств определяется количество объектов, которые обладают всеми свойствами этого подмножества, и только этими свойствами. На втором этапе на основе полученных статистических данных и требований пользователя-аналитика выводятся сами ассоциативные правила.

Известны различные варианты реализации алгоритма Apriori средствами языка SQL. В дальнейшем рассматривается реализация, основанная на построении на каждой итерации промежуточной таблицы, которая используется на следующей итерации.

База данных для решения задачи вывода ассоциативных правил, как правило, содержит следующий набор таблиц:

$R_0(I, P_1)$  – исходные данные, каждая строка содержит идентификатор объекта и одно из его свойств;

$CopyR_0(I, P_1)$  – копия таблицы  $R_0$ , она необязательна и может использоваться для ускорения процесса обработки данных;

$R_1(I, P_1, P_2), \dots, R_{k-1}(I, P_1, \dots, P_k)$  – таблицы, получаемые на итерациях и содержащие данные для вывода ассоциативных правил на очередной итерации и используемые на следующей итерации как исходные данные.

Запрос, исполняемый на  $l$ -той итерации, имеет следующий общий вид:

$Q_l = \text{INSERT INTO } R_l(I, P_1, \dots, P_{l+1})$

$\text{SELECT } R_{l-1}.I, R_{l-1}.P_1, \dots, R_{l-1}.P_l, R_0.P_1 \text{ AS } P_{l+1}$

$\text{FROM } R_{l-1} \text{ INNER JOIN } R_0$  [на первой итерации вместо  $R_{l-1}$  используется  $CopyR_0$ ]

$\text{ON } R_{l-1}.I = R_0.I \text{ AND } \pi(R_{l-1}.I, R_{l-1}.P_1, \dots, R_{l-1}.P_l, R_0.P)$ .

$\pi(R_{l-1}.I, R_{l-1}.P_1, \dots, R_{l-1}.P_l, R_0.P)$  – предикат, запрещающий дублирование комбинаций свойств. Таким образом, если для построения ассоциативных правил необходимо знать количества всех объектов, содержащих комбинации свойств от одного до  $k \leq s$ , выполняются запросы  $Q_1, \dots, Q_{k-1}$ . Из таблиц  $R_0, \dots, R_{k-1}$ , исходной и полученных в результате запросов, на втором этапе выводятся ассоциативные правила [7].

**Описание эксперимента.** Для решения задачи был проведен эксперимент по последовательному и параллельному вычислению в разных графических интерфейсах (далее ГИ) для работы с БД. В зависимости от используемого ГИ результаты времени обработки запроса отличались. Это объяснялось тем, что ГИ pgAdmin 3 не строит параллельных планов запроса, в то время как ГИ pgAdmin 4 в полной мере использует возможности параллелизма СУБД PostgreSQL 10-ой версии. Результаты эксперимента представлены в таблице 1 и на рисунке 1.

Примеры хранимых процедур на языке PostgreSQL, реализующих вывод ассоциативных правил, приведены на листингах 1 и 2.

Листинг 1. Хранимая процедура первого этапа вывода ассоциативных правил

```
ar1() - INSERT INTO "F1"
```

```
SELECT item, SUM(1) FROM "F" GROUP BY "F"."item" ORDER BY "F"."item";
```

Листинг 2. Хранимая процедура для последующих этапов вывода ассоциативных правил

```
ar5()-INSERT INTO "F5"
```

```
SELECT "F"."item", "F4"."item1", "F4"."item2", "F4"."item3", "F4"."item4", "F"."tid" FROM "F" INNER JOIN "F4"
```

```
ON "F"."tid"="F4"."tid" AND "F"."item" < "F4"."item1" AND
"F"."item" < "F4"."item2" AND "F"."item" < "F4"."item3" AND "F"."item" <
"F4"."item4";
```

```
INSERT INTO "F5r"
SELECT "item1", "item2", "item3", "item4", "item5", SUM(1) FROM
"F5"
```

```
GROUP BY "item1", "item2", "item3", "item4", "item5" ORDER BY
"item1", "item2", "item3", "item4", "item5";
```

На листинге 2 первый оператор INSERT реализует построение таблицы для работы на следующем этапе вывода ассоциативных правил, а второй оператор INSERT осуществляет вывод ассоциативных правил для пяти признаков.

Таблица 1

**Зависимость времени выполнения от объема БД и способа вычисления**

Количество записей в таблице и способ вычисления	Время обработки 5 свойств (сек)	Время обработки 6 свойств (сек)	Время обработки 7 свойств (сек)
1000000 - последовательно	2	4	5
1000000 - параллельно	1.5	1.5	3
2000000 - последовательно	5	8	11
2000000 - параллельно	1.5	3.5	6

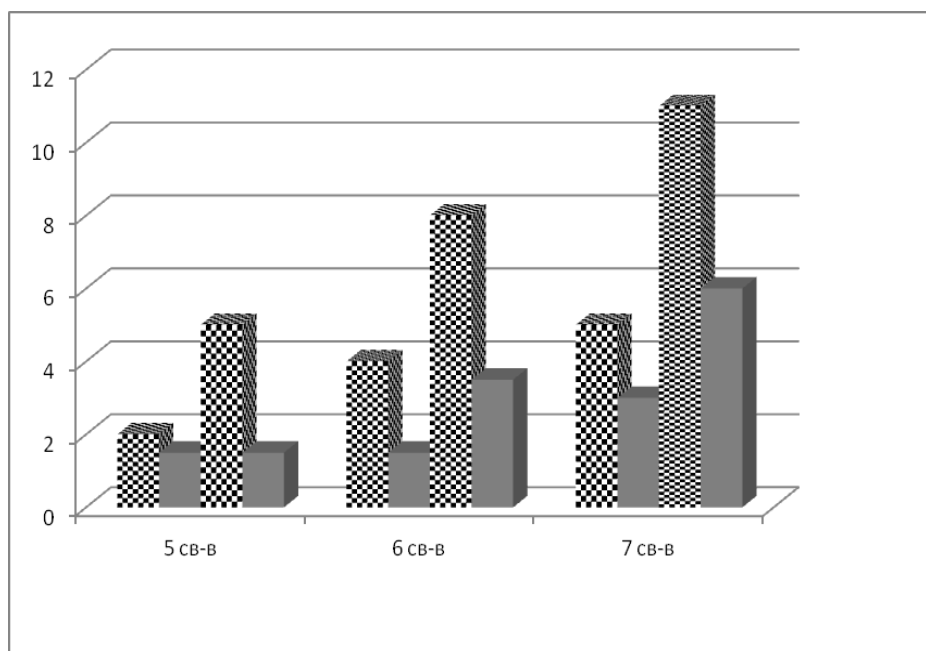


Рис. 1. Зависимость времени выполнения от объема БД и способа вычисления

На этой диаграмме столбики, заполненные разреженной штриховкой, соответствуют последовательной реализации алгоритма, а сплошной штриховкой – параллельной. Из таблицы и графика видно, что при увеличении числа объектов и их свойств отношение времени параллельной реализации запросов, реализующих вывод ассоциативных правил, ко времени последовательной реализации уменьшается. Особенности данных, используемых для вывода ассоциативных правил (как исходных, так и промежуточных), таковы, что они могут быть легко подвергнуты симметричному горизонтальному распределению. Это в значительной степени повысит производительность программного обеспечения, реализующего вывод в технологии in-database.

Из сказанного можно сделать вывод о том, что применение стандартных средств распараллеливания сложных запросов, присущих СУБД PostgreSQL, позволяет улучшить время решения задачи вывода ассоциативных правил.

### Литература

1. <https://www.postgresql.org/docs/10/static/index.html>.
2. Левин Н.А., Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности. 2013, Т. 9, № 1. С. 35-43.
3. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014, Т.10, № 4. С. 3-16.
4. [www.oracle.com/technetwork/database/in-memory/overview/index.html](http://www.oracle.com/technetwork/database/in-memory/overview/index.html).
5. Пан К.С., Цымблер М.Л. Разработка параллельной СУБД на основе последовательной СУБД PostgreSQL с открытым исходным кодом // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2012. № 18(277). Вып. 12. С. 112-120.
6. <https://www.postgresql.org/about/press/presskit10/ru>.
7. <http://itedu.oit.cmc.msu.ru/index.php/convergent/index/information/msuarchive>  
Конвергентные когнитивно-информационные технологии: сборник избранных научных трудов II Международной научной конференции Convergent'2017 (24–26 ноября 2017 года, г. Москва, МГУ, Россия) / под ред. В.А. Сухомлина. М.: МГУ, 2017. 490 с.

**O.E. Diev, V.I. Munerman**  
Smolensk State University

### ANALYSIS OF IMPLEMENTATION THE ASSOCIATIVE RULES CONCLUSION IN IN-DATABAS TECHNOLOGY

**Keywords:** *artificial intelligence, associative rules, parallel programming, software and hardware complexes, PostgreSQL.*

**Abstract.** *In this paper, we consider the problem of deriving associative rules, the possibility of parallelization of this process in in-database technology by means of one of the most effective DBMS in the person of PostgreSQL. In this work, the tenth version of this DBMS was used. In conclusion, detailed information about the time of work of the results obtained is presented in the execution of requests for the construction of associative rules in various graphical interfaces (pgAdmin3 and pgAdmin4), namely, in the sequential construction of associative rules and correspondingly their parallel construction.*

**А.А. Жарков**

*Смоленский государственный университет*

УДК 004.056.53, 004.056.55

## **НЕКОТОРЫЙ СПОСОБ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ ОТ НЕСАНКЦИОНИРОВАННОГО ДОСТУПА В ИНТЕРНЕТЕ ВЕЩЕЙ**

*Ключевые слова: интернет вещей, несанкционированный доступ, методы шифрования, метод Диффи-Хелмана, деревья Хаффмана; блочные алгоритмы шифрования, криптоустойчивость, умные среды, интеллектуально-ориентированные среды.*

*В данной статье рассматривается проблема безопасности и целостности информационной системы, содержащей в себе «умные» устройства. Анализируется возможность предотвращения несанкционированного доступа к интеллектуально-ориентированному комплексу объектов концепции интернета вещей. Рассмотрены некоторые примеры возможных способов передачи конфиденциальной информации, где за основу взяты методы, которые помогают раскрыть проблему защиты информации от несанкционированного доступа со всех сторон. Базируясь на некоторых известных методах и алгоритмах, напрямую или косвенно связанных с защитой информации от несанкционированного доступа, построена идея защиты информационных систем «умных» сред, состоящей из устройств, вычислительная мощность которых недостаточно велика для выполнения сложных вычислений. Установлена основная причина сложности задачи защиты информации от несанкционированного доступа в интеллектуально-ориентированных средах, связанная с доступностью данных системы и вмешательством в нее со стороны. В частности, проведен анализ основных методов получения информативной части пакетов, передаваемых в информационных системах, содержащих «умные» устройства. Приведены*

*разработанные для решения поставленной задачи некоторые возможные модификации нескольких известных алгоритмов. Также приведены некоторые примеры защиты системы от рассмотренных в статье видов взламывания.*

В настоящее время защита информации в интернете вещей признана серьезной проблемой. Считается невозможным надежно защитить информацию из-за низкой вычислительной способности микроконтроллеров из-за невысоких тактовых частот. Но в связи с потенциальной возможностью нанесения ущерба владельцу интеллектуально-ориентированной среды за счёт кражи личных данных и возможности изменения ее функционирования, необходимо разработать некоторую методику, которая позволит защищать данные в системах концепции интернета вещей.

Все криптоалгоритмы делятся на следующие группы [1]:

- 1) тайнопись;
- 2) шифрование с ключом;
- 3) симметричные алгоритмы;
- 4) потоковые (на основе генератора случайных чисел, с конечным ключом, с бесконечным ключом);
- 5) блочные (моноалфавитные, полиалфавитные, шифры замены и перестановки);
- 6) составные (люцифер, DES, ГОСТ 28147, В-Crypt, IDEA, FEAL);
- 7) асимметричные алгоритмы (Diffie -Hellman, RSA, ElGamal).

Очевидным является факт, что асимметричные алгоритмы имеют наиболее высокую криптоустойчивость. Но из-за некоторых особенностей подсистем интеллектуально-ориентированных сред они становятся невозможными к исполнению в связи с высокой вычислительной сложностью и потребностью в оперативной памяти.

В связи с этим в работе рассматриваются симметричные алгоритмы. Тогда требуется подобрать метод симметричного шифрования, который будет достаточно криптоустойчив, чтобы за время работы системы интеллектуально-ориентированной среды сохранялась нулевая вероятность несанкционированного доступа.

Недостатками симметричного шифрования выделяют проблему управления ключами агентов, участвующих в передаче информации. Для решения данной проблемы будет использован алгоритм Диффи-Хелмана, который позволит устройствам с низкой вычислительной способностью, используя «несложные» операции, не затрачивать много времени на вычисления [2].

Среди достоинств данной системы шифрования выявляют возможность справляться с задачей шифрования быстро и просто, без потребности в больших ключах.



Для выполнения обозначенных целей оптимально использование любых блочных алгоритмов [3]. Но существенна угроза получения доступа к системе злоумышленником, распознавшим алгоритм и подобравшим ключ методом «атаки на основе шифротекста» [4]. В связи с этим возникает идея двойного шифрования текста, но это не обязательно увеличивает криптоустойчивость, поскольку может существовать третий ключ, который дает тот же шифротекст, что и двойное шифрование  $(F_{k_1}(F_{k_2}(m))) = F_{k_3}(m)$  [5]. Также может возникнуть идея использования алгоритма А и шифрования получившегося сообщения алгоритмом Б. Но данный метод не приведет к желаемому результату, в связи с легкой доступностью подсистем интеллектуально-ориентированной среды в случае атаки на основе подобранного шифротекста («атака в обеденное время») [4], что крайне незначительно усложнит для злоумышленника поиск ключей. В связи со сложностью программной защиты от такого способа атаки предлагается изменить методику «второго шифра». Чтобы лишить злоумышленника возможности атаки на основе шифротекста, преобразуем данные каким-либо из алгоритмов сжатия. А затем сжатые данные зашифруем одним из симметричных алгоритмов. И чем проще алгоритм, тем выгоднее это будет.

Например, алгоритм гаммирования (XOR cipher) [6], считается простым к взлому методом частотного анализа, но в случае, когда данные не сверяемы по словарю, алгоритм становится надежным. А для этого будем использовать специально разработанную модификацию метода деревьев Хаффмана, которая позволит агентам восстановить без потерь изначальное сообщение.

Идея кодирования Хаффмана основана на частоте символа в последовательности [7]. Символ, встречающийся в последовательности чаще всего, получает новый, очень маленький код, а символ, который встречается реже всего, получает, очень длинный код. Это делается для обработки всего ввода, где самые частотные символы заняли меньше всего места (и меньше, чем они занимали в оригинале), а самые редкие – побольше (но, так как они редкие, это не имеет значения).

Размер символа выбирается исходя из обрабатываемых данных. Например, если кодируются видеофайлы, символ приравнивать лучше к размеру пикселя. И важно, что при изменении размера символа меняется и размер кода для каждого символа, потому что с увеличением размера больше символов можно закодировать этим размером кода. Предположим, у нас есть строка «beer boor beer!», для которой на каждый знак тратится по одному байту, что означает, что строка занимает 120 бит памяти. После обработки строка будет занимать только 40 бит [7].

Так как для решения задачи требуется не только сжать, но и оставить возможность восстановления без потери, полученное в результате дерево восстановления исходного сообщения присоединится к сообщению. Но, для того чтобы увеличить криптоустойчивость алгоритма, дерево будет разбито на определённое число блоков и помещено внутрь сжатого сообщения.

На рисунке 1 изображена общераспространенная в программно-аппаратных комплексах концепции Интернета вещей схема передачи сообщений.

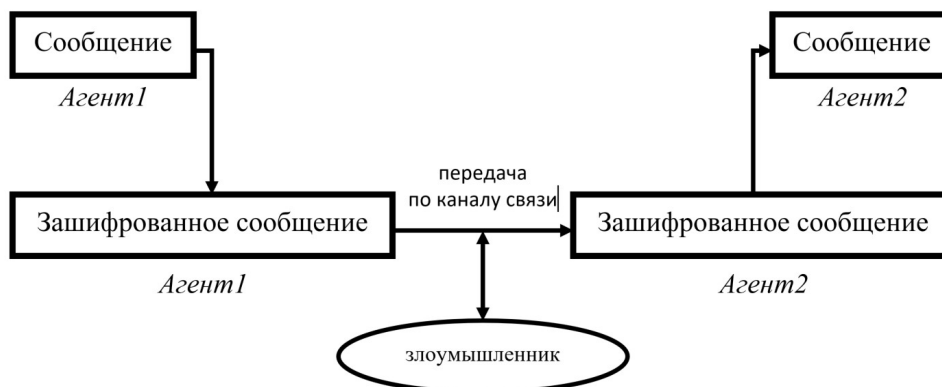


Рис. 1. Первоначальный метод передачи сообщения

Из схемы очевидно следует, что для данного метода требуется всего один ключ шифрования, который несложно получить, например, частотным способом.

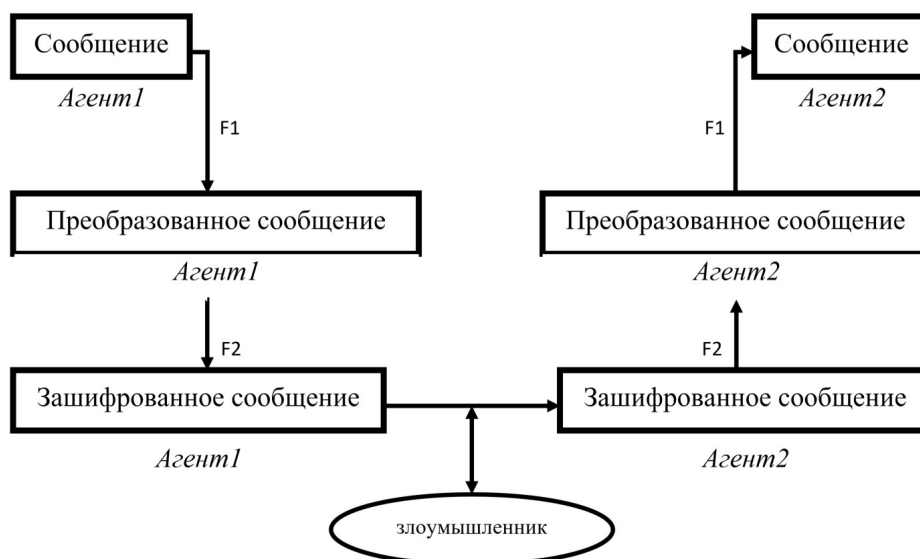


Рис. 2. Предложенный метод передачи сообщения

Но из рисунка 2, кратко представляющего расписанный выше метод, видно, что, хотя количество ключей увеличилось (ключ шифрования для алгоритма гаммирования и ключи разделения на блоки полученного дерева), устойчивость увеличилась в несколько раз за счет

сложности подбора большого количества переменных и исчезновения словаря для атаки на основе шифротекста.

### Литература

1. Bruce Schneier. Applied Cryptography. Protocols, Algorithms and Source Code in C. Wiley, 1993. 618 p.
2. Singh Simon. The Code Book: the evolution of secrecy from Mary Queen of Scots to quantum cryptography // New York: Doubleday – 1999. 416 p.
3. Chaouchi, Hakima. The Internet of Things. London: Wiley-ISTE, 2010.
4. Churchhouse, Robert. Codes and Ciphers: Julius Caesar, the Enigma and the Internet/ Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
5. Friedrich L. Bauer. Decrypted Secrets. / Springer 2002.
6. Richter, Wolfgang. Unbreakable Cryptography in 5 Minutes" / Crossroads The ACM Magazine for Students, Association for Computing Machinery.
7. Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. М.: «Вильямс», 2007. 459 с.

**A.A. Zharkov**

Smolensk State «University»

## SOME METHOD FOR PROTECTING INFORMATION FROM UNAUTHORIZED ACCESS IN THE INTERNET OF THINGS

**Keywords:** *internet of things, unauthorized access, encryption methods, the Diffie-Hellman method, Huffman coding, block encryption algorithms; crypto-stability, intelligent environments, intellectually-oriented environments.*

**Abstract.** *This article discusses a security problem and the integrity of the information system that contains «smart» devices. The possibility of preventing unauthorized access to the intellectually – oriented complex of objects of the Internet concept of things is analyzed. Examples of possible ways of transferring confidential information are considered, which are based on methods that help solve the problem of protecting information from unauthorized access. Based on some known methods and algorithms, directly or indirectly related to the protection of information from unauthorized access, the idea of protecting information systems of «smart» environments consisting of devices whose computational capability is not good enough for performing complex calculations is built. The main reason for the complexity of information protection challenges against unauthorized access to intellectually – oriented environments associated with system availability of data and interference in her side is set. The analysis of basic methods of obtaining the informative part of packets transmitted in information systems containing «smart» devices is carried out. Some possible modifications of several known algorithms developed for the solution of this problem are given. And also some examples of protection of the system from the types of hacking considered in the article are given.*

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЖИЗНИ – ЛЕБЕДЕВ И БРУК

Ключевые слова: *С.А. Лебедев, И.С. Брук, вычислительная техника, ВЭИ, АН СССР, ИТМ и ВТ, ИНЭУМ.*

*В судьбах двух великих советских ученых – основоположников создания вычислительной техники в СССР Сергея Алексеевича Лебедева и Исаака Семеновича Брука – отмечаются удивительные параллели, от дат рождения до дат смерти. В данной статье приведен ряд фактов, демонстрирующих это сходство. Мы используем двухколоночное представление текста с выделением полужирным шрифтом отдельных фактов.*

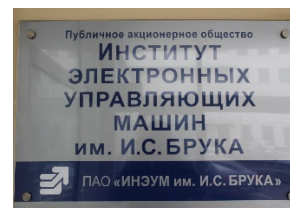
В Москве в районе Ленинского проспекта недалеко друг от друга расположены два научно-исследовательских института, носящих имена людей, которых с полным основанием можно назвать основоположниками вычислительной техники в СССР. Это Институт точной механики и вычислительной техники им. С.А. Лебедева и Институт электронных управляющих машин им. И.С. Брука. Линии жизни этих двух великих людей содержат удивительные параллели, которые попытаемся показать в данной статье.



Сергей Алексеевич Лебедев



Родился **20 октября** (2 ноября по новому стилю) **1902** года в Нижнем Новгороде.



Исаак Семенович Брук



Родился **27 октября** (9 ноября по новому стилю) **1902** года в Минске.

Отец – **служащий** земства, потом издатель, деятель в области педагогики.

**Сестра** Татьяна Маврина – всемирно известная художница.

В течение лета **1921** года завершил освоение программы средней школы и сдал экзамены экстерном.

**В 1921** году поступил в **МВТУ им. Н.Э. Баумана** на **электротехнический факультет**. Специализировался в физике высоких напряжений.

**В 1928** году окончил **МВТУ им. Н.Э. Баумана**. Тема дипломной работы «Устойчивость параллельной работы электростанций». Руководитель – А.К. Круг.

В 1928 году зачислен на должность младшего научного сотрудника во **Всесоюзный электротехнический институт им. В.И. Ленина (ВЭИ)**.

Одновременно оставлен на кафедре МВТУ в качестве преподавателя. Читал курс «Устойчивость работы параллельных электрических станций».

В 1930 году электротехнический факультет МВТУ преобразован в Московский энергетический институт МЭИ.

В 1930 году организовал лабораторию электрических сетей в **ВЭИ**. В 1933 г. вышла монография с П.С. Ждановым «Устойчивость параллельной работы электрических систем», создана теория переходных

Отец – **служащий** табачной фабрики.

**Сестра** Мирра – кандидат искусствоведения.

В **1920** году окончил реальное училище.

**В 1920** году поступил в **МВТУ им. Н.Э. Баумана** на **электротехнический факультет**.

**В 1925** году окончил **МВТУ им. Н.Э. Баумана**. Его диплом был посвящен новым способам регулирования асинхронных двигателей.

В 1925–1930 годах работал во **Всесоюзном электротехническом институте им. В.И. Ленина (ВЭИ)**.

Участвовал в создании новой серии асинхронных двигателей и решении задач параллельной работы электрогенераторов.

В 1930–1935 годах работал на Харьковском электротехническом заводе, где под его руководством были разработаны и построены несколько электрических машин новой конструкции, в том числе взрывобезопасные асинхронные

процессов в синхронных машинах – «уравнения Лебедева – Жданова».

**Математическое моделирование энергосистем, выполняемое с помощью аналоговых вычислительных машин,** позволило имитировать асимметричные нагрузки, создать регуляторы устойчивости. В ВЭИ были изготовлены и введены в эксплуатацию в тресте «Теплоэлектропроект» (Москва) и энергосистеме «Уралэнерго» (Свердловск) модели оригинальной конструкции. До появления ЭВМ модели служили основным средством анализа и оптимизации режимов работы сложных электроэнергетических систем.

**23 октября 1935** году ВАК присвоил звание профессора по кафедре «Электрические станции и сети». В 1936 году возглавил отдел автоматики **ВЭИ**, в котором занимались проблемой управления энергетическими системами, созданием **анализаторов для решения дифференциальных уравнений**. В **1939** году защитил докторскую диссертацию в Энергетическом институте АН СССР (**ЭНИИ**) по **теории искусственной устойчивости энергосистем (не будучи кандидатом)**. В **1941** году ВАК присудил ученую степень доктора технических наук.

двигатели. **5 лет работы на Украине.**

В 1935 году возвратился в Москву и по рекомендации академика К.И. Шенфера был направлен в Энергетический институт АН СССР (**ЭНИИ**). Организовал там лабораторию электросистем и начал исследования в области расчетов мощных энергетических систем. **Для моделирования таких систем он создал расчетный стол переменного тока – аналоговую вычислительную машину.**

В мае **1936** году присвоена ученая степень кандидата технических наук **без защиты диссертации**. В **октябре 1936** году защитил докторскую диссертацию на тему «**Продольная компенсация линий электропередач**». **28 января 1939** года был избран членом-корреспондентом АН СССР по Отделению технических наук по специальности «Энергетика, электротехника». В 1939 году на заседании Президиума АН СССР сделал доклад о созданном под его руководством механическом **интеграторе для решения дифференциальных уравнений до 6-го порядка**.

В 1941–1946 годах занимался разработкой и созданием управляемых самонаводящихся торпед, системы стабилизации танкового орудия при прицеливании.

**12 февраля 1945 года** избран действительным членом АН УССР. **В мае 1946 года** назначен директором Института энергетике АН УССР. С июня 1947 года – член Президиума АН УССР. Летом 1946 г. семья переехала в Киев. С мая 1947 года до конца 1951 года – директор Института электротехники АН УССР. **5 лет работы на Украине.** В 1950 году получил Государственную премию СССР (с Л.В. Цукерником) – за создание электромагнитно-полупроводниковых устройств компаундирования синхронных машин.

В конце 1947 года создал лабораторию по спецмоделированию и вычислительной технике. **К осени 1948 года закончил разработку основных принципов построения ЭВМ.** К концу 1948 года лаборатория получила необходимое финансирование и была обеспечена необходимыми кадрами. В пригороде Киева Феофании развернуты работы по созданию макета электронной

В 1941–1945 годах **работал над системами управления зенитным огнем, изобрел синхронизатор авиационной пушки,** которая стреляла через вращающийся пропеллер. В 1947 году избран действительным членом Академии артиллерийских наук.

В послевоенные годы под руководством И.С. Брука проводились исследования статической устойчивости энергосистем, разрабатывалась **аппаратура регулирования частоты и активной мощности для крупнейших электростанций страны,** был создан электронный дифференциальный анализатор ЭДА, позволяющий интегрировать уравнения до 20-го порядка.

Решая задачи в области электроэнергетики с помощью аналоговой вычислительной техники, **пришел к выводу о необходимости создания электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ) и их применения для получения необходимой точности вычислений.** В конце 40-х годов становится активным участником научного семинара, обсуждавшего вопросы автоматизации вычислений

счетной машины (МЭСМ).

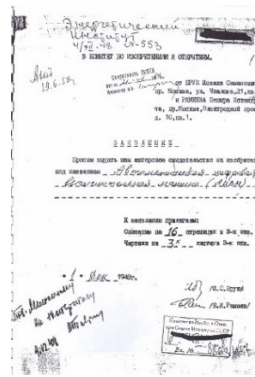
Помогал академик М.А.

Лаврентьев.

В 1948 году был создан ИТМ и ВТ, исполняющим обязанности директора был назначен академик **Н.Г. Бруевич**.

(создан при Президиуме РАН по инициативе академика-секретаря АН СССР **Н.Г. Бруевича**).

**В 1948 году совместно с Б.И. Рамеевым составил отчет о принципах действия ЭЦВМ. Первое в СССР авторское свидетельство на изобретение автоматической цифровой вычислительной машины (АЦВМ) на имя И.С. Брука и Б.И. Рамеева датировано 4 декабря 1948 года (приоритет, выдано 16 февраля 1950 года).**



В 1949 году выполнена разработка ЗУ и других основных компонентов машины, а также общая компоновка. В первой половине 1950 года были изготовлены все блоки и началась их отладка во взаимосвязи.

**6 ноября 1950 года** состоялся первый пробный пуск макета машины.

**4 января 1951 года** макет машины демонстрировался приемной комиссии. Комиссия составила акт об окончании разработки, изготовления и наладки макета. Начата переделка макета в электронную (малую) машину МЭСМ.

**10–11 мая 1951 года** МЭСМ

В 1950–1951 гг. была разработана малогабаритная электронная автоматическая цифровая машина М-1 (с хранимой программой).

**22 апреля 1950 года** вышло постановление Президиума АН СССР о начале разработки М-1.

**15 декабря 1951 года** научно-технический отчет «Автоматическая цифровая вычислительная машина [М-1]» был утвержден директором ЭНИН АН СССР академиком Г.М. Кржижановским.

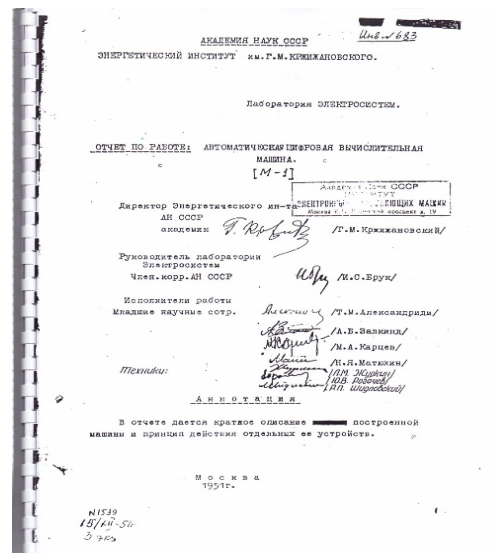


демонстрировали в Киеве правительственной комиссии и комиссии экспертов. В нее входили академики М.В. Келдыш и Н.Н. Боголюбов, а также специалисты по вычислительной технике Ю.Я. Базилевский, К.А. Семендяев, А.Н. Тихонов и др. **1 июля 1951 года** принято правительственное постановление № 2759-1321, обязывающее ввести в эксплуатацию МЭСМ в 4 квартале 1951 года. **25 декабря 1951 года МЭСМ была принята в эксплуатацию** государственной комиссией, в которую входили академики **С.Л. Соболев** и М.А. Лаврентьев, профессора К.А. Семендяев и А.Г. Курош. **МЭСМ была одной из двух первых в стране ЭВМ.**

16 марта 1950 года возглавил лабораторию №1 в ИТМ и ВТ (по совместительству). Семья переехала в Москву осенью 1951 года.

**21 апреля 1951 года** назначена Государственная комиссия под председательством М.В. Келдыша для приемки в ИТМиВТ **эскизных проектов Быстродействующей (большой) электронной счетной машины (БЭСМ).** МЭСМ стала называться Малой электронной счетной машиной.

**Апрель 1953 года.** БЭСМ (БЭСМ-1) принята Государственной комиссией под председательством академика М.В. Келдыша. В комиссию входили академики М.А. Лаврентьев, В.А.



**В начале 1952 года АЦВМ М-1 была введена в эксплуатацию.** Одним из первых решал на ней свои задачи академик **С.Л. Соболев.** **АЦВМ М-1 была одной из двух первых в стране ЭВМ.**

**В 1952 году** лабораторией Брука разработана машина М-2. В 1955–1956 годах И.С. Брук сформулировал концепцию малых ЭВМ и их отличия от машин предельной производительности. В 1956 году на базе лаборатории электросистем ЭНИН АН СССР для разработки электронно-вычислительной техники образована лаборатория управляющих машин и систем (ЛУМС) АН СССР под руководством И.С.Брука . Разработка в 1956–1957 годах машины М-3, проведенная ЛУМС совместно с НИИЭМ (акад. А.Г. Иосифьян), была принята в 1957 году Государственной комиссией под председательством академика **Н.Г. Бруевича,** выпускалась

Трапезников, С.Л. Соболев, **член-корреспондент И.С. Брук** и др.

**23 октября 1953** года избран действительным членом АН СССР по Отделению физико-математических наук по специальности «Счетные устройства».

**1956** год – выступление на сессии АН СССР по автоматизации с докладом об электронных вычислительных машинах.

Июнь **1953–1973** годов – директор ИТМ и ВТ.

С 1943 года член ВКП(б). 1956–1960 годы – разработка и создание первой отечественной системы (при активном участии) противоракетной обороны.

1 июня 1956 года присвоено звание Героя Социалистического Труда.

1955 год – выступление на международных конференциях в Дармштадте и Праге.

1957 год – выступление на международной конференции в Стокгольме.

1959 год – командировка в США в составе делегации ученых.

1961 год – научная командировка в Индию.

1964 год – командировка в

малой серией на заводе им. С. Орджоникидзе в Минске.

**1956** год – выступление на сессии АН СССР по автоматизации с докладом, в котором изложил главные направления промышленного применения вычислительных и управляющих машин.

В 1957 году поставил научную проблему «Разработка теории, принципов построения и применения специализированных вычислительных и управляющих машин».

**1 октября 1958** года ЛУМС АН СССР преобразована в Институт электронных управляющих машин (ИНЭУМ) АН СССР, директором которого стал И.С. Брук.

Брук избегал работать по постановлениям правительства с привлечением других коллективов. Работы по созданию ЭВМ М-1, М-2, М-3 выполнялись как внутриакадемические, по постановлениям президиума АН СССР.

Предложения И.С. Брука по применению ЭВМ в экономике встретили резкие возражения чиновников, стоявших у руководства Госпланом СССР и Госэкономсоветом СССР, в ведение которых попал ИНЭУМ в начале 60-х годов. В результате непримиримых противоречий с руководством И.С. Брук в 1964 году был вынужден уйти с поста

Великобританию.  
1965 год – командировка в Японию.  
1968 год – командировка в Болгарию.  
1970 год – командировка в Великобританию.

В 1966 году **критически отнесся** к проекту по разработке систем «Ряд» (ЕС ЭВМ), ИТМ и ВТ отказался быть головным.

Награжден четырьмя орденами Ленина (1954, 1956, 1962, 1972), орденом Октябрьской революции (1971), двумя орденами Трудового Красного Знамени (1947, 1957).

**Умер 3 июля 1974 года.**  
Похоронен в Москве на Новодевичьем кладбище.

директора ИНЭУМ.

В 1971 году **отрицательно отнесся** к докладу Межведомственной комиссии о разработке систем «Ряд» (ЕС ЭВМ).

Награжден четырьмя орденами Трудового Красного Знамени.

**Умер 6 октября 1974 года.**  
Похоронен в Москве на «Введенском кладбище».

### Литература

1. Сергей Алексеевич Лебедев. К 100-летию со дня рождения основоположника отечественной электронной вычислительной техники / отв. ред. В.С. Бурцев; сост.: Ю.Н. Никольская, А.Н. Томилин, Ю.В. Никитин, Н.С. Лебедева. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 440 с.
2. Филинов Е.Н. Исаак Семенович Брук // Информационные технологии и вычислительные системы. Изд. УРСС. 2002. №2. С. 3-10.
3. Российская академия наук. Персональный состав. Кн. 2: 1918-1973. М.: Наука, 1999.
4. Малиновский Б.Н. История вычислительной техники в лицах. Киев: Фирма «КИТ», 1995. С. 175-196.

**V.N. Zakharov**

Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS)

### PARALLEL LIVES – LEBEDEV AND BROUK

**Keywords:** *Isaak Brook, Sergei Lebedev, computer technology, VEI; USSR Academy of Sciences, ITMVT, INEUM.*

**Abstract.** *The lines of life of two famous soviet scientists – founders of computer technology in the USSR, Sergei Lebedev and Isaak Brouk – contain amazing parallelism, from the dates of their birth and up to the dates of their death. In the article a number of facts demonstrating this parallelism are presented. For this purpose we are using special presentation of the text – in two columns containing parts of biography of each of them. To emphasize on the similarities we are using bold.*

**Т.Р. Ибрагимов, В.И. Мунерман**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.272.3

## **ВОЗМОЖНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОЦЕССОРОВ ARMV8 ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

**Ключевые слова:** *информатика, программирование, параллельные вычисления, большие данные, алгоритм Кэннона, матричное умножение, мобильные процессоры, архитектура ARMv8,*

*В данной статье затронута проблема ресурсоемкости задач, связанных с обработкой больших объемов данных. Рассмотрена архитектура ARMv8, используемая в мобильных процессорах. Приведены сравнительные характеристики процессоров этой архитектуры с процессорами архитектуры x86-64. Представлена структура мобильного приложения, реализующего блочный алгоритм матричного умножения (алгоритм Кэннона). Авторами описывается эксперимент, суть которого заключается в сравнении временных характеристик параллельного и последовательного алгоритмов матричного умножения, выполняемых на мобильном процессоре. Представлены графики загруженности ядер процессора во время работы этих алгоритмов и график зависимости времени выполнения от размера умножаемых матриц. Результат эксперимента показывает возможность и эффективность использования мобильных многоядерных процессоров ARMv8 для параллельной обработки данных и решения сложных вычислительных задач.*

В течение последних десяти лет объем данных, произведенных за предыдущий год, равен объему, производимому за последующую неделю. В общей сложности это более двадцать экзбайт данных, произведенных за неделю. Объемы данных продолжают расти в

геометрической прогрессии. Из-за такого количества информации современным организациям необходимо уметь управлять большими массивами структурированных и неструктурированных данных. Зачастую обработка больших данных является сложной ресурсоемкой вычислительной задачей, которая требует огромных вычислительных мощностей и может быть эффективно решена с использованием параллельных алгоритмов. Обычно для решения таких задач используются дорогостоящие многоядерные системы с архитектурой x86-64. Однако в качестве альтернативы могут служить и относительно недорогие мобильные процессоры с архитектурой ARMv8.

ARMv8 – это 64-разрядная архитектура с актуальным набором команд, поддерживающая также 32-разрядные приложения. ARMv8 имеет большой набор 64-битных регистров. При обращении к ОЗУ данная архитектура использует 48 битов шины адреса и способна адресовать до 256 Тбайт. За один такт процессоры архитектуры ARMv8 обрабатывают относительно большой объем данных, что позволяет им демонстрировать быстроедействие, не выходя за разумные рамки энергопотребления и нагрева [1]. В таблице 1 приведены сравнительные характеристики этих процессоров и процессоров x64-86.

*Таблица 1*

**Сравнительные характеристики процессоров ARMv8 и x86-64**

	ARMv8	x86-64
Разрядность регистра (бит)	64	64
Количество регистров общего назначения	32	16
Количество регистров с плавающей точкой	32	8
Число ядер	2-8	2-8
Тактовая частота (ГГц)	1-2,5	1,5-4

Таким образом, многоядерность процессоров обоих типов архитектур позволяет эффективно использовать их для реализации параллельных вычислений. В представленном исследовании использовался восьмиядерный процессор с архитектурой ARMv8.

Для экспериментального исследования возможности применения ARM процессоров для параллельной обработки данных был выбран блочный алгоритм умножения матриц (алгоритм Кэннона) [2]. Для сравнительного анализа, наряду с алгоритмом Кэннона, был реализован и традиционный последовательный алгоритм матричного умножения. Исследование проводится на числах с плавающей точкой.

Так как эксперимент проводился на устройстве, работающем под управлением операционной системы Android, для реализации выбранного алгоритма был использован язык программирования Java, который является основным официальным языком разработки под эту платформу.

Для реализации алгоритма Кэннона было решено использовать разбиение основных матриц на девять блоков. Такой способ разбиения является наилучшим для распараллеливания на восьмиядерном устройстве. Чтобы выполнить успешное деление основных матриц на равные блоки, используются квадратные матрицы, где число строк кратно трем.

В основном потоке программы выполняется подготовительная перестановка блоков умножаемых матриц в соответствии с алгоритмом Кэннона. Затем из основного потока запускается девять дополнительных, которые выполняют перемножение соответствующих им блоков и полученный результат прибавляют к блоку итоговой матрицы, имеющему те же координаты. После того, как потоки закончили свою работу, основной поток делает очередной сдвиг в обеих матрицах, заканчивая первую итерацию. Количество итераций равно числу блоков по горизонтали (или вертикали), то есть трем. Блок-схема работы алгоритма показана на рисунке 1.

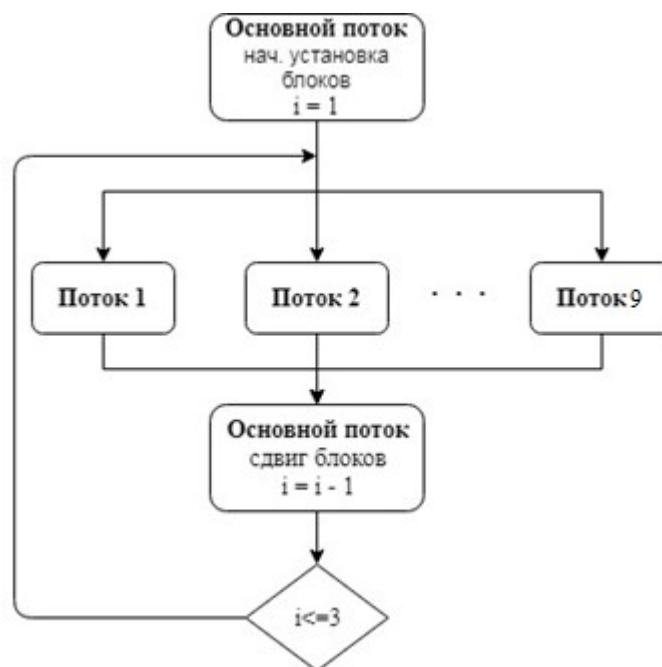


Рис. 1. Блок-схема алгоритма Кэннона

Для последовательного умножения использовался традиционный алгоритм умножения двумерных матриц, который выполняется в одном, основном потоке. На рисунках 2 и 3 продемонстрированы графики загруженности ядер процессора при параллельном и последовательном умножении.

Графики показывают, что при распараллеливании удалось добиться наиболее эффективного использования ресурсов процессора. Тогда как при последовательном умножении семь ядер фактически простаивают. Также на рисунке 1 можно заметить места нарушения непрерывности

работы процессора. Это следует из того, что между работой девяти дополнительных потоков выполняется операция по сдвигу блоков матриц в главном потоке, которая и нарушает их непрерывность. По окончании работы каждый алгоритм возвращает время, которое ушло на его выполнение. Дальнейшая работа в выбранном направлении в первую очередь подразумевает доработку реализации алгоритма Кэннона: устранение пересылки блоков матрицы между потоками при выполнении циклических сдвигов посредством пересчета адресов. Это позволит обеспечить полную непрерывность в работе потоков и, следовательно, в работе ядер процессора.

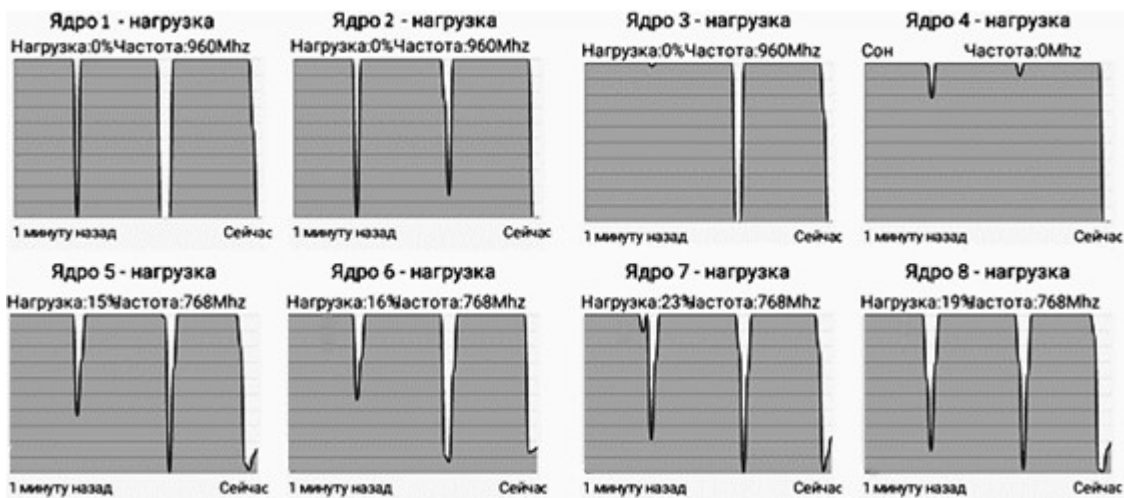


Рис. 2. Загруженность процессора при параллельном умножении

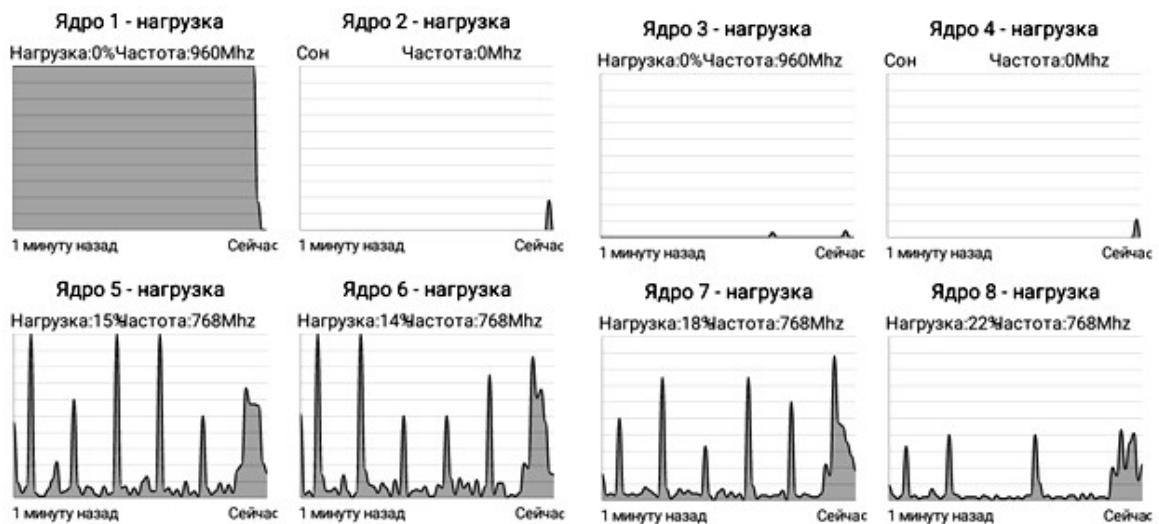


Рис. 3. Загруженность процессора при последовательном умножении

Для исследования зависимости времени работы параллельного и последовательного алгоритмов от размера матриц использовались матрицы разной величины с шагом в сто пятьдесят строк. Полученные временные характеристики этих алгоритмов приведены в таблице 2.

Зависимость времени работы алгоритмов от размера матриц

	300	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500
Последовательно	4,86	21,5	75,2	128	227	365	550	869	1276
Параллельно	0,37	1,77	4,65	11,2	27,5	48,8	73	107	153

По данным этой таблицы был построен график (рис. 4).

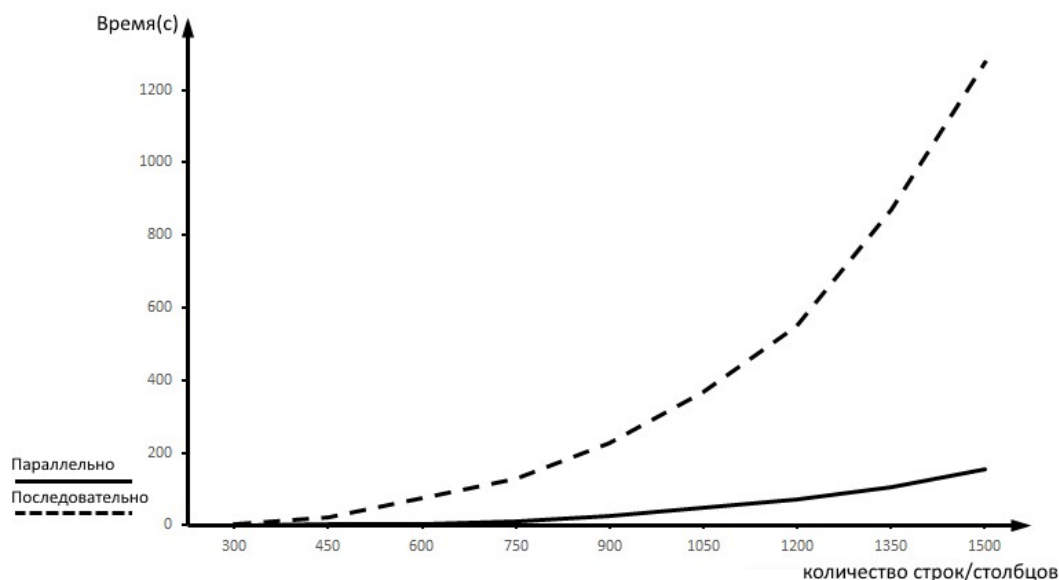


Рис. 4. Время параллельного и последовательного умножения

По графику видно, что на данном отрезке время, соответствующее работе параллельного алгоритма, возрастает практически линейно, тогда как время последовательного алгоритма возрастает по экспоненциальному закону.

Результат эксперимента показывает, что параллельная обработка данных на мобильных ARM процессорах выполняется наиболее эффективно и позволяет в значительной мере уменьшить затраты временных ресурсов. Таким образом, применение процессоров с архитектурой ARMv8 для параллельной обработки данных и решения сложных вычислительных задач является возможным. Представленный эксперимент проводился на одном устройстве, но также возможно построение кластеров (подобно Beowulf) с использованием нескольких плат, имеющих процессоры рассмотренной архитектуры. Это позволит создать мощную многоядерную вычислительную систему при относительно небольшой ее стоимости.

### Литература

1. [https://www.arm.com/files/downloads/ARMv8\\_Architecture.pdf](https://www.arm.com/files/downloads/ARMv8_Architecture.pdf).
2. Богачев К.Ю. Основы параллельного программирования. М.: БИНОМ. 2015. 345 с.



**T.R. Ibragimov, V.I. Munerman,**  
Smolensk State University

## **THE POSSIBILITY OF USING ARMV8 PROCESSORS FOR PARALLEL COMPUTING**

**Keywords:** *informatics, programming, parallel computing, big data, cannon algorithm, matrix multiplication, mobile processors, ARMv8 architecture.*

**Abstract.** *In the article, the problem of resource intensity of the tasks connected with processing of large amounts of data is touched upon. The architecture of mobile ARMv8 processors is considered. Comparative characteristics of processors of this architecture with processors of architecture x86-64 are provided. The structure of the mobile application implements a block algorithm of matrix multiplication (Cannon's algorithm) is presented. The authors describe an experiment, the essence of which is to compare the time of parallel and serial algorithms of matrix multiplication performed on the mobile processor. The graphs of the CPU cores during the operation of these algorithms and the graph of the dependence of the execution time on the size of the matrices being multiplied are presented. The result of the experiment shows the possibility and efficiency of using mobile multi-core processors ARMv8 for parallel processing of data and solving complex computing tasks.*

**М.С. Иванов, В.И. Мунерман**  
Смоленский государственный университет

УДК 004.657

## **ГЕНЕРАЦИЯ ПРОЦЕДУР ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАННЫХ**

**Ключевые слова:** *CASE-технологии, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы.*

*В работе проведено описание CASE-системы для решения задачи симметричного горизонтального распределения данных с целью параллельной реализации операции Join. Показано, что организация фрагментов основной БД, создание метаданных и алгоритм распределения могут быть реализованы хранимыми процедурами. Дано описание алгоритмов генерации этих хранимых процедур на основе сведений о таблицах, участвующих в операции Join. Приведены результаты работы предложенной CASE-системы в виде скриптов, создающих хранимые процедуры.*

Тенденции развития современных информационных технологий приводят к постоянному возрастанию сложности информационных систем (ИС), создаваемых в различных областях экономики. Современные проекты ИС характеризуются, как правило, следующими особенностями [1]:

- наличие совокупности тесно взаимодействующих компонентов (подсистем), имеющих свои локальные задачи и цели функционирования (например, традиционных приложений, связанных с обработкой транзакций и решением регламентных задач, и приложений аналитической обработки (поддержки принятия решений), использующих нерегламентированные запросы к данным большого объема);

- необходимость интеграции существующих и вновь разрабатываемых приложений;

- функционирование в неоднородной среде на нескольких аппаратных платформах.

Указанные особенности приводят к необходимости разработки программного обеспечения с использованием CASE-технологий.

Основное назначение CASE-инструментов сводится к вопросам автоматизации разработки программного обеспечения (ПО) [1-3]. CASE-средства вместе с системным ПО и техническими средствами образуют полную среду разработки ИС.

CASE-системы могут быть эффективно использованы для разработки систем распределения данных с целью последующей их параллельной обработки [4; 5].

В реляционных системах баз данных фрагментация подразделяется на вертикальную и горизонтальную. Вертикальная фрагментация подразумевает разбиение отношения на фрагменты по столбцам (атрибутам). Горизонтальная фрагментация предполагает разбиение отношения на фрагменты по строкам (кортежам). Для обеспечения корректности выполнения операции Join необходимо использовать специальное *симметричное горизонтальное распределение таблиц* [6].

Разработка программного обеспечения для этой цели является важной задачей. Необходимо разработать систему, которая на основании сведений о базе данных и количестве процессоров позволяет генерировать необходимые скрипты для работы с функциональностью базы данных:

- скрипты создания БД: генерируют в основной БД процедуры создания временных баз данных, которые будут содержать фрагменты таблицы-операнды операции Join;

- скрипты создания таблиц БД: генерируют фрагменты таблиц-операндов во временных БД;

- скрипт алгоритма бустрофедона: генерирует процедуру, реализующую алгоритм симметричного горизонтального распределения.

Для реализации данного функционала была разработана программа, генерирующая скрипты. Эта программа предназначена для использования прикладными программистами, которые разрабатывают программное обеспечение, ориентированное на параллельную обработку распределенных данных. Интерфейс программы приведен на рисунках 1-3.

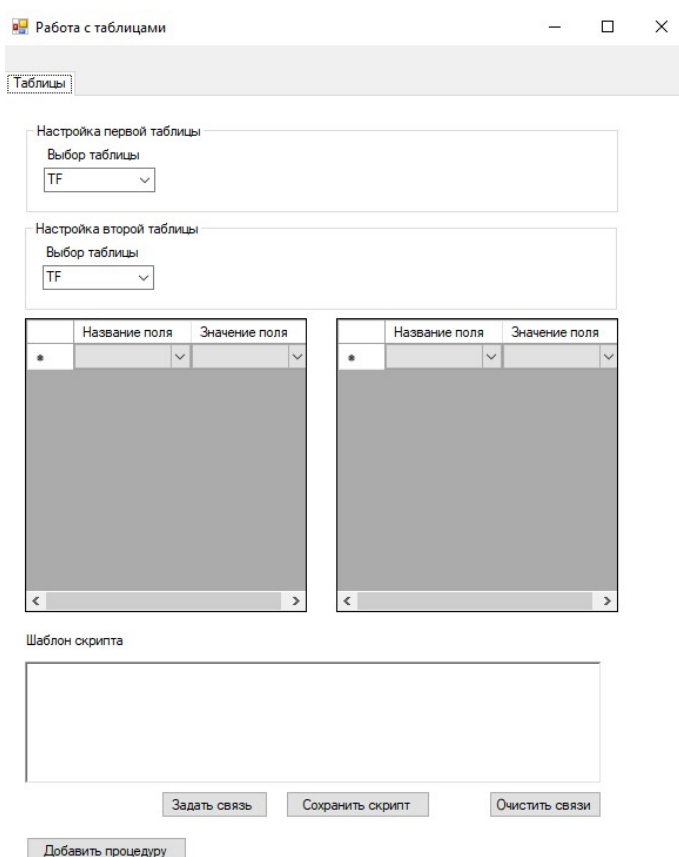


Рис. 1. Общий вид программы

Для генерации запроса скриптов необходимо выбрать таблицы-операнды операции Join, содержащиеся в составе БД. Выбор производится из списков «Выбор таблицы» вкладок «Настройка первой таблицы» и «Настройка второй таблицы».

Далее необходимо выбрать поля таблиц, по которым генерируется скрипт запроса (рис. 2).

Следующим этапом в работе программы является определение ключевых полей, которые используются в параметре ON операции Join, составляющей основу будущего запроса пользователя. Для этого каждому выбранному полю необходимо задать значение из списка «Номер ключа». Далее для генерации скрипта следует задать кнопку «Задать связь». Результат генерации выводится в область «Шаблон

скрипта». Пример выбора данных и результатов запроса приведен на рисунке 3.

При нажатии кнопки «Сохранить скрипт» появляется диалоговое окно сохранения скрипта. Сгенерированный скрипт сохраняется в выбранном пользователем файле. При нажатии кнопки «Добавить процедуру» происходит добавление скрипта в виде хранимой процедуры в БД.

При разработке программы использовалась СУБД MS SQL Server и язык Transact-SQL. На листинге 1 приведен код сгенерированного скрипта, который создает хранимую процедуру для реализации алгоритма бустрофедона [7].

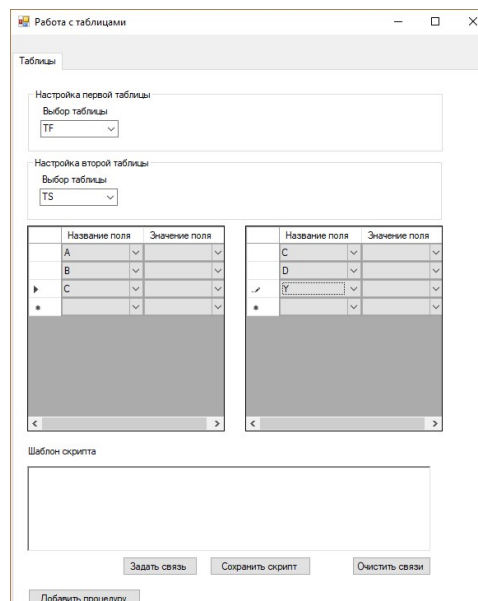


Рис. 2. Выбор полей из таблиц

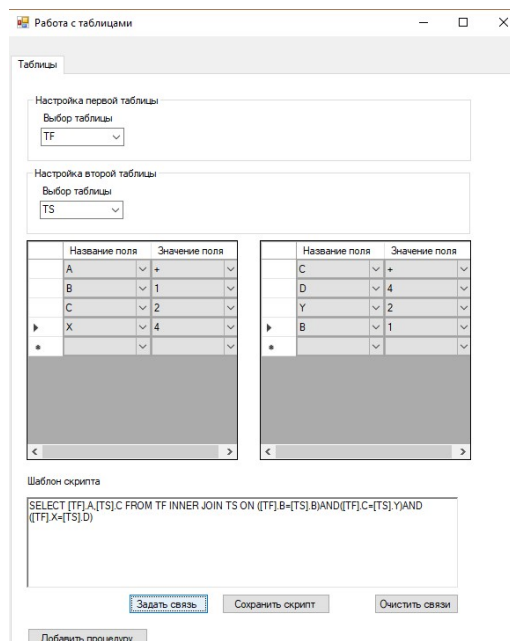


Рис. 3. Вывод результата генерации скрипта

## Листинг 1. Текст скрипта для генерации процедуры бустрофедона

```
SET QUOTED_IDENTIFIER ON
GO
ALTER PROCEDURE [dbo].[Bustrophedon]
AS
DECLARE @AA nchar(4), @AMMr int, @DA nchar(4), @DMMr int, @cr int, @i int
DECLARE cursA CURSOR FOR
SELECT [A], [MMr] FROM ABIST
ORDER BY [MMr];
DECLARE cursD CURSOR FOR
SELECT [A], [MMr] FROM ABIST
ORDER BY [MMr] DESC;
OPEN cursA;
OPEN cursD;
SET @cr=@@Cursor_Rows
IF @cr%2=0
    SET @cr=@cr/2
ELSE
    SET @cr=@cr/2+1
--SELECT @cr AS 'TotRows'
SET @i=0
WHILE @i<@cr
BEGIN
    FETCH NEXT FROM cursA INTO @AA, @AMMr;
    FETCH NEXT FROM cursD INTO @DA, @DMMr;
    IF @i%4=0
    BEGIN
        INSERT INTO ASnp1
            SELECT [K], [A], [B] FROM dbo.A WHERE [A]=@AA
        INSERT INTO BSnp1
            SELECT [K], [A], [C] FROM dbo.B WHERE [A]=@AA
    END
    IF @i%4=1
    BEGIN
        INSERT INTO ASnp2
            SELECT [K], [A], [B] FROM dbo.A WHERE [A]=@AA
        INSERT INTO BSnp2
            SELECT [K], [A], [C] FROM dbo.B WHERE [A]=@AA
    END
    IF @i%4=2
    BEGIN
        INSERT INTO ASnp3
            SELECT [K], [A], [B] FROM dbo.A WHERE [A]=@AA
        INSERT INTO BSnp3
            SELECT [K], [A], [C] FROM dbo.B WHERE [A]=@AA
    END
    IF @i%4=3
    BEGIN
        INSERT INTO ASnp4
            SELECT [K], [A], [B] FROM dbo.A WHERE [A]=@AA
        INSERT INTO BSnp4
            SELECT [K], [A], [C] FROM dbo.B WHERE [A]=@AA
    END
    SET @i=@i+1
END

CLOSE cursA;
DEALLOCATE cursA;
```

```
CLOSE cursD;  
DEALLOCATE cursD;
```

GO

Ниже дан скрипт для создания таблицы индексов.

```
CREATE TABLE ABIST  
(  
    A nchar(4) PRIMARY KEY, A1r int, AMr int, B1r int, BMr int, MMr int  
)  
GO
```

Таким образом, приведенные скрипты позволяют реализовать базовую логику работы проектируемой информационной системы. Они обеспечивают быструю генерацию практически безошибочных хранимых процедур для выполнения всех пользовательских запросов к БД. Предложенная система генерации процедур для параллельной обработки распределенных данных может масштабировать результаты с учетом физических характеристик вычислительной системы и используемой сети. Предложенный подход позволяет уменьшить трудоемкость и время разработки информационных систем.

### Литература

1. Одинцов И.О. Профессиональное программирование. Системный подход. 2-е изд. перераб. и доп. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 624 с.
2. Куликов Г.Г., Набатов А.Н., Речкалов А.В. Автоматизированное проектирование информационно-управляющих систем. Системное моделирование предметной области: Учеб. пособие для студентов по направлению 552800 – «Информатика и вычисл. техника» / М-во общ. и проф. образования РФ; Уфим. гос. авиац. техн. ун-т. М.: РГБ, 2003.
3. Макконнелл С. Совершенный код. Мастер-класс: пер. с англ. СПб.: БХВ, 2017. 896 с.
4. Уэлдон Дж.-Л. Администрирование баз данных. М.: Финансы и статистика, 2014. 207 с.
5. Хаббард, Дж. Автоматизированное проектирование баз данных. М.: Мир, 2015. 296 с.
6. Мунерман В.И., Мунерман Д.В. Параллельная реализация симметричного горизонтального распределения данных на основе сетевых технологий // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т.13, № 3. С. 57-63.
7. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т.10, № 4. С. 3-16.

**M.S. Ivanov, V.I. Munerman**  
*Smolensk State University*

### **GENERATION OF PROCEDURES FOR SYMMETRIC HORIZONTAL DISTRIBUTION OF DATA**

**Keywords:** *CASE-technologies, parallel programming, hardware-software complexes.*

**Abstract.** *The paper describes the CASE-system for solving the problem of symmetric horizontal data distribution with the purpose of parallel implementation of the Join operation. It is shown that the organization of fragments of the main database, the creation of metadata and the distribution algorithm can be implemented by stored procedures. A description of algorithms for generating these stored procedures based on information about the tables participating in the Join operation is given. The results of the proposed CASE-system are presented. They are represented in the form of scripts that create stored procedures.*

**Р.К. Классен**

*Казанский национальный исследовательский технический университет  
имени А.Н. Туполева – КАИ*

УДК 681.3

## **РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ КОНСЕРВАТИВНОЙ СУБД Clusterix-N КЛАССА «BigData» НА ПЛАТФОРМЕ GPU-КЛАСТЕРА**

Ключевые слова: *Clusterix-N, CUDA, GPU, консервативные СУБД, TPC-H, BigData, распределенная обработка, параллельные вычисления.*

*Рассматриваются вопросы обработки сложных аналитических запросов к базам данных консервативного типа большого объема (>100 GB) на платформе GPU кластера КНИТУ-КАИ. Демонстрируется архитектура параллельной СУБД консервативного типа Clusterix-N. Производится сравнение архитектуры Clusterix-N с оригинальными архитектурами Clusterix и PerformSys. Приводятся результаты экспериментов на ограниченном тесте TPC-H (без операций записи) с ВБД = 60 GB и ВБД = 120 GB для Clusterix-N и PerformSys. Производится сравнение полученных результатов.*

### **Введение**

Развитие информационных технологий требует обработки все большего объема информации. Направление «BigData» актуально как никогда. Создано великое множество инструментов и СУБД для работы с большими данными [1]. Примерами СУБД могут служить: MS SQL Server, Oracle Database, SciDB [2], VoltDB [3], PostgreSQL XL [4], Clusterix [5; 6] и т.д. Большинство систем BigData – это закрытые коммерческие продукты с очень высокой стоимостью. Открытые

системы существенно уступают коммерческим по надежности и, в гораздо меньшей мере, по производительности. Большинство систем класса BigData требуют наличия серьезных вычислительных мощностей для обеспечения приемлемой производительности.

Идея создания отечественной СУБД, способной работать на сравнительно недорогих вычислительных кластерах, эффективно использовать их ресурсы и обрабатывать большие массивы данных, вылилась в создание параллельной СУБД консервативного типа Clusterix-N.

### СУБД Clusterix-N

Параллельная СУБД Clusterix-N является идейным продолжением СУБД Clusterix и Clusterix-M, которые работают согласно регулярному плану обработки запросов [7]. Обработка запросов – 2-уровневая. На нижнем уровне выполняются операции селекции ( $\sigma$ ) и проекции ( $\pi$ ) над исходными отношениями  $R_i$  базы данных. Результатом обработки этого уровня является промежуточное отношение  $R_i'$ . На верхнем уровне реализуется операция соединения  $R_{Bi-1} = R_i' \bowtie R_{Bi-2} = \pi(\sigma_\theta(R_i' \times R_{Bi-2}))$ , где  $R_{Bi-1}$  и  $R_{Bi-2}$  – временные отношения как результаты соединений в  $i$ - и в  $(i-1)$ -шагах соответственно. Для обеспечения надежной работы системы на всех уровнях применена барьерная синхронизация.

Отношения БД распределены по дискам на процессорах нижнего уровня ( $IO_r$ ) с применением хеш-функции к первичному ключу для каждого кортежа отношения. Требованию равномерного распределения кортежей хорошо удовлетворяет выбор в качестве нее функции деления по модулю [8]. Процессоры верхнего уровня обработки запроса называются процессорами JOIN.

Кроме исполнительных процессоров ( $IO_r$  и  $JOIN_j$ ), есть еще два процессора. Процессор УПР реализует функции мониторинга и управления остальными процессорами системы. Для реализации функций объединения результатов обработки с уровня JOIN введен процессор SORT. Он дополнительно выполняет функции агрегации (SUM(), AVG(), MAX(), MIN() и др.) и сортировки результата предшествующей операции соединения. В Clusterix реализован вариант совместной работы процессоров УПР и SORT на Host ЭВМ. Работа на уровне файловой системы, системных буферов, алгоритмов доступа к данным, работы с индексами и т.п. реализуется с помощью СУБД MySQL.

В отличие от Clusterix, Clusterix-N состоит из пяти модулей: MGM, IO, JOIN, HASH, SORT. Каждый модуль может быть размещен на выделенных узлах или делить один узел с другими модулями. Все коммуникации между модулями осуществляются по сети.

Модуль MGM размещается на управляющем узле (Mgm) и содержит 14 транслированных к регулярному плану запросов без



операций записи из состава теста TPC-H [9]. Трансляция в разработанном прототипе осуществляется вручную. Полученные в результате трансляции загрузочные модули «*select-project*»- и «*join*»-процедур поступают соответственно в узлы IO и JOIN, где без всяких преобразований передаются в MySQL, который их выполняет. MGM включает процессоры: УПР (процессор управления обработкой запросов), ROUTER (процессор балансировки нагрузки и роутеризации подзапросов), BUF (процессор буфера промежуточных отношений). Процессор УПР выполняет управление обработкой запроса. Он получает транслированный запрос, помещает его в очередь и устанавливает статус в ожидание. Как только УПР обнаруживает, что все узлы IO способны принять очередной подзапрос *select*, он отправляет его. Операция отправки запроса повторяется до тех пор, пока не будут отосланы все подзапросы на выборку для каждого из отношений. Результат работы узлов IO поступает в BUF MGM в виде блоков данных. Блоки данных представляют собой набор по N кортежей результата в каждом блоке. Они накапливаются в буфере MGM по отношениям. Когда все блоки одного из отношений получены, они отправляются в узел HASH, где подвергаются хешированию и перераспределению. Хешированные данные отправляются в узлы JOIN с индексацией по ядрам. После окончания передачи узлы JOIN загружают данные в MySQL и запускают подзапросы *join* в количестве свободных процессорных ядер. Результат *join* также передается в узел HASH, где хешируется и передается в узлы JOIN для следующего подзапроса *join*. Операция повторяется до завершения всех подзапросов *join*. Как только все операции *join* завершены, итоговый результат передается в BUF MGM и отправляется для дальнейшей обработки в SORT. Выбор узла или группы узлов для отправки очередного подзапроса осуществляет процессор ROUTER. Он анализирует объем свободной ОП на свободных узлах и определяет наиболее подходящий. На занятые узлы отправка не осуществляется.

Каждый узел модуля IO оснащен СУБД MySQL. БД равномерно распределяется между этими узлами. Обработка подзапроса *select* оптимизируется для многоядерных узлов и осуществляется следующим образом. Исходный запрос модифицируется для реализации чтения данных по блокам. К подзапросу добавляется строка вида «LIMIT N,P», где N – размер блока данных, P – номер очередного блока. Такая модификация позволяет запустить сразу несколько модифицированных запросов для параллельного получения блоков данных. Результаты работы MySQL поблочно подвергаются преобразованию и асинхронно передаются по сети в BUF MGM. Блочная организация позволяет эффективно использовать сеть и вычислительные ресурсы узла IO.

Модуль HASH является прокси-сервером между модулем MGM и модулем JOIN. Он получает задания от процессора УПР и данные из BUF MGM. Данные хешируются на GPU [10] и помещаются в буфер отправки по ядрам (для каждого ядра в узлах JOIN модуль HASH формирует буфер в своей памяти). Отправка данных происходит по готовности операции хеширования. Полученные из BUF MGM данные хешируются и передаются «на лету», то есть без записи результата в локальный буфер.

Модуль JOIN, как и IO, оснащен СУБД MySQL. Принимает задание и данные от модуля HASH, производит загрузку данных в MySQL и запускает непосредственно операцию *join*. Загрузка данных производится командой LOAD FILE после полного получения данных для загружаемого отношения. Для каждого ядра предусматривается свой набор отношений. Поэтому допускается параллельная загрузка данных и параллельное выполнение операции *join*. Операция *join* запускается на всех свободных ядрах вычислительного узла. Результат *join*-обработки передается в модуль HASH сразу после его выполнения. Все промежуточные отношения удаляются после выполнения операции *join*.

Модуль SORT использует свой MySQL. Как и узел JOIN, он получает задание и данные от УПР MGM и BUF MGM, производит загрузку данных в MySQL, запускает операцию *sort*. Результат работы модуля SORT размещается в новом отношении, которое передается по готовности в BUF MGM и от него – пользователю.

### **Постановка задачи**

Основной задачей экспериментального исследования является сравнение двух подходов обработки потока запросов к БД большого объема (десятки и сотни GB). Первый подход подразумевает выполнение как можно большего числа запросов на доступном числе процессорных ядер, то есть применение стратегии «запрос на ядро». Такой подход реализован в PerfomSys [11] и показал хорошие результаты при небольших объемах БД [12]. Второй подход – использование множества ядер / узлов для выполнения одного запроса, как это реализовано в Clusterix-N.

Эксперименты организованы на платформе GPU-кластера КНИТУ-КАИ. Параметры узлов: 2 six-core E5-2640CPU/2,5GHz/DDR3 128GB; 2 448-core GPU Tesla C-2075/1,15GHz/GDDR5 6GB (на Mgm GPU отсутствуют). Дисковая подсистема узла – RAID 10 из 4 WD1000 DHTZ/1TB. Операционная система – Windows Server 2012 R2. Интерконнект между узлами – GigabitEthernet с 24-портовым коммутатором SSE G24-TG4.

Тестовый поток запросов состоит из шести перестановок TPC-N Throughput Test без операций записи. Длина тестового потока составила 84 запроса. Тестовые данные были сгенерированы утилитой dbgen из

состава TPC-H. Размер сгенерированных БД составил 60 и 120 GB. После загрузки БД в MySQL и индексации их размер составил 100 и 200 GB соответственно.

### Выполнение потока запросов на PerformSys

В случае PerformSys узлы кластера распределены следующим образом: 6 узлов исполнительных и 1 узел управляющий. Управляющий узел выполняет функции роутеризации, ведения очереди запросов, балансировки нагрузки. Модуль симуляции клиентов запускается на этом же узле. Каждый исполнительный узел включает в себя собственно модуль сервера PerformSys и СУБД MySQL с полной копией БД на каждом узле.

PerformSys использует стратегию «ядро на запрос», поэтому клиентский модуль эмулирует нагрузку от 72 клиентов (6 узлов X 12 ядер в узле = 72 ядра), то есть в системе параллельно обрабатывается 72 запроса. Как только очередной запрос выполнен, на его место отправляется новый вплоть до исчерпания очереди на управляющем узле.

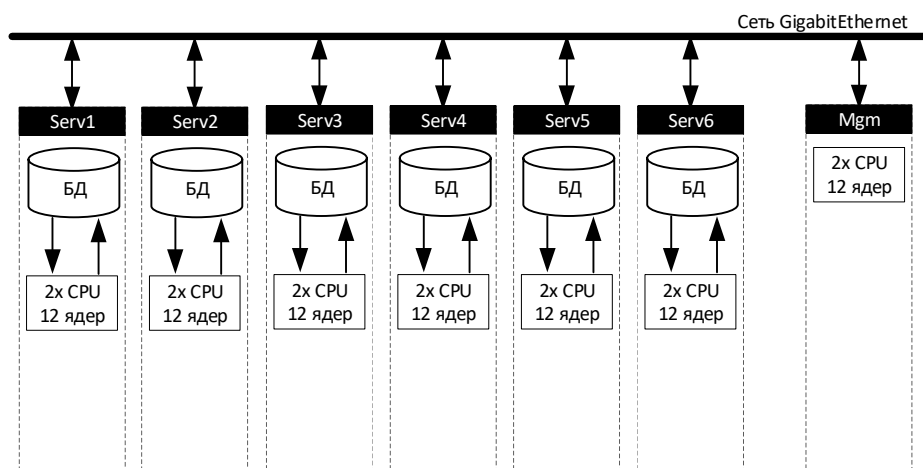


Рис. 1. Конфигурация экспериментального полигона на основе GPU кластера КНИТУ-КАИ для PerformSys

СУБД MySQL сконфигурирована особым образом:

- отключено кеширование результатов запросов;
- используется хранилище БД InnoDB;
- под буфер данных выделено 80% оперативной памяти;
- после старта СУБД вся БД загружается в оперативную память хоста.

Результаты выполнения потока запросов для PerformSys представлены в таблице 1.

Таблица 1

#### Результаты обработки потока запросов PerformSys

Параметры эксперимента	Время работы, мин	Время работы, час
$V_{\text{БД}} = 60 \text{ GB}$	56	1
$V_{\text{БД}} = 120 \text{ GB}$	3015	50

В случае  $V_{\text{БД}} = 60 \text{ GB}$  вся БД размещается в оперативной памяти узла. Такое размещение позволяет избавиться от необходимости чтения данных с диска и существенно повышает производительность системы. Процессорные ядра нагружены полностью. Время обработки потока запросов составило  $\sim 1$  час.

В случае  $V_{\text{БД}} = 120 \text{ GB}$  вся БД не может разместиться в оперативной памяти узла. Поэтому производится активная работа с диском. Поскольку диск является узким местом в работе системы, процессорные ядра не нагружаются полностью и большая часть времени уходит именно на чтение данных с диска. В итоге имеем время обработки потока запросов  $\sim 50$  часов.

В процессе проведения эксперимента с  $V_{\text{БД}} = 120 \text{ GB}$  выяснилось, что MySQL не может принимать непрерывно поступающие запросы (они отбрасываются через 15 секунд после их передачи в MySQL) во время работы с диском. Вероятно, причина кроется в хранилище InnoDB, которое для каждого нового запроса создает временный файл на диске. В этом случае имеется как минимум два решения: ввести ожидание готовности MySQL и переместить директорию временных файлов на более быстрый носитель (например, использовать RAM-диск). Но поскольку вся оперативная память используется для выполнения запросов, остается один вариант: ввести ожидание готовности.

Готовность MySQL определяется следующим образом. В СУБД передается очередной запрос. Если при его выполнении возникла ошибка недоступности MySQL, то он перезапускается заново через 15 секунд. Если запрос не был выполнен за 12 часов и возникла очередная ошибка его выполнения, то он отбрасывается.

Конфигурация экспериментального полигона показана на рисунке 2. Она включает 2 узла IO, 3 узла JOIN, HASH и MGM. Такая асимметричная конфигурация с превалированием числа узлов JOIN выбрана из-за большого объема работ на этом уровне. Двух узлов IO в данном случае вполне достаточно для его постоянной загрузки. БД распределена между узлами IO.

СУБД MySQL на узлах IO сконфигурирована аналогично PerformSys. После запуска данные загружаются в оперативную память узлов. На уровне JOIN для исключения использования диска используется хранилище MEMORY, увеличены объемы буферов ключей и сортировки. На уровне SORT в целях экономии оперативной памяти используется хранилище MyISAM в конфигурации по умолчанию.

Поскольку Clusterix-N использует множество узлов для работы на каждом уровне, а уровней обработки три, для обеспечения эффективности системы требуется, чтобы в ней велась одновременная

обработка по крайней мере трех запросов. Как было показано в [13], объем данных, необходимый для обработки всех 14 запросов, составляет  $1,4V_{\text{БД}}$ . С учетом объема доступной оперативной памяти узла MGM (128 GB) и необходимости выделения части памяти для модуля SORT длина очереди для Clusterix-N на GPU-кластере КНИТУ-КАИ была принята равной 7.

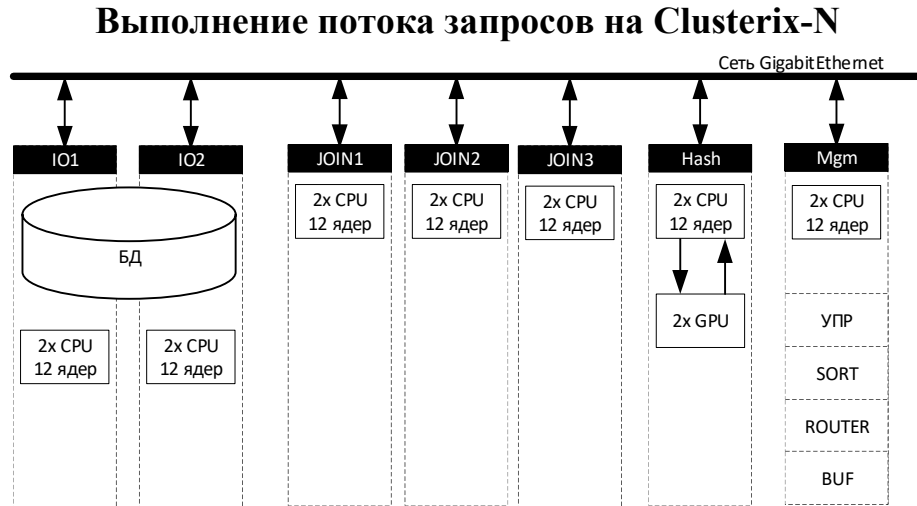


Рис. 2. Конфигурация экспериментального полигона на основе GPU кластера КНИТУ-КАИ для Clusterix-N

Результаты в таблице 2 показывают превосходство Clusterix-N над PerformSys в случае  $V_{\text{БД}} = 120 \text{ GB}$  и полную несостоятельность в случае  $V_{\text{БД}} = 60 \text{ GB}$ . Нетрудно видеть, что рост времени выполнения ПТ с увеличением объема БД в Clusterix-N практически линейный.

Таблица 2

**Результаты обработки потока запросов Clusterix-N**

Параметры эксперимента	Время работы, мин	Время работы, час
$V_{\text{БД}} = 60 \text{ GB}$	552	9.2
$V_{\text{БД}} = 120 \text{ GB}$	1180	19.7

На рисунке 3 представлены временные диаграммы выполнения потока запросов на Clusterix-N для  $V_{\text{БД}} = 120 \text{ GB}$ .

Как следует из рисунка, двух узлов IO вполне достаточно для обеспечения полной загрузки уровня JOIN. Длина очереди, равная 7, оказывается избыточной, так как на визуализации видны периоды ожидания. Они связаны с заполнением памяти в узле MGM. В то же время модуль SORT, расположенный на узле MGM, практически не загружен. Объяснить это можно существенным уменьшением объема данных после выполнения всех операций JOIN. Сеть особенно активно используется на узлах MGM и HASH.

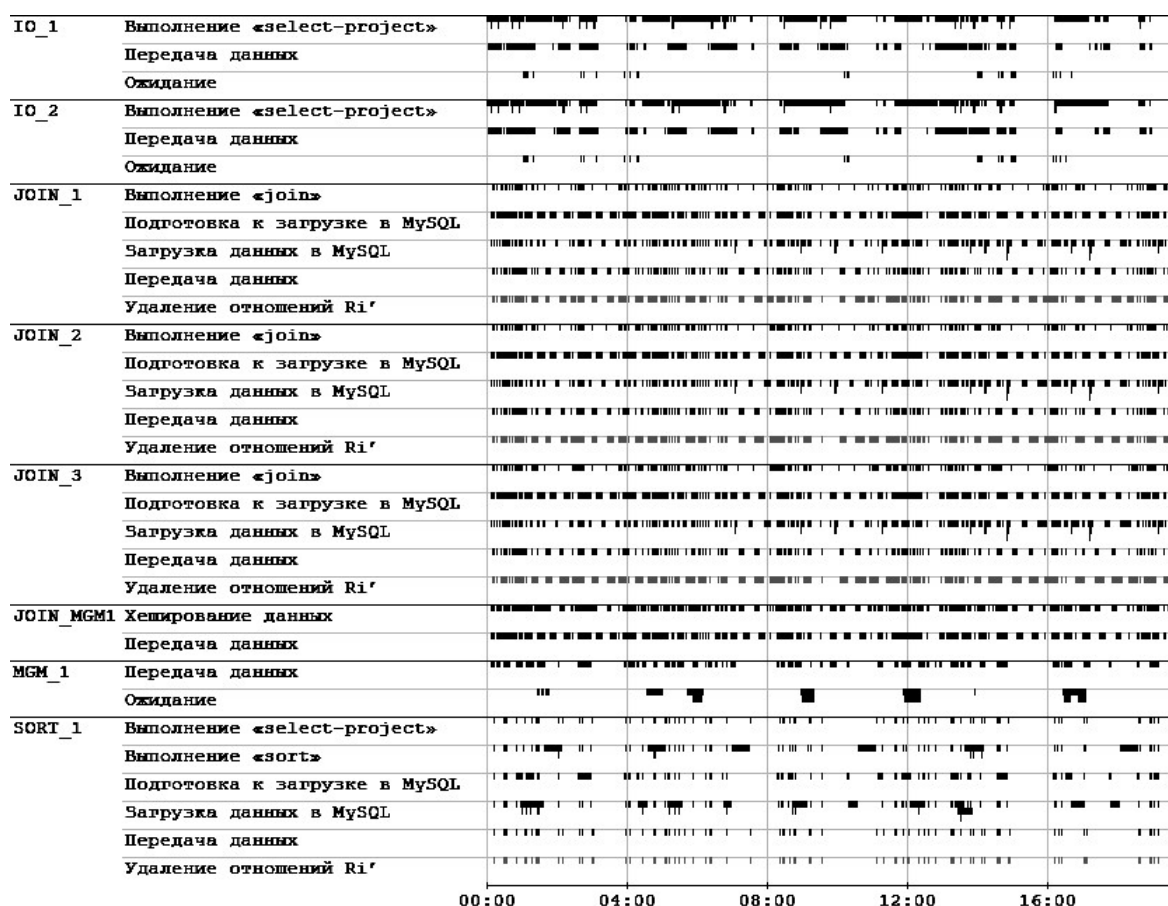


Рис. 3. Визуализация выполнения потока запросов на Clusterix-N для ВБД = 120 GB

### Заключение

При  $V_{\text{БД}} = 60 \text{ GB}$  вся БД помещается в ОП узлов, что исключает использование дисковой подсистемы и позволяет системе PerformSys работать с максимальной скоростью. Однако при  $V_{\text{БД}} = 120 \text{ GB}$   $V_{\text{БД}}$  начинает активно использовать диск, в то время как в Clusterix-N вся БД по-прежнему уместается в ОП. В итоге для Clusterix-N при такой  $V_{\text{БД}}$  имеем время обработки ПТ 19.7 часа против 50 часов для PerformSys.

