

СМОЛЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-Математический Факультет

XXVII Международная научная конференция
**СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ
МАТЕМАТИКИ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
(СКМП-2026)**

Смоленск, 22–23 мая 2026 г.

Сборник тезисов

Секция 3. «МАТЕМАТИКА и ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ»
Часть 2. «Теория вероятностей и прикладная математика».

Смоленск
2026 г.

Содержание

Кабатянский Г. А., Крук Е. А. Об одном обобщении системы МакЭлиса	3
Ватутин В. А. Ветвящиеся процессы в случайной среде	5
Дьяконова Е. Е., Ватутин В. А. Критические ветвящиеся про- цессы в экстремально неблагоприятной случайной среде	6
Маркина А. Ю., Шкляев А. В. О времени вырождения дважды критических ветвящихся процессов с частицами двух полов с большим начальным числом частиц	8
Веретенников А. Ю. Новое в законах больших чисел: обзор . . .	10
Зайцев А. Ю. Оценки транспортного расстояния в центральной предельной теореме	12
Харин А. Ю. Эффективность и робастность последовательных статистических критериев	14
Пчелинцев Е. А. Метод выбора моделей для оценивания квадра- тичноинтегрируемых сигналов по зашумленным наблюдениям .	16
Хиль Е. В. Критерий хи-квадрат с выбором разбиения по наблю- дениям	18
Куница В. Н., Лыков К. В. О дополняемости случайных под- пространств в пространствах операторов	20
Якубович Ю. В. Моменты случайных разбиений	22
Калимулина Э. Ю., Есин А. А. ZRP на динамическом графе: совместная (η, I) -динамика и обратимая каноническая мера .	24
Кошелев М. М. Спектр обобщенных графов Джонсона	25
Хартов А. А. Плотность по вариации и класс рационально-безгра- нично делимых распределений	27
Анохина М. А. Предельные теоремы для момента максимума случайного блуждания, достигающего различных фиксиро- ванных уровней	28
Буялова У. И. RQ–PQ процессы в задачах согласия и однород- ности	30
Чиняев Б. Б. Разработка и анализ метода генерации случайных связных графов	32
Савич А. В. Предельные теоремы для максимумов непрерывных преобразований гауссовских стационарных процессов с дис- кретным временем	34
Лимар И. А. Об одной задаче аппроксимации многопараметри- ческих функций	36
Ершов А. Р. Аппроксимация неоднородных тензорных произве- дений высокой размерности процессов Орнштейна–Уленбека .	38
Швайков М. Д. Предельная теорема для количества частиц вто- рого типа в ветвящемся процессе с мутациями в одном гене .	39
Харченко И. С. Обобщенные формулы Леви–Хинчина для це- лочисленных распределений	42

Об одном обобщении системы МакЭлиса

Кабатянский Г. А., Крук Е. А.

Сколтех, НИУ Высшая Школа Экономики, г. Москва

G.Kabatyansky@skoltech.ru, ekrouk@hse.ru

В данной работе мы подводим промежуточный итог исследований, посвященных обобщению классической криптосистемы МакЭлиса [1], когда случайная ошибка в системе МакЭлиса также подвергается линейному преобразованию.

В математической модели криптографии с открытым ключом присутствуют три участника: Алиса, Боб и Ева. Алиса выбирает некоторую *специальную* $k \times n$ матрицу G , которую она держит в секрете, и помещает в открытый доступ $k \times n$ матрицу $G_{pub} = SGP$, где $k \times k$ невырожденная матрица S выбрана случайно, а $n \times n$ матрица P - случайная матрица перестановки. Матрицы S и P также держатся в секрете.

Боб, чтобы передать Алисе некоторое k -битное сообщение $\mathbf{m} \in \{0, 1\}^k$, посылает ей вектор

$$\mathbf{y} = \mathbf{m}G_{pub} + \mathbf{e}, \quad (1)$$

где вектор (ошибки) $\mathbf{e}$ выбран Бобом случайно из двоичных n -мерных векторов, в которых ровно t единиц. Предполагается, что злоумышленник Ева знает посланный вектор $\mathbf{y}$ и хочет найти по нему сообщение $\mathbf{m}$.

Специальность матрицы G состоит в том, что в k -мерном подпространстве C_G , порожденном ее строками, любые два различных вектора $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$ находятся на расстоянии Хэмминга $d_H(\mathbf{c}, \mathbf{c}') > 2t$, где расстояние Хэмминга определяется как

$$d_H(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = |\{i : c_i \neq c'_i\}|.$$

Равносильно это означает, что шары радиуса t в метрике Хэмминга с центрами в точках C_G не пересекаются, т.е. для любого $\mathbf{y}$ уравнение

$$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{e} \quad (2)$$

имеет не более одного решения такого, что $\mathbf{c} \in C$ и вес Хэмминга

$$wt(\mathbf{e}) := d_H(\mathbf{c}, \mathbf{0}) = |\{i : c_i = 1\}| \leq t.$$

Такое подпространство называется линейным (n, k) -кодом, исправляющим t ошибок, а матрица G называется порождающей матрицей кода.

Наряду с порождающей матрицей G используется и $(n-k) \times n$ матрица H ранга $n-k$, называемая проверочной, определяемая уравнением $G \times H^T = 0$. Тогда уравнение (2) можно заменить на эквивалентную систему из $n-k$ линейных уравнений с n неизвестными $e_1, \dots, e_n$

$$\mathbf{s} = H\mathbf{e}^T, \quad (3)$$

где $\mathbf{s} = H\mathbf{y}^T$ и ищется решение $\mathbf{e}$ такое, что его вес Хэмминга не более t .

Кроме свойства исправления t ошибок нужно, чтобы для кода C_G существовал эффективный, т.е. полиномиальной по n сложности, алгоритм решения уравнения (2) или (3), называемый алгоритмом исправления ошибок, или алгоритмом декодирования.

Стойкость системы МакЭлиса основывается на предположении, что найти решение системы с вектором $\mathbf{e}$ таким, что $wt(\mathbf{e}) \leq t$ - вычислительно сложная задача. Известно, что более сложная задача - найти решение (3) с минимальным весом Хэмминга вектора $\mathbf{e}$, является NP-трудной.

Система МакЭлиса стала одним из победителей конкурса NIST по выбору систем с открытым ключом, устойчивых к атакам с помощью квантового компьютера (так называемые пост-квантовые системы). За почти 50 лет был предложен ряд модификаций этой системы, см. обзор [2], но все они оставляли уравнение (2) неизменным. В [3] было предложено следующее обобщение

$$\mathbf{y} = \mathbf{m}G_{pub} + \mathbf{e}E_{pub}, \quad (4)$$

где вектор $\mathbf{e}$ также подвергается линейному преобразованию с помощью публичной матрицы E_{pub} . Несмотря на то, что были предложены различные варианты выбора матрицы E_{pub} , см. [4] и литературу в ней, но все они в итоге, см. [5], [4], оказались в лучшем случае эквивалентны системе МакЭлиса. Две системы называются эквивалентными, если успешная атака на одну систему может быть за полиномиальное от n время трансформирована в атаку на другую систему.

Открытый вопрос - существуют ли матрицы E_{pub} такие, что система, задаваемая (4), более стойкая чем система МакЭлиса.

Литература

1. *McEliece R. J.* A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory, DSN Progress Report, vol. 42-44, pp. 114–116, 1978.
2. *Weger V., Gassner N., Rosenthal J.* A Survey on Code-based Cryptography, arXiv:2201.07119, 2022.
3. *Ivanov F., Kabatiansky G., Krouk E., Rumenko N.* A New Code-Based Cryptosystem. In: Baldi, M., Persichetti, E., Santini, P. (eds) Code-Based Cryptography. CBCrypto 2020. Lecture Notes in Computer Science, vol 12087. Springer, Cham, pp. 41–49, 2020.
4. *Kabatiansky G. A., Krouk E. A.* Analysis of one chain of McEliece system's modifications, 2025 XIX International Symposium on Problems of Redundancy in Information and Control Systems (Redundancy), Moscow, Russian Federation, 2025.
5. *Vedenev K.* On the security of two IKKR-type code-based cryptosystems, Designs Codes and Cryptography 93 (11), pp. 4779–4798, 2025.

Ветвящиеся процессы в случайной среде

Ватутин В. А.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва
vatutin@mi-ras.ru

Первые математические модели ветвящихся процессов появились в середине 19 века в связи с попытками объяснить причины вырождения королевских фамилий. Простейшая модель ветвящихся процессов описывает развитие однополой популяции и выглядит следующим образом. Популяция стартует в нулевом поколении с одного индивидуума $Z(0) = 1$, и если известен размер популяции $Z(n)$ в поколении $n = 0, 1, 2, \dots$, то число индивидуумов $Z(n + 1)$ в популяции момент $n + 1$ вычисляется по формуле

$$Z(n + 1) = \sum_{i=1}^{Z(n)} \xi_i(n), \quad (1)$$

где $\xi_i(n)$, $n = 0, 1, \dots; i = 1, 2, \dots, Z(n)$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, интерпретируемые как размеры потомства частиц предыдущего поколения. Закон распределения количества потомков индивидуума любого поколения описывается производящей функцией

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_i(n) = k) s^k, \quad n = 0, 1, \dots; i = 1, 2, \dots$$

Эта модель имеет огромное число применений в физике, биологии, демографии и других науках, но не всегда адекватно описывает суть происходящих явлений.