Таким образом, при  $V_{\text{БД}} > 100 \text{ GB}$  предпочтение следует отдать Clusterix-N. А при  $V_{\text{БД}} < 0.7 V_{\text{ОП}}$  – PerformSys.

Узким местом в работе Clusterix-N по данным эксперимента можно обозначить сеть. Ее замена на 10GigabitEthernet позволит значительно ускорить этап хеширования данных (более чем в три раза с учетом применения двух GPU-ускорителей), ускорить передачу данных на всех уровнях и между ними, тем самым ускорив работу системы в целом и более равномерно загрузив вычислительные узлы кластера.

### Литература

1. Matt Turck Firing on All Cylinders: The 2017 Big Data Landscape [Web page] // URL: <http://mattturck.com/bigdata2017/>.
2. Paradigm4: Creators of SciDB a computational DBMS URL: <https://www.paradigm4.com/>.

3. In-Memory Database | VoltDB URL: <https://www.voltdb.com/>.
4. Postgres-XL | Open Source Scalable SQL Database Cluster URL: <https://www.postgres-xl.org/>.
5. Абрамов Е.В. Параллельная СУБД Clusterix. Разработка прототипа и его натурное исследование // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2006. №2. С.50-55.
6. Райхлин В.А., Шагеев Д.О. Информационные кластеры как диссипативные системы // Нелинейный мир. 2009. Т.7, №5. С.323-334.
7. Raikhlin V.A. Simulation of Distributed Database Machines // Programming and Computer Software. 1996. Vol. 22, Is. 2. P. 68-74.
8. Martin J. Computer database organization. 2-nd ed. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1977.
9. TPC Benchmark™ N Standard Specification Revision 2.17.1, URL: [http://www.tpc.org/tpc\\_documents\\_current\\_versions/pdf/tpc-h\\_v2.17.1.pdf](http://www.tpc.org/tpc_documents_current_versions/pdf/tpc-h_v2.17.1.pdf).
10. Реализация хеширования на GPU. URL: <https://github.com/rozh1/gpuhash>.
11. Классен Р.К. Программа региональной балансировки нагрузки к базе данных консервативного типа на кластерной платформе «PerformSys». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017611785 от 09.02.2017.
12. Классен Р.К. Повышение эффективности параллельной СУБД консервативного типа на кластерной платформе с многоядерными узлами // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. 2015. № 1. С. 112-118.
13. Raikhlin V., Klassen R. Can GPU-accelerator significantly increase the effectiveness of conservative DBMS considerable volumes on cluster platforms? // 2017 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). 2017. P. 1 -5. DOI: 10.1109/SIBCON.2017.7998474.

**R.K. Klassen**

Kazan National Research Technical University  
named after A.N. Tupolev – KAI

## DEVELOPMENT AND RESEARCH OF CONSERVATIVE DBMS CLUSTERIX-N BIGDATA CLASS ON THE PLATFORM OF THE GPU-CLUSTER

**Keywords:** *Clusterix, CUDA, GPU, conservative DBMS, TPC-H, BigData, distributed processing, parallel computing..*

**Abstract.** *In article, we are considering the problems of processing complex analytical queries to databases of conservative type of large volume (> 100 GB) on the platform of GPU cluster KNITU-KAI. Shown the architecture of a parallel DBMS of conservative type Clusterix-N. The architecture of Clusterix-N is compared with the original architecture of Clusterix and PerformSys. Presented: the results of experiments on the limited TPC-H test (without write operations) with VDB = 60 GB and VDB = 120 GB for Clusterix-N and PerformSys. The results are discussed and made a comparison with the PerformSys system.*

## ТЕХНОЛОГИЯ BLOCKCHAIN ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Ключевые слова: *распределенная обработка данных, безопасность, веб-сервис, blockchain, контрольная сумма, хеширование.*

*В работе рассматривается применение технологии blockchain для защиты информации в распределенных системах массовой обработки данных. На каждом веб-сервисе для участвующих в операции фрагментов таблиц предлагается проводить вычисление их контрольных сумм. Приводятся результаты работы веб-сервиса, выполняющего защиту фрагмента базы данных. Проведено сравнение производительности алгоритмов вычисления контрольных сумм CRC16, CRC32 и MD5.*

Методы решения задач массовой обработки данных основаны на реализации распределенных вычислений. При этом для параллельной реализации операций над данными необходимо выполнять фрагментацию таблиц с последующим их размещением на разных ЭВМ [1]. В этом случае задача специализированного программного обеспечения состоит в сетевой передаче данных между основной базой данных и ее фрагментами. Для защиты от несанкционированного доступа к передаваемой по сети информации в этом программном обеспечении предлагается использовать технологию blockchain [2]. Отслеживание изменений в передаваемых по сети фрагментах таблиц выполняется посредством вычисления их контрольных сумм по алгоритмам хеширования. Схема blockchain-обработки фрагментов, выполняемой на веб-сервисах, показана на рисунке 1.

С целью защиты на каждом веб-сервисе для участвующих в операции фрагментов таблиц вычисляется их контрольная сумма – аналог информации о blockchain-транзакции. Резервные копии всех контрольных сумм хранятся на всех веб-сервисах, являющихся узлами этой системы – нодами (node). Подобная распределенная база данных представляет собой «цепочку блоков» (blockchain), каждый из которых содержит контрольную сумму (КС) фрагмента. Контрольные суммы, содержащиеся в каждом из блоков, проходят валидацию со стороны всех нодов сети посредством последовательного вычисления связующих хеш-функций. Такая связующая функция (хеш) вычисляется от адреса предыдущего блока и суммы хэшей всех контрольных сумм для таблиц



текущего блока. Он пересчитывается при каждом изменении фрагмента таблицы. Целостность данных не нарушается в том случае, если результат хеширования подтверждается всеми нодами.

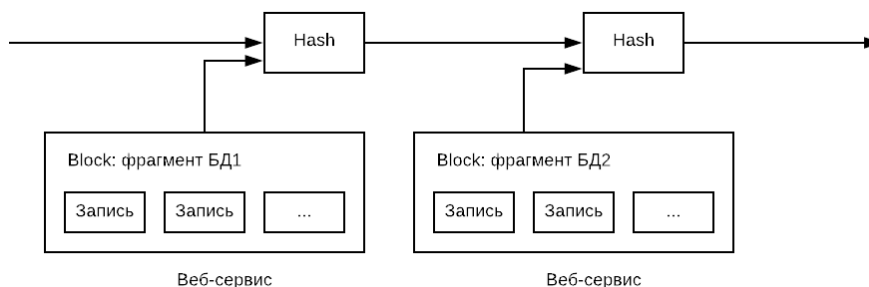


Рис. 1. Схема blockchain-обработки фрагментов данных

Чтобы в обрабатываемую базу данных могли вносить изменения только пользователи, обладающие правами доступа, а информацию в таблице базы данных и ее КС нельзя было подделать, каждая КС внутри блока подписывается электронной цифровой подписью (ЭЦП). ЭЦП основывается на использовании асимметричного шифрования и хэш-функциях. Подписи проходят валидацию со стороны всех блоков, то есть должны быть получены совпадающие значения связующих хешей.

Ниже показан процесс создания и валидации блоков, содержащих информацию о конкретном фрагменте базы данных (рис. 2).

Вычисления КС выполняются по алгоритму CRC (cyclic redundancy check), который базируется на свойствах деления с остатком двоичных многочленов, то есть многочленов над конечным полем  $GF(2)$ . Значение CRC является, по сути, остатком от деления многочлена, соответствующего входным данным, на некий фиксированный порождающий многочлен. При этом каждой конечной последовательности битов  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$  взаимно однозначно сопоставляется двоичный полином  $\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$ , последовательность коэффициентов которого представляет собой исходную последовательность. Например, последовательность битов 1011010 соответствует многочлену:

$$P(x) = 1 * x^6 + 0 * x^5 + 1 * x^4 + 1 * x^3 + 0 * x^2 + 1 * x^1 + 0 * x^0 = x^6 + x^4 + x^3 + x^1.$$

Количество различных многочленов степени меньшей  $N$  в поле  $GF(2)$  равно  $2^N$ , что совпадает с числом всех двоичных последовательностей длины  $N$ .

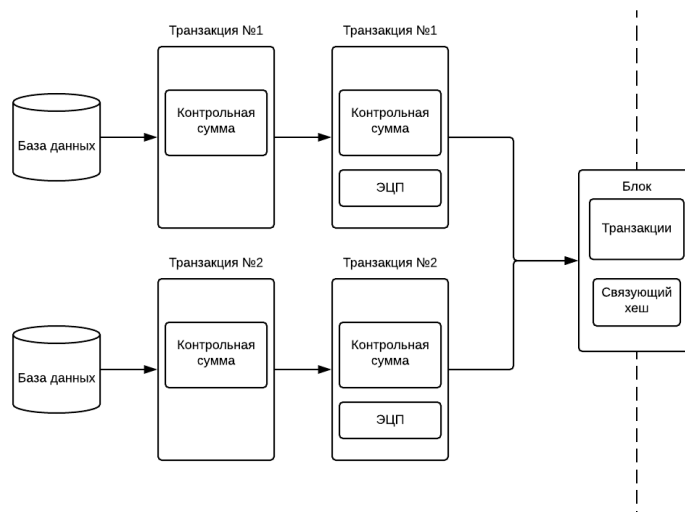


Рис. 2. Процесс валидации блоков

Значение контрольной суммы в алгоритме с порождающим многочленом  $G(x)$  степени  $N$  определяется как битовая последовательность длины  $N$ , представляющая многочлен  $R(x)$ , получившийся в остатке при делении многочлена  $P(x)$ , представляющего входной поток бит, на многочлен  $G(x)$ :

$$R(x) = P(x) * x^N \text{ mod } G(x),$$

где  $R(x)$  – многочлен, представляющий значение CRC;

$P(x)$  – многочлен, коэффициенты которого представляют входные данные;

$G(x)$  – порождающий многочлен;

$N$  – степень порождающего многочлена.

Умножение  $x^N$  осуществляется приписыванием  $N$  нулевых битов к входной последовательности, что улучшает качество хеширования для коротких входных последовательностей. При делении с остатком различных исходных многочленов на порождающий полином  $G(x)$  степени  $N$  можно получить  $2^N$  различных остатков от деления.

Одним из основных параметров CRC является порождающий полином. С порождающим полиномом связан другой параметр – его степень, которая определяет количество битов, используемых для вычисления значения CRC. На практике наиболее распространены 8-, 16- и 32-битовые слова, что является следствием особенностей архитектуры современной вычислительной техники.

Для иллюстрации предложенного подхода была разработана программа вычисления КС передаваемого по сети файла базы данных, которым обмениваются веб-сервис и клиентское приложение в формате JSON. Схема обмена приведена на рисунке 3.

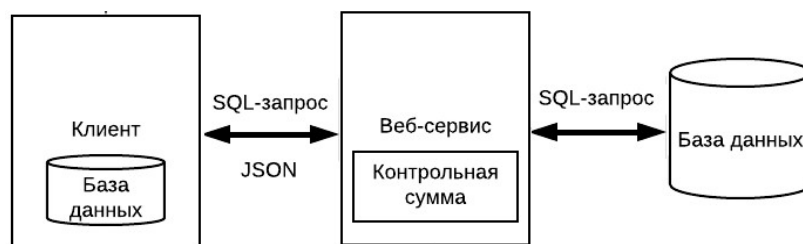


Рис. 3. Схема обмена между клиентом и базой данных

Когда клиенту необходимо получить данные из БД, он отправляет SQL-запрос через веб-сервис, который, в свою очередь, передает запрос в базу. Для информации, полученной из базы данных, рассчитывается контрольная сумма, которая подписывается ЭЦП и хешируется для создания блока в цепи.

С целью анализа производительности алгоритма формирования КС выполнялось сравнение временных характеристик алгоритмов CRC16 и CRC32 с алгоритмом MD5. Формирование КС методом побитового сдвига [3] для JSON-файла было выполнено по следующему алгоритму.

1. Создается массив (регистр), заполненный нулями, равный по длине разрядности (степени) полинома.
2. Исходное сообщение дополняется нулями в младших разрядах в количестве, равном числу разрядов полинома.
3. В младший разряд регистра заносится один старший бит сообщения, а из старшего разряда регистра выдвигается один бит.
4. Если выдвинутый бит равен «1», то производится инверсия битов (операция XOR, исключающее ИЛИ) в тех разрядах регистра, которые соответствуют единицам в полиноме.
5. Если в сообщении ещё есть биты, переходим к шагу 3.

Когда все биты сообщения поступили в регистр и были обработаны этим алгоритмом, в регистре остаётся остаток от деления, который и является контрольной суммой CRC.

Рисунок 4 иллюстрирует деление исходной последовательности битов на число (1)00000111, или многочлен  $x^8 + x^2 + x^1 + x^0$  (алгоритм CRC-8-CCITT).

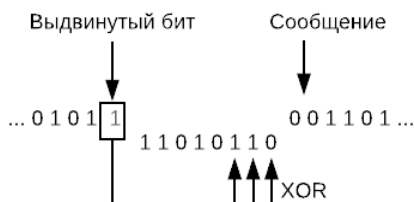


Рис. 4. Схематичное представление вычисления CRC8

Перечислим шаги используемого для сравнения алгоритма MD5.

1. В исходный текст дописывают единичный байт, а затем дополняют нулевыми битами, до тех пор пока длина сообщения не будет сравнима с 448 по модулю 512.
2. Далее в сообщение дописывается 64-битное представление длины исходного сообщения.
3. Инициализируется буфер, состоящий из четырех констант, предназначенный для сбора хеша.
4. На четвертом шаге определяется вспомогательные логические функции, которые преобразуют входные данные в выходные.
5. Далее происходят определенные преобразования информации в несколько раундов, которые подробно описаны в [1].
6. Выводя побайтово буфер, получаем искомый хеш.

В таблице 1 приведены результаты тестирования разработанной программы: данные по времени работы алгоритмов (в секундах) в зависимости от размера файла, соответствующего фрагменту передаваемых по сети данных. Выделены лучшие результаты для указанного количества строк.

Таблица 1

Количество строк Алгоритм	100	1000	10000	100000	1000000	1000000
CRC16	<b>0,0005230</b>	0,0010033	0,0009755	0,0150402	0,1474541	1,4452465
CRC32	0,0040162	0,0009897	<b>0,0005014</b>	<b>0,0130691</b>	<b>0,1153553</b>	<b>1,1557675</b>
MD5	0,0019903	<b>0,0005167</b>	0,0005214	0,0140479	0,1178460	2,0534344
Размер файла, Мб	0,003	0,026	0,258	2,576	25,755	257,543

Из приведенных данных видно, что алгоритм CRC32 является оптимальным алгоритмом быстрого расчета контрольной суммы для передаваемых по сети таблиц.

Следует отметить, что безопасность в распределенных системах представляет собой в настоящее время сложную и многостороннюю проблему. Важность и необходимость ее решения возрастает в связи с увеличением объемов информации, хранимой и обрабатываемой в вычислительных системах и передаваемой по сетям связи.

### Литература

1. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных. 8-е изд.: пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2017.
2. Lifewire. URL: <https://www.lifewire.com/blockchain-explained-4150034> (дата обращения: 05.03.2018).
3. Soltau. URL: <http://soltau.ru/index.php/themes/dev/item/461-kak-poschitat-kontrolnuyu-summu-crc32-crc16-crc8> (дата обращения: 05.03.2018).

**N.Yu. Kovaleva, T.A. Samoylova**  
Smolensk State University

## BLOCKCHAIN TECHNOLOGY FOR DISTRIBUTED DATA PROCESSING

**Keywords:** *distributed data processing, security, web service, blockchain, checksum, hashing.*

**Abstract.** *The article considers the application of blockchain technology to protect information in distributed systems of mass data processing. It is suggested to perform calculation of their checksums on each web service for the fragments of the participating in the operation. The results of the operation of a web service that protects a database fragment are presented. The performance of the CRC16, CRC32, and MD5 checksum algorithms is compared.*

**С.В. Козлов, И.А. Суин**

*Смоленский государственный университет*

УДК 004.62

## О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ И АНАЛИЗА МНОГОМЕРНОЙ СТРУКТУРЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

**Ключевые слова:** *информатика, информационные системы, базы данных, алгебраическая система, программирование, информационно-коммуникационные технологии, функциональный анализ, имплицативные матрицы, соответствие Галуа, инвариантные методы, графовая модель.*

*В статье обсуждаются вопросы описания структуры информационных систем в виде различного вида алгебраических систем. Рассматриваются такие виды систем, как алгебра, модель, полугруппа, моноид, группа. Описание сопровождается примерами, которые демонстрируют отличительные особенности разных алгебраических систем. Примеры иллюстрируют использование различных операций на множестве квадратных матриц. Это обусловлено тем, что структура баз данных большинства информационных систем, как правило, представлена в табличном виде или в виде семантической сети. При этом и в том и в ином случае анализ данных и взаимосвязей между ними может быть осуществлен либо с помощью стандартных матриц, либо с помощью имплицативных матриц. Примеры подобраны таким образом, чтобы показать возможности исследования структуры информационных систем посредством определения множеств операций и отношений на множестве матриц. Важность такого описания структуры информационных систем обусловлена инвариантностью представления данных относительно ее предметной области. Кроме*

*того, оно позволяет использовать инвариантные методы функционального анализа для исследования зависимостей между структурными элементами информационных систем. В частности, это можно осуществить с помощью соответствия Галуа и математического аппарата импликативных матриц. Подходы алгебраического описания и методы функционального анализа эффективно могут быть реализованы посредством современных платформ программирования.*

В настоящее время виды информационных систем настолько многообразны, что требуют для описания своей структуры и анализа содержания применения различных математических подходов. Однако изучение данного вопроса показывает, что в большинстве случаев структуру конкретной информационной системы можно описать с помощью различных видов алгебраических систем. Исследование содержания системных данных в таких случаях, как правило, осуществляется с помощью методов функционального анализа [1; 2]. Данные подходы широко применимы в силу своей инвариантности относительно предметной области информационных систем.

Следует заметить, что при анализе данных информационной системы с целью выявления заданных характеристик может потребоваться описание ее структуры в виде различных алгебраических систем. Этого требует, например, выявление латентных параметров системы и степени влияния одних системных элементов или их групп на другие системные элементы. Тем не менее собственно алгебраическое представление системных данных относительно методов функционального анализа является инвариантным. В свою очередь, методы функционального анализа, например соответствие Галуа или импликативные матрицы [3], являются инвариантными методами анализа структуры и содержания информационной системы.

Рассмотрим далее, какие виды алгебраических структур наиболее востребованы при анализе данных в информационных системах и приведем необходимые примеры.

Алгебраическая система – это система, состоящая из трех множеств: непустого множества  $A$ , множества операций над  $A$  и множества отношений на  $A$  [4]. Если множество отношений является пустым, то данная система называется алгеброй. Так, примером алгебры является система, состоящая из множества квадратных матриц одинаковой размерности, элементами которых являются натуральные числа, и операции сложения матриц. Если же множество операций является пустым, то данная система называется моделью. Возьмем в качестве непустого множества, так же как и в предыдущем примере, множество, состоящее из квадратных матриц одинаковой размерности,

элементами которых являются натуральные числа, множество операций положим пустым, а в качестве множества отношений выберем отношение эквивалентности. Такая алгебраическая система будет являться простой моделью.

Следующей по сложности структурой является полугруппа – алгебра, определенная на которой операция является бинарной и ассоциативной. Воспользуемся одним из предыдущих примеров: пусть имеется Алгебра  $\langle A, * \rangle$ , где  $A$  – множество квадратных матриц одинаковой размерности, элементами которой являются натуральные числа, а операция «\*» есть операция сложения матриц.

Бинарность операции «\*» подразумевает, что для любых элементов  $a$  и  $b$  из множества  $A$  существует элемент  $c$ , принадлежащий  $A$ , такой, что  $a*b = c$ . Так, операция сложения квадратных матриц одинаковой размерности является бинарной.

Ассоциативность же означает, что для любых элементов  $a$ ,  $b$  и  $c$  из множества  $A$  выполнится равенство  $(a*b)*c = a*(b*c)$ . Рассматриваемая операция сложения квадратных матриц одинаковой размерности, элементами которых являются натуральные числа, данному требованию также отвечает.

Расширением понятия «полугруппа» является моноид – алгебра, состоящая из множества  $A$ , бинарной и ассоциативной операции  $*$  над  $A$  и нейтрального относительно операции  $*$  элемента  $e$  (такого, что для любого элемента  $a$  из  $A$   $a*e = e*a = a$ ). В приведенном выше примере такого нейтрального элемента нет. Он появится, если во множество  $A$  квадратных матриц одинаковой размерности добавить матрицу, элементами которой являются нули (подразумевается, что множество элементов матриц расширяется путем добавления к натуральным числам числа 0). В таком случае данная система станет моноидом.

Группой, в свою очередь, называется алгебра, составными элементами которой является множество  $A$ , а также бинарная и ассоциативная операция  $*$  над  $A$ , с двумя дополнительными условиями:

1) во множестве  $A$  содержится нейтральный по операции  $*$  элемент  $e$ ;

2) для каждого элемента  $a$  из множества  $A$  существует обратный ему элемент  $a^{-1}$ , такой, что  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

Чтобы в примере алгебраическая система стала группой, будет достаточно расширить множество элементов матриц до множества целых чисел. В таком случае нейтральный элемент – это матрица, состоящая из нулей, а у каждого элемента из  $A$  будет обратный элемент по операции сложения матриц, в котором вместо элемента матрицы  $a_{i,j}$  будет противоположный по знаку элемент  $(-a_{i,j})$ .

Введение различных видов описанных выше алгебраических структур раскрывает широкий спектр возможностей для изучения структуры и содержания информационных систем инвариантными методами анализа. В частности, находят эффективное применение методы функционального анализа, такие как соответствие Галуа и математический аппарат импликативных матриц на основе представления предметной области информационной системы в виде графовых структур.

Известно, что для описания графов и операций над ними широко применяется алгебра матриц [5; 6]. Для того чтобы определить операции сложения и умножения матриц, необходимо определить алгебру элементов этих матриц. Сигнатура такой алгебры должна включать две операции: аддитивную и мультипликативную. Этими операциями не обязательно должны быть традиционные операции сложения и умножения чисел. Они определяются при постановке задачи в процессе задания множества, к которому принадлежат элементы матриц, и семантики решаемой задачи.

Рассмотрим примеры задач, сводимых к поиску путей в графе, в которых необходимо построение алгебры элементов матриц, обладающей заданными свойствами.

1. Пусть перед нами стоит задача об установлении достижимости вершин ориентированного, невзвешенного графа. Задача поиска путей с определенными свойствами решается с помощью алгоритма транзитивного замыкания матрицы весов графа [7]. Если обозначить матрицу весов  $G$ , то её транзитивное замыкание вычисляется по формуле  $\hat{G} = \sum_{i=1}^k G^i$ ,  $G^i = Z$  при  $i > k$ , где  $Z$  – матрица, состоящая только из нейтральных элементов.

Для решения поставленной задачи введем алгебру с дизъюнкцией в качестве аддитивной операции («+») и конъюнкцией в качестве мультипликативной («\*»). Воздействовать данными операциями будем на матрицу смежности графа.

При каждом возведении матрицы в новую степень будем получать искомые результаты. При возведении матрицы смежности во вторую степень получим матрицу достижимости с максимальной длиной пути в два ребра. При возведении в третью степень получим матрицу достижимости с максимальной длиной пути в три ребра и т.д.

2. Пусть требуется установить максимальную длину пути между вершинами ориентированного, невзвешенного графа. Для данной задачи разумно ввести алгебру, где аддитивной операцией является нахождение максимума чисел, а в качестве мультипликативной операции будет выступать привычная операция сложения. Матрица, полученная путем возведения матрицы смежности во вторую степень, даст возможность



увидеть цифру «2» на пересечении тех столбцов и строк, путь между соответствующими вершинами которых составляет два ребра. При возведении матрицы в куб цифра «3» на пересечении строки и столбца будет обозначать путь в три ребра между соответствующими вершинами и т.д.

Данный подход достаточно эффективен, когда решение задачи происходит в современных средах программирования, основанных на технологии .NET. В них имеются как простые алгоритмы работы со структурой, так и сложные, например параллельное умножение матриц. В таком случае подход представления информационных систем с помощью алгебраических структур позволяет увидеть общность различного рода решаемых задач при их реализации.

Так, в библиотеке Telerik Academy языка программирования C# среды MS Visual Studio реализованы различные методы работы с матрицами. В их числе такие стандартные методы, как `Matrix.Invert` (инвертирование матрицы), `Matrix.Minor` (нахождение минора матрицы), `Matrix.DelRow` (удаление ряда матрицы). А также методы специального назначения, например `Matrix.FindFirstCellPositionWithValue` (нахождение позиции первой ячейки с фиксированным значением) или `Matrix.GaussJordanEliminate` (применение метода Гаусса – Жордана).

Встроенные методы позволяют реализовать всевозможный набор функций для исследования содержания различного рода информационных систем. При этом методология алгебраических систем для изучения структуры и методология функционального анализа для изучения характера взаимосвязей как инвариантные методы исследования обеспечивают высокую точность вне зависимости от сигнатуры и семантики информационной системы. Это открывает дополнительные возможности эффективного применения данных математических методов при проектировании и сопровождении информационных систем.

### Литература

1. Козлов С.В. Использование соответствия Галуа как инварианта отбора контента при проектировании информационных систем // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2, № 11. С. 220–225.
2. Козлов С.В. Применение соответствия Галуа для анализа данных в информационных системах // Траектория науки. 2016. Т. 2, № 3(8). С. 18.
3. Козлов С.В. Использование математического аппарата имплицативных матриц при создании и сопровождении информационных систем // International Journal of Open Information Technologies. 2017. Т. 5, № 12. С. 16–23.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Лань, 2009. 176 с.
5. Козлов С.В. Интерпретация инвариантов теории графов в контексте применения соответствия Галуа при создании и сопровождении информационных систем // International Journal of Open Information Technologies. 2016. Т. 4, № 7. С. 38–44.

6. Козлов С.В. Теория графов и соответствия Галуа как инструменты проектирования информационных систем // NovaInfo.Ru. 2016. Т. 3, № 48. С. 144-149 .

7. Ахо А.В., Хопкрофт Д.Э., Ульман Д.Д. Структуры данных и алгоритмы / пер. с англ. А.А. Минько. М.: Вильямс, 2010. 400 с.

**S.V. Kozlov, I.A. Suin**  
*Smolensk State University*

## **ABOUT SOME APPROACHES OF MATHEMATICAL DESCRIPTION AND ANALYSIS OF THE MULTIDIMENSIONAL STRUCTURE OF INFORMATION SYSTEMS**

**Keywords:** *informatics, information systems, databases, algebraic system, programming, information and communication technologies, functional analysis, implicative matrixes, compliance of Galois, invariant methods, graph model.*

**Abstract.** *The article discusses the description of the structure of information systems in the form of various types of algebraic systems. Such types of systems as algebra, model, semigroup, monoid, group are considered. The description is accompanied by examples that demonstrate the distinctive features of different algebraic systems. The examples illustrate the use of various operations on a set of square matrices. This is due to the fact that the structure of the databases of most information systems, as a rule, is presented in a tabular form or in the form of a semantic network. The analysis of data and their interrelations in such information systems can be carried out either by means of standard matrices or by means of implicative matrices. The examples are selected in such a way as to show the possibilities of studying the structure of information systems by determining the sets of operations and relations on the set of matrices. The importance of such a description of the structure of information systems is due to the invariance of the presentation of data on its subject area. In addition, it allows the use of invariant methods of functional analysis for the study of dependencies between the structural elements of information systems. In particular, this can be done with the help of the Galois correspondence and the mathematical apparatus of implicative matrices. At the same time, the approaches of algebraic description and methods of functional analysis can be effectively implemented through modern programming platforms.*

**А.И. Макаров**  
*Смоленский государственный университет*  
УДК 519.161

## **ОДИН ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПОИСКА ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФА**

Ключевые слова: *граф, раскраска графа, хроматическое число.*

*В статье рассматривается простейший случай задачи раскраски вершин графа, в котором каждой вершине ставится в соответствие единственный цвет таким образом, что вершины, имеющие общее ребро не могут иметь одинаковый цвет. Рассмотрены существующие прикладные решения, выделено ключевое значение подзадачи определения достаточного числа цветов. Отмечена важность данной подзадачи для параллельных вычислений, приведены примеры ее использования. Проведен анализ основных факторов, влияющих на значение хроматического числа графа. Определены основные условия, влияющие на значение хроматического числа. Сформулированы основные свойства хроматического числа с доказательствами их актуальности. Предложена априорная оценка достаточного числа цветов для неориентированного графа, не имеющего петель, интуитивное доказательство этой оценки, и рассмотрены некоторые преимущества ее использования. Сформулирована необходимость и достаточность нахождения кликового числа графа для определения значения хроматического числа графа с минимальной погрешностью. Отмечена значимость этого способа определения значения хроматического числа, предложены существующие и изученные методы, использование которых становится возможным для решения данной задачи. Проведено сравнение предложенной оценки с существующими оценками, выявлены ее преимущества относительно них. Приведены результаты экспериментального анализа, подтвердившего справедливость предложенного подхода, поставлена цель для дальнейшего изучения.*

**1. Постановка задачи.** В теории графов раскраска графов является частным случаем разметки графов. При раскраске элементам графа ставятся в соответствие метки с учетом определенных ограничений; эти метки традиционно называются «цветами». В простейшем случае такой способ окраски вершин графа, при котором любым двум смежным вершинам соответствуют разные цвета, называется раскраской вершин.

Существует множество прикладных решений для раскраски графов, но ни одно не дает решения за полиномиальное время для произвольного графа. Однако не всегда важно найти именно раскраску, часто достаточно только определить наименьшее количество необходимых цветов. Для этого существует множество оценок значения хроматического числа, но они опираются на количество вершин, количество ребер, степень вершин и дают очень большой диапазон для допустимых значений между оценками снизу и оценками сверху.

Данная задача была выбрана из-за ее важности для параллельных вычислений. Простейшим примером является распределение регистров:

для вычислений необходимо, чтобы переменные находились в регистрах во время их использования. Однако количество регистров ограничено, а не используемые одновременно переменные можно не держать в регистрах вместе, а загружать только при необходимости. Соответственно, все переменные можно обозначить за вершины графа, используемые одновременно соединить ребрами. И задача распределения регистров сводится к раскраске графа.

Далее рассматриваются связные неориентированные графы, не содержащие петель [1]. Используются следующие обозначения:

- $G$  – граф,  $G = (V(G), E(G))$ ;
- $V(G)$  – количество вершин графа  $G$ ;
- $E(G)$  – количество ребер графа  $G$ ;
- $dG(x)$  – степень вершины  $x$  графа  $G$ ;
- $K_n$  – полный граф, состоящий из  $n$  вершин;
- $\omega(G)$  – кликовое число графа  $G$ , количество вершин в наибольшей клике;
- $\chi(G)$  – хроматическое число графа  $G$ .

Далее рассматривается классическая задача раскраски графа, состоящая в том, чтобы выяснить, сколько необходимо различных цветов для раскраски графа таким образом, чтобы смежные вершины были окрашены в разные цвета.

**2. Анализ ограничений на хроматическое число.** В большинстве научных работ, в которых решается задача раскраски вершин графа, важную роль играет конструкция, называемая хроматическим многочленом.

Предлагаемый подход позволяет решить задачу, не используя понятие «хроматический многочлен». Для этой цели был проведен анализ различных неориентированных графов, что позволило сформулировать следующие свойства хроматического числа.

**Свойство 1.** Для любого полного графа  $K_n$   $\chi(K_n) = n$ . Так как каждая вершина графа смежна всем другим вершинам, ни одна пара вершин не может иметь один цвет.

**Свойство 2.** Для любого графа  $G$  и любого его подграфа  $H$ , имеющего хроматическое число  $\chi(H)$ , верно следующее:  $\chi(G) \geq \chi(H)$ . Это следует из того, что подграф уже имеет оптимальную раскраску из  $\chi(H)$  цветов и его дополнение до графа  $G$  не может улучшить раскраску, но, например, при дополнении его до полного графа  $K_{n+1}$ , где  $n$  – количество вершин графа  $H$ , хроматическое число возрастает до  $n + 1$ .

**Свойство 3.**  $\chi(G) \leq n$ , где  $n$  – количество вершин графа. Это ограничение следует из того, что раскраска каждой вершины в уникальный цвет является правильной.

**Свойство 4.**  $\chi(G) \geq \omega(G)$ . Рассмотрим наибольший подграф графа  $G$ , являющийся полным графом. Согласно свойству 1,  $\chi(K_\omega) = \omega(G)$ . А так как граф  $\omega(G)$  является подграфом  $G$ , по свойству 2 получаем  $\chi(G) \geq \chi(K_\omega) = \omega(G)$ .

**Свойство 5.** Хроматическое число графа  $G$  при дополнении его вершиной  $x$ , смежной каждой из вершин множества  $V(G)$ , равно  $\chi(G) + 1$ . Рассмотрим получившийся граф  $G'$ . Все вершины кроме одной добавленной можно было раскрасить  $\chi(G)$  цветами, но добавленная вершина смежна каждой другой и не может иметь один из уже существующих цветов, значит, она будет иметь уникальный цвет, ранее не использованный. Стоит заметить, что добавление такой вершины в граф, имеющий хотя бы одно ребро, ведет к увеличению кликового числа на 1.

**3. Метод оценки хроматического числа.** Можно сформулировать следующее утверждение: для произвольного графа  $G$   $\chi(G) \leq \omega(G) + 1$ .

Пусть дан произвольный граф  $G$ . Пусть в этом графе есть вершина  $x$ , смежная другим  $\omega(G) + 1$  вершинам. Для того чтобы любые две из них были различных цветов, необходимо потребовать или их смежность, или связь этих вершин с подграфом, таким, что цвет этих вершин не мог совпадать. Все вершины смежны быть не могут, потому что таких вершин  $\omega(G) + 1$  и они все связаны с рассматриваемой, что дает  $K_{\omega(G)+2}$ . Значит, есть хотя бы две пары вершин, связанных не ребром, а подграфом. Чтобы зафиксировать цвет каждой из этих вершин, она должна быть смежна с  $\omega(G)$  другими вершинами, которые также смежны либо связаны с подграфом, не дающим совпасть цветам вершин. Так как рассматриваемый граф конечен, на каком-то шаге полученная таким образом вершина должна быть смежна  $\omega(G)$  другим вершинам, образующим полный подграф. Получаем полный подграф из  $\omega(G) + 1$  вершины – противоречие. Значит, не может существовать такой вершины  $x$ , смежной другим  $\omega(G) + 1$  вершинам различных цветов. И  $\chi(G) \leq \omega(G) + 1$ .

С помощью компьютера методом полного перебора (greedy algorithm) изучены все возможные варианты графов с количеством вершин не более 7. Для всех данное утверждение оказалось верным. В дальнейшем предполагается проверка данного утверждения на графах библиотеки DIMACS [2]. Ниже в таблице 1 приведены некоторые примеры графов, иллюстрирующие справедливость утверждения.

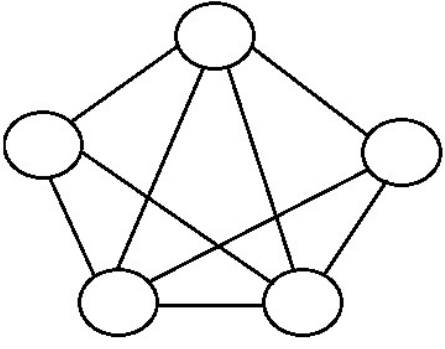
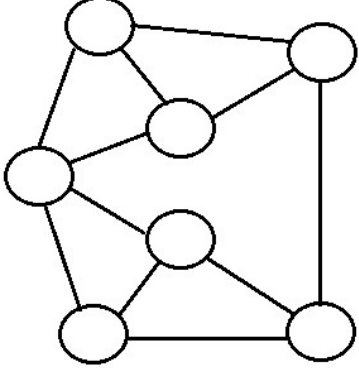
Таким образом, получаем верхнюю и нижнюю оценку значения хроматического числа графа:  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \omega(G) + 1$ .

Предложенный подход не противоречит существующим теоремам об оценке хроматического числа, так как  $\omega(G) + 1$  не превосходит ни одной оценки сверху значения хроматического числа, а  $\omega(G)$  не меньше любой оценки снизу. Теорема о четырех красках также получает

упрощенное доказательство, опирающееся на этот подход, так как максимальный полный граф, являющийся планарным, имеет порядок не больше третьего.

Таблица 1

Примеры графов

	$n = 5$ $\omega(G) = 4$ $\chi(G) = 4$
	$n = 7$ $\omega(G) = 3$ $\chi(G) = 4$

Соответственно, для определения значения хроматического числа графа с погрешностью в единицу необходимо и достаточно определить кликовое число. Это сводит задачу раскраски графа к задаче поиска полного цикла максимального порядка. Данный подход позволяет использовать для раскраски графа такие алгоритмы, как обходы графа в глубину или в ширину. Эти алгоритмы хорошо изучены, но не использовались ранее для решения задачи раскраски графа.

### Литература

1. Карпов Д.В. Теория графов. URL: [https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs\\_dk.pdf](https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf).
2. Cosmin Porumbela D. A search space «cartography» for guiding graph coloring heuristics // Computers & Operations Research. 2010. № 37. P. 769–778.

**A.I. Makarov**  
 Smolensk State University

### ABOUT SEARCHING FOR THE CHROMATIC NUMBER

**Keywords:** *graph, graph coloring, chromatic number.*

**Abstract.** *The article deals with the simplest case of the problem of coloring the vertices of a graph, in which each vertex is matched with a single color, so that the vertices having a common edge cannot have the same color. The existing application solutions are considered, the key importance of defining a sufficient number of colors is highlighted. The importance of this subtask for parallel computing is noted, and examples of its use are given. The analysis of the main factors affecting the value of the chromatic number of the graph. The basic conditions affecting the value of chromatic number are determined. The basic properties of chromatic number with proofs of their relevance are formulated. An a priori estimate of a sufficient number of colors for a nonoriented non-loop graph is proposed, an intuitive proof of this estimate, and some advantages of using it are considered. The necessity and sufficiency of finding the clique number of the graph to determine the value of the chromatic number of the graph with minimal error are formulated. The value of this method of determining the value of the chromatic number is noted, existing and studied methods are proposed, the use of which becomes possible to solve this problem. The comparison of the proposed assessment with the existing estimates is carried out, its advantages relative to them are revealed. The results of the experimental analysis, which confirmed the validity of the proposed approach, set the goal for further study.*

**Д.И. Макаров, В.И. Мунерман, Д.В. Мунерман**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.657

## **АРХИТЕКТУРА ПРОГРАММНО-АППАРАТНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ НА БАЗЕ КОНТЕЙНЕРНОЙ ТЕХНОЛОГИИ**

Ключевые слова: *big data, программно-аппаратный комплекс, грид-технология, контейнерная технология.*

*Рассмотрен один метод разработки архитектуры программно-аппаратного комплекса для параллельной реализации сложных запросов, включающих операцию Join, к базам данных, содержащим большие и сверхбольшие объемы информации. Метод основан на использовании двух современных подходов к организации параллельной обработки данных на разнородных вычислительных средствах, объединенных в локальную или глобальную сеть. Приведено решение проблемы посредством использования грид-технологии и контейнерной технологии.*

В статье рассмотрен один метод разработки архитектуры программно-аппаратного комплекса для параллельной реализации сложных запросов, включающих операцию Join, к базам данных, содержащим большие и сверхбольшие объемы информации. В своих работах [1, 2] авторы рассматривали различные способы построения подобного рода комплексов на основе принципа симметричного горизонтального распределения данных и различных архитектур параллельных вычислительных систем. Предлагаемый метод основан на использовании двух современных подходов к организации параллельной обработки данных на разнородных вычислительных средствах, объединенных в локальную или глобальную сеть. Это позволяет решить проблему параллельной реализации сложных запросов к базе данных с использованием современных подходов: грид-технологии и контейнерной технологии.

Грид-технология основана на концепции связывания грид-архитектуры, которая задает фундаментальные системные компоненты, определяет цели и функции этих компонент и показывает, как они взаимодействуют друг с другом, с технологиями Web-служб на основе открытой архитектуры Open Grid Services Architecture (OGSA). Эта архитектура позволяет интегрировать службы и ресурсы распределенных, гетерогенных, динамических сред [3; 4].

В качестве базовой принята грид-архитектура на основе **выделения вычислительных ресурсов по требованию** (enterprise grid). В этом случае предполагается, что приложения работают на «виртуальном компьютере», который, в свою очередь, состоит из нескольких физических компьютеров, объединённых с помощью грид-технологий. Для решения задачи параллельной обработки симметрично горизонтально распределенных данных вполне подходит реализация на основе **простой хостинг-среды**. Это исполнительная среда, которая представляет собой набор ресурсов, размещенных внутри одного административного домена. Она поддерживает локальные возможности, необходимые для управления службами, например, сервер приложений J2EE, система Microsoft .NET или Linux-кластер. В OGSA интерфейс пользователя с такой средой, как правило, будет представлен структурой, включающей специальный реестр, один или несколько ресурсов и службу отображения. Каждый ресурс учитывается в системном реестре, что предоставляет клиентам возможность обнаруживать доступные ресурсы. Когда ресурс получает клиентский запрос на создание экземпляра грид-службы, он активизирует необходимые возможности хостинг-среды для создания нового экземпляра и регистрирует его в системном реестре. Это открывает доступ к созданному экземпляру.



Для реализации симметричного горизонтального распределения данных выбрана SQL-реляционная модель. Выбор этой модели обусловлен тем, что она:

- изморфна теоретико-множественной (файловой) модели данных, которая обеспечивает возможность симметричного горизонтального распределения;
- обеспечивает выполнение важнейшего требования грид-технологии – требования *интероперабельности*.

Действительно, в [2] доказано, что операции слияния нестрого упорядоченных файлов соответствует операция Join. Это позволяет симметрично горизонтально распределить таблицы-операнды операции Join и затем параллельно выполнить эту операцию над фрагментами таблиц. Кроме того, операции симметричного горизонтального распределения таблиц: создание индексов для индексно-последовательного доступа к таблицам, распределение таблиц алгоритмом бустрофедона – могут быть реализованы в процедурно-ориентированных диалектах языка SQL: Transact-SQL, PL/SQL, PL/PGSQL. Таким образом, выбор SQL-реляционной модели данных позволяет использовать вычислительные средства, реализованные на различных платформах: различные операционные системы, различные поддерживающие SQL-реляционную модель СУБД. Это полностью решает проблему интероперабельности.

Из сказанного следует, что применение грид-технологии в сочетании с имеющимися СУБД позволяет создавать для конкретных приложений локальные параллельные программно-аппаратные комплексы или локальные грид-системы.

В качестве программной платформы для реализации локальных грид-систем предлагается использовать Docker [5–7]. Это программное обеспечение применяется для автоматизации развертывания и управления приложениями в изолированной среде под управлением различных операционных систем. Пользовательское приложение и все, что ему требуется (языковые и библиотечные средства), «упаковывается» в специализированный объект – контейнер (контейнерный образ), который может быть перенесён на любую вычислительную систему, операционная система которой поддерживает Docker-платформу. Контейнерный образ представляет собой автономный, исполняемый пакет программного обеспечения, который включает в себя все необходимое для его запуска: код, среда выполнения, системные инструменты, системные библиотеки, настройки. Контейнеры изолируют программное обеспечение от окружения, что позволяет игнорировать различия между средами разработки и промежуточными средами. Естественно, контейнеры одного и того же приложения для различных операционных систем и

вычислительных средств могут быть различными. Кроме того, Docker предоставляет среду по управлению контейнерами. Эта среда – стандартная RunTime-система для всех видов контейнеров. Она доступна как *системная служба* – то есть программа в многозадачных ОС, которая работает как фоновый процесс, а не находится под прямым контролем интерактивного пользователя. Docker реализует управление полным жизненным циклом контейнера и выполняет основные функции жизненного цикла, такие как передача и хранение данных, как системных, так и пользовательских, управление контейнером, низкоуровневые хранилища и сетевые приложения. Программа, реализующая среду управления контейнерами (Docker использует Containerd), предназначена для встраивания в системную часть конкретного программно-аппаратного комплекса. В рассматриваемом в статье случае это комплекс для параллельной обработки симметрично горизонтально распределенных данных. Среда управления недоступна для непосредственного использования прикладным программистом или конечным пользователем.

В общем случае в состав программных средств входят системная служба, реализующая функции сервера контейнеров, клиентские средства, позволяющие управлять образами и контейнерами, а также API, позволяющий программно управлять контейнерами.

**Системная служба** совместно с ОС узла обеспечивает полную изоляцию запускаемых на узле контейнеров за счет того, что:

- *на уровне файловой системы*: у каждого контейнера собственная корневая файловая система;
- *на уровне процессов*: процессы имеют доступ только к собственной файловой системе контейнера, а ресурсы разделены;
- *на уровне сети*: каждый контейнер имеет доступ только к привязанному к нему сетевому пространству имен и соответствующим виртуальным сетевым интерфейсам.

**Набор клиентских средств** позволяет запускать процессы в новых контейнерах, останавливать и запускать контейнеры, приостанавливать и возобновлять процессы в контейнерах и осуществлять мониторинг запущенных процессов.

Контейнерная технология может эффективно сочетаться с грид-технологией. В настоящее время известны различные применения контейнерной технологии в грид-системах. Один из примеров этого – система BOINC [8], разработанная для добровольных вычислений и, как показала практика, эффективно используемая для грид-вычислений. Использование контейнерной технологии, а именно Docker, позволило упростить создание проекта BOINC и развертывание приложений в BOINC. Это достигается путем встраивания сервера BOINC в Docker в качестве приложения. Такой сервер состоит из трех контейнеров Docker:

- контейнер базы данных;
- контейнер веб-сервера;
- контейнер резервных программ и инструментов BOINC.

Для реализации системы управления распределенной обработкой данных целесообразно использовать предложенное сочетание грид-архитектуры и контейнерной технологии. Используемые в этом случае вычислительные средства можно рассматривать как рабочие станции, способные эффективно реализовывать функции СУБД.

Предлагается система, состоящая из двух типов контейнеров.

1. Контейнер-исполнитель содержит СУБД, прикладное программное обеспечение для решения задачи обработки данных и реализации симметричного горизонтального распределения данных. Возможен вариант контейнера-исполнителя без СУБД в том случае, когда контейнер должен запускаться на рабочей станции, на которой уже установлена СУБД.

2. Контейнер-арбитр содержит системное программное обеспечение, предназначенное для определения свободных ресурсов в сети рабочих станций, раздачу заданий на симметричное горизонтальное распределение данных и запросов на обработку данных контейнерам-исполнителям.

При таком подходе рабочие станции, способные выполнять распределенную обработку данных окажутся разнотипными и будут взаимодействовать так, как это показано на рисунке 1.

Типы рабочих станций и соответствующее им программное обеспечение (контейнеры) представлены в таблице 1.

Если потенциальная или исполнительная рабочая станция принимает решение о запуске параллельной операции обработки данных, то с любой полнофункциональной рабочей станции на нее загружается арбитр. После инициации арбитра определяются рабочие станции, обладающие достаточными ресурсами. Если выбранная рабочая станция потенциальная, то на нее пересылается контейнер-исполнитель, который иницируется и получает задание от арбитра. На исполнительной рабочей станции выполняется только инициализация контейнера-исполнителя.

*Таблица 1*

**Типы рабочих станций**

Тип	Функционал	Docker	Контейнер-исполнитель	Контейнер-арбитр
1	Полнофункциональная	+	+	+
2	Исполнительная	+	+	–
3	Потенциальная	+	–	–

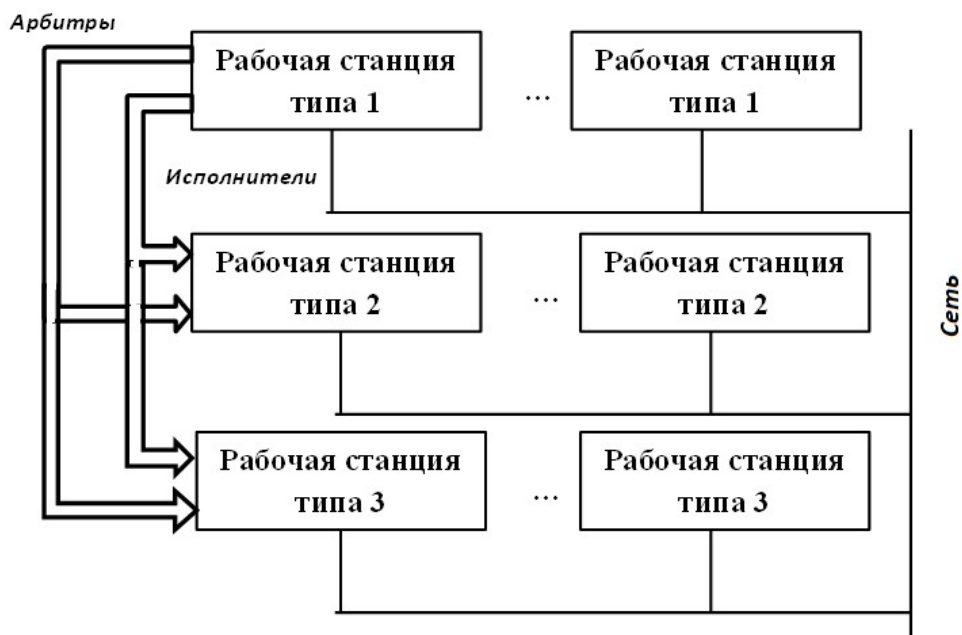


Рис. 1. Взаимодействие рабочих станций

Если принимает решение о запуске параллельной операции обработки данных полнофункциональная рабочая станция, то инициируется имеющийся на ней арбитр.

Предложенная система может быть эффективно использована для реализации параллельной обработки данных на локальных и глобальных грид-системах, состоящих из набора вычислительных средств, способных качественно реализовать работу с базами данных.

### Литература

1. Мунерман В.И. Опыт массовой обработки данных в облачных системах (на примере Windows Azure) // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, № 2. С. 3–8.
2. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, № 4. С. 3–16.
3. Foster I., Kesselman C., Tuecke S. The Anatomy of the Grid: Enabling Scalable Virtual Organizations // International Journal of High Performance Computing Applications. 2001. Vol. 15, Is. 3. P. 200–222.
4. Демичев А.П., Ильин В.А., Крюков А.П. Введение в грид-технологии. Препринт НИИЯФ МГУ – 2007 – 11/832. М., 2007.
5. Raj P., Chelladurai J. S., Singh V. Learning Docker. Packt Publishing, 2015. 240 p.
6. Моуэт Э. Использование Docker. Разработка и внедрение программного обеспечения при помощи технологии контейнеров. Руководство = Using Docker: Developing and Deploying Software with Containers. ДМК Пресс, 2017. 300 с.
7. <https://insidehpc.com/2017/11/univa-grid-engine-adds-ubercloud-parallel-mpi-docker-containers/>.
8. <https://boinc.berkeley.edu/trac/wiki/BoincDocker>.

**D.I. Makarov, V.I. Munerman, D.V. Munerman**  
*Smolensk State University*

## **THE ARCHITECTURE OF SOFTWARE AND HARDWARE COMPLEX FOR DISTRIBUTED DATA PROCESSING AT THE BASIS OF CONTAINER TECHNOLOGY**

**Keywords:** *big data, software and hardware system, grid technology, container technology*

**Abstract.** *One method for developing the architecture of a software and hardware complex for parallel implementation of complex queries, including the Join operation, to databases containing large and extremely large volumes of information is consider. This method is based on the use of two modern approaches to the organization of parallel processing of data on heterogeneous computing facilities, combined into a local or global network. The solution of the problem is solved through the use of modern grid technology and container technology.*

**Е.А. Недорезова, Т.А. Самойлова**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.912

## **МНОГОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ КЛАССИФИКАЦИИ ТЕКСТОВ**

**Ключевые слова:** *классификации текстов, Text Mining, machine learning, частотный анализ, многомерная модель, метод наивного Байеса, Python, Django.*

*В работе рассматривается разработка классификационной модели анализа текстовой информации на основе многомерной модели алгоритма наивного Байеса. Реализация выполнена средствами sklearn языка Python, предоставляющего функционал проведения классификации текстовой информации и позволяющего выполнять обработку текстовых данных с использованием интернет-технологий. Получены зависимости оценки качества классификации и точности модели от значения ее параметров. Также приведено сравнение данного алгоритма с результатами работы метода опорных векторов.*

### **Введение**

Одной из основных задач информационно-аналитических систем классификации текстов является рубрикация текстов, а также классификация текстовых сообщений по категориям. Тематика

становится все более актуальной в связи с возрастающим числом пользователей различных интернет-сервисов, интернет-магазинов и социальных сетей.

В настоящее время данная задача решается различными методами машинного обучения, одним из которых является рассмотренный в данной работе байесовский подход, при котором максимизируется апостериорная вероятность определения класса.

### **Постановка задачи классификации текстов**

1. Имеется множество категорий (классов, меток):  $C = \{c_1, \dots, c_{|C|}\}$ .
2. Имеется множество документов:  $D = \{d_1, \dots, d_{|D|}\}$ .
3. Неизвестная целевая функция:  $F : C \times D \rightarrow \{0, 1\}$ .
4. Необходимо построить классификатор  $F^\circ$ , максимально близкий к  $F$ .
5. Имеется некоторая начальная коллекция размеченных документов  $R \subset C \times D$ , для которых известны значения целевой функции  $F$ . В поставленной задаче каждое текстовое сообщение (классы, темы), соответствующее документу, представляется с помощью векторной модели. В этом случае оно рассматривается как набор слов (*англ.* bag of words – «мешок слов») в качестве точек многомерного пространства.

### **Этапы решения задачи классификации текстов**

#### **1. Индексация документов**

Из всех слов обучающей выборки создается общий пул, где каждому уникальному слову присваивается свой индекс. Предварительно тексты проходят процедуру *токенизации* (из корпуса удаляются стоп-слова, не дающие тексту никакого смысла) и *лемматизации* (процесс приведения слова к нормальной форме). Затем для каждого документа строится его числовая модель в виде многомерного вектора слов. Сообщение описывается вектором, состоящим из атрибутов, принимающих значения 0 либо 1. При этом рассматривается только присутствие или отсутствие слова в сообщении.

Пример векторной записи текста:

$[0,0,0,1,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1]$ ,

где  $i$ -я позиция элемента соответствует  $i$ -му индексу словарного пула.

#### **2. Построение и обучение классификатора**

Наивная байесовская модель является вероятностным методом обучения. В многомерной модели текстовый документ – это вектор бинарных атрибутов, показывающих, встретилось ли в документе то или иное слово. Для вычисления правдоподобия документа необходимо перемножить вероятности того, что встретилось каждое слово из

документа, и вероятности того, что не встретилось каждое слово, определенное в словаре. Далее формируется модель многомерных испытаний Бернулли. Предположение состоит в том, что события «встретилось ли слово» предполагаются независимыми.

Для обучения классификатора используем конвейерный класс *Pipeline*:

```
text_model = Pipeline([('vect', CountVectorizer()), ('tfidf',  
TfidfTransformer()), ('clf', MultinomialNB()),])
```

где *CountVectorizer* преобразовывает входной текст в матрицу, значениями которой являются количества вхождения данного слова в текст, подсчитываем число словоупотреблений с помощью *TfidfTransformer* и используем классификатор *MultinomialNB* для определения темы нового сообщения.

```
text_model.fit(data['text'], data['tag']).
```

В результате применения метода *fit* получаем классификатор, который можно использовать для выполнения функции *predicted* – предсказание темы нового сообщения:

```
predicted = text_model.predict(test_data['text']).
```

```
Загружаем обучающие данные из БД...  
  считано: 27  
Обучение классификатора...  
[i] Тестируем на нашем тексте...  
Наш тестовый текст: ['За свои деньги - отличный аппарат!']  
Предсказываю тематику: ['хороший']
```

Рис. 1. Пример реализации алгоритма наивного Байеса

Для оценки качества классификации будем использовать метод кросс-валидации:

```
text_model = Pipeline([ ('vectorizer', CountVectorizer()), ('chi2',  
SelectKBest(chi2, k= 'all')), ('nb', MultinomialNB())]).
```

Класс *SelectKBest* реализует одномерный отбор признаков и применим для отбора заданного количества признаков. В данном примере используется критерий хи-квадрат (*chi2*) для отбора всех признаков.

Далее разбиваем полученные показатели на две подвыборки – обучающую и тестовую и произведем расчеты показателей качества классификации, используя функцию *train\_test\_split(data['text'], data['tag'], test\_size=0.5)*, параметрами которой являются массив параметров (сообщения), массив значений показателей (темы) и соотношение, в котором будет разбита обучающая выборка (в нашем случае для тестового набора выделена 1/2 часть данных исходной обучающей выборки).

### 3. Оценка качества классификации

Оценка качества классификации выполняется по критериям полноты, точности,  $F$ -меры.

*Accuracy* (доля правильных ответов) – доля документов по которым классификатор принял правильное решение.

$$Accuracy = \frac{P}{N},$$

где  $P$  – количество документов, по которым классификатор принял правильное решение, а  $N$  – размер обучающей выборки.

Гораздо более информативными критериями оценки качества классификации являются *точность* (*precision*) и *полнота* (*recall*):

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP},$$

$$Recall = \frac{TP}{TP + FN},$$

- ***TP*** — истинно-положительное решение;
- ***TN*** — истинно-отрицательное решение;
- ***FP*** — ложно-положительное решение;
- ***FN*** — ложно-отрицательное решение.

Еще одним способом получения критерия качества на основе точности и полноты является  $F$ -мера – среднее гармоническое точности и полноты:

$$F = \frac{2 * precision * recall}{precision + recall}.$$

Для оценки применимости предсказывающей модели на практике предпочтительнее использовать метод кросс-валидации (*cross-validation*). Метод заключается в разбиении набора данных на части, затем построении модели на одной части (тренировочный набор) и валидации модели на другой части (тестовый набор).

### 4. Выбор программных средств разработки

В работе используется пакет машинного обучения Scikit-learn, представляющий собой реализацию большого числа алгоритмов машинного обучения с учителем и без учителя с использованием языка Python.

Для решения задачи классификации текстовой информации будем применять размеченный набор текстов для обучения системы (SQLight). Данный набор представляет собой отзывы пользователей интернет-сервисов с присвоенными им уже классами.



## Результаты работы

Размеченный набор данных средствами Python-библиотеки *sklearn.model\_selection.train\_test\_split* разбивался на обучающую и тестовую выборки. На рисунке 2 представлены оценки качества работы классификатора для различных классов тестовой выборки.

```
Загружаем обучающие данные из БД...
  считано: 27
Обучение классификатора...
accuracy_score: 0.5
      precision    recall  f1-score   support

   плохой         0.00     0.00     0.00         5
   хороший         1.00     0.33     0.50         3
нейтральный         0.50     1.00     0.67         6

 avg / total         0.43     0.50     0.39        14
```

Рис. 2. Результат проведения кросс-валидации алгоритма наивного Байеса

Для сравнения, результат проведения кросс-валидации метода опорных векторов (см. рис. 3).

```
Загружаем обучающие данные из БД...
  считано: 27
Обучение классификатора...
accuracy_score: 0.428571428571
      precision    recall  f1-score   support

   плохой         0.22     0.67     0.33         3
   хороший         0.67     1.00     0.80         2
нейтральный         1.00     0.22     0.36         9

 avg / total         0.79     0.43     0.42        14
```

Рис. 3. Результат проведения кросс-валидации метода опорных векторов

## Заключение

Полученные для разных коэффициентов разбиения оценки качества классификатора, построенного на основе наивного байесовского обучения, показали, что максимальная точность классификации достигается при числе классификаторов от 3 до 8. Дальнейшее увеличение этого числа ведет к снижению точности классификации.

## Литература

1. Батура Т.В. Математическая лингвистика и автоматическая обработка текстов: учеб. пособие. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2016. 166 с.
2. Воронцов К.В. Лекции по методу опорных векторов. URL: <http://www.ccas.ru/voron/download/SVM.pdf>.
3. Дхиллон Д. Использование языка Python, пакета SciKit и средств классификации текста для профилирования поведения клиентов. Copyright IBM Corporation, 2014. 10 с.

**E.A. Nedorezova, T.A. Samoylova**  
Smolensk State University

## **MULTIDIMENSIONAL MODEL OF CLASSIFICATION OF TEXTS**

**Keywords:** *classifications of texts, Text Mining, machine learning, frequency analysis, multidimensional model, naive Bayes algorithm, Python, Django.*

**Abstract.** *In article results is considered of development of classification model of the analysis of text information on the basis of multidimensional model of an algorithm of naive Bayes. Realization is executed by means of sklearn of the Python language providing functionality of carrying out classification of text information and allowing to carry out processing of text data with use the Internet-technologies. Dependences of assessment of quality of classification and accuracy of model on value of her parameters are received. Comparison of this algorithm with results of work of a method of basic vectors is also given.*

**М.А. Посыпкин**

*Вычислительный центр имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН*

УДК 517.968.23

## **БЕЗБЛОКИРОВОЧНЫЙ МНОГОПОТОЧНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ МНОГОЯДЕРНЫХ СИСТЕМ <sup>2</sup>**

**Ключевые слова:** *многоядерные системы, параллельный алгоритм, метод ветвей и границ, балансировка нагрузки.*

*В статье рассматривается проблема разработки параллельного многопоточного приложения для решения задач глобальной оптимизации методом ветвей и границ. Предлагается подход для организации безблокировочного режима, в котором синхронизация происходит только при запуске и завершении потока. Приводится описание алгоритма и его программной реализации, а также результатов эксперимента.*

Приоритетным направлением повышения производительности в настоящее время является увеличение числа вычислительных ядер, работающих параллельно. Наиболее доступной и распространенной

---

<sup>2</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №17-07-00510

платформой в настоящее время являются многоядерные системы с общей памятью. Типичная конфигурация таких систем включает в себя один процессор с несколькими вычислительными ядрами. При этом одно ядро процессора может поддерживать несколько потоков одновременно в режиме гипертрейдинга. В таблице 1 приведены характеристики некоторых распространенных процессоров, используемых как при построении высокопроизводительных систем, так и при комплектации обычных настольных компьютеров. Как можно заметить, современные системы могут поддерживать несколько десятков параллельно исполняющихся потоков.

Как показывают исследования [1], результаты которых приведены на рисунке 1, число ядер в одном процессоре неуклонно растет, в отличие от других характеристик (производительность одного потока, тактовая частота), определяющих производительность компьютера.

Таблица 1

Характеристики процессоров

Процессор	Число ядер	Число потоков
Intel Core i9-7900X	10	20
Intel Core i9-7980XE	18	36
Intel Xeon E7-8890V4	24	48
Intel Xeon Phi 7290	72	288
IBM Power9 PowerNV	24	96
IBM Power9 PowerVM	12	96

Можно сделать однозначный вывод, что в ближайшее время число вычислительных ядер будет продолжать увеличиваться.

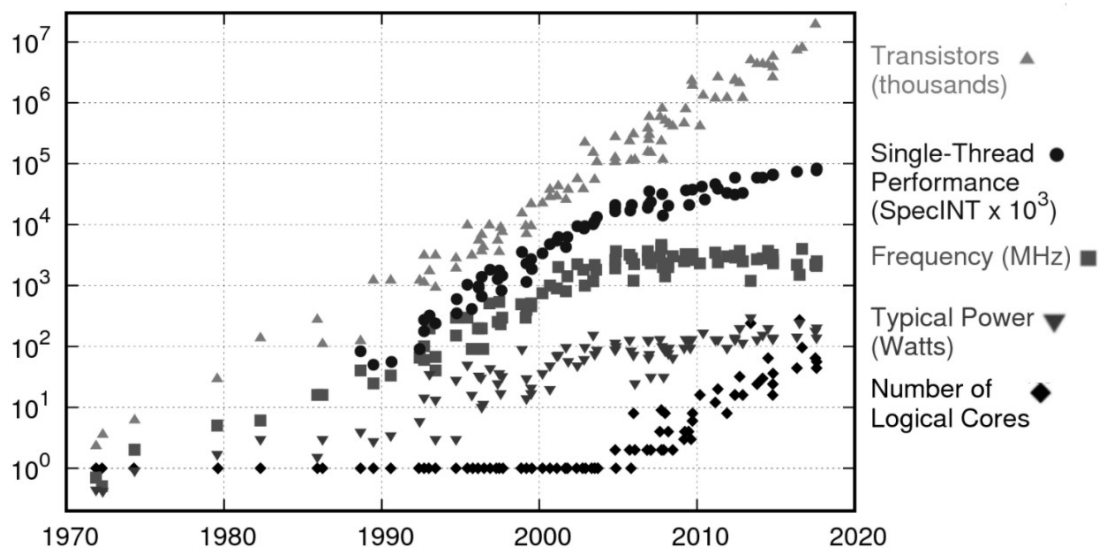


Рис. 1

В связи со стремительным развитием многоядерных архитектур приобретает актуальность задача разработки параллельных алгоритмов, ориентированных на подобные системы. В данной работе в качестве

объекта для распараллеливания рассматривается метод ветвей и границ (МВГ), который является вычислительным каркасом многих методов глобальной оптимизации [2]. Особенностью этого метода является то, что его информационный граф [3; 4] имеет, как правило, несбалансированную древовидную структуру, не известную до начала выполнения параллельной программы. Это приводит к необходимости разработки методов управления распределением вычислительной нагрузки в процессе расчетов. В работе предлагается два варианта многопоточной реализации метода ветвей и границ, исследуется их эффективность на тестовом наборе задач глобальной оптимизации.

### 1. Описание последовательного метода ветвей и границ

Рассмотрим задачу оптимизации, в которой требуется найти минимум функции на заданном множестве:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X. \quad (1)$$

Суть метода состоит в декомпозиции исходной задачи на подзадачи с отсевом подзадач, заведомо не приводящих к оптимальному решению. По ходу решения производится обновление так называемого рекордного решения – лучшего решения, найденного на данный момент. Метод ветвей и границ основан на следующей процедуре:

**procedure** BnB(L, r, x, ms)

L – список подзадач  
 r – рекордное значение  
 x – рекордное решение  
 ms – максимальное (на выходе реальное) число шагов

```

1:   s := 0
2:   while L is not empty and s < ms do
3:     get Q from L
4:     if eval(Q, r, x) = true then
5:       (r1, x1) = getSolution(Q)
6:       update(r, x, r1, x1)
7:     else
8:       decomp Q into Q1, Q2
9:       L.append(Q1)
10:      L.append(Q2)
11:    endif
12:    s := s + 1
13:  endwhile
14:  ms := s.
```

Процедура BnB получает в качестве входных-выходных параметров список подзадач, рекордное решение, а также ограничение на максимальное число шагов. Затем цикл (строки 2–13) выполняется до тех пор, пока список содержит хотя бы одну подзадачу или не

превышено заданное максимальное число шагов. На каждой итерации из списка извлекается подзадача, к которой применяется процедура *eval*, проверяющая, подлежит ли подзадача дальнейшей декомпозиции. Если она возвращает значение *true*, то из задачи извлекается решение с помощью функции *getSolution* (строка 5) и производится изменение рекорда (строка 6) с помощью функции *update*, сравнивающей рекордное решение  $(r, x)$  со вновь полученным  $(r_1, x_1)$ . В противном случае подзадача разбивается на две новых подзадачи, которые добавляются в список (строки 8–10). В строке 13 выполненное число шагов записывается в параметр *ms*, через который передавалось максимальное их число.

Решение исходной задачи (1) выполняется с помощью вызова  $\text{PnB}(\{P\}, r = \infty, x = (0, 0, \dots, 0), ms)$ . Максимальное число шагов задается исходя из ограничений на ресурсы.

## 2. Описание многопоточного метода ветвей и границ

Наиболее естественным инструментом для реализации параллелизма на многоядерных системах являются потоки. Потоки представляют собой последовательности инструкций, которые могут выполняться параллельно на различных ядрах, тем самым обеспечивая ускорение вычислений. Как правило, рассматривается подход, в котором несколько потоков разделяют адресное пространство одного процесса параллельного приложения.

Взаимодействие потоков происходит через общие переменные, корректный одновременный доступ к которым возможен только при использовании критических секций или атомарных операций. Критические секции являются тяжеловесным механизмом синхронизации, частое использование которого может приводить к серьезному замедлению выполнения программы. Поэтому данным механизмом рекомендуется пользоваться как можно реже. Альтернативой критическим секциям являются атомарные операции, которые опираются на аппаратные механизмы поддержки целостности памяти и, следовательно, намного эффективнее.

В последнее время набирает популярность безблокировочное программирование (*lock-free programming*) [5], при котором для синхронизации используются только атомарные операции. Рассмотрим многопоточный вариант МВГ, в котором вообще не требуется взаимодействия потоков через общие переменные. В основе алгоритма лежит процедура *PnB*.

**procedure** PnB(L, r, x, ms, np)

L – список подзадач  
r – рекордное значение

$x$  – рекордное решение  
 $ms$  – максимальное число шагов  
 $np$  – максимальное число потоков

```

1:   if np = 1 or ms < seqs then
2:     BnB(P, r, x, ms)
3:   else
4:     s := 0
5:     while L is not empty and s < ms do
6:       split L into L1, L2
7:       ms1 := [ms/2], np1 := [np/2]
8:       ms2 := ms - ms1, np2 := np - np1
9:       t1 := async PBnB(L1, r1, x1, ms1, np1)
10:      t2 := async PBnB(L2, r2, x2, ms2, np2)
11:      wait t1
12:      wait t2
13:      s := s + ms1 + ms2
14:      L := L1 + L2
15:      update(r, x, r1, x1)
16:      update(r, x, r2, x2)
15:    endwhile
16:    ms := s
17:  endif

```

Проверка в строке 1 определяет, следует ли обработать задание в рамках одного потока (строка 2) или требуется распараллеливание (строки 4–16). При распараллеливании список подзадач  $L$  делится на два примерно равных по мощности списка  $L_1$  и  $L_2$ . Для обработки каждого из списков с помощью конструкции **async** запускается отдельный поток в строках 9, 10. Основной поток ожидает завершения потоков с помощью конструкции **wait** в строках 11, 12. После этого в строках 12–16 производится суммирование выполненного числа шагов, объединение полученных списков и изменение рекордного решения. Указанная последовательность действий повторяется до тех пор, пока в списке не останется новых подзадач или общее число шагов не превысит максимального.

В параллельном варианте решение исходной задачи (1) выполняется с помощью вызова процедуры  $BnB(\{P\}, r = \infty, x = (0, 0, \dots, 0), ms, np)$ . Максимальное число шагов  $ms$  и максимальное число создаваемых потоков  $np$  задаются исходя из ограничений на ресурсы.

### 3. Программная реализация и вычислительный эксперимент

Программная реализация процедуры PBnB была выполнена с использованием современных многопоточных расширений языка C++ [5]. Фрагмент кода программы, показывающий запуск параллельных потоков, приведен на следующем листинге.

```

1:  std::thread t1(solve, std::ref(s1), std::ref(bm), eps);
2:  std::thread t2(solve, std::ref(s2), std::ref(bm), eps);
3:  t1.join();
4:  t2.join();

```

В строках 1, 2 создаются параллельные потоки, завершение выполнения которых происходит в строках 3, 4.

При проведении вычислительных экспериментов фиксировались и сравнивались следующие параметры:

$T$  – общее время решения задачи (секунды);

$N$  – общее число итераций;

$T_i = T/N$  – среднее время, затраченное на одну итерацию (секунды);

$S$  – ускорение;

$S_i$  – ускорение среднего времени решения одной подзадачи.

Число итераций МВГ может существенно меняться при распараллеливании в связи с тем, что рекорд находится позже либо раньше и отсев подзадач ведется менее интенсивно. В таком случае обычное ускорение является малоинформативным. Поэтому помимо общего времени работы  $T$  также измеряется среднее время, затраченное на одну итерацию. Снижение этого времени в большей степени отражает эффект от распараллеливания, исключая влияние изменения общего числа итераций. Соответственно, вводится ускорение среднего времени решения одной подзадачи  $S_i$ , которое будем называть *приведенным ускорением*.

В таблице 2 даны значения указанных характеристик, измеренные на сервере IBM Power Systems S822LC 8335-GTB, установленном в вычислительном центре ДВО РАН ЦКП «Центр данных ДВО РАН» [6]. Этот сервер оснащен двумя 10-ядерными процессорами семейства POWER8. Каждое ядро поддерживает до восьми одновременно выполняющихся потоков. Использовались следующие параметры алгоритма:  $np = 64$ ,  $ms = 10^6$ . Для тестирования были выбраны тестовые примеры из [7]. Они находятся в свободном доступе [8].

Таблица 2

### Сравнение эффективности последовательного и параллельного вариантов МВГ

Функция	np = 1			np = 64			S	Si
	T	S	Ti	T	S	Ti		
Biggs Exp 4	4,75	99089	4,7E-05	2,51	449967	5,5E-06	1,89	8,58
Colville	48,66	1000000	4,8E-05	4,02	1000000	4,0E-06	12,07	12,07
Egg Holder	0,81	21289	3,8E-05	1,98	507105	3,9E-06	0,41	9,77
Hosaki	24,58	820957	2,9E-05	3,05	917559	3,3E-06	8,04	8,99

Результаты экспериментов показывают, что достигаемое общее ускорение изменяется в пределах от 0,41 до 12,07. Это связано с существенным изменением числа итераций. На задаче Egg Holder число

итераций увеличивается почти в 20 раз, поэтому вместо ожидаемого ускорения мы наблюдаем замедление расчетов. Приведенное ускорение более стабильно и колеблется в диапазоне от 8,58 до 12,07.

Анализ результатов экспериментов показывает, что предложенный метод позволяет получать существенное ускорение. Вместе с тем наблюдается значительное увеличение числа итераций, что нивелирует эффект от распараллеливания. Поэтому в дальнейших исследованиях планируется уделить внимание организации взаимодействия потоков с целью оперативного обновления рекордного решения.

### Литература

1. Rupp K. 40 Years of Microprocessor Trend Data: сайт. URL: <https://www.karlrupp.net/2015/06/40-years-of-microprocessor-trend-data/> (дата обращения: 19.03.2018).
2. Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А. Применение метода неравномерных покрытий для глобальной оптимизации частично целочисленных нелинейных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 8. С. 1376-1389.
3. Воеводин В.В. Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 608 с.
4. Посыпкин М.А. Архитектура и программная организация библиотеки для решения задач оптимизации методом ветвей и границ на многопроцессорных вычислительных комплексах // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2006. Т. 25. С. 18-25.
5. Уильямс Э. Параллельное программирование на C++ в действии. Практика разработки многопоточных программ. Litres, 2017. 672 с.
6. Центр коллективного пользования «Центр данных ДВО РАН»: сайт. – Хабаровск: ВЦ ДВО РАН. URL: <http://lits.ccfеbras.ru> (дата обращения: 19.03.2018).
7. Posypkin M., Usov A. Implementation and verification of global optimization benchmark problems // Open Engineering. Т. 7, №. 1. С. 470–478.
8. Global optimization test functions: сайт. URL: <https://github.com/alusov/mathexplib> (дата обращения: 19.03.2018).

### М.А. Posypkin

Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences

### LOCK-FREE MULTITHREADED VERSION OF THE BRANCH-AND-BOUND METHOD FOR MULTI-CORE SYSTEMS

**Keywords:** *multi-core systems, parallel algorithm, branch-and-bound method, load balancing.*

**Abstract.** *The article deals with the problem of developing a parallel multithreaded application for solving global optimization problems by branch-and-bound method. An approach is proposed for a non-blocking organization in which synchronization occurs only when the thread starts and*



*ends. The description of the algorithm and its software implementation, and results of the experiment are presented.*

**Т.А. Самойлова, А.С. Фёдоров**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.045

## **ВЫБОР ФОРМАТА ОБМЕНА ДАННЫМИ В ВЫСОКОНАГРУЖЕННЫХ СИСТЕМАХ**

*Ключевые слова: протокол передачи данных, клиент-серверное приложение, бинарный формат, высоконагруженные системы, С#, XML, JSON, горизонтально-симметричное распределение.*

*Выполнен сравнительный анализ текстовых и бинарных форматов для обмена данными в информационных системах. Разработано сетевое клиент-серверное приложение, позволяющее сравнить скорость обмена посредством разных форматов. Приводятся результаты симметричного горизонтального распределения таблиц данных, передаваемых в представлениях: байт-массив, XML и JSON. Эксперимент проводился на таблицах, содержащих от 300 до 4000 тысяч записей. Наиболее эффективным форматом по результатам работы исследования оказался бинарный.*

Для того чтобы в информационных системах добиться скорости эффективной обработки данных при высокой нагрузке сети, необходимо решить задачу форматирования передаваемых данных. Интернет занимает все более прочные позиции, поэтому данная проблема является актуальной как в наше время, так и в обозримом будущем. Ее решение может оказать значительное влияние на работу в сети клиент-серверных приложений и трудоемкость их дальнейшей модернизации. В настоящее время существует значительное количество различных форматов, рекомендуемых в литературе для использования в распределенных системах [1]. В сообществе разработчиков предпочтение отдают одному из двух стандартных текстовых форматов обмена данными: XML и JSON. Однако передача данных возможна и непосредственно в двоичном формате, используемом чаще для изображений, видеороликов и файлов звукозаписи. Целью исследования было проведение сравнительного анализа текстовых форматов с бинарным представлением для обмена данными в распределенных информационных системах и выбор тех из них, которые отвечают требованиям лучшего быстродействия.

**Анализ существующих форматов обмена данными.** Форматы представлений данных для передачи в сети разделяются на две группы: символьные (текстовые) и бинарные (двоичные).

XML (Extensible Markup Language) – простой и гибкий текстовый формат, который позволяет определять собственные теги и атрибуты. Язык является подмножеством SGML (ISO 8879) и называется расширяемым, поскольку не фиксирует разметку, используемую в документах: разработчик волен создать ее в соответствии с особенностями конкретной предметной области, будучи ограниченным лишь синтаксическими правилами языка.

JSON (Java Script Object Notation) – облегченный текстовый формат обмена данными между компьютерами. В соответствии с определением стандарта сценарного языка программирования ECMA (Европейской ассоциации производителей компьютеров) является производным от литералов Java Script. Формат JSON компактнее XML, его конструкции легче анализируются средствами Java Script, для которого JSON является внутренним используемым типом данных. Основная сфера применения JSON – программирование web-приложений, где он служит альтернативой XML.

Данные символьных типов представляются двоичными кодами. То, как они отображаются на экранах мониторов или распечатках принтеров, определяется так называемыми кодовыми таблицами (кодировка символов). Они позволяют отображать текстовую информацию символами различных алфавитов, а числовые данные – в естественном для человека виде. Как правило, объем информации, хранящейся в символьном наборе данных, существенно превышает размер той же информации в машинном формате.

Данные бинарных представлений хранят информацию в том виде, в котором она представляется в памяти компьютера во время выполнения программы [2]. По этой причине при работе с ними не возникает необходимости преобразований, что ускоряет работу информационной системы.

При передаче массива целых чисел в бинарном представлении каждое числовое значение занимает  $n$  байт в памяти. Однако для текстового формата необходимо иметь символ-разделитель, указывающий конец одного числа и начало другого. К недостаткам бинарного формата следует отнести непереносимость его данных. Под непереносимостью понимается использование на различных платформах разных размеров базовых типов данных. Порядок байт в слове также может быть различным: big-endian и little-endian [3].

**Сравнение форматов по скорости обмена данными.** В ходе исследования была разработана информационная система в виде клиент-серверного приложения, позволяющего сравнить быстродействие

обмена данными в различных форматах. Задача системы – поиск наиболее эффективного формата для работы в сети на уровне приложений [4]. В качестве передаваемых данных был выбран результат горизонтального симметричного распределения [1], так как именно ему необходим быстрый обмен информацией между приложениями. При этом задача системы заключалась в приведении данных горизонтального симметричного распределения к определенному формату и отправке их по протоколу передачи TCP на сервис. На рисунке 1 приведена архитектура приложения.

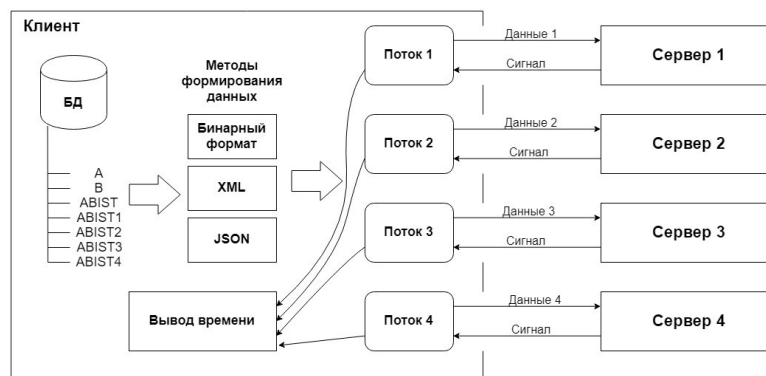


Рис. 1. Схема работы клиент-серверного приложения

Результаты горизонтального симметричного распределения с целью дальнейшего анализа и сравнения заносились в таблицы. Выполнялся выбор метода их форматирования по одному из трех предлагаемых форматов. Затем средствами клиентской части программы создавались потоки, каждый из которых получал свою таблицу распределения. Далее сформированные данные рассылались на сервера, где происходило занесение их в базу данных. По окончании процесса сигнал завершения отправлялся клиенту, а время работы фиксировалось. Для создания информационной системы применялись программные средства и библиотеки: C# – высокоуровневый, со строгой типизацией данных, позволяющий достаточно быстро реализовывать передачу информации по протоколу TCP, Newtonsoft.Json – для представления передаваемых данных в формате JSON, System.Xml – для представления передаваемых данных в формате XML.

Для анализа и сравнения использовались результаты горизонтального симметричного распределения, хранящиеся в таблицах. Количество данных при разных тестах: 300, 500, 1000, 2000, 4000 тысяч записей. Содержание полей таблицы: пять символов в диапазоне от А до D и 4-байтовое целое число со знаком. Для кодировки символов использовалась таблица ASCII. Для кодировки символов текстовых форматов XML и JSON – таблица ASCII, обеспечивающая одинаковые условия работы всех способов.

Таблица 1 демонстрирует результаты сравнения форматов данных в представлениях байт-массива, XML и JSON по скорости работы с различным количеством записей.

Таблица 1

**Сравнение различных форматов данных по скорости работы**

Количество записей в таблице (тыс.)	Байт-массив (с)	Xml (с)	Json (с)
300	4,072	4,291	4,242
500	6,338	8,857	8,259
1000	11,86	15,169	13,737
2000	20,696	28,34	24,469
4000	39,568	58,38	50,441

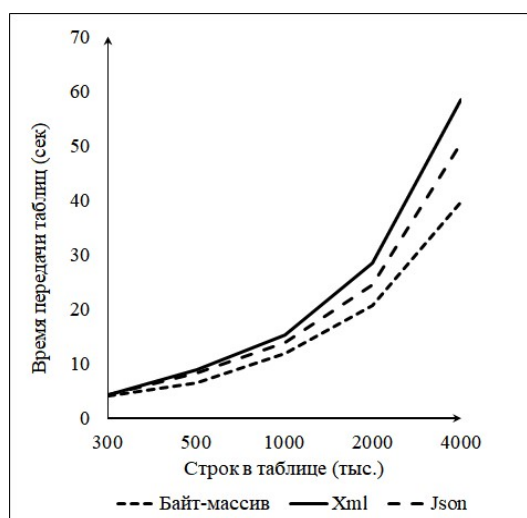


Рис. 2. График зависимости времени передачи от количества записей для различных форматов

График, приведенный на рисунке 2, показывает эффективность использования бинарного представления при передаче табличных данных в сети относительно символьных форматов XML и JSON и возможность уменьшения с его помощью расхода времени для высоконагруженных систем.

### Литература

1. Munerman V.I. The experience of massive data processing in the cloud using Windows Azure (as an example) // Highly available systems. 2014. V.10, № 2. P. 3–8.
2. Строительная информатика: учебное пособие / Акимов П.А. [и др.]. М.: Издательство АСВ, 2014. 432 с.
3. URL: [https://ru.bmstu.wiki/Порядок\\_байтов](https://ru.bmstu.wiki/Порядок_байтов).
4. URL: <http://ciscotips.ru/application-layer>.

**T.A. Samoylova, A.S. Fedorov**  
Smolensk State University

### SELECTING A DATA SHEET FORMAT IN HIGH-UNLOADED SYSTEMS

**Keywords:** *data transfer protocol, client-server application, binary format, highly loaded systems, C #, XML, JSON, horizontally symmetric distribution.*

**Abstract.** *A comparative analysis of text and binary formats for data exchange in information systems is performed. A network client-server application has been developed that allows you to compare the exchange rate through different formats. The results of symmetrical horizontal distribution of data tables transmitted in representations are presented: byte-array, XML and JSON. The experiment was carried out on tables containing from 300 to 4000 thousand records. The most effective format for the results of the study was a binary one.*

**А.А. Симакова**  
ООО Твинс

УДК 004.032.26

## **ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ**

Ключевые слова: *интеллектуальный анализ данных, искусственный интеллект, машинное обучение, нейронные сети, сети обратного распространения, обучение нейронной сети с учителем.*

*В статье рассматривается интеллектуальный анализ данных, который был применен в рекрутинговой аналитической информационной системе, нацеленной на принятие решения о приеме на работу соискателя. Освещены основные инструменты, примененные для реализации данной системы. Описаны основные библиотеки, использованные для построения системы, а также описаны проблемы, с которыми пришлось столкнуться при обучении искусственной нейронной сети.*

Интеллектуальный анализ данных в настоящий момент является современной концепцией анализа данных, которая предполагает, во-первых, работу с сырыми, неточными или неполными данными, а во-вторых наличие у алгоритма обработки элементов интеллектуальности.

В статье рассматривается метод организации аналитической системы для решения рекрутинговой задачи приема на работу новых сотрудников. Целью создания такой системы является получение оценки профпригодности кандидата на определенную должность. Система работает с малой выборкой и при этом данные о кандидатах неполны, поэтому необходимо применять методы интеллектуального анализа исходных данных.

В качестве анализа исходных данных и принятия на основе входных параметров определенного решения применяется нейронная

сеть. На рисунке 1 представлена схема реализации обработки данных, которая применяется при построении описываемой системы.

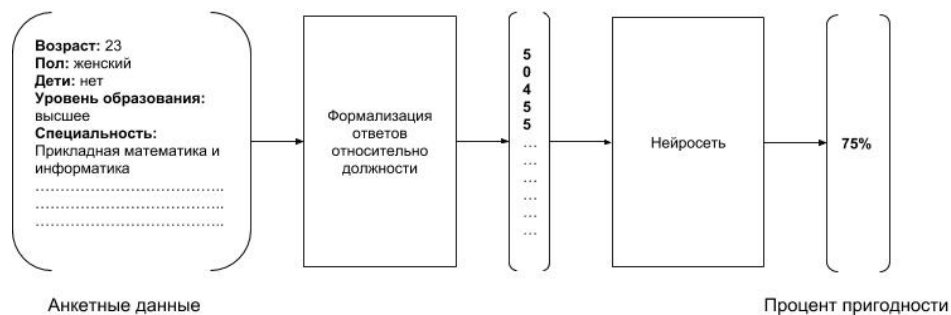


Рис 1. Обработка данных

В качестве входных параметров данной системы используется анкета кандидата. Она обрабатывается в соответствии с заданными компанией критериями. Например, для определенных профессий наличие инженерной специальности будет большим плюсом, чем наличие гуманитарной. Это означает, что кандидату с инженерной подготовкой присваивается более высокий балл, чем кандидату с гуманитарной базой знаний. После получения формализованных ответов они подаются на входной слой нейросети, которая заранее была обучена на тестовой выборке. В результате, после обработки данных нейросетью получаем на выходе степень соответствия кандидата выбранной им должности.

В качестве языка программирования выбран РНР, как удовлетворяющий требованиям заказчика. Основной недостаток данного языка – слабая приспособленность к обработке больших объемов данных. Однако в рамках системы не предполагалась работа с большим объемом данных, поэтому язык РНР уместен для разработки этой системы. Для работы с нейронными сетями выбрана современная библиотека РНР-ML, которая написана на языке РНР версии 7.0. Она реализует алгоритмы, нейронные сети и инструменты для предварительной обработки данных, перекрестной проверки и извлечения признаков. В данной библиотеке для построения нейронной сети используется многослойный персептрон. Основной его особенностью является наличие более чем одного обучаемого слоя (как правило, их два или три). Необходимость в большом количестве обучаемых слоев отпадает, так как теоретически единственного скрытого слоя достаточно, чтобы перекодировать входное представление и получить линейную разделимость для выходного представления.

Для построения многослойного персептрона необходимо задать ряд параметров.

1. Входной вектор, который содержит формализованное условие задачи – всю информацию, необходимую для получения ответа. В нашем случае на вход подается двадцать параметров, каждый из которых опирается на полученные формализованные данные кандидата.

2. Выходной вектор, который должен быть выбран таким образом, чтобы его компоненты содержали полный ответ для поставленной задачи. Для нашей системы на выходе имеем один параметр, который отвечает за вывод степень пригодности кандидата.

3. Функция активации нейронов. Выбор данного параметра должен учитывать специфику задачи. В нашем случае была выбрана сигмоидальная функция для активации нейронов.

4. Количество слоев и нейронов в слое. Минимальное количество – три слоя: входной слой, выходной и скрытый. Количество нейронов во входном слое представляет собой входной вектор, описанный в пункте 1, он зависит от необходимого количества параметров для дальнейшей обработки. Количество нейронов на выходе представляет собой выходной вектор, описанный в пункте 2. Количество нейронов скрытого слоя должно быть меньше, чем размерность входных данных, поэтому мы используем два скрытых слоя: первый состоит из 10 нейронов, второй из пяти. Количество нейронов установлено эмпирическим путем, однако существуют способы настройки числа нейронов в процессе обучения, которые обеспечивают построение нейронной сети для решения задачи и дают возможность избежать избыточности.

5. Диапазон изменений входов и выходов, весов и пороговых уровней на основе выбранной функции активации. В нашем случае данные параметры не указываются, они обусловлены заложенными разработчиками библиотеки параметрами.

6. Начальные значения весов и пороговых уровней. Начальные значения не должны быть большими, чтобы нейроны не оказались в насыщении, иначе обучение будет проходить слишком медленно. Но при этом начальные значения не должны быть слишком малыми, чтобы выходы большей части нейронов не были равны нулю, иначе обучение замедлится. Начальные значения в нашем случае тоже не задаются по причине их автоформирования после обучения сети на тестовой выборке.

После установки всех перечисленных выше параметров необходимо провести обучение, то есть подобрать параметры так, чтобы задача решалась наилучшим образом. После окончания обучения сеть может решать задачи того типа, на который была нацелена вся настройка параметров. После обучения необходимо протестировать построенную многослойную нейронную сеть с помощью тестовой выборки.

В качестве парадигмы обучения используется обучение с учителем, когда известны правильные ответы к каждому входному примеру, а веса

подстраиваются, чтобы минимизировать ошибку, с алгоритмом обратного распространения ошибок. Для построения многослойного персептрона применяется класс `MultilayerPerceptron`, который представляет собой модель искусственной нейронной сети с прямым доступом. Для обучения спроектированной нейронной сети используется объект `Backpropagation` библиотеки `RNP-ML`, который позволяет работать с алгоритмом обратного распространения ошибок.

Обучив нейронную сеть, важно проверить её обобщающую способность, устойчивость по отношению к шумам, к погрешностям измерений. В настоящий момент существует несколько способов эмпирической оценки обобщающей способности: эмпирический риск, скользящий контроль и методы кросс-проверки.

В качестве метода проверки точности обучения был выбран метод кросс-валидации. Модель строится по обучающей выборке, а точность прогноза на основании модели оценивается по тестовой выборке. Когда имеется достаточно большая выборка, часть наблюдений (например, половину или две трети) можно использовать для обучающей выборки, а оставшиеся наблюдения – для тестовой. Если на тестовой выборке модель дает результаты того же качества, что и на обучающей выборке, то говорят, что модель хорошо прошла кросс-проверку.

Для проверки результатов обучения используется класс `StratifiedRandomSplit`, который разбивает исходную выборку на две группы: группу обучения и группу тестирования. Количество элементов в отделенной части настраивается с помощью передачи коэффициента. Как правило, указывают коэффициент, равный 0.3.

При работе с нейронной сетью важно подобрать все параметры сети так, чтобы обучение сети прошло наиболее успешно; очень велики риски переобучения сети, когда сеть работает правильно на обучающей выборке, а при работе с тестовыми данными выдает неверный результат. Это происходит потому, что в процессе обучения сети значения весов могут стать очень большими в результате корреляции. Также существует риск попадания в локальный минимум. Известно, что обратное распространение использует разновидность градиентного спуска (спуск вниз по поверхности ошибки), непрерывно подстраивая веса в направлении минимума, поэтому сеть может попасть в локальный минимум, когда рядом есть гораздо более глубокий минимум.

Итак, применение искусственной нейронной сети для построения системы с интеллектуальным анализом данных дало положительный результат, после тестирования такой системы удалось получить адекватную оценку для тестового кандидата.

Автор благодарен Виктору Иосифовичу Мунерману за помощь в процессе научного исследования и подготовки статьи.



## Литература

1. Федосин С.А., Ладяев Д.А., Марьина О.А. Анализ и сравнение методов обучения нейронных сетей // Вестник мордовского университета. 2010. № 2. С. 79-84.
2. Васенков Д.В. Методы обучения искусственных нейронных сетей // СПбГУ. 2007. № 1 С. 20-29.
3. Обучающий курс: Введение в машинное обучение. URL: <https://www.coursera.org/learn/vvedenie-mashinnoe-obuchenie>.
4. Круглов В.В., Борисов В.В. Искусственные нейронные сети. М.: Горячая линия-Телеком, 2002.
5. Прошкина Е.Н. Нейрокомпьютерные системы. Пенза, 2011.

**A.A. Simakova**

Twins LLC

## INTELLECTUAL ANALYSIS OF DATA IN THE ANALYTICAL INFORMATION SYSTEM

**Keywords:** *intellectual data analysis, artificial intelligence, machine learning, neural networks, backward propagation of errors, training of a neural network with a teacher.*

**Abstract.** *The article deals with the intellectual analysis of data, which was applied in a recruiting analytical information system aimed at making a decision on hiring a job applicant. The main tools that were used to implement this system are covered. The main libraries that were used to build the system are described, and the problems encountered in training an artificial neural network.*

**И.Н. Синицын, И.В. Сергеев, Э.Р. Корепанов, Т.Д. Конашенкова**  
ФИЦ ИУ РАН

УДК 621

## ЭКСПРЕСС МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫСОКОЙ ДОСТУПНОСТИ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

**Ключевые слова:** *аналитическое моделирование, вейвлет каноническое разложение (КРВЛ), векторная случайная функция (ВСФ), каноническое разложение векторной случайной функции (КРВСФ), матрица ковариационных функций, статистическое моделирование.*

*Статья продолжает цикл публикаций по инструментальному программному обеспечению в среде MATLAB по анализу и синтезу стохастических систем высокой доступности (СВД). Разработано методическое и инструментальное программное обеспечение для информационных технологий корреляционного анализа и синтеза*

*нестационарных стохастических СВД на основе КРВЛ путем ортогонального разложения элементов матрицы ковариационных функций по двумерным вейвлетам Добеши с компактным носителем. На базе последовательных рекуррентных алгоритмов построения КРВСФ и разработанного вейвлет-методического обеспечения в среде MATLAB создано экспериментальное инструментальное программное обеспечение «СтИТ-КР.ВЛ.2». На основе разработанного методического и инструментального обеспечения проходят испытания специализированные программные средства для оценки ударонадежности вычислительного оборудования. Разработаны тестовые примеры для типовых двумерных нестационарных случайных функций. Результаты допускают обобщение и развитие на случай, когда ковариационные функции описываются линейными и нелинейными операторными уравнениями. Для СВД высокой размерности особый интерес будут иметь параллельные алгоритмы построения КРВСФ*

**1. Постановка задачи.** Проблема повышения оперативности решения задач моделирования векторных случайных функций (ВСФ) в системах высокой доступности (СВД) требует разработки экспресс методов. В [1] показано, что одним из эффективных методических приемов моделирования нестационарных скалярных случайных функций (СФ) является использование вейвлет канонических разложений (КРВЛ). В качестве инструментальной среды использовалась среда MATLAB. При этом для синтеза КРВЛ выбраны последовательные алгоритмы декоррелизации.

Рассмотрим обобщение результатов [2] для нестационарных ВСФ, основанное на ортогональном разложении элементов матрицы ковариационных функций по двумерным вейвлетам Добеши [3].

**2. Общие канонические разложения векторных случайных функций.** Применим к составляющей ВСФ  $X_h(t)$ , рассматриваемой как СФ аргумента  $t$  и номера  $h$ , теорию канонических разложений (КР), изложенную в [2; 4]. Для этого достаточно во всех формулах заменить аргумент  $t$  совокупностью аргумента  $t$  и номера  $h$  составляющей векторной СФ  $X(t)$ . Тогда формула

$$X = m^x + \sum_{v=1}^n V_v \varphi_v, \quad V_v = \varphi_v^* X^0 = (X^0, \varphi_v) \quad (v = \overline{1, n}) \quad (1)$$

даст следующее КР для ВСФ  $X(t) = [X_1(t) \dots X_n(t)]^T$ :

$$X(t) = m^x(t) + \sum_v V_v x_v(t), \quad X_h(t) = m_h^x + \sum_v V_v x_{vh}(t) \quad (h = \overline{1, n}), \quad (2)$$

где  $m^x(t) = [m_1^x(t) \dots m_n^x(t)]^T$ . При этом формула (1) [1], определяющая координатные функции, примет вид

$$x_v(t) = [x_{v_1}(t) \dots x_{v_n}(t)]^T, \quad x_{vh}(t) = \frac{1}{D_v} M[X_h^0(t) \bar{V}_v] \quad (h = \overline{1, n}), \quad (3)$$

где  $D_v$  – дисперсии случайных величин (СВ)  $V_v$ . Таким образом, КРВСФ представляет собой совместное КР всех ее составляющих с одними и теми же случайными коэффициентами  $V_v$ . Координатные функции получаются естественно различными для различных составляющих. При этом КР матрицы ковариационных функций ВСФ  $X(t)$  имеет вид:

$$K^x(t, t') = [K_{hl}^x(t, t')], \quad K_{hl}^x(t, t') = \sum_v D_v x_{vh}(t) \overline{x_{vl}(t')} \quad (h, l = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Известны следующие две теоремы Пугачева [2; 4].

**Теорема 1** (прямая теорема Пугачева). *Если ВСФ  $X(t)$  обладает конечными моментами второго порядка, то из КРСФ  $X(t)$  вытекает КР матрицы ее ковариационных функций согласно (2)–(4).*

**Теорема 2** (обратная теорема Пугачева). *Если ВСФ  $X(t)$  обладает конечными моментами первого и второго порядка, то из КР матрицы ее ковариационных функций вытекает КРВСФ.*

**3. Основные результаты.** Пусть ковариационная матрица  $K^x(t_1, t_2)$  действительной ВСФ  $X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_l(t)]^T$  задана на интервале  $[0, T]$  в дискретных точках  $0, 1, 2, \dots, 2^J - 1 = T$ , где  $J$  – натуральное число,  $J > 2$ . Согласно теореме 2, из КР элементов ковариационной матрицы  $K_{h_1, h_2}^x(t_1, t_2)$  ( $h_1, h_2 = \overline{1, l}$ ) по координатным функциям вытекает КР элементов векторной СФ  $X(t)$ . То есть если

$$K_{h_1, h_2}^x(t_1, t_2) = \sum_v D_v x_{vh_1}(t_1) x_{vh_2}(t_2) \quad (h_1, h_2 = \overline{1, l}), \quad (5)$$

где  $D_v = D[V_v]$ ,  $M[V_v] = 0$ , то

$$X_h(t) = m_h^x(t) + \mathbf{e}_v V_v x_{vh}(t) \quad (h = \overline{1, l}). \quad (6)$$

Здесь  $m^x(t) = [m_1^x(t), \dots, m_l^x(t)]^T$ ,  $V_v$  – независимые СВ с нулевым математическим ожиданием.

Следуя [1], определим систему функций  $\{f_\nu(t)\}$  ( $\nu = \overline{1, 2^J}$ ) на основе системы вейвлетов Добеши с компактным носителем следующим образом:

$$f_1(t) = \varphi_{J-N, 0}(t); \quad f_2(t) = \varphi_{J-N, 1}(t); \quad \dots; \quad f_{2^{J-N}}(t) = \varphi_{J-N, 2^{J-N}-1}(t); \quad f_{R_g+1}(t) = \psi_{J-g, 0}(t); \dots$$

$$\dots; \quad f_{R_g+2^{0-n}}(t) = \psi_{J-g, 2^{0-n}-1}(t) \left( R_g = 2^{J-g} + \sum_{j=J-N}^{J(g+1)} 2^j \psi_{J-g, 2^{0-n}-1}(t), \quad g = N; N-1; \dots; 1 \right). \quad (7)$$

Здесь  $\varphi(t)$  – масштабирующая функция;  $\psi(t)$  – материнский вейвлет;  $\varphi_{jk}(t) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j t - k)$ ,  $\psi_{jk}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k)$ ;  $N$  – уровень вейвлет-разложения,  $N$  натуральное число,  $N \leq J$ .

Каждый элемент ковариационной матрицы  $K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2)$  ( $h_1, h_2 = \overline{1, l}$ ) представляет собой действительную скалярную функцию двух переменных  $t_1, t_2$ , и ее ортогональное разложение по вейвлетам строится в пространстве интегрируемых квадратично функций  $L^2(R^2)$ . Ортонормированный базис вейвлетов в  $L^2(R^2)$  представляет собой тензорное произведение функций, порожденных двумя одномерными базисами вейвлетов:

$$\begin{aligned}\varphi_{jkn}^A(t_1, t_2) &= \varphi_{jk}(t_1)\varphi_{jn}(t_2), \\ \psi_{jkn}^C(t_1, t_2) &= \varphi_{jk}(t_1)\psi_{jn}(t_2), \\ \psi_{jkn}^B(t_1, t_2) &= \psi_{jk}(t_1)\varphi_{jn}(t_2), \\ \psi_{jkn}^D(t_1, t_2) &= \psi_{jk}(t_1)\psi_{jn}(t_2).\end{aligned}\quad (8)$$

Поэтому, следуя [1], разложение  $K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2)$  по двумерным вейвлетам представим в виде

$$\begin{aligned}K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2) &= \sum_{j=J-N}^{J-1} \sum_{k=0}^{T_j} \sum_{n=0}^{T_j} d_j^{h_1 h_2}(k, n) \cdot \psi_{jkn}^D(t_1, t_2) + \\ &+ \sum_{j=J-N}^{J-1} \sum_{k=0}^{T_j} \sum_{n=0}^{T_j} c_j^{h_1 h_2}(k, n) \cdot \psi_{jkn}^C(t_1, t_2) + \\ &+ \sum_{j=J-N}^{J-1} \sum_{k=0}^{T_j} \sum_{n=0}^{T_j} b_j^{h_1 h_2}(k, n) \cdot \psi_{jkn}^B(t_1, t_2) + \\ &+ \sum_{k=0}^{T_{J-N}} \sum_{n=0}^{T_{J-N}} a^{h_1 h_2}(k, n) \cdot \varphi_{J-N, k, n}^A(t_1, t_2).\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $T_j = 2^j - 1$ ,  $T_{J-N} = 2^{J-N} - 1$ ,

$$\begin{aligned}a^{h_1 h_2}(k, n) &= \int_0^T \int_0^T K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2) \varphi_{J-N, k, n}^A(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad d_j^{h_1 h_2}(k, n) = \int_0^T \int_0^T K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2) \psi_{jkn}^D(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ c_j^{h_1 h_2}(k, n) &= \int_0^T \int_0^T K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2) \psi_{jkn}^C(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad b_j^{h_1 h_2}(k, n) = \int_0^T \int_0^T K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2) \psi_{jkn}^B(t_1, t_2) dt_1 dt_2.\end{aligned}$$

Пользуясь последовательным алгоритмом декорреляции [4], вычисляем для СВ

$$V_\nu = \sum_{g=1}^l \int_0^T a_{\nu g}(t) X_g^0(t) dt \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

где

$$a_{\nu h}(t) = \sum_{v=1}^{\mu-1} c_{\nu v} a_{vh}(t) + f_\nu(t), \quad (11)$$

$$c_{\mu\nu} = -\sum_{h=1}^l \int_0^T f_\mu(t) x_{vh}(t) dt \quad (\nu = \overline{1, \mu-1}). \quad (12)$$

Далее введем вспомогательные СВ  $A_r$ :

$$A_r = \mathbf{e} \mathbf{T} \int_{h=1}^l \int_0^T f_r(t) X_h(t) dt \quad (r = \overline{1, 2^J}). \quad (13)$$

Ковариационные моменты СВ  $A_r$  вычисляются по формулам:

$$k_{\nu\mu} = M[A_\nu^0 A_\mu^0] = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l \int_0^T \int_0^T f_\nu(t) f_\mu(s) K_{h_1 h_2}^X(t, s) dt ds. \quad (14)$$

Если:

$\nu, \mu = \overline{1, 2^{J-N}}$ , то

$$k_{\nu\mu} = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l \int_0^T \int_0^T \varphi_{J-N, \nu-1, \mu-1}^A(t, s) K_{h_1 h_2}^X(t, s) dt ds = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l a^{h_1 h_2} (\nu-1, \mu-1); \quad (15)$$

$\nu = \overline{1, 2^{J-N}}$ ,  $\mu = \overline{2^{J-N} + 1, 2^{J-N+1}}$ , то

$$k_{\nu\mu} = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l \int_0^T \int_0^T \psi_{J-N, \nu-1, \mu-2^{J-N}-1}^C(t, s) K_{h_1 h_2}^X(t, s) dt ds = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l c_{J-N}^{h_1 h_2} (\nu-1, \mu-2^{J-N}-1); \quad (16)$$

$\nu = \overline{2^{J-N} + 1, 2^{J-N+1}}$ ,  $\mu = \overline{1, 2^{J-N}}$ , то

$$k_{\nu\mu} = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l \int_0^T \int_0^T \psi_{J-N, \nu-2^{J-N}-1, \mu-1}^B(t, s) K_{h_1 h_2}^X(t, s) dt ds = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l b_{J-N}^{h_1 h_2} (\nu-2^{J-N}-1, \mu-1); \quad (17)$$

$\nu = \overline{2^{J-N} + 1, 2^{J-N+1}}$ ,  $\mu = \overline{2^{J-N}, 2^{J-N+1}}$ , то

$$k_{\nu\mu} = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l \int_0^T \int_0^T \psi_{J-N, \nu-2^{J-N}-1, \mu-1}^D(t, s) K_{h_1 h_2}^X(t, s) dt ds = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l d_{J-N}^{h_1 h_2} (\nu-2^{J-N}-1, \mu-2^{J-N}-1); \quad (18)$$

$\nu, \mu = \overline{R_l + 1, R_l + 2^{J-l}}$  ( $l = N-1, N-2, \dots, 1$ ;  $R_l = 2^{J-N} + \sum_{j=J-N}^{J-(l+1)} 2^j$ ), то

$$k_{\nu\mu} = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l \int_0^T \int_0^T \psi_{J-l, \nu-R_l-1, \mu-R_l-1}^D(t, s) K_{h_1 h_2}^X(t, s) dt ds = \sum_{h_1=1}^l \sum_{h_2=1}^l d_{J-l}^{h_1 h_2} (\nu-R_l-1, \mu-R_l-1). \quad (19)$$

Остальные  $k_{\nu\mu} = 0$ .

Тогда для  $c_{\nu\mu}$  и  $D_\nu$  получим следующие рекуррентные соотношения:

$$A_1^0 = V_1, \quad A_r^0 = -\sum_{v=1}^{r-1} c_{rv} V_v + V_r \quad (r = 2, 3, \dots, 2^J), \quad (20)$$

где  $c_{\nu 1} = -\frac{k_{1\nu}}{D_1}$  ( $\nu = \overline{2, 2^J}$ ),  $c_{\nu\mu} = -\frac{1}{D_\mu} \left( k_{\mu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} D_\lambda c_{\mu\lambda} c_{\nu\lambda} \right)$  ( $\mu = \overline{2, \nu-1}$ ,  $\nu = 3, 4, \dots, 2^J$ ),

$$D_1 = k_{11}, \quad D_\nu = k_{\nu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} D_\lambda |c_{\nu\lambda}|^2 \quad (\nu = 2, 3, \dots, 2^J).$$

Наконец, для упрощения определения вида координатных функций  $x_\nu = [x_{\nu 1}, \dots, x_{\nu l}]^T$  ( $\nu = \overline{1, 2^J}$ ) введем вспомогательные инструментальные функции:

$$z_{\nu h}(t) = \sum_{g=1}^l \int_0^T f_\nu(s) K_{hg}^X(t, s) ds \quad (h = \overline{1, l}). \quad (21)$$

Если  $\nu = \overline{1, 2^{J-N}}$ , то

$$z_{vh}(t) = \sum_{g=1}^l \int_0^T \varphi_{J-N, N-1}^{hg}(s) K_{hg}^X(t, s) ds =$$

$$= \sum_{g=1}^l \left[ \sum_{k=0}^{2^{J-N}-1} b_{J-N}^{hg}(k, v-1) \psi_{J-N, k}(t) \sum_{k=0}^{2^{J-N}-1} a^{hg}(k, v-1) \varphi_{J-N, k}(t) \right] \quad (h = \overline{1, l}); \quad (22)$$

если  $v = \overline{2^{J-N} + 1, 2^{J-N+1}}$ , то

$$z_{vh}(t) = \sum_{g=1}^l \int_0^T \psi_{J-N, v-2^{J-N}-1}^{hg}(s) K_{hg}^X(t, s) ds =$$

$$= \sum_{g=1}^l \left[ \sum_{k=0}^{2^{J-N}-1} d_{J-N}^{hg}(k, v-2^{J-N}-1) \psi_{J-N, k}(t) + \sum_{k=0}^{2^{J-N}-1} c_{J-N}^{hg}(k, v-2^{J-N}-1) \varphi_{J-N, k}(t) \right]$$

$$(h = \overline{1, l}); \quad (23)$$

если  $v = \overline{R_g + 1, R_g + 2^{J-g}}$ , где  $R_g = 2^{J-N} + \sum_{j=J-N}^{J-(g+1)} 2^j$  ( $g = N-1, N-2, \dots, 1$ ), то

$$z_{vh}(t) = \sum_{p=1}^l \int_0^T \psi_{J-g, v-R_g-1}(s) K_{hp}^X(t, s) ds =$$

$$= \sum_{p=1}^l \left[ \sum_{k=0}^{2^{J-g}-1} d_{J-g}^{hp}(k, v-R_g-1) \psi_{J-g, k}(t) + \sum_{k=0}^{2^{J-g}-1} c_{J-g}^{hp}(k, v-R_g-1) \varphi_{J-g, k}(t) \right] \quad (h = \overline{1, l}). \quad (24)$$

Тогда КР элементов ковариационной матрицы  $K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2)$  в области ее изменения  $[0; T]$  имеют вид:

$$K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2) = \sum_{v=1}^{2^J} D_v x_{vh_1}(t_1) x_{vh_2}(t_2), \quad (25)$$

где

$$x_{1h}(t) = \frac{1}{D_1} z_{1h}(t) \quad (h = \overline{1, l}), \quad (26)$$

$$x_{vh}(t) = \frac{1}{D_v} \left[ \sum_{\lambda=1}^{v-1} d_{v\lambda} z_{\lambda h}(t) + z_{vh}(t) \right] \quad (v = \overline{2, 2^J}; h = \overline{1, l}). \quad (27)$$

Здесь

$$d_{\mu\lambda} = c_{\mu\lambda} + \sum_{v=\lambda+1}^{\mu-1} c_{\mu v} d_{v\lambda} \quad (\lambda = \overline{1, \mu-2}), \quad d_{\mu, \mu-1} = c_{\mu, \mu-1}. \quad (28)$$

Из (25)-(28) находим следующее искомое КР элементов ВСФ  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_l(t)]^T$  на  $[0; T]$ :

$$X_h(t) = m_x^l(t) + \sum_{v=1}^{2^J} V_v x_{vh}(t) \quad (h = \overline{1, l}). \quad (29)$$

Таким образом, приходим к следующему алгоритму построения КРВЛ нестационарной ВСФ и ее ковариационной функции на основе действительных вейвлетов Добеши с компактным носителем.

**Теорема 3.** В условиях теорем 1 и 2 алгоритм построения КРВЛ действительной ВСФ  $X(t) = [X_1(t); \dots; X_l(t)]^T$ , определенной на  $[0; T]$ , основанный на КР элементов ее ковариационной матрицы  $K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2)$  ( $h_1, h_2 = \overline{1, l}$ ) по координатным функциям, построенным на основе ортонормированной системы вейвлетов Добеши с компактным носителем, состоит в следующем:

1) определение системы функций  $\{f_r(t)\}$  ( $r=1, 2, \dots$ ) на основе ортонормированной системы вейвлетов Добеши;

2) ортогональное разложение элементов  $K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2)$  ( $h_1, h_2 = \overline{1, l}$ ) по двумерному базису вейвлетов, построенному как тензорное произведение функций, порожденных одномерным базисом вейвлетов  $\{f_r(t)\}$ ;

3) вычисление коэффициентов  $k_{\nu\mu}$  по формулам (14)–(19);

4) определение вида функций  $z_{\nu\mu}(t)$  по формулам (21)–(24);

5) вычисление дисперсий  $D_\nu$  по формулам (20);

6) определение вида координатные функции  $x_{\nu h}(t)$  по формулами (25)–(29).

В основу инструментального программного обеспечения аналитического и статистического моделирования процессов в СВД на основе КРВЛ положен алгоритм (теорема 3) и соответствующие средства MATLAB.

### Заключение

Разработано методическое и инструментальное программное обеспечение для информационных технологий корреляционного анализа и синтеза нестационарных стохастических СВД на основе КРВЛ путем ортогонального разложения элементов матрицы ковариационных функций по двумерным вейвлетам Добеши с компактным носителем.

На базе последовательных рекуррентных алгоритмов построения КРВСФ и разработанного вейвлет методического обеспечения в среде MATLAB создано экспериментальное инструментальное программное обеспечение «СтИТ-КР.ВЛ.2».

На основе разработанного методического и инструментального обеспечения проходят испытания специализированные программные средства для оценки ударонадежности вычислительного оборудования. Разработаны тестовые примеры для типовых двумерных нестационарных случайных функций.

Результаты допускают обобщение и развитие на случай, когда ковариационные функции описываются линейными и нелинейными операторными уравнениями.

Для СВД высокой размерности особый интерес будут иметь параллельные алгоритмы построения КРВСФ.

## Литература

1. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности / И.Н. Сеницын [и др.] // Системы высокой доступности, 2017. Т. 13, № 3. С. 55–59.
2. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза систем высокой доступности (II) / И.Н. Сеницын [и др.] // Системы высокой доступности, 2010. Т. 6, № 2. С. 4–45.
3. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2005.
4. Сеницын И.Н. Канонические представления случайных функций и их применения в задачах компьютерной поддержки научных исследований. М.: ГОРСУС ПРЕСС, 2009.
5. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза систем высокой доступности (I) / И.Н. Сеницын [и др.] // Системы высокой доступности, 2009. Т. 5, № 3. С. 4–52.
6. Стохастические канонические вейвлет разложения в задачах моделирования виброударонадежности компьютерного оборудования / И.Н. Сеницын [и др.] // XVIII международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (СКМП – 2017). Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. С. 123–124.

**I.N. Sinitsyn, I.V. Sergeev, E.R. Korepanov, T.D. Konashenkova**  
FRC CSC of RAS (Moscow)

### **EXPRESS MODELING OF STOCHASTIC HIGHLY AVAILABLE SYSTEMS BASED ON WAVELET CANONICAL EXPANSIONS**

**Keywords:** *analytical modeling, canonical expansion of vector random function (CEVRF), matrix of covariance functions, random function (RF), statistical modeling, wavelet canonical expansion (WLCE).*

**Abstract.** *The article is dedicated to software tools based on wavelet canonical expansions (WLCE) for express statistical and analytical modeling of vector random functions (VRF). In Section 1 the problem statement is given. Section 2 is devoted to Pugachev's theorems for canonical expansions of VRF. In Section 3 basic theorem for recursive algorithm for synthesis of VRF for WLCE with known matrix of covariance functions. Algorithm is based on the orthogonal expansion of elements of matrix of covariance functions by two dimensional Dobeshi wavelets and wavelet MATLAB tools. Conclusion and some generalizations are given.*



## ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ<sup>3</sup>

Ключевые слова: гидромеханические процессы, нейро-нечеткие сети, методы анализа изображений.

*В работе предлагается метод интеллектуального анализа гидромеханических процессов (на примере процессов перемешивания) на основе определения сопротивления перемешивающего устройства путем определения формы и размеров искривленной свободной поверхности жидкого вещества. В основе метода лежит нейросетевой и нечеткий анализ изменения визуальных траекторий оптических маркеров, расположенных на дне гидромеханической системы, заполненной прозрачной жидкостью, в результате преломления световых лучей на ее поверхности. Обоснована целесообразность использования для этих задач сверточных нейронных сетей и методов нечеткой параметрической оптимизации и управления.*

Гидромеханические процессы (ГМП) перемешивания играют важную роль во множестве химических и биохимических технологических процессов. Для совершенствования перемешивающих устройств (ПУ) требуется создание интеллектуального метода определения основных параметров процессов перемешивания, учитывающих: сложность и дороговизну реализации традиционных подходов к их определению; быстро меняющиеся условия анализа гидромеханических процессов; необходимость учета неопределенности этих процессов.

В работе [1] предложен типовой подход к определению основных параметров процессов перемешивания, удачно сочетающий достаточно глубокое научное описание явлений, происходящих при перемешивании, с относительной простотой и доступностью его применения в условиях производства. Основой расчетов в рамках данного подхода является определение момента сил, действующих на жидкость со стороны перемешивающего устройства:

$$T_{вр} = \zeta_m \frac{\rho \omega_0^2 r_0^5}{2} (0,1\psi_1^2 + 0,222\psi_1\psi_2 + 0,125\psi_2^2),$$

где  $\zeta_m$  – коэффициент сопротивления перемешивающего устройства;  $\rho$  – плотность жидкости;  $r_0$  – радиус перемешивающего устройства;  $\omega_0$  –

---

<sup>3</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-07-00928\_a.

циклическая частота его вращения;  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – параметры, определяемые особенностями перемешивающей системы и режимом работы.

Приведенное выше выражение, дополненное громоздким уравнением для момента сил трения со стороны корпуса, образует систему, решение которой позволяет определить параметры  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , которые могут быть использованы для вычисления всех основных показателей процесса перемешивания в данной системе.

Коэффициент  $\zeta_m$  определяется особенностями геометрии ПУ, и в рамках данного подхода были определены экспериментально и внесены в качестве исходных данных в утвержденные к использованию нормативные методы расчета.

Однако в настоящее время появляются принципиально новые типы ПУ, обладающие существенно большей эффективностью, чем традиционные. Несмотря на то, что сама физическая картина ГМП при использовании таких устройств описывается в целом правильно, инженерные расчеты невозможны из-за неизвестных значений  $\zeta_m$ .

Традиционный метод требует прецизионного измерительного оборудования, так как момент, возникающий в системах небольших размеров, пригодных для размещения в лабораторных условиях, крайне мал.

Поэтому разработка альтернативного метода, нивелирующего указанные выше ограничения, представляется весьма актуальной научной и прагматической задачей.

Одним из специфических явлений, возникающих при работе ПУ в сосуде без тормозных элементов, является формирование центральной воронки. Ее профиль в рамках рассматриваемого подхода описывается системой уравнений вида:

$$y(r) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_0^2 r_0^2}{g} \left( \frac{1}{8} \psi_1^2 R^8 + \frac{2}{7} \psi_1 \psi_2 R^7 + \frac{1}{6} \psi_2^2 R^6 + \frac{3}{5} \psi_1 R^5 + \frac{1}{2} \psi_2 R^4 + \frac{1}{2} R^2 \right), \\ \frac{\omega_0^2 r_0^2}{g} \left( \left( \frac{1}{8} \psi_1^2 + \frac{2}{7} \psi_1 \psi_2 + \frac{1}{6} \psi_2^2 + \frac{3}{5} \psi_1 + \frac{1}{2} \psi_2 + \frac{1}{2} \right) + \left( 1 - \frac{1}{R} \right) (1 + \psi_1 + \psi_2)^2 \right) \end{array} \right\},$$

где  $R = r/r_0$ .

Таким образом, если охарактеризовать профиль воронки  $y(r)$  при заданном значении  $\omega_0$ , то значение  $\zeta_m$  может быть определено в зависимости от значений  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

В работе [2] для определения профиля воронки предлагается использовать метод, основанный на непосредственном определении значений  $r_i(y_i)$  в нескольких точках свободной поверхности с помощью механических зондов. Однако данный метод, хотя и дает правильные результаты, является крайне трудоемким и трудно автоматизируемым.

Альтернативным вариантом становится использование предлагаемого метода, основанного на анализе визуальных траекторий оптических маркеров, расположенных на дне гидромеханической

системы, заполненной прозрачной жидкостью, в результате преломления световых лучей на ее поверхности.

Пусть на дне сосуда, заполненного прозрачной жидкостью, на расстоянии  $r_i$  от оси сосуда расположен точечный источник света  $M$ , формирующий луч, направленный вертикально вверх. В том случае, если при вращении ПУ сформирована искривленная свободная поверхность, то угол падения луча на нее будет отличен от  $90^\circ$  и свет будет преломляться (рис. 1).

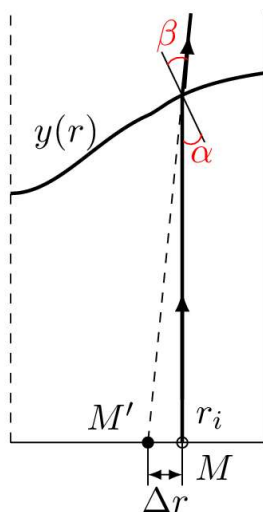


Рис. 1

Для наблюдателя, находящегося с внешней стороны от жидкости, изменение направления преломленного луча будет выглядеть как смещение положения изображения маркера в точку  $M'$  на расстояние  $\Delta r$ .

Исходя из геометрических соотношений, можно доказать, что при известном значении  $r_i$  может быть вычислено значение  $\zeta_m$ .

Представленная модель носит упрощенный характер. На практике описанный выше метод может быть реализован путем анализа изображения маркера, получаемого и при горизонтальной, и при искривленной свободной поверхности.

Большой точностью будет обладать метод, в котором используется система маркеров, расположенных в различных точках дна сосуда. При этом в реальных условиях проведения эксперимента ситуация носит более сложный характер, обусловленный следующими причинами:

- изображение маркеров даже при горизонтальной поверхности не соответствует фактическому, из-за того, что приемник оптического изображения не находится строго над каждым из маркеров;
- малые отклонения в размерах и расположении перемешивающих устройств приводят к сложно прогнозируемому колебанию поверхности воронки;
- для некоторых типов перемешивающих устройств, представляющих практический интерес, характерно «пробегание» возмущения, расположенного над лопастью перемешивающего устройства, по поверхности воронки.

Все это приводит к тому, что изображение маркера описывает трудно прогнозируемую траекторию, которая при определенных условиях может пересекаться с траекториями других маркеров или прерываться в тот момент, когда маркер закрыт проходящим над ним элементом ПУ.

Таким образом, возникает ряд задач, для решения которых целесообразно использование средств интеллектуального анализа:

- идентификация траекторий маркеров и положения маркеров на траектории в заданные моменты времени, для которой целесообразно использовать сверточные нейронные сети;
- определение фактического положения маркеров по идентифицированным траекториям с использованием обученных (на основе экспериментов с известными типами ПУ) сверточных нейронных или нейро-нечетких сетей на [3];
- использование накопленных в процессе исследования данных при решении задачи нечеткой параметрической оптимизации и управления ГМП перемешивания для широкого спектра химических и биохимических технологических процессов.

### Литература

1. Брагинский Л.Н., Бегачев В.И., Барабаш В.М. Перемешивание в жидких средах. Л.: «Химия», 1984. 336 с.
2. Vacuum evaporator with the electrochemical generator on oxyhydrogen cell / Y.V. Siniavskii [et al.] // International Journal of Hydrogen Energy. 2017. Vol. 42, No 21. P. 14649–14655.
3. Сверточная нейро-нечеткая сеть для исследования гидромеханических процессов в условиях неопределенности / В.В. Борисов [и др.] // Тез. докл. XVI Всероссийской научной конференции «Нейрокомпьютеры и их применение». М: МГППУ, 2018. С. 140–141.

**Y.V. Siniavsky, V.V. Borisov**

National Research University Moscow Power Engineering Institute,  
Smolensk branch,

## INTELLECTUAL ANALYSIS OF HYDROMECHANICAL MIXING PROCESSES

**Keywords:** *hydromechanical processes, neuro-fuzzy networks, methods of image analysis.*

**Abstract.** *The method of intellectual analysis of hydromechanical processes (on the example of mixing processes) is proposed on the basis of determining the resistance of the mixing device by determining the shape and dimensions of the curved free surface of the liquid substance. The method is based on a neural network and fuzzy analysis of the visual trajectories of optical markers located on the bottom of a hydromechanical system filled with a transparent liquid, as a result of the refraction of light rays on its surface. The expediency of using convolutional neural networks for these tasks is substantiated.*

## СЕКЦИЯ 3

### Математика и ее приложения

М.Б. Банару, Г.А. Банару

Смоленский государственный университет

УДК 514.76

#### О ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ КОСИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ТИПА НА 3-ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ШЕСТИМЕРНОЙ СФЕРЫ

Ключевые слова: почти эрмитова структура, приближенно келерова структура, почти контактная метрическая структура, гиперповерхность.

*Получены структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры, индуцированной на ориентируемой гиперповерхности с типовым числом три в приближенно келеровой шестимерной сфере. Доказано, что гиперповерхности с типовым числом три в приближенно келеровой шестимерной сфере допускают отличную от косимплектической и кенмоцевой почти контактную метрическую структуру косимплектического типа.*

1. Шестимерная сфера  $S^6$  с канонической приближенно келеровой структурой – исторически первый пример отличного от келерова почти эрмитова многообразия [1]. Авторами результатов о различных аспектах геометрии приближенно келеровой шестимерной сферы являются как классики эрмитовой геометрии (А. Грей, Е. Калаби, В.Ф. Кириченко, К. Секигава), так и многие другие специалисты из самых разных стран.

В работе [2] А. Абу-Салим и М. Банару решали задачу о виде почти контактной метрической структуры на ориентируемой 1-гиперповерхности (то есть гиперповерхности с типовым числом 1) приближенно келеровой сферы  $S^6$ . Было доказано, что почти контактная метрическая структура на такой гиперповерхности является слабо косимплектической. Для вполне геодезической гиперповерхности (или 0-гиперповерхности) приближенно келеровой сферы  $S^6$  получен аналогичный результат: почти контактная метрическая структура на такой гиперповерхности также является слабо косимплектической [3]. Немного позже было доказано, что 2-гиперповерхности приближенно келеровой шестимерной сферы допускают почти контактную

метрическую структуру косимплектического типа. Причем эта структура не является ни косимплектической структурой, ни структурой Кенмоцу [4]. В данной работе этот факт будет распространен и на 3-гиперповерхности сферы  $S^6$ .

2. Как известно, почти контактной метрической структурой на многообразии  $N$  называется система тензорных полей  $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ , для которой выполняются условия [1]:

$$\begin{aligned} \eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N). \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi$  – поле тензора типа  $(1, 1)$ ,  $\xi$  – векторное поле,  $\eta$  – ковекторное поле,  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  – риманова метрика,  $\mathfrak{X}(N)$  – модуль гладких векторных полей на многообразии  $N$ .

Хорошо известно также, что многообразие, которое допускает почти контактную метрическую структуру, является нечетномерным и ориентируемым. Если говорить о конкретных примерах почти контактных метрических структур, то наиболее важными из них являются косимплектическая структура, структуры Сасаки, Кенмоцу и их обобщения. Эти структуры – объект интенсивных исследований, проводимых как с точки зрения дифференциальной геометрии, так и с точки зрения теоретической физики.

В работе [5] В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев ввели в рассмотрение новый тип почти контактных метрических структур – структуру косимплектического типа. Она определяется как почти контактная метрическая структура с замкнутой контактной формой. В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев показали, что условие

$$d\omega = 0,$$

налагаемое на первую группу структурных уравнений Картана, является необходимым и достаточным для того, чтобы почти контактная метрическая структура оказалась структурой косимплектического типа. В [5] также доказано, что структура косимплектического типа инвариантна относительно канонических конформных преобразований. Напомним, что конформным преобразованием почти контактной метрической структуры  $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$  на многообразии  $N$  называют переход к почти контактной метрической структуре  $\{\tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}\}$ , где  $\tilde{\Phi} = \Phi$ ,  $\tilde{\xi} = e^f \xi$ ,  $\tilde{\eta} = e^{-f} \eta$  и  $\tilde{g} = e^{-2f} g$ . Через  $f$  обозначена некоторая гладкая функция на многообразии  $N$  [1].

Понятно, что простейшим примером почти контактной метрической структуры косимплектического типа является косимплектическая структура, картановы уравнения которой таковы [1; 6]:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta, \end{aligned}$$

$$d\omega = 0.$$

Еще одним очень важным примером почти контактной метрической структуры косимплектического типа является структура Кенмоцу. Картановы уравнения такой структуры имеют вид [1; 7]:

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \omega \wedge \omega^\alpha,$$

$$d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega \wedge \omega_\alpha,$$

$$d\omega = 0.$$

**3.** Особо следует выделить почти контактные метрические структуры, которые индуцируются на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. Изучением почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий занимались такие геометры, как Д. Блэр, С. Голдберг, С. Ишихара, В.Ф. Кириченко, М. Окумура, С. Сасаки, Л.В. Степанова, С. Танно, Й. Таширо, Х. Янамото, К. Яно. Имея в виду, что данный вопрос подробно освещен в обзоре [7], отметим только глубокое исследование Л.В. Степановой по этой тематике [8].

Воспользуемся первой группой структурных уравнений Картана на ориентируемой поверхности произвольного почти эрмитова многообразия. Впервые их вывела Л.В. Степанова [8], а более подробный вывод содержится в обзоре [7].

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \\ &+ (\sqrt{2} B^{an}_b + i\sigma_b^a) \omega^b \wedge \omega + (-\sqrt{2} \tilde{B}^{nab} - \frac{1}{\sqrt{2}} B^{ab}_n - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}^{abn} + i\sigma^{ab}) \omega_b \wedge \omega; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \\ &+ (\sqrt{2} B_{an}^b - i\sigma_a^b) \omega_b \wedge \omega + (-\sqrt{2} \tilde{B}_{nab} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{abn} - \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ab}^n - i\sigma_{ab}) \omega^b \wedge \omega; \quad (1) \\ d\omega &= \sqrt{2} B_{nab} \omega^a \wedge \omega^b + \sqrt{2} B^{nab} \omega_a \wedge \omega_b + \\ &+ (\sqrt{2} B^{na}_b - \sqrt{2} B_{nb}^a - 2i\sigma_b^a) \omega^b \wedge \omega_a + \\ &+ (\tilde{B}_{nbn} + B_{nb}^n + i\sigma_{nb}) \omega \wedge \omega^b + (\tilde{B}^{nbn} + B^{nb}_n - i\sigma_n^b) \omega \wedge \omega_b, \end{aligned}$$

где

$$B^{ab}_c = -\frac{i}{2} J_{\hat{b},c}^a, \quad B_{ab}^c = \frac{i}{2} J_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}.$$

Здесь через  $\{J_{k,m}^j\}$  обозначены компоненты  $\nabla J$ ; системы функций  $\{B^{abc}\}, \{B_{abc}\}$  и  $\{B^{ab}_c\}, \{B_{ab}^c\}$  служат компонентами структурных и виртуальных тензоров Кириченко, соответственно, почти эрмитовой структуры на многообразии  $M^{2n}$  [9]. Также отметим, что  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n-1$ ;  $a, b, c = 1, \dots, n$ ;  $\hat{a} = a+n$ ;  $\sigma$  – вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности [8]  $N^{2n-1}$  в почти эрмитово многообразие  $M^{2n}$ ;  $\{\omega^\alpha\}, \{\omega_\alpha\}$  – компоненты форм смещения ( $\omega^n = \omega$ );  $\{\omega_j^k\}$  – компоненты форм римановой связности;  $\omega_\alpha = \omega^{\hat{a}}$ .

Поскольку для приближенно келерова многообразия структурные тензоры Кириченко обращаются в нуль [9], уравнения (1) принимают в данном случае такой вид:

$$\begin{aligned}
d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \wedge \omega_\gamma + \\
&+ i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega + (-\sqrt{2} \tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}^{\alpha\beta n} + i\sigma^{\alpha\beta}) \omega_\beta \wedge \omega ; \\
d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma - \\
&- i\sigma_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega + (-\sqrt{2} \tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{\alpha\beta n} - i\sigma_{\alpha\beta}) \omega^\beta \wedge \omega ; \\
d\omega &= \sqrt{2} B_{n\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sqrt{2} B^{n\alpha\beta} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta - \\
&- 2i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + (\tilde{B}_{n\beta n} + i\sigma_{n\beta}) \omega \wedge \omega^\beta + (\tilde{B}^{n\beta n} - i\sigma_n^\beta) \omega \wedge \omega_\beta .
\end{aligned} \tag{2}$$

В этом случае, когда типовое число почти контактной метрической гиперповерхности приближенно келерова многообразия равно трем, наиболее простой вид матрицы второй квадратичной формы таков:

$$(\sigma_{ps}) = \left( \begin{array}{c|c|c} (\sigma_{\alpha\beta}) & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \hline \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & \sigma_{nn} & \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & (\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}) \end{array} \right), \quad p, s = 1, 2, 3, \dots, n-1, \tag{3}$$

причем

$$rank(\sigma_{\alpha\beta}) = rank(\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}) = 1.$$

Используя (2) и (3), мы можем получить структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой 3-гиперповерхности приближенно келеровой шестимерной сферы.

**Теорема 1.** *Структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой 3-гиперповерхности приближенно келеровой шестимерной сферы имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned}
d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \wedge \omega_\gamma + (-\sqrt{2} \tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}^{\alpha\beta n} + i\sigma^{\alpha\beta}) \omega_\beta \wedge \omega ; \\
d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + (-\sqrt{2} \tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{\alpha\beta n} - i\sigma_{\alpha\beta}) \omega^\beta \wedge \omega ; \\
d\omega &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно заметить, что структурные уравнения (4) в точности соответствуют именно почти контактной метрической структуре косимплектического типа. При этом данная структура не является ни косимплектической структурой, ни структурой Кенмоцу. Поэтому справедливо следующее утверждение.



**Теорема 2.** *Гиперповерхности с типовым числом три приближенно келеровой шестимерной сферы допускают отличную от косимплектической и кенмощевой почти контактную метрическую структуру косимплектического типа.*

Авторы выражают глубокую благодарность Ахмаду Абу-Салиму за замечания, которые были полезны при подготовке данной заметки.

### Литература

1. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный дом, 2013. 458 с.
2. Abu-Saleem A., Banaru M. On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 2014. V. 8, № 1. P. 35-46.
3. Banaru M.B., Banaru G.A. A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // *Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics*. 2015. V. 8(57), № 2. P. 21-28.
4. Abu-Saleem A., Banaru M.B., Banaru G.A. A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian 6-sphere // *Известия Академии наук Республики Молдова. Математика*. 2017. № 3(85). P.107-114.
5. Кириченко В.Ф., Ускорев И.В. Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур // *Математические заметки*. 2008. Т. 84, № 6. С. 838–850.
6. Banaru M.B., Banaru G.A. 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // *SUT Journal of Mathematics*. 2015. V. 51, № 1. P. 1-9.
7. Кириченко В.Ф., Банару М.Б. Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // *Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры*. 2014. Т. 127. С. 5 -40.
8. Степанова Л.В. Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий / дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1995.
9. Banaru M.B. On Kirichenko tensors of nearly Kählerian manifolds // *Journal of Sichuan University of Science and Engineering*. 2012. V. 25, № 4. P.1-5.

**M.B. Banaru, G.A. Banaru**  
Smolensk State University

### ON ALMOST CONTACT METRIC STRUCTURE OF COSYMPLECTIC TYPE ON A 3-HYPERSURFACE OF THE SIX-DIMENSIONAL SPHERE

**Keywords:** *almost hermitian structure, nearly kählerian structure, almost contact metric structure, hypersurface.*

**Abstract.** *The Cartan structural equation of the almost contact metric structure induced on an oriented 3-hypersurface in the nearly Kählerian six-dimensional sphere are obtained. it is proved that 3-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-dimensional sphere admit non-cosymplectic and non-Kenmotsu almost contact metric structure of cosymplectic type.*

Т.К. Бирюкова<sup>1</sup>, В.И. Киреев<sup>2</sup>, М.М. Гершкович<sup>3</sup>  
<sup>1,3</sup>Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, г. Москва  
<sup>2</sup> НИТУ МИСиС, г. Москва

УДК 519.6

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ПОДОБИЯ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ К ЗАДАЧАМ ПРИБЛИЖЕНИЯ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *аппроксимационный оператор, аппроксимация, сплайн, сплайн-функция, сплайн-метод, численное дифференцирование, численное интегрирование, квадратурная формула, интегродифференциальный, сеточная функция.*

*В статье сформулирован принцип подобия аппроксимационных операторов применительно к задачам приближения сеточных функций, производных и интегралов как обобщение разработанных авторами интегродифференциальных методов аппроксимации.*

**1. Операционное подобие формул и параметрических соотношений для интегродифференциальных сплайнов четных степеней и дифференциальных сплайнов нечетных степеней.** В данной статье в развитие интегродифференциальных методов аппроксимации функций, предложенных авторами в докладах на конференциях СКМП-2011 [1], СКМП-2012 [2], СКМП-2014 [3], СКМП-2016 [4], сформулирован принцип подобия аппроксимационных операторов применительно к приближению сеточных функций, производных и интегралов.

Введем сначала понятие подобия аппроксимационных операторов на примере предложенных авторами интегродифференциальных сплайнов четных степеней (второй и четвертой) [1; 2] и традиционных дифференциальных сплайнов нечетных степеней (третьей и пятой) [5] соответственно.

Рассмотрим формулы звеньев сплайнов перечисленных типов, а также соотношения для вычисления их параметров.

Формула звена **параболического интегродифференциального сплайна (ИД-сплайна)**  $S_2(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{2,i}(x)$  на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ , получаемого на основе интегрального условия согласования сплайна и аппроксимируемой функции и условия непрерывности сплайна в точке  $x_{i+1}$ , имеет вид [1]:

$$S_{2,i}(x) = \tilde{f}_i + \left( \frac{6}{h_{i+1}^2} I_i^{i+1} - \frac{6}{h_{i+1}} \tilde{f}_i - \frac{2}{h_{i+1}} \Delta \tilde{f}_i \right) (x - x_i) + \left( -\frac{6}{h_{i+1}^3} I_i^{i+1} + \frac{6}{h_{i+1}^2} \tilde{f}_i + \frac{3}{h_{i+1}^2} \Delta \tilde{f}_i \right) (x - x_i)^2. \quad (1)$$

$$\delta S_{2,i}^{(-1)}(x_i, x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_{2,i}(x) dx - I_i^{i+1} = 0 \quad - \text{интегральное условие}$$

согласования на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ , представляющее собой условие равенства нулю интегральной невязки;

$S_{2,i}(x_{i+1}) = S_{2,i+1}(x_{i+1})$  – условие непрерывности сплайна в точке  $x_{i+1}$ .

Формула связи определенных (исходно известных) параметров  $I_i^{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) и неопределенных (искомых) параметров  $\tilde{f}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), вытекающая из условия непрерывности первой производной сплайна  $S_2(x)$  в узлах  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ):

$$\frac{1}{h_i} \tilde{f}_{i-1} + 2 \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) \tilde{f}_i + \frac{1}{h_{i+1}} \tilde{f}_{i+1} = 3 \left( \frac{I_{i-1}^i}{h_i^2} + \frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (2)$$

Здесь и ниже приняты следующие обозначения:

$f(x)$  – функция, аппроксимируемая сплайном  $S_r(x)$  на сетке узлов  $\Delta_n$ :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$ ;

$r$  – степень сплайна;

$p = 0, 1, 2, \dots$  – порядок производной, указываемый в скобках в верхнем индексе;

$$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad H = \max_{i=1, 2, \dots, n} h_i;$$

$$I_i^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad \nabla I_i^{i+1} = I_i^{i+1} - f_i h_{i+1}, \quad \nabla I_{i-1}^i = I_{i-1}^i - f_{i-1} h_i;$$

$$f_i = f(x_i), \quad f'_i = f'(x_i), \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i, \quad \Delta f'_i = f'_{i+1} - f'_i, \quad \nabla f_i = \Delta f_i - f'_i h_{i+1};$$

$$\bar{m}_i = S'_r(x_i) \approx f'_i, \quad \Delta \bar{m}_i = \bar{m}_{i+1} - \bar{m}_i; \quad m_i = S''_r(x_i) \approx f''_i, \quad \Delta m_i = m_{i+1} - m_i;$$

$$\tilde{m}_i = S_r^{(3)}(x_i) \approx f_i^{(3)}, \quad \Delta \tilde{m}_i = \tilde{m}_{i+1} - \tilde{m}_i; \quad \hat{m}_i = S_r^{(4)}(x_i) \approx f_i^{(4)}, \quad \Delta \hat{m}_i = \hat{m}_{i+1} - \hat{m}_i;$$

$$\delta S_{r,i}^{(-1)}(x_i, x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_{r,i}(x) dx - I_i^{i+1} \quad - \text{интегральная невязка};$$

$\delta S_{r,i}^{(p)}(x_k) = S_{r,i}^{(p)}(x_k) - f^{(p)}(x_k) \quad (k = i, i+1, p = 0, 1, 2, \dots)$  – дифференциальные невязки на концах отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Значения  $\tilde{f}_i$ , вычисленные из системы линейных алгебраических уравнений (2) (дополненной граничными условиями, например, в виде  $\tilde{f}_0 = f_0 = f(x_0)$ ,  $\tilde{f}_n = f_n = f(x_n)$ ), близки к заданным значениям функции  $f(x_i)$  (в [6] показано, что их отличие имеет порядок  $O(H^3)$ ).

Сплайн  $S_2(x)$  приближает функцию  $f(x) \in C_{[a,b]}^\mu$  ( $\mu \geq 3$ ) с точностью  $O(H^3)$  при условии, что параметры  $I_i^{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) известны точно или вычислены с точностью не ниже  $O(H^4)$ , а  $\tilde{f}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) вычислены из системы (2) с граничными условиями  $\tilde{f}_0 = f(x_0)$ ,  $\tilde{f}_n = f(x_n)$  (доказательство приведено в [6]).

Неопределенные параметры в соотношениях связи здесь и ниже по тексту записываются в левой части равенств, а определенные параметры – в правой.

Для **кубического дифференциального сплайна (Д-сплайна)**

$S_3(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{3,i}(x)$  [5], получаемого с использованием дифференциальных условий согласования, накладываемых на функцию и производную первого порядка, имеют место следующие соотношения.

Формула звена сплайна на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$S_{3,i}(x) = f_i + \bar{m}_i(x-x_i) + \left(3\frac{\Delta f_i}{h_{i+1}^2} - \frac{3}{h_{i+1}}\bar{m}_i - \frac{\Delta \bar{m}_i}{h_{i+1}}\right)(x-x_i)^2 + \left(-2\frac{\Delta f_i}{h_{i+1}^3} + 2\frac{\bar{m}_i}{h_{i+1}^2} + \frac{\Delta \bar{m}_i}{h_{i+1}^2}\right)(x-x_i)^3; \quad (3)$$

дифференциальные невязки:

$$\delta S_{3,i}^{(0)}(x_i) = 0, \delta S_{3,i}^{(0)}(x_{i+1}) = 0; \quad S_{3,i}^{(1)}(x_i) - \bar{m}_i = 0,$$

$$S_{3,i}^{(1)}(x_{i+1}) - \bar{m}_{i+1} = 0.$$

Формула связи определенных параметров  $f_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) и неопределенных параметров  $\bar{m}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), вытекающая из условия непрерывности второй производной сплайна  $S_3(x)$  в узлах  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ):

$$\frac{1}{h_i}\bar{m}_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)\bar{m}_i + \frac{1}{h_{i+1}}\bar{m}_{i+1} = 3\left(\frac{\Delta f_i}{h_{i+1}^2} + \frac{\Delta f_{i-1}}{h_i^2}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (4)$$

При аппроксимации гладких функций ( $f(x) \in C_{[a,b]}^{\mu}$  ( $\mu \geq 4$ )) кубические интерполяционные сплайны (3) имеют четвертый порядок сходимости [5].

Для **ИД-сплайна 4-й степени** имеют место следующие соотношения [6].

Формула звена сплайна на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$S_{4,i}(x) = f_i + \left( \frac{6}{h_{i+1}^2} I_i^{i+1} - \frac{6}{h_{i+1}} f_i - \frac{2\Delta f_i}{h_{i+1}} + \frac{1}{12} h_{i+1}^2 \tilde{m}_i + \frac{1}{30} \Delta \tilde{m}_i h_{i+1}^2 \right) (x - x_i) + \\ + \left( -6 \frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}^3} + 6 \frac{f_i}{h_{i+1}^2} + 3 \frac{\Delta f_i}{h_{i+1}^2} - \frac{1}{4} h_{i+1} \tilde{m}_i - \frac{3}{40} h_{i+1} \Delta \tilde{m}_i \right) (x - x_i)^2 + \\ + \frac{1}{6} \tilde{m}_i (x - x_i)^3 + \frac{1}{24 h_{i+1}} \Delta \tilde{m}_i (x - x_i)^4 ; \quad (5)$$

интегральная и дифференциальные невязки:

$$\delta S_{4,i}^{(-1)}(x_i, x_{i+1}) = 0 ; \delta S_{4,i}^{(0)}(x_i) = 0 , \delta S_{4,i}^{(0)}(x_{i+1}) = 0 ;$$

$$S_{3,i}^{(3)}(x_i) - \tilde{m}_i = 0 , S_{3,i}^{(3)}(x_{i+1}) - \tilde{m}_{i+1} = 0 .$$

Формула связи определенных параметров ( $I_i^{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ),  $f_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )) и неопределенных параметров  $\tilde{m}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), получающаяся из условия непрерывности второй производной сплайна  $S_4(x)$  в узлах  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ):

$$\frac{3}{20} h_i \tilde{m}_{i-1} + \frac{7}{20} (h_i + h_{i+1}) \tilde{m}_i + \frac{3}{20} h_{i+1} \tilde{m}_{i+1} = \\ = 6 \left( 2 \frac{\nabla I_{i-1}^i}{h_i^3} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h_i^2} \right) - 6 \left( 2 \frac{\nabla I_i^{i+1}}{h_{i+1}^3} - \frac{\Delta f_i}{h_{i+1}^2} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (6)$$

Для **Д-сплайна 5-й степени** ([7]) имеют место следующие соотношения.

Формула звена сплайна на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$S_{5,i}(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \left( \frac{3}{h_{i+1}^2} \Delta f_i - 3 \frac{f_i'}{h_{i+1}} - \frac{\Delta f_i'}{h_{i+1}} + \frac{1}{24} h_{i+1}^2 \tilde{m}_i + \frac{1}{60} h_{i+1}^2 \Delta \tilde{m}_i \right) (x - x_i)^2 + \\ + \left( -\frac{2}{h_{i+1}^2} \Delta f_i + \frac{2}{h_{i+1}^2} f_i' + \frac{1}{h_{i+1}^2} \Delta f_i' - \frac{h_{i+1}}{12} \tilde{m}_i - \frac{1}{40} h_{i+1} \Delta \tilde{m}_i \right) (x - x_i)^3 + \frac{1}{24} \tilde{m}_i (x - x_i)^4 + \\ + \frac{1}{120 h_{i+1}} \Delta \tilde{m}_i (x - x_i)^5 ; \quad (7)$$

дифференциальные невязки:

$$\delta S_{5,i}^{(0)}(x_i) = 0, \delta S_{5,i}^{(0)}(x_{i+1}) = 0; \delta S_{5,i}^{(1)}(x_i) = 0, \delta S_{5,i}^{(1)}(x_{i+1}) = 0;$$

$$S_{5,i}^{(4)}(x_i) - \widehat{m}_i = 0, S_{5,i}^{(4)}(x_{i+1}) - \widehat{m}_{i+1} = 0.$$

Формула связи определенных параметров  $(f_i, f'_i \ (i=0, 1, \dots, n))$  и неопределенных параметров  $\widehat{m}_i \ (i=0, 1, \dots, n)$ , получающаяся из условия непрерывности третьей производной сплайна  $S_5(x)$  в узлах  $x_i \ (i=1, 2, \dots, n-1)$ :

$$\frac{3}{20} h_i \widehat{m}_{i-1} + \frac{7}{20} (h_i + h_{i+1}) \widehat{m}_i + \frac{3}{20} h_{i+1} \widehat{m}_{i+1} =$$

$$= 6 \left( 2 \frac{\nabla f_{i-1}}{h_i^3} - \frac{\Delta f'_{i-1}}{h_i^2} \right) - 6 \left( 2 \frac{\nabla f_i}{h_{i+1}^3} - \frac{\Delta f'_i}{h_{i+1}^2} \right) \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (8)$$

**Подобие формул, относящихся к сплайнам четных и нечетных степеней.** Определения подобных математических объектов (операторов, формул, уравнений, систем уравнений) приведены ниже. Здесь предварительно (на примере сплайнов) показан принцип установки соответствия (подобия) формул по определенным признакам.

Анализ рассмотренных выше формул показывает парное подобие (соответствие) звеньев сплайнов четных и нечетных степеней и соотношений связи определенных и неопределенных параметров (далее – «соотношения связи») для них. Для выявления подобия некоторые слагаемые в правых частях всех формул звеньев сплайнов и правые части соотношений связи должны быть выражены через соответствующие приращения определенных параметров.

Устанавливается парное подобие следующих формул:

(3) и (1), (4) и (2) для сплайнов  $S_3(x)$  и  $S_2(x)$ ;

(7) и (5), (8) и (6) для сплайнов  $S_5(x)$  и  $S_4(x)$ .

При переходе от кубических сплайнов (3) с соотношениями связи (4) к параболическим сплайнам (1) с соотношениями связи (2) наблюдаются следующие закономерности.

1. Порядок производной в соотношениях (3), (4) понижается на единицу. Таким образом, вместо значения первой производной  $\overline{m}_i$  и ее приращения  $\Delta \overline{m}_i$  (неопределенные – искомые параметры), входящих в соотношения (3), (4), в соотношениях (1), (2) записываются значение функции  $\widetilde{f}_i$  и ее приращение  $\Delta \widetilde{f}_i$  (тоже неопределенные – искомые параметры). Вместо приращений функции  $\Delta f_i, \Delta f_{i+1}$  (определенные – известные параметры), входящих в правые части соотношений (3), (4), в правых частях соотношений (1), (2) записываются приращения

первообразных, то есть определенные интегралы  $I_{i-1}^i, I_i^{i+1}$  (тоже определенные – известные параметры).

2. Числовые коэффициенты и степени разностей  $(x-x_i)$  в звене параболического ИД-сплайна (1) равны числовым коэффициентам и степеням разностей  $(x-x_i)$  в многочлене, получающемся в результате дифференцирования звена кубического сплайна (3). Вместо операции дифференцирования звена кубического сплайна можно осуществить обратную ей операцию интегрирования правой части формулы (1) с добавлением константы  $f_i$ .

Таким образом, выявляется «операционное подобие» формул звеньев кубических Д-сплайнов соответствующим формулам звеньев параболических ИД-сплайнов.

Под словосочетанием «операционное подобие» здесь понимается то, что формулы, соответствующие Д-сплайнам нечетной степени, с помощью дифференцирования или интегрирования можно преобразовать в формулы, соответствующие ИД-сплайнам четной степени, на единицу меньшей.

Аналогично устанавливается подобие приведенных выше формул (5)–(8) для Д-сплайнов пятой степени и ИД-сплайнов четвертой степени.

Необходимо подчеркнуть, что операционное подобие формул звеньев сплайнов и соотношений связи между определенными и неопределенными параметрами обеспечивается, во-первых, соответствующим выбором условий согласования звеньев сплайнов нечетной и четной степеней, а во-вторых, соответствием (по порядку производных) их условий стыковки в центральном узле  $x_i$  двух соседних отрезков  $[x_{i-1}, x_i], [x_i, x_{i+1}]$ .

**2. Принцип подобия аппроксимационных операторов. Основные определения.** Сформулируем принцип подобия аппроксимационных операторов, проиллюстрированный выше на примере сплайнов.

Будем рассматривать аппроксимацию функций одной переменной, а также их производных и интегралов.

Явный дифференциальный оператор в произвольной точке некоторого шаблона  $(x_{i-t_1}, \dots, x_i, \dots, x_{i+t_2})$  для функции одной переменной представляется общей формулой [4]:

$$\hat{f}_{i\pm s}^{(p)} = \hat{f}_{i\pm s}^{(p)}(f_{i-t_1}, \dots, f_i, \dots, f_{i+t_2}). \quad (9)$$

Здесь  $t_2 + t_1 + 1$  равно количеству точек, составляющих аппроксимационный шаблон  $(x_{i-t_1}, \dots, x_i, \dots, x_{i+t_2})$ , на котором строится формула аппроксимации производной  $p$ -го порядка ( $t_1 \leq |s| \leq t_2$ ),

нижние индексы  $i \pm s$  в обозначении оператора (9) указывают номера узлов, для которых записан оператор.

Примером дифференциального оператора может служить классический явный аппроксимационный оператор, представляющий собой формулу вычисления первой производной  $f'_{i-2}$  в левой крайней точке четырехточечного шаблона  $(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$  [8]:

$$\hat{f}'_{i-2} = \frac{1}{6h}(-2f_{i-2} - 3f_{i-1} + 6f_i - f_{i+1}).$$

Пример интегрального оператора (также явного) – квадратурная формула парабол (Симпсона) [8], строящаяся на трехточечном шаблоне:

$$\hat{I}_{i-1}^{i+1} = \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}).$$

Сеточные значения функции  $f_i = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), заключенные в скобки в правых частях вышеприведенных и других аппроксимационных формул, здесь и в дальнейшем изложении будут называться базовыми функциями как для дифференциального оператора  $\hat{f}_{i \pm s}^{(p)}$ , так и для интегрального оператора  $\hat{I}_i^{i+1}$ .

В рамках разрабатываемого авторами интегродифференциального подхода к приближению функций расширим состав базовых функций (по сравнению с традиционной теорией численного анализа) определенными интегралами, а также производными и приращениями функций и производных.

**Определение 1.** Базовыми функциями для некоторого произвольного аппроксимационного оператора  $\hat{A}_j$  называются сеточные функции (или их приращения) и (или) их производные (или их приращения) и (или) в общем случае определенные интегралы (приращения первообразных), через которые выражается этот оператор и которые входят в его правую часть.

Приведенное обобщение базовых функций расширяет область применимости аппарата численного анализа при проведении исследований. В частности, на конференции СКМП-2016 [4] описывались разработанные авторами методы аппроксимации функций и их производных через априори известные или вычисленные значения определенных интегралов на отрезках, составляющих шаблон, в то время как традиционные методы аппроксимации не предусматривают вычисления значений функции и ее производных через интегралы.

В отличие от приведенных выше примеров явных операторов, неявные операторы соответствуют неявным методам вычисления производных и интегралов, заключающихся в решении трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Примеры таких систем – СЛАУ для вычисления параметров сплайнов



(2), (4), (6), (8) (с добавлением замыкающих СЛАУ граничных соотношений). СЛАУ для вычисления интегралов приведены в докладе авторов [3].

В соответствии с введенным определением 1 при формулировке принципа подобия математических объектов в качестве базовых функций используются именно приращения функций и их производных:  $\Delta f_i^{(p)} = f_{i+1}^{(p)} - f_i^{(p)}$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$  – порядок производной) на отрезке

$[x_i, x_{i+1}]$ , а также определенные интегралы  $I_i^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$  как

приращения первообразной  $F(x)$  на отрезках  $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$I_i^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \Delta F_i = F_{i+1} - F_i = \Delta f_i^{(-1)} = f_{i+1}^{(-1)} - f_i^{(-1)} .$$

Здесь для удобства дальнейшего изложения введено понятие обобщенного порядка производной ( $p$ ), применяемого как для сеточной функции или ее производных ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ), так и для первообразной при  $p = -1$ :  $f_i^{(-1)} = F(x_i)$  – значение первообразной в точке  $x_i$ .

**Определение 2.** Две совокупности базовых функций, характеризующихся некоторым порядком производной  $p = -1, 0, 1, 2, \dots$ , называются подобными, если они могут быть получены друг из друга путем соответствующего изменения (уменьшения или увеличения) порядков производных этих функций на одинаковую величину  $\Delta p$ .

**Определение 3.** Базовые функции, входящие в математические (аппроксимационные) объекты (операторы, формулы, уравнения, системы уравнений) назовем параметрами этих объектов. Таким образом, подобные совокупности базовых функций, входящие в математические объекты (операторы, формулы, уравнения, системы уравнений), являются совокупностями подобных параметров указанных объектов.

**Определение 4.** Первый математический объект (оператор, формула, уравнение, система уравнений) является подобным второму математическому объекту, если первый объект может быть преобразован ко второму путем выполнения следующих действий:

– замена совокупности базовых функций (параметров), характеризующихся некоторым порядком производной  $p = -1, 0, 1, 2, \dots$ , относительно которых записан первый математический объект, на подобную (в смысле определения 2) совокупность базовых функций (параметров), характеризующуюся повышенным или пониженным порядком производных на величину  $\Delta p$ ;

– в случае подобных операторов заменяется также и обозначение оператора путем соответствующего изменения (уменьшения или увеличения) порядка его производной на ту же величину  $\Delta p$  (например, оператор  $\hat{f}_i = \frac{1}{2h}(I_i^{i+1} + I_{i-1}^i)$  подобен оператору  $\hat{f}_i' = \frac{1}{2h}(\Delta f_i + \Delta f_{i-1})$ , как иллюстрируется ниже);

– в случае подобных формул для звеньев сплайнов  $S_{r,i}(x)$  помимо замены в коэффициентах сплайна совокупности базовых функций на подобную совокупность, характеризующуюся повышенным или пониженным порядком производных, дополнительно выполняется соответственно дифференцирование или интегрирование звена сплайна (при интегрировании добавляется соответствующая константа, чтобы получаемый сплайн удовлетворял условиям согласования с аппроксимируемой функцией) – см. выше примеры подобных формул для звеньев сплайнов.

Принцип установления соответствия одних математических объектов (операторов, формул, уравнений, систем уравнений) другим подобным им математическим объектам назовем **принципом подобия математических объектов (операторов, формул, уравнений, систем уравнений)**.

В частности, подобными могут быть аппроксимационные операторы, формулы звеньев сплайнов, вытекающие из них соотношения связи параметров сплайнов или уравнения для вычисления их значений.

При формировании некоторой группы подобных операторов вначале выбирается **базовый** оператор, по которому затем формируются последующие операторы группы, являющиеся подобными базовому. Например, в качестве базовых операторов могут быть выбраны дифференциальные операторы для аппроксимации функций или производных по приращениям первообразных (то есть по значениям

определенных интегралов  $\Delta F_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i) dx$ ) или по приращениям

функций ( $\Delta f_{i-1}, \Delta f_i, \dots$ ), операторы для аппроксимации интегралов по линейной комбинации значений функций  $f_i$  на некотором аппроксимационном шаблоне. При получении подобных операторов некоторой группы ее базовый оператор как в левой, так и в правой части видоизменяется в соответствии с принципом подобия – порядок производных в левой и правой частях базового оператора постепенно либо повышается, либо (при возможности) понижается.

Для иллюстрации принципа подобия рассмотрим простейший конкретный пример его применения к операторам аппроксимации

производных и восстановления функций. При этом правые части аппроксимационных операторов будем записывать через приращения функции  $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$  или первообразной  $I_i^{i+1} = F(x_{i+1}) - F(x_i)$ .

Так, например, классическая формула для аппроксимации производной первого порядка на трехточечном регулярном шаблоне

$$\hat{f}'_i = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1})$$

через приращения записывается в виде:

$$\hat{f}'_i = \frac{1}{2h}(\Delta f_i + \Delta f_{i-1}). \quad (10)$$

Тогда, понижая порядок производной в левой и правой частях формулы (10), получим:

$$\hat{f}_i = \frac{1}{2h}(I_i^{i+1} + I_{i-1}^i). \quad (11)$$

Формула (11) представляет аппроксимацию (восстановление) функции  $f_i$  по значениям определенных интегралов на отрезках, прилежащих к узлу  $x_i$ , в котором восстанавливается функция. То есть значение  $\hat{f}_i$  равно среднему значению интегралов на прилежащих к узлу  $x_i$  отрезках. Представляя сумму интегралов по формуле  $I_{i-1}^{i+1} = I_i^{i+1} + I_{i-1}^i$ , получим  $\hat{f}_i = \frac{1}{2h}I_{i-1}^{i+1}$ . Это означает, что  $\hat{f}_i$  совпадает со среднеинтегральным значением функции, то есть  $f_{cp} = \hat{f}_i = \frac{1}{2h}I_{i-1}^{i+1}$ .

Подчеркнем, что в данном примере группу подобных формул составляют две формулы (10) и (11).

В следующем примере первая группа формул (получающихся из разложения функции  $f(x)$  по формуле Тейлора) базируется на операторах, аппроксимирующих функцию  $\hat{f}'_i$  соответственно в узлах  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  на трехточечном нерегулярном шаблоне по значениям приращений функции  $\Delta f_{i-1}, \Delta f_i$  на двух прилежащих к узлу  $x_i$  отрезках.

$$\hat{f}'_{i-1} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left( (2 + \delta_{i+1}) \Delta f_{i-1} - \frac{1}{\delta_{i+1}} \Delta f_i \right), \quad (12)$$

$$\hat{f}'_i = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left( \frac{1}{\delta_{i+1}} \Delta f_i + \delta_{i+1} \Delta f_{i-1} \right) \left( \frac{h_i^2}{6} \delta_{i+1} M_{3,i} \right), \quad (13)$$

$$\hat{f}'_{i+1} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left( \frac{1 + 2\delta_{i+1}}{\delta_{i+1}} \Delta f_i - \delta_{i+1} \Delta f_{i-1} \right). \quad (14)$$

Понижая в (12)–(14) порядок производных в соответствующих приращениях и в самом операторе, получаем подобные операторы для аппроксимации самой функции по значениям двух определенных интегралов  $I_{i-1}^i, I_i^{i+1}$ :

$$\hat{f}_{i-1} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left( (2 + \delta_{i+1}) I_{i-1}^i - \frac{1}{\delta_{i+1}} I_i^{i+1} \right), \quad (15)$$

$$\hat{f}_i = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left( \frac{1}{\delta_{i+1}} I_i^{i+1} + \delta_{i+1} I_{i-1}^i \right) \left( \frac{h_i^2}{6} \delta_{i+1} M_{2,i} \right), \quad (16)$$

$$\hat{f}_{i+1} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left( \frac{1 + 2\delta_{i+1}}{\delta_{i+1}} I_i^{i+1} - \delta_{i+1} I_{i-1}^i \right). \quad (17)$$

Аналогично могут быть сформированы последующие операторы для производных второго порядка, третьего и т.д. (при этом в качестве значений функций в правых частях берутся соответствующие производные). Так, из формулы (13) получается дифференциальный оператор второго порядка, аппроксимирующий вторую производную в центральной точке шаблона:

$$\hat{f}_i'' = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left( \frac{1}{\delta_{i+1}} \Delta f'_i + \delta_{i+1} \Delta f'_{i-1} \right) \left( \frac{h_i^2}{6} \delta_{i+1} M_{4,i} \right).$$

В приведенных выше формулах (12)–(17) параметр  $H_i^{i+1}$  представляет собой сумму шагов на двух соседних отрезках сетки, то есть  $H_i^{i+1} = h_i + h_{i+1}$ , а символ  $\delta_{i+1}$  – параметр нерегулярности шаблона, являющийся отношением двух соседних шагов сетки, на которой задана функция  $f_i = f(x_i)$ , т.е.  $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$ . В скобках справа от формул здесь и

ниже для некоторых операторов приведены оценки их точности (порядок их аппроксимации относительно шага). Здесь  $M_{k,i} = \max_{[x_i, x_{i+1}]} |f^{(k)}(x)|$ ,  $k = 2, 3, 4$ . Видно, что порядок точности операторов относительно шага по мере повышения порядка производной не изменяется (здесь он равен двум), а изменяется только константа  $M_{k,i}$  в оценке точности. Порядок производной для этой константы также повышается по мере повышения порядка аппроксимируемой производной.

Подчеркнем, что формулы (15), (16), (17) позволяют вычислять (восстанавливать) значения функций по значениям интегралов на нерегулярном шаблоне, которые могут быть рассчитаны, например, при решении некоторых дифференциальных задач математической физики с помощью разностных консервативных методов интегрального типа [9].

Кроме того, эти формулы могут быть использованы для сглаживания сеточных функций, заданных (или вычисленных, или полученных экспериментальным путем) с некоторой достаточно большой погрешностью, или функций, имеющих разрывы первого рода.

Из рассмотрения соответствующих формул каждой группы видно, что их структуры являются одинаковыми. Значения числовых коэффициентов и коэффициентов, зависящих от параметра  $\delta_{i+1}$ , как было отмечено выше, не изменяются при переходе от одного оператора к другому соответствующему оператору с повышенным порядком производной. Не изменяется также и порядок аппроксимации операторов.

Приведенные выше группы подобных операторов, в которых базовыми являются операторы дифференциального типа, могут быть дополнены другими группами, базирующимися на квадратурных формулах. Например, квадратурная формула трапеций может быть принята в качестве базового оператора для построения следующей группы подобия:

$$I_i^{i+1} = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) \left( \frac{h^3}{12} M_{2,i} \right);$$

$$\Delta \hat{f}_i = \frac{h}{2} (f'_i + f'_{i+1}) \left( \frac{h^3}{12} M_{3,i} \right); \quad (18)$$

$$\Delta \hat{f}'_i = \frac{h}{2} (f''_i + f''_{i+1}) \left( \frac{h^3}{12} M_{4,i} \right). \quad (19)$$

Отметим, что соотношение (18), в свою очередь, представляет собой основу для построения одной из схем решения обыкновенного дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ . В этом случае вместо производных  $f'_i, f'_{i+1}$  в формуле (18) следует использовать функцию  $g(x, y)$  в соответствующих точках. Тогда подобные формулы, вытекающие из квадратур, заменят интегрально-интерполяционные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Формула (19) позволяет вычислить значение производной первого порядка по значениям производных второго порядка.

Аналогичным путем могут быть сформированы и другие группы подобных формул как на нерегулярных, так и на регулярных шаблонах.

Принцип подобия позволяет получить новые аппроксимационные формулы, установить соответствие между формулами по подобию, построить новые сплайн-функции интегродифференциального типа произвольной четной степени, установить подобие этих сплайнов уже

известным дифференциальным сплайнам нечетной степени, получить новые формулы для вычисления производных, интегралов, восстановления значений функции по интегралам, а также другие новые методы и алгоритмы.

### Литература

1. Интегродифференциальные сплайны и их применение в прикладных задачах анализа данных в территориально-распределенных информационных системах / Т.К. Бирюкова [и др.] // Системы компьютерной математики и их приложения. Материалы XII международной научной конференции (СКМП-2011). Смоленск: СмолГУ, 2011. С. 82-84.

2. Бирюкова Т.К., Гершкович М.М., Киреев В.И. Интегро-дифференциальные многочлены и сплайны произвольной четной степени в задачах анализа параметров функционирования распределенных информационных систем // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2012): материалы XIII международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора Э.И. Зверовича. Смоленск: СмолГУ, 2012. Вып. 13. С. 67–72.

3. Киреев В.И., Бирюкова Т.К., Гершкович М.М. Квадратурные и кубатурные формулы на нерегулярном шаблоне // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2014): материалы XV международной научной конференции (Смоленск, 16–18 мая 2014). Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 157–163.