Более сложная модель – ветвящиеся процессы в меняющейся среде, где размер популяции популяции в следующем поколении также вычисляется по формуле (1), но теперь закон распределения численности потомства индивидуума зависит от номере n поколения, к которому этот индивидуум принадлежит, и описывается производящей функцией

$$f_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_i(n) = k) s^k, \quad n = 0, 1, \dots; i = 1, 2, \dots$$

Еще одной моделью ветвящихся процессов являются ветвящиеся процессы в случайной среде. В таких процессах сначала разыгрывается последовательность случайных производящих функций (законов распределения числа потомков индивидуумов)

$$f_0(s), f_1(s), \dots, f_n(s), \dots,$$

а затем, в соответствии с этими законами распределения, запускается ветвящийся процесс в меняющейся среде.

Пример.

$$f_n(s) = \frac{q_n}{1 - p_n s} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_i(n) = k) s^k, \quad n = 0, 1, \dots; i = 1, 2, \dots,$$

где параметры q_n, p_n неотрицательны, $q_n + p_n = 1$ и, скажем, последовательность $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ – это последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на интервале $(0,1)$.

Свойствам ветвящихся процессов такого рода и будет посвящен доклад, в котором строгие формулировки будут сочетаться с неформальными рассуждениями. Для понимания сути излагаемого материала никаких специальных знаний от слушателей не потребуется.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда N 24-11-00037, <https://rscf.ru/ru/project/24-11-00037/>

Литература

1. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Размер популяции критического ветвящегося процесса, эволюционирующего в неблагоприятной среде. Теория вероятн. и ее примен., 68:3 (2023), 509–531.
2. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Редуцированные критические ветвящиеся процессы в неблагоприятной случайной среде. Труды МИАН, 330 (2025), 424–455.
3. Kersting G., Vatutin V. Discrete time branching processes in random environment. Wiley, USA, 2017.

Критические ветвящиеся процессы в экстремально неблагоприятной случайной среде

Дьяконова Е. Е., Ватутин В. А.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва
elena@mi-ras.ru, vatutin@mi-ras.ru

Пусть $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}\}$ – пространство всех вероятностных производящих функций $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}(\{k\}) z^k$, $z \in [0, 1]$, на множестве неотрицательных целых чисел, оснащенное равномерной метрикой. Пусть $F(z)$ – случайная величина, принимающая значения в пространстве $\mathcal{F}$, и пусть $F_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, – последовательность независимых копий случайной функции $F(z)$.

Назовем последовательность $\mathcal{E} = \{F_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ случайной средой.

Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин $\{Z_0, Z_1, Z_2, \dots\}$, заданных на некотором вероятностном пространстве

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется ветвящимся процессом в случайной среде (ВПСС), если $Z_0 = 1$ и

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \xi_{nj}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где при фиксации случайной среды $\mathcal{E} = \{F_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ случайные величины $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots$ независимы и имеют одно и то же распределение, порождаемое производящей функцией F_n . Пусть $X = \log F'(1)$ и $X_i = \log F'_{i-1}(1)$, $i = 1, 2, \dots$. Последовательность

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1,$$

называется сопровождающим случайным блужданием для ветвящегося процесса в случайной среде.

Далее мы считаем, что выполняются следующие условия.

Условие В1. $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X \in (0, \infty)$.

Условие В2. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathbf{E} \left(\log^+ \frac{F''(1)}{(F'(1))^2} \right)^{2+\varepsilon} < \infty.$$

Условие В1 означает, что мы рассматриваем критический ВПСС. Известно, что если при $n \rightarrow \infty$ функция $\varphi(n) \rightarrow \infty$ так, что $\varphi(n) = o(\sqrt{n})$, то

$$\mathbf{P}(Z_n > 0, S_n \leq \varphi(n)) = \mathbf{P}(S_n \leq \varphi(n) | Z_n > 0) \mathbf{P}(Z_n > 0) = o(\mathbf{P}(Z_n > 0)).$$

Поэтому естественно называть случайную среду, подчиняющуюся ограничению $S_n = o(\sqrt{n})$, неблагоприятной, а среду, подчиняющуюся условию $S_n \leq K$ для некоторой константы K , – экстремально неблагоприятной.

В работе [1] было показано, что если выполнены условия В1 и В2, а среда экстремально неблагоприятна, то

$$\mathbf{P}(Z_n > 0, S_n \leq K) \sim c(K) n^{-3/2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где константа $c(K) \in (0, \infty)$.

В данном докладе, основанном на статье [2], мы опишем свойства траекторий процесса $\{Z_m, 0 \leq m \leq n\}$ при условии $\{Z_n > 0, S_n \leq K\}$ и $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия В1 и В2. Тогда при $n \rightarrow \infty$ условные законы распределения $\mathcal{L}(Z_n | Z_n > 0, S_n \leq K)$, $n \geq 1$, слабо сходятся к дискретному собственному вероятностному распределению.

Для натуральных $m \geq 2k$ положим

$$Y^{k,m}(t) := \exp \left\{ -S_{k+\lfloor (m-2k)t \rfloor} \right\} Z_{k+\lfloor (m-2k)t \rfloor}$$

и введем процесс $\mathcal{Y}^{k,m} = \{Y^{k,m}(t), \quad t \in [0, 1]\}$, описывающий траекторию отнормированного процесса размера популяции в ВПСС в промежутке между поколениями k и $m - k$.

Теорема 2. Если выполнены условия B1 и B2, то для любого $\theta \in (0, 1/2)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{\theta n, n} | Z_n > 0, S_n \leq K) \Rightarrow \mathcal{L}(W(t), t \in [0, 1]), n \rightarrow \infty,$$

где предельный процесс $\mathcal{W} = \{W(t), t \in [0, 1]\}$ является случайным процессом с почти наверное постоянными траекториями, т.е.

$$\mathbf{P}(W(t) = W \text{ для всех } t \in [0, 1]) = 1$$

для некоторой случайной величины W . Более того,

$$\mathbf{P}(0 < W < \infty) = 1.$$

Здесь символ $\Rightarrow$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ функций, имеющих пределы слева и непрерывных справа, снабженном топологией Скорохода.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда N 24-11-00037 <https://rscf.ru/ru/project/24-11-00037/>

Литература

1. Ватутин В. А., Донг К., Дьяконова Е. Е. Некоторые функционалы для случайных блужданий и критические ветвящиеся процессы в экстремально неблагоприятной среде, Матем. сб., т. 215, № 10, 2024, 58-88.
2. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Предельные теоремы для критических ветвящихся процессов в экстремально неблагоприятной случайной среде, Матем. сб. (в печати).

О времени вырождения дважды критических ветвящихся процессов с частицами двух полов с большим начальным числом частиц

Маркина А. Ю., Шкляев А. В.

Отдел аналитики Т-Банк, Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, г. Москва
annmarkena@gmail.com, alexander.shklyayev@math.msu.ru

Ветвящиеся процессы с частицами двух полов впервые были введены Д.Дж. Дэйли в работе [1]. Пусть $(F_{n,i}, M_{n,i})$, $i > 0$ – независимые одинаково распределенные целочисленные неотрицательные случайные векторы с двумерным распределением $\mathbf{Q}$. Будем использовать общее обозначение (F, M) для векторов с тем же распределением. Определим ветвящийся процесс с частицами двух полов (ДВП) $\{N_n, n > 0\}$ следующим образом: в начальный момент количество пар N_0 предполагается равным фиксированной

константе N , в каждом следующем поколении количество пар определяется соотношением

$$N_{n+1} = L \left(\sum_{i=1}^{N_n} F_{n,i}, \sum_{i=1}^{N_n} M_{n,i} \right).$$

Здесь функция L — некоторая функция, которая называется функцией паросочетаний и определяет количество пар, которые образуют заданное число мужских и женских особей. Одной из наиболее естественных такого рода функций является $L(x, y) = \min(x, y)$, соответствующая моногамному поведению — делению особей на разнополые пары. Соответствующий процесс называется ДВП с идеальной верностью.

Мы рассматриваем ДВП с идеальной верностью, причем предполагаем, что $\mathbf{E}F_{1,1} = \mathbf{E}M_{1,1} = 1$. Такие процессы назовем дважды критическими. В настоящей работе рассматривается задача о вымирании большой популяции ДВП, то есть случай $N \rightarrow \infty$. Рассмотрим время гибели $T_N = \min\{n : N_n = 0\}$. Для классического ветвящегося процесса предельная теорема для времени гибели популяции была получена Дж. Лампери в работе [2] в критическом и докритическом случаях. Для ДВП в докритическом случае аналогичные результаты были получены М. Абдюшевым в недавно вышедшей работе [3]. В критическом случае подобный результат известен для ДВП в случайной среде (см. работу [4]). Однако, рассматриваемая нами ситуация значительно сложнее. Удалось получить закон больших чисел и центральную предельную теорему для времени вырождения процесса.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{D}F = \sigma_F^2$, $\mathbf{D}M = \sigma_M^2$, $\text{cov}(F, M) = \rho$. Положим

$$m := \frac{\sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_M^2 - 2\rho}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Предположим, что $\mathbf{E}F^{2+\delta} < \infty$, $\mathbf{E}M^{2+\delta} < \infty$ при некотором положительном δ . Тогда

$$\frac{T_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow{P} \frac{2}{m}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. Пусть $\mathbf{D}F = \sigma_F^2$, $\mathbf{D}M = \sigma_M^2$, $\text{cov}(F, M) = \rho$. Положим

$$m := \frac{\sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_M^2 - 2\rho}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Предположим, что $\mathbf{E}F^{5/2+\delta} < \infty$, $\mathbf{E}M^{5/2+\delta} < \infty$ при некотором положительном δ . Тогда

$$\frac{T_N - 2m^{-1}\sqrt{N}}{\sqrt[4]{N}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\pi - 1) + 2\rho}{\pi m^3}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Данные результаты являются существенными продвижениями в области критических ветвящихся процессов с частицами двух полов. Идея доказательства заключается в использовании сильной гауссовской аппроксимации

для случайных векторов, что позволяет свести задачу о вырождении процесса к задаче достижения уровня блужданием с отрицательным средним.

Литература

1. Daley D. J. Extinction conditions for certain bisexual Galton-Watson branching processes. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, V. 9., №. 4., 1968, pp. 315-322.
2. Lamperti J. Limiting distributions for branching processes. Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), V. 2, 1967, pp. 225-241.
3. Абдюшев М. Р. Предельная теорема для распределения времени вырождения докритических ветвящихся процессов с частицами двух полов с большой начальной популяцией. Дискретная математика, Т. 36, №. 4., 2024, с. 3-12.
4. Zhiyanov A., Shklyayev A. On asymptotic behavior of time of extinction of critical bisexual branching process in random environment. Journal of Applied Probability, Published online 2026:1-13. doi:10.1017/jpr.2025.10072.

Новое в законах больших чисел: обзор

Веретенников А. Ю.

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
НИУ Высшая школа экономики, г. Москва
ayv@iitp.ru

Официальная история Закона больших чисел (ЗБЧ) началась с Якоба Бернулли [1]. Многие внесли затем свой выдающийся вклад: де Муавр, Чебышов (см. [2]). “Последнее слово” в области слабых ЗБЧ для независимых, одинаково распределенных с.в. было сказано в работах [3,4]. Об истории вопроса, как и о более поздних исследованиях, см. ссылки в [5]. Дальнейшие исследования сосредоточились на слабо зависимых величинах (см. [6]); недавно началось развитие этой области для случая “нелинейных вероятностей” [7]. Другие свежие результаты о слабых ЗБЧ, в том числе, “нелинейных”, см. в [6,8]. Приведем тут лишь два результата автора. О новых **усиленных** ЗБЧ для разнораспределенных слабо зависимых с.в. см. [9, 10].

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ – последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$. Законом больших чисел (далее ЗБЧ) называют утверждение вида $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, или $(S_n - b)/n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, или $(S_n - b_n)/n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ с некоторыми неслучайными b или b_n .

Определение 1. Последовательность с.в. (ξ_n) называется Р.И. по Чезаро, если

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|\xi_k| 1(|\xi_k| > M) = 0.$$

Теорема 1 ([6], Теорема 2). Пусть семейство случайных величин $(\xi_n, n \geq 1)$ Р.И. по Чезаро, все они имеют конечные нулевые математические ожидания $\mathbb{E}\xi_n = 0$, $n \geq 1$, и выполнено условие слабой зависимости

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi_k | \xi_1 + \dots + \xi_{k-1})| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда

$$S_n/n \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для формулировки следующего результата обозначим $\bar{F}(x) := 1 - F(x)$, где $F(x)$ – произвольная функция распределения. Далее существование математических ожиданий ξ_n не предполагается. Обозначим

$$\gamma_k(x) = \bar{F}_{\xi_k}(x) + F_{\xi_k}(-x), \quad \psi_n(y) := \sum_{k=1}^n y \gamma_k(ny).$$

$$\tilde{a}_n/n := n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\xi_k 1(|\xi_k| \leq n) | \xi_1, \dots, \xi_{k-1}).$$

Теорема 2 ([6], Теорема 3). Пусть случайные величины $(\xi_n, n \geq 1)$ таковы, что семейство функций $(\psi_n(y), 0 \leq y \leq 1)$ является равномерно интегрируемым, а также при всех $y \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(y) = 0, \quad (2)$$

и выполнено условие слабой зависимости $\tilde{a}_n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$. Тогда

$$S_n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (3)$$

Литература

1. Бернулли Я. О законе больших чисел: Пер. с лат. - М., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1986.
2. Чебышев П. Л. О средних величинах, Матем. сб., 2:1 (1867), 1–9.
3. Khintchine A. Sur la loi des grands nombres. (Note de M. A. Khintchine) CRAS 1929, 477-479. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k31417/f477.item>
4. Колмогоров А. Н. О законе больших чисел, в кн.: А.Н. Колмогоров, Теория вероятностей и математическая статистика, М., Наука, 1986, 44–47.

Перевод О.В. Вискова работы A.N. Kolmogorov, Sur la loi de grands nombres, Atti Accad. naz. Lincei. Rend. 1929, 9(6), 470–474.

5. Chandra T. K., Laws of Large Numbers, Narosa, New Delhi et al., 2012.

6. Ахмярова А. Т., Веретенников А. Ю. О законе больших чисел для неодинаково распределенных слабо зависимых слагаемых, Теория вероятн. и ее примен., 2025, том 70(2), 211–227. <https://doi.org/10.4213/tvp5725>

7. Peng S. Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations. Probab. Uncertain. Quant. Risk 4 (4), (2019). <https://doi.org/10.1186/s41546-019-0038-2>

8. Akhmiarova A., Veretennikov A. On nonlinear weak law of large numbers, 2025, arXiv:2506.07470

9. Ахмярова А. Т., Веретенников А. Ю. Об усиленном законе больших чисел для попарно независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., 69:3 (2024), 427–438 <https://www.mathnet.ru/rus/tvp5662>

10. Kozlov I. V., Veretennikov A. Yu. On strong law of large numbers for non identically distributed random variables, 2025, arXiv:2506.07508

Оценки транспортного расстояния в центральной предельной теореме

Зайцев А. Ю.

*Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург
zaitsev@pdmi.ras.ru*

Излагаются результаты недавней работы докладчика [1].

Суммы независимых слагаемых впервые появились в теории вероятностей при рассмотрении биномиальных распределений в рамках схемы Бернулли. Были получены закон больших чисел и центральная предельная теорема Муавра–Лапласа. Было замечено, что биномиальные распределения не только хорошо аппроксимируются нормальным законом, но и убывание "хвостов" биномиальных распределений происходит похоже на убывание хвостов нормальных распределений. В качестве естественного расширения класса биномиальных распределений можно рассматривать класс распределений сумм независимых (вообще говоря, неодинаково распределенных) случайных величин, ограниченных по модулю одной и той же константой $\tau > 0$. В докладе речь пойдет не только об убывании хвостов, но и об оценивании точности аппроксимации в одномерной центральной предельной теореме. Пусть $X_1, \dots, X_n$ – ограниченные с вероятностью единица независимые случайные величины. Для простоты будем считать, что у них нулевые средние значения:

$$\mathbf{P}\{|X_j| \leq \tau\} = 1, \quad \mathbf{E} X_j = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Нас будет интересовать поведение распределения суммы $S = X_1 + \dots + X_n$ в зависимости от ограничивающей величины τ .

Из неравномерной оценки Бикялиса в одномерной центральной предельной теореме следует, что в одномерном случае

$$W_1(F, \Phi) \leq c\tau.$$

с абсолютной постоянной c , где W_1 – транспортное расстояние Канторовича–Васерштейна, $F = \mathcal{L}(S)$ – распределение суммы S , а $\Phi = \Phi_F$ – соответствующее нормальное распределение с тем же нулевым средним и той же дисперсией как у распределения F .

Основной результат этого доклада значительно сильнее и точнее. Стандартный модуль в определении ценовой функции расстояния Канторовича заменяется на экспоненциальную функцию. Утверждается, что найдется такая c , что

$$W(F, \Phi) = \inf_{\pi} \int \exp\{|x - y|/c\tau\} d\pi(x, y) \leq c, \quad (2)$$

где инфимум берется по всем двумерным вероятностным распределениям π с маргинальными распределениями F и Φ . Утверждение (2) справедливо также для распределения F из класса $\mathcal{A}_1(\tau)$, введенного в работе автора [2]. В частных случаях мы получим некоторые результаты работы Э. Рио [3]. Обсуждается вопрос о возможности обобщения результата на многомерный случай.

Класс $\mathcal{A}_1(\tau)$ (с фиксированным $\tau \geq 0$) состоит из одномерных распределений F , для которых функция

$$\varphi(z) = \varphi(F, z) = \log \int_{\mathbf{R}} e^{zx} F\{dx\} \quad (\varphi(0) = 0)$$

определена и аналитична при $|z|\tau < 1$, $z \in \mathbf{C}$, и

$$|\varphi'''(z)| \leq \tau \sigma^2 \quad \text{при } |z|\tau < 1, \quad (3)$$

где σ^2 – дисперсия случайной величины с распределением F . Это определение эквивалентно определению класса распределений с достаточно медленно растущими кумулянтами, рассмотренного В. А. Статулявичусом [4].

Подчеркнем, что в основном результате доклада мы рассматриваем одномерные распределения, удовлетворяющие аналитическому условию на преобразование Лапласа (3) и, вообще говоря, не представимые в виде свертки большого числа одинаковых распределений.

Из элементарных свойств классов $\mathcal{A}_1(\tau)$ можно вывести, что утверждение (2) справедливо для свертки одномерных распределений, сосредоточенных на отрезке $[-\tau, \tau]$ или удовлетворяющих условиям известного неравенства Бернштейна (с параметром τ), а также для безгранично делимых

распределений со спектральными мерами Леви–Хинчина, сосредоточенными на этом же отрезке, и для распределений, удовлетворяющих условиям Статулявичуса на рост кумулянтов. По содержанию и по методам доказательства его можно рассматривать как просто и понятно формулируемое утверждение из теории больших уклонений.

Литература

1. *Зайцев А. Ю.* Оценки транспортного расстояния в центральной предельной теореме, Зап. научн. семин. ПОМИ, 544, 2025, 93–115.
2. *Зайцев А. Ю.* Оценки расстояния Леви–Прохорова в многомерной центральной предельной теореме для случайных величин с конечными экспоненциальными моментами, Теория вероятн. и ее примен., 31, 1986, 246–265.
3. *Rio E.* Upper bounds for minimal distances in the central limit theorem, Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Statist., 45, 2009, 802–817.
4. *Statulevičius V. A.* On large deviations, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 62, 1966, 133–144.