4. Бирюкова Т.К., Киреев В.И., Гершкович М.М. Методы численного дифференцирования и восстановления сеточных функций по интегралам, основанные на интегродифференциальных сплайнах // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2016): материалы XVII международной научной конференции (Смоленск, 20–22 мая 2016). Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 106–113.

5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Новосибирск: Наука, 1980. 350 с.

6. Киреев В.И., Бирюкова Т.К. Интегродифференциальный метод обработки информации и его применение в численном анализе. М.: ИПИ РАН, 2014. 267 с.

7. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2008. 480 с.

8. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1982. 254 с.

9. Численное решение многомерных задач газовой динамики. / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. М.: Наука, 1976. 400 с.

**T.K. Biryukova<sup>1</sup>, V.I. Kireev<sup>2</sup>, M.M. Gershkovich<sup>3</sup>**

<sup>1,3</sup> The Institute of Informatics Problems of the Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences,

<sup>2</sup> MISIS National University of Science and Technology, Moscow

### THE SIMILARITY PRINCIPLE OF APPROXIMATION OPERATORS AS APPLIED FOR INTERPOLATION OF MESH FUNCTIONS

**Keywords:** *approximation operator, approximation, spline, spline-function, spline-method, numerical differentiation, numerical integration, quadrature formula, integrodifferential, mesh function.*

**Abstract.** *We describe the similarity principle for approximation operators as a generalization of integrodifferential methods of approximation and apply it for mesh functions, derivatives and integrals.*

**Н.Н. Богданова, К.М. Расулов**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

## **О РЕШЕНИИ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ЗАДАЧИ КАРЛЕМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ**

Ключевые слова: *аналитическая функция, четырехэлементная краевая задача типа задачи Карлемана, сдвиг Карлемана, уравнение типа Фредгольма, условия нетеровости.*

*В работе методом сопряжения аналитических функций установлено, что решение четырехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными предельными значениями в невырожденных случаях может быть сведено к последовательному решению обычной скалярной задачи Римана для аналитических функций и определенного интегрального уравнения типа Фредгольма. Получен конструктивный алгоритм решения рассматриваемой четырехэлементной краевой задачи в невырожденных случаях при прямом сдвиге контура. Установлены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи, определяемые индексом соответствующей скалярной задачи Римана и условиями разрешимости вспомогательного интегрального уравнения типа Фредгольма.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на расширенной плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова  $L$ . Через  $T^-$  обозначим область, дополняющую  $T^+ \cup L$  до полной плоскости, и для определенности положим, что начало координат принадлежит области  $T^+$ . В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографиях [1; 2]. Рассматривается следующая краевая задача (см. также [1, с. 248]): *требуется найти все*

кусочно аналитические функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  класса  $A(T^\pm) \cap H(L)$ , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на линии скачков  $L$  следующему граничному условию:

$$a_1(t)\overline{\Phi^+(t)} + b_1(t)\overline{\Phi^+[\alpha(t)]} + c_1(t)\overline{\Phi^-(t)} + d_1(t)\overline{\Phi^-[\alpha(t)]} = f(t), \quad (1)$$

где  $a_1(t)$ ,  $b_1(t)$ ,  $c_1(t)$ ,  $d_1(t)$ ,  $f(t)$  – заданные на  $L$  комплекснозначные функции класса  $H(L)$  (Гельдера),  $\alpha(t)$  – прямой или обратный сдвиг контура  $L$ , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \quad (2)$$

причем  $\alpha'(t) \in H(L)$ .

Следуя [1], сформулированную задачу назовем *четырёхэлементной краевой задачей со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными предельными значениями*, или, короче, *задачей  $K_4$* , а соответствующую  $K_4$  однородную задачу ( $f(t) \equiv 0$ ) будем называть *задачей  $K_4^0$* .

Сразу отметим, что задача  $K_4$ , вообще говоря, не является нетеровой. Так, например, однородная задача с краевым условием вида

$$\overline{\Phi^+(t)} + \Phi^+[\alpha(t)] + t \cdot \overline{\Phi^-(t)} - \frac{1}{t} \Phi^-[\alpha(t)] = 0, \quad t \in L_1,$$

где  $L_1 = \{t : |t| = 1\}$ ,  $\alpha(t) = -t$ , имеет бесчисленное множество линейно независимых решений:

$$\Phi_k^+(z) = z^{2k+1}, \quad \Phi_k^-(z) = \frac{1}{z^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Однако хорошо известно (см., например, [1, с. 248]), что для нетеровости задачи  $K_4$  в случае, когда  $\alpha(t)$  – прямой сдвиг контура  $L$ , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\theta(t) = a_1(t) \cdot \overline{c_1[\alpha(t)]} - \overline{b_1[\alpha(t)]} d_1(t) \neq 0, \quad (3)$$

а в случае, когда  $\alpha(t)$  – обратный сдвиг контура  $L$ , для нетеровости этой задачи необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\theta_1(t) = a_1(t) \cdot \overline{a_1[\alpha(t)]} - b_1(t) \overline{b_1[\alpha(t)]} \neq 0, \quad (4)$$

$$\theta_2(t) = c_1(t) \cdot \overline{c_1[\alpha(t)]} - d_1(t) \overline{d_1[\alpha(t)]} \neq 0. \quad (5)$$

Пусть выполняются условия

$$c_1(t) \neq 0, d_1(t) \neq 0. \quad (6)$$

Тогда, умножив обе части (1) на  $\overline{c_1[\alpha(t)]}$ , получим равенство

$$a_1(t) \overline{c_1[\alpha(t)]} \overline{\Phi^+(t)} + b_1(t) \overline{c_1[\alpha(t)]} \overline{\Phi^+[\alpha(t)]} + c_1(t) \overline{c_1[\alpha(t)]} \overline{\Phi^-(t)} + \overline{c_1[\alpha(t)]} d_1(t) \overline{\Phi^-[\alpha(t)]} = \overline{c_1[\alpha(t)]} f(t). \quad (7)$$

Далее, умножив обе части равенства (1) на  $\overline{d_1[\alpha(t)]}$ , а затем в полученном равенстве осуществив переход к комплексно сопряженным значениям и замену  $t$  на  $\alpha(t)$ , получаем



$$\begin{aligned} & \overline{a_1[\alpha(t)]d_1(t)\Phi^+[\alpha(t)]} + \overline{b_1[\alpha(t)]d_1(t)\Phi^+(t)} + \overline{c_1[\alpha(t)]d_1(t)\Phi^-[\alpha(t)]} + \\ & + \overline{d_1[\alpha(t)]d_1(t)\Phi^-(t)} = \overline{d_1(t)f[\alpha(t)]}. \end{aligned} \quad (8)$$

Наконец, исключая  $\Phi^-[\alpha(t)]$  из системы двух равенств (7) и (8), будем иметь:

$$\theta(t)\overline{\Phi^+(t)} + \theta_2(t)\overline{\Phi^-(t)} + \nu(t)\overline{\Phi^+[\alpha(t)]} = \overline{f_1(t)}, \quad (9)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \overline{b_1(t) \cdot c_1[\alpha(t)] - a_1[\alpha(t)]d_1(t)}, \\ f_1(t) &= \overline{c_1[\alpha(t)]f(t) - d_1(t)f[\alpha(t)]}. \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условий (2) и (6) краевое условие (1) искомой задачи  $K_4$  можно переписать в виде (9).

Совершенно аналогичными рассуждениями нетрудно установить, что если выполняются условия

$$a_1(t) \neq 0, b_1(t) \neq 0, \quad (10)$$

то краевое условие (1) искомой задачи  $K_4$  равносильно следующему равенству:

$$\theta_1(t)\overline{\Phi^+(t)} + \overline{\theta[\alpha(t)]\Phi^-(t)} - \nu(t)\overline{\Phi^-[\alpha(t)]} = \overline{f_2(t)}, \quad (11)$$

где принято обозначение:

$$f_2(t) = \overline{a_1[\alpha(t)]f(t) - b_1(t)f[\alpha(t)]}.$$

**Замечание 1.** Здесь важно отметить, что функции  $\theta(t)$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  и  $\nu(t)$  связаны между собой следующими тождествами (см., например, [1, с. 104]):

$$\theta(t) \cdot \overline{\theta[\alpha(t)]} - \nu(t) \cdot \overline{\nu[\alpha(t)]} = \theta_1(t) \cdot \theta_2(t), \quad (12)$$

$$\theta_1(t) = \overline{\theta_1[\alpha(t)]}, \quad \theta_2(t) = \overline{\theta_2[\alpha(t)]}. \quad (13)$$

В монографии Г.С. Литвинчука [1] задача  $K_4$  (в случае произвольного контура Ляпунова  $L$  и выполнения условий ее нетеровости) полностью исследована лишь при следующих четырех предположениях:

- 1)  $\alpha(t)$  – прямой сдвиг контура  $L$ ,  $\theta(t) \neq 0$ ,  $\theta_1(t) \equiv 0$ ,  $\theta_2(t) \equiv 0$ ,  $\nu(t) \neq 0$ ;
- 2)  $\alpha(t)$  – прямой сдвиг контура  $L$ ,  $\theta(t) \neq 0$ ,  $\theta_1(t) \neq 0$ ,  $\theta_2(t) \equiv 0$ ,  $\nu(t) \neq 0$  или  $\theta(t) \neq 0$ ,  $\theta_1(t) \equiv 0$ ,  $\theta_2(t) \neq 0$ ,  $\nu(t) \neq 0$ ;
- 3)  $\alpha(t)$  – обратный сдвиг контура  $L$ ,  $\theta(t) \equiv 0$ ,  $\theta_1(t) \neq 0$ ,  $\theta_2(t) \neq 0$ ,  $\nu(t) \neq 0$ ;
- 4)  $\alpha(t)$  – прямой или обратный сдвиг контура  $L$ ,  $\theta(t) \neq 0$ ,  $\theta_1(t) \neq 0$ ,  $\theta_2(t) \neq 0$  и  $\nu(t) \equiv 0$ .

Как видно из равенств (10) и (14) во всех указанных выше случаях 1)–4) искомая четырехэлементная краевая задача  $K_4$  «вырождается» в хорошо известные двухэлементные краевые задачи. Поэтому представляет интерес исследовать нетеровую задачу  $K_4$  в

невырожденных случаях, например, при следующих более общих предположениях:

а)  $\alpha(t)$  – прямой сдвиг контура  $L$ ,  $\theta(t) \neq 0$ ,  $\theta_2(t) \neq 0$ , а  $\theta_1(t)$ ,  $\nu(t)$  – произвольные функции, удовлетворяющие на  $L$  условию Гельдера и тождествам (12), (13);

б)  $\alpha(t)$  – прямой или обратный сдвиг контура  $L$ ,  $\theta(t) \neq 0$ ,  $\theta_1(t) \neq 0$ ,  $\theta_2(t) \neq 0$ , а  $\nu(t)$  – произвольная функция, удовлетворяющая на  $L$  условию Гельдера и тождеству (12).

Основной целью настоящей заметки является разработка конструктивного метода решения краевой задачи  $K_4$  и построение картины ее разрешимости при указанных выше предположениях а).

**2. Метод решения задачи  $K_4$  в случае, когда  $\alpha(t)$  – прямой сдвиг контура  $L$ ,  $\theta(t) \neq 0$ ,  $\theta_2(t) \neq 0$ , а  $\theta_1(t)$ ,  $\nu(t)$  – произвольные функции, удовлетворяющие на  $L$  условию Гельдера и тождествам (12), (13).** В этом случае краевое условие (1) задачи  $K_4$  равносильно равенству (9). Но равенство (9) есть краевое условие трехэлементной краевой задачи типа задачи Римана относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  с линией скачков  $L$ . Для решения трехэлементной краевой задачи (9) будем пользоваться методом сопряжения аналитических функций, разработанным в монографии [2] (см. также [3]). А именно, сначала равенство (9), переходя к комплексно сопряженным значениям и разделив обе части в полученном равенстве на  $\overline{\theta(t)}$ , перепишем в виде

$$\Phi^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t) + g_1(t), \quad (14)$$

где приняты следующие обозначения:

$$G_1(t) = -\left(\frac{\theta_2(t)}{\theta(t)}\right), g_1(t) = -\left(\frac{\nu(t)}{\theta(t)}\right)\overline{\Phi^+[\alpha(t)]} + \left(\frac{f_1(t)}{\theta(t)}\right). \quad (15)$$

Далее предположим временно, что  $g_1(t)$  – известная функция. Тогда равенство (14) представляет собой краевое условие обычной задачи Римана (задачи сопряжения) относительно кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ , исчезающей на бесконечности.

Пусть  $\chi_1 = \text{Ind} G_1(t)$  – индекс задачи Римана (14), а  $X_1(z) = \{X_1^+(z), X_1^-(z)\}$  – каноническая функция. Тогда, как известно (см., например, [1, с. 46; 4, с. 112]), если индекс  $\chi_1 \geq 0$ , то задача Римана (14) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать формулами:

$$\Phi^\pm(z) = X_1^\pm(z) \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\nu(\tau)}{\theta(\tau)}\right) \frac{\overline{\Phi^+[\alpha(\tau)]}}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{f_1(\tau)}{\theta(\tau)}\right) \frac{1}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + P_{\chi_1-1}(z) \right\}, z \in T^\pm, \quad (16)$$

где  $P_{\chi_1-1}(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_{\chi_1} z^{\chi_1-1}$  – многочлен степени не выше  $\chi_1 - 1$  с произвольными комплексными коэффициентами. Если же  $\chi_1 < 0$ , то для

разрешимости задачи Римана (14) необходимо и достаточно выполнение  $-\chi_1$  условий вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\left( \frac{v(t)}{\theta(t)} \right)} \overline{\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{X_1^+(\tau)}} \cdot t^{k-1} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\left( \frac{f_1(t)}{\theta(t)} \right)} \overline{\frac{t^{k-1}}{X_1^+(\tau)}} dt, \quad k = 1, 2, \dots, -\chi_1. \quad (17)$$

При выполнении условий (17) задача Римана (14) имеет единственное решение, которое также задается формулой (16), где нужно положить  $P_{\chi_1-1}(z) \equiv 0$ .

В свою очередь, в силу формул Сохоцкого-Племеля (см., например, [4, с. 38; 5, с. 55]) и с учетом обозначений (15), из формулы (16) получаем

$$\Phi^+(t) = -\frac{1}{2} \overline{\left( \frac{v(t)}{\theta(t)} \right)} \overline{\Phi^+[\alpha(t)]} - \frac{X_1^+(t)}{2\pi i} \int_L \left\{ \frac{1}{X_1^+(\tau)} \overline{\left( \frac{v(\tau)}{\theta(\tau)} \right)} \overline{\Phi^+[\alpha(\tau)]} \right\} \frac{d\tau}{\tau-t} + Q_1^+(t), \quad t \in L, \quad (18)$$

где

$$Q_1^+(t) = \frac{1}{2} \overline{\left( \frac{f_1(t)}{\theta(t)} \right)} + \frac{X_1^+(t)}{2\pi i} \int_L \left\{ \frac{1}{X_1^+(\tau)} \overline{\left( \frac{f_1(\tau)}{\theta(\tau)} \right)} \right\} \frac{d\tau}{\tau-t} + X_1^+(t) P_{\chi_1-1}(t).$$

Заметим, что в силу соотношений (см., например, [4, с. 40]):

$$\Phi^\pm(t) = \pm \frac{1}{\pi i} \int \frac{\Phi^\pm(\tau) d\tau}{\tau-t}, \quad t \in L, \quad (19)$$

и учитывая, что  $\alpha(t)$  – прямой сдвиг контура Ляпунова  $L$  и  $\overline{d\tau} = \overline{\tau^{1/2}(\sigma)} d\tau$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi^\pm[\alpha(t)] &= \pm \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\Phi^\pm[\alpha(\tau)] \alpha'(\tau) d\tau}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}, \quad t \in L, \\ \overline{\Phi^\pm[\alpha(t)]} &= \mp \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\overline{\Phi^\pm[\alpha(\tau)] \alpha'(\tau) \tau^{1/2}(\sigma)}}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} d\tau, \quad t \in L. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь, подставив в правой части (18) вместо  $\overline{\Phi^+[\alpha(t)]}$  ее значение из (20), а затем произведя несложные преобразования, получаем

$$\Phi^+(t) + \int_L n^+(t, \tau) \cdot \overline{\Phi^+[\alpha(\tau)]} d\tau = Q_1^+(t), \quad t \in L, \quad (21)$$

где учтено, что  $\overline{d\tau} = \overline{\tau^{1/2}(\sigma)} d\tau$  и

$$\begin{aligned} n^+(t, \tau) &= -\frac{X^+(t)}{2\pi i} \cdot q_1(t, \tau) - \frac{1}{2\pi i} \frac{X^+(t)}{X^+(\tau)} \overline{\left( \frac{v(\tau)}{\theta(\tau)} \right)} \cdot \overline{k(t, \tau)}, \\ q_1(t, \tau) &= \left\{ \frac{1}{X_1^+(t)} \overline{\left( \frac{v(t)}{\theta(t)} \right)} - \frac{1}{X_1^+(\tau)} \overline{\left( \frac{v(\tau)}{\theta(\tau)} \right)} \right\} \frac{\overline{\alpha'(\tau)}}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}, \quad k(t, \tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{\overline{\tau^{1/2}(\sigma)}}{\overline{\tau} - \overline{t}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Покажем, что ядро  $n^+(t, \tau)$  является фредгольмовым, то есть  $n^+(t, \tau) \in H_*(L \times L)$ . Действительно, так как  $\alpha'(\tau) \in H(L)$  и  $\frac{1}{X_1^+(t)} \overline{\left( \frac{v(t)}{\theta(t)} \right)} \in H(L)$ , то ядро  $q_1(t, \tau) \in H_*(L \times L)$  (см., например, [5, §7]). Кроме того, известно (см., например, [1, с. 36]), что если  $\alpha'(\tau) \in H(L)$  и  $L$  – контур Ляпунова, то ядра

$$k_1(t, \tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}, \quad k_2(t, \tau) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\overline{\tau'^2(\sigma)}}{\overline{\tau - t}}$$

являются фредгольмовыми, то есть  $k_1(t, \tau), k_2(t, \tau) \in H_*(L \times L)$ . Но, так как  $k(t, \tau) = k_1(t, \tau) + k_2(t, \tau)$ , то  $k(t, \tau) \in H_*(L \times L)$ . Следовательно, из формулы (22) следует, что  $n^+(t, \tau) \in H_*(L \times L)$ .

Наконец, заменив в уравнении (21) (в выражении под знаком интеграла)  $\tau$  на  $\alpha(\tau)$ , будем иметь:

$$(N_1 \Phi^+)(t) \equiv \Phi^+(t) + \int_L \overline{n_1(t, \tau)} \cdot \overline{\Phi^+(\tau)} d\tau = Q_1^+(t), \quad t \in L, \quad (23)$$

где принято обозначение:

$$n_1(t, \tau) = \overline{n^+[t, \alpha(\tau)]} \cdot \alpha'(\tau).$$

Таким образом, при сделанных выше предположениях а), уравнение (18) равносильно интегральному уравнению типа Фредгольма (23), теория которого хорошо известна (см., например, [5, §111]).

Введем в рассмотрение однородное интегральное уравнение

$$(N_1' \psi)(t) \equiv \psi(t) + \int_L n_1(\tau, t) \cdot \overline{\psi(\tau)} d\tau = 0, \quad t \in L, \quad (24)$$

союзное с уравнением (22) (см. [5, с. 365]).

Как известно (см., например, [5, с. 370]), для разрешимости неоднородного уравнения (23) необходимо и достаточно выполнение следующих  $m_1$  условий:

$$\operatorname{Re} \int_L Q_1^+(t) \psi^\mu(t) dt = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, m_1, \quad (25)$$

где  $\psi^\mu(t)$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, m_1$ , — полная система линейно независимых (над полем  $\mathbf{R}$ ) решений однородного уравнения (24).

**Замечание 2.** Важно отметить, что при  $\chi_1 \geq 0$  некоторые из условий (25) можно удовлетворять за счет определенного выбора значений произвольных постоянных, входящих в выражение функции  $Q_1^+(t)$ .

При выполнении условий (25) общее решение неоднородного уравнения (23) можно задавать формулой (см. также [5, с. 372]):

$$\Phi^+(t) = Q_1^+(t) + \int_L \overline{\gamma_1(t, \tau)} \cdot \overline{Q_1^+(\tau)} d\tau + \sum_{\mu=1}^{m_1} \beta_\mu \Phi_\mu^+(t), \quad t \in L, \quad (26)$$

где  $\gamma_1(t, \tau)$  — обобщенная резольвента уравнения (23),  $\Phi_\mu^+(t)$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, m_1$ , — полная система линейно независимых (над полем  $\mathbf{R}$ ) решений однородного интегрального уравнения

$$(N_1 \Phi^+)(t) = 0,$$

а  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_1}$  — произвольные действительные постоянные.

В свою очередь, заменив в формуле (26)  $t$  на  $\alpha(t)$ , а затем переходя к комплексно сопряженным значениям, будем иметь:

$$\overline{\Phi^+[\alpha(t)]} = \overline{Q_1^+[\alpha(t)]} + \int_L \gamma_1\{\alpha(t), \tau\} \cdot Q_1^+(\tau) d\tau + \sum_{\mu=1}^{m_1} \beta_\mu \overline{\Phi_\mu^+[\alpha(t)]}. \quad (27)$$

Наконец, подставив в правую часть (16) вместо  $\overline{\Phi^+[\alpha(t)]}$  ее значение, определяемое формулой (27), находим все решения искомой краевой задачи  $K_4$ , то есть все кусочно аналитические функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ , удовлетворяющие краевому условию (9) (или, что то же самое, условию (1)).

Итак, из приведенных выше рассуждений вытекает следующий результат.

**Теорема 1.** *Если  $\theta(t) \neq 0$ ,  $\theta_2(t) \neq 0$  и индекс  $\chi_1 \geq 0$ , то для разрешимости задачи  $K_4$  необходимо и достаточно выполнение  $m_1$  условий вида (25), при выполнении которых общее решение задачи  $K_4$  можно задавать формулами (16), где  $\overline{\Phi^+[\alpha(t)]}$  определяется по формуле (27). Если же  $\theta(t) \neq 0$ ,  $\theta_2(t) \neq 0$  и индекс  $\chi_1 < 0$ , то для разрешимости задачи  $K_4$  необходимо и достаточно выполнение  $m_1$  условий вида (25) и  $-\chi_1$  условий (17), при выполнении которых общее решение задачи  $K_4$  можно задавать формулами (16), где нужно положить  $P_{\chi_1-1}(z) \equiv 0$ , а  $\overline{\Phi^+[\alpha(t)]}$  по-прежнему определяется по формуле (27).*

### Литература

1. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
2. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
3. Расулов К.М. Об одном методе конструктивного решения четырехэлементной краевой задачи типа Римана в классах аналитических функций // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции. СПб., 2004. С. 71-76.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

**N.N. Bogdanova, K.M. Rasulov**  
Smolensk State University

### ABOUT THE SOLUTION OF THE FOUR-ELEMENT REGIONAL PROBLEM LIKE CARLEMAN'S PROBLEM FOR ANALYTICAL FUNCTIONS IN ANY ONE-COHERENT AREAS

**Keywords:** *analytic function, four-element boundary value problem of Carleman type, Carleman shift, Fredholm type equation, Noetherian conditions.*

**Abstract.** *In this article, by the method of conjugation of analytic functions it is established that the solution of the problem under consideration in non-degenerate cases can be reduced to a sequential solution of the usual scalar Riemann problem for analytic functions and a definite integral equation of Fredholm type. Formulas are given that make it possible to find a general solution of this problem. In the course of the study, constructive algorithms for solving and solvability conditions for the four-element boundary value problem under consideration in non-degenerate cases under direct shear of the contour were obtained. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem are established, determined by the index of the corresponding scalar Riemann problem and by the solvability conditions of the resulting integral equation of Fredholm type.*

**А.Н. Божко**

*Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана*

УДК 004.94

## **МИНИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕСТОВ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА СБОРКИ СЛОЖНЫХ ИЗДЕЛИЙ**

*Ключевые слова: сборка, автоматизация проектирования, геометрическая разрешимость, геометрическая проверка, упорядоченное множество, правильная окраска.*

*В статье рассматривается минимизация числа геометрических проверок на разрешимость при сборке сложных изделий. Это важная и актуальная задача современных интегрированных САД / САМ-систем. Дано формальное и точное описание фрагментов конструкции, в которых проверка на разрешимость является необходимой и корректной. Формализовано свойство геометрической наследственности. Задача минимизации числа проверок сформулирована как математическая игра двух лиц: ЛПП и природы. Эта игра заключается в окраске упорядоченного множества в два цвета. Рассмотрен важный класс упорядоченных множеств – *n*-элементные цепи. Для упорядоченных множеств этого типа предложены две чистые стратегии рациональной окраски. Получены точные выражения для числа ходов стратегии одностороннего сканирования и дихотомической стратегии.*

**1. Постановка задачи.** Геометрия изделия – это фундаментальное конструктивное свойство, от которого в значительной степени зависит поведение изделия в процессе сборки, ремонта и эксплуатации. При сборке сложной технической системы конфигурация изделия постоянно усложняется. Если при установке первой и второй деталей геометрические ограничения не являются критическими, то для всех последующих операций необходимо учитывать возможные геометрические препятствия, которые усложняют или запрещают перемещение элементов сборочного процесса (деталей, комплектующих, сборочных единиц и др.) в служебное положение. В отечественных публикациях это необходимое условие реализации проектных решений сборочного этапа принято называть геометрической разрешимостью или доступом [1; 2]. В англоязычных исследованиях, посвященных Computer aided assembly planning (автоматизации проектирования сборочных процессов), – Geometric obstacles (геометрические препятствия) [3].

Геометрическую разрешимость сборочных операций можно рассматривать как важный частный случай общей проблемы геометрической разрешимости компьютерных сцен. Задана конфигурация сцены в  $n$ -мерном пространстве (чаще всего,  $n = 2,3$ ). В общем случае эта сцена может состоять из статических и подвижных объектов. Требуется переместить выбранный элемент сцены из стартовой позиции в финальную, избегая столкновений с другими объектами.

Эта простая по своей вербальной формулировке задача имеет множество важнейших приложений. Например, разработка промышленных симуляторов и компьютерных игр, программирование станков с ЧПУ и роботов-манипуляторов, автоматизация проектирования промышленных изделий, компьютерное моделирование физических процессов, автоматизированный синтез сложных органических соединений, компьютерное моделирование хирургических операций и др. В настоящее время методы анализа геометрической разрешимости сцен интенсивно развиваются. В англоязычных публикациях данное направление современной информатики называется Collision detection (анализ столкновений) [4].

К сожалению, задача геометрической разрешимости сборочных операций, в общем случае, не может быть эффективно решена универсальными методами анализа столкновений. Назовем основные причины.

Во-первых, высокая геометрическая сложность сцены, которую образует собранный фрагмент изделия. Главными источниками сложности являются большое число компонентов (изделия машиностроения могут состоять из нескольких тысяч комплектующих), полноценная трехмерная геометрия деталей, наличие корпуса, плотный

монтаж конструктивных элементов, жесткие ограничения на свободу перемещений и допустимых положений составных частей, высокая точность позиционирования и др.

Во-вторых, в классической задаче анализа столкновений конфигурация геометрических препятствий (статических и динамических) – это априорная информация. При проектировании процессов сборки сложных изделий информация о геометрических препятствиях может отсутствовать или быть неполной. В самом деле, конфигурация собранного фрагмента зависит от выбранной последовательности сборки, а данное проектное решение, в свою очередь, определяется геометрическими связями между деталями.

**2. Геометрические ситуации.** Проверка на геометрическую разрешимость не может быть выполнена для произвольной конфигурации сцены. В общем случае необходимым условием корректности такого теста является определенность пространственного расположения статической и динамической частей сцены. При сборке технических систем требования к геометрической координации еще более жесткие. Для этого требуется, чтобы все элементы тестируемого фрагмента были собраны, то есть находились в служебном положении, заданном трехмерной геометрической моделью или комплектом сборочных чертежей.

В [5] дано точное определение и формальное описание свойства внутренней геометрической координации деталей изделий. Совокупности деталей, которые обладают этим свойством, называются  $s$ -множествами. Механическая структура таких совокупностей деталей описывается  $s$ -гиперграфами.  $S$ -гиперграф – это гиперграф, который можно преобразовать в точку при помощи последовательности стягиваний ребер степени 2.

Приведем основные формулировки. Пусть  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$  – множество деталей изделия.

**Определение 1.** Кортеж  $(A, x)$  называется геометрической ситуацией, если множества  $A$  и  $A \cup \{x\}$  являются  $s$ -множествами.

Геометрическая ситуация представляет собой математическое описание элементарной части сборочного процесса, для которой проверка на геометрическую разрешимость является осмысленной и необходимой. Во-первых, в геометрической ситуации  $(A, x)$  левый элемент  $A$ , является  $s$ -множеством. Это скоординированное множество деталей, которое может содержать геометрические препятствия, запрещающие продолжение сборочного процесса. Во-вторых, объединение  $A \cup \{x\}$  также представляет собой  $s$ -множество. Это значит, что  $A$  содержит конструкторские базы, которые дают возможность установки детали  $x$ .



**Определение 2.** Ситуацию  $(A, x)$  назовем разрешенной, если существует движение, которое переводит деталь  $x$  в служебное положение в изделии, то есть реализует  $s$ -множество в пространстве. В противном случае ситуация называется запрещенной.

**Утверждение 1.** Если ситуация  $(A, x)$  является разрешенной, то любая ситуация  $(B, x)$  такая, что  $B \subseteq A$  также является разрешенной.

Действительно, если  $s$ -множество  $A$  не содержит геометрических препятствий для установки детали  $x$ , то их не может быть в меньшем по составу собираемом множестве  $B$ .

**Утверждение 2.** Если ситуация  $(A, x)$  является запрещенной, то любая ситуация  $(B, x)$  такая, что  $A \subseteq B$  является запрещенной.

В самом деле, если  $s$ -множество  $A$  включает в себя геометрические препятствия, запрещающие установку  $x$  в служебное положение, то новые детали не могут их устранить.

На рисунке 1а показана простая конструкция и две геометрические ситуации: разрешенная (б) и запрещенная (в).

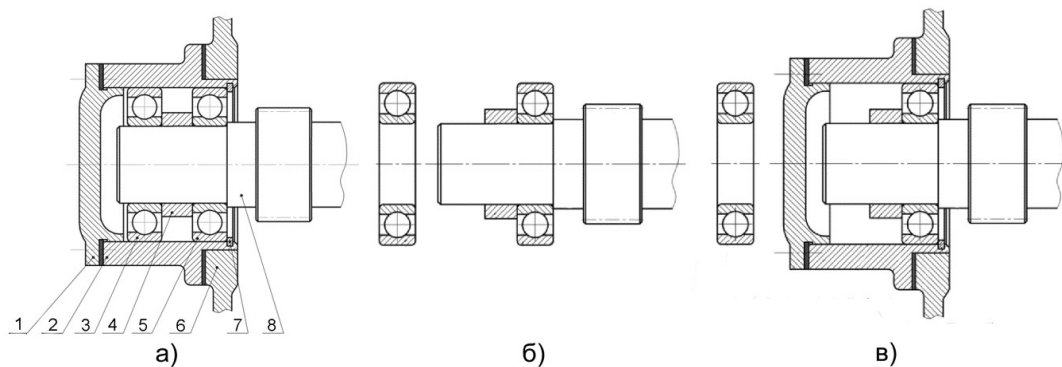


Рис. 1. Простая конструкция (а) и две геометрические ситуации: разрешенная (б) и запрещенная (в)

**3. Теоретико-игровая модель анализа геометрической разрешимости.** Анализ геометрической разрешимости при сборке сложных технических изделий можно сформулировать как игровую задачу, а для минимизации числа геометрических проверок использовать развитые методы теории игр и принятия решений в условиях неопределенности.

Пусть  $X$  есть некоторое изделие. Обозначим  $GS(x)$  – множество всех геометрических ситуаций, связанных с установкой некоторой детали  $x \in X$ . Введем на  $GS(x)$  порядковое отношение следующим способом  $\forall g_1 = (A, x)$  и  $g_2 = (B, x) \in GS(x) \ g_1 = (A, x) \leq g_2 = (B, x) \leftrightarrow A \subseteq B$ .

Отношение нестрогого порядка на множестве ситуаций  $GS(x)$  порождает теоретико-множественное включение их левых частей. Данное упорядоченное множество обозначим  $(GS(x), \leq)$ .

Вершины упорядоченного множества  $(GS(x), \leq)$ , отвечающие разрешенным ситуациям, назовем белыми и будем изображать белыми

кружками. Вершины, соответствующие запрещенным ситуациям, назовем черными и будем изображать черными кружками. Неопределенные ситуации, в которых проблема геометрического доступа еще не решена, назовем неокрашенными (нераскрытыми) и будем представлять квадратами черного цвета.

Используя метафору цвета, приведенные выше утверждения 1 и 2 можно сформулировать следующим образом. Пусть в диаграмме Хассе упорядоченного множества  $(GS(x), \leq)$  вершина, описывающая геометрическую ситуацию  $g \in GS(x)$ , окрашена белым цветом. Тогда все элементы главного идеала  $I(g) = \{p \in GS(x) | p \leq g\}$ , порожденного вершиной  $g$ , должны быть белыми. Если  $g$  – черная, то все вершины главного фильтра  $F(g) = \{r \in GS(x) | r \geq g\}$ , порожденного вершиной  $g$ , должны быть черными.

Утверждения 1 и 2 позволяют поставить задачу анализа геометрической разрешимости как неантагонистическую игру двух лиц: ЛПР и природы. Приведем правила данной игры. Дано неокрашенное упорядоченное множество. Ход ЛПР заключается в выборе неокрашенной вершины  $g$ , ответ природы заключается в выборе цвета для этой вершины. Если цвет белый, то все вершины порядкового идеала  $I(g)$  вершины  $g$  получают белый цвет. Если природа «выбрала» черный цвет, то все вершины порядкового фильтра  $F(g)$  окрашиваются черным цветом. Требуется окрасить все вершины упорядоченного множества за минимальное число ходов.

Ход природы подразумевает выполнение некоторого геометрического теста (совокупности тестов), по результатам которого устанавливается возможность или невозможность монтажа детали  $x$  на собранный фрагмент изделия  $A$ , то есть разрешимость ситуации  $(A, x)$ . В описанной игровой модели не оговаривается содержание теста. Это может быть как автоматическая проверка, выполненная методами анализа столкновений, так и геометрическая экспертиза, реализованная человеком. Важно, что рациональная стратегия окрашивания позволяет решить задачу минимизации числа прямых геометрических проверок.

#### **4. Характеризация правильных окрасок упорядоченных множеств.**

**Определение 3.** Окраску упорядоченного множества, порожденную главными фильтрами и главными идеалами некоторого множества вершин, назовем правильной.

На рисунке 2а показаны все возможные правильные окраски простого порядка, на рисунке 2б изображен пример неправильной окраски.

В описанной игровой модели правильная окраска упорядоченных множеств порождалась алгоритмически заданием последовательности неокрашенных вершин и выбором цвета для каждой из них.

Представляет интерес точная характеристика правильно окрашенных упорядоченных множеств.

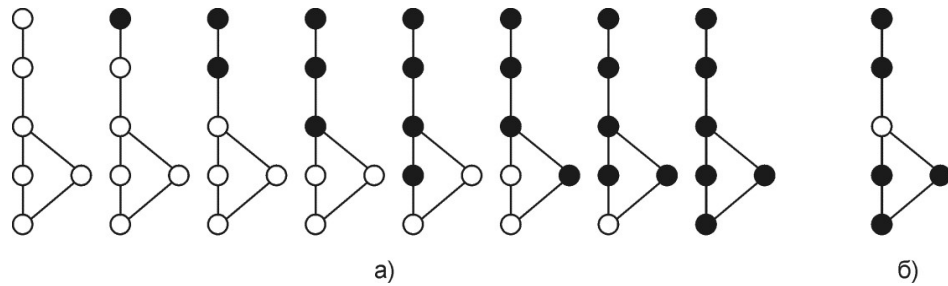


Рис. 2. Правильные (а) и неправильная (б) окраски упорядоченного множества

Пусть  $(GS(x), \leq)$  – правильно окрашенное упорядоченное множество, всем вершинам которого присвоен белый или черный цвет. Обозначим  $W$  – совокупность вершин белого цвета, а  $B$  – совокупность вершин черного цвета. Эти совокупности задают разбиение множества  $GS(x)$  на два класса, то есть  $W \cup B = GS(x), W \cap B = \emptyset$ .

**Теорема 1.** *Окраска упорядоченного множества  $(GS(x), \leq)$  является правильной тогда и только тогда, когда для любых  $b \in B$  и  $w \in W$  справедливо  $b \leq w$  или  $b \parallel w$  ( $w$  и  $b$  несравнимы).*

**Доказательство.** Начнем с необходимости и предположим, что в некоторой правильной окраске существуют две вершины  $w$  и  $b$  такие, что  $w \geq b$ . Поскольку эти вершины сравнимы, то по определению правильной окраски либо  $b \in I(w)$  и тогда вершина  $b$  – белая, либо  $w \in (b)$  и тогда вершина  $w$  – черная.

Покажем достаточность. Множество вершин  $(GS(x), \leq)$  делится на два непересекающихся подмножества белых  $W$  и черных  $B$  вершин таких, что  $W \cup B = GS(x), W \cap B = \emptyset$ . Обозначим  $M = \{m_i\}_{i=1}^k$  – множество всех минимальных элементов из  $B$ . Множество  $M$  не является пустым, поскольку любое конечное упорядоченное множество имеет по крайней мере один минимальный элемент [6]. Одна из возможных окрасок множества черных вершин  $B$  получается объединением фильтров, порождаемых минимальными элементами этого множества, то есть  $B = \bigcup_{i=1}^k F(m_i)$ .

Пусть  $P = \{p_i\}_{i=1}^r$  – совокупность максимальных элементов множества белых вершин  $W$ . Очевидно, что  $P \neq \emptyset$ , поскольку любое конечное упорядоченное множество имеет хотя бы один максимальный элемент [6]. Правильная окраска множества  $W$  создается объединением идеалов всех его максимальных элементов  $W = \bigcup_{i=1}^r I(p_i)$ .

Согласно исходному предположению, фильтры (идеалы) множества  $B$  ( $W$ ) наследуют это свойство и в объемлющем множестве  $(GS(x), \leq)$ . Поэтому одна из возможных правильных окрасок множества порождается  $\bigcup_{i=1}^k F(m_i) \bigcup_{j=1}^r I(p_j)$  – объединением фильтров

минимальных вершин множества  $B$  и идеалами максимальных элементов множества  $W$ . Теорема доказана.

Пусть  $R$  – произвольное упорядоченное множество. Обозначим игру по окрашиванию порядка  $R$  в два цвета –  $\Gamma(R)$ . Рассмотрим решение таких игр для важного частного случая, когда  $R$  является цепью.

Пусть  $C_n$  – цепь, имеющая  $n$  элементов. Обозначим  $Z_n$  множество всех  $n$ -элементных правильно окрашенных цепей,  $|Z_n| = n+1$ . На рисунке 3 показано семейство  $Z_9$ , состоящее из всевозможных окрашенных девятиэлементных цепей.

**5. Стратегии игры  $\Gamma(C_n)$ .** Рассмотрим стратегию одностороннего сканирования  $s$ . Она заключается в следующем. На очередном шаге игры из всех неокрашенных вершин ЛПР выбирает наибольшую (наименьшую). На рисунке 3 ходы ЛПР обозначены числами от 1 до 9, а правильные окраски цепей – числами от 1 до 10. Так цепь под номером 1 окрашивается за один ход, для цепи 10 необходимо сделать 9 ходов.

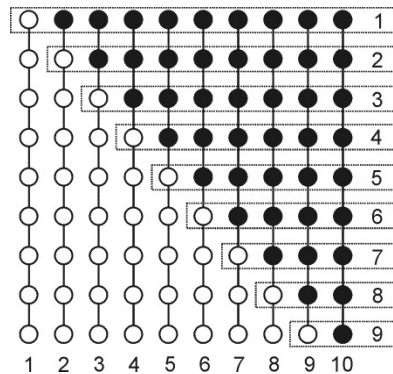


Рис. 3. Одностороннее сканирование для  $C_9$

Легко подсчитать, что для окраски семейства для расцветки  $Z_n$  при помощи одностороннего сканирования ЛПР должен сделать  $W(s,n) = \frac{n(n+1)}{2} + n$  ходов.

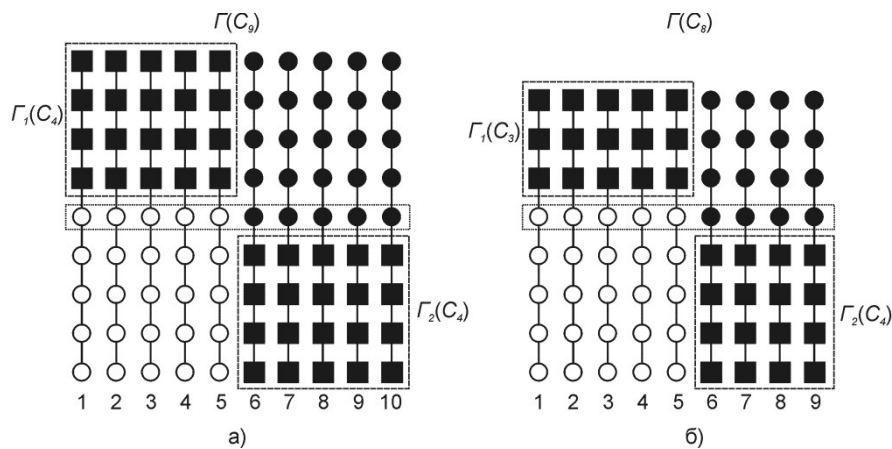


Рис. 4. Разложение игр  $\Gamma(C_9)$  (а) и  $\Gamma(C_8)$  (б) после первого хода ЛПР в дихотомической стратегии

Рассмотрим дихотомическую стратегию ЛПР. В этой стратегии каждый ход заключается в выборе вершины из середины неокрашенного интервала цепи. Данная стратегия имеет очевидное обоснование, поскольку при любом ответе второго игрока половина неокрашенного интервала получит цвет.

Пусть ЛПР и природа сделали свои первые ходы. Тогда игру  $\Gamma(C_n)$  можно разложить на две подыгры меньшей  $q$  размерности:  $\Gamma_1(C_{\frac{n}{2}})$  и  $\Gamma_2(C_{\frac{n}{2}-1})$ , если  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ;  $\Gamma_1(C_{\frac{n-1}{2}})$  и  $\Gamma_2(C_{\frac{n-1}{2}})$ , если  $n \equiv 1 \pmod{2}$ . На рисунке 4 приведен первый ход ЛПР в дихотомической стратегии и разложение игр.

Обозначим через  $W(d, n)$  – количество проверок, которые необходимо сделать ЛПР для окраски всех цепей семейства  $Z_n$  в дихотомической стратегии. Пусть ЛПР и природа сделали первые ходы. Тогда в силу разложения игры  $\Gamma(C_n)$  общее число проверок (ходов)  $W(d, n)$  равняется сумме необходимых проверок в партиях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  и числа проверок на первом ходу, которое равняется  $n + 1$ . Из этого следуют два рекуррентных соотношения:

$$W(d, n) = W(d, \frac{n}{2}) + W(d, \frac{n}{2} - 1) + n + 1 \text{ для } n \equiv 0 \pmod{2};$$

$$W(d, n) = 2W(d, \frac{n-1}{2}) + n + 1 \text{ для } n \equiv 1 \pmod{2},$$

при следующих начальных условиях:  $W(d, 1) = 2$ ;  $W(d, 2) = 5$ ,  $W(d, 3) = 4$ ,  $W(d, 4) = 12$ .

Разрешая эту рекуррентность, получаем следующее выражение для числа ходов ЛПР в дихотомической стратегии  $d$  игры  $\Gamma(C_n)$ :

$$W(d, n) = (n + 1) \times (p + 2) - 2^{p+1},$$

где  $p = \lceil \log_2 n \rceil$ .

Легко видеть, что  $W(d, n) < W(s, n)$  для всех  $n > 4$ . Более того, в [6] показано, что дихотомическая стратегия является лучшей стратегией среди всех чистых стратегий окраски  $n$ -элементной цепи.

### Выводы

1. Для автоматизации проектирования сборки сложных технических систем необходимо разработать инструменты анализа геометрических связей деталей в изделии.

2. Проверку на геометрическую разрешимость имеет смысл только для координированных фрагментов конструкции. В статье такие фрагменты называются геометрическими ситуациями.

3. Формализовано свойство геометрической наследственности для ситуаций.

4. Показано, что задача минимизации числа прямых тестов на разрешимость может быть поставлена как неантагонистическая игра двух лиц  $\Gamma(R)$ , которая заключается в окрашивании упорядоченного

множества за минимальное число шагов. Игры  $\Gamma(R)$  – это новый тип математических игр.

5. Предложены две чистые стратегии для игр типа  $\Gamma(C_n)$ , где  $C_n$  –  $n$ -элементная цепь. Получены точные выражения числа ходов ЛПР для двух чистых стратегий разыгрывания игр  $\Gamma(C_n)$ .

### Литература

1. Божко А.Н. Геометрическая разрешимость трехмерных сцен // Вестник МГТУ. 2013. № 3(92). С. 76 – 89.

2. Божко А.Н. Методы анализа геометрической разрешимости при сборке изделий // Интернет-журнал НАУКОВЕДЕНИЕ. 2016. Том 8, № 5. DOI:10.15862/82TVN516.

3. Bahubalendruni R., Biswal B. A review on assembly sequence generation and its automation // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. P. C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2015. DOI:10.1177/0954406215584633.

4. Ericson Christer. Real-Time Collision Detection. Elsevier, 2005. 593 p.

5. Божко А.Н. Моделирование механических связей изделия // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 3. Режим доступа: <http://technomag.neicon.ru/doc/168373.html> (дата обращения: 03.03.015).

6. Гуров С.И. Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки. Определения, свойства, примеры. М.: Либроком, 2013. 352 с.

**A.N. Bozhko**

Bauman Moscow State Technical University

### MINIMIZATION OF GEOMETRICAL TESTS FOR COMPUTER AIDED ASSEMBLY PLANNING OF COMPLEX PRODUCTS

**Keywords:** *assembly, computer aided design, geometric obstacles, geometric verification, ordered sets, correct coloring.*

**Abstract.** *The paper considers minimization of the number of geometric tests for solvability in the assembly of complex products. This is an important and urgent task of modern integrated CAD / CAM-systems. A formal and precise description of the fragments of the construction is given in which the solvability test is necessary and correct. The property of geometric heredity is formalized. The problem of minimizing the number of tests is formulated as a mathematical game of two persons: the LPR and nature. This game consists in coloring an ordered set in two colors. An important class of ordered sets is considered –  $n$ -element chains. For ordered sets of this type, two pure strategies of rational coloring are proposed. Exact expressions for the number of moves of the one-sided scanning strategy and the dichotomous strategy are obtained.*



## ОБ ОДНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Ключевые слова: *сингулярное интегральное уравнение, метод аналитического продолжения, задача линейного сопряжения, задача «о скачке», интеграл типа Коши, формулы Сохоцкого.*

В статье авторы исследуют на разрешимость в пространстве  $L^2[-a, a]$  сингулярное интегральное уравнение  $\lambda \cdot f(x) - \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt = g(x)$ ,  $-a < x < a$  и решают его методом аналитического продолжения.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\lambda \cdot f(x) - \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt = g(x), \quad -a < x < a, \quad (1)$$

где  $0 < a \leq +\infty$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Предположим, что функция  $g(x)$   $H$ -непрерывна на отрезке  $[-a, a]$ . Решение уравнения (1) будем искать в пространстве  $L^2[-a, a]$ . Как известно, оператор

$$(Sf)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt \quad (2)$$

ограниченно действует из  $L^2[-a, a]$  в  $L^2[-a, a]$ . В силу равенства

$$\left( \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{1}{x-t} \right) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{1}{t-x} \quad (3)$$

оператор (2) – самосопряженный. Поэтому его спектр – компактное множество, лежащее в  $\mathbb{R}$ . Наша цель – исследовать на разрешимость уравнение (1) и решить его методом аналитического продолжения. С этой целью введем новую неизвестную функцию

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-a, a], \quad F(\infty) = 0, \quad (4)$$

аналитическую вне отрезка  $[-a, a]$ . При  $z \rightarrow x \in (-a, a)$  сверху и снизу она всюду имеет предельные значения, для которых имеют место формулы Сохоцкого:

$$\begin{cases} F^+(x) - F^-(x) = f(x), \\ F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt. \end{cases} \quad (5)$$

С помощью этих формул перепишем уравнение (1) в виде следующей задачи линейного сопряжения

$$\lambda [F^+(x) - F^-(x)] - [F^+(x) + F^-(x)] = g(x), \quad -a < x < a. \quad (6)$$

При  $\lambda = 1$  и при  $\lambda = -1$  мы имеем задачу об аналитическом продолжении  $F^-(x) = -\frac{1}{2}g(x)$  и  $F^+(x) = -\frac{1}{2}g(x)$  соответственно с нижнего и верхнего берега разреза  $(-a, a)$ . Такая задача, как известно, разрешима не при любой функции  $g(x)$ . Поэтому обе точки  $\lambda = \pm 1$  принадлежат спектру оператора (2).

Пусть теперь  $\lambda \neq \pm 1$ . Перепишем задачу (6) в виде:

$$(\lambda - 1)F^+(x) - (\lambda + 1)F^-(x) = g(x), \quad -a < x < a, \quad F(\infty) = 0. \quad (7)$$

Наиболее простым для исследования является случай  $a = +\infty$ , так как в этом случае контур  $[-\infty, +\infty]$  разбивает плоскость  $\mathbb{C}$  на две связные компоненты. Для решения уравнения

$$\lambda \cdot f(x) - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt = g(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (8)$$

введем в (7) новую неизвестную функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} (\lambda - 1)F(z), & \text{Im } z > 0, \\ (\lambda + 1)F(z), & \text{Im } z < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда задача (7) переходит в задачу «о скачке»:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = g(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (10)$$

Задача (10) имеет единственное решение, которое выражено интегралом типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{t-z} dt.$$

Используя (9), имеем:

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\Phi(z)}{(\lambda - 1)}, & \text{Im } z > 0, \\ \frac{\Phi(z)}{(\lambda + 1)}, & \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

Отсюда по первой из формул (5) находим единственное решение интегрального уравнения (8)

$$f(x) = F^+(x) - F^-(x) = \frac{1}{\lambda - 1} \Phi^+(x) - \frac{1}{\lambda + 1} \Phi^-(x) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[ \lambda g(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt \right]. \quad (11)$$



Итак, спектр преобразования Гильберта  $\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt$  состоит из двух точек  $\lambda = \pm 1$ , каждой из которых соответствует бесконечномерное пространство собственных функций. При  $\lambda \neq \pm 1$  уравнение (8) разрешимо безусловно и его единственное решение дается формулой (11). При  $\lambda = 1$  собственными функциями являются функции, аналитически продолжимые в нижнюю полуплоскость, а при  $\lambda = -1$  — в верхнюю.

Пусть теперь  $0 < a < +\infty$ . Тогда задача (7) будет задачей Римана на разомкнутой кривой с краевым условием:

$$F^+(x) = \frac{\lambda+1}{\lambda-1} F^-(x) + \frac{g(x)}{\lambda-1}, \quad -a < x < a. \quad (12)$$

Так как коэффициент этой задачи  $\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$  постоянный, то индекс коэффициента равен нулю. Поэтому картина разрешимости задачи (12) зависит только от асимптотики искомого решения при  $z \rightarrow +a$  и при  $z \rightarrow -a$ . Будем сначала искать решения, имеющие интегрируемые особенности при  $z \rightarrow \pm a$ . Потом из этих решений (если они существуют) будем пытаться выделить те, которые принадлежат  $L^2[-a, a]$ . С этой целью сначала факторизуем коэффициент  $\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$  задачи (12), то есть найдем решение следующей краевой задачи

$$\chi_0^+(x) = \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \chi_0^-(x), \quad -a < x < a, \quad \chi_0(\infty) = 1. \quad (13)$$

Будем искать решение, которое нигде вне отрезка  $[-a, a]$  не обращается в нуль. Тогда, логарифмируя равенство (13) приходим к задаче «о скачке»:

$$\ln \chi_0^+(x) - \ln \chi_0^-(x) = \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1}, \quad -a < x < a, \quad \ln \chi_0(\infty) = 0,$$

где ветвь логарифма выбрана так, что  $0 \leq \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} < 2\pi$ . Решение этой задачи находим в виде интеграла типа Коши:

$$\ln \chi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \cdot \ln \frac{z-a}{z+a}.$$

Отсюда находим

$$\chi_0(z) = \left( \frac{z-a}{z+a} \right)^{\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1}}, \quad \chi_0(\infty) = 1. \quad (14)$$

Если  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $\lambda^2 > 1$ , то  $\arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = 0$ . Тогда функция  $\chi_0(z)$  ограничена при  $z \rightarrow \pm a$ . Факторизуя с помощью  $\chi_0(x)$  коэффициент задачи (12), приходим к задаче «о скачке»:

$$\frac{F^+(x)}{\chi_0^+(x)} - \frac{F^-(x)}{\chi_0^-(x)} = \frac{1}{\lambda - 1} \frac{g(x)}{\chi_0^+(x)}, \quad -a < x < a. \quad (15)$$

Решая ее с помощью интеграла типа Коши, найдем

$$\frac{F(z)}{\chi_0(z)} = \frac{1}{(\lambda - 1)2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(t)}{\chi_0^+(t)} \frac{dt}{t - z},$$

откуда получаем единственное решение задачи (12)

$$F(z) = \frac{\chi_0(z)}{(\lambda - 1)2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(t)}{\chi_0^+(t)} \frac{dt}{t - z}. \quad (16)$$

В этом случае уравнение (1) безусловно разрешимо при любой правой части. Решение его можно найти по первой из формул (5). Получаем:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[ \lambda g(x) + \frac{\chi_0^+(x)}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(t)}{\chi_0^+(t)} \frac{dt}{t - x} \right], \quad -a < x < a. \quad (17)$$

Пусть теперь  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $-1 < \lambda < 1$ . Тогда  $\arg \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = \pi$ .

Однородная задача

$$\chi_1^+(x) = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \chi_1^-(x), \quad -a < x < a, \quad \chi_1(\infty) = 0,$$

в классе функций интегрируемых вблизи точек  $\pm a$ , имеет одно линейно независимое решение:

$$\chi_1(z) = \left( \frac{\chi_0(z)}{z - a} \right) = (z - a)^{\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} - 1} \cdot (z + a)^{-\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}}.$$

Асимптотика этого решения такова:  $\chi_1(z) \asymp \frac{1}{\sqrt{z + a}}$  при  $z \rightarrow \pm a$  и

$\chi_1(z) \asymp \frac{1}{z}$  при  $z \rightarrow \infty$ . Эта функция лежит в пространстве  $L^1[-a, a]$ , но не лежит в  $L^2[-a, a]$ . Таким образом, при  $\lambda \in (-1; 1)$  собственных функций у уравнения в пространстве  $L^2[-a, a]$  не существует. Для решения неоднородной задачи при  $-1 < \lambda < 1$  факторизуем коэффициенты задачи (12) с помощью функции  $\chi_0(z)$ . Тогда получим решение, даваемое формулой (16). Оно ограничено при  $z \rightarrow a$  и имеет асимптотику  $\frac{1}{\sqrt{z + a}}$  при  $z \rightarrow -a$ , т.е. не лежит в  $L^2$ . Чтобы обеспечить принадлежность решения пространству  $L^2[-a, a]$ , надо подчинять функцию (16) дополнительному условию

$$\int_{-a}^a \frac{g(t)}{\chi_0^+(t)} \frac{dt}{t + a} = 0. \quad (18)$$

Таким образом, любые значения  $\lambda \in [-1; 1]$  принадлежат спектру уравнения (1), но при  $\lambda \in (-1; 1)$  собственных функций в  $L^2[-a, a]$  у него

нет. Предположим теперь, что  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Тогда  $\arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$  можно выбрать так, что  $0 < \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} < \pi$  при  $\text{Im } \lambda < 0$  и  $\pi < \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} < 2\pi$  при  $\text{Im } \lambda > 0$ . В этом случае, так как спектр самосопряженного оператора всегда вещественный, собственных функций у оператора (2) нет, остается только найти аналитическое выражение для решения. С этой целью факторизуем коэффициент задачи (12) с помощью следующей функции:

$$\chi_2(z) = \left( \frac{\chi_0(z)}{z-a} \right) = (z-a)^{\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} - 1} \cdot (z+a)^{-\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1}},$$

имеющей интегрируемые особенности при  $z \rightarrow \pm a$  и исчезающей при  $z \rightarrow \infty$ . Тогда получим следующую задачу «о скачке»:

$$\frac{F^+(x)}{\chi_2^+(x)} - \frac{F^-(x)}{\chi_2^-(x)} = \frac{g(x)}{(\lambda-1)\chi_2^+(x)}, \quad -a < x < a, \quad \frac{F(z)}{\chi_2(z)} = O(1) \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Решение этой задачи дается интегралом типа Коши

$$\frac{F(z)}{\chi_2(z)} = C + \frac{1}{(\lambda-1)2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(x)}{\chi_2^+(x)} \frac{dx}{x-z}.$$

Откуда

$$F(z) = \chi_2(z) \left[ C + \frac{1}{(\lambda-1)2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(x)}{\chi_2^+(x)} \frac{dx}{x-z} \right]. \quad (19)$$

Чтобы из него получить решения, лежащие в  $L^2[-a, a]$ , учтем, что одно из чисел  $\frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ ,  $1 - \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$  больше  $\frac{1}{2}$ , а другое – меньше  $\frac{1}{2}$ .

Предположим сначала, что  $0 < \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} < \frac{1}{2}$ . Тогда  $\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} < 1$ .

В этом случае в окрестности точки  $z = -a$  функция  $\chi_2(z)$  суммируема с квадратом, а в точке  $z = a$  – нет. Тогда надо в формуле (19) подобрать константу  $C$  так, чтобы при  $z \rightarrow a$  выражение в квадратных скобках обращалось в нуль. Получаем

$$C = -\frac{1}{(\lambda-1)2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(x)}{\chi_2^+(x)} \frac{dx}{x-a}.$$

Тогда решение неоднородной задачи преобразуется к виду:

$$F(z) = \frac{\chi_2(z)}{\lambda-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(x)}{\chi_2^+(x)} \left[ \frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-a} \right] dx = \frac{\chi_2(z)}{2\pi i(\lambda-1)} \int_{-a}^a \frac{g(x)}{\chi_2^+(x)} \frac{z-a}{x-a} \frac{dx}{x-z}.$$

Решение интегрального уравнения (1) будет следующее:

$$f(x) = F^+(x) - F^-(x) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[ \lambda g(x) + \frac{\chi_2^+(x)}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(t)}{\chi_2^+(t)} \frac{x-a}{t-a} \frac{dt}{t-x} \right].$$

Пусть теперь  $\frac{1}{2} < \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} < 1$ . Тогда  $0 < 1 - \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} < \frac{1}{2}$ . В этом случае в формуле (19) нужно «занулить» квадратную скобку при  $z \rightarrow -a$ . Тогда получим

$$F(z) = \frac{\chi_2(z)}{\lambda-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(t)}{\chi_2^+(t)} \left[ \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+a} \right] dt = -\frac{\chi_2(z)}{(\lambda-1)2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(t)}{\chi_2^+(t)} \frac{z+a}{t+a} \cdot \frac{dt}{t-z}.$$

Преобразуем решение интегрального уравнения (1):

$$f(x) = F^+(x) - F^-(x) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[ \lambda g(x) + \frac{\chi_2^+(x)}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{g(t)}{\chi_2^+(t)} \frac{x+a}{t+a} \frac{dt}{t-x} \right].$$

### Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977 640 с.

**O.B. Dolgopolava, E.I. Zverovich**  
Belarus State University

### ABOUT A SINGULAR INTEGRAL EQUATION

**Keywords:** *singular integral equation, analytic continuation method, linear conjugation problem, jump problem, integral of Cauchy type, Sokhotskii formula*

**Abstract.** *In the article the authors investigate the singular integral equation  $\lambda \cdot f(x) - \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt = g(x)$ ,  $-a < x < a$  for solvability in space  $L^2[-a, a]$  and solve it by the method of analytic continuation.*

**Г.С. Евдокимова**

*Смоленский государственный университет*

УДК 519.2

### ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВИРТУАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

**Ключевые слова:** *система с ограничением, входящий поток, периодический параметр, порядок поступления, эргодические свойства, распределение виртуального времени.*

*В настоящей работе системы с ограничением рассматриваются как системы с неограниченной очередью, в которых время занятости канала обслуживанием каждого требования зависит от его времени ожидания. Это обстоятельство дает возможность применить методы изучения простой очереди к исследованию систем с*

*ограничением и получить необходимое и достаточное условие существования предельного распределения виртуального времени ожидания при довольно общих предположениях относительно входящего потока, времени обслуживания и вида ограничений.*

Теория массового обслуживания распространила свое влияние последовательно на вопросы организации производства, ядерной физики, транспорта, связи, эксплуатации вычислительных машин, организации медицинского обслуживания и многие другие. Расширение областей применения привело к значительному возрастанию возникающих проблем и к их качественному разнообразию.

Большинство систем массового обслуживания работают в условиях переменной загрузки, поэтому результаты, полученные для случая постоянных параметров, можно применять к ним лишь с большими натяжками. В первую очередь представляют интерес системы с периодическими параметрами. Поэтому одной из актуальных задач теории массового обслуживания является изучение систем с переменными параметрами [1].

В работе [2] исследовалась система массового обслуживания с неограниченной очередью при следующих условиях. Входящий поток предполагался пуассоновским с периодическим параметром, время обслуживания каждого требования – не зависящим от времени обслуживания других требований, входящего потока и состояния системы в момент прихода данного требования. В этих условиях было найдено необходимое и достаточное условие существования предельного распределения виртуального времени ожидания.

Пусть  $S$  есть одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью, на которую поступает пуассоновский поток потребителей с параметром  $\lambda(t)$ , являющимся периодической функцией времени с периодом  $\tau$ . Время  $\xi_n$ , на которое  $n$ -ое требование занимает канал обслуживания, не зависит от входящего потока и поведения системы до момента его прибытия, коль скоро фиксировано время ожидания этого требования  $\omega_n$ . Считается заданной функция  $H(x, y) = P\{\xi_n \leq x / \omega_n = y\}$ , которую будем называть условной функцией распределения времени занятости канала обслуживанием требования.

Исследуем условия существования предельного режима в системе  $S$ , предполагая, что требования поступают на обслуживание в порядке их прибытия.

Сначала рассмотрим вложенную цепь Маркова, а затем с помощью теории восстановления найдем условия существования предельного распределения для процесса, описывающего состояние системы в произвольно выбранный момент времени  $t$ .

Введем случайный процесс  $\omega_t$ , положив  $\omega_t = 0$ , если в момент  $t$  в системе нет потребителей, поступивших ранее, если же такие потребители имеются, то положим  $\omega_t$  равным времени с момента  $t$  до того момента, когда все они покинут систему.

Пусть

$$F_t(x) = P\{\omega_t \leq x\}.$$

Основной результат настоящей работы содержится в следующем утверждении.

**Теорема.** Если для условного распределения  $H(x, y)$  существуют функция распределения  $H(x)$  и функция распределения  $\alpha(x)$  такие, что для любых  $x$  и  $y > 0$

$$H(x, y) \geq H(x) \text{ и } \int_0^{\infty} (1 - H(x)) dx < \infty,$$

для некоторого  $y_0$  и всех  $x$  и всех  $y \geq y_0$

$$H(x, y) \geq \alpha(x) \text{ и } \lambda \int_0^{\infty} (1 - \alpha(x)) dx < 1 \quad (\lambda = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \lambda(t) dt < \infty),$$

то распределение  $F_t(x)$  можно представить в виде

$$F_t(x) = A_t(x) + B_t(x),$$

где  $A_t(x)$  является периодической функцией  $t$  с периодом  $\tau$ , а  $B_t(x) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Распределение  $A_t(x)$  не зависит от начального состояния и является невырожденным.

Доказательство опирается на следующие леммы.

**Лемма 1.** Для системы  $M(t)/G/1/\infty$  с периодическим входящим потоком верно следующее: если  $\lambda \int_0^{\infty} (1 - H(x)) dx < 1$ , то для любых начальных условий с вероятностью единица найдется такой момент времени  $n\tau$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), в который нет ни одного требования в системе. В противном случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega_{n\tau} = 0\} = 0.$$

Для доказательства наряду с потоком требований, поступающих в систему, рассмотрим еще два потока, которые сконструируем следующим образом. Все требования первого из этих потоков поступают лишь в моменты  $n\tau$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), причем в момент  $n\tau$  поступает столько требований, сколько для истинного потока поступает в полусегменте  $(n-1)\tau < t \leq n\tau$ . Второй поток получается из истинного путем сдвига моментов поступления требований на величину  $\tau$ .

Обозначим через  $\Phi(\Delta)$  число событий истинного входящего потока на множестве моментов времени. Соответствующие функции для вновь сконструированных потоков обозначим символами  $\Phi'(\Delta)$  и  $\Phi''(\Delta)$ .

Обозначения штрих и волнистую черту сохраним в дальнейшем и для других характеристик введенных систем. Так, например, если  $t_k$  означает момент поступления  $k$ -го по порядку требования истинного потока, то  $t'_k$  и  $\tilde{t}_k$  – моменты поступления  $k$ -х требований для этих новых потоков. Для доказательства леммы потребуется доказать два утверждения

**Утверждение 1.** Для каждого  $k \geq 1$  с вероятностью единица

$$t_k + \omega_{k1} \leq t'_k + \omega'_{k1} < t_k + \omega_{k1} + \tau.$$

**Утверждение 2.** Для каждого  $n > 0$  с вероятностью единица

$$\Psi'(n\tau) \leq \Psi'(n\tau - \mathbf{0}) + \Phi'(\{n\tau\}),$$

$$\Psi'((n+1)\tau - \mathbf{0}) \leq \Psi'(n\tau),$$

$$\Psi(n\tau) \leq \Psi'(n\tau),$$

где  $\Psi(t)$  – число требований, находящихся в системе в момент  $t$ .

**Лемма 2.** Для системы  $M(t)/G/1/\infty$  с ограничением при выполнении условия теоремы верно утверждение леммы 1.

Эта лемма позволяет доказывать теорему в предположении, что в начальный момент времени система свободна от требований. Обозначим через  $E$  событие, заключающееся в том, что  $\omega_{n\tau} = \mathbf{0}$ . Тогда  $E$  является рекуррентным событием, кроме того, оно непериодическое и достоверное.

Действительно, в силу того, что входящий поток пуассоновский, найдется такое  $\delta > 0$ , что

$$P\{\omega_{(n+1)\tau} = \mathbf{0} / \omega_{n\tau} = \mathbf{0}\} > \delta > 0,$$

а на основании леммы 2 получаем соотношение  $\sum_{l=1}^{\infty} f_l = 1$ , где  $f_l$  – вероятность того, что событие  $E$  после своего наступления впервые появится через  $l$  шагов. Пусть

$$v_l = P\{\omega_{l\tau} = \mathbf{0}\} \text{ и } \mu_1 = \sum_{l=1}^{\infty} l f_l$$

**Лемма 3.** В условиях теоремы и при выполнении для некоторого  $x_0 < \infty$  неравенства

$$\overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} P\{w_{l\tau} < x_0\} > 0 \quad (1)$$

имеем  $\mu_1 < \infty$ .

**Доказательство.** Из (1) следует, что найдутся  $\varepsilon > 0$  и подпоследовательность номеров  $(l_1, l_2, \dots)$  таких, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{\omega_{(l_k)\tau} < x_0\} > \varepsilon. \quad (2)$$

Так как поток требований пуассоновский, то найдутся такие числа  $k_0$  и  $\delta > 0$ , что

$$P\{\omega_{(l_k+k_0)\tau} = \mathbf{0} / \omega_{(l_k)\tau} < x_0\} > \delta > 0.$$

Отсюда и из (2) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{\omega_{(l_k+k_0)\tau} = 0\} > \varepsilon \delta > 0,$$

т.е.  $\lim_{l \rightarrow \infty} v_l > 0$ .

Так как  $E$  – непериодическое достоверное событие, то, как показано в [3], существует предел

$$\lim_{l \rightarrow \infty} v_l = v \text{ и } v = 1/\mu_1.$$

Поэтому ввиду последнего неравенства получаем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} v_l = v > 0 \text{ и } \mu_1 < \infty.$$

**Лемма 4.** В условиях теоремы имеем

$$\mu_1 < \infty. \quad (3)$$

**Доказательство.** Если (1) выполняется, то (3) следует из леммы 3. Пусть (1) не имеет места, т.е. при любом  $x < \infty$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P\{\omega_{(l)\tau} \leq x\} = 0 \quad (4)$$

и  $y_0$  выбрано таким большим, что  $H(x, y) \geq \alpha(x)$  для всех  $y \geq y_0$ .

Так как

$$M[\omega_{(l+1)\tau} - \omega_{l\tau} / \omega_{l\tau} \leq y] \leq \lambda \tau \max \left( \int_0^\infty (1-H(x)) dx, \int_0^\infty (1-\alpha(x)) dx \right),$$

$$M[\omega_{(l+1)\tau} - \omega_{l\tau} / \omega_{l\tau} > y] \leq \tau \left( \lambda \int_0^\infty (1-\alpha(x)) dx - 1 \right),$$

то в условиях теоремы при  $n \geq N$ ,  $M[\omega_{(l+1)\tau} - \omega_{l\tau}] = 0$ , что противоречит (4). Следовательно,  $\mu_1 < \infty$ .

Введем обозначения

$$F_l(x) = P\{\omega_{l\tau} \leq x/\omega_{(l-1)\tau} \neq 0, \dots, \omega_{\tau} \neq 0, \omega_0 = 0\},$$

$$f_l^n = P\{\omega_{(n-1)\tau} \neq 0, \dots, \omega_{(n-l+1)\tau} \neq 0, \omega_{(n-l)\tau} = 0\},$$

$$F_n^* = P\{\omega_{n\tau} \leq x; \omega_{s\tau} \neq 0, s = \overline{1, n-1}\}.$$

Теперь докажем теорему. Пользуясь сначала формулой полной вероятности, а затем стационарностью процесса, можно записать цепочку равенств

$$\begin{aligned} P\{\omega_{n\tau} \leq x\} &= \sum_{l=1}^n P\{\omega_{n\tau} \leq x/\omega_{(n-1)\tau} \neq 0, \dots, \omega_{(n-l)\tau} = 0\} \cdot P\{\omega_{(n-1)\tau} \neq 0, \dots, \omega_{(n-l+1)\tau} \neq 0, \\ &\quad \omega_{(n-l)\tau} = 0\} + P\{\omega_{n\tau} \leq x; \omega_{s\tau} \neq 0, s = \overline{1, n-1}\} = \\ &= \sum_{l=1}^n P\left\{\omega_{l\tau} \leq \frac{x}{\omega_{(l-1)\tau}} \neq 0, \dots, \omega_{\tau} \neq 0, \omega_0 = 0\right\} \cdot P\{\omega_{(n-1)\tau} \neq 0, \dots, \omega_{(n-l+1)\tau} \neq 0, \\ &\quad \omega_{(n-l)\tau} = 0\} + P\{\omega_{n\tau} \leq x; \omega_{s\tau} \neq 0, s = \overline{1, n-1}\}. \end{aligned}$$

Согласно введенным обозначениям



$$F_{n\tau}(x) = \sum_{l=1}^n F_l(x) f_l^n + F_n^s.$$

Отсюда следует, как легко убедиться, опираясь на лемму 2 и лемму 4, что существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n\tau}(x)$ , который состоит из двух функций: из периодической функции распределения и из некоторой функции, стремящейся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Теорема доказана для моментов времени  $n\tau$ . Для любого момента  $s \in (0, \tau)$  доказательство аналогичное.

### Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005. 400 с.
2. Евдокимова Г.С. О распределении длительности ожидания в случае периодического входящего потока // Известия АН. Техническая кибернетика. 1974. № 3. С. 58–63.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. 498 с.

**G.S. Evdokimova**

Smolensk State University

### THE LIMITING DISTRIBUTION OF THE VIRTUAL TIME-OUT

**Keywords:** *the system of restriction, incoming flow, periodic parameter, the procedure of admission, ergodic properties, the distribution of virtual time.*

**Abstract.** *In this paper, constrained systems are treated as systems with an unrestricted queue in which the free / busy time of a channel to service each requirement depends on its time-out. This circumstance makes it possible to apply the methods of studying the simple queue to the study of systems with restrictions and to obtain the necessary and sufficient condition for the existence of the limit distribution of virtual waiting time with fairly General assumptions about the incoming flow, maintenance time and the type of restrictions.*

**Е.П. Емельченков**

Смоленский государственный университет

УДК 514.14 + 514.16 + 513.015.3 + 519.1

### ГЕОМЕТРИИ НАД АЛГЕБРАМИ ТИПА <3>. КЛАССИФИКАЦИЯ

Ключевые слова: *инцидентностная структура с параллельностью, аффинная частичная тернарная структура, частичная алгебра типа <3>.*

Предлагается вариант алгебраической классификации инцидентностных структур с параллельностью, допускающих координатизацию с помощью частичных алгебр типа  $\langle 3 \rangle$ . В основу классификации положена классификация частичных алгебр типа  $\langle 3 \rangle$ . Для классификации выбраны алгебраические свойства, имеющие простую геометрическую интерпретацию. Пять алгебраических свойств для классификации алгебр типа  $\langle 3 \rangle$  предложены впервые.

Приведем необходимые определения.

*Определение 1.* Частичная алгебра  $A = \langle A; T \rangle$  с носителем  $A$  и частичной тернарной операцией  $T$  называется *PT-алгеброй*.

*Пример 1.* Частичная тернарная алгебра  $\langle R; S \rangle$ , где  $R$  – множество действительных чисел, а  $S(a, b, c)$  – функция, вычисляющая площадь треугольника со сторонами  $a, b, c$ , является *PT-алгеброй*.

*Определение 2.* Система  $\langle P, L; I, \parallel \rangle$  называется *аффинной инцидентностной структурой (AI-структурой)*, если  $P \cap L = \emptyset$ ,  $I \subset P \times L$ ,  $\parallel$  – отношение эквивалентности на множестве  $L$ .

Элементы множества  $P$  называются *точками*, элементы множества  $L$  – *прямыми*, отношение  $I$  – *отношением инцидентности*, отношение  $\parallel$  – *отношением параллельности*.

Множество  $L$  разбивается отношением  $\parallel$  на классы эквивалентности. Элементы фактор-множества  $L / \parallel$  называются *направлениями*. Направление, содержащее прямую  $L$ , обозначим  $\Pi_L$ . Прямую направления  $\Pi_L$ , которой инцидентна точка  $p$  (в случае единственности такой прямой), обозначим  $p\Pi_L$ .

*Определение 3.* AI-структура  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ , называется *аффинной частичной тернарной структурой* или *APT-структурой*, если существует такое направление  $\Pi_1$ , что

(APT1) Для любой точки  $p$  существует единственная прямая  $L$  из направления  $\Pi_1$ , проходящая через  $p$ ;

(APT2) Любая прямая направления  $\Pi_1$  пересекает любую прямую, не принадлежащую направлению  $\Pi_1$ , не более чем в одной точке.

*Пример 2.* Графическое представление *APT-структуры*  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  приведено на рисунке 1.

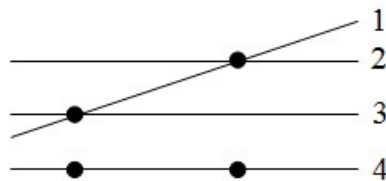


Рис. 1. *APT-структура*  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$

По иллюстрации на рисунке 1 нельзя однозначно определить, как задано отношение параллельности  $\parallel$ . В данном случае отношение  $\parallel$  можно задать, зафиксировав некоторое разбиение множества прямых  $L = \{1, 2, 3, 4\}$  на классы, например, такое:  $\{1\}, \{2, 3, 4\}$ . При таком выборе прямые 2, 3, 4 параллельны друг другу, прямая 1 параллельна только сама себе.

В [1] предложена конструкция, однозначно сопоставляющая каждой  $PT$ -алгебре  $A = \langle A; T \rangle$   $APT$ -структуру.

*Конструкция 1.* Пусть  $A = \langle A; T \rangle$  некоторая частичная тернарная алгебра. Система  $S_A = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ ,

где  $P = \{(a, b) \mid (\exists m, n \hat{I} A) T(m, a, n) = b\}$ ;

$L = \{[m, n] \mid (\exists a, b \hat{I} A) T(m, a, n) = b\} \cup$

$\{[a] \mid (\exists m, n, b \hat{I} A) T(m, a, n) = b\}$ ;

$(a, b) I [m, n] \Leftrightarrow T(m, a, n) = b$ ;

$(a, b) I [c] \Leftrightarrow a = c$ ;

$[a, b] \parallel [c, d] \Leftrightarrow a = c$ ;

$(\forall a, b \in A) [a] \parallel [b]$

является  $APT$ -структурой.

*Определение 4.* Алгебра  $A = \langle A; T \rangle$  с носителем  $A$  и тернарной операцией  $T$  называется  $T$ -алгеброй.

*Определение 5.*  $AI$ -структура  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  называется *аффинной тернарной структурой* или *АТ-структурой*, если существует такое направление  $\Pi_1$ , что

(АТ1) Для любой точки  $p$  существует единственная прямая  $L$  из направления  $\Pi_1$ , проходящая через  $p$ ;

(АТ2) Любая прямая направления  $\Pi_1$  пересекает любую прямую, не принадлежащую направлению  $\Pi_1$ , в одной точке;

(АТ3) Пусть  $n$  – мощность множества точек, инцидентных некоторой прямой. Мощность множества точек произвольной прямой равна  $n$ . Мощность множества прямых в любом направлении  $\Pi$  равна  $n$ . Мощность множества направлений фактор-множества  $L / \parallel$  равна  $n - 1$ .

Число точек инцидентных прямой называется *порядком АТ-структуры*.

*Пример 3.* Графическое представление  $AT$ -структуры  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  приведено на рисунке 2. Классы параллельных прямых на рис. 2 выделены одинаковой штриховкой. В качестве направления  $\Pi_1$  можно выбрать направление  $\Pi_A$ , содержащее прямые  $A, B, C$ .

*Пример 4.* Пусть  $\langle Z_4; +, * \rangle$  – кольцо классов вычетов по модулю 4. Рассмотрим  $T$ -алгебру  $\langle Z_4; T \rangle$ , где  $T(a, b, c) = a * b + c$ . Применяя к  $T$ -алгебре  $\langle Z_4; T \rangle$  конструкцию 1, получим  $AT$ -структуру, отличную от аффинной плоскости.

$AT$ -структуры удается координатизировать [6] с помощью алгебр  $\langle A; T \rangle$  типа  $\langle 3 \rangle$  с тернарной операцией  $T$ .

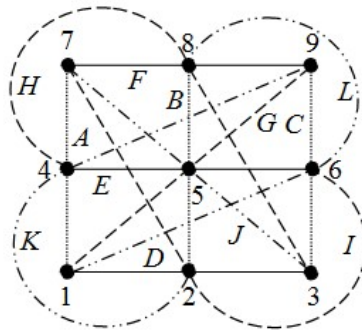


Рис. 2.  $AT$ -структура  $S = \langle P, L; I, || \rangle$

В работе [2] доказано, что с помощью конструкции 1 с каждой  $T$ -алгеброй  $R$  однозначно связывается (ассоциируется) определенная  $AT$ -структура  $S_R$ . Доказано также, что для любой  $AT$ -структуры  $S$  можно подобрать  $T$ -алгебру  $R$  такую, что ассоциированная с  $R$   $AT$ -структура  $S_R$  будет изоморфна  $S$ .

В этом смысле  $AT$ -структуры являются наиболее общими аффинными инцидентностными структурами, допускающими координатизацию с помощью алгебр типа  $\langle 3 \rangle$ .

*Определение 6.* Алгебра  $\langle A; T, 0, 1 \rangle$  типа  $\langle 3, 0, 0 \rangle$  называется  $E$ -алгеброй [3], если

$$(E1) \quad (\forall a, b \hat{\in} A) \quad T(a, 0, b) = T(0, a, b) = b;$$

$$(E2) \quad (\forall a \hat{\in} A) \quad T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a.$$

С каждой  $E$ -алгеброй  $\langle A; T, 0, 1 \rangle$  связывают обычно две бинарные операции: сложение (+) и умножение ( $\cdot$ ):

$$a + b = T(1, a, b),$$

$$a \cdot b = T(a, b, 0).$$

Отмеченная выше связь между алгебрами типа 3 и  $AT$ -структурами позволяет для классификации  $T$ -алгебр использовать геометрические свойства  $AT$ -структур и, наоборот, для классификации  $AT$ -структур использовать алгебраические свойства  $T$ -алгебр.

Мы предлагаем для классификации  $T$ -алгебр воспользоваться некоторым набором алгебраических свойств, имеющих простую геометрическую интерпретацию (см. табл. 1).

Геометрические свойства  $APT$ -структур и  $AT$ -структур, ассоциированные с перечисленными алгебраическими свойствами, подробно рассмотрены в работах [1; 2; 3].

$T$ -алгебры, удовлетворяющие определенным набором свойств из таблицы 1, порождают ассоциированные с ними геометрические структуры. Так, например,  $E$ -алгебра, удовлетворяющая свойствам  $AG1-AG4$ , ассоциируется с плоскостью Грозе.  $E$ -алгебра, удовлетворяющая свойствам  $AS1-AS3$ , ассоциируется с плоскостью

Сандлера. Выяснение зависимостей между группами свойств из таблицы 1 необходимо для создания удовлетворительной классификации  $T$ -алгебр и  $AT$ -структур.

Таблица 1

**Алгебраические свойства, имеющие простую геометрическую интерпретацию**

	Обозначение	$U_i$
	$\exists 0_l$	$(\exists 0_l \hat{A})(\forall a, b \hat{A}) T(0_l, a, b) = b$
	$\exists 0_r$	$(\exists 0_r \hat{A})(\forall a, b \hat{A}) T(a, 0_r, b) = b$
	$\exists 0$	$(\exists 0 \hat{A})(\forall a, b \hat{A}) T(0, a, b) = T(a, 0, b) = b$
	$\exists I_{br}$	$(\exists b, I_{br} \hat{A})(\forall a \hat{A}) T(a, I_{br}, b) = a$
	$\exists I_{bl}$	$(\exists b, I_{bl} \hat{A})(\forall a \hat{A}) T(I_{bl}, a, b) = a$
	$\exists I_b$	$(\exists b, I_b \hat{A})(\forall a \hat{A}) T(I_b, a, b) = T(a, I_b, b) = a$
	$\exists I$	$(\exists I \hat{A})(\forall a \hat{A}) T(I, a, 0) = T(a, I, 0) = a$
	$AG1$	$a + x = b$ однозначно разрешимо относительно $x$
	$AG2$	$x + a = b$ однозначно разрешимо относительно $x$
0	$AG3$	$a \times x = b (a \neq 0)$ однозначно разрешимо относительно $x$
1	$AG4$	$x \times a = b (a \neq 0)$ однозначно разрешимо относительно $x$
2	$AS1$	$T(x, a, b) = c (a \neq 0)$ однозначно разрешимо относительно $x$
3	$AS2$	$T(a, x, b) = c (a \neq 0)$ однозначно разрешимо относительно $x$
4	$AS3$	$T(a, b, x) = c$ однозначно разрешимо относительно $x$

В таблице 1 перечислены лишь самые простые свойства  $T$ -алгебр, которые можно использовать для классификации  $T$ -алгебр и, соответственно, для классификации  $AT$ -структур. При этом свойства 1, 2, 4, 5, 6 для классификации  $PT$ -алгебр и  $T$ -алгебр предложены впервые.

Большой набор дополнительных свойств для классификации  $T$ -алгебр перечислен в обзорах автора [4; 5; 6].

### Литература

1. Емельченков Е.П. Геометрии над алгебрами типа  $\langle 3 \rangle$ . Инцидентностные структуры с параллельностью // Известия Смоленского государственного университета. 2013. № 2 (22). С. 275-282.
2. Емельченков Е.П. Геометрии над алгебрами типа  $\langle 3 \rangle$ . Аффинные тернарные структуры // Известия Смоленского государственного университета. 2013. № 3 (23). С. 365-379
3. Емельченков Е.П. Геометрии над алгебрами типа  $\langle 3 \rangle$ .  $AE$ -структуры // Известия Смоленского государственного университета. 2013. № 4 (24). С. 389-396.
4. Аргунов Б.И., Емельченков Е.П. Инцидентностные структуры и тернарные алгебры // Успехи математических наук. 1982. Т. 37, Вып. 2 (224). С. 3-37.
5. Аргунов Б.И., Емельченков Е.П. Проективные и аффинные плоскости и их обобщения // Геометрия инцидентностных структур и дифференциальных уравнений. Смоленск: Смоленск. гос. пед. ин-т, 1981. С. 3-30.
6. Хубежты И.А., Емельченков Е.П. Проективные плоскости и их обобщения: монография. Владикавказ, Северо-Осетинский гос. ун-т: Изд-во СОГУ, 2003. 345 с.