Эффективность и робастность последовательных статистических критериев

Харин А. Ю.

Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

KharinAY@bsu.by

Последовательные статистические критерии (тесты, решающие правила) [1] применяются в анализе случайных данных для решения задач проверки гипотез, когда число наблюдений, использованных для принятия решения, вносит важный вклад в эффективность разрабатываемой статистической процедуры. В рамках заданных гипотетических моделей стохастических данных построены последовательные статистические критерии, минимизирующие математическое ожидание случайного числа наблюдений среди всех статистических тестов, обеспечивающих заданную точность (примлемые малые значения вероятностей ошибочных решений) [2].

Практическое применение последовательных статистических критериев в задачах анализа реальных стохастических данных обычно происходит в условиях, когда наблюдения не полностью соответствуют гипотетической модели [3], она искажена [4], [5], и в результате имеют место значительные отклонения от отмеченного выше оптимального свойства. Поэтому для корректного практического применения последовательных статистических критериев необходим теоретический анализ робастности (устойчивости к уклонениям от предположений гипотетической модели в рамках некоторых

задаваемых семейств) и построение новых классов последовательных тестов, характеризующихся робастностью в этих рамках [6], [7].

Для теоретического решения вероятностных задач анализа робастности последовательных тестов и построения робастных по критерию минимакса функционала риска последовательных статистических решающих правил требуются явные точные или приближенные (с возможностью управлять точностью приближения) выражения для основных характеристик эффективности – вероятностей ошибок и математических ожиданий числа наблюдений [8]. В докладе приводятся результаты работы [5], приводятся и обсуждаются построенные асимптотические разложения для указанных характеристик с использованием специальных критерияльных статистик, образующих цепи Маркова.

В качестве моделей стохастических данных рассмотрены следующие: последовательность независимых одинаково распределенных случайных наблюдений; многомерные наблюдения, имеющие блочную структуру; последовательность неоднородных независимых случайных наблюдений (включая временные ряды с трендом); цепи Маркова различных порядков. Отдельно рассмотрен случай многомерных двоичных наблюдений. Постановки решенных задач включают случаи простых и сложных (составных) гипотез, а также множественную проверку. С применением построенных асимптотических разложений разработаны робастные последовательные статистические критерии по критерию минимакса функционала риска для различных типов искажений: “выбросы” в наблюдениях, искажения гипотетической вероятностной модели, задаваемые ϵ -окрестностями в пространствах функций, определяющих распределение вероятностей, искажения модели марковской зависимости, искажения модели тренда.

Полученные теоретические результаты иллюстрируются имитационным моделированием и применены для решения прикладных задач.

Литература

1. *Wald A.* Sequential Analysis. New York: John Wiley and sons, 1947.
2. *Mukhopadhyay N., de Silva B.* Sequential Methods and their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 2009.
3. *Huber P. J.* Robust Statistics. Theory and Methods. New York: John Wiley and Sons, 2004.
4. *Galinskij V., Kharin A.* On Minimax Robustness of Bayesian Statistical Prediction, In: Probability Theory and Mathematical Statistics, 1999, VSP / TEV, P. 259–266.
5. *Kharin A.* An Approach to Asymptotic Robustness Analysis of Sequential Tests for Composite Parametric Hypotheses // Journal of Mathematical Sciences, 2017, v. 227, P. 196–203.
6. *Kharin A. Y.* Robustness of Bayesian and sequential statistical decision rules. Minsk: BSU, 2013.
7. *Kharin A. Y., Kishylau D. V.* Robust sequential test for hypotheses about discrete distributions in the presence of «outliers» // Journal of Mathematical Sciences, 2015, v. 205(1), P. 68–74.

8. *Ty T. T., Харин А. Ю.* Sequential probability ratio test for many simple hypotheses on parameters of time series with trend // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика, 2019, № 1, С. 35–45.

Метод выбора моделей для оценивания квадратичноинтегрируемых сигналов по зашумленным наблюдениям

Пчелинцев Е. А.

Томский государственный университет, г. Томск
evgen-pch@yandex.ru

В работе изучается проблема статистической обработки сигналов с помощью метода выбора модели. Для численной реализации применяются методы машинного обучения. Необходимо оценить неизвестный детерминированный сигнал $S(\cdot)$ на основе зашумленных наблюдений, которые удовлетворяют следующему стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy_t = S_t dt + \varepsilon dw_t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

где S_t – неизвестный квадратично интегрируемый сигнал, шум $(w_t)_{t \geq 0}$ – стандартный винеровский процесс, $\varepsilon > 0$ – интенсивность шума. Предполагается, что сигнал S в (1) принадлежит эллипсоиду Соболева радиуса $r > 0$ в $\mathcal{L}_2[0, 1]$, определенному как

$$\Theta_\varpi := \left\{ S \in \mathcal{L}_2[0, 1] : \sum_{j=1}^{\infty} e^{2\kappa j^\alpha} \theta_j^2 \leq r \right\}. \quad (2)$$

Здесь $\varpi = (\alpha, \kappa, r)$, $0 < \alpha < 1$, $\kappa > 0$ и $\theta_j = (S, \phi_j)$, $j \geq 1$, – коэффициенты Фурье для S относительно тригонометрического базиса $(\phi_j)_{j \geq 1}$ в $\mathcal{L}_2[0, 1]$.

Цель – предложить метод оценивания, минимизирующий среднеквадратичную ошибку (СКО)

$$R(\hat{S}, S) = \mathbf{E}_S \|S - \hat{S}\|^2, \quad \|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t) dt, \quad (3)$$

где $\mathbf{E}_S$ – математическое ожидание относительно распределения $\mathbf{P}_S$ процесса $(y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ в (1). При этом рассматривается случай дискретных наблюдений $(y_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$ в точках

$$t_k = k/n, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (4)$$

где $n \geq \lceil \varepsilon^{-2} \rceil$ – объем выборки. Согласно [1] для оценивания $S \in \Theta_{\varpi}$ в модели (1) на решетке $\mathcal{T}_n = \{t_0, \dots, t_n\}$ будем использовать эффективные взвешенные оценки МНК типа Пинскера [1, 2]:

$$\hat{S}_{\varpi}(t) = \sum_{j=1}^{n_*} \lambda_{\varpi,j} \hat{\theta}_j \phi_j(t). \quad (5)$$

Здесь

$$\hat{\theta}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi_j(t_k) \Delta y_k, \quad \Delta y_k = y_{t_k} - y_{t_{k-1}}, \quad (6)$$

и весовые коэффициенты

$$\lambda_{\varpi,j} = 1 - e^{-\kappa(n_*^\alpha - j^\alpha)}, \quad n_* = \left\lceil (2\kappa)^{-1/\alpha} (\log n)^{1/\alpha} \right\rceil + 1. \quad (7)$$

В случае, когда параметры α , κ и r неизвестны, необходимо разработать процедуру выбора модели. Используется подход на основе точных оракульных неравенств для СКО. Для этого строится специальное дискретное параметрическое пространство $\mathcal{A}_\varepsilon$ и устанавливается

Теорема 1. *Существует $\varpi^* \in \mathcal{A}_\varepsilon$ такой, что процедура $S^* = \hat{S}_{\varpi^*}$ имеет минимальную СКО в классе всех оценок $(\hat{S}_{\varpi})_{\varpi \in \mathcal{A}_\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Далее в [3] предложена архитектура ИНС для автоматизации процедуры выбора модели. Для обучения ИНС построена база данных синтетических сигналов. Результаты были применены для оценивания, в том числе ЭКГ сигналов.

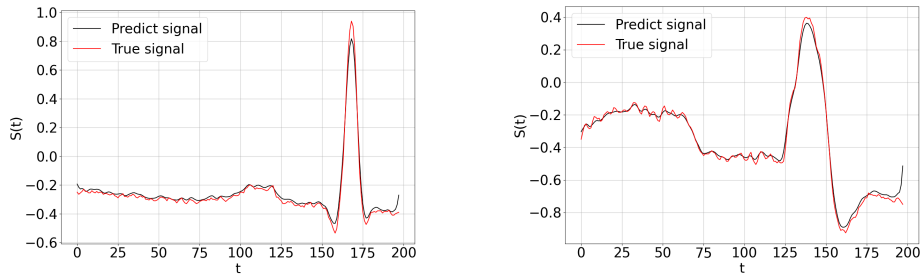


Рис. 1: ЭКГ сигналы и их оценки.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 24-11-00191.

Литература

1. Nikiforov N. I., Pergamenschikov S. M., Pchelintsev E. A. Super-efficient robust estimation in Lévy continuous time regression models from discrete data,

Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, № 85, 2023, 22–31.

2. *Pchelintsev E., Pergamenshchikov S. M., Povzun M. A.* Efficient estimation methods for non-Gaussian regression models in continuous time, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 74(1), 2022, 113–142.

3. *Kurdoshev Z. M., Pchelintsev E. A.* Model selection method based on the neural networks for signal processing, *Digital Signal Processing*, Vol. 173, 2026, Art. num. 105908.

Критерий хи-квадрат с выбором разбиения по наблюдениям

Хиль Е. В.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
г. Москва*

`elena.khil@math.msu.ru`

Критерий хи-квадрат является одним из наиболее востребованных критериев, различные его адаптации широко применяются в огромном количестве приложений (см., например, обзор [1]).