**Е.Р. Emelchenkov**  
Smolensk State University

## **GEOMETRY OVER ALGEBRAS OF TYPE <3>. CLASSIFICATION**

**Keywords:** *incidence structure with parallelism; affine partial ternary structure; partial algebra of type <3>.*

**Abstract.** *A version of algebraic classification of incidence structures with parallelism is proposed, which allows to coordinate with the help of partial algebras of type <3>. The classification is based on the classification of partial algebras of type <3>. Algebraic properties, which has a simple geometric interpretation, was selected for classification. Five algebraic properties for the classification of algebras of type <3> were proposed for the first time.*

**Э.И. Зверович**  
*Белорусский государственный университет*

УДК 517.948.32: 517.544

## **ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ЕЕ МОДУЛЯ НА КРАЮ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ**

**Ключевые слова:** *область с краем, задача Дирихле, оператор Шварца, многосвязная область, гармонические меры компонент края, интегральная формула Коши.*

*Статья посвящена исследованию проблемы нахождения однозначной аналитической функции по значению ее модуля на краю многосвязной области.*

Пусть  $D$  – область с простым гладким краем  $\partial D$ , причем  $D \cup \partial D \subset \mathbb{C}$ .  
Рассматривается следующая краевая задача. Требуется найти функцию  $f(z)$ , аналитическую в области  $D$  и  $H$ -непрерывно продолжимую на  $\partial D$ , по краевому условию

$$|f(z)| = g(t), \quad t \in \partial D, \quad (1)$$

где  $g(t)$  – заданная на  $\partial D$  положительная  $H$ -непрерывная функция, т.е.  $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ .

В случае, когда  $D$  – односвязная область, решение этой задачи известно (см. [1; 2]). В этом случае она легко сводится к задаче Дирихле для нахождения гармонической функции. Действительно, если ищется

функция, которая не обращается в нуль в области  $D$ , то по теореме о монодромии существует однозначная в области  $D$  аналитическая функция  $\ln f(z)$ . Поэтому, логарифмируя краевое условие (1), получим задачу Дирихле для нахождения гармонической функции

$$\ln|f(z)| = \ln g(t), \quad t \in \partial D. \quad (2)$$

Задача нахождения однозначной аналитической функции  $\ln|f(z)| + i \arg f(z)$  по краевому условию (2) называется *задачей Шварца*, а оператор, дающий решение этой задачи, оператором Шварца  $S$  (см., например, [2, с. 265]). В случае, когда искомая функция  $f(z)$  не обращается в нуль в области  $D$ , общее решение задачи Шварца имеет вид

$$f(z) = e^{i\beta_0} \exp\{S(\ln g(t))(z)\}, \quad z \in D, \quad (3)$$

где  $\beta_0 \in \mathbb{R}$  – произвольная постоянная.

Если предположить, что искомая функция обращается в нуль в некоторых точках области  $D$ , то координаты нулей и их кратности можно задать заранее, например, в виде многочлена  $\prod_{k=1}^n (z - z_k)$ , где все  $z_k \in D$ .

Тогда можно ввести новую неизвестную функцию  $f_1(z) = f(z) \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{-1}$ , которая не обращается в нуль в области  $D$ , и для нее краевое условие принимает вид

$$|f_1(t)| = g(t) \prod_{k=1}^n |t - z_k|^{-1}, \quad t \in \partial D. \quad (4)$$

Решив задачу (4) по формуле (3) и переходя к функции  $f(z)$ , получим общее решение задачи (1) с заданными нулями

$$f(z) = e^{i\beta_0} \prod_{k=1}^n (z - z_k) \exp\left\{S\left(\ln g(t) - \sum_{k=1}^n \ln|t - z_k|\right)(z)\right\}. \quad (5)$$

Это решение в другой форме приведено в [1, с. 317, задача 9].

Рассмотрим теперь задачу (1) в случае, когда  $D$  – многосвязная область. Пусть ее край состоит из  $m+1$  связных компонент  $\partial D = b_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_m$ , причем компонента  $b_0$  охватывает все остальные.

Ориентируется край стандартно ( $b_0$  ориентируется против, а  $b_1, \dots, b_m$  – по часовой стрелке, см. рис. 1).

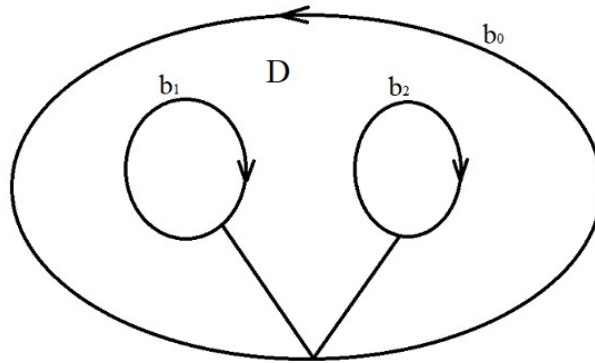


Рис. 1

Если область  $D$  – многосвязная, то приведенное выше решение задачи (1) не проходит по той причине, что в многосвязных областях неверна теорема о монодромии. Например, даже если функция  $f(z)$  аналитична в области  $D$  и нигде не обращается в нуль, то не гарантируется существование однозначной и аналитической в  $D$  функции  $\ln f(z)$ .

Формулы (3) и (5) в случае многосвязной области не дают решения задачи «о модуле», так как их правые части, вообще говоря, многозначны.

Попытаемся решить задачу «о модуле» в многосвязной области за счет ограничений, которые будут наложены на расположение нулей искомой функции. С этой целью возьмем гармонические меры внутренних компонент края области  $D$ , т.е.  $m$  гармонических в  $D$  функций  $\omega_1(z), \dots, \omega_m(z)$ , таких, что

$$\omega_\nu(z) = \begin{cases} 1, & t \in b_\nu, \\ 0, & t \in b_\mu, \mu \neq \nu \end{cases}, \quad \nu = 1, \dots, m,$$

и пусть  $\tilde{\omega}_\nu(z)$  – многозначная функция, гармонически сопряженная к  $\omega_\nu(z)$ .

Таким образом,  $w_\nu(z) = \omega_\nu(z) + i\tilde{\omega}_\nu(z)$ ,  $(\nu = 1, \dots, m)$  – многозначные аналитические функции с однозначными вещественными частями и производными.

Дифференциалы  $dw_\nu(z) = d\omega_\nu(z) + i d\tilde{\omega}_\nu(z)$ ,  $\nu = 1, \dots, m$  однозначны в  $D$ , и соответствующие производные можно представить по интегральной формуле Коши

$$w'_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{dw_\nu(\tau)}{\tau - z}, \quad z \in D, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Зафиксируем точку  $t_0 \in b_0$  и проведем в области  $D$  гладкие разрезы («барьеры»)  $l_1, \dots, l_m$  без общих внутренних точек, соединяющие точку  $t_0$  с остальными компонентами  $b_1, \dots, b_m$  края  $\partial D$ . В результате образуется односвязная область  $\tilde{D} = D \setminus (l_1 \cup \dots \cup l_m)$  (см. рис. 1). По теореме о



монодромии в области  $\tilde{D}$  существует однозначная аналитическая ветвь функции  $\ln(\tau - z)$  от переменного  $z \in \tilde{D}$ , где  $\tau \in \partial D$ . Используя эту ветвь в качестве первообразной, проинтегрируем равенство (6):

$$\begin{aligned} w_\nu(z) &= \int_{t_0}^z dt \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{dw_\nu(\tau)}{\tau - t} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} dw_\nu(\tau) \int_{t_0}^z \frac{dt}{t - \tau} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} dw_\nu(\tau) \cdot \ln(t - \tau) \Big|_{t=t_0}^{t=z} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \ln \frac{z - \tau}{t_0 - \tau} dw_\nu(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \ln \frac{\tau - t_0}{\tau - z} dw_\nu(\tau), \end{aligned}$$

где штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования лежит в области  $\tilde{D}$  (т.е. не пересекает барьеров). Итак, имеем:

$$w_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \ln \frac{\tau - t_0}{\tau - z} dw_\nu(\tau), \quad z \in \tilde{D}, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Выделив здесь вещественные части, получим интегральные представления для гармонических мер компонент  $b_1, \dots, b_m$  края области  $D$ :

$$\omega_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \ln \left| \frac{\tau - t_0}{\tau - z} \right| dw_\nu(z), \quad z \in D, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Вернемся к задаче (1) для  $(m+1)$ -связной области  $D$ . Предположим, что нули неизвестной функции  $f(z)$  расположены в точках  $z_1, \dots, z_n \in D$ , причем каждая точка взята подряд столько раз, какова ее кратность.

Введем новую неизвестную функцию  $f_1(z) = f(z) \prod_{\nu=1}^n \frac{z - t_0}{z - z_\nu}$ , где  $t_0 \in b_0$ .

Подставляя это в (1), получим задачу для нахождения аналитической и не обращающейся в нуль функции  $f_1(z)$ :

$$|f_1(t)| = g(t) \prod_{\nu=1}^n \left| \frac{t - t_0}{t - z_\nu} \right|, \quad t \in \partial D, \quad z_1, \dots, z_n \in D. \quad (8)$$

Для нахождения гармонической функции  $\ln|f_1(z)|$  получаем следующую задачу Дирихле:

$$\ln|f_1(z)| = \ln g(t) + \sum_{\nu=1}^n \ln \left| \frac{t - t_0}{t - z_\nu} \right|, \quad t \in \partial D. \quad (9)$$

Как известно (см. [1; 2]), эта задача однозначно и безусловно разрешима. Теперь запишем условие того, что функция  $\ln|f_1(z)|$  является вещественной частью однозначной аналитической функции [2]:

$$\int_{\partial D} \ln g(t) dw_\nu(t) + \sum_{\nu=1}^n \int_{\partial D} \ln \left| \frac{t - t_0}{t - z_\nu} \right| dw_\nu(t) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Используя представление (7), имеем:

$$\sum_{k=1}^n \omega_{\nu}(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \ln g(t) \cdot dw_{\nu}(t), \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (11)$$

Итак, получилась система из  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными точками  $z_1, \dots, z_n \in D$ . Если эти точки из системы (11) найдены, то решение задачи можно представить в виде

$$f(z) = e^{i\beta_0} n \prod_{\nu=1}^n \frac{z - z_{\nu}}{z - t_0} \exp \left\{ S \left( \ln g(t) + \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{t - t_0}{t - z_k} \right| \right) (z) \right\}.$$

Система (11) очень сложна, так как для гармонических мер в общем случае известны лишь теоремы существования.

### Литература

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 320 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.:Наука, 1977. 640 с.

**E.I. Zverovich**

Belarusian State University

### THE PROBLEM ABOUT FIND ANALYTIC FUNCTION ON MEANING OF ITS MODULUS ON BORDER OF MULTICONNECTED DOMAIN

**Keywords:** *domain with border, problem of Dirichlet, operator of Schwartz, multiconnected domain, harmonic measures of component of border, integral formula of Cauchy.*

**Abstract.** *The autor investigate the problem about find one-valued analytic functions on give meaning her modulus on border of multiconnected domain.*

**А.М. Зуев**

Смоленский государственный университет

УДК 511

### ОБ ОДНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НА МНОЖЕСТВЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Ключевые слова: *операция цифрования, эквивалентные классы, сборник задач ЕГЭ.*

В статье предлагается подход к решению специальных задач олимпиадного типа из сборника задач ЕГЭ. Как известно, к таким задачам относятся задачи № 19 из ЕГЭ профильного уровня. Как правило, именно эти задачи вызывают у экзаменуемых наибольшие затруднения. Поэтому обобщенный подход к их решению может быть интересен как выпускникам школ, так и учителям.

Пусть  $n$  – натуральное число ( $n \in \mathbb{N}$ ). Назовем операцией *цифрования* для числа  $n$  следующую процедуру: находится сумма всех цифр в десятичной записи числа  $n$ , затем находится сумма всех цифр числа, полученного на первом шаге, и так далее. Очевидно, после некоторого числа шагов получаем цифру, причем однозначно определяемую по  $n$ . Обозначим эту цифру  $z(n)$ . Заметим также, что число шагов в операции цифрования не ограничено сверху, если рассматривать ее как операцию над элементами  $\mathbb{N}$ .

Итак, операция цифрования – это унарная операция, сопоставляющая любому натуральному  $n$  цифру  $z(n)$ . Будем называть  $z(n)$  также цифровым номером числа  $n$ .

Назовём два натуральных числа  $n_1$  и  $n_2$  *эквивалентными (по цифрованию)*, если  $z(n_1) = z(n_2)$ , в этом случае будем писать:  $n_1 \sim n_2$ . Очевидно, это действительно эквивалентность в общепринятом смысле, то есть имеет место рефлексивность ( $n \sim n$ ), симметричность ( $n_1 \sim n_2 \Leftrightarrow n_2 \sim n_1$ ) и транзитивность ( $n_1 \sim n_2, n_2 \sim n_3 \Rightarrow n_1 \sim n_3$ ). Как всякая эквивалентность, она разбивает множество  $\mathbb{N}$  на непересекающиеся классы. В данном случае таких классов 9, в каждом из них только одна цифра  $k = 1, 2, \dots, 9$ ; соответствующий класс назовём *классом  $N^{\circ k}$*  ( $k$ -тым классом) и обозначим  $N_k$ . Очевидно,  $z(k) = k$ . Пусть  $G$  – множество этих классов. Покажем, что операция сложения натуральных чисел распространяется на соответствующую операцию на  $G$ .

**Теорема 1.** Если  $n_1 \sim n_2$ ,  $m_1 \sim m_2$ , то  $n_1 + m_1 \sim n_2 + m_2$ .

Доказательство будет приведено ниже.

Из теоремы 1 следует, что если  $n \in N_{k_1}$ , т.е.  $z(n) = k_1$  (или  $n \sim k_1$ ), и  $m \in N_{k_2}$ , то  $m + n \sim z(k_1 + k_2)$ . Таким образом,

$$m + n \sim \begin{cases} k_1 + k_2, & \text{если } k_1 + k_2 \leq 9, \\ k_1 + k_2 - 9, & \text{если } k_1 + k_2 > 9. \end{cases}$$

Тем самым на множестве классов  $G$  введена операция сложения, коммутативная и ассоциативная, с нулём, которым является класс  $N_9$ .

Кроме того, для любого класса  $N_k$  существует противоположный  $N_{\bar{k}}$ ,  $\bar{k}$  определяется из равенства  $z(k + \bar{k}) = 9$ . Например, противоположным для класса  $N_3$  будет класс  $N_6$ , для класса  $N_9$  – класс  $N_9$ . Тем самым операция задаёт на  $G$  абелеву группу и, соответственно, выполняется операция вычитания  $N_{k_1} - N_{k_2} = N_{k_3} \Leftrightarrow k_1 = z(k_2 + k_3)$ . Так,  $N_5 - N_3 = N_2$ ,  $N_3 - N_5 = N_7$  (в данном случае  $3 = z(5 + 7)$ ).

Выясним теперь, какова структура классов из  $G$ . Оказывается, она элементарна, если учесть следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Операция цифрования числа  $n$  равносильна операции нахождения остатка от деления  $n$  на 9: если остаток  $r \neq 0$ , то  $z(n) = r$ , если  $r = 0$ , то  $z(n) = 9$ .*

Пусть  $T(n)$  – функция, заданная на  $N$ , сопоставляющая натуральному числу  $n$  остаток от деления  $n$  на 9. Тогда теорема 2 может быть сформулирована следующим образом:

$$z(n) = \begin{cases} T(n), & \text{если } T(n) \neq 0; \\ 9, & \text{если } T(n) = 0. \end{cases}$$

**Доказательство теоремы 2.** В случае, когда  $n < 10$ , утверждение теоремы очевидно.

Пусть  $n \geq 10$ ,  
 $n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 = a_m (9+1)^m + a_{m-1} (9+1)^{m-1} + \dots + a_1 (9+1) + a_0 =$   
 $= A_1 \cdot 9 + S_1$ , где  $S_1 = a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0$ ,  $A_1 \in N, a_m \neq 0$ .

Пусть  $r$  – остаток от деления  $n$  на 9, тогда он равен остатку от деления  $S_1$  на 9. Пусть, далее,  $S_1 = b_{m_1} 10^{m_1} + b_{m_1-1} 10^{m_1-1} + \dots + b_1 10 + b_0 = A_2 \cdot 9 + S_2$ , где  $S_2 = b_{m_1} + b_{m_1-1} + \dots + b_1 + b_0$ ,  $A_2 \in N, b_{m_1} \neq 0$ . Число  $r$ , то есть остаток от деления  $S_1$  на 9, равен остатку от деления  $S_2$  на 9, причём  $S_2 < S_1$ .

С  $S_2$  проделываем ту же процедуру, что и с  $S_1$ . Через некоторое число шагов  $q$  получаем  $S_q = k$  – цифре. (Не исключено, что  $q = 1$ , то есть уже на первом шаге  $S_1$  является цифрой.) Так как  $S_q$  при делении на 9 имеет тот же остаток, что и при делении  $n$  на 9, то есть  $r$ , то  $S_q = k = 0 \cdot 9 + r$  при  $k < 9$  или  $S_q = k = 9$ , в последнем случае  $r = 0$ . По описанной процедуре  $S_q$  является результатом операции цифрования числа  $n$ , то есть  $S_q = z(n)$ . Итак,  $z(n) = r = T(n)$ , если  $r > 0$ ;  $z(n) = 9$ , если  $r = T(n) = 0$ . Теорема доказана.

Как следствие, получаем структуру класса  $N_k$  из  $G$ : это совокупность всех натуральных чисел вида  $9m + k$ ,  $m \in N \cup \{0\}$ . Таким образом, классы в  $G$  – это классы натуральных чисел, сравнимых по модулю 9. Очевидно также, что

$$N_k = \{C_l 9^l + C_{l-1} 9^{l-1} + \dots + C_1 9 + k \mid l \in N; C_l, C_{l-1}, \dots, C_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, C_l \neq 0\}.$$

Видим, что класс  $N_k$  состоит из всех натуральных чисел, записанных в девятеричной системе и имеющих один и тот же свободный член. Отсюда также становится очевидной справедливость теоремы 1.

**Утверждение.** Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_p, \dots \quad (1)$$

бесконечная арифметическая прогрессия натуральных чисел с разностью  $d \in N$ . Если  $z(d) \neq 3$ ,  $z(d) \neq 6$  и  $z(d) \neq 9$ , то соответствующую последовательности (1) последовательность цифр

$$b_1 = z(a_1), b_2 = z(a_2), \dots, b_p = z(a_p), \dots \quad (2)$$

можно разбить на цепочки длины 9 типа  $(b_1, b_2, \dots, b_9)$ ,  $(b_{10}, b_{11}, \dots, b_{18})$ ,  $(b_{19}, b_{20}, \dots, b_{27})$ , ... , в каждой из 9 разных положительных цифр, расположенных в одном и том же порядке. Для случаев  $z(d)=3$  или  $z(d)=6$  последовательность (2) разбивается на аналогичные цепочки длины 3. При  $z(d)=9$  последовательность (2) состоит из одинаковых цифр, равных  $z(a_1)$ .

**Доказательство**

В случае  $z(d) \neq 3$ ,  $z(d) \neq 6$  и  $z(d) \neq 9$  остатки от деления на 9 чисел  $a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \dots, a_9 = a_1 + 8d$  будут попарно различны по модулю 9. Следовательно,  $z(a_1), z(a_2), \dots, z(a_9)$  попарно различны, то есть они – 9 разных положительных цифр. Далее,  $z(a_{10}) = z(a_1 + 9d) = z(a_1)$ , поэтому в цепочке  $(b_{10} = z(a_{10}), b_{11}, \dots, b_{18})$  числа расположены в том же порядке, что и в цепочке  $(b_1, b_2, \dots, b_9)$ .

Пусть  $z(d)=3$ , тогда  $d$  делится на 3,  $b_2 = z(a_2) = z(a_1 + d) \neq z(a_1) = b_1$ ,  $b_3 = z(a_1 + 2d) \neq z(a_1) = b_1$ , и  $b_3 \neq b_2$ .  $b_4 = z(a_1 + 3d) = z(a_1) = b_1$ . Получаем цепочку различных цифр  $(b_1, b_2, b_3)$ , и, начиная с  $b_4$ , цифры повторяются. Аналогично при  $z(d)=6$ .

Пусть  $z(d)=9$ , тогда  $d$  делится на 9, и  $b_1 = z(a_1) = z(a_1 + (k-1)d) = b_k$  для всех  $k \geq 1$ . Утверждение доказано.

**Упражнение.** (Обобщение задачи № 19 из [1], варианты 20, 22). Дана арифметическая прогрессия с  $a_1 = n, d = 11$  ( $n \in N, d$  – разность прогрессии). Каждый член прогрессии  $a_k$  заменяем на цифру  $z(a_k)$ , полученной в процессе цифрования. Какое наибольшее значение может иметь сумма первых 2000 членов последовательности  $\{z(a_k)\}$  ?

**Решение.** Здесь  $z(d)=2$ , тогда последовательность  $\{z(a_k)\}$  делится на цепочки длины 9, содержащей все положительные цифры. Сумма чисел в одной такой цепочке  $\frac{1+9}{2} \cdot 9 = 45$ . Всего в исследуемой сумме таких цепочек 222, плюс 2 цифры  $b_{1999}$  и  $b_{2000}$ . Сумма чисел во всех цепочках

$222 \cdot 45 = 9990$ . Остается найти максимальное возможное значение суммы  $b_{1999} + b_{2000}$ .

$$b_2 = z(a_1 + d) = z(b_1 + d) = \begin{cases} z(b_1) + z(d), & \text{если } z(b_1) + z(d) \leq 9, \\ z(b_1) + z(d) - 9, & \text{если } z(b_1) + z(d) > 9, \end{cases}$$

$$b_2 = \begin{cases} b_1 + 2, & \text{если } b_1 + 2 \leq 9, \\ b_1 - 7, & \text{если } b_1 + 2 > 9. \end{cases}$$

Итак, в каждой цепочке цифры закольцованы следующим образом: 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8. Видим, что самая большая сумма двух последовательных цифр – это 7+9. Положим  $b_{1999} = 7$  (это будет в том случае, когда  $b_1 = 7$ ), тогда  $b_{2000} = 9$ , и максимально возможное значение искомой суммы  $9990 + 7 + 9 = 10006$ .

**Замечание.** Классы из  $G$  интересны еще таким свойством. Пусть  $n \in N_k$ ,  $n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}$  – десятичная запись  $n$ . Тогда при любой перестановке цифр из этой записи получим число, сравнимое с  $n$  по  $\text{mod } 9$  (то есть дающее при делении на 9 тот же остаток, что и  $n$ ). При первой трактовке операции цифрования это очевидно, при второй – отнюдь не очевидно. Например, 13105, 13501, 51031 дают при делении на 9 один и тот же остаток  $z(13105) = z(10) = 1$ .

### Литература

1. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Яценко. М.: Изд-во «Национальное образование», 2016.

**A.M. Zuev**

Smolensk State University

### ABOUT ONE EQUIVALENCE ON THE SET OF NATURAL NUMBERS

**Keywords:** *digitization operation, equivalent classes, the collection of tasks of the unified state exam.*

**Abstract.** *The article proposes an approach to solving special problems of Olympiad type from the collection of tasks of the unified state exam. As you know, the tasks include tasks №19 of the unified state exam of the relevant level. As a rule, these tasks cause the greatest difficulty of the examinee. Therefore, a generalized approach to their solution may be interesting for both school graduates and teachers.*

## ВЫРАЗИТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ПОПУЛЯЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ<sup>1</sup>

Ключевые слова: глобальная непрерывная оптимизация, популяционный алгоритм, пространство соседства, окрестность особи, эволюционный оператор.

*Рассматриваем популяционные алгоритмы (П-алгоритмы) глобальной непрерывной оптимизации. В связи с большим и постоянно увеличивающимся числом таких алгоритмов актуальной является проблема систематизации их выразительных средств. В работе выполнен анализ одной из составляющих этой проблемы – систематизация сущностей и, в частности, эволюционных операторов П-алгоритмов. Представляем постановку задачи глобальной непрерывной оптимизации и общую схему П-алгоритмов ее решения. Рассматриваем такие сущности, как свободные параметры, пространство соседства, особь, популяция и объединение особей, окрестность особи. Отдельно рассматриваем эволюционные операторы П-алгоритмов: инициализацию популяции; окончание поиска; кодирование особей; рандомизацию; селекцию; скрещивание; управление популяцией; локальный поиск. Раскрываем суть указанных сущностей, приводим варианты использования в некоторых П-алгоритмах.*

**Введение.** В разных публикациях П-алгоритмы глобальной поисковой оптимизации называют поведенческими, интеллектуальными, метаэвристическими, вдохновленными (инспирированными) природой, роевыми, многоагентными и т.д. [1]. Известны многочисленные примеры успешного решения с помощью П-алгоритмов сложных практических задач глобальной оптимизации, например задач автоматизированного проектирования, синтеза сложных химических соединений, оптимального управления динамическими системами. П-алгоритмы многочисленны и весьма разнообразны. Так, в книге [2] представлено более 130 таких алгоритмов. Продолжают появляться новые алгоритмы. Многообразие П-алгоритмов порождает проблему обобщения и систематизации их базовых принципов и сущностей. Работа посвящена систематизации основных сущностей П-алгоритмов, включая эволюционные операторы. Примеры некоторых рассматриваемых в работе сущностей представлены в [2].

---

<sup>1</sup> Работа поддержана РФФИ (проект 16-07-00287).

**1. Постановка задачи и основные обозначения.** Рассматриваем детерминированную задачу глобальной безусловной минимизации

$$\min_{X \in R^{|X|}} f(X) = f(X^*) = f^*, \quad (1)$$

где  $|X|$  – размерность вектора варьируемых параметров  $X = (x_i, i \in [1:|X|])$ ;  $f(X)$  – целевая функция (Ц-функция) со значениями в пространстве  $R^1$ ;  $X^*$ ,  $f^*$  – искомые оптимальные решение и значение Ц-функции соответственно. Полагаем, что поиск решения задачи (1) начинается в  $|X|$ -мерном параллелепипеде  $\Omega_X$ , то есть что в этой области осуществляется инициализация популяции.

Рассматриваем также аналогичную задачу глобальной условной минимизации

$$\min_{X \in \Omega \subset R^{|X|}} f(X) = f(X^*) = f^*, \quad (2)$$

где  $\Omega$  – выпуклое множество допустимых значений вектора  $X$ .

Для сущностей П-алгоритмов используем общее обозначение вида

$$\Xi(Q, P) \Big|_{identification}^{A_{system.control}}; \quad system \in \{det, stoch\}, \quad control \in \{stat, prog, adapt\}.$$

Здесь  $\Xi$  – наименование сущности;  $A$  – алгоритм, определяющий сущность;  $Q, P$  – наборы, возможно пустые, входных переменных и свободных параметров соответственно. Строка *system* определяет, является ли данная сущность детерминированной (*deterministic*) или стохастической (*stochastic*), а строка *control* – статической (*static*), динамической программной (*program*) или динамической адаптивной (*adaptive*) соответственно. Строка *identification*, в общем случае являющаяся составной, идентифицирует сущность с необходимым уровнем детализации.

С каждой из сущностей П-алгоритма может быть связана одна или несколько *характеристик* этой сущности.

*Особью*  $s_i, i \in [1:|S|]$  называется приближение к решению задачи (кандидат в решение). *Состояние*  $V$  особи  $s_i$  в общем случае определяют векторы ее положения  $X_i$ , скорости  $\Delta X_i$  и ускорения  $\Delta^2 X_i$ :

$$V_i = X_i \cup \Delta X_i \cup \Delta^2 X_i, \quad i \in [1:|S|], \quad |V_i| = 3|X|.$$

Основной характеристикой особи  $s_i$ , определяющей ее «качество», является значение фитнесс-функции (Ф-функции)  $\varphi_i = \varphi(X_i)$ . Выделяем характеристику *type* особи, называемую *типом*, которая определяет особенности эволюции этой особи. Тип особи может определять также ее принадлежность к тому или иному объединению особей. Например, в алгоритме колонии пчел *BA (Bees Algorithm)* [1] различают рабочих пчел (*worker bees*), пчел-разведчиков (*scout bees*) и пчел-наблюдателей



(*onlooker bees*). Выделяем характеристики особи, основанные на ее текущих состояниях и на ее следе [2].

*Популяция* представляет собой совокупность  $|S|$  особей  $S = \{s_i, i \in [1:|S|]\}$ . Состояние  $V(S)$  популяции  $S$  определяет набор состояний ее особей:  $V(S) = \{V_i = V(s_i), i \in [1:|S|]\}$ .

*Объединение* особей, определенное в пространстве  $R_\alpha$  (см. ниже), задает выражение вида

$$UNION(Q, P) \Big|_{A_{R_\alpha}^{system.control}} \subseteq S, \quad \alpha \in \{R_\phi, R_X, R_T\}.$$

Отметим, что данное определение не требует, чтобы каждая особь входила только в одно объединение, так что объединения могут пересекаться. Например, в клубном алгоритме роя частиц (*Clubs-Based PSO*) [1] каждая особь популяции  $S$  может входить одновременно в несколько клубов.

В качестве характеристик объединения особей могут быть использованы характеристики, построенные на основе соответствующих характеристик особи. Наряду с этим у объединения особей могут быть определены характеристики, не вытекающие из характеристик особей, входящих в данное объединение [2].

## 2. Основные сущности П-алгоритмов

**Свободные параметры.** Одной из важных особенностей П-алгоритмов является наличие в них *свободных* параметров, значения которых в конечном счете лицо, принимающее решения (ЛПР), устанавливает, исходя из своих предпочтений и / или особенностей исходной оптимизационной задачи. В качестве общего обозначения набора свободных параметров П-алгоритма используем  $P(\bar{P}) \Big|_{A_{identification}^{system.control}}$ ,

где  $\bar{P}$  – набор свободных *мета-параметров* оператора [2]. Разделяем свободные параметры на детерминированные (*system = det*) и стохастические, статические (*control = stat*) и динамические (*control = prog* или *control = adapt*).

**Пространства соседства особей и их объединений.** О соседстве особей и объединениях особей говорим в терминах следующих *пространств соседства*: фитнес-пространство  $R_\phi$ ; пространство поиска  $R_X$ ; *топологическое* пространство  $R_T$ . Элементами этих пространств являются, соответственно, значения Ф-функции  $\varphi(X)$ , компоненты вектора варьируемых параметров  $X$  и сами особи  $s_i, i \in [1:|S|]$ . Таким образом, пространство  $R_\phi$  является одномерным непрерывным, пространство  $R_X$  –  $|X|$ -мерным непрерывным, а пространство  $R_T$  – дискретным и имеет мощность, равную  $|S|$  [2].

Алгоритмы, определяющие пространства соседства особей и их объединений, обычно строят на основе метрик близости вида  $\mu_{R_\alpha}(s_i, s_j)$ ,  $\mu_{R_\alpha}(G_i, G_j)$  соответственно. В зависимости от характера этих метрик по общему правилу различаем детерминированные и стохастические, статические и динамические пространства соседства.

Общее определение пространства соседства особей имеет вид

$$SPACE(Q, P) \Big|_{A_{R_\alpha}^{system.control}}, \alpha \in \{\Phi, X, T\},$$

где алгоритм, построенный на основе метрики близости  $\mu_{R_\alpha}(s_i, s_j)$ , определяет выражение  $\mu_{R_\alpha}(s_i, s_j) \leq b$ ,  $i, j \in [1:|S|]$ ,  $i \neq j$ ;  $b \in P$ .

Аналогично определяем пространство соседства объединений особей.

**Окрестность особи.** Окрестностью особи  $s_i \in S$  в пространстве  $R_\alpha$ ,  $\alpha \in \{\Phi, X, T\}$  ( $R_\alpha$ -окрестностью этой особи) называем область этого пространства, элементы которой в некотором смысле близки к положению особи  $s_i$  в нем. В П-алгоритмах обычно используют окрестности в пространстве  $R_X$ . Мы, однако, рассматриваем также окрестности особи в пространствах  $R_\Phi, R_T$ .

Окрестность особи  $s_i$  в пространстве  $R_\alpha$  определяем в виде

$$AREA(Q, P) \Big|_{A_{R_\alpha}^{system.control}} \subseteq R_\alpha, s_i \in Q, \alpha \in \{\Phi, X, T\},$$

где вектор свободных параметров  $P$  обязательно включает в себя параметр или параметры, которые определяют размеры окрестности (радиусы). Особь  $s_i$  называется центральной особью указанной окрестности. В разных П-алгоритмах окрестность особи называют по-разному, например, в муравьином алгоритме COAC  $R_X$ -окрестность называется регионом поиска [3].

Аналогично определяем окрестности объединения особей  $G_i \subseteq S$  в тех же пространствах ( $R_\alpha$ -окрестности этого объединения).

### 3. Эволюционные операторы П-алгоритмов

**Инициализация.** Инициализация сущности означает инициализацию свободных параметров, определяющих эту сущность, а также начальных значений характеристик сущностей. Применительно к популяции, к этому перечню следует добавить инициализацию начального состояния популяции  $V(0) = V^0$ .

Для операторов инициализации (INITIALIZATION) сущностей используем общее обозначение вида

$$INIT(Q, P) \Big|_{A_{identification}^{system.control}} = \Xi(0) = \Xi^0.$$

Преимущественно в П-алгоритмах на этапе инициализации популяции используют равномерное случайное распределение особей в параллелепипеде  $\Omega_X$  (стратегия «дробовика» [4]). Некоторые П-

алгоритмы используют также равномерное детерминированное начальное распределение. Так, в алгоритме растущих деревьев (*Saplings Sowing and Growing up, SSG*) на этапе инициализации (посадки) особи (саженцы) случайным образом равномерно располагают в области поиска – создают равномерный сад (*uniform garden*) [5]. Области, в которых осуществляется инициализация других сущностей П-алгоритма, также чаще всего имеют форму параллелепипеда соответствующей размерности.

**Завершение поиска.** Оператор завершения (окончания) поиска (итераций, эволюции популяции) имеет общий вид

$$END(Q, P) \Big|_{A_{identification}^{system.control}} = X(\hat{t}),$$

где  $\hat{t}$  – номер последней итерации. В качестве критериев окончания поиска в П-алгоритмах чаще всего используют: достижение максимально допустимого числа поколений эволюции популяции  $\hat{t}$  (группа операторов  $END.A_{i...}^{det.static}$ ); стагнация (*stagnation*) итерационного процесса по значениям  $\Phi$ -функции или по значениям компонентов вектора  $X$  (группа операторов  $END.A_{stagn.\Phi...}^{det.static}$ ,  $END.A_{stagn.X...}^{det.static}$ ); достижение заданного состояния популяции (группа операторов  $END.A_{state...}^{det.static}$ ).

**Кодирование (представление) особей.** В терминах генетического алгоритма в подавляющем большинстве П-алгоритмов используют монохромосомное вещественное кодирование или представление (*coding, representation*) особей. Иногда с целью рандомизации и диверсификации поиска применяют как вспомогательное бинарное кодирование на основе обычных двоичных кодов или двоичных кодов Грея [1]. Отметим, что поскольку, вообще говоря, эффективность набора эволюционных операторов, используемых П-алгоритмом, сильно зависит от метода кодирования особей этого алгоритма, при синтезе П-алгоритмов эту взаимосвязь необходимо обязательно учитывать.

Используем общее обозначение операторов кодирования вида

$$CODE(Q, P) \Big|_{A_{identification}^{system.control}} = X^{repres}, \quad X \in Q,$$

где в случае бинарного кодирования  $repres \in \{binary, Gray\}$ , а в случае вещественного –  $repres = real$  или  $repres = EMPTY$ .

**Рандомизация поиска.** Поскольку все П-алгоритмы относятся к классу стохастических, в процессе синтеза П-алгоритмов методам рандомизации (стохастизации) поиска в этих алгоритмах уделяется большое внимание. В эволюционных алгоритмах основным средством рандомизации является мутация. В других П-алгоритмах механизм мутации напрямую используется нечасто и обычно лишь в гибридных П-алгоритмах [1]. Для рандомизации эволюции особи  $s_i$ ,  $i \in [1:|S|]$  в П-алгоритмах используют (в том числе совместно) рандомизацию текущего положения  $X_i$  особи, ее скорости  $\Delta X_i$ , ускорения  $\Delta^2 X_i$ , а также

свободных параметров алгоритма. Все эти средства могут использоваться не на каждом шаге эволюции популяции (итерации поиска), но лишь через некоторое число шагов  $\Delta t$ , которое представляет собой свободный параметр алгоритма, могущий изменяться по детерминированному или стохастическому, неадаптивному или адаптивному законам [2].

Общее описание бинарных и вещественных операторов рандомизации (*RaNDomization*) имеет, соответственно, вид:

$$RND(Q, P) \Big|_{A_{binary...}^{system.control}} = X^{binary}, \quad X^{binary} \in Q;$$

$$RND(Q, P) \Big|_{A_{real.determination...}^{system.control}} = X', \quad X \in Q.$$

Рандомизации могут подлежать не только компоненты вектора  $X$ , как указано в данных записях, но и любые иные компоненты вектора состояний особи.

**Селекция.** В отличие от [1] не различаем операторы отбора и селекции: полагаем, что операторы селекции предназначены как для выбора особей из текущей популяции с целью их последующей рандомизации, скрещивания и, возможно, для выполнения других операций, так и для выбора особей с целью формирования следующей популяции. Поскольку операторы селекции, в отличие от операторов рандомизации и скрещивания, инвариантны к схеме кодирования особей, не выделяем используемую схему кодирования.

Можно предложить несколько классификаций методов селекции и реализующих их операторов. Во-первых, по общим правилам выделяем детерминированные и стохастические операторы селекции (уровень иерархии *system*). Во-вторых, различаем статические и динамические операторы селекции (уровень *control*). Как правило, динамические операторы в процессе поиска изменяют метод отбора так, чтобы на начальных итерациях обеспечить, прежде всего, диверсификацию поиска, а на завершающих итерациях – его интенсификацию. На третьем уровне иерархии выделяем следующие группы операторов селекции (*SeLeCtion*) [2]:

– операторы  $SLC \Big|_{A_{no-space...}^{system.control}}$ , не учитывающие близость особей в том или ином из пространств;

– операторы  $SLC \Big|_{A_{\Phi-space...}^{system.control}}$ ,  $SLC \Big|_{A_{X-space...}^{system.control}}$ ,  $SLC \Big|_{A_{T-space...}^{system.control}}$ , использующие оценки близости особей в  $\Phi$ -пространстве  $R_{\Phi}$ , пространстве поиска  $R_X$  и в топологическом пространстве  $R_T$  соответственно;

– комбинированные операторы  $SLC \Big|_{A_{multy-space...}^{system.control}}$  на основе близости особей в нескольких из указанных пространств.

**Скрещивание.** В П-алгоритмах оператор скрещивания или репродукции (*crossing, reproduction*) является одним из основных

поисковых операторов. Суть скрещивания заключается в создании особей-потомков из нескольких особей-родителей путем их рекомбинации (*recombination*). Оператор скрещивания реализует процесс, посредством которого особи, имеющие более высокую приспособленность, получают большую возможность для воспроизводства (репродукции) потомков, чем «худшие» особи. В Алгоритмах скрещивание может быть использовано для моделирования социального поведения особей (см., например, алгоритм роя части (*Particle Swarm Optimization, PSO*)) [1].

Операторы скрещивания не инвариантны к используемому методу кодирования особей. Поэтому по отдельности рассматриваем бинарные и вещественные операторы. Используем следующее общее обозначение операторов бинарного и вещественного скрещивания (*CRoSSing*) соответственно:

$$CRS(Q, P) \Big|_{A_{binary...}^{system.control}} = X'_{j_1}, X'_{j_2}, \dots, X'_{j_m}, \{X_{i_1}^{binary}, X_{i_2}^{binary}, \dots, X_{i_n}^{binary}\} \in Q;$$

$$CRS(Q, P) \Big|_{A_{real...}^{system.control}} = X'_{j_1}, X'_{j_2}, \dots, X'_{j_m}, \{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}\} \in Q.$$

Полагаем, что вектор  $P$  включает в себя величины  $n, m$  – числа скрещиваемых (родительских) особей и особей-потомков соответственно.

**Управление популяцией.** Используем общее обозначение операторов управления (*PoPuLation*) популяцией вида

$$PPL(Q, P) \Big|_{A_{identification}^{system.control}} = S', \quad S \in Q.$$

Выделяем следующие группы операторов: сжатие (*compression*) популяции, расширение (*expansion*), ассоциация (*association*), репликация (*replication*), декомпозиция (*splitting*), репродукции (*reproduction*) популяции.

Операторы сжатия популяции предназначены для продуцирования копии части заданной популяции и имеют вид

$$PPL(Q, P) \Big|_{A_{compr...}^{system.control}} = S'; \quad S \in Q, \quad |S| > |S'| = n,$$

где алгоритм оператора определяет правило отбора  $n$  особей популяции  $S$  для помещения их в популяцию  $S'$  и является, по сути, оператором селекции.

Операторы расширения популяции увеличивают размер популяции за счет отбора, возможно с повторами, ее особей:

$$PPL(Q, P) \Big|_{A_{expan...}^{system.control}} = S'; \quad S \in Q, \quad |S'| = |S| + n.$$

Здесь, аналогично операторам предыдущей группы, алгоритм оператора реализует некоторый оператор селекции.

Операторы ассоциации популяций предназначены для объединения популяций  $S_1, S_2, \dots, S_n$  в одну популяцию  $S$  заданной мощности  $m$ :

$$PPL(Q, P) \Big|_{A_{assoc...}^{system.control}} = S, \quad \{S_1, S_2, \dots, S_n\} \in Q, \quad |S| = m.$$

Операторы репликации популяции создают копию  $S_1$  исходной популяции  $S$ , возможно, с той или иной перенумерацией ее особей:

$$PPL(Q, P) \Big|_{A_{replic...}^{system.control}} = S_1; \quad S \in Q, \quad |S_1| = |S|.$$

Операторы декомпозиции разбивают популяцию на заданное число подпопуляций или объединений особей. В первом случае общий формат операторов данной группы имеет вид

$$PPL(Q, P) \Big|_{A_{split...}^{system.control}} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}; \quad S \in Q, \quad P = (|S_1|, |S_2|, \dots, |S_n|, |S|),$$

где  $|S_1|, |S_2|, \dots, |S_n|$  – требуемые размеры субпопуляций;  $\sum_{i=1}^n |S_i| = |S|$ . Алгоритм оператора реализует то или иное правило отбора особей популяции  $S$  в субпопуляции.

Оператор репродукции популяции вызывает уничтожение наиболее «слабых» особей и клонирование наиболее «сильных», сохраняя размер исходной популяции:

$$PPL(Q, P) \Big|_{A_{reprod...}^{system.control}} = S_1, \quad S \in Q, \quad P = (n, |S|), \quad |S_1| = |S|, \quad n < |S|.$$

Правила отбора «слабых» и «сильных» особей определяет алгоритм оператора. Один из вариантов оператора репродукции использует, например, алгоритм бактериальной оптимизации (*Bacterial Foraging Optimization, BFO*) [1].

**Локальный поиск.** Включение алгоритма локального поиска (мема) в П-алгоритм порождает гибридный П-алгоритм. Гибридизация (*hybridization*) П-алгоритмов с алгоритмами локального поиска широко используется в процессе синтеза П-алгоритмов как одно из основных средств интенсификации поиска.

Общие подходы к гибридизации П-алгоритмов рассмотрены, например, в [1]. Гибридизацию П-алгоритма с алгоритмом или алгоритмами локального поиска выполняют по схеме гибридизации вложением. В соответствии с общими принципами этого типа гибридизации выделяем низкоуровневое (*low-level*) вложение, высокоуровневое (*high-level*) вложение одного алгоритма (*one-meme*) локального поиска, высокоуровневую мультимемеевую (*multi-memes*) адаптивную гибридизацию. Низкоуровневая гибридизация вложением предполагает сращивание гибридизируемых алгоритмов так, что, по сути, ее результатом является новый алгоритм, который не может быть декомпозирован на составляющие его алгоритмы. Основная идея такой гибридизации заключается в модификации поисковых операторов П-алгоритма на основе использования алгоритма или алгоритмов локальной оптимизации [1]. Поскольку низкоуровневая гибридизация вложением приводит, по сути, к появлению новых эволюционных операторов, модифицированные операторы следует рассматривать в разделах, посвященных этим операторам.

Используем следующее общее обозначение гибризируемых операторов локального (LOCAL) поиска:

$$LOC(Q, P)|_{A_{hybrid...}^{system.control}} = \tilde{s}_i, \quad i \in [1:|S|], \quad s_i \in Q, \quad hybrid \in \{meme, memes\}.$$

В настоящее время известны примеры высокоуровневой гибридизации вложением практически всех известных П-алгоритмов со многими классическими и неклассическими алгоритмами локальной оптимизации. В современных П-алгоритмах широко используют мультимемевые адаптивные алгоритмы. Для идентификации такого алгоритма необходимо определить а) используемый набор (рой) мемов (среди которых могут быть как детерминированные, так и стохастические), б) стратегию использования того или иного мема из роя доступных мемов, то есть гиперэвристику (*hyperheuristic*) алгоритма; характеристики мемов и/или текущего исследуемого фрагмента области решения, на основе которых производится их выбор. Наиболее известны три следующие категории гиперэвристик, используемых в мультимемевых алгоритмах - случайные (*random*), жадные (*greedy*), гиперэвристики с функцией выбора (*choice-function hyperheuristics*) [1].

Указание используемых мультимемевым алгоритмом набора мемов, гиперэвристики и характеристик в обозначении алгоритма сделало бы это обозначение слишком громоздким. Поэтому ограничиваемся непосредственной идентификацией только гиперэвристики (иерархический уровень 4), концентрируя тем или иным способом остальные особенности алгоритма в обозначении пятого уровня. Таким образом, используем общее обозначение мультимемеевого оператора локального поиска вида

$$LOC(Q, P)|_{A_{memes.h-heur...}^{system.adapt}} = \tilde{s}_i, \quad i \in [1:|S|], \quad s_i \in Q,$$

где  $h - heur \in \{random, greedy, choice - funct\}$ .

**Заключение.** В работе предложена многоуровневая классификация основных сущностей П-алгоритмов глобальной оптимизации, включая классификацию эволюционных операторов этих алгоритмов. На верхнем иерархическом уровне сущности идентифицируем их наименование. На следующем уровне различаем детерминированные и стохастические сущности. Далее различаем статические, динамические программные и динамические адаптивные сущности. Следующие классификационные уровни являются «сущностно зависимыми», то есть, вообще говоря, различны для каждой из сущностей.

Поскольку мы используем такие наименования операторов, как селекция, скрещивание, может создаться впечатление ориентации только на эволюционные алгоритмы глобальной оптимизации операторы. Однако это не так. Представленная в работе схема описания сущностей может быть использована для определения любых П-

алгоритмов. Привести соответствующие примеры не позволяет только ограничение на объем работы.

В развитие работы автор планирует расширить представленный набор сущностей и, главное, с помощью этого набора систематизировать наиболее известные П-алгоритмы.

### Литература

1. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с.
2. Карпенко А.П. Основные сущности популяционных алгоритмов глобальной оптимизации. Опыт систематизации // Интернет-журнал «Науковедение», 2017, Т. 9, № 6. URL: <https://naukovedenie.ru/PDF/46TVN617.pdf> (дата обращения: 05.01.2018).
3. Xiao-Min Hu, Jun Zhang, Yun Li. Orthogonal Methods Based Ant Colony Search for Solving Continuous Optimization Problems // Journal of Computer Science and Technology. 2008. Vol. 23, Iss. 1, P. 2–18.
4. Скобцов Ю.А., Сперанский Д.В. Эволюционные вычисления: Учебное пособие. М.: Национальный открытый университет «ИНТУИТ» 2012. 331 с.
5. Karci A. Theory of Saplings Growing Up Algorithm / ICANNGA. 2007. Part I, LNCS 4431. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007. P. 450–460.

**A.P. Karpenko**

Bauman Moscow State Technical University

### EXPRESSIVE MEANS OF POPULATION-BASED ALGORITHMS FOR GLOBAL OPTIMIZATION

**Keywords:** *global continuous optimization, population-based algorithm, neighborhood space, region of an individual, evolutionary operator.*

**Abstract.** *We consider the population-based algorithms (P-algorithms) of global continuous optimization. In connection with the large and constantly increasing number of such algorithms, the problem of systematizing their expressive means is topical. In this work, one of the components of this problem is analyzed – the systematization of entities and, in particular, evolutionary operators of P-algorithms. We represent the formulation of the problem of global continuous optimization and the general scheme of P-algorithms for its solution. We consider such entities as free parameters, the neighborhood space, the individual, the population and union of individuals, the vicinity of the individual. We separately consider the basic essence of P-algorithms - evolutionary operators: the initialization of the population and the end of the search; coding of individuals; randomization; selection; crossing; population management; local search. We reveal the essence of the indicated entities; we give variants of use in some P-algorithms.*



## НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВЗВЕШЕННОГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ключевые слова: евклидово пространство; размерность; шар; взвешенное среднее арифметическое; субгармоническая функция; гармоническая функция.

Данная статья посвящена взвешенному арифметическому среднему в евклидовом пространстве. Идея изучить свойства взвешенного арифметического среднего в евклидовом пространстве разной размерности возникла в связи с приведенной в задачнике Г. Поля и С. Сега «Задачи и теоремы из анализа» следующей проблемой. Пусть в круге произвольным образом фиксировано некоторое множество точек, а одна переменная точка пробегает границу этого круга. Тогда среднее геометрическое расстояний от этой точки до фиксированных точек имеет максимум, не меньший радиуса круга, а минимум, не больший радиуса этого круга, т.е. выполняется так называемый нами принцип двойственности. Оказалось, что в случае среднего арифметического или среднего гармонического расстояний принцип двойственности нарушается. Применительно к среднему арифметическому удалось выяснить, почему происходит такое нарушение. Кроме того, в статье изучаются экстремальные свойства взвешенного среднего арифметического в зависимости от размерности евклидова пространства, расположения точек в данном пространстве, а также значений вводимых параметров.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $E_k$  – евклидово пространство размерности  $k \geq 1$ . Пусть  $W_k(R)$  означает  $k$ -мерный открытый шар радиуса  $R$  с центром в начале координат  $O$ , расположенный в  $E_k$  и  $T_k(R)$  – поверхность этого шара. Если  $k = 2$ , то  $W_2(R)$  означает круг и  $T_2(R)$  окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат  $O$ . Если  $k = 1$ , то  $W_1(R)$  – интервал  $(-R, R)$ . Граница  $T_1(R)$  интервала  $(-R, R)$  состоит из двух точек, являющихся концами этого интервала.

**Определение 1.** Пусть точки  $M_1, \dots, M_n$  принадлежат  $W_k(R)$  и произвольно фиксированы, а точка  $M$  принадлежит границе  $T_k(R)$ . Взвешенное среднее арифметическое определяется формулой

$$\Omega(M; M_1, \dots, M_n; h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n h_i \rho_k(M, M_i), \quad \sum_{i=1}^n h_i = 1, \quad (1)$$

где  $h_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $\rho_k(M, M_i)$  – расстояние между точками  $M$  и  $M_i$  в  $E_k$ . Очевидно, что при фиксированных  $h_1, h_2, \dots, h_n$  и  $M_1, M_2, \dots, M_n$  взвешенное среднее арифметическое (1) является функцией от  $M$ . Если в (1) предположить  $h_1 = h_2 = \dots = h_n = 1/n$ , то получим обычное среднее арифметическое.

Идея изучить свойства взвешенного арифметического среднего в евклидовом пространстве разной размерности возникла в связи с приведенной в задачке Г. Полия и С. Сеге «Задачи и теоремы из анализа» следующей проблемой [1]. Пусть в круге  $W_2(R)$  произвольным образом фиксированы точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , а переменная точка  $M$  пробегает границу  $T_2(R)$  этого круга. Тогда среднее геометрическое расстояний  $\rho_2(M, M_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  имеет максимум, не меньший радиуса круга, а минимум, не больший радиуса этого круга, т.е. выполняется так называемый нами принцип двойственности. Оказалось, что в случае среднего арифметического или среднего гармонического расстояний принцип двойственности нарушается. Применительно к среднему арифметическому удалось выяснить, почему происходит такое нарушение. Оказалось, что оно связано с выбором размерности евклидова пространства  $E_k$  и величиной радиуса  $R$  шара. Свойства среднего геометрического расстояний в пространстве  $E_k$  различной размерности подробно рассмотрены в статье [2]. Аналогичным образом изучаются экстремальные свойства взвешенного среднего арифметического в зависимости от размерности евклидова пространства, расположения точек в данном пространстве, а также значений вводимых параметров.

**2.** В дальнейшем нам понадобятся несколько лемм.

**Лемма 1.** Пусть переменная точка  $M(x_1, \dots, x_k) \in W_k(R)$ , а фиксированная точка  $M^*(x_1^*, \dots, x_k^*) \notin W_k(R)$ . Если  $k = 1$ , то функция  $\rho_1(M, M^*)$  будет гармонической в  $W_1(R)$ . Если  $k \geq 2$ , то функция  $\rho_k(M, M_i)$  будет субгармонической в  $W_k(R)$ .

**Лемма 2.** Зафиксируем в  $W_k(R)$  точку  $M_0$ , не совпадающую с центром  $O$ . Пусть точка  $M_0^*$ , является концом вектора

$$\overline{OM_0^*} = \frac{R^2}{\rho_k^2(O, M_0)} \overline{OM_0}.$$

Тогда для любой точки  $M \in T_k(R)$ ,  $k \geq 2$ , справедливо равенство

$$\rho_k(M, M_0) = \rho_k(M, M_0^*) \frac{\rho_k(O, M_0)}{R}.$$

Назовем точку  $M_0^*$  инверсионной по отношению к точке  $M_0$ .

**Определение 2.** Множество точек  $M_{1,k}, \dots, M_{k+1,k}$  из  $E_k$  назовем «правильным набором», если векторы  $\overline{OM_{i,k}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k+1$ , образуют попарно равные между собой углы и модули их равны  $r$ , т.е.  $\rho_k(M, M_{i,k}) = r$ ,  $i = 1, 2, \dots, k+1$ . Можно доказать, что угол между двумя любыми векторами из правильного набора вычисляется по формуле  $\gamma = \pi - \arccos \frac{1}{k}$ .

**Лемма 3.** Пусть  $M_{1,k}, \dots, M_{k+1,k}$  – «правильный набор» точек и  $M$  – произвольно взятая точка на  $T_k(R)$ , где  $R > r$ . Пусть  $\alpha_{i,k}$  – величина угла между векторами  $\overline{OM}$  и  $\overline{OM_{i,k}}$ . Тогда справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{k-1} \cos \alpha_{i,k} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k+1} \cos^2 \alpha_{i,k} = \frac{k+1}{k}.$$

3. Сформулируем и докажем следующие три теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $k \geq 2$ . Для любых фиксированных  $M_1, \dots, M_n$  из  $W_k(R)$  и для любых фиксированных  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , удовлетворяющих условию (1), справедлива оценка

$$\max_{M \in T_k(R)} \Omega(M; M_1, \dots, M_n; h_1, \dots, h_n) \geq R. \quad (2)$$

Знак равенства в (2) реализуется тогда и только тогда, когда все точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$  совпадают с точкой  $O$ .

**Доказательство.** Пусть среди точек  $M_1, \dots, M_n$ , есть хотя бы одна точка, например точка  $M_1$ , не совпадающая с точкой  $O$ . Тогда точка  $M_1^*$ , инверсионная по отношению к точке  $M_1$ , лежит вне шара  $\overline{W}_k(R)$ . Согласно лемме 1, функция  $\rho_k(M, M_1^*)$  является субгармонической в  $W_k(R)$ . Опираясь на лемму 2 и интегральное свойство субгармонической функции (см. [3]), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(T_k(R))} \int_{T_k(R)} \rho_k(M, M_1) d\tau &= \frac{\rho_k(M, M_1)}{R} \frac{1}{\tau(T_k(R))} \int_{T_k(R)} \rho_k(M, M_1^*) d\tau \geq \\ &\geq \frac{\rho_k(O, M_1)}{R} \rho_k(O, M_1^*) = R, \end{aligned}$$

то есть

$$\frac{1}{\tau(T_k(R))} \int_{T_k(R)} \rho_k(M, M_1) d\tau \geq R. \quad (3)$$

Тогда, согласно (3), получим

$$\frac{1}{\tau(T_k(R))} \int_{T_k(R)} \sum_{i=1}^n h_i \rho_k(M, M_i) d\tau \geq R. \quad (4)$$

Но

$$\max_{M \in T_k(R)} \sum_{i=1}^n h_i \rho_k(M, M_i) > \frac{1}{\tau(T_k(R))} \int_{T_k(R)} \sum_{i=1}^n h_i \rho_k(M, M_i) d\tau. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\max_{M \in T_k(R)} \sum_{i=1}^n h_i \rho_k(M, M_i) > R. \quad (6)$$

Таким образом, если не все точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$  совпадают с центром  $O$ , то получим неравенство (6). Если все точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$  совпадают с точкой  $O$ , то в (2), очевидно, будет знак равенства.

**Теорема 2.** Для любых фиксированных  $M_1, \dots, M_n$  из  $W_1(R)$  и для любых фиксированных  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , удовлетворяющих условию (1), справедливы оценки (выполняется принцип двойственности)

$$\min_{M \in T_1(R)} \Omega(M; M_1, \dots, M_n; h_1, \dots, h_n) \leq R \leq \max_{M \in T_1(R)} \Omega(M; M_1, \dots, M_n; h_1, \dots, h_n). \quad (7)$$

**Доказательство.** Пусть среди точек  $M_1, M_2, \dots, M_n$  есть хотя бы одна точка, например точка  $M_1$ , не совпадающая с точкой  $O$ . Тогда

$$\rho_1(A, M_1) + \rho_1(B, M_1) = 2R,$$

где  $A$  и  $B$  – граничные точки интервала  $W_1(R)$ .

Поэтому

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n h_i \rho_1(A, M_i) + \sum_{i=1}^n h_i \rho_1(B, M_i) \right) = R.$$

Следовательно

$$\min_{M \in T_k(R)} \sum_{i=1}^n h_i \rho_1(M, M_i) < R < \max_{M \in T_k(R)} \sum_{i=1}^n h_i \rho_1(M, M_i). \quad (8)$$

Если все точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$  совпадают с точкой  $O$ , то в (8) будут знаки равенства. Таким образом, мы доказали (7).

**Теорема 3.** Пусть  $h_1 = h_2 = \dots = h_{k+1} = \frac{1}{k+1}$ , где  $k \geq 2$ . Пусть также  $M_{1,k}, \dots, M_{k,k}, M_{k+1,k}$  – «правильный набор» точек из  $E_k$  и  $\rho_k(O, M_{i,k}) = r_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k+1$ . Тогда найдется такое  $R_0$ ,  $R_0 > r_0$ , что для всех  $R > R_0$  будет выполняться неравенство

$$\min_{M \in T_k(R)} \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \rho(M, M_{i,k}) > R. \quad (9)$$

**Доказательство.** По теореме косинусов

$$\rho_k(M, M_{i,k}) = \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \alpha_{i,k}}.$$

Теперь нетрудно установить, что

$$\frac{\rho_k(M, M_{i,k})}{R} = 1 - \cos \alpha_{i,k} \left( \frac{r_0}{R} \right) + \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \alpha_{i,k}) \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 + \dots$$

Пользуясь леммой 3, получим

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\rho_k(M, M_{i,k})}{R} = 1 + \frac{k-1}{2k} \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 + \dots$$

Отсюда заключаем о существовании такого  $R_0$ , что для всех  $R > R_0$  будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \rho_k(M, M_{i,k}) > R$$

для любой точки  $M \in T_k(R)$ . Но тогда и неравенство (9) будет верным.

Рассматривая теоремы 1, 2 и 3, мы замечаем, что только при  $k = 1$  принцип двойственности выполняется, а при  $k \geq 2$  принцип двойственности нарушается. Частный случай  $k = 2$  рассмотрен также в задачнике Г. Поля и Г. Сега, где используются свойства аналитических функций (см. [1]).

На основании приведенных выше рассуждений, можно сделать вывод, что полученные результаты заслуживают внимания и стимулируют к дальнейшему исследованию по данной тематике.

### Литература

1. Поля Г. и Сега Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. С. 141.
2. Кирьяцкий Э.Г. О геометрическом среднем в  $k$ -мерном евклидовом пространстве // Современные проблемы математики и механики. Т. 6: Математика. Вып. 3. М.: Изд-во Московского университета, 2011, С. 1–12.
3. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968. С. 180–200.

**E.E. Kirjackis, E.G. Kiriatzkii**  
Vilnius Gediminas Technical University

### ON SOME EXTREME PROPERTIES OF THE WEIGHTED ARITHMETIC MEAN IN EUCLIDEAN SPACE

**Keywords:** *Euclidean space, dimension, ball, weighted arithmetic mean, subharmonic function, harmonic function.*

**Abstract.** *This article is devoted to the weighted arithmetic mean in Euclidean space. The idea of studying the properties of a weighted arithmetic mean in Euclidean space of different dimensions arose in connection with the problem presented in the book by G. Polya and S. Szego "Problems and theorems from analysis". Suppose that a set of points is arbitrarily fixed in a circle and one variable point runs through the boundary of this circle. Then the geometric mean of the distances from this point to fixed points has a maximum not less than the radius of the circle but a minimum not greater than the radius of this circle, i.e. the so-called duality principle is fulfilled. It turned out that in the case of arithmetic or harmonic mean of distances the duality principle is violated. With respect to the arithmetic mean it found out why there is such a violation. In addition, the paper studies the extreme properties of a weighted arithmetic mean, depending on the dimension of the Euclidean space, the location of points in a given space and the values of the parameters introduced.*

**МОДЕЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ  
КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ  
ФУНКЦИЙ**

Ключевые слова: *метааналитическая функция, модельная краевая задача типа задачи Карлемана, односвязная область, единичный круг.*

*В статье дается постановка модельной краевой задачи типа задачи Карлемана в классах метааналитических функций, которая является естественным обобщением известной краевой задачи типа Карлемана для аналитических функций. Кроме того, представлен конструктивный алгоритм решения поставленной краевой задачи в классах метааналитических функций как первого, так и второго типа. Основные теоретические результаты иллюстрируются на конкретном примере.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым замкнутым гладким контуром Ляпунова  $L$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ .

Напомним (см., например, [1, с. 139] или [2]), что метааналитическими функциями в области  $T^+$  называются регулярные решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + A_1 \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + A_0 F(z) = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  – дифференциальный оператор Коши-Римана, а  $A_0, A_1$  – некоторые комплексные числа.

Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0$ . Тогда, как известно (см. [1-3]), всякую метааналитическую в области  $T^+$  функцию  $F(z)$  можно представить в виде

$$F(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] e^{\lambda_0 \bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \quad (2)$$

или

$$F(z) = \varphi_0^+(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} + \varphi_1^+(z) e^{\lambda_2 \bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (3)$$

где  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$  – аналитические в  $T^+$  функции. Обычно функции

$\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$  называются *аналитическими компонентами* метааналитической функции  $F(z)$ .

В дальнейшем функции вида (2) будем называть *метааналитическими функциями первого типа*, а функции вида (3) – *метааналитическими функциями второго типа*.

**Замечание 1.** Важно отметить (см., например, [1; 2]), что в частном случае, когда  $\lambda_0 = 0$  *метааналитические функции первого типа* в области  $T^+$  называются *бианалитическими функциями в этой области*.

Следуя [1], будем говорить, что метааналитическая в  $T^+$  функция  $F(z)$  вида (2) или (3) принадлежит классу  $M_2(T^+) \cap H(L)$ , если ее аналитические компоненты  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур  $L$  (то есть функции  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$  принадлежат классу  $A(T^+) \cap H(L)$ ).

Рассматривается следующая краевая задача: *требуется найти все метааналитические в области  $T^+$  функции  $F(z)$  класса  $M_2(T^+) \cap H(L)$ , удовлетворяющие на  $L$  краевым условиям:*

$$F^+[\alpha(t)] = G_0(t) \overline{F^+(t)} + g_0(t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial \bar{t}} - \lambda F^+[\alpha(t)] = G_1(t) \overline{\left( \frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} - \lambda F^+(t) \right)} + g_1(t), \quad (5)$$

где  $F^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} F(z)$ ,  $\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}}$ ;  $\alpha(t)$  – *прямой сдвиг контура*, для которого выполняется условие Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \quad (6)$$

$\lambda$  – *какой-нибудь корень характеристического уравнения  $\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0$* , а  $G_k(t)$  и  $g_k(t)$  ( $k = 0, 1$ ) – *заданные на  $L$  функции, удовлетворяющие условию Гёльдера (т.е.  $G_k(t), g_k(t) \in H(L)$ ), причем  $G_k(t) \neq 0$  ( $k = 0, 1$ ),  $\alpha'(t) \neq 0$  и  $\alpha'(t) \in H(L)$* .

Сформулированную задачу будем называть *модельной задачей типа задачи Карлемана для метааналитических функций* или, короче, *задачей  $K_M$* , а соответствующую однородную задачу ( $g_k(t) \equiv 0, k = 0, 1$ ) – *задачей  $K_M^0$* .

Сразу отметим, что задача  $K_M$  является естественным обобщением известной краевой задачи типа задачи Карлемана (или обобщенной краевой задачи Гильберта) для аналитических функций (см., например, [4, с. 172] или [5, с. 158]).



Основной целью настоящего сообщения является разработка общего метода решения задачи  $K_M$  в классах метааналитических функций.

**2. Метод решения задачи  $K_M$  в классе метааналитических функций первого типа.** Будем искать решения задачи  $K_M$  в виде (2). Ясно, что в данном случае в краевом условии (5) нужно положить  $\lambda = \lambda_0$ . Так как

$$\frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] e^{\lambda_0 \bar{z}} = \varphi_1^+(z) e^{\lambda_0 \bar{z}} + \lambda_0 F^+(z),$$

то

$$\frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} - \lambda_0 F^+(z) = \varphi_1^+(z) e^{\lambda_0 \bar{z}}. \quad (7)$$

Следовательно, в силу формул (2) и (7) краевые условия (4) и (5) можно переписать соответственно в виде

$$\{\varphi_0^+[\alpha(t)] + \overline{\alpha(t)} \cdot \varphi_1^+[\alpha(t)]\} e^{\lambda_0 \overline{\alpha(t)}} = G_0(t) [\overline{\varphi_0^+(t)} + t \overline{\varphi_1^+(t)}] e^{\bar{\lambda}_0 t} + g_0(t), \quad (8)$$

$$\varphi_1^+[\alpha(t)] e^{\lambda_0 \overline{\alpha(t)}} = G_1(t) e^{\bar{\lambda}_0 t} \overline{\varphi_1^+(t)} + g_1(t). \quad (9)$$

**Замечание 1.** Здесь важно заметить, что равенства (8) и (9) в совокупности представляют собой краевые условия хорошо известной *обобщенной векторно-матричной задачи типа задачи Карлемана* (см., например, [6, с. 332]) относительно неизвестного аналитического в

области  $T^+$  вектора  $\varphi^+(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0^+(z) \\ \varphi_1^+(z) \end{pmatrix}$ :

$$A(t) \varphi^+[\alpha(t)] = \overline{B(t) \varphi^+(t)} + g(t), \quad (10)$$

где приняты обозначения:

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 \overline{\alpha(t)}} & \overline{\alpha(t)} \cdot e^{\lambda_0 \overline{\alpha(t)}} \\ 0 & e^{\lambda_0 \overline{\alpha(t)}} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} G_0(t) e^{\bar{\lambda}_0 t} & t G_0(t) e^{\bar{\lambda}_0 t} \\ 0 & G_1(t) e^{\bar{\lambda}_0 t} \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_0(t) \\ g_1(t) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Поскольку матрица  $A(t)$  является невырожденной (т.е.  $\det A(t) \neq 0$ ) и имеет *треугольный вид*, для решения краевой задачи  $K_M$  в классе метааналитических функций *первого типа* можно применить следующий *алгоритм*.

1. Решая краевую задачу типа задачи Карлемана (9) (в случае её разрешимости) находим аналитическую в области  $T^+$  функцию  $\varphi_1^+(z)$ , а затем переходим к пункту 2. Если же скалярная задача типа задачи Карлемана (9) неразрешима, то и исходная задача  $K_M$  не имеет решений, и на этом заканчивается алгоритм решения.

2. Подставляя в краевое условие (8) вместо  $\varphi_1^+(t)$  граничные значения найденной в пункте 1 аналитической функции  $\varphi_1^+(z)$ , получаем следующую скалярную краевую задачу типа задачи Карлемана относительно аналитической в области  $T^+$  функции  $\varphi_0^+(z)$ :

$$\varphi_0^+[\alpha(t)]e^{\lambda_0\overline{\alpha(t)}} = G_0(t)\overline{\varphi_0^+(t)}e^{\bar{\lambda}_0t} + g_{10}(t), \quad (12)$$

где

$$g_{10}(t) = g_0(t) + G_0(t)t\overline{\varphi_1^+(t)}e^{\bar{\lambda}_0t} - \overline{\alpha(t)} \cdot \varphi_1^+[\alpha(t)]e^{\lambda_0\overline{\alpha(t)}}. \quad (13)$$

3. Решая краевую задачу типа задачи Карлемана (12) (в случае её разрешимости), находим аналитическую в области  $T^+$  функцию  $\varphi_0^+(z)$  и переходим к пункту 4. Если же задача Гильберта (12) неразрешима, то и исходная задача  $K_M$  не имеет решений, и на этом заканчивается алгоритм решения.

4. По формуле

$$F(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]e^{\lambda_0\bar{z}}, \quad (14)$$

где  $\varphi_0^+(z)$  и  $\varphi_1^+(z)$  – решения краевых задач (12) и (9) соответственно, находим решение исходной задачи  $K_M$ .

Таким образом, получили следующий результат.

**Теорема 1.** *Решение задачи  $K_M$  в классе метааналитических функций первого типа сводится к последовательному решению двух скалярных краевых задач типа задачи Карлемана (9) и (12) относительно аналитических функций  $\varphi_1^+(z)$  и  $\varphi_0^+(z)$  соответственно. При этом задача  $K_M$  разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы обе краевые задачи типа Карлемана (9) и (12).*

**Пример.** Пусть  $L_1 = \{t : |t| = 1\}$  и  $T_1^+ = \{z : |z| < 1\}$ . Требуется найти все бианалитические в круге  $T_1^+$  функции  $F(z)$  класса  $A_2(T_1^+) \cap H(L_1)$ , удовлетворяющие на  $L_1$  краевым условиям:

$$F^+[\alpha(t)] = \overline{F^+(t)}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial \bar{t}} = t^4 \frac{\partial F^+(t)}{\partial t} + 2it^2, \quad (16)$$

где  $\alpha(t) = -t$ .

*Решение.* Будем искать решения данной задачи в виде

$$F(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), \quad (17)$$

где  $\varphi_0^+(z)$ ,  $\varphi_1^+(z)$  – пока неизвестные аналитические в круге  $T_1^+$  функции класса  $A(T_1^+) \cap H(L_1)$ . В силу (17) имеем:  $\frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} = \varphi_1^+(z)$ . Следовательно,

краевое условие (16) примет вид:

$$\varphi_1^+[\alpha(t)] = t^4 \overline{\varphi_1^+(t)} + 2it^2. \quad (18)$$

Поскольку в данном случае  $G_1(t) = t^4$ ,  $g_1(t) = it^2$ , индекс задачи  $\chi = \text{Ind } G_1(t) = \text{Ind } t^4 = 4$ , задача (18) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать в виде (см., например, [4, с. 186]):

$$\varphi_1^+(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1(z - z^3) + \beta_2(iz + iz^3) + \beta_3(1 + z^4) + \beta_4(i - iz^4) + iz^2, \quad (19)$$

где  $\beta_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные действительные постоянные.

Далее, с учетом (17), перепишем равенство (15) в виде

$$\varphi_0^+[\alpha(t)] - \overline{\varphi_0^+(t)} = Q_0(t), \quad (20)$$

где

$$Q_0(t) = t \overline{\varphi_1^+(t)} - \overline{\alpha(t)} \cdot \varphi_1^+[\alpha(t)]. \quad (21)$$

Подставляя в правую часть равенства (21) вместо  $\varphi_1^+(t)$  граничные значения найденной по формуле (19) аналитической функции  $\varphi_1^+(z)$ , получаем задачу типа задачи Карлемана по скачку (20) относительно аналитической в области  $T^+$  функции  $\varphi_0^+(z)$ . Нетрудно проверить (см. также [4, с. 180]), что общее решение краевой задачи (20) можно задавать формулой:

$$\varphi_0^+(z) = \mu + \frac{1}{2}\beta_3 - i(2\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_4) - (1 + \beta_0 + \beta_3 - i\beta_4)z + (\beta_1 - i\beta_2)z^2 - (\beta_3 - i\beta_4)z^3, \quad (22)$$

где  $\mu$  и  $\beta_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные действительные постоянные.

Таким образом, общее решение исходной задачи (15), (16) можно задавать формулой (17), где  $\varphi_0^+(z)$ ,  $\varphi_1^+(z)$  определяются по формулам (22) и (19) соответственно.

**3. О решении задачи  $K_M$  в классе метааналитических функций второго типа.** В данном случае будем искать решения задачи  $K_M$  в виде (3). Тогда, полагая в краевом условии (5), например  $\lambda = \lambda_1$ , и учитывая, что

$$\frac{\partial F^+(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\varphi_0^+(z)e^{\lambda_1 \bar{z}} + \varphi_1^+(z)e^{\lambda_2 \bar{z}}] = \lambda_1 \varphi_0^+(z)e^{\lambda_1 \bar{z}} + \lambda_2 \varphi_1^+(z)e^{\lambda_2 \bar{z}}, \quad (23)$$

краевые условия (4) и (5) можно переписать соответственно в виде

$$\varphi_0^+[\alpha(t)]e^{\lambda_1 \overline{\alpha(t)}} + \overline{\alpha(t)} \varphi_1^+[\alpha(t)]e^{\lambda_2 \overline{\alpha(t)}} = G_0(t) [\overline{\varphi_0^+(t)}e^{\lambda_1 t} + t \overline{\varphi_1^+(t)}e^{\lambda_2 t}] + g_0(t), \quad (24)$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \varphi_1^+[\alpha(t)]e^{\lambda_2 \overline{\alpha(t)}} = G_1(t) (\lambda_2 - \lambda_1) \overline{\varphi_1^+(t)}e^{\lambda_2 t} + g_1(t). \quad (25)$$

**Замечание 2.** Отметим, что равенства (24) и (25) в совокупности представляют собой краевые условия хорошо известной *обобщенной*

векторно-матричной задачи типа задачи Карлемана относительно неизвестного аналитического в области  $T^+$  вектора  $\varphi^+(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0^+(z) \\ \varphi_1^+(z) \end{pmatrix}$ :

$$A(t)\varphi^+[\alpha(t)] = B(t)\overline{\varphi^+(t)} + g(t), \quad (26)$$

где приняты обозначения:  $g(t) = \begin{pmatrix} g_0(t) \\ g_1(t) \end{pmatrix}$ ,

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \overline{\alpha(t)}} & \overline{\alpha(t)} e^{\lambda_2 \overline{\alpha(t)}} \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_2 \overline{\alpha(t)}} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} G_0(t) e^{\overline{\lambda_1 t}} & t G_0(t) e^{\overline{\lambda_2 t}} \\ 0 & G_1(t) (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\overline{\lambda_2 t}} \end{pmatrix}.$$

Далее, рассуждая точно так же, как и в предыдущем пункте, получаем следующий результат.

**Теорема 2.** *Решение задачи  $K_M$  в классе метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению относительно аналитических функций  $\varphi_1^+(z)$  и  $\varphi_0^+(z)$  соответственно следующих двух краевых скалярных задач типа задач Карлемана вида (25) и*

$$\varphi_0^+[\alpha(t)] e^{\lambda_1 \overline{\alpha(t)}} = G_0(t) \overline{\varphi_0^+(t)} e^{\overline{\lambda_1 t}} + g_{20}(t), \quad (27)$$

где  $g_{20}(t) = g_0(t) + G_0(t) t \overline{\varphi_1^+(t)} e^{\overline{\lambda_2 t}} - \overline{\alpha(t)} \cdot \varphi_1^+[\alpha(t)] e^{\lambda_2 \overline{\alpha(t)}}$ . При этом задача  $K_M$  разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы обе краевые задачи типа Карлемана (25) и (27).

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998.
2. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ /Серия Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 85. М.:ВИНИТИ, 1991. С. 187-246.
3. Расулов К.М. Об одной краевой задаче типа Дирихле для обобщенных метааналитических функций в круге // Известия СмолГУ, 2014. № 3(27). С. 305-311.
4. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
6. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970.

**К.В. Osipyanyan, К.М. Rasulov**  
Smolensk State University

### MODEL BOUNDARY TASK OF KARLEMAN-TYPE TASK IN CLASSES OF METHANALYTIC FUNCTIONS

**Keywords:** *methanalytic function, model boundary task of Karleman-type task, simply connected domain, unit circle.*

**Abstract.** *The article presents a statement of a model boundary task of Karleman-type task in classes of methanalytic functions, which is a natural generalization of the well-known boundary task of Karleman-type task for analytic functions. In addition, the article developed a constructive algorithm for solving the boundary task in the classes of meta-analytic functions of both the first type and the second type. The main theoretical results are illustrated with a concrete example.*

**К.М. Расулов, Т.И. Тимофеева**

*Смоленский государственный университет*

УДК 517.968.23

## **АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ**

Ключевые слова: *краевая задача, задача типа Гильберта, квазигармоническая функция, дифференциальное уравнение, круговая область, единичная окружность, неединичная окружность, устойчивость.*

*В исследовании краевых задач комплексного анализа важнейшее значение имеет характер устойчивости их решений по отношению к малым изменениям коэффициентов краевых условий или контуров, которые являются носителями краевых условий рассматриваемых задач. В представленной работе рассматривается однородная краевая задача типа задачи Гильберта в классах квазигармонических функций третьего рода, анализируется устойчивость решений данной задачи по отношению к изменению радиуса рассматриваемой круговой области. Также в работе построена картина разрешимости однородной краевой задачи Гильберта для квазигармонических функций третьего рода в круговых областях и установлена основная причина неустойчивости решений рассматриваемой задачи по отношению к изменению величины радиуса рассматриваемой области.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова  $L$ .

Напомним [1–2], что квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$  называются регулярные в этой области решения уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число,  $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  – неизвестная функция.

Известно (см., например, [1–4]), что всякую квазигармоническую функцию рода  $n$  в области  $T^+$  можно представить в виде:

$$W^+(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad z \in T^+, \quad (2)$$

где  $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z)$  – аналитическая в области  $T^+$  функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции  $W(z)$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что квазигармоническая функция  $W(z)$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) принадлежит классу  $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , т.е. аналитическая функция  $\varphi(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача  $\Gamma_n^0$ : *требуется найти все квазигармонические функции  $W(z)$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ), принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию*

$$\operatorname{Re} \left\{ \overline{h(t)} \cdot W(t) \right\} = 0, \quad (3)$$

где  $h(t) = a(t) + ib(t)$  – заданная на контуре  $L$  функция класса  $H(L)$  (т.е. удовлетворяющие на  $L$  условию Гельдера).

Следуя [2], сформулированную выше задачу  $\Gamma_n^0$  будем называть *однородной задачей Гильберта для квазигармонических функций рода  $n$* .

Важно отметить, что в силу представления (2) краевое условие (3) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re} \left( \overline{h(t)} \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} \right) = 0, \quad t \in L. \quad (4)$$

В свою очередь, равенство (4) есть краевое условие хорошо известной (см., например, [6, с. 245]) *обобщенной (дифференциальной) краевой задачи типа Гильберта* относительно аналитической в области  $T^+$  функции  $\varphi^+(z)$ , т.е. задача  $\Gamma_n^0$  является *неформальной моделью*

обобщенной (дифференциальной) краевой задачи Гильберта для аналитических функций.

В работе [2] в случае единичного круга  $T_1^+ = \{z: |z| < 1\}$  и произвольного  $n$  был предложен конструктивный алгоритм решения задачи  $\Gamma_n^0$ , позволяющий получить ее решение путем последовательного решения вспомогательной краевой задачи Гильберта в классе аналитических функций и одного линейного дифференциального уравнения Эйлера  $n$ -го порядка. Но оказалось, что картина разрешимости задачи  $\Gamma_n^0$  в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  существенным образом зависит от величины радиуса этого круга (в случае  $n=1$  ранее этот вопрос изучался в работе авторов [3], а в случае  $n=2$  – в работе [4]).

Основной целью настоящей работы является анализ устойчивости решений краевой задачи  $\Gamma_n^0$  в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  по отношению к изменению радиуса этого круга в случае, когда  $n=3$ .

**2. О неустойчивости решений однородной краевой задачи  $\Gamma_3^0$  в классах квазигармонических функций третьего рода в круге.** Всюду в дальнейшем рассматривается следующая задача  $\Gamma_3^0$ : *требуется найти все квазигармонические функции  $W(z)$  третьего рода в круге  $T_r = \{z: |z| < r\}$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_3(T_r) \cap H^{(3)}(L_r)$  и удовлетворяющие на  $L_r = \{t: |t| = r\}$  условию*

$$\operatorname{Re}\{\overline{h(t)} \cdot W(t)\} = 0, \quad (5)$$

где  $h(t) = a(t) + ib(t)$  – заданная на контуре  $L_r$  функция класса  $H(L_r)$ .

Поскольку в случае  $n=3$  представление (2) принимает вид:

$$W(z) = \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - 12 \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 \varphi^+(z), \quad (6)$$

где  $\varphi^+(z) \in A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ , а в точках окружности  $L_r = \{t: |t| = r\}$

выполняется равенство  $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ , то краевое условие (5) в рассматриваемом

случае можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ t^{-3} \overline{h(t)} \left( t^3 \frac{d^3 \varphi^+(t)}{dt^3} - 12 t^2 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} \right) \right\} + \\ & + \operatorname{Re} \left\{ t^{-3} \overline{h(t)} \left( 60 t \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^2 \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \varphi^+(t) \right) \right\} = 0, \quad t \in L_r. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, введя в рассмотрение вспомогательную аналитическую в круге  $T_r = \{z: |z| < r\}$  функцию

$$\Psi(z) = z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - 12z^2 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} +$$

$$+ 60z \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^2 \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \varphi^+(z), \quad z \in T_r, \quad (8)$$

краевое условие (7) можно переписать так:

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_3(t)} \cdot \Psi^+(t)\} = 0, \quad t \in L_r, \quad (9)$$

где  $h_3(t) = t^3 h(t)$ , а  $\Psi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L_r} \Psi(z)$ . В свою очередь, равенство (9) есть краевое условие обычной задачи Гильберта относительно аналитической в круге  $T_r$  функции  $\Psi(z)$ .

Число  $\chi = \operatorname{Ind} G_3(t) = 2(m+3)$ , где  $m = \operatorname{Ind} h(t)$ ,  $G_3(t) = -\frac{h_3(t)}{h_3(t)}$  (т.е. индекс

задачи Гильберта (9)) будем называть индексом исходной задачи  $\Gamma_3^0$ .

Пусть  $\chi = \operatorname{Ind} G_3(t) < 0$ . Тогда, как известно (см., например, [6]), задача Гильберта (9) имеет лишь тривиальное решение  $\Psi(z) \equiv 0$ . Следовательно, в силу (8) в этом случае получаем

$$z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - 12z^2 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} +$$

$$+ 60z \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^2 \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \varphi^+(z) = 0, \quad z \in T_r. \quad (10)$$

Итак, при  $\chi < 0$  аналитическая компонента  $\varphi^+(z)$  искомой квазигармонической функции  $W(z)$  должна удовлетворять однородному линейному дифференциальному уравнению Эйлера 3-го порядка (10).

Далее проверим, при каких значениях переменной  $r$  дифференциальное уравнение (10) имеет решения, принадлежащие классу  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ .

С помощью замены вида  $z = e^s$ ,  $\tilde{\varphi} = e^s$  приведем уравнение Эйлера (10) к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^3 \tilde{\varphi}(z)}{dz^3} - \left( \frac{3+15r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \tilde{\varphi}(z)}{dz^2} + \left( \frac{2+16r^2+74r^4}{(1+r^2)^2} \right) \frac{d\tilde{\varphi}(z)}{dz} -$$

$$- 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \tilde{\varphi}(z) = 0, \quad z \in T_r. \quad (11)$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (11):

$$\mu^3 - \left( \frac{3+15r^2}{1+r^2} \right) \mu^2 + \left( \frac{2+16r^2+74r^4}{(1+r^2)^2} \right) \mu - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 = 0. \quad (12)$$



Далее, используя формулы Кордано [8] и систему компьютерной математики Wolfram Mathematica [8], относительно корней  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  алгебраического уравнения (12) получаем следующие результаты.

1) если  $r = 1$ , то уравнение (12) имеет три целочисленных корня  $\mu_1 = 5, \mu_2 = 1, \mu_3 = 3$ ;

2) если  $r < 1$ , то лишь при указанных в таблице 1 значениях  $r$  алгебраическое уравнение (12) может иметь один целочисленный корень, принадлежащий промежутку  $[2; 4]$ ;

Таблица 1

$r \approx 0.631967$	$\mu_1 = 2$
$r \approx 0.354619$	$\mu_2 = 3$
$r \approx 0.612907$	$\mu_3 = 4$

3) если  $r > 1$ , то при четырех фиксированных значениях  $r$  из таблицы 2 уравнение (12) будет иметь лишь один целочисленный корень из промежутка  $[2; 5]$ .

Таблица 2

$r \approx 1.70643$	$\mu_1 = 2$
$r \approx 3.120779$	$\mu_2 = 3$
$r \approx 1.46861$	$\mu_3 = 4$
$r \approx 2.37260$	$\mu_4 = 5$

Таким образом, при  $r = 1$  однородное дифференциальное уравнение Эйлера (10) имеет три линейно независимых решения  $\varphi_1^+(z) = z, \varphi_2^+(z) = z^3$  и  $\varphi_3^+(z) = z^5$ , каждое из которых принадлежит классу  $A(T_1^+) \cap H^{(3)}(L_1)$ , т.е. при  $r = 1$  общее решение однородного дифференциального уравнения (10) можно задавать так:

$$\varphi^+(z) = d_1 z + d_2 z^3 + d_3 z^5, \quad (13)$$

где  $d_k = \sigma_k + i\gamma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – произвольные комплексные постоянные. Наконец, подставив функцию  $\varphi^+(z)$ , задаваемую формулой (13), в правую часть равенства (6), получим общее решение однородной задачи  $\Gamma_3^0$ :

$$W(z) = (4d_2 + 60d_3 z^2) - 12 \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} (4d_2 z + 20d_3 z^3) + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right)^2 (d_1 + 2d_2 z^2 + 5d_3 z^4) - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right)^3 (d_1 z + d_2 z^3 + d_3 z^5), \quad (14)$$

где  $d_k = \sigma_k + i\gamma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – произвольные комплексные постоянные.

Таким образом, при  $r = 1$  имеем следующий результат.

**Теорема 1.** Если  $T_1^+ = \{z: |z| < 1\}$  и индекс  $\chi = \text{Ind}G_3(t) < 0$ , то однородная задача  $\Gamma_3^0$  в классе  $\mathcal{Q}_3(T_1^+) \cap H^{(3)}(L_1)$  квазигармонических функций третьего рода безусловно разрешима и ее общее решение, задаваемое формулой (14), линейно зависит от шести произвольных действительных постоянных.

Если же  $r \approx 0.354619$ , или  $r \approx 0.612907$ , или  $r \approx 0.631967$ , а также  $r \approx 1.46861$ , или  $r \approx 1.70643$ , или  $r \approx 2.37260$ , или  $r \approx 3.120779$ , то однородное дифференциальное уравнение Эйлера (10) имеет одно линейно независимое решение, принадлежащее классу  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$  (а именно, либо  $\varphi_1^+(z) = z^2$ , либо  $\varphi_2^+(z) = z^3$ , либо  $\varphi_3^+(z) = z^4$ , либо  $\varphi_4^+(z) = z^5$ ). Значит, при каждом из указанных значений  $r$  общее решение однородного дифференциального уравнения (10) можно задавать в виде

$$\varphi^+(z) = b_k z^{k+1}, \quad (15)$$

где  $b_k = \nu_k + i\tau_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные комплексные постоянные. Тогда общее решение задачи  $\Gamma_3^0$  можно задавать так:

$$W(z) = (k-1)k(k+1)b_k z^{k-2} - 12 \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} (k(k+1)b_k z^{k-1}) + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 ((k+1)b_k z^k) - \\ - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 (b_k z^{k+1}). \quad (16)$$

Во всех остальных случаях ( $r \neq 1, r \neq 0.354619, r \neq 0.612907, r \neq 0.631967, r \neq 1.46861, r \neq 2.37260, r \neq 3.120779, r \neq 1.70643$ ) однородное дифференциальное уравнение Эйлера (10) не имеет нетривиальных (ненулевых) решений, принадлежащих классу  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ , а значит, в силу формулы (6), и задача  $\Gamma_3^0$  в указанных случаях не имеет нетривиальных решений.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.** Если индекс  $\chi = \text{Ind}G_3(t) < 0$  и  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , где  $r \approx 0.354619$  (или  $r \approx 0.612907$ , или  $r \approx 0.631967$ , или  $r \approx 1.46861$ , или  $r \approx 2.37260$ , или  $r \approx 3.20779$ , или  $r \approx 1.70643$ ), то однородная задача  $\Gamma_3^0$  в классе  $\mathcal{Q}_3(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$  квазигармонических функций третьего рода безусловно разрешима, и ее общее решение, задаваемое формулой (16), линейно зависит от двух произвольных действительных постоянных. Если же  $\chi = \text{Ind}G_3(t) < 0$  и  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , где  $r \neq 1, r \neq 0.354619, r \neq 0.612907, r \neq 0.631967, r \neq 1.46861, r \neq 2.37260, r \neq 3.120779, r \neq 1.70643$ , то задача  $\Gamma_3^0$  не имеет нетривиальных решений.

Предположим далее, что  $\chi = \text{Ind}G_2(t) \geq 0$ . В этом случае однородная задача Гильберта (9) в классе аналитических функций безусловно разрешима, и её общее решение можно задавать формулой (см., например, [1, с. 91]):

$$\Psi(z) = z^{m+3} X_0^+(z) \left( \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m+3} (c_k z^k + \bar{c}_k z^{-k}) \right), \quad z \in T_r^+, \quad (17)$$

где  $\alpha_0$  – произвольная действительная постоянная,  $c_k = \alpha_k + i\beta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m+3$ ) – произвольные комплексные постоянные, а  $X_0(z)$  – фундаментальная функция задачи.

Таким образом, при  $\chi \geq 0$  аналитическая компонента  $\varphi^+(z)$  искомой квазигармонической функции  $W(z)$  должна удовлетворять неоднородному линейному дифференциальному уравнению Эйлера 3-го порядка вида

$$z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - 12z^2 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + 60z \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^2 \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \varphi^+(z) = \Psi(z), \quad z \in T_r, \quad (18)$$

где  $\Psi(z)$  – функция, определяемая по формуле (17).

Предположим, что неоднородное дифференциальное уравнение (18) в классе функций  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$  разрешимо и уже найдено его общее решение  $\tilde{\varphi}^+(z)$ . Тогда в силу (6) решение искомой однородной задачи Гильберта  $\Gamma_3^0$  можно задавать формулой:

$$W(z) = \frac{d^3 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^3} - 12 \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d^2 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 \tilde{\varphi}^+(z), \quad (19)$$

где  $\tilde{\varphi}^+(z)$  – решение линейного дифференциального уравнения (18), принадлежащее классу  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ . Но с учетом формул (13), (15), выражение функции  $\tilde{\varphi}^+(z)$  может линейно зависеть не более, чем от  $\chi + l + 1$  произвольных действительных постоянных, где  $l$  – число линейно независимых (над полем действительных чисел) решений однородного дифференциального уравнения (10).

Итак, при  $\chi = \text{Ind}G_3(t) \geq 0$  можно сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 3.** Если индекс  $\chi = \text{Ind}G_3(t) \geq 0$  и  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , то однородная задача  $\Gamma_3^0$  в классе  $\mathcal{Q}_3(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$  квазигармонических функций третьего рода разрешима тогда и только тогда, когда линейное неоднородное дифференциальное уравнение (18) разрешимо в

классе аналитических функций  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ , и при этом общее решение задачи  $\Gamma_3^0$ , задаваемое формулой (19), линейно зависит не более чем от  $\chi + l + 1$  произвольных действительных постоянных.

На основании теорем 1–3 можно сделать следующий общий **вывод**: решения однородной краевой задачи  $\Gamma_3^0$  в классе квазигармонических функций третьего рода в круговых областях **неустойчивы** по отношению к изменению величины радиуса рассматриваемой круговой области. Оказалось, что основной причиной неустойчивости решений задачи Гильберта для квазигармонических функций в круге является то, что однородное дифференциальное уравнение Эйлера, к которому редуцируется соответствующая однородная задача Гильберта, при одних значениях радиуса рассматриваемой круговой области может иметь (нетривиальные) решения, а при других значениях радиуса оно вообще не имеет решений.

### Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Расулов К.М. Краевая задача Гильберта в классах квазигармонических функций в круге // Известия СмолГУ. 2014. № 4(28). С. 331–338.
3. Расулов К.М., Тимофеева Т.И. О картине разрешимости однородной краевой задачи Гильберта для квазигармонических функций в круговых областях // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2016. Т. 8, № 4. С. 33–40.
4. Расулов К.М., Тимофеева Т.И. О неустойчивости решений однородной задачи Гильберта для квазигармонических функций в круговых областях // Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения: сборник научных статей I Всероссийской научной конференции: 12–14 декабря 2017 г. В 2-х ч. Ч. 1 Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2017. С. 228–237.
5. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung  $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner Math. 1965. Schriften 23.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
7. Кодингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Спб.: Лань, 2008. 432 с.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.
9. Дьяконов В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. М., 2009. 624 с.

**К.М. Rasulov, T.I. Timofeeva**  
Smolensk State University

**ANALYSIS OF THE INSTABILITY OF SOLUTIONS OF THE  
HOMOGENEOUS HILBERT PROBLEM FOR QUASIHARMONIC  
FUNCTIONS OF THE THIRD GENUS IN CIRCULAR DOMAINS**

**Keywords:** *boundary value problem, Hilbert-type boundary value problem, quasiharmonic function, differential equation, cyclic domain, unit circumference, non-unit circumference, sustainability.*

**Abstract.** *When studying boundary value problems, the nature of their solutions with respect to small changes in the coefficients of boundary conditions or contours that are carriers of boundary conditions is of great importance. In this article, we consider the boundary value problem of the type of the Hilbert problem in classes of quasiharmonic functions of the third kind. The stability of solutions Hilbert boundary value problem in classes of quasiharmonic functions of the second kind with respect to the change in the radius of the considered circular domain is analyzed. We also constructed a complete picture of the solvability of the homogeneous Hilbert boundary value problem for quasiharmonic functions of the third kind in the circular domains of the domain under consideration.*

**К.М. Расулов, Ш.С. Ханкишиева**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 517.968.23

## **О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ**

Ключевые слова: *краевая задача типа Римана, кусочно квазигармоническая функция, дифференциальное уравнение Эйлера, круговые области, радиус круговой области.*

*В работе рассматривается краевая задача типа задачи Римана (задача сопряжения) в классах кусочно квазигармонических функций. Подробно исследуется однородная задача типа задачи Римана в классах кусочно квазигармонических функций третьего рода в круговых областях. В частности, в указанном случае для однородной задачи типа задачи Римана разработан явный метод решения, логическая суть которого состоит в сведении решения рассматриваемой однородной задачи к последовательному решению обычной однородной задачи Римана для аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера третьего порядка. Кроме того, установлена неустойчивость решений искомой однородной задачи по отношению к изменению величины радиуса рассматриваемой круговой области.*

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  конечную односвязную область  $T^+$ , ограниченную замкнутым гладким контуром  $L$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ .

Всюду в дальнейшем будем пользоваться обозначениями и терминами, принятыми в монографии [1].

Рассматривается следующая краевая задача  $R_n$ : *требуется найти все кусочно квазигармонические функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  с линией скачков  $L$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(m)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию*

$$W^+(t) = W^-(t) \cdot G(t) + g(t), \quad (1)$$

где  $G(t)$  и  $g(t)$  – заданные на  $L$  функции, удовлетворяющие условию Гельдера, причем  $G(t) \neq 0$  на  $L$ .

Следуя [2], сформулированную выше задачу  $R_n$  будем называть *задачей типа Римана для квазигармонических функций рода  $n$* , а соответствующую  $R_n$  однородную задачу ( $g(t) \equiv 0$ ) назовем *задачей  $R_n^0$* .

Так как всякую кусочно квазигармоническую функцию рода  $n$  в области  $T^+$  можно представить в виде (см., например, [1–3])

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z), z \in T^+ \\ W^-(z), z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где  $W^+(z)$  и  $W^-(z)$  определяются соответственно по формулам:

$$W^+(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+zz} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (3)$$

$$W^-(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+zz} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k}, \quad (4)$$

$A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  – аналитические соответственно в

областях  $T^+$  и  $T^-$  функции, называемые *аналитическими компонентами* квазигармонической функции  $W(z)$ , то краевое условие (1) можно переписать в виде:

$$\sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1+tt} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} = G(t) \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1+tt} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k} + g(t), \quad t \in L. \quad (5)$$

Но равенство (5) есть краевое условие обобщенной (дифференциальной) краевой задачи Римана относительно кусочно аналитической функции  $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ , то есть краевая задача  $R_n$

является неформальной моделью обобщенной (дифференциальной) краевой задачи Римана для аналитических функций.

Как известно (см., например, [4]), обобщенная задача Римана (5) в общем случае не решается в замкнутой форме. Поэтому является актуальной проблема выявления частных случаев задачи  $R_n$  (достаточно общего характера), когда она допускает полное описание картины ее разрешимости.

В работе [2] в случае единичного круга  $T_1^+ = \{z: |z| < 1\}$  и произвольного  $n$  был предложен конструктивный алгоритм решения задачи  $R_n$ , с помощью которого была построена полная картина разрешимости этой задачи в указанном случае. Но, как оказалось (см., например, [3]), картина разрешимости задачи  $R_n$  существенным образом зависит от величины радиуса круга  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , где  $r > 0$ . Поэтому становится актуальной проблема, состоящая в установлении зависимости картины разрешимости краевой задачи  $R_n$  от величины радиуса рассматриваемой круговой области. В случае  $n = 1$  и  $n = 2$  этот вопрос ранее изучался в работах авторов [3; 4].

Основной целью настоящего сообщения является анализ устойчивости картины разрешимости краевой задачи  $R_n$  в случае, когда  $n = 3$ , а область  $T^+$  есть круг  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ .

**2. О явном решении задачи  $R_3^0$  в круговых областях.** Пусть  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $L_r = \{t: |t| = r\}$ ,  $T_r^- = \bar{C} \setminus (T_r^+ \cup L_r)$ . Далее рассматривается следующая *задача*  $R_3^0$ : *требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно квазигармонические функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  третьего рода с линией скачков  $L_r$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_3(T_r^\pm) \cap H^{(3)}(L_r)$  и удовлетворяющие на  $L_r$  условию*

$$W^+(t) = G(t)W^-(t), \quad (7)$$

где  $G(t)$  – заданная на  $L_r$  функция, удовлетворяющая условию Гельдера, причем  $G(t) \neq 0$  на  $L_r$ .

Так как (см. [3; 4]) при  $n = 3$  квазигармонические функции  $W^+(z)$  и  $W^-(z)$  можно представить соответственно в виде

$$W^+(z) = \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - \frac{12\bar{z}}{1+zz} \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+zz} \right)^2 \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+zz} \right)^3 \varphi^+(z), \quad (8)$$

$$W^-(z) = \frac{d^3 \varphi^-(z)}{dz^3} - \frac{12z}{1+zz} \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{z}{1+zz} \right)^2 \frac{d\varphi^-(z)}{dz} - 120 \left( \frac{z}{1+zz} \right)^3 \varphi^-(z), \quad (9)$$

где  $\varphi^\pm(z) \in A(T_r^\pm) \cap H^3(L_r)$ , то решения  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  краевой задачи  $R_3^0$  будем искать в виде (8) и (9).

Поскольку в точках окружности  $L_r = \{t : |t| = r\}$  выполняется соотношение  $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ , с учетом (8) и (9) краевое условие (7) можно переписать так:

$$t^3 \frac{d^3 \varphi^+(t)}{dt^3} - 12t^2 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + 60t \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^2 \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \varphi^+(t) =$$

$$G(t) \left\{ t^3 \frac{d^3 \varphi^-(t)}{dt^3} - 12t^2 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \varphi^-(t)}{dt^2} + 60t \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^2 \frac{d\varphi^-(t)}{dt} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \varphi^-(t) \right\}, t \in L_r. \quad (10)$$

Введя в рассмотрение вспомогательную кусочно аналитическую функцию  $\Psi(z) = \{\Psi^+(z), \Psi^-(z)\}$  с линией скачков  $L_r = \{t : |t| = r\}$ , где

$$\Psi^\pm(z) = \frac{d^3 \varphi^\pm(z)}{dz^3} - \frac{12\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d^2 \varphi^\pm(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \frac{d\varphi^\pm(z)}{dz} - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 \varphi^\pm(z), z \in T_r^\pm, \quad (11)$$

а  $\varphi^\pm(z)$  – аналитические компоненты искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ , равенство (4) можно записать в виде

$$\Psi^+(t) = G(t)\Psi^-(t), \quad t \in L_r, \quad (12)$$

где  $\Psi^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L_r} \Psi^\pm(z)$ . В свою очередь, равенство (12) есть краевое условие *однородной* краевой задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Psi(z) = \{\Psi^+(z), \Psi^-(z)\}$  (см., например, [3, с. 106]).

Как известно (см., например, [5, с. 110]), если индекс  $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$ , то однородная задача Римана (12) неразрешима (то есть имеет лишь тривиальное решение  $\Psi^\pm(z) \equiv 0$ ). Если же  $\chi \geq 0$ , то она безусловно разрешима и её общее решение можно задавать формулой:

$$\Psi^\pm(z) = X^\pm(z)P_\chi(z), \quad z \in T_r^\pm, \quad (13)$$

где  $X(z) = \{X^+(z), X^-(z)\}$  – каноническая функция задачи, а  $P_\chi(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_\chi z^\chi$  – многочлен степени не выше  $\chi$  с произвольными комплексными коэффициентами.

Предположим, что  $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$ . Тогда  $\Psi^\pm(z) \equiv 0$  и, следовательно, в силу (11) аналитические компоненты  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  должны удовлетворять соответственно линейным однородным дифференциальным уравнениям Эйлера 3-го порядка следующего вида:

$$z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - 12z^2 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + 60z \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^2 \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \varphi^+(z) = 0, z \in T_r^+, \quad (14)$$



$$z^3 \frac{d^3 \varphi^-(z)}{dz^3} - 12z^2 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} + 60z \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^2 \frac{d\varphi^-(z)}{dz} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \varphi^-(z) = 0, z \in T_r^-. \quad (15)$$

Сделав замену  $z = e^s, \tilde{\varphi} = e^s$ , приведем уравнения Эйлера (14) и (15) к уравнениям с постоянными коэффициентами (см. также [6, с. 136]):

$$\frac{d^3 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^3} - \left( \frac{3+15r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^2} + \left( \frac{2+16r^2+74r^4}{(1+r^2)^2} \right) \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \tilde{\varphi}^+(z) = 0, z \in T_r^+, \quad (16)$$

$$\frac{d^3 \tilde{\varphi}^-(z)}{dz^3} - \left( \frac{3+15r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \tilde{\varphi}^-(z)}{dz^2} + \left( \frac{2+16r^2+74r^4}{(1+r^2)^2} \right) \frac{d\tilde{\varphi}^-(z)}{dz} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \tilde{\varphi}^-(z) = 0, z \in T_r^-. \quad (17)$$

Составим характеристическое уравнение соответствующее дифференциальному уравнению (16):

$$\mu^3 - \left( \frac{3+15r^2}{1+r^2} \right) \mu^2 + \left( \frac{2+16r^2+74r^4}{(1+r^2)^2} \right) \mu - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 = 0. \quad (18)$$

Решив уравнение (18), используя формулы Кардано и систему компьютерной математики Wolfram Mathematica относительно корней  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , получили следующие результаты:

1) если  $r = 1$ , то уравнение (18) имеет три целочисленных корня  $\mu_1 = 5, \mu_2 = 1, \mu_3 = 3$ ;

2) если  $r < 1$ , то лишь при трех значениях  $r$  алгебраическое уравнение (18) может иметь один целочисленный корень, принадлежащий промежутку  $[2; 4]$ ;

3) если  $r > 1$ , то при четырех фиксированных значениях  $r$  уравнение (18) будет иметь лишь один целочисленный корень из промежутка  $[2; 5]$ .

Из выше сказанного следует, что при  $r = 1$  однородное дифференциальное уравнение Эйлера (14) имеет три линейно независимых решения, а именно  $\varphi_1^+(z) = z, \varphi_2^+(z) = z^3$  и  $\varphi_3^+(z) = z^5$ . Каждое из этих решений принадлежит классу  $A(T_1^+) \cap H^{(3)}(L_1)$ . Таким образом, при  $r = 1$  общее решение однородного дифференциального уравнения (14) задается в виде:

$$\varphi^+(z) = c_1 z + c_2 z^3 + c_3 z^5, \quad (19)$$

где  $c_k = \alpha_k + i\beta_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – произвольные комплексные постоянные.

Методом степенных рядов нетрудно проверить, что однородное дифференциальное уравнение (15) не имеет в области  $T_r^-$  ненулевых решений.

Таким образом, общее решение однородной задачи  $R_3^0$  в данном случае имеет вид:

$$W(z) = \begin{cases} (4c_2 + 60c_3z^2) - 12 \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} (4c_2z + 20c_3z^3) + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 (c_1 + 2c_2z^2 + 5c_3z^4) - \\ - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 (c_1z + c_2z^3 + c_3z^5), & z \in T_r^+, \\ 0, & z \in T_r^-, \end{cases} \quad (20)$$

где  $c_k = \alpha_k + i\beta_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – произвольные комплексные постоянные.

Итак, при  $r = 1$  справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если  $T_1^+ = \{z : |z| < 1\}$  и индекс  $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$ , то однородная задача Римана  $R_3^0$  в классе  $\mathcal{Q}_3(T_1^+) \cap H^{(3)}(L_1)$  квазигармонических функций третьего рода безусловно разрешима, и ее общее решение, задаваемое формулой (20), линейно зависит от трех произвольных комплексных постоянных.

Если же  $r \approx 0.354619$ , или  $r \approx 0.612907$ , или  $r \approx 0.631967$ , а также  $r \approx 1.46861$ , или  $r \approx 1.70643$ , или  $r \approx 2.37260$ , или  $r \approx 3.120779$ , то однородное дифференциальное уравнение Эйлера (14) имеет одно линейно независимое решение, принадлежащее классу  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$  (а именно, либо  $\varphi_1^+(z) = z^2$ , либо  $\varphi_2^+(z) = z^3$ , либо  $\varphi_3^+(z) = z^4$ , либо  $\varphi_4^+(z) = z^5$ ). Значит, при каждом из указанных значений  $r$  общее решение однородного дифференциального уравнения (14) можно задавать в виде

$$\varphi^+(z) = a_k z^{k+1}, \quad (21)$$

где  $a_k = x_k + iy_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные комплексные постоянные. Следовательно, в этом случае общее решение задачи  $R_3^0$  можно задавать так:

$$W(z) = \begin{cases} (k-1)k(k+1)a_k z^{k-2} - 12 \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} (k(k+1)a_k z^{k-1}) + \\ + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 (k+1)a_k z^k - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 (a_k z^{k+1}), & z \in T_1^+, \\ 0, & z \in T_1^-, \end{cases} \quad (22)$$

Во всех остальных случаях ( $r \neq 1, r \neq 0.354619, r \neq 0.612907, r \neq 0.631967, r \neq 1.46861, r \neq 2.37260, r \neq 3.120779, r \neq 1.70643$ ) однородное дифференциальное уравнение Эйлера (14) не имеет нетривиальных (ненулевых) решений, принадлежащих классу  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ , а значит, в силу формулы (6) и задача  $R_3^0$  в указанных случаях не имеет нетривиальных решений.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.** Если индекс  $\chi = \text{Ind}G_3(t) < 0$  и  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , где  $r \approx 0.354619$  (или  $r \approx 0.612907$ , или  $r \approx 0.631967$ , или  $r \approx 1.46861$ , или  $r \approx 2.37260$ , или  $r \approx 3.120779$ , или  $r \approx 1.70643$ ), то однородная задача  $R_3^0$  в классе  $\mathcal{Q}_3(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$  квазигармонических функций третьего рода безусловно разрешима и ее общее решение, задаваемое формулой (22), линейно зависит от одной произвольной комплексной постоянной. Если же  $\chi = \text{Ind}G_3(t) < 0$  и  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , где  $r \neq 1$ ,  $r \neq 0.354619$ ,  $r \neq 0.612907$ ,  $r \neq 0.631967$ ,  $r \neq 1.46861$ ,  $r \neq 2.37260$ ,  $r \neq 3.120779$ ,  $r \neq 1.70643$ , то задача  $R_3^0$  не имеет нетривиальных решений.

Предположим далее, что  $\chi = \text{Ind}G_2(t) \geq 0$ . Как уже было отмечено выше, этом случае однородная задача Римана (12) в классе аналитических функций безусловно разрешима, и её общее решение можно задавать формулой (13).

Таким образом, при  $\chi \geq 0$  аналитические компоненты  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  должны удовлетворять соответственно следующим неоднородным линейным дифференциальным уравнениям Эйлера 3-го порядка:

$$z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - 12z^2 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + 60z \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \varphi^+(z) = \Psi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (23)$$

$$z^3 \frac{d^3 \varphi^-(z)}{dz^3} - 12z^2 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} + 60z \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right) \frac{d\varphi^-(z)}{dz} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \varphi^-(z) = \Psi^-(z), \quad z \in T_r^-, \quad (24)$$

где  $\Psi^+(z)$  и  $\Psi^-(z)$  – функции, определяемые по формуле (13).

Предположим, что неоднородные дифференциальные уравнения (23) и (24) соответственно в классах функций  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$  и  $A(T_r^-) \cap H^{(3)}(L_r)$  разрешимы и уже найдены их общие решения  $\tilde{\varphi}^+(z)$  и  $\tilde{\varphi}^-(z)$  соответственно. Тогда в силу (8) и (9) общее решение искомой однородной задачи Римана  $R_3^0$  можно задавать формулами:

$$W^+(z) = \frac{d^3 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^3} - 12 \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d^2 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 \tilde{\varphi}^+(z), \quad (25)$$

$$W^-(z) = \frac{d^3 \tilde{\varphi}^-(z)}{dz^3} - 12 \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d^2 \tilde{\varphi}^-(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \frac{d\tilde{\varphi}^-(z)}{dz} - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 \tilde{\varphi}^-(z). \quad (26)$$

Но с учетом формул (13) выражение функции  $\tilde{\varphi}^+(z)$  может линейно зависеть не более, чем от  $\chi + l + 1$  произвольных комплексных постоянных, где  $l$  – число линейно независимых (над полем комплексных чисел) решений однородного дифференциального уравнения (14). Кроме того, поскольку однородное уравнение (15) не имеет ненулевых решений, принадлежащих классу  $A(T_r^-) \cap H^{(3)}(L_r)$ , выражение функции  $\tilde{\varphi}^-(z)$  не содержит произвольных постоянных.

Таким образом, при  $\chi = \text{Ind}G(t) \geq 0$  можно сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Если индекс  $\chi = \text{Ind}G_2(t) \geq 0$  и  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ , то однородная задача  $R_3^0$  в классе  $\mathcal{Q}_3(T_r^\pm) \cap H^{(3)}(L_r)$  кусочно квазигармонических функций третьего рода разрешима тогда и только тогда, когда линейные неоднородные дифференциальные уравнения (23) и (24) разрешимы в классах аналитических функций  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$  и  $A(T_r^-) \cap H^{(3)}(L_r)$  соответственно, и при этом общее решение задачи  $R_3^0$ , задаваемое формулами (25) и (26), линейно зависит не более чем от  $\chi + l + 1$  произвольных комплексных постоянных, где  $l$  – число линейно независимых (над полем комплексных чисел) решений однородного дифференциального уравнения (14).*

### Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Расулов К.М. Об одном методе решения краевой задачи типа Римана в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ, 2015. № 2/1. С. 159-167.
3. Расулов К.М., Ханкишиева Ш.С. О краевой задаче типа Римана квазигармонических функций в круге неединичного радиуса // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII междунар. научной конф. Смоленск, 2016. Вып. 17. С. 211-217.
4. Расулов К.М., Ханкишиева Ш.С. О картине разрешимости однородной задачи Римана для квазигармонических функций в круговых областях // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII междунар. научной конф. Смоленск, 2017. Вып. 18. С. 212-214.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.

**K.M. Rasulov, Sh.S. Khankishiyeva**  
Smolensk State University

### ON THE INSTABILITY OF SOLUTIONS OF THE HOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM OF RYMAN FOR QUASI-HARMONIC FUNCTIONS OF THE THIRD GENUS IN CIRCULAR AREAS

**Keywords:** *Riemann type boundary value problem, piecewise quasiharmonic function, Euler differential equation, circular domains, radius of a circular domain.*

**Abstract.** *In this paper we consider boundary-value problems of the Riemann type (the conjugation problem) in the classes of piecewise quasiharmonic functions. A homogeneous problem of the type of the Riemann problem in classes of piecewise quasiharmonic functions of the third kind in circular domains is studied in detail. In particular, in this case a clear solution method is developed for a homogeneous problem of the type of the Riemann problem, the logical essence of which is to reduce the solution of the homogeneous problem under consideration to a sequential solution of the usual homogeneous Riemann problem for analytic functions and two third-order Euler linear differential equations. In addition, the instability of the solutions of the homogeneous problem sought with respect to the change in the radius value of the considered circular region is established, and a complete picture of its solvability is constructed.*

**Е.А. Ровба, К.А. Смотрицкий, Е.В. Дирвук**  
*Гродненский государственный университет имени Я. Купалы*

УДК 513.5

## **К ОЦЕНКЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО РАЦИОНАЛЬНОГО ПРОЦЕССА С УЗЛАМИ ЧЕБЫШЁВА – МАРКОВА**

Ключевые слова: *рациональные приближения, интерполирование, дробь Чебышёва – Маркова, константа Лебега.*

*В статье рассматривается оценка константы Лебега интерполяционного рационального процесса Лагранжа на отрезке  $[-1, 1]$  с узлами в нулях косинус-дробей Чебышёва – Маркова. Показано, что в случае двух действительных геометрически различных полюсов аппроксимирующих функций нормы фундаментальных многочленов Лагранжа ограничены. Основываясь на этом результате доказано, что в рассматриваемом случае оценка константы Лебега не зависит от расположения полюсов.*

**1. Введение.** Поведение константы Лебега интерполяционных полиномиальных процессов всегда вызывало живой интерес

исследователей (см., например, [1]). На этом пути получены весьма глубокие результаты [2].

В случае интерполирования рациональными функциями эта проблематика менее изучена. Начало исследований поведения констант Лебега интерполяционных рациональных процессов Лагранжа с узлами Чебышёва – Маркова на отрезке  $[-1, 1]$  было положено В.Н. Русаком [3], продолжено А.П. Старовойтовым [4]. Однако в этих работах оценки констант Лебега получены при определенных условиях на полюсы интерполяционных рациональных функций. Иной характер носит основной результат работы [5]. Приведем его.

Пусть  $\{a_k\}_{k=0}^n$  – последовательность действительных чисел такая, что  $a_0 = 0$ ,  $a_k \in (-1, 1)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Определим косинус-дробь Чебышёва – Маркова

$$M_n(x) = \cos \mu_n(x),$$

где

$$\mu_n(x) = \sum_{k=0}^n \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x},$$

причем

$$\mu_n'(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Обозначим через  $x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , нули функции  $M_n(x)$  и для всякой функции  $f(x)$ , определенной на отрезке  $[-1, 1]$  построим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа

$$L_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x), \quad (1)$$

где

$$l_k(x) = \frac{M_n(x)}{(x-x_k)M_n'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

**Теорема 1.** Для функции Лебега

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n |l_k(x)|$$

интерполяционного процесса Лагранжа (1) справедлива оценка

$$L_n(x) < 1 + Cd_n \ln \sum_{k=0}^n \left( \sqrt{\frac{1-a_k}{1+a_k}} + \sqrt{\frac{1+a_k}{1-a_k}} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $C$  — некоторая положительная постоянная,

$$d_n = \max_{k=1, 2, \dots, n} \left\{ \frac{\lambda_n(x_{k-1})}{\lambda_n(x_k)}, \frac{\lambda_n(x_k)}{\lambda_n(x_{k-1})} \right\}.$$

Отметим, что оценка (2) получена для всех действительных полюсов, без каких-либо ограничений на их расположение.

Хотелось бы обратить внимание, что правая часть в оценке (2), как и во всех предыдущих работах, является некоторой функцией, зависящей от полюсов. В связи с этим примечательным выглядит результат работы [6], где показано, что в одном частном случае при  $n = 2$  такой зависимости нет. Это направление исследований было продолжено в данной работе.

**2. Основные определения и вспомогательные результаты.** Пусть  $a \in [0, 1)$ . Рассмотрим косинус-дробь Чебышёва – Маркова с двумя геометрически различными действительными полюсами, симметричными относительно мнимой оси:

$$M_{2n}(x) = \cos \mu_{2n}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (3)$$

$$\mu_{2n}(x) = n \left( \arccos \frac{x+a}{1+ax} + \arccos \frac{x-a}{1-ax} \right).$$

Из этого определения непосредственно получается следующая лемма.

**Лемма 1.** *Функция  $M_{2n}(x)$  имеет  $2n$  простых, симметричных относительно мнимой оси, нулей  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$  на интервале  $(-1, 1)$ :*

$$-1 < x_{2n} < x_{2n-1} < \dots < x_{n+1} < 0 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < 1;$$

$$x_k = \frac{\cos \theta_k}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k}}, \quad \theta_k = \frac{2k-1}{4n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, 2n;$$

$$x_{n+k} = -x_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство нулей рассматриваемой косинус-дроби Чебышёва – Маркова.

**Лемма 2.** *Справедливы неравенства:*

$$\frac{1 - a^2 \sin^2 \theta_{k-1}}{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} < 9, \quad a \in [0, 1), \quad \theta_k = \frac{2k-1}{4n} \pi, \quad k = 2, 3, \dots, n+1.$$

Для всякой функции  $f(x)$ , определенной на отрезке  $[-1, 1]$ , построим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа

$$L_{2n}(x; f) = \sum_{k=1}^{2n} f(x_k) l_k(x), \quad (4)$$

где

$$l_k(x) = \frac{M_{2n}(x)}{(x - x_k) M_{2n}'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n. \quad (5)$$

Оказывается, что в рассматриваемом случае равномерные нормы фундаментальных многочленов Лагранжа ограничены в совокупности.

**Лемма 3.** *Имеют место неравенства:*

$$\max_{x \in [-1, 1]} |l_k(x)| < 6, \quad k = 1, 2, \dots, n+1.$$

**3. Основной результат.** По определению, функция Лебега интерполяционного процесса равна

$$\Lambda_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} |l_k(x)|,$$

а константа Лебега задается соотношением

$$\Lambda_{2n} = \max_{x \in [-1,1]} \Lambda_{2n}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

**Теорема 2.** Для константы Лебега интерполяционного рационального процесса Лагранжа (4) справедлива оценка

$$\Lambda_{2n} \leq C_1(1 + \ln n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $C_1$  – некоторая положительная постоянная.

Для доказательства теоремы 2 достаточно проверить выполнение неравенства  $\Lambda_{2n}(x) \leq C_1(1 + \ln n)$  для произвольного  $x \in [-1, 1]$ . Очевидно, если  $x = x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ , то  $\Lambda_{2n}(x_k) = 1$ .

Пусть теперь  $x \in [0, 1]$ . Тогда в силу четности дроби Чебышёва – Маркова (3)

$$\Lambda_{2n}(x) \leq 2 \sum_{k=1}^n |l_k(x)|.$$

Обозначим через  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , номер такой, что  $x_j < x < x_{j-1}$  (полагаем, что  $x_0 = 1$ ). Представим сумму в правой части последнего равенства в виде

$$\Lambda_{2n}(x) \leq 2 \left( S_1(x) + \sum_{k=j-2}^{j+1} |l_k(x)| + S_2(x) \right),$$

где

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{j-3} |l_k(x)|, \quad S_2(x) = \sum_{k=j+2}^n |l_k(x)|.$$

Заметим, что при  $j = 1, 2, 3$  будет отсутствовать сумма  $S_1(x)$ , а при  $j = n - 1, n$  – сумма  $S_2(x)$ . С учетом леммы 3

$$\Lambda_{2n}(x) \leq 2(S_1(x) + S_2(x) + 24). \quad (6)$$

Теперь займемся суммой  $S_1(x)$ . Пользуясь определением функций (3) и фундаментальных многочленов Лагранжа (5), легко видеть, что при  $k = 1, 2, \dots, j - 3$

$$|l_k(x)| = \frac{(1 - a^2 x_k^2) \sqrt{1 - x_k^2}}{2n \sqrt{1 - a^2} (x_k - x)}.$$

Полагая  $x = \cos \theta$  и применяя лемму 2, получаем

$$|l_k(x)| \leq \frac{\sin \theta_k}{2n(1 - a^2 \sin^2 \theta_k)} \frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} + \cos \theta_k \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta})}{\cos^2 \theta_k - \cos^2 \theta}.$$

Учитывая расположение точек  $\theta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, j - 3$ , последнюю оценку можно преобразовать следующим образом:

$$|l_k(x)| \leq \frac{\sin \theta_k}{2n(1 - a^2 \sin^2 \theta_k)} \frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta} \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} (\cos \theta + \cos \theta_k)}{\cos^2 \theta_k - \cos^2 \theta} \leq \frac{\sin \theta_k}{2n(\cos \theta_k - \cos \theta)}.$$



Поэтому

$$S_1(x) \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{j-3} \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - \cos \theta}.$$

Заметим далее, что функция  $\sin x / (\cos x - \cos \theta)$  возрастает при  $x \in [0, \theta)$ . Следовательно,

$$\frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - \cos \theta} \leq \frac{\sin x}{\cos x - \cos \theta}, \quad x \in [\theta_k, \theta_{k+1}].$$

Интегрируя последнее неравенство по  $x$  от  $\theta_k$  до  $\theta_{k+1}$ ,

$$\frac{\pi}{2n} \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - \cos \theta} \leq \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\sin x dx}{\cos x - \cos \theta}.$$

Значит,

$$S_1(x) \leq \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_{j-2}} \frac{\sin x dx}{\cos x - \cos \theta} < \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_{j-2}} \frac{\sin x dx}{\cos x - \cos \theta} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_{j-2} - \cos \theta}.$$

Далее,

$$1 - \cos \theta \leq 2, \quad \cos \theta_{j-2} - \cos \theta > \cos \theta_{j-2} - \cos \theta_{j-1}.$$

Отсюда

$$S_1(x) \leq -\frac{1}{\pi} \left( \ln \sin \frac{\theta_{j-2} + \theta_{j-1}}{2} + \ln \sin \frac{\pi}{4n} \right).$$

Осталось заметить, что  $\theta_{j-1} > \theta_{j-2} > \theta_1$ , и поэтому

$$\ln \sin \frac{\theta_{j-2} + \theta_{j-1}}{2} > \ln \sin \theta_1 = \ln \sin \frac{\pi}{4n}.$$

Окончательно для  $S_1(x)$  будем иметь

$$S_1(x) \leq -\frac{2}{\pi} \ln \sin \frac{\pi}{4n} \leq -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{2n} = \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{2 \ln 2}{\pi}.$$

Аналогичная оценка справедлива и для суммы  $S_2(x)$ . Подставляя полученный результат в неравенство (6), заключаем

$$\Lambda_{2n}(x) \leq \frac{8}{\pi} \ln n + \frac{8 \ln 2}{\pi} + 48.$$

Случай  $x \in [-1, 0]$  рассматривается таким же образом. Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что значение константы  $C_1$  из неравенства в теореме 2 было оценено численным образом с помощью системы компьютерной математики Maple. Полученный результат позволяет сделать предположение, что  $C_1 \leq 2$  (для сравнения см. [1, с. 125]). Кроме того, соответствующие вычисления были проведены и в некоторых других случаях выбора полюсов дробей Чебышёва – Маркова, что делает возможным выдвинуть гипотезу о независимости константы Лебега от параметров  $\{a_k\}_{k=0}^n$ .

## Литература

1. Привалов А.А. Теория интерполирования функций. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1990. 229 с.
2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М: Наука, 1977. 511 с.
3. Русак В.Н. Об интерполировании рациональными функциями с фиксированными полюсами // ДАН БССР. 1962. Т. 4, № 9. С. 548–550.
4. Старовойтов А.П. О рациональной интерполяции с фиксированными полюсами // Известия АН БССР. Серия физ.-матем. наук. 1983. № 6. С.105–106.
5. Ровба Е.А., Дирвук Е.В. О константе Лебега интерполяционных рациональных процессов Лагранжа по узлам Чебышева – Маркова // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. 2015. № 4. С. 32–38.
6. Ровба Е.А., Козловская Н.Ю. К вопросу об оценке константы Лебега интерполяционного рационального процесса с узлами Чебышёва – Маркова // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер 2. 2016. Т.6, № 3. С.6–11.

**Y.A. Rouba, K.A. Smatrytski, Y.U. Dirvuk**  
Yanka Kupala State University of Grodno

### ON THE ESTIMATION OF LEBESGUE CONSTANT OF THE INTERPOLATION RATIONAL PROCESS WITH CHEBYSHEV – MARKOV NODES

**Keywords:** *rational approximation, interpolation, Chebyshev – Markov fraction, Lebesgue constant.*

**Abstract.** *In this paper we consider the Lebesgue constant of the interpolation rational Lagrange process on the interval  $[-1,1]$  with nodes at the zeros of the Chebyshev – Markov cosine-fractions. It is shown that in the case of two real geometrically different poles of approximating functions, the norms of the Lagrange fundamental polynomials are bounded. Based on this result, it is proved that in the case under consideration the estimate of the Lebesgue constant does not depend on the location of the poles.*

**Т.Б. Солодченкова, П.Н. Елисеева**  
Смоленский государственный университет

УДК 544.774

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ СЕДИМЕНТАЦИИ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

**Ключевые слова:** *аэрозоль, седиментация, поправка Каннингема, число Кнудсена, коэффициент сопротивления среды, число Рейнольдса, формула Клячко.*

*В статье представлены расчёт скорости седиментации в воздухе аэрозольных частиц порошка железа, цемента и сосны на основе экспериментальных данных об их диаметрах и модели сферичности их формы. Проведено теоретическое обоснование вида расчётной формулы с учётом значений поправки Каннингема и числа Кнудсена, коэффициента сопротивления среды и числа Рейнольдса. На основе полученных значений скорости седиментации построены графики её зависимости от диаметров аэрозольных частиц.*

Под аэрозолями или аэродисперсными системами понимают [1; 2] дисперсные системы из мелких (твёрдых и жидких) частиц во взвешенном состоянии в газовой среде. Аэрозоли распространены в воздухе, в любом помещении. Их изучение имеет большое значение при решении задач, связанных с контролем содержания аэрозолей в помещениях, созданием условий, благоприятных для здоровья людей. Свойства аэрозолей существенно определяет седиментация – оседание частиц дисперсной фазы в газе или жидкости под действием силы тяжести. Важной характеристикой этого процесса служит *скорость седиментации* (оседания) частиц, зависящая от диаметра аэрозольной частицы.

Рассмотрим случай оседания аэрозольной частицы в неподвижном воздухе [2]. Тогда скорость седиментации называют стационарной. Она направлена вдоль силы тяжести и равна:

$$v_s = \tau \cdot g, \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\tau$  – время оседания частицы. Для частиц сферической формы диаметром  $d$  и плотностью  $\rho_g$  время оседания в среде плотностью  $\rho$  и динамической вязкостью  $\eta$  равно:

$$\tau = d^2 \cdot (\rho - \rho_g) / (18 \cdot \eta). \quad (2)$$

В случае, когда диаметр аэрозольной частицы мал ( $d < 1$  мкм) и близок к средней длине свободного пробега молекул среды, при их столкновениях возникает «явление скольжения» (сила сопротивления среды становится функцией сечения частицы). Чем меньше диаметр частицы, тем меньше сила сопротивления и больше роль инерции молекул среды. Поэтому необходимо учитывать поправку Каннингема, характеризующую переход от вязкого течения к молекулярному:

$$C_c = 1 + Kn \cdot C_m, \quad (3)$$

где  $Kn$  – число Кнудсена,  $C_m$  – коэффициент изотермического скольжения. Число Кнудсена находят по формуле:

$$Kn = 2L/d,$$

где  $L$  – средняя длина свободного пробега молекул газа. Для воздуха:  $L = 0,065$  мкм (при  $0$  °C) и  $L = 0,071$  мкм (при комнатных температурах)

20-25°C). Если  $Kn < 1$ , то  $C_m = 1,257$ , а если  $Kn > 1$ , то  $C_m = 1,657$ . Тогда формула (1) примет вид:

$$v_s = \tau \cdot g \cdot C_c. \quad (4)$$

В случае больших аэрозольных частиц ( $d > 1 \text{ мкм}$ ) сила сопротивления среды становится значительной по сравнению с силой тяжести, и скорость  $v_s$  определяют из условия равенства сил:

$$(\pi \cdot d^2 / 6) \cdot (\rho - \rho_g) \cdot g = C_D \cdot (\pi \cdot d^2 / 4) \cdot \rho_g \cdot (v_s^2 / 2), \quad (5)$$

где  $C_D$  – коэффициент сопротивления среды, и величина, равная произведению коэффициента сопротивления среды и числа Рейнольдса

$$C_D \cdot Re^2 = (4/3) \cdot d^2 \cdot \rho_g \cdot (\rho - \rho_g) \cdot g / \eta^2, \quad (6)$$

не зависит от скорости седиментации, является постоянной для заданного состояния аэрозольной системы. В таблице 1 представлены значения  $Re$ ,  $C_D$  и  $C_D Re^2$ .

Таблица 1

$Re$	$C_D$	$C_D Re^2$		$Re$	$C_D$	$C_D Re^2$
0,1	240	2,4		100	1,07	$1,07 \cdot 10^4$
0,2	120	4,8		200	0,77	$3,8 \cdot 10^4$
0,3	80	7,2		300	0,65	$5,6 \cdot 10^4$
0,5	49,5	12,4		500	0,55	$13,8 \cdot 10^4$
0,7	36,5	17,9		700	0,5	$24,5 \cdot 10^4$
1	26,5	26,5		1000	0,46	$46,0 \cdot 10^4$
2	14,6	58,4		2000	0,42	$16,8 \cdot 10^5$
3	10,4	93,6		3000	0,4	$36,0 \cdot 10^5$
5	6,9	172,5		5000	0,385	$96,3 \cdot 10^5$
7	5,3	259,7		7000	0,39	$19,1 \cdot 10^6$
10	4,1	410		10000	0,405	$40,5 \cdot 10^6$
20	2,55	1020		20000	0,45	$18,0 \cdot 10^7$
30	2,0	1800		30000	0,47	$42,3 \cdot 10^7$
50	1,5	3750		50000	0,49	$12,3 \cdot 10^8$
70	1,27	6223		70000	0,5	$24,5 \cdot 10^8$

В зависимости от числа Рейнольдса  $Re$  коэффициент сопротивления среды  $C_D$  оцениваем следующим образом:

1) в случае ламинарного потока ( $Re < 1$ )

$$C_D = 24/Re; \quad (7)$$

2) в случае промежуточного потока ( $1 \leq Re \leq 1000$ ) существует много эмпирических формул для  $C_D$ , но одной из наиболее удачных является формула Клячко

$$C_D = 24/Re + 4/\sqrt[3]{Re}; \quad (8)$$

3) в области малой турбулентности ( $1000 < Re < 2 \cdot 10^5$ )

$$C_D = 0,44; \quad (9)$$

4) в области турбулентности ( $Re > 2 \cdot 10^5$ )

$$C_D = 0,10. \quad (10)$$

Таким образом, для крупных частиц с  $d > 1$  мкм и числом Рейнольдса  $Re > 1$  скорость седиментации  $v_s$  находим из формулы (5):

$$v_s = \sqrt{\frac{4 \cdot d \cdot (\rho - \rho_g) \cdot g}{3 \cdot C_D \cdot \rho_g}}, \quad (11)$$

в которой значение  $C_D$  определяется выражением (8), (9) или (10). А если  $d > 1$  мкм, но  $Re < 1$ , то для скорости  $v_s$  справедлива формула (3).

В качестве примера для нахождения скорости седиментации по расчётным формулам (11) или (4) нами были сделаны наблюдения с помощью микроскопа размеров аэрозольных частиц, часто встречающихся в быту – железных, цементных и древесных (сосновых). Их диаметры находятся в интервале от 0,5 мкм до 45,5 мкм, плотность  $\rho_g$ -частиц соответственно равна 7800 кг/м<sup>3</sup>, 1300 кг/м<sup>3</sup> и 520 кг/м<sup>3</sup>. Частицы находятся в воздухе, поэтому  $\rho = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>,  $\eta = 18,37 \cdot 10^{-6}$  кг/(м·с).

Таким образом, для частиц, у которых  $d = 0,5$  мкм, скорость седиментации находится по формуле (4) в сочетании с формулами (2) и (3). Число Кнудсена при температуре (20-25) °С оказывается равным

$$Kn = \frac{2 \cdot 0,071}{0,5} = 0,284 < 1.$$

Поправку Каннингема находим по формуле (3):

$$C_C = 1 + 0,284 \cdot 1,257 = 1,357.$$

Следовательно, скорость седиментации для частиц порошка *железа*:

$$v_s(Fe) = \frac{1}{18} \cdot \frac{(0,5 \cdot 10^{-6})^2 \cdot (7800 - 1,29)}{18,37 \cdot 10^{-6}} \cdot 9,81 \cdot 1,357 = 78,4 \cdot 10^{-6} \text{ (м/с)}.$$

Аналогично находим скорости седиментации для частиц *цемента* и *сосны*:  $v_s(\text{цем}) = 13,05 \cdot 10^{-6}$  (м/с) и  $v_s(\text{сосн}) = 5,22 \cdot 10^{-6}$  (м/с).

Для более крупных частиц порошка *железа*, диаметр которых оказался порядка  $d = 8$  мкм, сначала оцениваем комплекс  $C_D Re^2$  по формуле (6):

$$C_D \cdot Re^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{(8 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 1,29 \cdot (7800 - 1,29) \cdot 9,81}{(18,38 \cdot 10^{-6})^2} = 0,199.$$

Затем по таблице 1 определяем число Рейнольдса:  $Re = 0,00831$ . Поскольку  $Re < 1$  и  $d > 1$  мкм, скорость седиментации для частиц порошка *железа* определяется по формуле (1), с учётом (2):

$$v_s = \frac{1}{18} \cdot \frac{(8 \cdot 10^{-6})^2 \cdot (7800 - 1,29)}{18,37 \cdot 10^{-6}} \cdot 9,81 = 0,015 \text{ (м/с)}.$$

Аналогично проводятся расчеты скорости седиментации для *цемента* и *сосны*:  $v_s(\text{цем}) = 2,463 \cdot 10^{-3}$  (м/с) и  $v_s(\text{сосн}) = 9,839 \cdot 10^{-4}$  (м/с).

Подобным образом провели расчёты характеристик седиментации для частиц, диаметры которых в интервале 8 – 38 мкм (таблица 2).

Для сравнительно крупных частиц порошка *железа* диаметром  $d = 45,5$  мкм значения комплекса и числа Рейнольда (см. (9) и таблицу 1):

$$C_D \cdot Re^2 = 36,694, \quad Re = 1,257.$$

Поскольку  $d > 1$ ,  $Re > 1$ , то применяем формулу (11) для вычисления коэффициента сопротивления среды:

$$C_D = \frac{24}{1,257} + \frac{4}{(1,257)^{1/3}} = 22,779.$$

И скорость седиментации рассчитываем по формуле (14). Аналогично – для аэрозольных частиц *цемента* и *сосны*.

Таблица 2

Частицы	$C_D Re^2$	$Re$	$v_s$ , м/с	$d$ , мкм
Железо	1,451	0,06	0,056	15,5
Цемент	0,242	0,01	0,0093	
Сосна	0,096	0,004	0,0037	
Железо	4,74	0,197	0,122	23,0
Цемент	0,789	0,033	0,02	
Сосна	0,315	0,013	0,0081	
Железо	11,052	0,446	0,215	30,5
Цемент	1,841	0,077	0,036	
Сосна	0,735	0,031	0,014	
Железо	21,375	0,807	0,334	38,0
Цемент	3,56	0,148	0,056	
Сосна	1,422	0,059	0,022	
Цемент	6,111	0,255	0,08	45,5
Сосна	2,441	0,1	0,032	

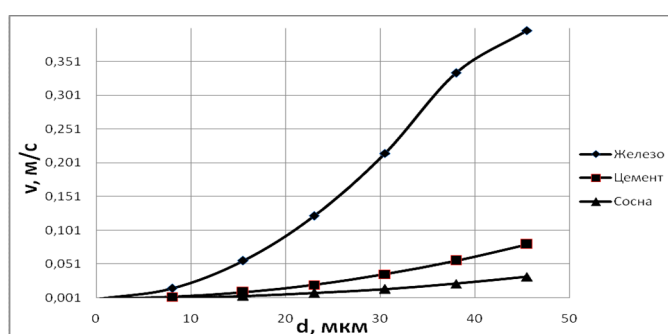


Рис. 1

По результатам всех расчётов построен график (рис. 1) зависимости скорости седиментации  $v_s$  от диаметра частицы  $d$ . Из графика видно, что с ростом диаметра частицы скорость оседания увеличивается нелинейно (более крупные частицы оседают быстрее). Кроме того, при одном и том же диаметре частицы железа всегда оседает быстрее, а сосны – медленнее.

## Литература

1. Кондратьев К.Я., Москаленко Н.И., Поздняков Д.В. Атмосферный аэрозоль. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 212 с.
2. Райст П. Аэрозоли. Введение в теорию: пер. с англ. М.: Мир, 1987. 280 с.

**T.B. Solodchenkova, P.N. Eliseeva**  
Smolensk state University

### DETERMINATION OF THE SEDIMENTATION VELOCITY OF AEROSOL PARTICLES

**Keywords:** *aerosol, sedimentation, Cunningham amendment, the Knudsen number, the ratio of the resistance of the medium, the Reynolds number, the formula of Klyachko.*

**Abstract.** *The article presents the calculation of the sedimentation velocity of the air particles of iron powder, cement and pine on the basis of experimental data on their diameters and sphericity of the model. The theoretical substantiation of the formula given the values of the Cunningham amendment and the Knudsen number, the ratio of the resistance of the medium and the Reynolds number. Based on the obtained values of the sedimentation velocity of the graphs of the dependence of the diameters of aerosol particles.*

**Т.Б. Солодченкова, Е.А. Политаева**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

### РАСЧЁТ УЗЛОВЫХ ЛИНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МЕМБРАН

Ключевые слова: *мембрана, однородное линейное дифференциальное уравнение, собственная частота, стоячая волна, узловая линия, пучность, узел.*

*В статье представлена общая формула стоячей волны в случае прямоугольной мембраны, получены формулы стоячих волн для частного случая квадратной мембраны и на их основе проведён расчёт узловых линий для экспериментальной квадратной мембраны в виде клеёнки, на которую насыпан тонкий слой кукурузной муки. Результаты расчёта оформлены в виде графиков уравнений узловых линий при возбуждении стоячих волн низкой частоты.*

Мембраны довольно широко распространены в повседневной жизни. К ним можно отнести элементы натяжных и подвесных потолков, тенты и пр. Рассмотрим смещение точек плоской прямоугольной мембраны со сторонами  $m$  и  $l$  в направлении,

перпендикулярном плоскости  $XOY$  мембраны. Стороны  $l$  (вдоль оси  $OX$ ) и  $m$  (вдоль оси  $OY$ ) закреплены. Функция  $u(x,y,t)$  отклонения точек мембраны от плоскости  $XOY$  (прогиба) удовлетворяет краевым условиям:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=m} = 0.$$

Чтобы сделать расчёт узловых линий, необходимо решить однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u''_{tt} - a^2(u''_{xx} + u''_{yy}) = 0.$$

Решением в общем виде (по методу разделения переменных) служит уравнение стоячей волны для прямоугольной мембраны в виде:

$$u_{k_1, k_2}(x, y, t) = (\alpha_{k_1, k_2} \cos(\omega_{k_1, k_2} t) + \beta_{k_1, k_2} \sin(\omega_{k_1, k_2} t)) \cdot \sin(\lambda_{k_1} x) \cdot \sin(\mu_{k_2} y), \quad (1)$$

где числа  $\alpha_{k_1, k_2}$  и  $\beta_{k_1, k_2}$  – постоянные, определяющие амплитудные смещения точек мембраны, индексы  $k_1$  и  $k_2$  – целые числа  $1, 2, 3, \dots$ , числа  $\lambda_{k_1}$  и  $\mu_{k_2}$  являются собственными значениями краевых задач для собственных функций  $X_{k_1}(x)$ ,  $Y_{k_2}(y)$ , играют роль волновых чисел

$$\lambda_{k_1} = k_1 \cdot \pi / l, \quad \mu_{k_2} = k_2 \cdot \pi / m,$$

а частоты, называемые собственными частотами прямоугольной мембраны, определяются формулой

$$\omega_{k_1, k_2} = \pi \cdot a \cdot \sqrt{(k_1/l)^2 + (k_2/m)^2}. \quad (2)$$

Каждая точка  $(x, y)$  мембраны совершает поперечные гармонические колебания с амплитудой

$$\sqrt{\alpha_{k_1, k_2}^2 + \beta_{k_1, k_2}^2} \cdot \sin(\lambda_{k_1} \cdot x) \cdot \sin(\mu_{k_2} \cdot y).$$

При этом все точки мембраны одновременно достигают своего максимального отклонения.

Если  $k_1 = 1$  и  $k_2 = 1$ , то мембрана имеет вид выпуклой поверхности, с одной пучностью (максимальным отклонением), расположенной симметрично в плоскости  $XOY$ , то есть на пересечении диагоналей мембраны (в частности, для квадратной мембраны такая пучность расположена строго в центре квадрата). Другие стоячие волны в зависимости от значений  $k_1$  и  $k_2$  имеют более сложный вид: пучности расположены симметрично в разных частях мембраны, которые разделены узловыми линиями. Узловые линии образованы покоящимися точками с координатами

$$x = \frac{k_1 - 1}{k_1} \cdot l, \quad y = \frac{k_2 - 1}{k_2} \cdot m.$$

Наиболее простой расчёт узловых линий производится в случае квадратной мембраны. Для этого положим  $m = l$ . Экспериментальные значения:  $m = l = 0,4$  м. Тогда формула (2) примет вид

$$\omega_{k_1, k_2} = \frac{\pi \cdot a}{l} \cdot \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \quad (3)$$



Следовательно, если  $k_1^2 \neq k_2^2$ , то стоячие волны описываются уравнениями типа (1):

$$u_{k_1, k_2} = (\alpha_{k_1, k_2} \cos(\omega_{k_1, k_2} t) + \beta_{k_1, k_2} \sin(\omega_{k_1, k_2} t)) \cdot \sin\left(\frac{k_1 \pi}{l} x\right) \cdot \sin\left(\frac{k_2 \pi}{l} y\right), \quad (4)$$

$$u_{k_2, k_1} = (\alpha_{k_2, k_1} \cos(\omega_{k_2, k_1} t) + \beta_{k_2, k_1} \sin(\omega_{k_2, k_1} t)) \cdot \sin\left(\frac{k_2 \pi}{l} x\right) \cdot \sin\left(\frac{k_1 \pi}{l} y\right). \quad (5)$$

Они имеют одинаковую частоту

$$\omega_{k_1, k_2} = \omega_{k_2, k_1}. \quad (6)$$

С учётом (6) и полагая  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ , выражение (3) примет вид:

$$\omega_{k_1 k_2} = \frac{\pi \cdot a}{l} \sqrt{5}. \quad (7)$$

Будем искать узловые линии мембраны такого колебания, то есть все её точки (кроме краев), которые остаются в покое. Это означает, что при  $t \geq 0$  верно равенство:

$$u_{1,2} + u_{2,1} = 0,$$

или, подставив формулы (4) и (5),

$$\begin{aligned} u_{1,2} + u_{2,1} = & (\alpha_{1,2} \cos\left(\frac{\pi \cdot a}{l} \sqrt{5} \cdot t\right) + \beta_{1,2} \sin\left(\frac{\pi \cdot a}{l} \sqrt{5} \cdot t\right)) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot y\right) + \\ & + (\alpha_{2,1} \cos\left(\frac{\pi \cdot a}{l} \sqrt{5} \cdot t\right) + \beta_{2,1} \sin\left(\frac{\pi \cdot a}{l} \sqrt{5} \cdot t\right)) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot y\right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для точек узловых линий должно иметь место равенство

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot y\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot y\right)} = - \frac{\alpha_{2,1} \cos\left(\frac{\pi \cdot a}{l} \sqrt{5} \cdot t\right) + \beta_{2,1} \sin\left(\frac{\pi \cdot a}{l} \sqrt{5} \cdot t\right)}{\alpha_{1,2} \cos\left(\frac{\pi \cdot a}{l} \sqrt{5} \cdot t\right) + \beta_{1,2} \sin\left(\frac{\pi \cdot a}{l} \sqrt{5} \cdot t\right)}.$$

Из полученного соотношения (8) следует, что

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot y\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot y\right)} = \frac{p}{q} = \text{const}. \quad (8)$$

Поскольку внутренние точки квадратной мембраны с координатами  $0 < x < l$  и  $0 < y < l$  (в эксперименте  $0 < x < 0,4 \text{ м}$  и  $0 < y < 0,4 \text{ м}$ ) колеблются,

$$\sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \neq 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot y\right) \neq 0.$$

Поэтому, преобразуя левую часть соотношения (8), получим:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot y\right) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot y\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot y\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)} = \frac{p}{q},$$

$$y = \frac{l}{\pi} \cdot \arccos \left( \frac{p}{q} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{l} \cdot x \right) \right). \quad (9)$$

Для экспериментальной мембраны –

$$y = \frac{0,4}{\pi} \cdot \arccos \left( \frac{p}{q} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{0,4} \cdot x \right) \right).$$

Формула (9) является уравнением узловых линий, которые соответствуют низшему обертому. Экспериментально их можно наблюдать, если по одному из закреплённых краёв мембраны (которую можно посыпать тонким слоем, например, кукурузной муки) провести смычком и затем предоставить мембрану самой себе. Мембрана начнёт совершать колебания с одной из собственных частот, а песок, скатываясь с пучностей, будет скапливаться вдоль узловых линий. Все узловые линии проходят через центр мембраны  $x = y = l/2 = 0,2$  (м). Форма узловых линий зависит от значения постоянной  $p/q$ .

Если  $p = q \neq 0$  или  $p = -q \neq 0$ , то уравнение (9) примет вид уравнения диагонали мембраны (рис. 1 или рис. 2 соответственно):

$$y = x \quad \text{или} \quad y = l - x = 0,4 - x \text{ (м)}.$$

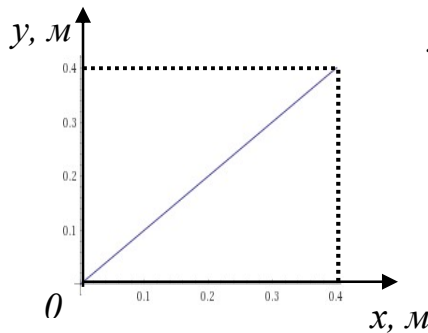


Рис. 1

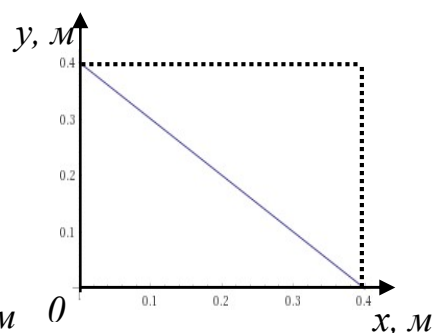


Рис. 2

Если  $(p/q) > 1$  или  $(p/q) < -1$ , то узловая линия (рис. 3 или 4) ограничена значениями  $x$ , которые образуют полосу, параллельную  $y$ :

$$|x - l/2| \leq \arcsin (q/p), \quad \text{то есть} \quad |x - 0,2| \leq \arcsin (q/p).$$

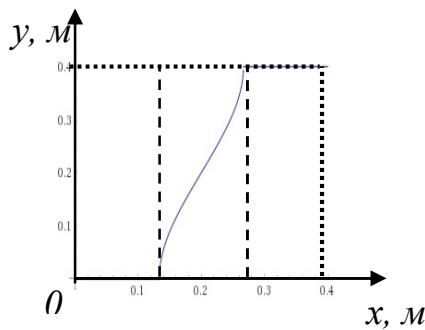


Рис. 3

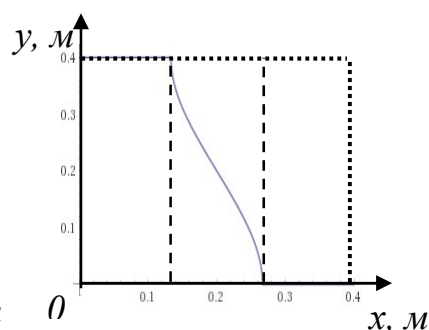
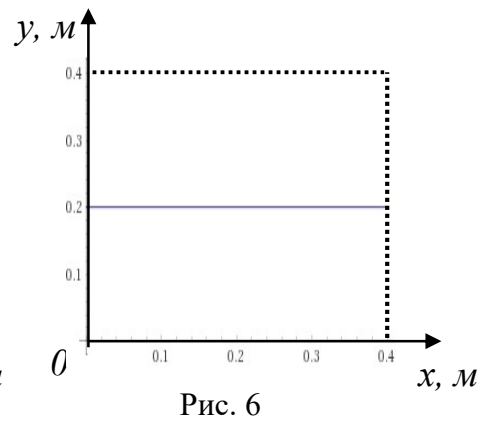
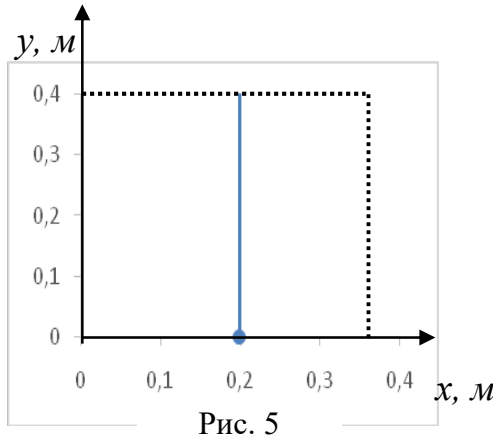


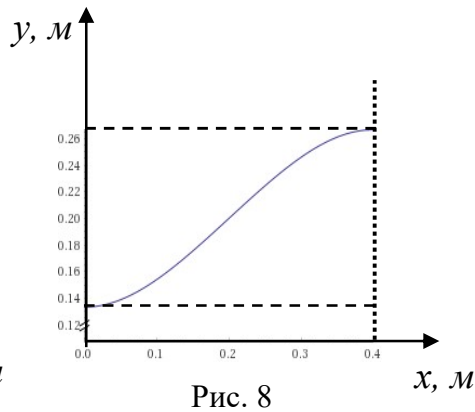
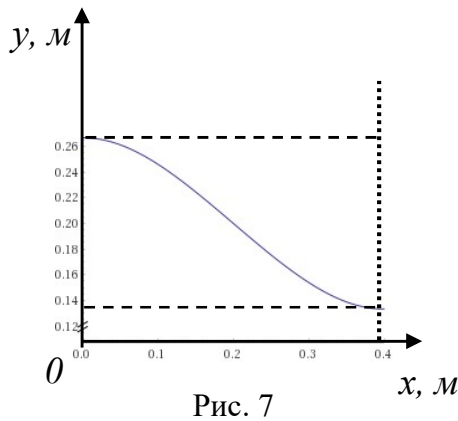
Рис. 4

Если  $q = 0$  или  $p = 0$ , то узловая линия имеет вид прямой  $x = l/2 = 0,2$  (м), которая параллельна оси  $y$  (рис. 5), или, соответственно, прямой  $y = l/2 = 0,2$  (м), параллельной оси  $x$  (рис. 6).



Если  $-1 < (p/q) < 0$  или  $0 < (p/q) < 1$ , то узловые линии (рис. 7 или рис. 8) являются зеркальным отображением линий (рис. 3 или рис. 4).

Для более высоких собственных частот  $\omega_{k_1, k_2}$  ( $k_1 \geq 2$  и  $k_2 \geq 2$ ) узловые линии имеют более сложный вид.



### Литература

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А. Лекции по математическому анализу/ под. ред. В.А. Садовничего. М.: Высшая школа, 1999. 695 с.
2. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие М.: Просвещение, 1988. С. 131–187.

**Т.В. Solodchenkova, Е.А. Politaeva**  
Smolensk State University

### THE CALCULATION OF THE NODAL LINES OF RECTANGULAR MEMBRANES

**Keywords:** *membrane, differenziale homogeneous linear equation, natural frequency, standing wave, nodal, line, loop, node.*

**Abstract.** *The article presents the General formula of standing wave in the case of a rectangular membrane, the formulas of standing waves for the particular case of a square membrane are obtained and on their basis the calculation of nodal lines for the experimental square membrane in the form of a oilcloth, on which a thin layer of corn flour is poured. The calculation results are presented in the form of graphs of nodal line equations for excitation of standing waves of low frequency*

**И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, М.А. Петросова**  
*МГУ имени М.В. Ломоносова*  
*НИЯУ «МИФИ»*  
*МПГУ*

УДК 517.518.82

## **НОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАПИСЬЮ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ<sup>1</sup>**

*Ключевые слова: полиномы Бернштейна, симметричный отрезок, стандартная алгебраическая запись полиномов, скорость роста коэффициентов, трапеции Паскаля, комбинаторные соотношения.*

*Представлены недавние исследования авторов, посвященные полиномам Бернштейна на симметричном отрезке. Рассматривается явная алгебраическая запись этих полиномов по степеням независимой переменной. Напоминаются важные понятия «трапеции Паскаля» и «биномиа», естественно возникающие в подобных рассуждениях. Отмечен ряд новых, нетривиальных соотношений для чисел, образующих трапеции Паскаля. Обнаруженные факты применяются затем к задаче о поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при явной алгебраической записи. Используя предложенный подход, удается установить серию результатов, в определенном смысле близких к окончательным, которые характеризуют скорость роста коэффициентов при неограниченном увеличении номера полинома Бернштейна. В частности, существенно усилена прежняя универсальная оценка Рулье, действующая для суммы модулей всех коэффициентов при фиксированном номере полинома Бернштейна.*

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).

В классической теории аппроксимации есть известное направление, связанное с оценками возможной скорости роста коэффициентов алгебраических полиномов при приближении непрерывных функций на тех или иных замкнутых множествах (см. [1–8]). Иногда в таких оценках используют стандартные полиномы Бернштейна или какие-то их модификации (см. [3–6], [8]). В последнее время удалось добиться существенных продвижений в теории полиномов Бернштейна на симметричном отрезке  $[-1, 1]$  (см. [9–12]). Специфика такого случая приводит к неожиданным и весьма красивым результатам. Дадим сейчас краткий обзор по задаче о скорости роста коэффициентов полиномов Бернштейна на  $[-1, 1]$  вместе с сопутствующими «комбинаторными» наблюдениями.

Для функции  $f \in C[-1, 1]$  полиномы Бернштейна вводят формулой

$$B_n(f, x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Здесь  $x$  – вещественная переменная, а  $C_n^k$  – биномиальные коэффициенты.

Ясно, что полином  $B_n(f, x)$  имеет степень  $\leq n$  и допускает явную алгебраическую запись

$$B_n(f, x) = \sum_{m=0}^n a_{n,m}(f) x^m, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (2)$$

Требуется оценить степень роста коэффициентов  $a_{n,m}(f)$  в полиномах (2). Важную роль играет интегральная характеристика

$$S_n(f) \equiv \sum_{m=0}^n |a_{n,m}(f)|, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (3)$$

определенная для набора коэффициентов «в совокупности».

В работе Рулье [3] установлена универсальная оценка подобных сумм, взятых от полиномов Бернштейна на отрезке  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  с условием, что  $a \leq 0 < 1 \leq b$ . Для величины (3) на отрезке  $[-1, 1]$  результат Рулье выглядит так:

$$S_n(f) \leq 2^n \|f\|, \quad \|f\| \equiv \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (4)$$

Формула (4) дает верхнюю границу для изменения величины (3) при возрастании номера  $n \in \mathbf{N}$ . Спрашивается, насколько эта граница точна? Естественно опробовать оценку на примере простой негладкой функции.

Рассмотрим стандартный модуль

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1]. \quad (5)$$

В заметке [12] для полиномов Бернштейна от функции (5) получена формула

$$B_{2m}(f, x) = 2^{-2m} C_{2m}^m \left( 1 + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} C_m^k x^{2k} \right), \quad m \in \mathbf{N}. \quad (6)$$

Полиномы  $B_{2m+1}(f, x)$  от функции (5) совпадают с полиномами  $B_{2m}(f, x)$  и не представляют отдельного интереса для изучения (это проявление так называемого *правила склеивания*, см. [11; 12]).

Суммы модулей коэффициентов в полиномах (6) принимают значения

$$S_{2m}(f) = 2^{-2m} C_{2m}^m \left( 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} C_m^k \right), \quad m \in \mathbf{N}. \quad (7)$$

Комбинаторные выражения (7) не имеют компактного представления. Впрочем, в недавнем исследовании авторов (готовится к печати в «Уфимском математическом журнале») для величин (7) найдены оценки

$$\left( 1 - \frac{1}{8m} \right) \frac{2^m}{\sqrt{\pi m} (m-2)} < S_{2m}(f) < \left( 1 - \frac{1}{8m+1} \right) \frac{2^m}{\sqrt{\pi m} (m-3)},$$

действующие при всех натуральных  $m \geq 5$ . То есть при  $n = 2m \rightarrow \infty$  суммы коэффициентов полиномов Бернштейна в примере (5) растут по правилу

$$S_n(f) = S_{2m}(f) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^m}{m^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{n/2}}{n^{3/2}}, \quad (8)$$

что существенно меньше границы, указанной в (4), ибо показательная функция  $2^{n/2}$  растет намного медленнее, чем  $2^n$ . Покажем, что это не случайное обстоятельство. Точнее, истинная универсальная оценка для сумм (3), взятых от произвольной функции  $f \in C[-1, 1]$ , гораздо ближе к соотношению (8), чем к сильно завышенной прежней оценке (4).

Для проведения последующих исследований понадобится точный закон образования коэффициентов  $a_{n,m}(f)$ . Коротко напомним базовые факты (см. [9; 10]). Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C[-1, 1]$  с полиномами Бернштейна  $B_n(f, x)$  из формулы (1). Тогда коэффициенты  $a_{n,m}(f)$  в алгебраической записи (2) выражаются в виде

$$a_{n,m}(f) = 2^{-n} C_n^m \sum_{k=0}^n D_{n,m}^k f \left( 1 - \frac{2k}{n} \right), \quad n \in \mathbf{N}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (9)$$

со значениями

$$D_{n,m}^k \equiv \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j}. \quad (10)$$

Сумма (10) распространяется на все возможные произведения  $C_m^j C_{n-m}^{k-j}$ .

Числа  $D_{n,m}^k$  из формулы (10) обладают замечательными свойствами. Работая с ними, удобно зафиксировать индекс  $m$ , соответствующий выбранной степени  $x^m$  в записи (2) полиномов  $B_n(f, x)$ . Последовательно увеличивая номер  $n = m, m+1, m+2, \dots$ , будем иметь строки числовых множителей

$$D_{n,m}^0, \quad D_{n,m}^1, \quad D_{n,m}^2, \quad \dots, \quad D_{n,m}^{n-1}, \quad D_{n,m}^n, \quad (11)$$



При  $m = 3$  числа  $D_{n,3}^k$  образуют бесконечную трапецию вида

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & -3 & 3 & -1 \\
 & & & & & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\
 & & & & & & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\
 & & & & & & & 1 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & -1 \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & -3 & -3 & 3 & 3 & -1 & -1 \\
 & & & & & & & & & 1 & 2 & -2 & -6 & 0 & 6 & 2 & -2 & -1 \\
 & & & & & & & & & & 1 & 3 & 0 & -8 & -6 & 6 & 8 & 0 & -3 & -1 \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 4 & 3 & -8 & -14 & 0 & 14 & 8 & -3 & -4 & -1 \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 5 & 7 & -5 & -22 & -14 & 14 & 22 & 5 & -7 & -5 & -1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & 6 & 12 & 2 & -27 & -36 & 0 & 36 & 27 & -2 & -12 & -6 & -1
 \end{array}$$

– приведены строки, начиная с  $n = 3$  до  $n = 12$ .

При  $m = 4$  числа  $D_{n,4}^k$  образуют бесконечную трапецию вида

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 1 & -3 & 2 & 2 & -3 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & -2 & -1 & 4 & -1 & -2 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & -1 & -3 & 3 & 3 & -3 & -1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & -4 & 0 & 6 & 0 & -4 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & -4 & -4 & 6 & 6 & -4 & -4 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 2 & -3 & -8 & 2 & 12 & 2 & -8 & -3 & 2 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 3 & -1 & -11 & -6 & 14 & 14 & -6 & -11 & -1 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 2 & -12 & -17 & 8 & 28 & 8 & -17 & -12 & 2 & 4 & 1
 \end{array}$$

– приведены строки, начиная с  $n = 4$  до  $n = 12$ .

Аналогично записываются все последующие трапеции при любом фиксированном значении  $m \geq 5$ . Условимся также, что строки (11), формирующие трапеции Паскаля, продолжаются нулями «влево» и «вправо» до бесконечности, то есть  $D_{n,m}^k = 0$ , если верхний целочисленный индекс  $k$  не попадает в множество значений  $\{0, 1, \dots, n\}$ . При таком соглашении многие формулы с числами  $D_{n,m}^k$  приобретают более общий характер и не требуют лишних ограничений. Например, в правиле Паскаля (14) условие  $k \in \{1, \dots, n\}$  можно заменить на  $k \in \mathbf{Z}$ .

При изучении возникающих таблиц полезно иметь в виду, что порождающей функцией для выбранной строки (11), составленной из чисел  $D_{n,m}^k$ , служит так называемый *бибином* (или *двойной бином*) вида

$$R_{n,m}(x) \equiv (1-x)^m (1+x)^{n-m}, \quad m, n \in \mathbf{N}, \quad n \geq m.$$

Справедливо разложение бибинома

$$(1-x)^m (1+x)^{n-m} = \sum_{k=0}^n D_{n,m}^k x^k, \quad m, n \in \mathbf{N}, \quad n \geq m. \quad (15)$$



Отсюда выводятся разные тождества для чисел  $D_{n,m}^k$  по типу известных формул с биномиальными коэффициентами. Приведем сейчас лишь простые примеры (более сложные см. в [10]).

Имеем соотношения

$$\sum_{k=0}^n D_{n,m}^k = 0, \quad n \geq m \geq 1; \quad (16)$$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k D_{m,m}^k = 2^m, \quad m \geq 1; \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k D_{n,m}^k = 0, \quad n > m \geq 1. \quad (17)$$

Формула (16) следует из равенства  $R_{n,m}(1) = 0$ , а оба соотношения (17) получаются при подстановке  $x = -1$  в соответствующие случаи (15).

Укажем еще один специальный факт, характерный для трапеций Паскаля при всех  $m \geq 1$ . Из формулы бибинома (15), последовательно взятой при  $n = m$  и  $n = 2m$ , следуют равенства

$$D_{2m,m}^{2j} = (-1)^j C_m^j = D_{m,m}^j, \quad j = 0, \dots, m; \quad D_{2m,m}^{2j-1} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (18)$$

Это означает, что в трапеции с номером  $m \in \mathbf{N}$  строка, стоящая на позиции  $n = 2m$ , выглядит как строка при  $n = m$ , только «прореженная» нулями. Означенный эффект хорошо виден на примере первых четырех трапеций Паскаля (см. выше).

Помимо многочисленных тождеств, действующих внутри каждой трапеции Паскаля, разные трапеции также связаны совместными соотношениями. Отметим, например, что

$$D_{n,m}^k = (-1)^k D_{n,n-m}^k, \quad n \geq m \geq 1, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (19)$$

Укажем еще формулу суммирования

$$\sum_{k=p}^q D_{n,m}^k = D_{n-1,m-1}^q - D_{n-1,m-1}^{p-1}, \quad n \geq m \geq 1, \quad 0 \leq p \leq q \leq n, \quad (20)$$

обобщающую частный результат (16). Тождества (19) и (20) выводятся непосредственно из исходного определения (10).

Само определение (10) для чисел  $D_{n,m}^k$  напоминает известную свёртку Вандермонда

$$\sum_j C_m^j C_{n-m}^{k-j} = C_n^k, \quad (21)$$

простое доказательство которой (см. [13]) следует из равенства

$$(1+x)^m (1+x)^{n-m} = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad m, n \in \mathbf{N}, \quad n \geq m. \quad (22)$$

Несмотря на очевидное сходство между формулами (10) и (21), а также между разложением бибинома (15) и разложением традиционного бинома (22), в нашем новом случае всё усложняется. Точнее, возможно лишь частичное «вычисление» знакопеременной свертки (10), которое, впрочем, тоже полезно на практике.

При записи ряда последующих формул используем стандартные обозначения  $\lfloor h \rfloor$  и  $\lceil h \rceil$  для пола и потолка числа  $h \in \mathbf{R}$  (см. [13]).

Комбинируя определение (10) со свёрткой Вандермонда (21), можно перейти к представлению

$$D_{n,m}^k = C_n^k - 2 \sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} C_m^{2j+1} C_{n-m}^{k-2j-1}, \quad n \geq m \geq 1, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (23)$$

Формулу (23) удобно применять при фиксированном  $m \in \mathbf{N}$ , выражая числа, образующие  $m$ -ю трапецию Паскаля.

Несколько первых выражений имеют вид

$$D_{n,1}^k = C_n^k - 2C_{n-1}^{k-1}, \quad n \geq 1, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (24)$$

$$D_{n,2}^k = C_n^k - 4C_{n-2}^{k-1}, \quad n \geq 2, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (25)$$

$$D_{n,3}^k = C_n^k - 6C_{n-3}^{k-1} - 2C_{n-3}^{k-3}, \quad n \geq 3, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (26)$$

$$D_{n,4}^k = C_n^k - 8C_{n-4}^{k-1} - 8C_{n-4}^{k-3}, \quad n \geq 4, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (27)$$

Перечисленные результаты находят применение при изучении поведения коэффициентов полиномов Бернштейна на  $[-1, 1]$ .

Действительно, для коэффициентов  $a_{n,m}(f)$  из формулы (9) имеем оценку

$$|a_{n,m}(f)| \leq 2^{-n} C_n^m \eta_{n,m} \|f\|, \quad n \geq m \geq 1, \quad (28)$$

где

$$\eta_{n,m} \equiv \sum_{k=0}^n |D_{n,m}^k|, \quad n \geq m \geq 1. \quad (29)$$

Величины (29) играют ключевую роль в проводимом исследовании.

Прежний результат Рулье (4) получается теперь очень быстро. Мажорируя числа (10) через свёртку Вандермонда (21), замечаем, что всегда  $|D_{n,m}^k| \leq C_n^k$ . Отсюда сразу следует «грубая» оценка

$$\eta_{n,m} \leq \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n, \quad n \geq m \geq 1. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (28), заключаем, что  $|a_{n,m}(f)| \leq C_n^m \|f\|$ . Поэтому

$$S_n(f) \equiv \sum_{m=0}^n |a_{n,m}(f)| \leq \sum_{m=0}^n C_n^m \|f\| = 2^n \|f\|, \quad n \in \mathbf{N},$$

что совпадает с оценкой (4) для характеристики (3).

Повтор прежнего результата, хотя и своим методом, большого интереса, конечно, не представляет. Однако намеченный подход – через новые формулы (28), (29) – позволяет добиться гораздо большего. Для того чтобы усилить результаты, надо уточнить «грубую» оценку (30). Абсолютной точности удастся добиться при малых значениях  $m \in \mathbf{N}$ , когда величины  $\eta_{n,m}$  вычисляются «почти до конца».

Используя явные выражения (24)–(27) вместе с формулой суммирования (20), можно установить такой результат.