Статистика критерия хи-квадрат имеет вид

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i},$$

где k – количество возможных исходов, $p_1, \dots, p_k$ – вероятности этих исходов (при верной нулевой гипотезе), $\nu_1, \dots, \nu_k$ – количества соответствующих исходов, n – количество наблюдений (размер выборки).

Критерий хи-квадрат применяется также и для проверки гипотезы однородности m выборок, его статистика в этом случае имеет вид

$$T^o = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \frac{(\nu_{ij} - n_i \hat{p}_j)^2}{n_i \hat{p}_j}, \quad \hat{p}_j = \frac{\sum_{i=1}^m \nu_{ij}}{n}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где ν_{ij} – количество исходов типа j в i -й выборке, n_i – количество наблюдений в i -й выборке.

При использовании критерия хи-квадрат в случае непрерывного распределения нужно предварительно дискретизировать данные. Для этого используют разбиение действительной прямой (или носителя распределения) на k полуинтервалов точками $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = +\infty$ и переходят от исходных элементов выборки к номерам полуинтервалов, в которые они попали, $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$, $i = 1, \dots, k$, $F(x)$ – функция распределения элементов выборки при верной гипотезе.

Известно, что распределения статистик простого критерия хи-квадрат и критерия однородности сходятся к распределениям хи-квадрат с $k - 1$ и $(k - 1)(m - 1)$ степенями свободы соответственно, когда размер выборки n стремится к бесконечности. В работах [2] и [3] получены результаты о поведении статистик T и T^o критерия, если k растет с ростом числа наблюдений. Отметим, что для гипотезы однородности рассматривался только случай $m = 2$, кроме того, предполагалось, что в случае гипотезы однородности носитель распределений совпадает с отрезком $[0, 1]$.

Также отдельно отметим, что результаты об асимптотическом поведении распределения статистик T и T^o были получены только для детерминированных разбиений. Однако в случае проверки гипотезы однородности даже при верной нулевой гипотезе распределение элементов выборок неизвестно (даже носитель распределения в общем случае заранее не известен). В то же время разбиение должно быть выбрано так, чтобы в каждый полуинтервал попало достаточное количество наблюдений. Поэтому на практике обычно используют разбиения, зависящие от наблюдений (например, использующие выборочные квантили). В случае простой гипотезы разбиения, зависящие от данных, также представляют интерес.

Итак, пусть для каждого n задано случайное разбиение – величины

$$-\infty = a_{0,n} < a_{1,n}(\vec{Z}) < \dots < a_{k-1,n}(\vec{Z}) < a_{k,n} = +\infty,$$

где $\vec{Z}$ – выборка (объединенная в случае гипотезы однородности), а также неслучайное разбиение $-\infty = x_0 < x_{1,n} < \dots < x_{k-1,n} < x_k = +\infty$ (точки x_0 и x_k могут быть границами носителя распределения, если он ограничен). Обозначим

$$\begin{aligned} y_{j,n} &= F(x_{j,n}), \quad \tilde{y}_{j,n} = F(a_{j,n}(\vec{Z})), \quad j = 1, 2, \dots, k, \\ l(n) &= \min_{j=1, \dots, k} (y_{j,n} - y_{j-1,n}), \\ d(n) &= \max_{j=1, 2, \dots, k-1} \frac{\tilde{y}_{j,n} - y_{j,n}}{\min(y_{j,n} - y_{j-1,n}, y_{j+1,n} - y_{j,n})}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать только разбиения, для которых $l(n) > 0$, $d(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Этим условиям удовлетворяет, например, разбиение, использующее выборочные квантили: $a_{j,n}(\vec{Z}) = Z_{([n/k]j)}$, $y_{j,n} = [n/k]j$.

Теорема 1. Если $k(n) = o(n^{1/2}/\ln^2 n)$, $k(n)d(n)\ln^4 l(n) \rightarrow 0$, $1/l(n)$ растет не быстрее $n^{1/2}$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\Phi\left(\frac{T - k(n)}{\sqrt{2k(n)}}\right) \xrightarrow{d} R \sim R[0, 1], \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\Phi(x)$ – ф.р. стандартного нормального распределения, случайная величина R имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

В типичной ситуации, когда $d(n) \approx k(n)/\sqrt{n}$, достаточно потребовать, чтобы число ячеек росло как $k(n) = o(n^{1/4}/\ln^4 n)$, $n \rightarrow \infty$.

Для статистики критерия однородности T^o справедлива аналогична теорема с заменой $k(n)$ на произведение $k(n)m(n)$ (которое можно в некотором смысле интерпретировать как "общее число ячеек") и заменой n на $\min(n_1, \dots, n_m)$.

Литература

1. *Greenwood P. E., Nikulin M. S.* A guide to chi-squared testing. John Wiley & Sons, 1996. Т. 280.
2. *Ермаков М. С.* Асимптотическая минимаксность критериев хи-квадрат. Теория вероятн. и ее примен., 42, 1997, 668–695.
3. *Ермаков М. С.* Критерий хи-квадрат для проверки гипотезы однородности. Вероятность и статистика. 30, Зап. научн. сем. ПОМИ, 501, ПОМИ, СПб., 2021, 160–180.

О дополняемости случайных подпространств в пространствах операторов

Куница В. Н., Лыков К. В.

*Белорусский государственный университет,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск, Беларусь
vikakunica@gmail.com, alkv@list.ru*

В работе рассматриваются пространства операторов между пространствами последовательностей ℓ^p и ℓ^q . Стандартно через ℓ^p , $p \in [1, \infty)$ мы обозначаем банахово пространство последовательностей вида $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p},$$

через ℓ^∞ — банахово пространство всех ограниченных последовательностей с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_j |x_j|,$$

а через c_0 — замкнутое подпространство ℓ^∞ , состоящее из всех стремящихся к нулю последовательностей.

Через $\mathcal{M}$ обозначим линейное пространство всех бесконечных матриц вида $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty$ с естественными операциями сложения и умножения на число. Пусть X и Y — банаховы пространства последовательностей. Обозначим через $\mathcal{L}(X, Y)$ пространство всех линейных ограниченных операторов из X в Y , а через $\mathcal{M}(X, Y)$ множество матриц $A \in \mathcal{M}$, которые корректно определяют оператор из X в Y . Последнее означает, что для каждого

$x = (x_j) \in X$ выполняется следующее условие: для каждого натурального i сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j =: y_i,$$

а вектор $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in Y$. В таком случае мы полагаем $Ax = y$. Отметим, что в случае $X = \ell^p$ и $Y = \ell^q$ (и во многих других случаях) оператор A автоматически оказывается непрерывным, см. [1], поэтому $\mathcal{M}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Множество $\mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$ является банаховым пространством с операторной нормой:

$$\|A\|_{p,q} = \sup_{x \in \ell^p: \|x\|_p=1} \|Ax\|_q.$$

При $p < \infty$ имеет место изометрическое равенство $\mathcal{M}(\ell^p, \ell^q) = \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$, и, аналогично, $\mathcal{M}(c_0, \ell^q) = \mathcal{L}(c_0, \ell^q)$. Но $\mathcal{M}(\ell^\infty, \ell^q)$ является собственным подпространством пространства $\mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^q)$, и аналогичное справедливо для $\mathcal{M}(\ell^\infty, c_0)$.

В ряде задач из геометрии банаховых пространств, теории аппроксимации и др., возникает вопрос об ограниченности естественных проекторов в пространствах $\mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$. Под естественным проектором мы будем понимать отображение

$$P_S : \mathcal{M}(\ell^p, \ell^q) \rightarrow \mathcal{M}$$

вида

$$P_S(A) := (a_{ij}[(i, j) \in S])_{i,j=1}^{\infty},$$

где $S \subset \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots\}$ — заранее выбранное множество позиций в матрице, а через $[(i, j) \in S]$ мы обозначили индикатор события $(i, j) \in S$ (т.е. $[(i, j) \in S] = 1$ при $(i, j) \in S$, и $[(i, j) \in S] = 0$ при $(i, j) \notin S$, нотация Айверсона). Отметим, что если для заданного S и каждой матрицы $A \in \mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$ ее образ $P_S(A) \in \mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$, то оператор $P_S : \mathcal{M}(\ell^p, \ell^q) \rightarrow \mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$ автоматически будет ограниченным (это следует из общих теорем, см. [1]).

Теорема 1. *Образуем множество $S \subset \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots\}$ случайно: каждую пару (i, j) включим в множество S с вероятностью $1/2$ и независимо от других.*

Если $p = 1$ или $q = \infty$, то для каждого S оператор P_S ограниченно действует в пространстве $\mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$, и его норма равна единице. Это же справедливо для оператора P_S в пространствах $\mathcal{M}(\ell^1, c_0)$ и $\mathcal{M}(c_0, \ell^\infty)$.

Если $p > 1$ и $q < \infty$, то почти наверное оператор P_S не будет действовать из $\mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$ в $\mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$. Т.е. с вероятностью единица для случайно выбранного множества S найдется матрица $A \in \mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$ такая, что $P_S(A) \notin \mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$. Это же справедливо для пространств $\mathcal{M}(\ell^p, c_0)$ при $p > 1$ и $\mathcal{M}(c_0, \ell^q)$ при $q < \infty$.

Обозначим через E_{ij} матричную единицу, т.е. матрицу, у которой элемент $a_{ij} = 1$, а остальные элементы равны нулю. В теореме 1 речь идет

об (не)ограниченности естественного (канонического) проектора в $\mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$ на замкнутое подпространство $L_S \subset \mathcal{M}(\ell^p, \ell^q)$, порожденное множеством $\{E_{ij} : (i, j) \in S\}$. Неограниченность естественного проектора при $p > 1$ и $q < \infty$ не означает, что соответствующее подпространство L_S не будет дополняемым (для дополняемости достаточно, чтобы *какой-нибудь* проектор на L_S был ограничен). В силу того, что любое конечномерное подпространство дополняемо, из закона нуля и единицы получаем, что, если дополняемость подпространство L_S является событием (для случайно выбранного S , как в теореме 1), то либо подпространство L_S дополняемо почти наверное, либо наоборот, L_S почти наверное не дополняемо. Какой именно вариант реализуется в действительности для разных p и q , нам пока неизвестно.

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Национальной академии наук Беларуси в рамках государственной программы научных исследований "Конвергенция-2030", НИР 1.08.1, № ГР 20260285.

Литература

1. *Banaś J., Mursaleen M.* Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations, Springer New Delhi, 2014, 315 p.

Моменты случайных разбиений

Якубович Ю. В.

Санкт-Петербургский государственный экономический университет,

г. Санкт-Петербург

yakubovich.yuv@unecon.ru

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество разбиений целого числа n , то есть его представлений в виде $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell$ при некотором $\ell = \ell(\lambda)$ и целых $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell > 0$. Моментом разбиения λ порядка $p \in \mathbf{R}$ мы называем величину

$$N_p(\lambda) = \sum_{k=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_k^p.$$

Если $\lambda \in \mathcal{P}_n$, то $N_1(\lambda) = n$; $N_0(\lambda) = \ell(\lambda)$.

Рассмотрим на $\mathcal{P}_n$ равномерную вероятностную меру P^n . Случайные разбиения с равномерной мерой изучались начиная с работы [1], где, в частности, была доказана предельная теорема для $N_0(\lambda) = \ell(\lambda)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n \left\{ \lambda : \frac{\pi}{\sqrt{6n}} \ell(\lambda) - \frac{1}{2} \log n - \log \frac{\pi}{\sqrt{6}} \leq x \right\} = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Предельные распределения других моментов, насколько нам известно, систематически не изучались, однако в работе [3] рассматривались случайные

разбиения, в которых несколько целых моментов стремятся к бесконечности согласованным образом, обобщая равномерную меру, где $N_1(\lambda) = n \rightarrow \infty$.

Предельное распределение (1), известное как распределение Гумбеля, является бесконечно делимым. Оказывается, после надлежащей нормировки распределения моментов всегда сходятся к безгранично делимому распределению. При $p \geq 1/2$ таким распределением будет закон стандартной нормальной случайной величины $\mathcal{N}$. При $p < 1/2$ определим случайную величину

$$\mathcal{M}_p = \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1}(E_k - 1), \quad p < 1/2, \quad (2)$$

где E_k — независимые одинаково распределенные случайные величины со стандартным экспоненциальным распределением. В ряде (2) k -е слагаемое имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию k^{2p-2} , и при $p < 1/2$ ряд из дисперсий сходится, так что по теореме Колмогорова ряд (2) сходится п.н., и $\mathcal{M}_p$ корректно определена. Распределение $\mathcal{M}_p$ безгранично делимо и допускает представление типа Леви–Хинчина

$$\log \mathbf{E}[e^{-u\mathcal{M}_p}] = \int_0^{\infty} (e^{-ux} - 1 + ux)f_p(x) dx \quad (u > -1),$$

то есть его мера Леви абсолютно непрерывна и имеет плотность

$$f_p(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-xk^{1-p}}, \quad x > 0.$$

Удается доказать следующий результат.

Теорема 1. (i) Если $1/2 \leq p < \infty$ и $p \neq 1$, то, когда распределение N_p задается мерой P^n ,

$$\frac{N_p - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $a_n = \Gamma(p+1)\zeta(p+1)\zeta(2)^{-(p+1)/2}n^{(p+1)/2}$,

$$b_n = \begin{cases} \left(\Gamma(2p+1)\zeta(2p) - \frac{\Gamma(p+2)^2\zeta(p+1)^2}{2\zeta(2)} \right)^{1/2} \left(\frac{6n}{\pi^2} \right)^{p/2+1/4}, & p > 1/2, \\ \pi^{-1}\sqrt{3n \log n}, & p = 1/2. \end{cases}$$

(ii) Если $-\infty < p < 1/2$ и распределение N_p задается мерой P^n , то

$$b_n^{-1}N_p - a_n \xrightarrow{d} \mathcal{M}_p, \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$a_n = \begin{cases} \Gamma(p+1)\zeta(p+1)6^{p/2}\pi^{-p}n^{p/2} + \zeta(1-p), & p > 0, \\ \frac{1}{2} \log n + \gamma + \log(\sqrt{6}/\pi), & p = 0, \\ \zeta(1-p), & p < 0; \end{cases} \quad b_n = \frac{\sqrt{6n}}{\pi}.$$

Доказательство базируется на предложенной в [2] идее рассмотреть смеси мер P^n , параметризованные вещественным параметром $x \in (0, 1)$, для которых аналогичные результаты устанавливаются несложно. Техника восстановления результатов для P^n различается для случаев $p > 1/2$ и $p \leq 1/2$. В первом случае используется частичное обращение характеристической функции для доказательства нормального предела. Во втором случае удастся применить результат [4] о совпадении пределов для мер P^n с пределами для их смесей при подходящем выборе параметра $x = x(n)$.

Литература

1. Erdős, P., Lehner, J. The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer, Duke Math. J., **8**, 1941, 335–345.
2. Fristedt, B. The structure of random partitions of large integers, Trans. Amer. Math. Soc., **337**, no. 2, 1993, 703–735.
3. McKinley, G., Michelen, M., Perkins, W. Maximum entropy and integer partitions, Comb. Theory, **3**, no. 1, 2023, paper #7.
4. Yakubovich, Y. Growing integer partitions with uniform marginals and the equivalence of partition ensembles, Adv. Math., **457**, 2024, 109908.

ZRP на динамическом графе: совместная (η, I) -динамика и обратимая каноническая мера

Калимулина Э. Ю., Есин А. А.

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
г. Москва

elmira.yu.k@gmail.com

Рассматривается консервативная модель транспорта частиц по сети с независимыми марковскими отказами узлов, в которой ребро открыто, лишь когда оба его конца активны.

Пусть $G_0 = (V, E)$ – конечный связный неориентированный граф, $|V| = N \geq 2$, k_i – степень вершины $i \in V$. Скорости процесса нулевого радиуса (ZRP) задаются функцией $u: \mathbb{Z}_+ \rightarrow [0, \infty)$, $u(0) = 0$, $u(n) > 0$ при $n \geq 1$; положим $p(0) := 1$, $p(m) := \prod_{n=1}^m u(n)^{-1}$ при $m \geq 1$. На каждой вершине задана независимая марковская цепь с двумя состояниями $I_v(t) \in \{0, 1\}$ со скоростями $\alpha > 0$ ($1 \rightarrow 0$) и $\beta > 0$ ($0 \rightarrow 1$); $a := \beta/(\alpha + \beta)$, и $\mu_a := \bigotimes_{v \in V} \text{Bernoulli}(a)$ – стационарная мера, обратимая в силу $a\alpha = (1 - a)\beta$. Случайный подграф $G(t) := (V, \{\{i, j\} \in E : I_i(t)I_j(t) = 1\})$ однозначно

определяется по $I(t)$. Совместный марковский процесс $(\eta(t), I(t))$ на $\mathbb{Z}_+^V \times \{0, 1\}^V$ имеет генератор

$$\mathcal{L}^{\text{tot}} f(\eta, I) = \sum_{i \in V} \sum_{j \sim i} I_i I_j \frac{u(\eta_i)}{k_i} [f(\eta^{i \rightarrow j}, I) - f(\eta, I)] + \mathcal{L}_I f,$$

где $\eta^{i \rightarrow j}$ – конфигурация после перемещения частицы из i в j (при $\eta_i = 0$ слагаемое равно нулю в силу $u(0) = 0$); $\mathcal{L}_I$ – генератор $|V|$ независимых цепей с двумя состояниями.

Теорема 1. Пусть $\{q_i\}_{i \in V}$ – положительные веса; $\{A_{ij}(I)\}_{i, j \in V}$ – симметричные проводимости [1]: $A_{ij}(I) = A_{ji}(I) \geq 0$, $A_{ij} \equiv 0$ при $\{i, j\} \notin E$; $\mathcal{L}_I$ – генератор неприводимой марковской цепи на $\{0, 1\}^V$ с обратимой стационарной мерой μ , не зависящий от η . Тогда для генератора

$$\tilde{\mathcal{L}} f(\eta, I) = \sum_{i, j \in V} A_{ij}(I) \frac{u(\eta_i)}{q_i} [f(\eta^{i \rightarrow j}, I) - f(\eta, I)] + \mathcal{L}_I f$$

и любого $M \in \mathbb{Z}_+$ каноническая мера

$$\pi_{N, M}(\eta, I) = \frac{1}{Z_{N, M}} \mu(I) \prod_{i \in V} p(\eta_i) q_i^{\eta_i} \cdot \mathbf{1} \left\{ \sum_{i \in V} \eta_i = M \right\}$$

обратима относительно $\tilde{\mathcal{L}}$ и единственна на секторе $\{\sum_i \eta_i = M\}$ при условии неприводимости совместной цепи. В основном примере $q_i = k_i$ (ненормированная инвариантная мера простого случайного блуждания на G_0), $A_{ij}(I) = I_i I_j \mathbf{1}_{\{i \sim j\}}$ и $\mu = \mu_a$; совместная цепь неприводима при связном G_0 , $N \geq 2$ и $\alpha, \beta > 0$, а обратимая мера принимает явный вид $\pi_{N, M}(\eta, I) \propto \prod_i p(\eta_i) k_i^{\eta_i} \cdot \prod_i a^{I_i} (1 - a)^{1 - I_i} \cdot \mathbf{1}_{\{\sum_i \eta_i = M\}}$.