**Теорема 3.** При малых  $m \in \mathbf{N}$  для величин  $\eta_{n,m}$ , определенных в (29), справедливы формулы

$$\eta_{n,1} = 2C_{n-1}^{\lfloor n/2 \rfloor}, \quad n \geq 1, \quad (31)$$

$$\eta_{n,2} = 4D_{n-1,1}^{\lfloor (n-\sqrt{n})/2 \rfloor - 1} = 4D_{n-1,1}^{\lfloor (n-\sqrt{n})/2 \rfloor} = 4 \left( \frac{2 \lfloor (n+\sqrt{n})/2 \rfloor}{n-1} - 1 \right) C_{n-1}^{\lfloor (n+\sqrt{n})/2 \rfloor}, \quad n \geq 2, \quad (32)$$

$$\eta_{n,3} = 2 \left( D_{n-1,2}^{p(n)} + D_{n-1,2}^{q(n)} - D_{n-1,2}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \right), \quad n \geq 3, \quad (33)$$

$$\eta_{n,4} = -4 \left( D_{n-1,3}^{r(n)} + D_{n-1,3}^{s(n)} \right), \quad n \geq 4, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} p(n) &= \lfloor (n - \sqrt{3n-2})/2 \rfloor, & q(n) &= \lfloor (n + \sqrt{3n-2})/2 \rfloor, \\ r(n) &= \left\lfloor \left( n - \sqrt{3n-4 - \sqrt{6n^2 - 18n + 16}} \right) / 2 \right\rfloor, \\ s(n) &= \left\lfloor \left( n + \sqrt{3n-4 + \sqrt{6n^2 - 18n + 16}} \right) / 2 \right\rfloor. \end{aligned}$$

Между прочим, формула (32) при всех натуральных  $n = j^2 \geq 2$  дает нетривиальные тождества

$$D_{(j-1)(j+1),1}^{j(j-1)/2-1} = D_{(j-1)(j+1),1}^{j(j-1)/2} = \frac{1}{j-1} C_{(j-1)(j+1)}^{j(j+1)/2}, \quad j \in \mathbf{N}, \quad j \geq 2. \quad (35)$$

Так, при  $j=2$  и  $j=3$  имеем соответственно  $D_{3,1}^0 = D_{3,1}^1 = 1$  и  $D_{8,1}^2 = D_{8,1}^3 = 14$  (см. первую трапецию Паскаля). Свойство (35) раскрывает неочевидное правило, действующее в первой трапеции Паскаля.

Более важно, конечно, то, что формулы (31)–(34) позволяют оценить истинный рост величин  $\eta_{n,m}$  при малых  $m \in \mathbf{N}$ . Так, стандартным применением формулы Стирлинга из первых представлений (31) и (32) извлекаются асимптотики

$$\eta_{n,1} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (36)$$

$$\eta_{n,2} \sim \sqrt{\frac{8}{\pi e}} \frac{2^n}{n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Особенно любопытно присутствие константы  $\pi e$  в асимптотике (37). По понятным причинам это «изысканное» сочетание встречается в задачах конструктивного анализа крайне редко. До сих пор мы знали лишь примеры из теории *полиномов Бернулли* (см. [14–16]) и теории *бесконечных цепных степеней* (см. [17]).

Осталось скомбинировать основные формулы (28), (29), найденные представления (31), (32) и асимптотики (36), (37), чтобы установить такой результат.

**Теорема 4.** Для младших коэффициентов  $a_{n,1}(f)$  и  $a_{n,2}(f)$  в явной записи (2) полиномов Бернштейна на  $[-1, 1]$  справедливы оценки

$$|a_{n,1}(f)| \leq M_{n,1} \|f\|, \quad n \geq 1, \quad (38)$$

$$|a_{n,2}(f)| \leq M_{n,2} \|f\|, \quad n \geq 2, \quad (39)$$

где

$$M_{n,1} = 2^{-(n-1)} n C_{n-1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (40)$$

$$M_{n,2} = 2^{-(n-1)} n \left( 2 \lfloor (n + \sqrt{n})/2 \rfloor - n + 1 \right) C_{n-1}^{\lfloor (n + \sqrt{n})/2 \rfloor} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi e}} n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Оценки (38), (39) с константами (40), (41) не улучшаемы в том смысле, что для каждой из оценок при любом значении  $n$  можно подобрать конкретную функцию  $f \in C[-1, 1]$ , на которой оценка (при выбранном  $n$ ) будет достигаться.

Итак, верхние границы возможных изменений для модулей первых коэффициентов  $a_{n,1}(f)$ ,  $a_{n,2}(f)$  в полиномах Бернштейна на  $[-1, 1]$  установлены точно. Было бы полезно решить аналогичную задачу со следующими коэффициентами  $a_{n,3}(f)$ ,  $a_{n,4}(f)$  на основе полученных представлений (33), (34) для величин  $\eta_{n,3}$ ,  $\eta_{n,4}$ .

Дальнейшее исследование величины  $\eta_{n,m}$  при еще большем увеличении значения  $m \geq 5$  приводит к существенным вычислительным трудностям. Поэтому несомненный интерес представляет следующий результат, усиливающий «грубую» оценку (30).

**Теорема 4.** При любом  $m \in \mathbf{N}$  для величины (29) верны оценки

$$\eta_{n,m} \leq 2^m, \quad m \leq n \leq 2m, \quad (42)$$

$$\eta_{n,m} \leq 2^{n-m}, \quad n \geq 2m. \quad (43)$$

Граница  $n = 2m$  в формулах (42), (43) появляется не случайно – доказательство теоремы 4 основано на специальном свойстве (18).

Вернемся теперь к суммам (3), составленным из коэффициентов полиномов Бернштейна для произвольной функции  $f \in C[-1, 1]$ . Используя оценки (28), получаем

$$S_n(f) \equiv \sum_{m=0}^n |a_{n,m}(f)| \leq 2^{-n} \sum_{m=0}^n C_n^m \eta_{n,m} \|f\|, \quad n \geq 1. \quad (44)$$

Проводя несложную обработку формулы (44) при помощи имеющихся оценок (42), (43), устанавливаем неравенство

$$S_n(f) \leq 2 \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^m 2^{-m} \|f\| < 2 \sum_{m=0}^n C_n^m 2^{-m} \|f\| = 2 \left( \frac{3}{2} \right)^n \|f\|, \quad n \geq 1. \quad (45)$$

Как видим, удалось существенно усилить исходную оценку Рулье (4) и обосновать такое утверждение.

**Теорема 5.** Для величины  $S_n(f)$  из формулы (3), выражающей сумму модулей коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи (2) на  $[-1, 1]$ , справедлива оценка

$$S_n(f) \leq 2 \left( \frac{3}{2} \right)^n \|f\|, \quad n \geq 1. \quad (46)$$

Основания трех показательных функций: в оценке (8) для стандартного модуля (5), в новой универсальной оценке (46) и в оценке Рулье (4) – дают значения

$$q_1 = \sqrt{2} = 1.4142 \dots, \quad q_2 = \frac{3}{2} = 1.5, \quad q_3 = 2.$$

С этой точки зрения наш новый результат (46) является «почти точным», хотя возможности для его усиления, конечно, еще сохраняются. Так, при помощи более тонкого анализа определения (3) на основе особой работы с выражениями (9) можно (скорее всего) усовершенствовать оценку (44) и получить два отдельных результата

$$S_{2^{p-1}}(f) \leq 2^{-2^{p-1}} \sum_{m=0}^{2^{p-1}-1} C_{2^{p-1}}^m \eta_{2^{p-1},m} \|f\|, \quad p \in \mathbf{N}, \quad (47)$$

$$S_{2^p}(f) \leq 2^{-2^p} \left( 2 \sum_{m=0}^{2^p-1} C_{2^p}^m \eta_{2^p-1,m} + 2^p C_{2^p}^p \right) \|f\|, \quad p \in \mathbf{N}. \quad (48)$$

Если обосновать (47), (48), то нетрудно провести выкладку в духе (45), избавившись от «внешнего» множителя «2». Другими словами, есть уверенность, что результат (46) остается верным «без двойки» – в более естественном виде:  $S_n(f) \leq (3/2)^n \|f\|$  при любом  $n \in \mathbf{N}$ .

Посмотрим на ситуацию еще и с другой стороны. В определенном смысле наш стандартный модуль (5) – не самый экстремальный выбор в изучаемой задаче, и скорость роста (8) не будет мажорантой на классе всех функций  $f \in C[-1,1]$ . Для построения подходящего примера можно воспользоваться следующим неожиданным свойством, действующим в явной записи полиномов Бернштейна на  $[-1,1]$  (см. также [10]).

**Теорема 6.** *В явной алгебраической записи (2) для полиномов Бернштейна (1), взятых от произвольной функции  $f \in C[-1,1]$ , действует универсальное правило*

$$a_{2m,m}(f) = 2^{-m} C_{2m}^m a_{m,m}(f), \quad m \in \mathbf{N}. \quad (49)$$

Для доказательства теоремы 6 достаточно учесть равенства (18) в формуле (9), отнесенной к коэффициентам  $a_{m,m}(f)$  и  $a_{2m,m}(f)$ .

Теперь, используя правило (49), можно для любого четного значения  $n = 2m$  построить функцию  $f = f_{2m} \in C[-1,1]$ , норма которой равна единице, и при этом

$$S_n(f_n) = S_{2m}(f_{2m}) \geq |a_{2m,m}(f_{2m})| \geq \left(1 - \frac{1}{8m}\right) \frac{2^m}{\sqrt{\pi m}} \geq \frac{7}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^{n/2}}{\sqrt{n}}, \quad n = 2m,$$

что очевидно превышает (по росту) асимптотическую границу из (8). Функция  $f_{2m}$  в таком примере может быть взята кусочно линейной (лишцевой) с константой Липшица  $L_{2m} = m$ .

Из сказанного ясно, что наши результаты хотя и весьма точны, но всё же не являются совсем завершёнными и стимулируют дальнейшие исследования.

### Литература

1. Stafney J.D. A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to  $C[0,1]$  // *Duke Math. J.* 1967. Vol. 34, No 3. P. 393–396.
2. Хавинсон С.Я. Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций // *Математические заметки.* 1969. Т. 6. Вып. 5. С. 619–625.
3. Roulier J.A. Permissible bounds of the coefficients of approximating polynomials // *J. Approx. Theory.* 1970. Vol. 3, No 2. P. 117–122.
4. Roulier J. A. Restrictions on the coefficients of approximating polynomials // *J. Approx. Theory.* 1972. Vol. 6, No 3. P. 276–282.
5. Гурарий В.И., Мелетиди М.А. Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции // *Функциональный анализ и его приложения.* 1971. Т. 5. Вып. 1. С. 73–75.
6. Golitschek M., Leviatan D. Permissible bounds of the coefficients of approximating polynomials with real or complex exponents // *J. Math. Analysis and Appl.* 1977. Vol. 60, No 1. P. 123–138.
7. Мурадян О.А., Хавинсон С.Я. О величинах коэффициентов многочленов в аппроксимационной теореме Вейерштрасса // *Математические заметки.* 1977. Т. 2, № 2. С. 269–276.
8. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015: материалы научной конференции, 13–17 апреля 2015 г.* СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена. 2015. С. 115–121.
9. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Явные выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на симметричном отрезке // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015: материалы научной конференции, 13–17 апреля 2015 г.* СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена. 2015. С. 121–124.
10. Петросова М.А., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. Комбинаторные соотношения, связанные с полиномами Бернштейна на симметричном отрезке // *Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 17. Материалы XVII Международной научной конференции.* Смоленск: СмолГУ. 2016. С. 177–182.
11. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика.* 2015. Т. 15, № 3. С. 288–300.
12. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика.* 2016. Т. 16, № 4. С. 425–435.
13. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* М.: Мир, 1998. 704 с.
14. Inkeri K. The real roots of Bernoulli polynomials // *Annales Universitatis Turkuensis (Turku).* 1959. Ser A1. No. 37. P. 3–19.
15. Ефимов А.И. The asymptotics for the number of real roots of Bernoulli polynomials // *Forum Mathematicum.* 2008. Vol. 20(2). P. 387–393.

16. Цветкович Д.Г. Численное подтверждение результатов Инкери о вещественных нулях полиномов Бернулли // Системы. компьютерной математики и их приложения. Вып. 16. Материалы XVI Международной научной конференции. Смоленск: СмолГУ, 2015. С. 48–51.

17. Буланов А.П. Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Математический сборник. 2001. Т. 192, № 11. С. 3–34.

**I.V. Tikhonov, V.B. Sherstyukov, M.A. Petrosova**  
MSU, МЕРНІ, MPSU

## **NEW RESEARCH RELATED TO THE ALGEBRAIC REPRESENTATION OF BERNSTEIN POLYNOMIALS ON A SYMMETRIC INTERVAL**

**Keywords:** *Bernstein polynomials, symmetric interval, standard algebraic representation of polynomials, rate of growth of coefficients, Pascal trapezoid, combinatorial relations.*

**Abstract.** *New studies related to Bernstein polynomials on a symmetric interval are presented. An explicit algebraic representation of these polynomials in powers of an independent variable is considered. The important notions «Pascal trapezoid» and «double binomial» which occur naturally are reminded. We point out a number of new, nontrivial relations for the numbers forming Pascal trapezoids. Then the discovered facts are applied to the problems which connected with the behavior of coefficients of Bernstein polynomials under explicit algebraic writing. Using the proposed approach, it is possible to establish results which characterize the rate of growth of the coefficients as the Bernstein polynomial number increases. In particular, the previous universal Roulier estimate for the sum of the moduli of all coefficients is essentially strengthened.*

**Д.Г. Цветкович**  
*Московский педагогический государственный университет*

УДК 517.518.82+519.677

## **ОСОБЫЕ СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ОТ РАЦИОНАЛЬНОГО МОДУЛЯ<sup>2</sup>**

Ключевые слова: *полиномы Бернштейна, рациональный модуль, разложение Поповичу, лемниската Канторовича, область сходимости.*

---

<sup>2</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Изучаются классические полиномы Бернштейна от рационального модуля на стандартном отрезке. На отдельном частном примере подробно разобраны типичные эффекты. Даны аналоги разложения Поповичу с новой записью полиномов Бернштейна в виде особых структурированных сумм. Затронут вопрос о точной области сходимости возникающих разложений. Указано на связь границы области сходимости с распределением нулей полиномов Бернштейна. Представлены эмпирические данные о раздельной сходимости структурированных сумм.

Для функции  $f \in C[0,1]$  полиномы Бернштейна переменной  $z \in \mathbb{C}$  вводят формулой

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где  $C_n^k$  – стандартные биномиальные коэффициенты. Основные сведения по теории полиномов Бернштейна изложены в монографиях [1–3].

Отметим важный пример

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Это простой симметричный модуль с изломом в точке  $x = 1/2$ . Полиномы Бернштейна для функции (2) подробно изучены в работе [4] (см. также обзор [5]). Первый полином  $B_1(f, z) \equiv 1$  является исключительным. Остальные полиномы подчинены специальному правилу склеивания

$$B_{2m+1}(f, z) = B_{2m}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Важную роль при изучении полиномов Бернштейна для функции (2) играет следующее разложение Поповичу

$$B_{2m}(f, z) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} C_{2k}^k (z(1-z))^k, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

С помощью разложения (4) удастся элементарным способом установить область сходимости полиномов  $B_{2m}(f, z)$  на плоскости  $\mathbb{C}$  и получить точные оценки скорости сходимости полиномов Бернштейна в данном примере (2) (см. [6]). Есть основания полагать, что конструкция (4) допускает распространение на более общие случаи.

Рассмотрим произвольный рациональный модуль

$$f(x) = |qx - p|, \quad x \in [0, 1], \quad (5)$$

с изломом в точке  $x = p/q \in (0, 1)$ ,  $\text{НОД}(p, q) = 1$ . Для полиномов (1) от функции (5) правило склеивания приобретает вид

$$B_{qm+1}(f, z) = B_{qm}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (6)$$



очевидно обобщающий формулу (3). Подробнее про правило склеивания см. [5]. Цепочку полиномов  $B_{qm}(f, z)$  при выборе (5) полезно выделять из общей последовательности полиномов (1).

Недавно установлено (см. [7]), что полиномы Бернштейна от любого рационального модуля вида (5) допускают разложения, аналогичные (4), в виде сумм особой структуры. Далее такие суммы будем называть *структурированными суммами*. Подробно разберем возникающие эффекты на одном частном примере.

Пусть

$$f(x) = |4x - 1|, \quad x \in [0, 1], \quad (7)$$

с изломом в точке  $x = 1/4$ . По правилу (6) получаем цепочку склеиваний

$$B_{4m+1}(f, z) = B_{4m}(f, z), \quad m \in \mathbf{N}. \quad (8)$$

Согласно общим формулам из работы [7] полиномы Бернштейна, взятые из цепочки склеивания (8), представимы в виде

$$\begin{aligned} B_{4m+1}(f, z) = B_{4m}(f, z) = & 1 + 2z - 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{4k-1} C_{4k-1}^k (z(1-z)^3)^k - \\ & - 2z(1-z) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{4k+1} C_{4k+1}^k (z(1-z)^3)^k - \\ & - 4z(1-z)^2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{4k+2} C_{4k+2}^k (z(1-z)^3)^k, \quad m \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (9)$$

Полиномы, не входящие в цепочку (8), тоже допускают аналогичные разложения, но уже с некоторыми коррекциями:

$$\begin{aligned} B_{4m+2}(f, z) = & 1 + 2z - 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{4k-1} C_{4k-1}^k (z(1-z)^3)^k - \\ & - 2z(1-z) \sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+1} C_{4k+1}^k (z(1-z)^3)^k - \\ & - 4z(1-z)^2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{4k+2} C_{4k+2}^k (z(1-z)^3)^k, \quad m \in \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_{4m+3}(f, z) = & 1 + 2z - 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{4k-1} C_{4k-1}^k (z(1-z)^3)^k - \\ & - 2z(1-z) \sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+1} C_{4k+1}^k (z(1-z)^3)^k - \\ & - 4z(1-z)^2 \sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+2} C_{4k+2}^k (z(1-z)^3)^k, \quad m \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обратим внимание на цикл

$$B_{4m+2}(f, z) = B_{4m+1}(f, z) - 2z(1-z) \frac{1}{4m+1} C_{4m+1}^m (z(1-z)^3)^m, \quad m \in \mathbf{N}, \quad (12)$$

$$B_{4m+3}(f, z) = B_{4m+2}(f, z) - 4z(1-z)^2 \frac{1}{4m+2} C_{4m+2}^m (z(1-z)^3)^m, \quad m \in \mathbf{N}, \quad (13)$$

$$B_{4m+4}(f, z) = B_{4m+3}(f, z) - 2z(1-z)^3 \frac{1}{4m+3} C_{4m+3}^{m+1} (z(1-z)^3)^m, \quad m \in \mathbf{N}. \quad (14)$$

Каждое из дополнительных слагаемых в (12)–(14) попадает в «свою» структурированную сумму. Итоговые формулы (9)–(11) можно считать аналогами разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от функции (7).

С помощью асимптотик биномиальных коэффициентов удается показать, что все образовавшиеся суммы в формулах (9)–(11) равномерно сходятся в лемнискате Канторовича

$$L_{1/4}: \frac{256}{27} |z(1-z)^3| = 1, \quad (15)$$

построенной для функции (7) по заданной точке излома  $x=1/4$  (см. также [1, гл. 4]). Точнее говоря, полиномы Бернштейна для функции (7) при  $n \rightarrow \infty$  равномерно сходятся на компакте, ограниченном лемнискатой (15), в левой петле – к функции  $f_1(z)=1-4z$ , а в правой петле – к функции  $f_2(z)=4z-1$ .

Наши недавние исследования (см. [8]–[10]) показывают, что к той же лемнискате (15) стягиваются практически все нули полиномов Бернштейна для функции (7). Для полиномов из цепочки склеиваний (8) исключений не бывает – все их нули группируются вблизи лемнискаты (15) (см. рис. 1).

Полиномы, взятые не из цепочки склеиваний (8), могут иметь отдельные *девиантные нули* со своим особым поведением (см. рис. 2). Скорее всего, возникновение подобных девиантных нулей связано с влиянием дополнительных слагаемых в формулах (12), (13). Подробнее про девиантные нули см. [11].

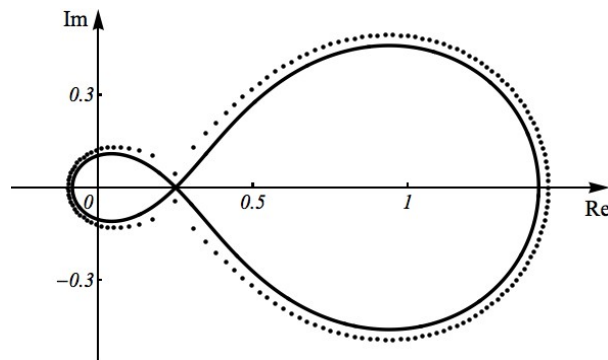


Рис. 1. Множество нулей полинома  $B_{160}(f, z)$  для функции (7) и лемниската (15). Полином взят из цепочки склеиваний (8)

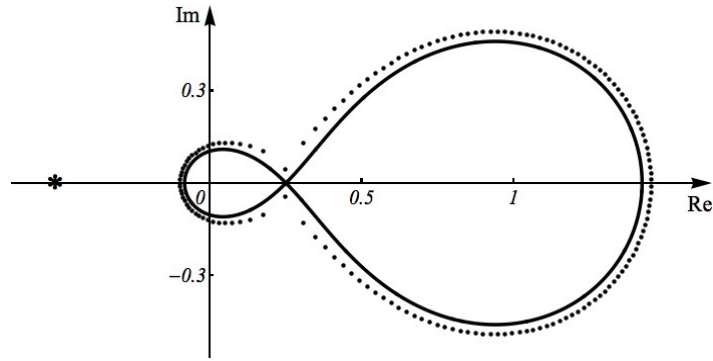


Рис. 2. Множество нулей полинома  $B_{162}(f, z)$  для функции (7) и лемниската (15).

Звездочкой отмечен девиантный нуль  $z \approx -0.50528$ , возникший из-за того, что полином с номером  $n = 162$  не попадает в цепочку склеиваний (8)

Самостоятельный интерес представляет раздельная сходимость структурированных сумм в формулах (9)–(11). Возьмем, например, полиномы  $B_{4m+1}(f, z) = B_{4m}(f, z)$  из формулы (9). Они складываются из трех структурированных сумм:

$$S_{4m}^{(1)}(z) = -2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{4k-1} C_{4k-1}^k (z(1-z)^3)^k, \quad m \in \mathbf{N}, \quad (16)$$

$$S_{4m}^{(2)}(z) = -2z(1-z) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{4k+1} C_{4k+1}^k (z(1-z)^3)^k, \quad m \in \mathbf{N}, \quad (17)$$

$$S_{4m}^{(3)}(z) = -4z(1-z)^2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{4k+2} C_{4k+2}^k (z(1-z)^3)^k, \quad m \in \mathbf{N}. \quad (18)$$

На следующих рис. 3, 4, 5 изображены графики этих сумм, отнесенных к вещественному аргументу  $x \in [0, 1]$ .

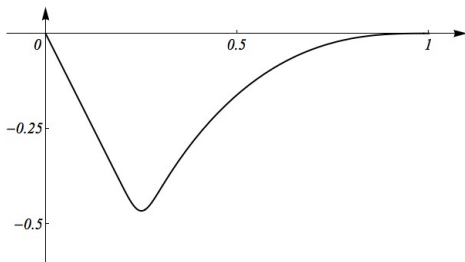


Рис. 3. График суммы  $S_{4m}^{(1)}$  из формулы (16)

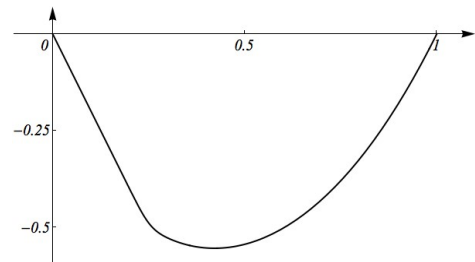


Рис. 4. График суммы  $S_{4m}^{(2)}$  из формулы (17)

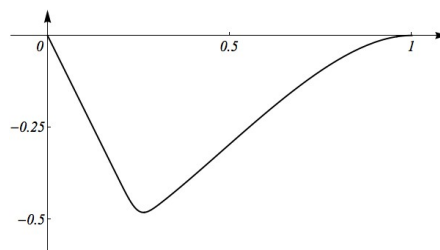


Рис. 5. График суммы  $S_{4m}^{(3)}$  из формулы (18)

Любопытно, что все три суммы на «левом» отрезке  $[0, 1/4]$ , принадлежащем малой петле лемнискаты (15), сходятся к одной и той же линейной функции  $g(x) = -2x$ . Те же суммы на «правом» отрезке  $[1/4, 1]$ , принадлежащем правой петле лемнискаты (15), сходятся к трем различным «нелинейным» функциям  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$ ,  $h_3(x)$ , точные формулы которых установить пока не удалось (см. рис. 3, 4, 5).

При сложении всех трех сумм (16)–(18) на отрезке  $[0, 1]$  получаем итоговый график, изображенный на рис. 6. После дополнительной линейной поправки  $(1 + 2x)$ , как в формуле (9), окончательный результат будет хорошо приближать график заданной функции (7).

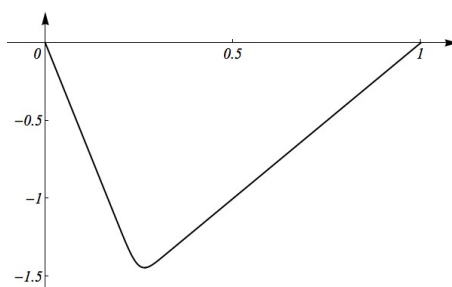


Рис. 6. Итоговый график для  $S_{4m}^{(1)}(x) + S_{4m}^{(2)}(x) + S_{4m}^{(3)}(x)$

Разобранный пример является типичным. Похожие рассуждения можно провести для любой рациональной функции вида (5).

Выражаю глубокую благодарность В.Б. Шерстюкову за идею столь изящных представлений для полиномов Бернштейна, а также И.В. Тихонову за помощь в исследовании и при подготовке статьи.

### Литература

1. Lorentz G.G. Bernstein Polynomials. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. x+130 p.
2. Виденский В.С. Многочлены Бернштейна: учеб. пособие к спецкурсу. Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.
3. Bustamante J. Bernstein Operators and Their Properties. Basel: Birkhäuser, 2017. xii+420 p.
4. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. 2012. № 26 (280). Математика. Механика. Информатика. Вып. 15. С. 6-40.
5. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. (Итоги науки. Юг России). 2014. Т. 8, № 1. С. 126-175.
6. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г. Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016: материалы науч. конф. СПб.: РГПУ имени А. И. Герцена, 2016. С. 139-145.
7. Цветкович Д.Г., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. Специальные представления для полиномов Бернштейна от рационального модуля на стандартном отрезке //

Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 19-й междунар. Саратов. зимней школы. Саратов: ООО «Научная книга», 2018. С. 339-342.

8. Тихонов И.В., Цветкович Д.Г., Шерстюков В.Б. Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 4. С. 151-173.

9. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г. Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 59-73.

10. Цветкович Д.Г. Подробный атлас аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, № 1. С. 58-89.

11. Цветкович Д.Г. О некоторых численных соотношениях, связанных с распределением нулей полиномов Бернштейна // Системы компьютерной матем. и их прилож.: материалы междунар. науч. конф. Вып. 18. Смоленск: СмолГУ, 2017. С. 46-50.

**D.G. Tsvetkovich**

Moscow State Pedagogical University

## **SPECIAL STRUCTURED REPRESENTATIONS FOR BERNSTEIN POLYNOMIALS OF RATIONAL MODULE FUNCTION**

**Keywords:** *Bernstein polynomials, rational module function, Popoviciu expansion, Kantorovich lemniscate, convergence domain.*

**Abstract.** *Classical Bernstein polynomials of rational module function on a standard interval are studied. On particular example, typical effects are analyzed in detail. Analogues of Popoviciu expansion with a new representation of Bernstein polynomials in the form of special structured sums are given. The question of the exact convergence domain of expansion is discussed. It is pointed out the boundary of the convergence domain associates with the distribution of zeros of the Bernstein polynomials.*

## СЕКЦИЯ 4

### Новые информационные и педагогические технологии в образовании

**А.В. Дюндин**

*Смоленский государственный университет*

УДК 372.862

#### ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗУЧЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В СИСТЕМАХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Ключевые слова: *дистанционное обучение, оценка результатов обучения, технические дисциплины, курсовой проект, расчетно-графическая работа.*

*В работе рассматриваются особенности организации промежуточного контроля знаний и умений студентов в дистанционном обучении на примере технических дисциплин. Особое внимание обращается на реализацию контроля качества выполнения обязательных письменных работ и формат проведения экзаменов и зачетов.*

Дистанционное обучение в настоящее время предлагает очень широкий спектр возможностей желающим учиться: от реализации основных образовательных программ высшего образования по какому-либо направлению подготовки ведущими вузами нашей страны до профессиональных переподготовок и краткосрочных курсов повышения квалификации в еще более многочисленном количестве учебных центров. К его преимуществам можно отнести расширение географии обучающихся и их количества; организацию инклюзивного образования; упрощенную реализацию индивидуальных образовательных траекторий и даже экономическую рентабельность. Основные требования к организации такого обучения изложены в [4, 5, 6]. Особое внимание в процессе реализации дистанционного обучения следует обращать на процесс контроля результатов обучения, так как в большинстве случаев реальное общение преподавателя и студента (обучаемого) практически отсутствует. В подобных условиях важно не только создать

возможности для получения знаний, но и проконтролировать сформированность соответствующих компетенций (или этапов компетенций), так как иначе студент не сможет эффективно продолжить обучение и в итоге получить профессию.

Мы рассматриваем процесс изучения технических дисциплин на примере направления подготовки 08.03.01 Строительство (программа бакалавриата). К техническим (инженерным) дисциплинам данного направления подготовки отнесем такие курсы, как «Сопротивление материалов», «Строительная механика», «Металлические конструкции», «Железобетонные конструкции», «Основания и фундаменты» и др. Особенностью этих дисциплин является использование наряду с традиционными формами (контрольная работа, зачет, экзамен) таких форм письменного контроля, как курсовой проект и расчетно-графическая работа.

Курсовым проектом будем называть один из видов самостоятельной работы обучаемого, направленный на решение обучающимся частной практической задачи (проектирование элемента конструкции, планирование этапа работ, расчет производительности и сроков выполнения работ и др.). Особенностью курсового проекта является наличие графической части, которая выполняется в специальных инженерных программах, а также специальное ее оформление с учетом требований ЕСКД.

Расчетно-графическая работа состоит в самостоятельном выполнении некоторых типовых расчетов по индивидуальным вариантам, с выполнением соответствующей графической части.

При выполнении заданий этих форм контроля студенты:

- изучают нормативную базу инженерных изысканий;
- получают опыт работы в программно-вычислительных комплексах и системах автоматизированного проектирования;
- учатся оформлять техническую документацию и пользоваться в своей работе нормативными документами;
- планируют выполнение работ с соблюдением правил техники безопасности и норм охраны труда; осуществляют охрану окружающей среды и др.

С полным перечнем и содержанием компетенций рассматриваемого нами направления подготовки можно ознакомиться в [7].

Таким образом, в процессе изучения технической дисциплины студент выполняет задания на практических занятиях, параллельно самостоятельно выполняет элементы курсового проекта или расчетно-графической работы, завершая эту работу к установленному сроку. При возникновении затруднений всегда есть возможность очно проконсультироваться по многим возникающим вопросам с преподавателем. Завершается работа над курсовым проектом или

расчетно-графической работой их защитой, на которой студент объясняет основные принципы выполнения расчетов, обосновывает выбор тех или иных методов со ссылками на нормативную документацию и др. Завершает изучение курса зачет или экзамен, процедура проведения которых одинакова для всех дисциплин. Получаем, что при очном обучении преподаватель имеет возможность постоянно контролировать деятельность студента и вносить своевременные корректировки в процесс изучения дисциплины, тем самым прогнозируя успешное освоение необходимых компетенций.

В случае получения образования дистанционно, с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, обучаемый получает возможность изучать дисциплины без личного контакта с преподавателем, что несколько осложняет процесс как обучения, так и контроля. Мы принципиально не рассматриваем структуру курсов в системе дистанционного обучения, их качество и др.

Изучение студентом теоретического материала, освоение практических умений проходит вне нашего контроля. Лишь малый процент обучаемых обращается за консультациями в процессе подготовки необходимых контрольных, расчетно-графических работ или курсового проекта. К сожалению, очень часто обучаемые выполняют его не самостоятельно, и поэтому контроль факта выполнения тех или иных элементов курса в принципе теряет свой смысл, и на первое место выходит контроль качества изучения необходимых элементов курса, полученных компетенций и иных результатов обучения. Другие аспекты оценки знаний в системах дистанционного обучения рассмотрены авторами в [1; 3].

Таким образом, при дистанционном обучении нам необходимо оценить не только самостоятельную работу студента как некоторый конечный результат (курсовой проект или расчетно-графическую работу), но и как процесс их выполнения.

В дистанционном обучении защиту курсового проекта или расчетно-графической работы целесообразно выполнять в тестовой форме, так как процесс устных защит с помощью специальных программ может оказаться длительным, причем чаще из-за затруднений студентов, связанных с владением техникой и наличием свободного времени.

Задания теста разрабатываются по аналогии с элементами расчетов из индивидуального задания, а также с опорой на нормативные документы, которыми студент в обязательном порядке должен пользоваться. Выбор тестовой формы обусловлен несколькими факторами, которые более подробно раскрыты в [2].

Выполняя задания предложенного индивидуального теста в ограниченный промежуток времени, студент может использовать



материалы своего курсового проекта, необходимые нормативные документы и другие материалы. Однако ограниченность промежутков времени не позволяет ему отвлекаться от процесса выполнения на длительное время. Разумеется, студент может воспользоваться помощью знакомых, однако усиление контроля в любом случае приведёт к попыткам фальсифицировать его результаты.

В качестве одного из способов выявления несамостоятельного выполнения проекта мы предлагаем следующий: в типовых заданиях на курсовое проектирование выполняется замена проектируемого элемента на элемент другой формы или из другого материала (разумеется, не противоречащие принципам проектирования и нормативным документам). Пытаясь пользоваться типовыми шаблонами из сети или услугами недобросовестных лиц, выполняющих подгонку типовых решений, студент работу не выполняет или выполняет со значительными недочетами.

Защита курсовых проектов и расчетно-графических работ не завершает промежуточную аттестацию по рассматриваемой технической дисциплине. Окончательная оценка выполняется в процессе сдачи зачетов и экзаменов.

В дистанционном обучении зачетные задания и вопросы к экзамену являются теоретическими, так как знание теории в процессе защиты курсовых проектов проверяется в меньшей мере.

Процесс сдачи экзамена в системе дистанционного обучения снова осложняется необходимостью контроля за самостоятельностью работы студента по подготовке ответа. Форма представления экзаменационных заданий в данном случае не отличается от стандартного билета, более того, она полностью совпадает с очным обучением.

В процессе подготовки ответа на вопросы билета в зависимости от выбранного варианта написания возможны реализации следующих сценариев.

1. Студент готовит ответы на вопросы билета в электронной форме на компьютере и затем пересылает файл преподавателю.
2. Студент оформляет ответы в виде рукописи, а затем сканирует результаты и снова пересылает файл преподавателю.
3. Студент готовится и в указанное время устно отвечает на вопросы, например, в Skype.

Разумеется, что предпочтителен последний вариант как наиболее близкий к «классической» сдаче экзамена. В качестве обязательного элемента необходимо предоставление документа, удостоверяющего личность (так как известны случаи попыток сдачи другим человеком).

Первые два варианта осложняются необходимостью контроля самостоятельной работы, но в данном случае имеет смысл использовать возможности web-камер, которые транслируют изображение рабочего

места студента (экрана компьютера или стола, на котором выполняется работа). Дополнительно полученный материал сравнивается с текстами учебников и нормативных документов. Только по итогам подробной проверки работы может выставляться итоговая оценка по дисциплине.

В заключение можно сделать следующие выводы:

- система контроля освоения материала дисциплины в дистанционном обучении усложняется по сравнению с обычным обучением;
- значительную роль в контроле играют тесты;
- для обеспечения вариативности контроля следует разрабатывать тематические тесты, и предлагать их студентам индивидуально;
- процедура проведения экзамена зависит от технической оснащённости и подготовки обучаемого;
- для получения объективных результатов контроля требуется использование комбинации методов контроля.

### Литература

1. Иванченко И.В. Проблема повышения качества образования в вузе // Молодой ученый. 2016. №5.1. С. 18-21.
2. Казаков В.В. Контроль знаний в системе дистанционного обучения // Альманах современной науки и образования. 2008. № 4-1 (11). С. 81-82.
3. Киян И.В. Варианты контроля знаний в системе дистанционного обучения // Сибирский педагогический журнал. 2010. № 12. С. 52-58.
4. Полат Е.С. Дистанционное обучение // Педагогические и информационные технологии в образовании. 2001. № 4. URL: <http://journals.susu.ru/pit-edu/article/view/318> (дата обращения: 11.02.2018).
5. Приказ Минобрнауки от 9 января 2014 г. № 2 Об утверждении Порядка применения организациями, осуществляющими образовательную деятельность, электронного обучения, дистанционных образовательных технологий при реализации образовательных программ. URL: <https://www.vedu.ru/article/id/order-on-use-distance-educational-technologies-2014/> (дата обращения: 11.02.2018).
6. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» N 273-ФЗ от 29 декабря 2012 года с изменениями 2018 года. URL: <http://zakon-ob-obrazovanii.ru> (дата обращения: 11.02.2018).
7. ФГОС ВО по направлению подготовки 08.03.01 Строительство URL: <http://fgosvo.ru/news/7/1109> (дата обращения: 11.02.2018).

**A.V. Dyundin**

Smolensk State University

### THE RESULTS EVALUATION OF ENGINEERING DISCIPLINE STUDY IN THE SYSTEMS OF DISTANCE COURSE

**Keywords:** *distance learning evaluation of learning outcomes, technical disciplines course project, calculation and graphic work.*

**Abstract.** *The paper discusses the features of the organization of intermediate control of knowledge and skills of students in remote education on the example of technical disciplines. The authors pay special attention to the implementation of quality control of mandatory written works and the format of examinations and tests.*

**Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина**  
*Казанский федеральный университет*

УДК 004.9+378.4+510.22+512+519.2

## **ОБУЧЕНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE**

Ключевые слова: *физико-математическое образование, системы компьютерной математики, Maple, Marlet, система аналитического тестирования, математическое моделирование.*

*Представлена новая парадигма физико-математического образования, основанная на интеграции методов математического и компьютерного моделирования в системе компьютерной математики Maple. Описаны разработанные методы аналитического компьютерного тестирования математических знаний с помощью приложения Marlet, а также результаты внедрения этой системы в Казанском федеральном университете.*

Проблема обеспечения наглядности математических структур играет важную роль в высшем образовании, так как усвоение фундаментальных геометрических понятий подготавливает фундамент для понимания процесса математического моделирования и овладения методами компьютерного моделирования, что, в свою очередь, создает предпосылки для инновационного развития современного образования. Заметим, что многопараметричность создаваемых компьютерных моделей является важнейшим фактором, позволяющим управлять математической моделью, то есть проводить компьютерное моделирование. В связи с этим важную роль играет компьютерная визуализация математических моделей, а особенно оснащенная динамическая визуализация, основные принципы которой разработаны в работах (см. [1; 2]). Создание таких сложных компьютерных моделей возможно в формате независимых пакетов программ (библиотек программ), которые могут использоваться как преподавателями, так и

студентами вызовом соответствующих библиотек и содержащихся в них многопараметрических команд, имеющих простой синтаксис (см., например, [4]).

Исследование кривой осуществляется с помощью процедуры `AnalGeo[CanonF](Eq,X,X1,s)`. На рисунках 1, 2 показано исполнение этой команды.

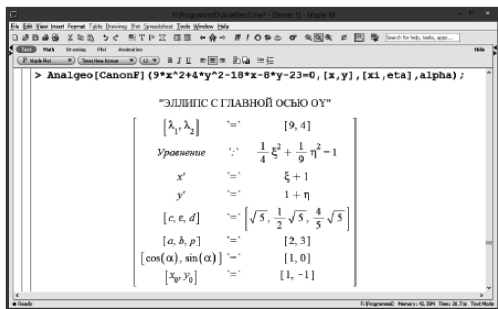


Рис. 1

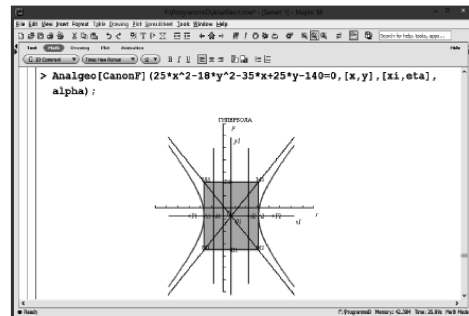


Рис. 2

Для автоматизации процесса проверки знаний на основе специальных математических библиотек был создан Marlet, осуществляющий интерактивное взаимодействие процесса тестирования знаний с листами Excel, с которых производится считывание текстовой и числовой информации, и запись её в эти листы. На рисунке 3 показано окно Маплет с графическим выводом численного решение задачи Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, интерактивно вводимых в соответствующие окна в верхней части меню.

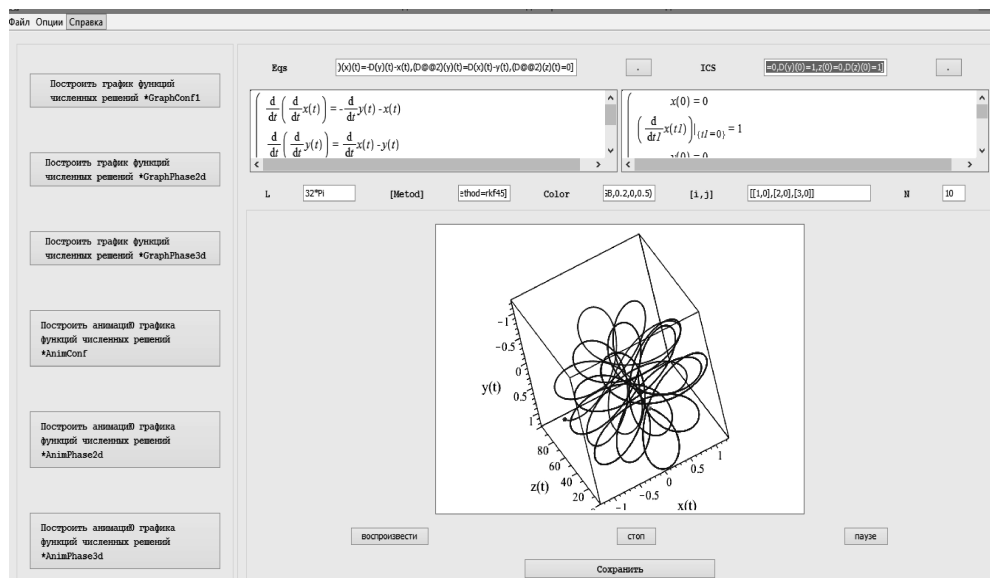


Рис. 3

Оценивание знаний студентов в Казанском (Приволжском) федеральном университете происходит на основании Регламента о балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся, принятого

Учебно-методическим советом от 27 апреля 2012 года, протокол № 2. Основой для определения рейтинга обучающегося являются рейтинговые показатели. Рейтинговые показатели по каждой дисциплине формируются на основе результатов текущего контроля знаний обучающихся в течение семестра (блок 1) и по итогам зачетно-экзаменационной сессии (блок 2). Итоговый рейтинг по дисциплине получается суммированием баллов по этим блокам с весом:

- Блок 1 – вес (коэффициент значимости) – 0,5;
- Блок 2 – вес (коэффициент значимости) – 0,5.

Согласно Регламенту студент может получить 100 баллов по дисциплине при условии полного усвоения знаний по учебной дисциплине согласно требованиям учебной программы. Принята следующая шкала соответствия рейтинговых баллов (с учетом их округления до целых) оценкам пятибалльной шкалы: 55 и менее – неудовлетворительно; 56–70 – удовлетворительно; 71–85 – хорошо; 86 и более – отлично. Текущий контроль знаний студентов по разным дисциплинам осуществляется одним из двух способов: по классической схеме (студент получает домашнее задание и сдает его преподавателю) или в виде систематического аналитического тестирования (студент проходит тест во время занятий) [2].

Рассмотрим пример оценивания знаний по классической схеме. В течение семестра обучающиеся проходят промежуточный контроль (самостоятельная работа студента – СРС, контрольные работы – КР и прилежание – П), где при выполнении заданий заполняется Excel-файл (см. рис. 4) преподавателем, ведущим практику. По завершении промежуточного контроля этот файл передается лектору, далее во время экзамена данные будут записываться и считываться в листы этого же файла.

№	ФИО	СРС1	СРС2	СРС3	СРС4	СРС5	СРС6	СРС7	СРС8	СРС9	СРС10	КР1	КР2	КР3	КР4	КР5	КР6	ПРЛ	ПРП	ИТОГО
2	ПЛАН	4	4	4	4	4	4	4				3	3	2				7	7	
3	1 Арикеева Гульсая Ильдусовна	4	0	2	3	4	4	3				3						5	2	30
4	2 Архипова Дарья Геннадьевна	4	4	4	4	4	4	4				3	3	2				7	2	45
5	3 Афзалова Альфия Ильнатовна	4	0	2	3	4	4	3				3						5	2	30
6	4 Бабаханова Зебиниса	4	4	4	4	4	4	4				3	3	2				7	2	45
7	5 Бикбаева Луиза Айратовна	4	0	2	3	4	4	3				3						5	2	30
8	6 Галимуллин Рамзиль Рамильевич	4	4	4	4	4	4	4				3	3	2				7	2	45
9	7 Комарова Полина Александровна	4	0	2	3	4	4	3				3						5	2	30

Рис. 4

Для промежуточной аттестации была создана программная процедура ball\_exam(No,p,No\_Bil,DB,PB,bbb,Z): No – порядковый номер

студента в экзаменационной ведомости, р – семестр, экзамен, список, гистограмма, No\_Bil – номер билета, DB-добор баллов в виде списка, PB – баллы за поощрение (участие в конференции и т.д.), bbb – максимальный балл указанный в билете экзаменуемого за каждый вопрос в виде списка, Z – оценка по пятибалльной шкале в виде списка. Приведем пример ввода и исполнение (см. рис. 5) команды ball\_exam со вторым параметром «семестр» при использовании лектором во время промежуточной аттестации для получения информации за промежуточный контроль:

```
>ball_exam(12,семестр,0,[0],0,[0,0,0,0],[0,0,0,0]);
```

```
> ball_exam(18,семестр,0,[0],0,[0,0,0,0],[0,0,0,0]);
```

	CPC/1	CPC/2	CPC/3	CPC/4	CPC/5	CPC/6	CPC/7	Итого CPC	KP/1	KP/2	KP/3	Итого KP	ПР_Л	ПР_П	Итого ПР	Всего
План	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	28.0	3.0	3.0	2.0	8.0	7.0	7.0	14.0	50.0
Халимова Рузалия Раязовна	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	28.0	3.0	3.0	2.0	8.0	7.0	2.0	9.0	45.0
Добор баллов	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.				0.

Рис. 5

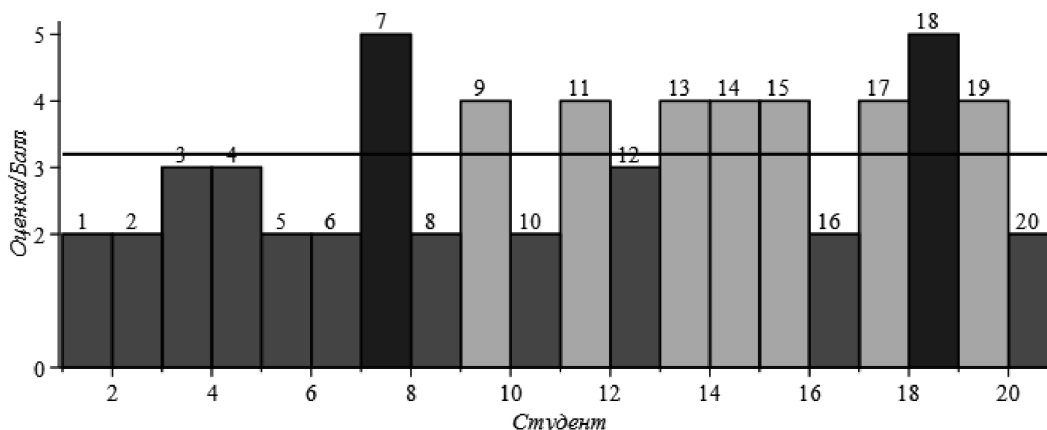
На рисунке 6 показаны результаты промежуточной аттестации, а на рисунке 7 эти же результаты выведены в виде гистограммы и средней оценки группы.

```
> ball_exam(9,экзамен,10,[6,6],0,[10,10,20,10],[4,5,3,4]);
```

ФИО	Дата	Время: посадки	ответа	Добор: max	остаток	Экзамен: № билета	1	2	3	4	Σ семестр	Σ добора	Σ поощрение	Σ экзамен	Σ итого	Оценка
Курбанов Разиль Раифович	9 января 2018	9:19:24	7:33:1	13.0	1.0	10	4	5	3	4	30.0	12	0	38	80.0	4

Рис.6

```
> ball_exam(0,гистограмма,0,[0],0,[0],[0]);
```



Средняя оценка - 3.2 1-Арикеева, 2-Архипова, 3-Афзалова, 4-Бабаханова, 5-Бикбаева, 6-Галимуллин, 7-Комарова, 8-Куприянов, 9-Курбанов, 10-Мирзагалиева, 11-Никитина, 12-Плаксий, 13-Сеченых, 14-Ситдикова, 15-Стрекалова, 16-Хаертдинова, 17-Халимова, 18-Халимова, 19-Хасанова, 20-Шкурин,

Рис. 7

Созданные таким образом стандартные процедуры Maple удобны тем, что позволяют преподавателю и обучающему, не знакомому с тонкостями программирования, легко получить результат и необходимую сопутствующую информацию.

### Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию: монография. Казань: Изд-во Казанского университета, 2014. -- 298 с.

2. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Обучение высшей математике на основе интегрирования методов математического и компьютерного моделирования в системах компьютерной математики // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. Вып. 2. С. 62-88.

3. Программный комплекс итоговой аттестации знаний, автоматизированного анализа и вывода результатов аттестации группы учащихся / студентов по балльно-рейтинговой системе (БРС) на основе прикладного математического пакета Maple, его приложения Maplet и MicrosoftExcel: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014661615 Российская Федерация / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина, А.А. Агафонов. № 2014619341; заявл. 12.09.14; опубл. 10.11.14, Бюл. № 12. -- 1 с.

4. Программный комплекс программных процедур по высшей математике в прикладном математическом пакете Maple: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2013617288 Российская Федерация / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина. № 2013613510; заявл. 26.04.13; опубл. 08.08.13.

**Yu.G. Ignat'ev, A.R. Samigullina**  
Kazan Federal University

### **EDUCATION HIGHER MATHEMATICS FROM INTEGRATION METHODS OF MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING IN COMPUTER MATHEMATICS SYSTEM**

**Keywords:** *physical and mathematical education, computer mathematics systems, Maple, Maplet, analytical testing system, mathematical modeling.*

**Abstract.** *A new paradigm of physical and mathematical education is presented, based on the integration of methods of mathematical and computer modeling in the system of computer mathematics Maple. The developed methods of analytical computer testing of mathematical knowledge using the Maplet application are described, as well as the results of implementing this system at the Kazan Federal University.*

## **СИСТЕМА ПОДГОТОВКИ ШКОЛЬНИКОВ К РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ**

Ключевые слова: *личный подход к обучению, элективные занятия, развитие математических способностей школьников, приобщение учащихся к олимпиадному математическому движению.*

*Современные тенденции в развитии образования обуславливают поиск новых форм и методов организации учебного процесса. Всё большее значение приобретает личный подход к обучению. Осуществление такого подхода вполне возможно на элективных занятиях по математике. Наличие подобных групп позволяет создать широкий общекультурный, эмоционально значимый для ученика фон освоения различных направлений стандарта общего образования и предметно ориентировать его в базисных видах деятельности, содействуя определению жизненных планов, включая и предпрофессиональную ориентацию. Именно поэтому организация и проведение дополнительных занятий по предмету являются актуальными задачами современной школы.*

Современные тенденции в развитии образования обуславливают поиск новых форм и методов организации учебного процесса. Всё большее значение приобретает личный подход к обучению, так как он позволяет максимально раскрыть всю многогранность и неповторимость индивидуальных особенностей школьника, что, в свою очередь, предоставит ему в дальнейшем возможность самореализации в быстро меняющейся социальной среде. Ориентация на способности и склонности учащихся, на уровень их начальной подготовки, стремление научить учеников самостоятельно собирать информацию, анализировать её и применять на практике, соотносить с реальным миром требуют от школы неординарного, творческого подхода к работе.

Осуществление такого подхода вполне возможно на элективных занятиях по математике. Наличие подобных групп позволяет создать широкий общекультурный, эмоционально значимый для ученика фон освоения различных направлений стандарта общего образования и предметно ориентировать его в базисных видах деятельности (ценностно-ориентационной, познавательной, коммуникативной, эстетической), содействуя определению жизненных планов, включая и предпрофессиональную ориентацию. Именно поэтому организация и



проведение дополнительных занятий по предмету являются актуальными задачами современной школы.

Элективные занятия в физико-математических группах позволяют повысить интерес к предмету; обеспечивают школьникам высокий теоретический уровень знаний; учат их моделированию и рациональному планированию своей деятельности; ориентируют учащихся в отношении выбора жизненного пути; содействуют более полному проявлению способностей учеников и стимулируют их развитие в современных условиях.

Одна из задач, которые возлагаются на проводимые дополнительные занятия по математике, – улучшить подготовку учащихся к итоговым испытаниям, к дополнительным вступительным экзаменам в престижные вузы, к региональному и заключительному этапам Всероссийской олимпиады школьников. Но если эта задача становится главной, то занятия сводятся к прямому натаскиванию, а это малоэффективно. Иное дело, если учитель организует предварительную самостоятельную работу учащихся (вне занятий) по решению задач, а на дополнительных занятиях вместе со школьниками определяет наиболее рациональную методику поиска решения, устанавливает границы применимости того или иного метода решения, учит предупреждать наиболее типичные ошибки в решении, в его записи и обосновании, в оформлении чертежа к задаче, учит находить эффективные приёмы самоконтроля, сопоставлять различные способы решения одной и той же математической задачи, оценивать их достоинства и недостатки. В этом случае сознательное и глубокое усвоение содержания, идей, методов школьного курса является в то же время лучшей подготовкой к итоговой, вступительной и олимпиадной аттестации.

С целью реализации заявленных задач мы предлагаем к внедрению в общеобразовательные учреждения элективный курс «Технология решения математических задач повышенной сложности». Он направлен на усиление математической подготовки учащихся; призван научить школьников точно формулировать изученные теоретические положения и применять их при решении задач; правильно пользоваться математической терминологией и символикой; применять рациональные приёмы вычислений и тождественных преобразований.

## ***РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «ТЕХНОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ»***

### ***1. Пояснительная записка***

Программа ориентирована на учащихся 8–11-х классов, направлена на повышение уровня математической подготовки обучаемых, предполагает овладение школьниками навыков математического исследования, способствует приобщению обучающихся к олимпиадному

математическому движению. Программа предполагает трёхэтапную подготовку учеников. При этом группы могут быть разновозрастными. Дифференциация осуществляется лишь по годам освоения программы. Предусматривается 4 учебных часа в неделю в течение 34 учебных недель (2 занятия по 2 часа в неделю). Дополнительно проводится летний сбор в конце 1 и 2-го годов обучения продолжительностью по 36 учебных часов.

Данная программа соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту по математике и Концепции развития математического образования в Российской Федерации. Она базируется на программе общеобразовательной школы, но откорректирована в направлении частичного перераспределения материала между классами и усиления математической базы школьников.

Предусматривается реализация следующих *образовательных задач*:

- обеспечение прочных математических знаний, умений и навыков в соответствии со стандартом математического образования, а также необходимых для изучения смежных дисциплин (химия, биология, география, физика и др.), для применения в практической деятельности учащихся, для продолжения образования;

- повторение, обобщение, систематизация материала по курсу алгебры, началам анализа и геометрии;

- усиление и расширение теоретической базы курса за счёт включения в практику параметрических, олимпиадных и «звёздных» задач;

- формирование математического мировоззрения школьников и расширение их математического кругозора;

- интеллектуальное развитие учеников, формирование у них логического, алгоритмического, творческого мышления;

- развитие интереса к предмету и его изучению;

- привитие учащимся навыков математического исследования и творчества.

*Методический инструментарий*

Настоящая программа предполагает использование наряду с традиционными формами и методами обучения инновационных педагогических технологий. В практику преподавания математики внедрены уроки-лекции, уроки-беседы, уроки-практикумы, уроки творчества; в обучении рационально сочетаются устные и письменные виды работы.

Данная программа математического образования предполагает, прежде всего, реализацию общедидактических принципов. Но с учётом специфики личностно ориентированного подхода, особенностей группы особое внимание уделяется принципам практической направленности,

интеграции, самостоятельности, соревновательности и принципу учёта индивидуальных особенностей учащихся.

В практику преподавания внедрены творческие домашние работы, разработка предметных проектов, тренировочные олимпиады.

Основу профессиональной деятельности составляет педагогическая технология личностно ориентированного обучения учащихся в малых группах, под которой понимается научно обоснованная, формализованная модель будущего педагогического процесса в малой группе личностно ориентированного обучения, все элементы которой последовательно взаимосвязаны, системны и направлены на максимальную оптимизацию образовательных воздействий. Цель предлагаемой технологии – усвоение знаний основ наук, формирование умений и навыков, постоянное обогащение учеников опытом творчества, выработка механизмов самоорганизации и самоактуализации личности; максимальное удовлетворение образовательных запросов учащихся. Кроме того, перспективными являются элементы следующих педагогических технологий: 1) адаптивная система обучения (модель позволяет актуализировать механизмы развития каждого школьника, спроектировать образовательный режим с учетом индивидуальных возможностей; достоинствами системы, применяющейся в образовательном процессе в математических группах, являются: увеличение доли самостоятельной работы, сочетание обучения и самообучения, формирование навыков самоконтроля, привитие школьникам приёмов исследовательской деятельности); 2) интегральная технология обучения (при этом постоянная и переменная часть блока личностно ориентированных занятий дополняются такими новыми типами учебных занятий, как уроки-консультации, уроки-взаимодействия, исследовательские практические работы, уроки по решению познавательных задач); 3) модель полного усвоения (элементы технологии имеют будущее в рамках описываемой системы работы, так как малый состав участников дает больше возможностей для вариативности образовательного процесса; личностные возможности школьников и более гибкое, чем при традиционном подходе, тематическое планирование позволяют в случае необходимости увеличить продолжительность изучения одной темы и сократить количество часов на овладение другим материалом; достоинством модели является предоставление учащимся возможности полностью овладеть учебным курсом в соответствии с индивидуальными способностями); 4) модель формирования индуктивного мышления (технология применима при преподавании точных дисциплин, в частности математики; позволяет активизировать процесс обучения; учит школьников рациональной организации деятельности, умению применить полученные знания для решения жизненных задач;

способствует развитию мыслительных структур школьников и личностному росту учащихся в целом; достоинствами подхода являются: преобладание поисковой, проблемной составляющей образовательного процесса над информационной, формирование у школьников ценностных ориентаций); 5) уровневая дифференциация на основе обязательных результатов обучения (технология позволяет выявить потенциал каждого ребенка и выбрать оптимальный для него способ обучения; может применяться для установления соответствия реального педагогического процесса личностным потребностям и возможностям школьников).

## 2. Требования к уровню подготовки выпускников

В результате освоения элективного курса обучающийся должен знать: определения основных математических понятий и формулировки ключевых теорем математики; существующую палитру методов решения математических задач;

уметь: решать различные типы уравнений, неравенств и текстовых задач, предлагаемых на итоговых испытаниях различного уровня по математике; предлагать различные методы решения одной и той же математической задачи; анализировать различные подходы к решению математической проблемы и выбирать наиболее оптимальный способ решения; решать задачи повышенной сложности и олимпиадные задачи по математике;

владеть: навыками решения задач с параметрами, звёздных задач, олимпиадных задач; алгоритмами решения логических, алгебраических, планиметрических и стереометрических задач; исследовательскими навыками.

## 3. Тематическое планирование

1 год обучения

№ п/п	Тема	Количество часов
<b>1</b>	<b>Комбинаторика</b>	<b>26</b>
1.1	Правило умножения	6
1.2	Выбор упорядоченного набора (перестановки)	6
1.3	Размещения и сочетания. Перегородки	10
1.4	Тренировочная олимпиада	4
<b>2</b>	<b>Инвариант</b>	<b>16</b>
2.1	Инвариант	6
2.2	Полуинвариант	6
2.3	Тренировочная олимпиада	4
<b>3</b>	<b>Игры</b>	<b>22</b>
3.1	Стратегически независимые игры	4
3.2	Симметрия в играх	4
3.3	Разбиения на группы, фигуры	4
3.4	Дополнение до особой позиции	4
3.5	Геометрические игры	2

3.6	Тренировочная олимпиада	4
<b>4</b>	<b>Олимпиада за 1-е полугодие</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Минимаксные задачи</b>	<b>16</b>
5.1	Наибольшие и наименьшие значения	6
5.2	Оценка и пример	6
5.3	Тренировочная олимпиада	4
<b>6</b>	<b>Принцип крайнего</b>	<b>20</b>
6.1	Выбор наибольшего или наименьшего значений	4
6.2	Деление на части	4
6.3	Принцип крайнего и теория графов	4
6.4	Принцип крайнего в геометрии	4
6.5	Тренировочная олимпиада	4
<b>7</b>	<b>Теория графов</b>	<b>28</b>
7.1	Основные понятия теории графов	2
7.2	Степень вершины	2
7.3	Полный и неполный граф	2
7.4	Путь, маршрут и цикл в графе	2
7.5	Связные вершины, компоненты связности графа	2
7.6	Дерево, мост и число рёбер в графе	4
7.7	Эйлеровы кривые, эйлеров путь, эйлеров цикл	4
7.8	Плоские графы. Теорема Эйлера	4
7.9	Ориентированные графы	2
7.10	Тренировочная олимпиада	4
<b>8</b>	<b>Олимпиада за 2-е полугодие</b>	<b>4</b>
	<b>Всего</b>	<b>136</b>

Далее проводится летний сбор, предусматривающий 32 часа учебных занятий по обобщению и повторению материала 1-го года обучения, и итоговая олимпиада продолжительностью 4 часа.

2 год обучения

№ п/п	Тема	Количество часов
<b>1</b>	<b>Неравенства в задачах</b>	<b>20</b>
1.1	Доказательство числовых неравенств	4
1.2	Алгебраические неравенства	8
1.3	Геометрические неравенства	4
1.4	Тренировочная олимпиада	4
<b>2</b>	<b>Метод математической индукции</b>	<b>20</b>
2.1	Задачи на суммирование	4
2.2	Доказательство неравенств	4
2.3	Задачи на делимость	4
2.4	Индукция в геометрии, раскраски	4
2.5	Тренировочная олимпиада	4
<b>3</b>	<b>Принцип Дирихле</b>	<b>4</b>
3.1	Классический принцип Дирихле	2
3.2	Метод усреднения	2
<b>4</b>	<b>Алгебра</b>	<b>20</b>
4.1	Алгебраические преобразования	4
4.2	Прогрессии и последовательности	4

4.3	Многочлены	4
4.4	Функции и их свойства	4
4.5	Тренировочная олимпиада	4
<b>5</b>	<b>Олимпиада за 1-е полугодие</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Теория чисел</b>	<b>16</b>
6.1	Остатки	2
6.2	Простые числа	2
6.3	Цифры и десятичная запись числа	4
6.4	Оценочные задачи	2
6.5	Конструктивы	2
6.6	Тренировочная олимпиада	4
<b>7</b>	<b>Геометрия (планиметрия)</b>	<b>48</b>
7.1	Решение треугольников	6
7.2	Многоугольники	4
7.3	Подобие фигур	6
7.4	Площади	6
7.5	Секущие и касательные к окружностям	4
7.6	Вписанная, описанная, внеписанная окружности	6
7.7	Геометрические преобразования	6
7.8	Комбинированные задачи	6
7.9	Тренировочная олимпиада	4
<b>8</b>	<b>Олимпиада за 2-е полугодие</b>	<b>4</b>
	<b>Всего</b>	<b>136</b>

Далее проводится летний сбор, предусматривающий 32 часа учебных занятий по обобщению и повторению материала 2-го года обучения и итоговую олимпиаду продолжительностью 4 часа.

3 год обучения

№ п/п	Тема	Количество часов
<b>1</b>	<b>Алгебраические уравнения, неравенства и их системы</b>	<b>24</b>
1.1	Рациональные уравнения, неравенства, системы	10
1.2	Иррациональные уравнения, неравенства, системы	10
1.3	Тренировочная олимпиада	4
<b>2</b>	<b>Трансцендентные уравнения, неравенства и их системы</b>	<b>40</b>
2.1	Тригонометрические уравнения, неравенства, системы	10
2.2	Показательные уравнения, неравенства, системы	8
2.3	Логарифмические уравнения, неравенства, системы	8
2.4	Комбинированные уравнения, неравенства, системы	10
2.5	Тренировочная олимпиада	4
<b>3</b>	<b>Олимпиада за 1-ое полугодие</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Текстовые и логические задачи</b>	<b>28</b>
4.1	Задачи на движение	4

4.2	Задачи на работу	4
4.3	Задачи на проценты, сплавы и смеси	4
4.4	Целочисленные задачи	4
4.5	Задачи на решётках	4
4.6	Логические задачи	4
4.7	Тренировочная олимпиада	4
<b>5</b>	<b>Геометрия (стереометрия)</b>	<b>30</b>
5.1	Многогранники	8
5.2	Круглые тела	8
5.3	Сечения	6
5.4	Комбинированные задачи	4
5.5	Тренировочная олимпиада	4
<b>6</b>	<b>Олимпиада за 2-ое полугодие</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>Итоговая олимпиада</b>	<b>6</b>
	<b>Всего</b>	<b>136</b>

#### 4. Список учебной литературы

1. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6–11 класс. М.: Просвещение, 2010.
2. Математика. Всероссийские олимпиады / Н.Х. Агаханов [и др.]. Вып. 1. М.: Просвещение, 2008.
3. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2. М.: Просвещение, 2009.
4. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 3. М.: Просвещение, 2011.
5. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 4. М.: Просвещение, 2013.
6. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина / А.В. Адельшин [и др.]. Омск, 2007-2009. М.: МЦНМО, 2011.
7. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.
8. Летняя математическая школа: теория, задания, математические бои, олимпиады, опыт организации / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.О. Иванова. Ростов н/Д: Легион, 2013.
9. Математические олимпиады / Р.И. Довбыш [и др.]. Ростов н/Д: Феникс; Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2008.
10. 3000 конкурсных задач по математике. М.: Рольф, 2002.
11. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. Киев: Евроиндекс, 1995.
12. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.
13. Пособие по геометрии. Ч. 1: Планиметрия. Векторы. В помощь учащимся 10-11-х классов / О.В. Нагорнов, А.В. Баскаков, О.Б. Баскакова, Н.В. Серебрякова. М.: НИЯУ МИФИ, 2009.
14. Пособие по геометрии. Ч. 2: Стереометрия. В помощь учащимся 10-11-х классов / О.В. Нагорнов, А.В. Баскаков, О.Б. Баскакова, Н.В. Серебрякова. М.: НИЯУ МИФИ, 2009.
15. Сборник задач по алгебре. Ч. 1: Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства. В помощь учащимся 10-11-х классов / О.В. Нагорнов, А.В. Баскаков, О.Б. Баскакова, Гришин, А.Б. Костин, Р.Р. Резванов, Д.С. Теляковский. М.: НИЯУ МИФИ, 2009.

16. Сборник задач по алгебре. Ч. 2: Иррациональные, тригонометрические, логарифмические уравнения и неравенства. Прогрессии. В помощь учащимся 10-11-х классов / О.В. Нагорнов, А.В. Баскаков, О.Б. Баскакова, С.А. Гришин, Н.В. Мирошин, Р.Р. Резванов. М.: НИЯУ МИФИ, 2009.

**A.V. Konashenko, N.A. Sherstneva**  
*Smolensk State University*

## **SYSTEM OF PREPARATION OF SCHOOLCHILDREN TO SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS OF INCREASED COMPLEXITY**

**Keywords:** *personal approach to learning, elective classes, development of mathematical abilities of schoolchildren, introduction of students to the Olympiad mathematical movement.*

**Abstract.** *Modern trends in the development of education cause a search for new forms and methods of organizing the educational process. Increasing importance is acquired by the personal approach to learning. Implementation of such an approach is quite possible in elective studies in mathematics. The presence of such groups makes it possible to create a broad general cultural, emotionally significant for the student background of mastering various directions of the standard of general education and to objectively orient it in basic activities, helping to determine life plans, including pre-professional orientation. That is why the organization and conduct of additional classes on the subject are topical tasks of the modern school.*

**А.С. Кузнецова**  
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

УДК 159.9:331.101.3

## **ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕДИКТОРЫ УСПЕШНОСТИ ТРУДА ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**Ключевые слова:** *психологический анализ труда, факторы напряженности труда, успешность труда, мотивация; удовлетворенность работой, саморегуляция состояния, копинг-ресурсы, профессионально-личностные деформации.*

*Эмпирическое исследование посвящено выявлению психологических предикторов профессиональной успешности педагогов образовательных учреждений в системе среднего образования. Установлено, что характерные для начальных стадий развития выгорания симптомы негативного восприятия учащихся и результатов собственного труда являются факторами, снижающими удовлетворенность трудом и выступающими в качестве негативных*



*предикторов успешности. Выявлены специфические особенности мотивационной сферы (ориентация на профессиональные достижения, развитие творческого потенциала и ресурсов саморегуляции), профессиональные компетенции (способность находить контакт с учениками и умение поддерживать высокую дисциплину) и просоциальные модели преодоления профессиональной напряженности как наиболее мощные предикторы успешности в труде педагогов.*

Труд современного педагога выступает как актуальный объект исследований в психологии труда, что связано с внедрением широкомасштабных отраслевых инноваций в системе среднего образования [1; 17]. Один из ключевых аспектов – анализ ресурсов повышения профессиональной успешности в напряженной и стрессогенной образовательной среде современных образовательных учреждений. Как показывают психологические исследования труда учителя, к основным причинам развития профессионального стресса у педагогов традиционно относят факторы, инвариантных по отношению к региональным особенностям труда [4; 8; 10; 12; 15; 16], а именно: (1) большой объем нагрузки по работе с плановыми и отчетными документами; (2) эмоциональную насыщенность работы в сочетании с организационными требованиями корректного поведения по отношению к ученикам, их родителям, коллегам и руководству при возникновении конфликтных ситуаций; (3) высокую ответственность за результаты труда в сочетании с жесткими сроками выполнения работы; (4) отсутствие специальных помещений для отдыха при повышенном уровне шума во время перемен; (5) до недавнего времени – чрезвычайно низкий уровень оплаты труда (в настоящее время – приемлемый, но недостаточно высокий) в сочетании с ограниченностью перспектив карьерного роста. Дополнительные факторы роста напряженности связаны с преобразованиями в образовательной системе; ожидание перемен, необходимость адаптации к ним, иногда – потеря доверия по отношению к руководству организаций выступают как причины роста инновационного стресса [3; 14]. Очевидно, что напряженные условия труда учителя предъявляют повышенные требования к психологическим ресурсам саморегуляции текущего состояния.

Необходимое условие успешности профессиональной деятельности – мотивационная направленность на достижение результатов. Вместе с тем инновационные перестройки требуют от учителей не только совершенствования профессиональных умений и приобретения новых знаний, но и развития компетентности в области психологических приемов самооценки своего рабочего поведения, эффективного самоуправления текущим состоянием и преодоления стресса [2; 6; 7; 13]. В напряженных профессиональных ситуациях надежно

функционирующая система средств саморегуляции состояния поддерживает высокую эффективность труда – обеспечивает требуемые результаты, достигнутые минимальной «ценой» (в том числе и ценой расхода эмоциональных ресурсов).

Для выявления психологических предикторов успешности труда педагогов в динамичной инновационной среде был реализован цикл исследований учителей средних школ двух городов: Москвы (Россия) и Ташкента (Узбекистан); всего 95 преподавателей средних школ в возрасте от 20 до 75 лет, стаж работы – от 1 года до 47 лет. Для сбора данных использовался *диагностический пакет методик*: (1) опросник для оценки синдрома выгорания; (2) методики выявления содержательных факторов мотивации и основной мотивационной направленности; (3) опросник для выявления предпочитаемых моделей преодоления стресса - копинг-поведения. Кроме того, были собраны данные о выраженности профессиональных компетенций по методике оценки работы учителей (МОРУ) и о результативности их труда.

В рамках общего цикла проведено исследование по выявлению признаков синдрома выгорания (как типичного для представителей социэкономических профессий вида деформаций личности) [4; 11]. Показано, что симптомы выгорания в целом относятся к диапазону низкой и, реже, средней выраженности. Значимых различий между данными представителей Москвы и Ташкента нет, что указывает на высокую степень схожести проявления признаков выгорания у учителей разных регионов. При помощи подсчета коэффициентов частных корреляций обнаружено, что тип взаимосвязей симптомов выгорания одинаков: чем более характерно эмоциональное истощение, тем с большей вероятностью можно ожидать выраженности деперсонализации (феномена отказа в признании уникальных индивидуальностей учеников и попыток игнорировать уникальность проблем обучения за счет их подведения под одну категорию – по типу «все они одинаковы») и редукции достижений (феномена возникновения сомнений в собственной компетентности, роста неудовлетворенности трудом и неуверенности в его успешности). Таким образом, даже первичные признаки развития выгорания выступают как предикторы снижения успешности. Вместе с тем полное отсутствие симптоматики выгорания само по себе не является фактором, предсказывающим высокую успешность. Для выявления таких факторов проведено исследование с целью поиска предикторов успешности из категории видов профессиональной компетентности, мотивационных регуляторов, способов саморегуляции состояния в напряженных профессиональных ситуациях инновационного периода [5].

Анализ профессиональных компетенций показал очевидное преобладание знания предмета и умения объяснить материал; владения

разными методами обучения; умения организовывать пространство и время урока, что подтверждает ориентацию педагогов на парадигму формирования знаний как главной цели образования [8]. Наиболее сильные мотиваторы труда учителей – потребности в интересной работе, четком структурировании жизни, самосовершенствовании, креативности, завоевании признания. Корреляционный анализ показал прямую взаимосвязь направленности на достижения и стремления к креативности ( $\rho=0,632$ ;  $p<0,001$ ), а также к самосовершенствованию ( $\rho=0,378$ ;  $p=0,040$ ). Таким образом, можно сделать вывод о преобладании на обследованной выборке мотивационных ориентаций на продуктивный труд и творческую самореализацию.

На фоне собранных фактов важно проанализировать степень выраженности разных способов преодоления трудовой напряженности. Результаты показали доминирование просоциальных способов преодоления напряженности и практически полное отсутствие преодоления стресса путем психологического дистанцирования от коллег; редко используются агрессивные и манипулятивные модели копинг-поведения. Данные результаты связаны со спецификой организационных и профессиональных норм и отражают представления учителей о принятой социально приемлемой форме поведения педагога.

Далее обследованная выборка была разделена на 2 подгруппы – учителей с более высоким и более низким уровнем результативности. При помощи методики МОРУ показано, что более успешным учителям в большей степени свойственна ориентация на достижения, а менее успешных больше мотивирует потребность в получении высокой зарплаты. Различия в представлениях учителей о типичных способах преодоления стресса показывают, что успешные сотрудники предпочитают модели вступления в социальный контакт и ассертивного поведения как формы преодоления стресса, способствующие конструктивному разрешению конфликтных ситуаций.

На последнем этапе был проведен регрессионный анализ методом пошаговой регрессии с целью уточнения статистически значимых предикторов успешности труда. По результатам выявлены следующие предикторы: (1) социально-ориентированные модели копинг-поведения ( $p=0,114$ ;  $\beta=0,240$ ); (2) поддержание на уроке дисциплины ( $p=0,049$ ;  $\beta=0,394$ ) и (3) адекватность общения с учениками ( $p=0,194$ ;  $\beta=0,286$ ) - как виды профессиональной компетентности.

Важно отметить, что умение обеспечить дисциплину на уроке в сочетании со способностью находить наилучшие формы для установления контакта с учениками является свидетельством эмоциональной гибкости учителя [9]. Данная профессиональная особенность обеспечивает достижение наилучших результатов при сохранении конструктивной установки на преодоление проблем,

сохраняет ресурсы и предотвращает развитие эмоционального истощения педагога. В сочетании с просоциальными формами преодоления стресса выделенные в качестве предикторов профессиональные компетенции обеспечивают позитивный вектор профессионализации педагогов и способствуют эффективной адаптации в напряженной инновационной среде.



По итоговым результатам можно сделать следующие *выводы*.

1. Отсутствие признаков профессиональных деформаций по типу синдрома выгорания следует рассматривать как необходимое, но недостаточное условие достижения профессионального успеха;

2. Мотивационные ориентации, инвариантные по отношению к региональным особенностям труда – потребности в достижениях, развитии творческого потенциала и возможностей саморегуляции – выступают как основа формирования успешности педагогов.

3. В качестве предикторов успешности выявлены два взаимодополняющих вида профессиональной компетентности: способность адекватно взаимодействовать с учениками и умение поддерживать высокую дисциплину; на них основана эмоциональная гибкость как ресурс конструктивного преодоления инновационной напряженности и основа для позитивного профессионального развития.

4. Более успешным педагогам свойственны варианты копинг-поведения, основанные на просоциальных и активно реализуемых приемах преодоления инновационной напряженности; данные способы саморегуляции состояния с высокой для данной выборки вероятностью выступают в качестве предиктора профессиональной успешности.

### Литература

1. Березина Т.И. О ходе модернизации педагогического образования в Российской Федерации. // Журнал «Школа будущего». 2016. № 3. С. 78-85.
2. Бехоева А.А. Проектирование программы развития профессионально-педагогической рефлексии будущих учителей на основе рефлексивно-

деятельностного подхода // Национальный психологический журнал. 2017. № 1 (25). С. 56-63.

3. Заварцева М.М. Структура и функции организационного доверия в представлениях сотрудников // Национальный психологический журнал. 2016. № 2 (22). С. 94-104.

4. Инновационные изменения как фактор риска развития выгорания учителей средних школ (по материалам исследования преподавателей России и Узбекистана) / А.С. Кузнецова и [и др.] // Выгорание и профессионализация / под ред. В.В. Лукьянова и др. Курск: Курский государственный университет, 2013. С. 61-87.

5. Кузнецова А.С., Бурая И.А. Мотивационная основа адаптивной саморегуляции состояния в профессиях с высоким риском развития синдрома выгорания // Актуальные проблемы клинической и прикладной психологии / под ред. Н.А. Кравцовой и Р.В. Кадырова. Владивосток: Владивостокский гос. мед. ун-т, 2009. С. 289-295.

6. Кузнецова А.С., Титова М.А. Эффективная саморегуляция состояния в напряженных условиях как дифференцирующая компетенция // Организационная психология и психология труда. 2016. Т. 1, № 1. С. 87-113.

7. Леонова А.Б., Кузнецова А.С. Психологические технологии управления состоянием человека М.: Смысл, 2009. 311 с.

8. Митина Л.М. Психология труда и профессионального развития учителя. М.: Академия, 2004. 320 с.

9. Митина Л.М., Асмаковец Е.С. Эмоциональная гибкость учителя: психологическое содержание, диагностика, коррекция. М.: Флинта, 2001. 192 с.

10. Подымов Н.А. Психологические особенности профессиональной деятельности учителя. Курск: КГПУ, 1996. 192 с.

11. Пряжников Н.С., Ожогова Е.Г. Эмоциональное выгорание и личностные деформации в психолого-педагогической деятельности // Вестн. Моск. ун-та. Серия 14. Психология. 2014. № 4. С. 33-43.

12. Реан А.А., Баранов А.А. Факторы стрессоустойчивости учителей // Вопросы психологии. 1997. № 1. С. 45-54.

13. Сорокоумова Е.А. Самопознание в структуре профессиональной подготовки современного учителя // Вестн. Моск. гос. областн. ун-та. 2016. № 4. С. 13.

14. Титова М.А. Саморегуляция функциональных состояний и профессиональная успешность преподавателей колледжа // Среднее профессиональное образование. 2012. № 6. С. 48–50.

15. Cropley M., Millard-Purvis L.J. Job strain and rumination about work issues during leisure time: A diary study // European journal of work and organizational psychology. – 2003. – № 12 (3). – P. 195-207.

16. Friedman I.A. Self-efficacy and burnout in teaching: the importance of interpersonal-relations efficacy // Social Psychology of Education. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 2003. Vol. 6. P. 191-215.

17. Ilyushin L.S., Azbel A.A. The modern Russian teacher: Studying awareness with the use of semi-structured interview // Psychology in Russia: State of the Art. 2017. № 10(1). P. 49-66.

**A.S. Kuznetsova**  
Lomonosov Moscow State University

## PSYCHOLOGICAL PREDICTORS OF SCHOOL TEACHERS' PROFESSIONAL SUCCESS

**Keywords:** *psychological work analysis, work tension factors, work success, motivation, work satisfaction, psychological self-regulation of a state, coping resources, professional deformations.*

**Abstract.** *The research targeted to reveal psychological predictors of teachers' work success. The data showed that depersonalization and reduced personal accomplishment (burnout symptoms) lead to work satisfaction decrease and could be viewed as negative predictors of work success. The major positive psychological predictors were revealed: motivational factors (work achievement motivation, creativity development, self-regulation ability increase), work competences (ability to establish proper contacts with pupils, ability to maintain discipline), as well as coping resources (prosocial and assertive coping models).*

**К.М. Расулов**

*Смоленский государственный университет*

УДК 372.851

## ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ «БАНКОВСКИХ ЗАДАЧ» ИЗ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

**Ключевые слова:** *профильный уровень, ЕГЭ по математике, таблица «движения» денег.*

*В последние годы для подготовки к сдаче ЕГЭ по математике (профильный уровень) издаются различные учебные пособия, содержащие образцы типовых экзаменационных вариантов. Наибольшей популярностью среди учителей математики и выпускников общеобразовательных учреждений пользуются пособия, изданные при научно-методическом сопровождении Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) и под редакцией И.В. Яценко. В этих пособиях (почти во всех типовых вариантах экзаменационных заданий) в качестве одной из задач, где от учащихся требуется изложить полное обоснованное решение, предлагается так называемая «банковская задача», связанная с условиями получения и погашения банковского кредита. В данной статье предлагается один достаточно простой общий подход к обоснованному решению всех основных групп «банковских задач», встречающихся в типовых экзаменационных вариантах профильного уровня ЕГЭ по математике. Основой предлагаемого подхода служит построение таблицы «движения» денег.*

**1. Постановки задач.** Хорошо известно (см., например, [1]), что почти каждую математическую задачу из предлагаемых на ЕГЭ можно решить различными способами. Поэтому при подготовке к ЕГЭ по математике выпускникам общеобразовательных учреждений весьма полезно научиться решать математические задачи различными способами. Такой подход в подготовке к ЕГЭ по математике, на наш взгляд, существенно увеличит «багаж умений и знаний» выпускников общеобразовательных учреждений, что в конечном итоге позволит экзаменуемым успешно сдать ЕГЭ по математике.

Основной целью настоящей статьи является изложение одного общего и достаточно наглядного подхода к поиску решений так называемых «банковских задач», встречающихся в типовых экзаменационных вариантах профильного уровня ЕГЭ по математике (см., например, [2]).

Все банковские задачи, предлагаемые в популярном пособии [2], условно можно разделить на три группы. Далее сформулируем общие постановки этих трех групп задач.

*Группа А.* В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму  $S$  рублей.

Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Известно, что кредит полностью будет погашен через  $n$  лет.

Требуется найти:

- 1) величину  $r$ , если известны  $S$  и величины ежегодных платежей  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ;
- 2) общую сумму всех выплат  $X$ , если известны  $S$ ,  $r$  и, кроме того, кредит будет полностью погашен  $n$  равными платежами.

*Группа В.* 15 января планируется взять кредит в банке на  $m$  месяцев.

Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Требуется найти:

- 1) величину  $r$ , если известно, что общая сумма всех выплат  $X$  на  $p$  процентов больше суммы  $S$ , взятой в кредит;

- 2) величину одной из месячных выплат  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), если известны  $S$  и  $r$ ;
- 3) общую сумму выплат  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_m$ , если известны  $r$  и величина одной из месячных выплат  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ );
- 4) величину  $S$ , если известны  $m$ ,  $r$  и величина одной из месячных выплат  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ );
- 5) сумму выплаты  $X_1$  за первый месяц, если известны  $m$ ,  $r$  и величина  $X_2$ .

*Группа С.* В июле планируется взять кредит в банке на сумму  $S$  рублей на  $n$  лет ( $n$  – натуральное число).

Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Требуется найти:

- 1) величину  $n$ , если известны  $S$ ,  $r$  и общая сумма всех выплат  $X$ ;
- 2) величину  $r$ , если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составляет  $Y$  рублей, а наименьший –  $Z$  рублей;
- 3) величину  $S$ , если известны  $n$ ,  $r$  и общая сумма всех выплат  $X$ ;
- 4) минимальное значение  $n$ , если известны  $S$ ,  $r$ , а ежегодные выплаты были не более  $T$  рублей (т.е.  $X_k \leq T$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ).

**2. Метод решения задач группы А.** Ради краткости изложения проиллюстрируем предлагаемый метод на конкретном примере.

**Пример 1** (см. [1], вариант 2, задача 17). В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 600 000 рублей.

Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите  $r$ , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причем в первый год будет выплачено 360 000 рублей, а во второй год – 330 000 рублей.

**Решение.** Сначала решим задачу в общем виде, т.е. обозначим сумму кредита через  $S$ , процентную ставку кредита –  $r$ , а ежегодные платежи –  $X_1$  и  $X_2$  соответственно. Тогда *таблица «движения» денег*, наглядно иллюстрирующая весь процесс получения кредита и его возврата, может быть представлена в виде следующей таблицы 1.



Таблица 1

Номер года	Величина долга в январе текущего года	Величина долга после выплаты текущего года	Величина долга в июле текущего года
2020			$S$
2021	$\frac{100+r}{100}S$	$\frac{100+r}{100}S - X_1$	$\frac{100+r}{100}S - X_1$
2022	$\frac{100+r}{100}\left(\frac{100+r}{100}S - X_1\right)$	$\frac{100+r}{100}\left(\frac{100+r}{100}S - X_1\right) - X_2$	0

Поскольку после второго платежа кредит был полностью погашен, из таблицы 1 получаем следующее уравнение (математическую модель задачи):

$$\frac{100+r}{100}\left(\frac{100+r}{100}S - X_1\right) - X_2 = 0. \quad (1)$$

**Замечание 1.** Ценность уравнения (1) состоит в том, что, зная значения любых трех входящих в него переменных, всегда можно определить значение оставшейся четвертой переменной.

Перепишем уравнение (1) в более удобной форме, умножив обе его части на  $10^4$ :

$$S \cdot (100+r)^2 - 100X_1 \cdot (100+r) - 10^4 \cdot X_2 = 0. \quad (2)$$

Далее, подставив в правую часть уравнения (2) данные из условия задач:  $S = 600000$ ,  $X_1 = 360000$ ,  $X_2 = 330000$  и, ради краткости, введя обозначение  $t = 100+r$ , получим следующее квадратное уравнение относительно  $t$ :

$$6 \cdot 10^5 \cdot t^2 - 36 \cdot 10^6 \cdot t - 33 \cdot 10^8 = 0.$$

Далее, разделив обе части последнего уравнения на  $10^5$ , будем иметь:

$$6t^2 - 360t - 33000 = 0. \quad (3)$$

Но уравнение (3) имеет два корня:  $t_1 = 110$  и  $t_2 = -50$ . Так как по условию задачи  $t = 100+r > 0$ , то подходит лишь первый корень, т.е.  $100+r = 110$ . Значит,  $r = 10$ .

**Ответ:** 10.

**3. Метод решения задач группы В.** Этот метод также проиллюстрируем на конкретном примере.

**Пример 2** (см. [1], вариант 20, задача 17). 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца.

Условия возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 339000 рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

**Решение.** Данную задачу сначала также решаем в общем виде. Для этого обозначим сумму кредита через  $S$ , процентную ставку кредита –  $r$ , ежемесячные платежи –  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{23}, X_{24}$ , а постоянную величину, на которую ежемесячно уменьшается долг, обозначим через  $b$ . Тогда соответствующая *таблица «движения» денег*, наглядно иллюстрирующая весь процесс получения кредита и его возврата, может быть представлена в виде таблицы 2.

Таблица 2

Номер месяца	Величина долга 1-го числа текущего месяца	Величина долга после выплаты текущего месяца	Величина долга 15-го числа текущего месяца
<b>1</b>			$S$
2	$\frac{100+r}{100}S$	$\frac{100+r}{100}S - X_1$	$S - b$
3	$\frac{100+r}{100}(S - b)$	$\frac{100+r}{100}(S - b) - X_2$	$S - 2b$
4	$\frac{100+r}{100}(S - 2b)$	$\frac{100+r}{100}(S - 2b) - X_3$	$S - 3b$
...	...	...	...
11	$\frac{100+r}{100}(S - 9b)$	$\frac{100+r}{100}(S - 9b) - X_{10}$	$S - 10b$
12	$\frac{100+r}{100}(S - 10b)$	$\frac{100+r}{100}(S - 10b) - X_{11}$	$S - 11b$
<b>13</b>	$\frac{100+r}{100}(S - 11b)$	$\frac{100+r}{100}(S - 11b) - X_{12}$	$S - 12b$
14	$\frac{100+r}{100}(S - 12b)$	$\frac{100+r}{100}(S - 12b) - X_{13}$	$S - 13b$
15	$\frac{100+r}{100}(S - 13b)$	$\frac{100+r}{100}(S - 13b) - X_{14}$	$S - 14b$
...	...	...	...
24	$\frac{100+r}{100}(S - 22b)$	$\frac{100+r}{100}(S - 22b) - X_{23}$	$S - 23b$
<b>25</b>	$\frac{100+r}{100}(S - 23b)$	$\frac{100+r}{100}(S - 23b) - X_{24}$	<b><math>S - 24b = 0</math></b>

**Замечание 2.** Важно сразу обратить внимание на то, что, поскольку кредит получен в середине месяца (т.е. 15-го числа), он полностью будет погашен в середине 25-го месяца. Следовательно, в таблице 2 число месяцев, в течение которых действует кредит, будет 25.

По условию данной задачи известно, что  $r = 2$  и

$$X_{13} + X_{14} + \dots + X_{24} = 339000. \quad (3)$$

Требуется найти сумму

$$A = X_1 + X_2 + \dots + X_{12}. \quad (4)$$

Ясно, что для решения задачи в первую очередь нужно найти значения параметров  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{23}, X_{24}$ . Для этого заметим, что в таблице 2 в каждой строке, начиная со второй, величины выражений, стоящих в последних двух столбцах, равны, т.е. справедливы равенства:

$$\frac{100+r}{100}S - X_1 = S - b,$$

$$\frac{100+r}{100}(S - b) - X_2 = S - 2b,$$

.....

$$\frac{100+r}{100}(S - 22b) - X_{23} = S - 23b,$$

$$\frac{100+r}{100}(S - 23b) - X_{24} = 0.$$

Из последних равенств соответственно получаем:

$$X_1 = \frac{100+r}{100}S - (S - b),$$

$$X_2 = \frac{100+r}{100}(S - b) - (S - 2b), \quad (5)$$

.....

$$X_{23} = \frac{100+r}{100}(S - 22b) - (S - 23b),$$

$$X_{24} = \frac{100+r}{100}(S - 23b).$$

Далее, подставив в левую часть равенства (3) вместо  $X_{13}, X_{14}, X_{15}, \dots, X_{23}, X_{24}$  их значения из предыдущих равенств, будем иметь:

$$\left\{ \frac{100+r}{100}(S-12b) - (S-13b) \right\} + \left\{ \frac{100+r}{100}(S-13b) - (S-14b) \right\} + \dots +$$

(6)

$$+ \left\{ \frac{100+r}{100}(S-22b) - (S-23b) \right\} + \frac{100+r}{100}(S-23b) = 339000.$$

В целях упрощения дальнейших выкладок равенство (6) представим в виде

$$\frac{100+r}{100} \{ (S-12b) + (S-13b) + \dots + (S-23b) \} -$$

$$- \{ (S-13b) + (S-14b) + \dots + (S-23b) \} = 339000,$$

или

$$\frac{100+r}{100} \{ 12S - b(12+13+\dots+23) \} - \{ 11S - b(13+14+\dots+23) \} = 339000. \quad (7)$$

**Замечание 3.** Здесь также важно отметить ценность уравнения (7), состоящую в том, что, зная значения любых двух входящих в него переменных, всегда можно определить значение оставшейся третьей переменной.

Теперь, учитывая, что  $r=2$  и  $S-24b=0$ , т.е.  $b = \frac{1}{24}S$  (см. последнюю строку таблицы 2), из равенства (7) получим

$$\frac{102}{100} \cdot \frac{78}{24} S - \frac{66}{24} S = 339000.$$

Из последнего равенства находим  $S = 600000$ .

Аналогично, используя равенства (5), выразим значение суммы (4) через параметры  $r$ ,  $S$ , и  $b$ :

$$A = \left\{ \frac{100+r}{100} S - (S-b) \right\} + \left\{ \frac{100+r}{100}(S-b) - (S-2b) \right\} + \dots + \left\{ \frac{100+r}{100}(S-11b) - (S-12b) \right\},$$

или

$$A = \frac{100+r}{100} \{ S + (S-b) + \dots + (S-11b) \} - \{ (S-b) + (S-2b) + \dots + (S-12b) \} =$$

$$= \frac{100+r}{100} \{ 12S - b(1+2+\dots+11) \} - \{ 12S - b(1+2+\dots+12) \} =$$

$$= \frac{100+r}{100} \{ 12S - 66b \} - \{ 12S - 78b \} = \frac{100+r}{100} \cdot \frac{222}{24} S - \frac{210}{24} S.$$

Итак, окончательно имеем:

$$A = \frac{100+r}{100} \cdot \frac{222}{24} S - \frac{210}{24} S. \quad (8)$$

Наконец, подставив в правую часть (8)  $r = 2$  и  $S = 600000$ , получаем

$$A = \left( \frac{102}{100} \cdot \frac{222}{24} - \frac{210}{24} \right) \cdot 600\,000 = 411\,000.$$

**Ответ:** 411 000.

#### 4. О решении задач группы С. Рассмотрим следующий пример.

**Пример 3** (см. [1], вариант 11, задача 17). В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 500 000 рублей на срок 9 лет.

Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Требуется найти натуральное число  $r$ , если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1 400 000 рублей, а наименьший – не менее 600 000 рублей.

**Решение.** Сначала решаем задачу в общем виде. Для этого обозначим сумму кредита через  $S$ , процентную ставку кредита –  $r$ , ежегодные платежи –  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_8, X_9$ , а постоянную величину, на которую ежегодно уменьшается долг, обозначим через  $b$ . Тогда соответствующая *таблица «движения» денег* может быть представлена в виде таблицы 3.

Таблица 3

Номер года	Величина долга в январе текущего года	Величина долга после выплаты текущего года	Величина долга в июле текущего года
1			$S$
2	$\frac{100+r}{100} S$	$\frac{100+r}{100} S - X_1$	$S - b$
3	$\frac{100+r}{100} (S - b)$	$\frac{100+r}{100} (S - b) - X_2$	$S - 2b$
4	$\frac{100+r}{100} (S - 2b)$	$\frac{100+r}{100} (S - 2b) - X_3$	$S - 3b$
5	$\frac{100+r}{100} (S - 3b)$	$\frac{100+r}{100} (S - 3b) - X_4$	$S - 4b$
6	$\frac{100+r}{100} (S - 4b)$	$\frac{100+r}{100} (S - 4b) - X_5$	$S - 5b$

7	$\frac{100+r}{100}(S-5b)$	$\frac{100+r}{100}(S-5b)-X_6$	$S-6b$
8	$\frac{100+r}{100}(S-6b)$	$\frac{100+r}{100}(S-6b)-X_7$	$S-7b$
9	$\frac{100+r}{100}(S-7b)$	$\frac{100+r}{100}(S-7b)-X_8$	$S-8b$
10	$\frac{100+r}{100}(S-8b)$	$\frac{100+r}{100}(S-8b)-X_9$	$S-9b=0$

Поскольку в таблице 3 в каждой строке, начиная со второй, величины выражений, стоящих в двух последних столбцах, равны, значения величин  $X_1, X_2, \dots, X_9$  будут определяться по формулам (см. также (5)):

$$X_1 = \frac{100+r}{100}S - (S-b),$$

$$X_2 = \frac{100+r}{100}(S-b) - (S-2b), \quad (9)$$

.....

$$X_8 = \frac{100+r}{100}(S-7b) - (S-8b),$$

$$X_9 = \frac{100+r}{100}(S-8b).$$

Но из последней строки таблицы 3 видно,  $S-9b=0$ , т.е.  $b = \frac{1}{9}S$ .

Следовательно, с учетом  $b = \frac{1}{9}S$  формулы (9) можно переписать так:

$$X_1 = \frac{100+r}{100}S - \frac{8}{9}S = \frac{100+9r}{900}S,$$

$$X_2 = \frac{100+r}{100} \frac{8}{9}S - \frac{7}{9}S = \frac{100+8r}{900}S, \quad (10)$$

.....

$$X_8 = \frac{100+r}{100} \frac{2}{9}S - \frac{1}{9}S = \frac{100+2r}{900}S,$$

$$X_9 = \frac{100+r}{900}S.$$

Из равенств (10) видно, что среди годовых платежей  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_8, X_9$  наибольшим является  $X_1$ , а наименьшим —  $X_9$ .

По условию задачи имеем:

$$\begin{cases} X_1 \leq 1400000, \\ X_9 \geq 600000. \end{cases}$$

Наконец, подставив в последнюю систему неравенств вместо  $X_1$  и  $X_9$  их значения, найденные по формулам (10), получаем

$$\begin{cases} \frac{100+9r}{900} S \leq 1400000, \\ \frac{100+r}{900} S \geq 600000. \end{cases} \quad (11)$$

**Замечание 4.** Здесь важно отметить ценность системы неравенств (11) состоящую в том, что, зная значение любого из двух входящих в неравенства переменных, всегда можно оценить значение оставшейся переменной.

Так как по условию задачи  $S = 4500000$ , из системы (11) получаем

$$\begin{cases} \frac{100+9r}{900} \cdot 4500000 \leq 1400000, \\ \frac{100+r}{900} \cdot 4500000 \geq 600000. \end{cases}$$

Но последняя система неравенств равносильна следующей:

$$\begin{cases} r \leq 20, \\ r \geq 20, \end{cases}$$

т.е.  $r = 20$ .

**Ответ:** 20.

### Литература

1. ЕГЭ по математике: как решить попроще и побыстрее: методические рекомендации учителям и учащимся общеобразовательных учреждений / под общ. ред. К.М. Расулова. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. 108 с.

2. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Яценко. М.: Изд-во «Национальное образование», 2018. 256 с.

**K.M. Rasulov**

Smolensk State University

## ON A GENERAL APPROACH TO THE SOLUTION OF THE BANK PROBLEMS FROM THE UNIFIED STATE EXAM IN MATHEMATICS

**Keywords:** *profile level, USE in mathematics, cash flow table.*

**Abstract.** *In recent years a lot of guides for the preparation to the USE in mathematics (profile level) are published. They contain the samples of the typical exam tasks. The most popular among school teachers and graduates are those, that published with the scientific and methodical accompanying of the Federal Institution of Pedagogical Measurements and edited by I.V. Yashchenko. These guides offer (almost in all of typical variants of exam tasks) the so-called bank problems as one of the task that require a detailed grounded solution. The bank problems are related to the conditions of bank loans. In this article we provide one fairly simple general approach to the grounded solution of all of the groups of problems. The basis of the proposed approach is the cash flow table construction.*

**Г.Е. Сенькина**  
Смоленский государственный университет

УДК 37.02

## **ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ В СИСТЕМЕ «ШКОЛА-ВУЗ»**

Ключевые слова: *проектная деятельность, система «школа - вуз», информационные технологии, организация деятельности обучающихся.*

*Статья посвящена проблемам организации проектной деятельности обучающихся в системе «школа - вуз» на примере взаимодействия Смоленского государственного университета с общеобразовательными организациями. Рассматриваются возможности применения различных форм сотрудничества школ региона и вуза в плане развития научно-технического творчества детей и молодежи в аспекте инновационной проектной деятельности. Анализируется содержание понятий «инновационная проектная деятельность», «инновационные образовательные проекты». Обозначены перспективы развития взаимодействия школ и университета в рамках создания регионального проектно-образовательного центра.*

В условиях реализации современных ФГОС в школе и вузе в соответствии с Законом об образовании [1] коренным образом меняются требования к организации проектной деятельности обучающихся, как школьников, так и студентов. Становятся более инновационными



содержание и методы ее организации благодаря использованию современных информационных технологий, в том числе 3D-моделирования, 3D-печати, робототехники. Вместе с тем наблюдается острая потребность в специалистах, владеющих соответствующими методами и технологиями. Задачи организации инновационной проектной деятельности обучающихся и подготовки специалистов, владеющих необходимыми методами и технологиями, под силу решить только в совместной согласованной деятельности школ и вузов.

Прежде всего определимся, что понимается под инновационной проектной деятельностью обучающихся, каково содержание понятия «инновационный образовательный проект».

Проектная деятельность обучающихся обретает инновационный характер, если предполагает преобразование окружающей действительности, строится на базе соответствующей технологии, которую можно унифицировать, освоить, усовершенствовать.

В свою очередь под проектной деятельностью обучающихся понимается совместная учебно-познавательная, творческая или игровая деятельность обучающихся, имеющая общую цель, согласованные методы, способы деятельности, направленная на достижение общего результата деятельности. Непременным условием проектной деятельности является наличие *заранее* выработанных представлений о конечном *продукте* деятельности, этапов проектирования (выработка концепции, определение целей и задач проекта, доступных и оптимальных ресурсов деятельности, создание плана, программ и организация деятельности по реализации проекта) и реализации проекта, включая его осмысление и рефлексию результатов деятельности.

Вообще, проект, по своей сути, это некий прототип, прообраз какого-либо объекта, вида деятельности (как правило, реальной, практической, прикладной), а проектирование и соответствующая проектная деятельность превращаются в процесс создания проекта. Это понимание не исключает теоретической деятельности в случае, если проект исследовательский в области математики, например, процесс доказательства новой теоремы. Однако при этом применяются соответствующие технологии и прикладные программы, в частности пакеты прикладных программ по математике.

Таким образом для инновационного образовательного проекта в качестве родового понятия можно выделить понятие «система целевых установок и программ по их достижению». Видовыми отличиями этих установок и программ являются научно-исследовательские, технологические, организационные, финансовые и иные мероприятия (действия), обеспечивающие эффективное решение конкретной задачи (проблемы) в рамках образовательной деятельности и приводящие к инновации (новшеству). При этом в образовании это новшество может

носить учебный характер, являясь субъективной характеристикой по отношению к авторам проекта.

Смоленским государственным университетом реализуются различные формы организации инновационной образовательной деятельности обучающихся. Так, на физико-математическом факультете действует физико-математическая школа, в которой обучаются школьники г. Смоленска. В рамках групп по образовательной робототехнике обучающиеся 5-11 классов овладевают программированием на основе Scratch, Arduino. Это позволяет им создавать индивидуальные и групповые проекты, с которыми школьники принимают участие в различных конкурсах. Ученики выходят не только на городской и областной уровень, но и на всероссийский, становятся участниками президентской школы «Сириус» в г. Сочи, инженерно-конструкторской школы в Кижях, выступая с такими интересными проектами, как, например, «Инфраструктура лунного туризма» (Осипенкова В.).

В 2017 году на базе факультета была организована всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Развитие научно-технического творчества детей и молодежи». В отличие от традиционных конференций помимо пленарных и секционных заседаний были проведены мастер-классы по робототехнике, 3D-моделированию для учителей и обучающихся, выставка проектов (приборы, модели, программы, прототипы и др.), демонстрировались занимательные опыты по физике. В целом выставку и мастер-классы посетили более 500 учителей и обучающихся школ г. Смоленска и Смоленской области.

Наиболее перспективным направлением для нас в настоящее время является работа с муниципальными образованиями региона на договорной основе в рамках проекта «Региональный проектно-образовательный центр "ИнноЛабс"». Это по сути институциональная структура в форме НКО, которая позволит осуществлять вузу взаимодействие со школами региона на постоянной основе.

Проект направлен на развитие научно-технического творчества, междисциплинарной проектной деятельности детей и молодежи Смоленской области на примере Велижского района, соответствующее повышение квалификации учителей математики, физики и информатики. Предполагается, что «Региональный проектно-образовательный центр "ИнноЛабс"» - это площадка, использующая базу Смоленского государственного университета и базу школ районов Смоленской области на примере опорной школы - МБОУ «Средняя школа № 1» Велижского района.

Школа с 2016 года имеет новое здание, уникальна для региона, поскольку обеспечена большим количеством современного оборудования

на общую сумму около 100 млн рублей, с которым нужно научиться работать как учителям, так и ученикам. Вместе с тем Велижский район, как и многие другие районы Смоленской области, не отличается высоким уровнем развития промышленного производства, уровнем жизни населения. Молодежь, не видя перспектив развития, уезжает из села. Большинство выпускников школ не возвращаются на малую родину после окончания вузов, наблюдается острая нехватка учителей в школах района. Создание проектно-образовательного центра «ИнноЛабс» поможет ученикам и учителям не просто овладеть новым оборудованием, но создавать и реализовывать проекты, направленные на решение реальных проблем с учетом специфики района. Основная цель «ИнноЛабс» - создание и обучение созданию инновационных проектов, имеющих потенциал внедрения, преобразования окружающей жизни, перспективу перерастания в стартапы. «ИнноЛабс» мыслится как комплекс инновационных лабораторий, в которых рождаются и реализуются новые, творческие идеи, в том числе с использованием робототехники, 3D-проектирования, 3D-печати. Чтобы оказать методическую поддержку учителям с целью организации творческой, исследовательской, проектной деятельности учащихся, планируется разработать учебные и методические материалы, методические комплекты по разным предметам, не только по математике, физике и информатике, но и межпредметные. Будут организованы как выездные, так и дистанционные курсы повышения квалификации учителей по развитию научно-технического творчества, организации междисциплинарной проектной деятельности детей и подростков. Будет организовано дистанционное обучение учащихся в режиме on-line на базе физико-математической школы СмолГУ, оказана помощь в подготовке к ЕГЭ по точным предметам и иностранному языку, в том числе для детей с ОВЗ.

В практике обучения студентов физико-математического факультета, профиля «Математика и информатика» педагогического направления бакалавриата нами также организуется проектная деятельность. Студенты овладевают методами и технологиями организации проектной деятельности обучающихся, «методом погружения» – сами создают образовательные проекты. При этом обучают их этой деятельности студенты магистратуры направления «Педагогическое образование», профиль «Физико-математическое образование», реализуется так называемая «вертикальная педагогика». Происходит это в рамках спецкурсов по современным методам обучения, системам автоматизированного проектирования работы учителя. В этом году впервые будет проведена вычислительная практика по образовательной робототехнике для студентов бакалавриата – будущих учителей математики и информатики.

Выпускники магистратур профилей “Физико-математическое образование”, “Информационные технологии в образовании”, овладевшие в соответствии с программой навыками организации инновационной проектной деятельности обучающихся востребованы в школах города и области.

Необходимо отметить, что в целом применение современных технологий активного обучения с использованием информационных технологий вызывает заинтересованность у обучающихся, делает их работу более осмысленной, преобразующей, творческой.

Внедрение новых спецкурсов, вычислительной практики по робототехнике помогло выявить слабые места в материально-техническом оснащении лабораторий, было заказано необходимое оборудование.

Необходимо отметить, что в целом организация инновационной проектной деятельности обучающихся весьма затратна в плане материального оснащения, требует грантовой поддержки особенно на первых этапах развития.

### Литература

1. Федеральный закон об образовании в Российской Федерации. URL: [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_140174/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/) (дата обращения: 21.03.2018).

**G.E. Senkina**

Smolensk State University

## ORGANIZATION OF PROJECT ACTIVITY OF STUDENTS IN THE SCHOOL-UNIVERSITY SYSTEM

**Key words:** *project activity, "school-university" system, information technologies, organization of activity of students.*

**Abstract.** *The article is devoted to the problem of organizing the project activity of students in the "school-university" system by the example of interaction between the Smolensk State University and general education organizations. The possibilities of introduction of various forms of cooperation between schools of the region and the university in terms of development of scientific and technical creativity of children and youth in the aspect of innovative project activity are considered. The content of the concepts of innovative project activity, innovative educational projects is analyzed. The prospects for the development of interaction between schools and the university are outlined in the framework of the creation of a regional design and education center.*

**НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ  
МЕТАПРЕДМЕТНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ  
В ДИСТАНЦИОННОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ ДЕТЕЙ  
С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ<sup>1</sup>**

Ключевые слова: *метапредметные результаты, дети с ограниченными возможностями здоровья, методика преподавания математики, дистанционное обучение, образовательный процесс.*

*В статье рассматривается вопрос формирования метапредметных образовательных результатов, который становится особенно важным при дистанционном обучении детей с ограниченными возможностями здоровья. Авторами приводится пример формирования метапредметных образовательных результатов на основе проектной деятельности учащихся по алгебре и биологии. В качестве программного обеспечения, которое позволяет реализовать проекты, используется виртуальная доска WikiWall. Далее описываются группы метапредметных результатов, в формирование которых проектная деятельность может внести вклад. К ним относятся регулятивные, познавательные, коммуникативные и деятельностные.*

Новые образовательные стандарты требуют от современной школы подготовки людей, готовых к самосовершенствованию, самостоятельному принятию решений. Человек, вышедший из школы, должен уметь учиться, воспринимать новые знания в постоянно изменяющихся условиях жизни. Перед педагогами стоит актуальная задача – развить у детей способность к самостоятельному успешному усвоению новых компетенций (коммуникативной, исследовательских действий, работы с информацией и т.п.). Стандарт ориентирует учителя на формирование таких результатов обучения, как освоение учащимися межпредметных понятий, овладение способами деятельности, применимыми не только в рамках образовательного процесса, но и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, в других предметных областях. Реализация этих идей основана на освоении метапредметов в учебном процессе. Метапредметы выступают в качестве новой специфической формы обучения. Она формируется поверх традиционных общих дисциплин. В основе метапредметного

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-16-67015.

подхода лежит мыследеятельностный вид интеграции содержания материала.

Понимая под метапредметным содержанием образования деятельность, которая не относится ни к одному конкретному учебному предмету, имеющую возможность обеспечивать эффективный образовательный процесс в рамках преподавания любого учебного предмета, отметим актуальность метапредметных образовательных технологий. Так, для современного школьного образования характерна разобщенность, оторванность друг от друга разных научных дисциплин и, как следствие, учебных предметов, и именно метапредметный подход в образовании способен решить данную проблему.

Метапредметность позволяет ученику усвоить обобщенные системы понятий и учебных действий, которые могут широко использоваться, а учитель в рамках своего предмета раскрывает специфику их применения. Ученик имеет возможность увидеть результаты применения одних и тех же понятий и учебных действий на материале различных предметов, тем самым создаются условия для того, чтобы ученик в своей дальнейшей деятельности мог переносить полученные навыки на любые материалы. Это делает учащегося способным самостоятельно учиться и многократно переучиваться, формирует готовность к самостоятельным действиям и принятию решений.

Особую роль в формировании метапредметных результатов обучения играют информационные и коммуникационные технологии. Их использование в образовательном процессе позволяет сформировать такие метапредметы, как

- *навыки использования информации*: владение методами поиска информации; знание, как подобрать источник информации в зависимости от поставленной задачи; умение критически оценить полученную информацию;

- *навыки отношений в информационной среде*: способность взаимодействовать дистанционно, например используя сервисы коллективного доступа;

- *владение языком медиа* -: способность создавать корректные, ясные информационные сообщения, например с помощью электронной почты или чата;

- *навыки творческого использования ИКТ*: умение подбирать необходимый контент; умение создавать с помощью специальных программных средств простые тексты и мультимедийные презентации;

- *навыки в области этики в информационной среде*: знание о праве на доступ к информации и ограничениях, связанных с этим; понимание обязанности соблюдения законов в отношении авторского права, права на неприкосновенность частной жизни;

- *навыки безопасности в информационной среде*: знание о необходимости защиты личной информации; знание о рисках работы в компьютерных сетях.

Информационные технологии в настоящее время являются неотъемлемой частью современного образования, и дистанционные курсы, разработанные на их основе, в значительной мере помогают при решении вопроса об обеспечении равных возможностей при получении образования любой категорией учащихся, в том числе детьми с особыми образовательными потребностями. Современное дистанционное обучение математике детей с ограниченными возможностями здоровья широко представлено в различных дистанционных курсах, которые способны удовлетворить большинство потребностей образования, воспитания и развития данной группы учащихся [1].

Однако большинство приемов и методов, применяемых при реализации подобных дистанционных курсов, не являются специфическими для преподавания математики. Их с равным успехом можно переносить на большинство общеобразовательных дисциплин. Об этом свидетельствует и традиционность решения вопроса о подборе программного обеспечения для разработки и реализации дистанционных курсов по обучению математике детей с ограниченными возможностями здоровья.

К программному обеспечению, необходимому для преподавания математики на основе дистанционного обучения детей с особыми образовательными потребностями, возможно отнести следующие программные продукты, подходящие практически для любых общеобразовательных дисциплин.

1. Skype - программа, которую возможно эффективно применять для получения новых знаний, передачи данных, организации видеуроков, что позволяет в реальном времени воссоздать диалог ученика и преподавателя, результатом чего становится полноценный и эффективный урок.

2. Moodle - блочная объектно-ориентированная изменяемая учебная среда, которая предназначена для создания, модификации и использования как дистанционных, так и online-курсов [2].

3. Программные продукты для реализации совместной работы, к которым можно отнести виртуальные доски.

А также специализированные программы, предназначенные исключительно для преподавания математики, например «Живая математика» [3].

Комплексное использование перечисленных программных продуктов при разработке и реализации дистанционных курсов для обучения математике позволяет в полной мере обеспечить высокий

уровень математической подготовки учащихся с ограниченными возможностями здоровья [4].

В подтверждение вышесказанного уместно будет рассмотрение вопроса формирования метапредметных образовательных результатов в проектной деятельности учащихся с особыми образовательными потребностями на примере использования программных продуктов для реализации совместной работы.

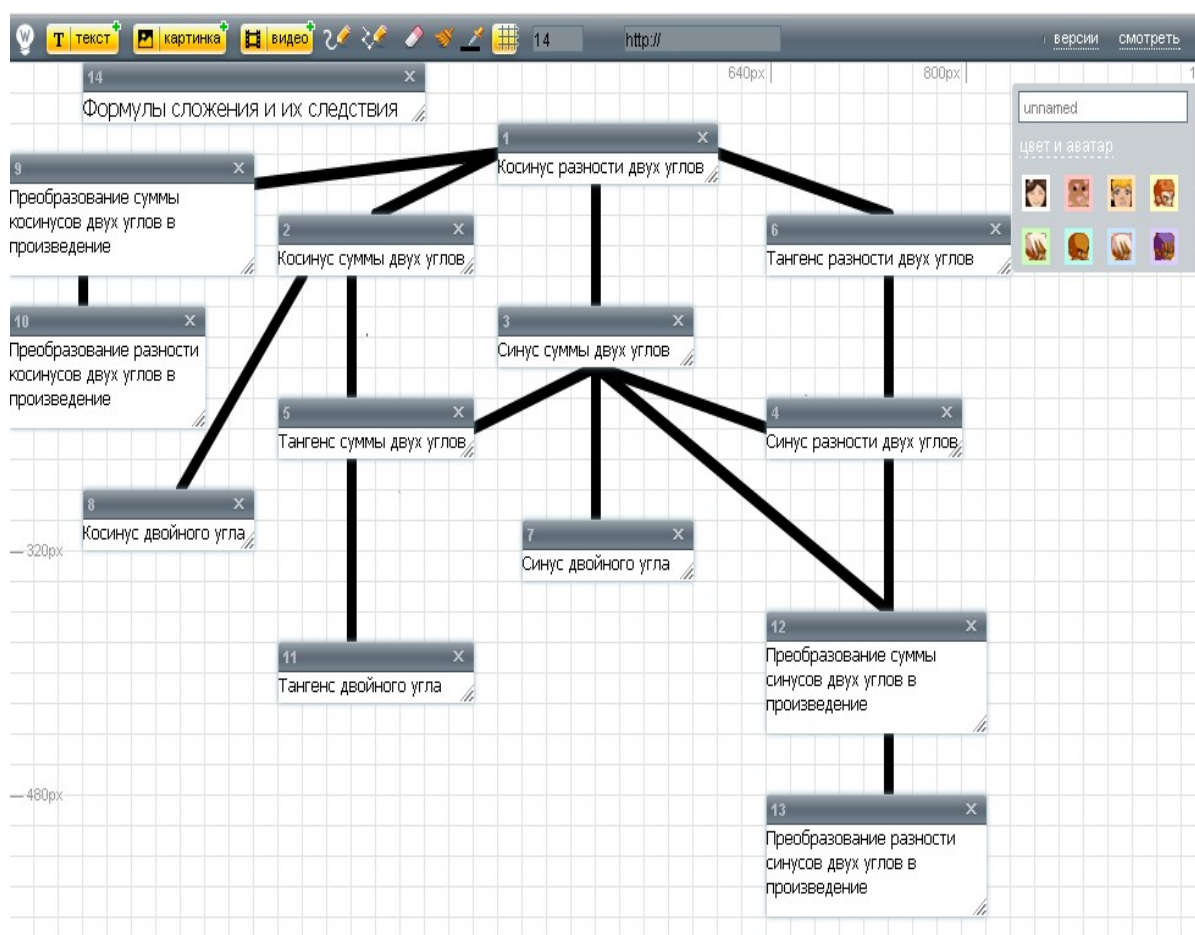


Рис. 1. Проект по теме «Формулы сложения и их следствия» в режиме разработки

В качестве практического примера рассмотрим результат проектной деятельности по систематизации, анализу и совместному исполнению работы, представляющей собой стенгазеты по темам «Формулы сложения и их следствия» - алгебра [5] (рис. 1) и «Клетка» - биология [6] (рис. 2). В качестве программного продукта для реализации проектов будет использована онлайн-виртуальная доска WikiWall, предназначенная для работы с информацией в группе, она дает возможность совместно создавать интерактивные газеты несколькими пользователями.

WikiWall представляет собой рабочее пространство, на котором несколько учеников, разделенных территориально, в режиме реального времени совместно могут создавать один документ, который может



содержать текст, рисунки, чертежи и многие другие объекты. Широкий выбор инструментов позволяет совместно как решать предложенные преподавателем задачи с нуля, так и дорабатывать предложенные учителем материалы, например, чертежи, изначально выставленные в качестве фона.

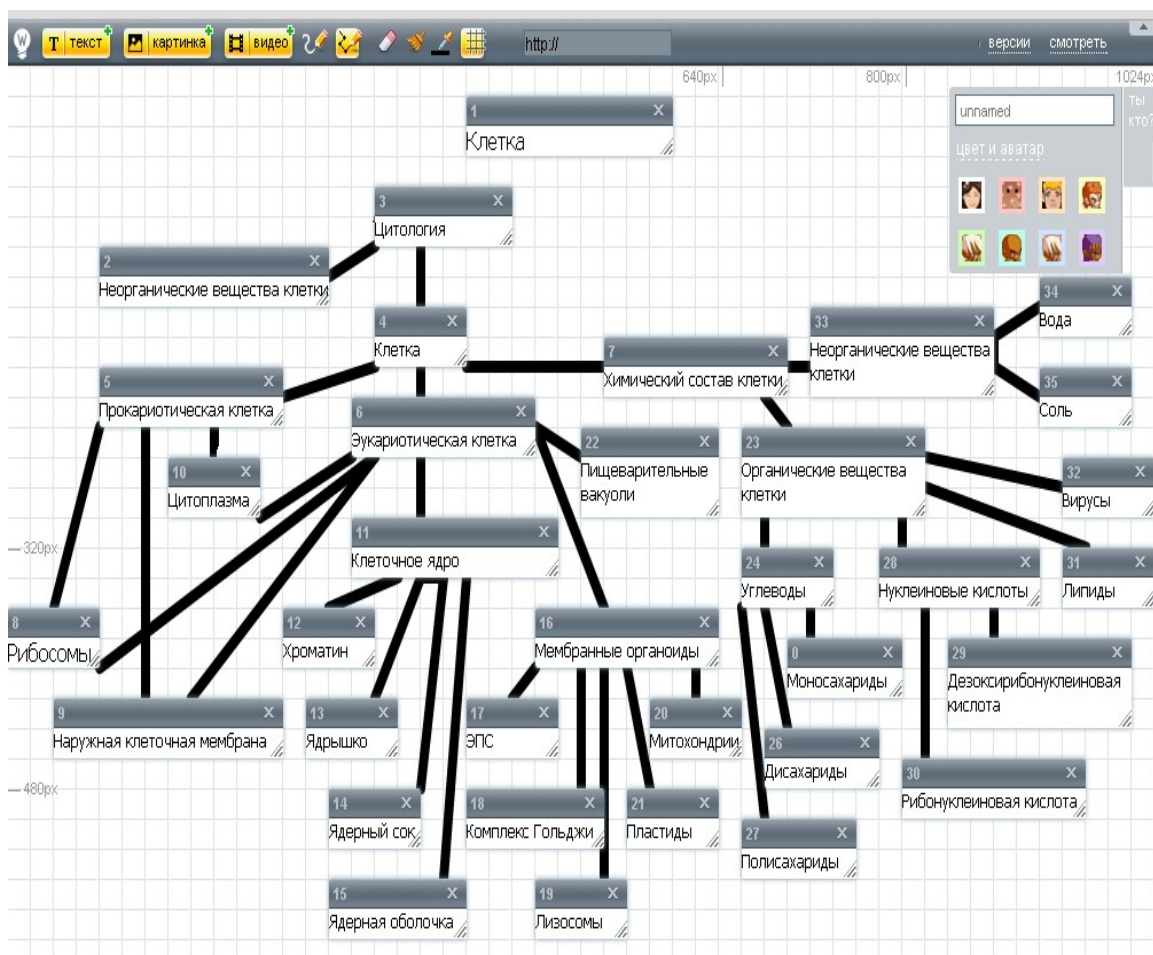


Рис. 2. Проект по теме «Клетка» в режиме разработки

Отсутствие регистрации и простой, интуитивно понятный интерфейс, который можно освоить за несколько минут, а также возможность совместной работы преподавателя и ученика или нескольких учеников делают подобные сервисы удобными для использования в преподавании математики детям с ограниченными возможностями здоровья [7].

Отметим, что при создании вышеприведенных проектов у учащихся с особыми образовательными потребностями формировались метапредметные образовательные результаты в равной степени и при работе над проектом по биологии и при создании проекта по алгебре.

К таким метапредметным результатам можно отнести следующие.

**1. Регулятивные результаты,** которые состоят в умений организовывать собственную и совместную деятельность в зависимости

от поставленных учебных задач, условий и имеющихся в наличии средств их реализации [8]. К данному виду результатов также относятся умения контролировать и оценивать свои действия и действия своей группы, вносить в них изменения с учетом ошибок, найденных по результатам оценки, самостоятельно переводить практическую задачу в познавательную и приобретение навыков саморегуляции, проявления инициативы, самостоятельности в процессе обучения.

*2. Познавательные результаты*, которые включают способность учащихся понимать учебные цели и задачи, умение проводить информационный поиск и выделять из найденной информации существенную для решения конкретной задачи [9]. К данному виду результатов также относятся умения по анализу и систематизации полученной информации, включающие умение использовать знаково-символические средства для создания моделей изучаемых объектов и процессов, схем решения учебно-познавательных и практических задач.

*3. Коммуникативные результаты*, которые состоят в умении интегрироваться в группу сверстников и организовывать продуктивное взаимодействие и сотрудничество со сверстниками и взрослыми при решении учебных задач. Значимыми являются умения слушать и вести диалог, участвовать в дискуссии, владеть монологической и диалогической формами общения, корректно выражать и отстаивать собственную точку зрения, а также уважать и принимать другую.

Для детей с нарушениями зрения, слуха и речи, заболеваниями сердечно-сосудистой системы, опорно-двигательного аппарата и другими заболеваниями, ограничивающими двигательную активность, использование возможностей дистанционного образования, позволяющих в какой-то мере компенсировать недостаток общения и социальных навыков за счет их интеграции в социум посредством информационно-коммуникационных технологий, также важно, как и получение качественного образования.

*4. Деятельностные результаты*, которые включают формирование навыка использования информационных технологий, освоение принципов работы с программным обеспечением, подходящим для большинства общеобразовательных дисциплин. Данные результаты приобретают особую важность при дистанционном обучении детей с особыми образовательными потребностями [10].

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в основе формирования метапредметных результатов лежит «умение учиться», которое предполагает полноценное освоение всех компонентов учебной деятельности и выступает существенным фактором повышения эффективности освоения учащимися с ограниченными возможностями здоровья предметных знаний, умений и формирования компетенций. Интегрированные метапредметные достижения – такие как способность

анализировать и делать выводы – оказываются весьма полезными не только на обычных школьных занятиях, но и в дальнейшей жизни и деятельности.

### Литература

1. Проблема организации совместной работы при дистанционном обучении математике детей с ограниченными возможностями здоровья / В.В Сенчилов [и др.] // Постулат. 2017. № 9 (23). С. 11.
2. Программное обеспечение дистанционного обучения математике детей с ограниченными возможностями здоровья / В.В Сенчилов [и др.] // Научное обозрение: гуманитарные исследования. 2017. № 7. С. 29-34.
3. Сенчилов В.В. Применение интерактивных технологий при изучении курса геометрии в школе // Концепт. 2013. № 10 (октябрь).
4. Возможности программного обеспечения при дистанционном обучении математике детей с особыми образовательными потребностями / О.М. Киселева [и др.] // Евразийское Научное Объединение. 2017. Т. 2. № 8 (30). С. 111-112.
5. Тригонометрия: учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений / под ред. С.А. Теляковского. М.: Просвещение, 2001. С. 34-48.
6. Сивоглазов В.И., Агафонова И.Б., Захарова Е.Т. Общая биология. Базовый уровень: учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений / под ред. акад. РАЕН, проф. В.Б. Захарова. М.: Дрофа, 2005. 368 с.
7. Киселева М.П. Информатика и новые информационные технологии в системе подготовки будущего учителя // Педагогическая информатика. 2008. № 2. С. 36-40.
8. Никитина Е.Л. Проблемы развития инклюзивного образования // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2014. Т. 29. С. 31-35.
9. Козлов С.В. Актуальные вопросы использования адаптивных информационно-образовательных систем в профильной школе // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции 30 сентября 2013 г.: в 34 ч. Ч. 21. Тамбов: Бизнес-Наука-Общество, 2013. С. 48-51.
10. Козлов С.В. Использование возможностей интеллектуальных информационных систем при организации дистанционного обучения // NovaInfo.Ru. 2017. Т. 2. № 63. С. 1-6.

**N.M. Timofeeva, O.M. Kiseleva**  
Smolensk State University

### **SOME ASPECTS OF THE FORMATION OF METASUBJECT EDUCATIONAL OUTCOMES IN DISTANCE LEARNING MATHEMATICS CHILDREN WITH DISABILITIES**

**Keywords:** *metapragmatic results, children with disabilities, methods of teaching mathematics, distance learning, educational process.*

**Abstract.** *The article discusses the formation of metasubject educational outcomes, which is particularly important in distance education of children with disabilities. The authors provided the example of the formation of metasubject educational outcomes on the basis of project activities of students*

*in algebra and biology. As a software, which allows to realize the projects used an interactive whiteboard WikiWall. The following describes the group metapragmatic results in the formation of which project activities can contribute to. These include regulatory, cognitive, communicative and activity.*

**О.А. Широкова**

*Казанский федеральный университет*

УДК 004.42

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПРОЕКТОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ**

*Ключевые слова: фрактальная графика, объектно-ориентированное проектирование, визуальный проект.*

*В статье представлены некоторые разделы практикума по курсу «Фрактальная графика». В основе данного курса лежит объектно-ориентированное проектирование программного продукта, при помощи которого пользователю предоставляется возможность изучить особенности фрактальной графики. Показана эффективность использования визуальных проектов интегрированной среды разработки Delphi при демонстрации объектов фрактальной графики на примере построения алгебраических фракталов: множества Мандельброта и множества Жюлиа.*

Владение средствами информационно-коммуникационных технологий является важнейшей составляющей в структуре формирования профессиональных компетентностей бакалавров математических факультетов по специальности «Математика-информатика». Важными при подготовке бакалавров являются вопросы интеграции обучения математике и информационным технологиям. Связь между математикой и информатикой основана на внутреннем содержании данных предметов. Современные средства информационных технологий позволяют эффективно решать математические задачи. В то же время содержание курса высшей математики определяет характер материала, изучаемого в компьютерных дисциплинах, поскольку они могут использовать объекты из разделов математики.

В учебный план бакалавров входит курс «Графика и дизайн». Одним из разделов этого курса является тема «Фрактальная графика». В

статье представлены некоторые темы практикума по разработке визуальных проектов построения фракталов в Delphi. Использование объектно-ориентированных проектов интегрированной среды разработки Delphi при демонстрации фрактальной графики является эффективным средством формирования профессиональных компетентностей обучающихся. У студентов формируются умения применять модели разработки программного обеспечения при разработке интерфейса визуального проекта, демонстрирующего построение фракталов.

В настоящее время объектно-ориентированный стиль применяется при разработке широкого круга приложений [1-6]. С помощью объектов могут быть представлены системы самой разной природы. Объектный подход используется в проектировании интерфейса пользователя, баз данных, архитектуры компьютеров и т.д.

Математической основой фрактальной графики является фрактальная геометрия [7; 8]. Здесь в основу метода построения изображений положен принцип наследования от так называемых «родителей» геометрических свойств объектов-наследников. Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Одним из основных свойств фракталов является самоподобие. Объект называют самоподобным, когда его увеличенные части походят на сам объект и друг на друга.

Классически принятым построением множества Мандельброта является рисование каждого множества Жюлиа и выяснение, связано ли оно. Более легкий путь изображения множества Мандельброта представляет итерационная последовательность:

$$Z_{i+1} = Z_i^2 + c,$$
$$f_c(z) = z^2 + c.$$

Заметим, что  $c$  здесь точка. Таким образом, для любой точки комплексной плоскости мы  $c$  присваиваем определенное значение и выполняем итерации. Этот метод также дает нам изображение множества Мандельброта. Итак, итерационную последовательность реализует представленный ниже алгоритм, являющийся обработчиком события изображения фрактала, отображающегося на форме:

```
procedure TForm1.DrawMandelbrot;
const
  MaxXValue = 310;
var
  zi, zr, ci, cr, tmp: Extended;
  i, j, k, m: Integer;
  Depth: Integer;
//Параметр Увеличения размеров:
  aParametr: Extended;
```

```

begin
  Depth := SpinEdit1.Value;
  aParametr:= SpinEdit2.Value;
  ProgressBar.Max := MaxXValue-160; ProgressBar.Position := 0;
  for i:= -160 to MaxXValue do begin
    ci := i/aParametr;
    ProgressBar.Position:= ProgressBar.Position+1;
    for j:= -190 to 400 do begin
      cr := j/aParametr;
      zi := 0.0;
      zr := 0.0;
      for k:=0 to DEPTH do begin
        tmp := zr*zr - zi*zi; zi := 2*zr*zi + ci; zr := tmp + cr;
        if (zr*zr + zi*zi > 1.0E16) then begin
          Break;
        end;
      end;
      if (k < DEPTH) then begin
        m := k mod 255 + 1;
        Image1.Canvas.Pixels[i + 160, j + 190] := RGB(m*15, 40 , m*15);
      end; end; end;
    ProgressBar.Position := 0;
  end;
end;

```

Окно визуального проекта имеет вид:

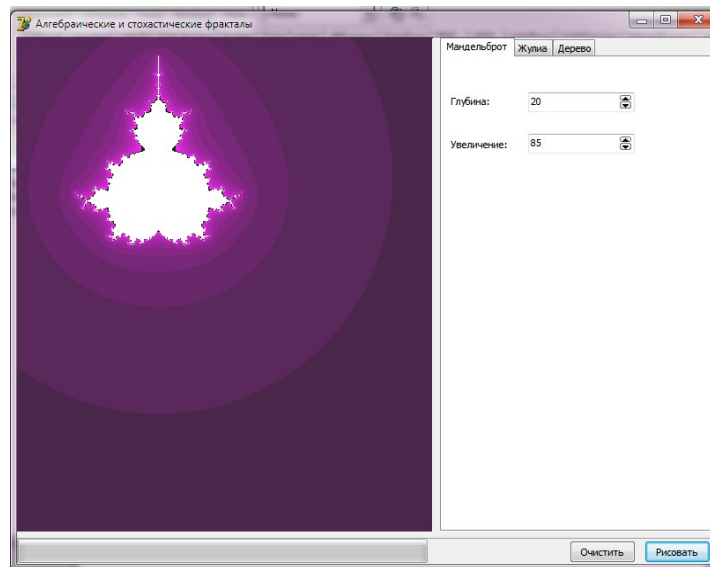


Рис. 1. Множество Мандельброта

Множества Жулия образуются по той же самой формуле, что и множество Мандельброта. Фрактал Мандельброта - это на самом деле множество фракталов Жулия, соединенных вместе. Каждая точка (или координата) множества Мандельброта соответствует фракталу Жулия. Рассмотрим функцию  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Множество Жюлия определяется как

граница множества точек  $z$ , стремящихся к бесконечности при итерировании  $f(z)$ :

$$J(f) = \partial\{z : f^{(n)}(z) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}.$$

Процесс итерирования реализует представленный ниже алгоритм, являющийся обработчиком события изображения фрактала, отображающегося на форме:

```
function JuliaAlgorithm(x0,y0,aFirstParams, aSecondParams : real): TColor;
var
  a,b,x,y,x2,y2: real;
  r:real; k: integer;
begin
  r:=1;
  a:=-0.55+0.01*aFirstParams; b:=-0.55+0.01*aSecondParams;
  x:=x0; y:=y0;
  k:=100;
  while (k>0)and(r<4) do
  begin
    X2 := x*x-y*y+a;
    Y2 := 2*x*y+b;
    r := x*x+y*y;
    x := X2;
    y:= Y2;
    dec(k)
  end;
  k:=round((k/100)*255);
  result:=RGB(255,k,k);
end;
procedure TForm1.DrawDjulia;
var
  i,j: Integer;
  X, Y: Extended;
  aWidth: Integer;
  aHeight: Integer;
  aFirst: Integer;
  aSecond: Integer;
begin
  aWidth := Image1.Width; // Узначем размеры области, на которой
  aHeight := Image1.Height; // производим рисование
  aFirst := aFirstParamert.Value;
  aSecond := aSecondParametr.Value;
  for i:= 0 to aWidth do begin
    for j:= 0 to aHeight do begin
      X := i*0.007*3/aScaleFactor - 1.5; // Двигаемся с шагом
      Y := j*0.007*3/aScaleFactor - 1.5;
      Image1.Canvas.Pixels[i,j] := JuliaAlgorithm(X, Y, aFirst, aSecond);
```

end;  
end;

Окно визуального проекта имеет вид:

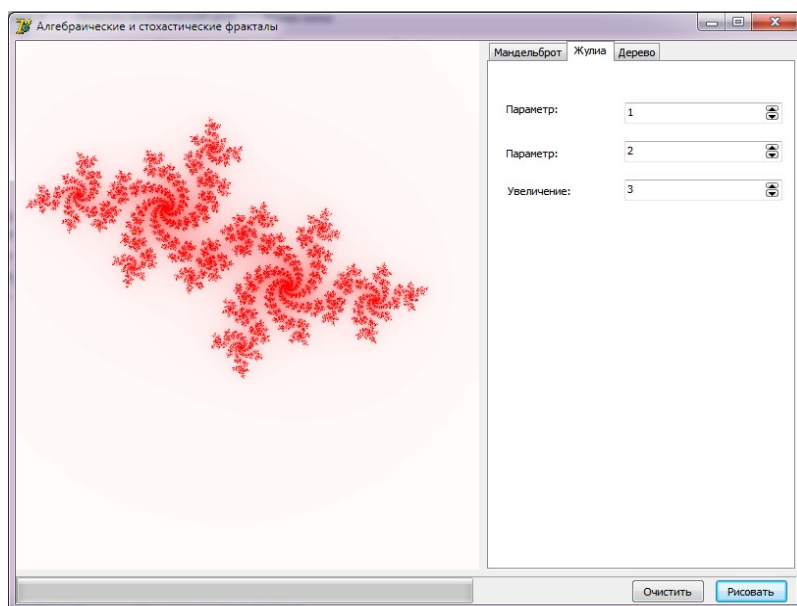


Рис. 2. Множество Жулия

Практикум по разработке визуальных проектов построения фракталов в Delphi способствует формированию исследовательских компетенций будущих учителей математики и информатики, связанных с умениями и навыками объектно-ориентированного и визуального программирования и проектирования моделей реальных объектов и структур.

### Литература

1. Широкова О.А. Создание объектов фрактальной графики средствами Delphi // Материалы Международной научно-практической конференции ИТОН-2016 и труды Международной школы KAZCAS-2016 / под общей ред. заслуж. деятеля науки РТ, д-ра физ.-мат.наук, проф. Ю.Г. Игнатъева, Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2016. С. 81-84.
2. Широкова О.А. Особенности обучения программированию на основе общности и различия принципов // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1. С.1757. URL: <http://www.science-education.ru/121-17896>.
3. Широкова О.А. Объектно-ориентированные проекты решения математических задач // Материалы XI Международной науч.-практ. конф. «Объектные системы – 2015» (Ростов н/Д; ШИ (ф) ЮРГПУ (НПИ) им. М.И. Платова, 2015. С.15-23.
4. Широкова О.А. Формирование исследовательской компетентности будущих учителей информатики при обучении объектно-ориентированному программированию // Инновации в современной системе образования: подходы и решения: отв. ред. А.Ю. Нагорнова. Ульяновск, 2016. С.367-381.
5. Широкова О.А. Особенности обучения учащихся объектно-ориентированному и визуальному программированию // Математическое



образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU-2015): материалы V Международной научно-практической конференции / отв. ред. Н.В. Тимербаева, 2015. С.259-265.

6. Gainutdinova T.U., Shirokova, O.A. Features of a professional training teachers of informatics in a programming course // Collection IFTE. 2016. Vol. XII, P. 1-451 (July 2016) The European Proceedings of Social & Behavioral Sciences EpSBS – International Forum on Teacher Education. Kazan, 2016. – P. 30-37.

7. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.

8. Перерва Л.М., Юдин В.В. Фрактальное моделирование. Владивосток.: ВГУЭС, 2007. 186 с.

**O.A. Shirokova**

Kazan Federal University

## **USING OBJECT-ORIENTED DESIGN IN CONSTRUCTION OF ALGEBRAIC FRACTALS**

**Keywords:** *fractal graphics, object-oriented design, visual project.*

*In the article some sections of the workshop on the course "Fractal graphics" are presented. This course is based on the object-oriented design of the software product, through which the user is given the opportunity to study the features of fractal graphics. The effectiveness of using visual projects of the Delphi IDE during the demonstration of fractal graphic objects is demonstrated using the example of constructing algebraic fractals: Mandelbrot set and Julia set.*

**М.Ю. Ястребов, И.В. Ланева**

*Государственный университет морского и речного  
флота имени адмирала С.О. Макарова*

УДК 519.2: 378.14

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ РАЗРАБОТКИ СТРУКТУРЫ И СОДЕРЖАНИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ»**

*Ключевые слова: Теория случайных процессов, лабораторный практикум.*

*Описаны структура и содержание лабораторного практикума по дисциплине «Случайные процессы».*

В технических вузах построение курса теории вероятностей и генетически связанных с ним курсов теории математической статистики

и теории случайных процессов для специальностей нематематического профиля упирается в существенную методическую трудность. Отсутствие в курсе «обычной» математики вопросов, связанных с теорией меры, измеримостью функций по Борелю и Лебегу и интегралом Лебега, вынуждает лектора при построении указанных курсов формулировать многие понятия, апеллируя к интуиции.

Так, например, понятие случайной величины авторы настоящей заметки вынуждены формулировать следующим (к сожалению, пространным) образом.

*Случайной величиной называется числовая величина, удовлетворяющая двум условиям:*

*1) в результате испытания она принимает неизвестные наперед значения;*

*2) принятие ею значения, лежащего в каком-либо заранее заданном промежутке, является случайным событием, имеющим определенную вероятность.*

*Второе условие означает, что в теории вероятностей рассматриваются в качестве специальных объектов — случайных величин - не любые величины с неизвестными наперед значениями, а только такие, которые:*

*- во-первых, связаны с многократно воспроизводимыми (в неизменных контролируемых условиях) испытаниями;*

*- во-вторых, принимают значения из любого наперед заданного диапазона с относительной частотой, которая проявляет при большом числе испытаний свойство устойчивости.*

(Последним условием приходится заменять измеримость функции-случайной величины).

Применительно к построению лабораторного практикума это означает, что выпадает хорошо разработанный в ряде руководств пласт задач, использующих понятия измеримости множеств и функций. С другой стороны, в университетах технической направленности (бывших советских втузах) задания, предполагающие использование аппарата теории меры, отчасти не соответствуют прикладной технической направленности, присущей лабораторному практикуму.

Разработчик лабораторного практикума по теории случайных процессов стоит ещё перед одним методологическим выбором:

1) ориентировать обучающихся на разработку компьютерной программы, моделирующей предписанный случайный процесс, с тем чтобы затем обозреть статистический материал, накапливаемый при её исполнении;

2) либо включать в задание на лабораторную работу моделирование «вручную» случайных величин на первом этапе работы и моделирование сечений случайного процесса на втором этапе.

По нашему мнению, первый путь целесообразен в случае, когда практикум по программированию проходит параллельно с изучением теории вероятностей (этот подход был в своё время реализован в СПб ГУМРФ [7, 9]).

Следование второму пути было принципиальной установкой формирования лабораторного практикума по дисциплине «Случайные процессы», реализованного в ГУМРФ для направления «Информационная безопасность». Возможность и обязанность для студентов в почти прямом смысле «потрогать руками» соответствующие математические объекты представляется глубоко верной. (В «наши» годы на матмехе ЛГУ в первом семестре на практикуме по вычислительной математике студенты крутили ручку арифмометра «Феликс», хотя параллельно учились писать и прогонять на ЭВМ программы на Алголе-60). Поэтому во всех лабораторных работах, при выполнении которых необходима реализация значений случайных величин, эти реализации осуществляются студентами «вручную», то есть на непрограммируемом калькуляторе, отдельными операциями.

Отдельным вопросом, влияющим на содержание и методику проведения практикума, является использование (или, наоборот, отказ от использования) математических пакетов (систем) прикладных программ, таких, как, например, Matlab, со встроенными пакетами Statistic Toolbox, Simulink. Здесь важно исходить из целей практикума и уже достигнутого объёма изученного материала. Так, практикум, описанный в [6], изначально ориентирован на использование пакета Matlab. Это позволяет предположить, что целью в данном случае явилось быстрое продвижение к более глубоким приложениям общей теории. При этом, однако, для студентов «за кадром» остаётся «щупанье руками» абстрактного математического объекта - случайного процесса.

Нам представляется, что при начальном знакомстве с руками должен быть отдан приоритет перед «черным ящиком» пакета математических программ.

Разумеется, при формировании методической концепции практикума должен учитываться набор компетенций ФГОС, относимых учебной программой к данной дисциплине, а также место дисциплины в структуре обязательных образовательных программ, её включение в обязательную или вариативную часть. Если, например, в число компетенций, вырабатываемых по дисциплине «Теория случайных процессов», входит владение пакетами программ, то использование студентами системы Matlab оправдано и предпочтительно по сравнению с ручным счётом.

Исходным пунктом служит моделирование равномерно распределённой на отрезке  $[0, 1]$  случайной величины  $\xi$  методом середины квадратов [3; 5; 6]. Далее в соответствии с известными алгоритмами [7] по выборкам значений  $\xi$  заданного объёма строятся параметризованные (параметр трактуется как момент времени) значения других случайных величин  $\chi, \zeta, \dots$  — либо стандартных, либо заданных табличным законом распределения, после чего вычисляются их характеристики.

После усвоения процесса ручного моделирования отдельной случайной величины выполняются задания по моделированию случайных процессов  $\chi_t, \zeta_t, \dots$  с включением временного параметра  $t$  в параметризацию их сечений.

Другой областью, допускающей обозримый ручной счёт, наглядность и обозримость как постановки задачи, так и результатов, являются, несомненно, однородные цепи Маркова. Здесь, пожалуй, при наличии учебного времени и навыков программирования наряду с ручным счётом возможно и выполнение задания по программированию компьютерной визуализации динамики цепи, например урновой схемы диффузии, поглощающих состояний, сообщающихся состояний, эргодических классов, возвратных и невозвратных состояний и т. д.

Наконец, третьим разделом дисциплины, закрепляемым в лабораторном практикуме и допускающим ручной счёт (с калькулятором, но без программной реализации) является расчёт характеристик процесса, заданного каноническим представлением.

Приведём примеры заданий к некоторым лабораторным работам.

1. Тема «Моделирование стандартных случайных величин»:  
а) равномерного распределения на  $[0, 1]$ ; б) дискретной случайной величины с таблично заданным законом распределения; в) закона Пуассона; г) биномиального закона; д) нормального закона; е) показательного закона.

*Задание.* Методом середины квадратов получить 12 псевдослучайных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$  с четырьмя знаками после запятой, равномерно распределённых на  $[0, 1]$  по заданному значению  $x_0$ . Используя полученные числа  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ , получить псевдослучайное число  $a$ , распределённое по закону Пуассона с заданным параметром  $\lambda$ . Аналогичные задания по моделированию других распределений.

2. Тема «Моделирование и вычисление выборочных характеристик случайного процесса».

*Задание.* Осуществить три реализации дискретного случайного процесса  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ , сечения которого  $V_t$  имеют показательное распределение с параметром  $\lambda_t = 5/kt$ , беря для этого двенадцать табличных псевдослучайных чисел. Осуществить три реализации дискретного случайного процесса  $\{G_1, G_2, G_3\}$ , сечения которого  $G_t$  имеют распределение Пуассона с параметром  $\lambda_t = c/kt$ , используя ту же таблицу. Найти математическое ожидание  $m_A(t)$  и дисперсию  $D_A(t)$  процесса  $A_t$ .  $A_t = kX_t + cY_t + kZ_t$ , в котором слагаемые независимы,  $X_t$  распределено по показательному закону с параметром  $\lambda(t) = kt$ ,  $Y_t$  - по нормальному закону с параметрами  $a(t) = \frac{c}{t^2}$ ,  $\sigma(t) = 2ct$ ,  $Z_t$  - равномерно на отрезке  $[\alpha(t), \beta(t)] = [it, (i+j)t]$ .

3. Классификация состояний цепи Маркова по матрице переходных вероятностей.

4. Моделирование случайного блуждания в цепи Маркова.

5. Вычисление корреляционной функции случайного процесса.

6. Дифференцирование и интегрирование случайных процессов.

7. Гармонический анализ случайных процессов.

Ввиду малого количества учебных часов (на лабораторный практикум их в нашем случае отведено семнадцать) за его рамками остаются такие важные в прикладном аспекте темы, как стохастические дифференциальные уравнения и близкие понятия: белый шум, стохастический интеграл, интеграл Ито.

Другой не вошедшей в программу практикума традиционной темой является анализ временных рядов, прежде всего идентификация случайных процессов по виду функциональной характеристики. Впрочем, последняя более актуальна для экономических специальностей, в то время как в нашем случае речь идёт о специальностях, связанных с защитой информации.

Накопленный методический опыт проведения полусеместрового лабораторного практикума на базе семестрового теоретического курса позволяет положительно оценить описанные здесь структуру и содержание лабораторного практикума.

### Литература

1. Основы моделирования случайных процессов. Лабораторный практикум / И.М. Андрианов [и др.]. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 80 с.

2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. М.: Наука, 1991. 383 с.

3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 567 с.

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 480 с.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001. 318 с.
6. Муха В.С. Случайные процессы: практикум. Минск: БГУИР, 2013. 188 с.
7. Нырков А.П., Ястребов М.Ю. Использование обучающего программного комплекса для численной иллюстрации теоретических положений курса высшей математики. Проблемы образования в области информатики: научно-методический сборник. Л., 1991.
8. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов: лабораторный практикум. Самара: Самарский научный центр Академии наук, 2001. 191 с.
9. Ястребов М.Ю., Нырков А.П. Статистическая иллюстрация основных положений теории вероятностей: методические указания. Л.: ЛИВТ, 1989. 20 с.
10. Ястребов М.Ю., Ланева И.В. Теория случайных процессов. Вводный курс (электронный вид). СПб.: ГУМРФ, 2018. 84 с.
11. Ястребов М.Ю. Теория вероятностей. СПб.: ГУМРФ, 2018. 112 с.

**M.Y. Yastrebov, I.V. Laneva**

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping

**THE METHODOICAL ISSUES OF THE WORKING-OUT OF THE  
STRUCTURE AND CONTENT OF THE LABORATORY PRACTICAL  
WORK IN THE DISCIPLINE «STOCHASTIC PROCESSES»**

**Keywords:** *stochastic processes, the laboratory practical work, methodology.*

**Abstract.** *The article describes the structure and contents of the laboratory practical work in the discipline “Stochastic processes”, program 10.03.01 “Information security” and specialty 10.05.03 “Information security of computerized systems”*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Агасиев Галех Азер оглы** – аспирант кафедры РК6 САПР МГТУ имени Н.Э. Баумана. E-mail: agtaleh@mail.ru.

**Агафонов Александр Алексеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского федерального университета. E-mail: a.a.agathonov@gmail.com.

**Богданова Надежда Николаевна** – ассистент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: nadingioia@yandex.ru.

**Божко Аркадий Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры САПР МГТУ имени Н.Э. Баумана. E-mail: abozhko@inbox.ru.

**Болотин Иван Борисович** – кандидат физико-математических наук, доцент, декан физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: IVBolotin@smolgu.ru

**Банару Михаил Борисович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: mihaile.banaru@yahoo.com.

**Банару Галина Анатольевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: mihaile.banaru@yahoo.com.

**Бирюкова Татьяна Константиновна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального информационного центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: yukonta@mail.ru.

**Борисов Вадим Владимирович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной техники филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: vbor67@mail.ru.

**Викулов Виктор Михайлович** – ассистент кафедры радиосистем передачи информации Института радиотехнических и телекоммуникационных систем Московского технологического университета, аспирант. E-mail: vulfgaar@list.ru.

**Вишняков Рустам Рустамович** – аспирант кафедры радиосистем передачи информации Московского технологического университета. E-mail: Vishn9-r@yandex.ru.

**Гершкович Максим Михайлович** – старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального информационного центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: makmg@mail.ru.

**Грибер Юлия Александровна** – доктор культурологии, профессор кафедры социологии, философии и работы с молодежью Смоленского государственного университета. E-mail: julia\_griber@mail.ru.

**Григорьева Галина Михайловна** – студентка Смоленского государственного университета. E-mail: grigoryevagal@gmail.com.

**Данилюк Екатерина Игоревна** – магистрант Смоленского государственного университета. E-mail: lovingcn@mail.ru.

**Диев Олег Евгеньевич** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: defar6006@gmail.com.

**Дирвук Евгений Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного программирования и компьютерной безопасности Гродненского государственного университета имени Я. Купалы. E-mail: dirvuk@gmail.com.

**Долгополова Ольга Борисовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета. E-mail: Dolgopolova@tut.by.

**Дюндин Андрей Викторович** – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин Смоленского государственного университета. E-mail: avdyndin@yandex.ru.

**Евдокимова Галина Семеновна** – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: kaf-matem @ smolgu.ru.

**Елисеева Полина Николевна** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: polinka.eliseeva@mail.ru.

**Емельченков Евгений Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики Смоленского государственного университета. E-mail: уру1101@gmail.com.

**Жарков Александр Андреевич** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: christofer.cadavercian@ya.ru.

**Захаров Виктор Николаевич** – доктор технических наук, доцент, ученый секретарь Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: kharov@ipiran.ru.

**Зверович Эдмунд Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета. E-mail: Zverovich@bsu.by.



**Зуев Андрей Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: zueandrej@yandex.ru.

**Ибрагимов Тимур Рашидович** – магистрант Смоленского государственного университета. E-mail: ibragimowtimur@gmail.com.

**Иванов Михаил Сергеевич** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: m\_iv\_1996@mail.ru.

**Игнатенков Александр Владимирович** – аспирант Самарского государственного университета путей сообщения. E-mail: a.ignatenkov@gmail.com.

**Игнатьев Юрий Геннадьевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и математического моделирования Казанского федерального университета. E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru.

**Исмоилова Аделя Радиковна** – студент Казанского федерального университета. E-mail: adelya2153@gmail.com.

**Карпенко Анатолий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой РК6 САПР МГТУ имени Н.Э. Баумана. E-mail: arkarpenko@mail.ru.

**Киреев Владимир Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (НИТУ МИСиС). E-mail: Vladimir-Kireyev@mail.ru.

**Кирьяцкий Эдуард Григорьевич** – доктор физико-математических наук, профессор Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса. E-mail: Eduard.kiriyatzkii@mail.ru.

**Кирьяцкий Евгений Эдуардович** – кандидат физико-математических наук, доцент Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса. E-mail: jevgenijus.kirjackis@vgtu.lt.

**Киселева Ольга Михайловна** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: Foxu03@yandex.ru.

**Классен Роман Константинович** – аспирант Казанского национального исследовательского технического университета имени А.Н. Туполева. E-mail: klassen.rk@gmail.com.

**Ковалева Наталья Юрьевна** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: nata\_1997\_01@mail.ru.

**Козлов Сергей Валерьевич** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: svkozlov1981@yandex.ru.

**Конашенко Андрей Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: Andrey\_konashenko@mail.ru.

**Конашенкова Татьяна Дмитриевна** – ведущий программист Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: tkonzshenkova@ipiran.ru.

**Корепанов Эдуард Рудольфович** – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: ekorapanov@ipiran.ru.

**Кох Ирина Александровна** – ассистент кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского федерального университета. E-mail: irina\_kokh@rambler.ru.

**Кристалинский Владимир Романович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: kristvr@rambler.ru.

**Кузнецова Алла Спартаковна** – кандидат психологических наук, доцент, доцент кафедры психологии труда и инженерной психологии факультета психологии Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. E-mail: kuznetsovamsu@rambler.ru.

**Ланева Ирина Владимировна** – кандидат экономических наук, доцент кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. E-mail: lainir@list.ru.

**Лопатко Константин Олегович** – аспирант кафедры радиосистем передачи информации Института радиотехнических и телекоммуникационных систем Московского технологического университета (МИРЭА). E-mail: lopatko@protommail.ch.

**Макаров Александр Ильич** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: al.makarov8@gmail.com.

**Макаров Дмитрий Игоревич** – программист, ООО «Хайтекс», г. Смоленск. E-mail: Makarov.Dmitriy67@gmail.com.

**Мифтахов Рустем Фаридович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского федерального университета; старший

преподаватель кафедры физико-математических дисциплин и информационных технологий Поволжской государственной академии физической культуры, спорта и туризма. E-mail: rustem.miftakhov@gmail.com.

**Мунерман Виктор Иосифович** – кандидат технических наук, доцент Смоленского государственного университета. E-mail: vimoona@gmail.com.

**Мунерман Даниил Викторович** – стажер-исследователь Смоленского государственного университета. E-mail: danvmoon@gmail.com.

**Недорезова Екатерина Андреевна** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: e-nedorezova@mail.ru.

**Нигмедзянова Айгуль Махмутовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского федерального университета. E-mail: aigmani23@rambler.ru.

**Ольшанский Алексей Михайлович** – кандидат технических наук, главный научный сотрудник АО «НИИАС», г. Москва. E-mail: lexolshans@gmail.com.

**Осипян Кристина Валентиновна** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: osipyanchristina@inbox.ru.

**Парамонов Алексей Анатольевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой радиосистем передачи информации Московского технологического университета. E-mail: paramonov@mirea.ru.

**Петросова Маргарита Арсеновна** – аспирант кафедры математического анализа Московского педагогического государственного университета. E-mail: petrosova05@mail.ru.

**Подорога Анастасия Владимировна** – аспирант кафедры математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. E-mail: anastasiapodoroga@gmail.com.

**Политаева Екатерина Александровна** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: politaevae@mail.ru.

**Посыпкин Михаил Анатольевич** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: mposypkin@gmail.com.

**Расулов Карим Магомедович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: kahriman@yandex.ru.

**Ровба Евгений Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Я. Купалы. E-mail: rovba.ea@gmail.com.

**Самигуллина Алсу Ринатовна** – заведующая учебно-научной лабораторией «Информационные технологии в математическом образовании», ассистент кафедры высшей математики и математического моделирования Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета. E-mail: alsu\_sam@rambler.ru.

**Самойлова Татьяна Аркадьевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: tatsam@hotmail.ru.

**Семиряжко Анна Александровна** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: semirianna@gmail.com.

**Сенькина Гульжан Ержановна** – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: gulzhan.senkina@gmail.com.

**Сергеев Игорь Викторович** – кандидат технических наук, заместитель директора Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: isergeev@ipiran.ru.

**Симакова Анна Александровна** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: bessima13@yandex.ru.

**Синицын Игорь Николаевич** – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: sinitsin@dol.ru.

**Синявский Юрий Владимирович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологические машины и оборудования филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: melter@mail.ru.

**Смотрицкий Константин Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и

прикладной математики Гродненского государственного университета имени Я. Купалы. E-mail: k\_smotritski@mail.ru.

**Солодченкова Татьяна Болеславовна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и технических дисциплин Смоленского государственного университета. E-mail: tsolodchenkova@mail.ru.

**Суин Илья Алексеевич** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: suin224@yandex.ru.

**Суханова Анна Геннадьевна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru.

**Тимофеева Наталья Михайловна** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: nat.timopheeva@yandex.ru.

**Тимофеева Татьяна Игоревна** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tat.timopheeva@yandex.ru.

**Тихонов Иван Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики факультета ВМК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. E-mail: ivtikh@mail.ru.

**Тихонова Мария Ивановна** – студентка механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: m\_tikhonova94@mail.ru.

**Тихонова Ольга Вадимовна** – доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры радиосистем передачи информации Института радиотехнических и телекоммуникационных систем Московского технологического университета (МИРЭА). E-mail: o\_tikhonova@inbox.ru.

**Тронза Савелий Николаевич** – магистрант кафедры радиосистем передачи информации Института радиотехнических и телекоммуникационных систем Московского технологического университета (МИРЭА). E-mail: tron@bk.ru.

**Трофимов Сергей Павлович** – студент 4 курса физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: Wildchildful@gmail.com.

**Уткина Мария Сергеевна** – студент Казанского федерального университета. E-mail: mariya.barygina@mail.ru.

**Федулов Александр Сергеевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной техники филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: fedulov\_a@mail.ru.

**Фёдоров Александр Сергеевич** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: fedor-1993@mail.ru.

**Ханкишиева Шабнам Садыг кызы** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: shabnam.khankishieva@mail.ru.

**Ходченков Валерий Юрьевич** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: tansdf@mail.ru.

**Цветкович Диана Горановна** – аспирант кафедры математического анализа математического факультета Московского педагогического государственного университета. E-mail: dianacve@inbox.ru.

**Черный Сергей Николаевич** – кандидат технических наук, начальник отдела научно-исследовательского центра Военной академии войсковой противовоздушной обороны ВС РФ имени Маршала Советского Союза А.М. Василевского (ВА ВПВО ВС РФ). E-mail: Turov\_black@mail.ru.

**Шерстнева Наталья Александровна** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: MathSmolgu@gmail.com.

**Шерстюков Владимир Борисович** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». E-mail: shervb73@gmail.com.

**Широкова Ольга Александровна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского федерального университета. E-mail: shirokova@mail.ru.

**Ястребов Михаил Юрьевич** – кандидат экономических наук, профессор кафедры математики и кафедры комплексного обеспечения информационной безопасности Санкт-Петербургского государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. E-mail: mikyast@gmail.com.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики</b>	<b>3</b>
<i>Агасиев Т.А., Карпенко А.П.</i> Прогнозирование эффективных стратегий алгоритма оптимизации на основе анализа информационного содержания ландшафта целевой функции	3
<i>Болотин И.Б., Трофимов С.П.</i> Применение СКМ к анализу выигрышных стратегий для полной группы событий	9
<i>Викулов В.М., Лопатко К.О., Тихонова О.В., Тронза С.Н.</i> Алгоритм определения типа высокочастотного сигнала цифровой связи	14
<i>Викулов В.М., Парамонов А.А.</i> Электродинамическое моделирование антенных систем для интернета вещей	22
<i>Вишняков Р.Р.</i> Моделирование сигнала с модуляцией MSK для проверки алгоритма определения доплеровского сдвига частоты	29
<i>Игнатенков А.В., Ольшанский А.М.</i> О применении искусственных нейронных сетей для оперативной корректировки расписаний	36
<i>Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А.</i> Пакет программ в СКМ Maple автоматизированного вычисления тензорных объектов во втором порядке теории возмущений	41
<i>Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А.</i> Численно-аналитическое моделирование в СКМ космологических систем на основе скалярных полей с самодействием	45
<i>Игнатьев Ю.Г., Кох И.А.</i> Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на асимметричном скалярном дублете в СКМ Maple	50
<i>Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р.</i> Численно-аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple: автоматизация процедур численного решения и его визуализации	54
<i>Кристалинский В.Р., Черный С.Н.</i> О построении системы нечеткого вывода для прогнозирования состояния пункта управления технической системой	61
<i>Мифтахов Р.Ф.</i> Разработка банка заданий по математике в системе облачных вычислений CoCalc	66
<i>Нигмедзянова А.М., Исмоилова А.</i> Замощение плоскости многоугольниками в системе GeoGebra	70
<i>Нигмедзянова А.М., Уткина М.С.</i> Графическое построение замечательных точек и линий произвольного треугольника в СКМ Maple	79
<i>Подорога А.В.</i> Особенности моделирования решений квазилинейного закона сохранения с невыпуклой функцией потока	85
<i>Парамонов А.А.</i> Моделирование системы фазовой автоподстройки частоты в приближении В.И. Тихонова	92

<i>Семиряжко А.А.</i> Статистическая обработка результатов семантического дифференциала	98
<i>Суханова А.Г.</i> Формирование эффективного инвестиционного портфеля средствами системы Mathcad	102
<i>Тихонова М.И.</i> Новый метод векторного представления слов посредством разложения PSD-матрицы в задачах NLP	106
<b>СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры</b>	113
<i>Борисов В.В., Федулов А.С.</i> Нечеткий когнитивный анализ и моделирование слабо формализуемых проблем	113
<i>Грибер Ю.А., Самойлова Т.А.</i> Поиск ассоциативных правил в результатах экспериментального исследования цветовых предпочтений	118
<i>Григорьева Г.М., Ходченков В.Ю.</i> Реализация методов интеллектуального анализа данных в медицинской практике	124
<i>Данилюк Е.И., Мунерман В.И.</i> Программно-аппаратный комплекс для параллельной обработки распределенных больших данных	129
<i>Диев О.Е., Мунерман В.И.</i> Анализ решения задачи вывода ассоциативных правил в технологии in-database	134
<i>Жарков А.А.</i> Некоторый способ защиты информации от несанкционированного доступа в интернете вещей	139
<i>Захаров В.Н.</i> Параллельные жизни – Лебедев и Брук	144
<i>Ибрагимов Т.Р., Мунерман В.И.</i> Возможность использования процессоров ARMv8 для параллельных вычислений	152
<i>Иванов М.С., Мунерман В.И.</i> Генерация процедур для симметричного горизонтального распределения данных	157
<i>Классен Р.К.</i> Разработка и исследование консервативной СУБД Clusterix-N класса «BigData» на платформе GPU-кластера	163
<i>Ковалева Н.Ю., Самойлова Т.А.</i> Технология blockchain для распределенной обработки данных	172
<i>Козлов С.В., Суин И.А.</i> О некоторых подходах математического описания и анализа многомерной структуры информационных систем	177
<i>Макаров А.И.</i> Один подход к решению задачи поиска хроматического числа графа	182
<i>Макаров Д.И., Мунерман В.И., Мунерман Д.В.</i> Архитектура программно-аппаратного комплекса для распределенной обработки данных на базе контейнерной технологии	187
<i>Недорезова Е.А., Самойлова Т.А.</i> Многомерная модель классификации текстов	193



<i>Посыпкин М.А.</i> Безблокировочный многопоточный вариант метода ветвей и границ для многоядерных систем	198
<i>Самойлова Т.А., Фёдоров А.С.</i> Выбор формата обмена данными в высоконагруженных системах	205
<i>Симакова А.А.</i> Интеллектуальный анализ данных в аналитической информационной системе	209
<i>Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.</i> Экспресс моделирование стохастических систем высокой доступности на основе вейвлет канонических разложений	213
<i>Снявский Ю.В., Борисов В.В.</i> Интеллектуальный анализ гидромеханических процессов перемешивания	221
<b>СЕКЦИЯ 3. Математика и ее приложения</b>	225
<i>Банару Г.А., Банару М.Б.</i> О почти контактной метрической структуре косимплектического типа на 3-гиперповерхности шестимерной сферы	225
<i>Бирюкова Т.К., Киреев В.И., Гершкович М.М.</i> Применение принципа подобия аппроксимационных операторов к задачам приближения сеточных функций	230
<i>Богданова Н.Н., Расулов К.М.</i> О решении четырехэлементной краевой задачи типа задачи Карлемана для аналитических функций в произвольных односвязных областях	243
<i>Божко А.Н.</i> Минимизация геометрических тестов для автоматизации проектирования процесса сборки сложных изделий	250
<i>Долгополова О.Б., Зверович Э.И.</i> Об одном сингулярном интегральном уравнении	259
<i>Евдокимова Г.С.</i> Предельное распределение виртуального времени ожидания	265
<i>Емельченков Е.П.</i> Геометрии над алгебрами типа $\langle 3 \rangle$ . Классификация	270
<i>Зверович Э.И.</i> Задача о нахождении аналитической функции по значениям ее модуля на краю многосвязной области	274
<i>Зуев А.М.</i> Об одной эквивалентности на множестве натуральных чисел	279
<i>Карпенко А.П.</i> Выразительные средства популяционных алгоритмов глобальной оптимизации	283
<i>Кирьяцкий Е.Э., Кирьяцкий Э.Г.</i> Некоторые экстремальные свойства взвешенного арифметического среднего в евклидовом пространстве	293
<i>Осиян К.В., Расулов К.М.</i> Модельная краевая задача типа задачи Карлемана в классах метааналитических функций	299
<i>Расулов К.М., Тимофеева Т.И.</i> Анализ устойчивости решений однородной задачи Гильберта для квазигармонических функций третьего рода в круговых областях	305

<i>Расулов К.М., Ханкишиева Ш.С.</i> О неустойчивости решений однородной краевой задачи Римана для квазигармонических функций третьего рода в круговых областях	313
<i>Ровба Е.А., Смотрицкий К.А., Дирвук Е.В.</i> К оценке константы Лебега интерполяционного рационального процесса с узлами Чебышёва – Маркова	321
<i>Солодченкова Т.Б., Елисеева П.Н.</i> Определение скорости седиментации аэрозольных частиц	326
<i>Солодченкова Т.Б., Политаева Е.А.</i> Расчёт узловых линий прямоугольных мембран	331
<i>Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А.</i> Новые исследования, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке	336
<i>Цветкович Д.Г.</i> Особые структурированные представления для полиномов Бернштейна от рационального модуля	347
<b>СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании</b>	354
<i>Дюндин А.В.</i> Оценка результатов изучения технических дисциплин в системах дистанционного обучения	354
<i>Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р.</i> Обучение высшей математике на основе интегрирования методов математического и компьютерного моделирования в системе компьютерной математики Maple	359
<i>Конашенко А.В., Шерстнева Н.А.</i> Система подготовки школьников к решению математических задач повышенной сложности	364
<i>Кузнецова А.С.</i> Психологические предикторы успешности труда преподавателей в системе среднего образования	372
<i>Расулов К.М.</i> Об одном общем подходе к решению «банковских задач» из профильного уровня ЕГЭ по математике	378
<i>Сенькина Г.Е.</i> Организация проектной деятельности обучающихся в системе «школа-вуз»	388
<i>Тимофеева Н.М., Киселева О.М.</i> Некоторые аспекты формирования метапредметных образовательных результатов в дистанционном обучении математике детей с ограниченными возможностями здоровья	393
<i>Широкова О.А.</i> Использование объектно-ориентированных проектов при построении алгебраических фракталов	400
<i>Ястребов М.Ю., Ланева И.В.</i> Методические вопросы структуры и содержания лабораторного практикума по дисциплине "Случайные процессы"	405
<b>Сведения об авторах</b>	411

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 19

Издательство Смоленского государственного  
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко*

---

Подписано к печати 11.04.2018. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать ризографическая.  
Усл. п. л. 26,5. Уч.-изд. л. 26,5. Тираж 120 экз.  
Заказ №

---

Отпечатано с оригинал-макета авторов в ИТЦ СмолГУ  
214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4.