Литература

1. Doyle P. G., Snell J. L. Random Walks and Electric Networks. Washington, DC: Math. Assoc. America, 1984. (Carus Math. Monogr., V. 22.)

Спектр обобщенных графов Джонсона

Кошелев М. М.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский физико-технический институт, г. Москва
mkoshelev99@gmail.com

Настоящая работа посвящена исследованию спектра обобщенных графов Джонсона, также известных как графы $G(n, r, s)$. Дадим соответствующее определение.

Определение 1. Обобщенным графом Джонсона $G(n, r, s)$ называется граф

$$G = (V, E), \quad V = \binom{[n]}{r}, \quad E = \{(A, B) \mid |A \cap B| = s\}.$$

Иными словами, множество вершин такого графа есть множество всевозможных r -элементных подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, а ребра проводятся между множествами, пересекающимися по s элементам.

Обобщенные графы Джонсона играют огромную роль в современной экстремальной комбинаторике и комбинаторной геометрии (см. [1, 2, 3, 4N]). В частности, именно на основе графов $G(n, r, s)$ и их аналогов были получены наилучшие оценки в задаче Нелсона-Эрдеша-Хадвигера, а также построены некоторые контрпримеры к гипотезе Борсука. Кроме того, обобщенные графы Джонсона определенного вида долгое время являлись наибольшими известными рамсеевскими графами (то есть графами, у которых и число независимости, и кликовое число ограничены некоторыми константами).

Целью данной работы является исследование спектральных свойств графов $G(n, r, s)$, а именно, величины $\lambda(G(n, r, s)) = \max_{2 \leq i \leq \binom{n}{r}} |\lambda_i|$, где $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ — собственные значения матрицы смежности графа $G(n, r, s)$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, а $f_r(n)$ и $f_s(n)$ таковы, что $f_s(n) = o(n)$, $f_r(n) = o(n)$. Тогда выполняется следующее соотношение.

$$\lambda(G(n, \alpha n + f_r(n), \alpha^2 n + f_s(n))) = O\left(\frac{\max\{1, |f_s(n) - 2\alpha f_r(n)|, f_r^2(n)/n\}}{n} d(G(n, \alpha n + f_r(n), \alpha^2 n + f_s(n)))\right),$$

где $d(G(n, r, s)) = \binom{r}{s} \binom{n-r}{r-s}$ — степень вершин графа $G(n, r, s)$.

При помощи теоремы 1 удалось также получить результат, связанный с пороговой вероятностью возникновения гигантской компоненты в случайном подграфе графа $G(n, r, s)$. Дадим вспомогательное определение.

Определение 2. Случайный граф $G_p(n, r, s)$ — граф, полученный из графа $G(n, r, s)$ удалением каждого ребра независимо от остальных с вероятностью $1 - p$.

Используя результат теоремы 1, нам удалось доказать следующее утверждение о размере компонент связности в графе $G_p(n, r, s)$.

Теорема 2. Пусть последовательности целых чисел r_n, s_n таковы, что $s_n \sim \alpha^2 n$, $r_n \sim \alpha n$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$. Обозначим $d_n = \binom{r_n}{s_n} \binom{n-r_n}{r_n-s_n}$. Тогда

1. При $\beta < 1$ с вероятностью, стремящейся к 1, все компоненты связности графа $G_{\beta/d_n}(n, r_n, s_n)$ имеют размер $O(\log \binom{n}{r})$.
2. При $\beta > 1$ с вероятностью, стремящейся к 1, существует компонента связности графа $G_{\beta/d_n}(n, r_n, s_n)$ имеющая размер $\Omega(\binom{n}{r})$.

Литература

1. Frankl P., Wilson R., “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, 1 (1981), 357–368.
2. Kahn J., Kalai G. “A counterexample to Borsuk’s conjecture”, *Bulletin (new series) of the AMS* 29:1.29 (1993), 60–62.
3. MacWilliams F. J., Sloane N. J. A. “The theory of error-correcting codes”, North-Holland, Amsterdam, 1977.
4. Raigorodskii A. M. “The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary”, *Mathematical Intelligencer* 26:3 (2004), 4–12.

Плотность по вариации и класс рационально-безгранично делимых распределений

Хартов А. А.

*Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Смоленский государственный университет,
Университет ИТМО,
г. Москва, г. Смоленск, г. Санкт-Петербург
alexeykhartov@gmail.com, khartov.a@iitp.ru*

Пусть на числовой прямой $\mathbb{R}$ задана функция распределения F с характеристической функцией f , т.е.

$$f(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Мы называем F *рационально-безгранично делимой*, если существуют безгранично делимые функции распределения F_1 и F_2 такие, что $F_1 = F * F_2$. Данное равенство переписывается в виде $f(t) = f_1(t)/f_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с характеристическими функциями f_1 и f_2 , соответствующими F_1 and F_2 . Пусть $\mathcal{Q}$ обозначает класс всех рационально-безгранично делимых функций распределений на $\mathbb{R}$.

Несложно понять, что $F \in \mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда f допускает представление типа Леви-Хинчина:

$$f(t) = \exp \left\{ it\gamma + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - it \sin(x)) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

с параметром сдвига $\gamma \in \mathbb{R}$ и спектральной функцией $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, имеющей ограниченную вариацию на числовой прямой, при этом G может быть немонотонной. Предполагается, что функция G непрерывна справа в каждой точке и $G(-\infty) = 0$. Как известно, спектральная пара (γ, G) определяется однозначно по F . Частный случай монотонной и ограниченной G соответствует безгранично делимой F .

В работе [1] было показано, что класс $\mathcal{Q}$ всюду плотен в смысле слабой сходимости в семействе $\mathcal{F}$ всех функций распределения на $\mathbb{R}$. Этот факт подчеркивает существенную разницу между $\mathcal{Q}$ и классом всех безгранично делимых функций распределения, для которого это свойство, как известно, не имеет места. Сохранится ли указанное свойство плотности класса $\mathcal{Q}$, если заменить в нем слабую сходимость на более сильную *сходимость по вариации*? Ответ на данный вопрос уже не так однозначен. В докладе мы приведем весьма неожиданные «положительные» и «отрицательные» результаты, которые удалось получить в данном направлении в рамках исследования [2].

Литература

1. Lindner A., Pan L., Sato K. On quasi-infinitely divisible distributions, Trans. Amer. Math. Soc. 370 (2018), 8483–8520.
2. Khartov A. A. Denseness in total variation and the class of rational-infinitely divisible distributions, (2025), <https://arxiv.org/abs/2510.24219>

Предельные теоремы для момента максимума случайного блуждания, достигающего различных фиксированных уровней

Анохина М. А.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва
anokhina.mary1@gmail.com

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (сл.в.) с нулевым средним и конечной положительной дисперсией. Для этого блуждания хорошо известен закон арксинуса:

$$\mathbf{P} \left(\frac{\tau_M}{n} \leq x \right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in [0, 1],$$

где τ_M — момент первого достижения максимума блужданием S_n .

Будем говорить, что X — решетчатая случайная величина, если существуют такие $d > 0$ и $a \in \mathbb{R}$, что $\mathbf{P}(X \in a + d\mathbb{Z}) = 1$. Величины, не являющиеся решетчатыми, называются нерешетчатыми. При этом будем называть

X арифметической сл.в., если она принимает только целые значения и при этом не существует таких $d > 1$ и $a \in \mathbb{R}$, что $\mathbf{P}(X \in a + d\mathbb{Z}) = 1$.

В арифметическом случае нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \leq x \mid M_n = k\right), \quad x \in [0, 1],$$

где $M_n = S_{\tau_M}$, $k \in \mathbb{N}$. Предполагается, что k может зависеть от n . В нерешенном случае рассматривается аналогичная задача для вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \leq x \mid M_n \in [z, z + \Delta)\right), \quad x \in [0, 1],$$

где $z \in \mathbb{R}^+$, $\Delta > 0$, z может зависеть от n .

В докладе будут описаны результаты, полученные автором, для широкого диапазона изменения параметра k (или, соответственно, z): $k = o(\sqrt{n})$ и $k \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ (малые уклонения), $k/n^\alpha \rightarrow y > 0$, $n \rightarrow \infty$, $\alpha \in (1/2, 1)$ (умеренные уклонения), $k/\sqrt{n} \rightarrow y > 0$, $n \rightarrow \infty$ (нормальные уклонения). Анализ малых уклонений опубликован в работе [1], умеренных — в работе [2]. Работа, посвященная случаю нормальных уклонений, на данный момент готовится к печати.

Отметим, что работа тесно связана с локальными предельными теоремами для условно положительных блужданий, которым в последние десятилетия посвящен ряд важных работ (см., например, [3], [4]). В ряде случаев мы пользуемся известными результатами для максимума случайного блуждания ([5], [6]), а в ряде получаем такие результаты самостоятельно.

Данные результаты находят приложение в теории ветвящихся процессов. Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$ — н.о.р. сл.в., $\{f_n(s), n \in \mathbb{N}\}$ — семейство производящих функций, $\{X_{i,j}, i, j \in \mathbb{N}\}$ — семейство неотрицательных целочисленных случайных величин. Для фиксированного η сл.в. $X_{i,j}$ являются н.о.р. для каждого i , $X_{i,j} \sim f_{i,j}$. Тогда будем называть ВПСС последовательность сл.в., заданных соотношениями:

$$Z_0 = 1, \quad Z_n = X_{n+1,1} + \dots + X_{n+1,Z_n}, \quad n \geq 0.$$

Пусть $\xi_i = \ln f'_{\eta_i}(1)$. Тогда сопровождающее случайное блуждание для $\{Z_n\}$:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad n > 0.$$

Нами получено асимптотическое поведение вероятности невырождения ветвящегося процесса в случайной среде с геометрическим числом распределения потомков (ВПССГ) при условии, что минимум сопровождающего случайного блуждания равен заданному параметру k , принадлежащему зоне малых или нормальных уклонений.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00037, <https://rscf.ru/en/project/24-11-00037/> в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Литература

1. Анохина М. А. Закон арксинуса для случайного блуждания с нулевым сносом и с низким максимумом. Теория вероятностей и ее применения. 2025. № 70(2), 383—391.
2. Анохина М. А. Предельная теорема для момента максимума случайного блуждания, достигающего фиксированного уровня, лежащего в зоне умеренно больших уклонений. Матем. заметки. 2024. № 115(4), 502—520.
3. Vatutin V. A., Wachtel V. Local probabilities for random walks conditioned to stay positive. Probability Theory Related Fields. 2009. № 143, 177—217.
4. Caravenna F. A local limit theorem for random walks conditioned to stay positive. Probability Theory Related Fields. 2005. № 133, 508—530.
5. Wachtel V. Local limit theorem for the maximum of asymptotically stable random walks. Probability Theory Related Fields. 2012. № 152, 407—424.
6. Нагаев С. В., Энпель М. С. О локальной предельной теореме для максимума сумм независимых случайных величин. Теория вероятн. и ее примен. 1976. № 2(21). 393—395.

RQ–RQ процессы в задачах согласия и однородности

Буялова У. И.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
г. Москва
buyalova@yandex.ru

Рассматриваются критерии проверки гипотез согласия и однородности, основанные на сравнении распределений после взаимных квантильных преобразований. Подход приводит к введению эмпирических RQ–RQ процессов, для которых изучаются предельные распределения.

Для построения критериев проверки гипотез согласия и однородности вводятся следующие процессы. В задаче проверки гипотезы согласия рассматривается процесс

$$D_{n,1}(x) = \hat{F}_n(F_0^{-1}(x)) - F_0(\hat{F}_n^{-1}(x)), \quad x \in [0, 1].$$

В задаче проверки двухвыборочной гипотезы однородности рассматривается процесс

$$D_{n_1, n_2, 2}(x) = \hat{F}_{n_1}(\hat{G}_{n_2}^{-1}(x)) - \hat{G}_{n_2}(\hat{F}_{n_1}^{-1}(x)), \quad x \in [0, 1].$$

Наконец, в задаче проверки однородности k выборок для каждого фиксированного $j \in \{1, \dots, k\}$ рассматривается процесс

$$D_{n_j, n, 3, j}(x) = \hat{F}_{n_j, j}(\hat{H}_n^{-1}(x)) - \hat{H}_n(\hat{F}_{n_j, j}^{-1}(x)), \quad x \in [0, 1],$$

$$\widehat{H}_n(x) = \sum_{r=1}^k \frac{n_r}{n} \widehat{F}_{n_r, r}(x), \quad n = n_1 + \dots + n_k.$$

Гипотеза согласия. Пусть наблюдается выборка $X_1, \dots, X_n \sim F$ и проверяется гипотеза

$$H_0 : X \sim F_0.$$

Теорема 1. Пусть F и F_0 непрерывны. Тогда при верной гипотезе согласия $H_0 : F = F_0$ выполняется сходимость

$$\frac{1}{2} \sqrt{n} D_{n,1}(x) \xrightarrow{a.s.} W_x^0, \quad x \in [0, 1], \quad n \rightarrow \infty,$$

где W_x^0 — стандартный броуновский мост.

Следствие 1. При $n \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$\frac{1}{2} \sqrt{n} \sup_{x \in [0,1]} |D_{n,1}(x)| \xrightarrow{d} \sup_{x \in [0,1]} |W_x^0|, \quad \frac{n}{4} \int_0^1 D_{n,1}^2(x) dx \xrightarrow{d} \int_0^1 (W_t^0)^2 dt.$$

То есть предельными распределениями рассматриваемых величин являются распределения Колмогорова и Крамера–фон Мизеса соответственно.

Гипотеза однородности. Перейдём теперь к задаче проверки двухвыборочной гипотезы однородности.

Теорема 2. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны и $n_1/(n_1 + n_2) \rightarrow p$, при $n_1, n_2 \rightarrow \infty$, $0 < p < 1$. Тогда при верной гипотезе однородности $H_0 : F = G$ имеет место сходимость

$$\sqrt{\frac{n_1 n_2}{4(n_1 + n_2)}} D_{n_1, n_2, 2}(x) \xrightarrow{a.s.} W_x^0, \quad x \in [0, 1], \quad n_1, n_2 \rightarrow \infty,$$

где W_x^0 — стандартный броуновский мост.

Следствие 2. Положим $\lambda = n_1 n_2 / (n_1 + n_2)$. Тогда при $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$\frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \sup_{[0,1]} |D_{n_1, n_2, 2}(x)| \xrightarrow{d} \sup_{[0,1]} |W_x^0|, \quad \frac{1}{4} \lambda \int_0^1 D_{n_1, n_2, 2}^2(x) dx \xrightarrow{d} \int_0^1 (W_t^0)^2 dt.$$

Проверка однородности k выборок. Рассмотрим задачу проверки однородности нескольких выборок.

Пусть заданы независимые выборки $X_i^{(r)} \sim F_r$, $i = 1, \dots, n_r$, $r = 1, \dots, k$, где F_r — непрерывные функции распределения.

Обозначим $n = \sum_{r=1}^k n_r$, $a_j = n_j/n$, $j = 1, \dots, k$, и пусть $a_j \rightarrow p_j \in (0, 1)$, $\sum_{j=1}^k p_j = 1$, $\sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq k} |a_j - p_j| \rightarrow 0$.

Пусть справедлива гипотеза однородности $H_0 : F_1 = \dots = F_k = F$. Введем обозначения

$$\mathbf{D}_n(x) := (D_{n_1, n, 3, 1}(x), \dots, D_{n_k, n, 3, k}(x))^\top, \quad x \in [0, 1],$$

$$\mathbf{W}^0(x) := (W_1^0(x), \dots, W_k^0(x))^\top,$$

где $W_1^0, \dots, W_k^0$ — независимые стандартные броуновские мосты.

Положим

$$\mathbf{p} := (\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k})^\top, \quad B := I - \mathbf{p}\mathbf{p}^\top.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия выше и верна гипотеза H_0 . Тогда имеет место сходимость

$$\text{diag}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_k}) \mathbf{D}_n(x) \xrightarrow{a.s.} 2B \mathbf{W}^0(x), \quad x \in [0, 1], \quad n \rightarrow \infty.$$

Литература

1. *Smirnov N.* Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. In: *Annals of Mathematical Statistics*. 1948, Vol. 19, 279–281.
2. *Anderson T. W.* On the Distribution of the Two-Sample Cramer-von Mises Criterion. *The Annals of Mathematical Statistics*, Sep., 1962, Vol. 33, No. 3 (Sep., 1962), pp. 1148–1159.
3. *Shorack G. R., Wellner J. A.* Empirical processes with applications to statistics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

Разработка и анализ метода генерации случайных связных графов

Чиняев Б. Б.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
г. Москва

bchinyaev.msu@gmail.com

В докладе рассматривается задача точной генерации случайных связных графов в модели Эрдёша–Реньи [1,2]. Пусть $G(n, p)$ — случайный граф с множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$, в котором каждое из $C_n^2 = n(n-1)/2$ возможных рёбер проводится независимо с вероятностью p . Для графа g через $E(g)$ обозначим множество его рёбер. Требуется построить алгоритм, генерирующий граф с условным распределением

$$\mathbf{P}_{G(n,p)}(g \mid g \text{ связен}) = \frac{\mathbf{1}_{\{g \text{ связен}\}} p^{|E(g)|} (1-p)^{C_n^2 - |E(g)|}}{P_n(p)},$$

где $P_n(p)$ — вероятность связности графа $G(n, p)$.

В разреженном режиме $p = c/n$ стандартный метод принятия–отвержения является неэффективным, поскольку вероятность связности экспоненциально мала по n . В частности, при фиксированном $c > 0$ имеет место следующее асимптотическое соотношение [3,4]:

$$P_n(c/n) = \left(1 - \frac{ce^{-c}}{1 - e^{-c}}\right) \left(1 - \left(1 - \frac{c}{n}\right)^n\right)^n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому возникает задача построения прямого метода генерации условного распределения, не сводящегося к многократной проверке связности независимо сгенерированных графов.

Предлагаемый подход основан на связи процесса обхода графа с неоднородным пуассоновским блужданием [5,6]. Пусть W_t обозначает число новых активных вершин на шаге t стандартного процесса обхода графа $G(n, p)$. Тогда связность графа эквивалентна условиям

$$\sum_{t=1}^k W_t \geq k, \quad 0 < k < n, \quad \sum_{t=1}^n W_t = n - 1.$$

Пусть X_t , $1 \leq t \leq n$, — независимые случайные величины такие, что

$$X_t \sim \text{Poiss}(\lambda_t), \quad \lambda_t = \frac{np}{1 - (1-p)^n} (1-p)^{t-1},$$

и пусть

$$S_k = \sum_{t=1}^k (X_t - 1).$$

Лемма 1. Вероятность связности графа $G(n, p)$ представляется в виде

$$P_n(p) = (1 - (1-p)^n)^{n-1} \mathbf{P}(S_k \geq 0, \quad 0 < k < n \mid S_n = -1).$$

Кроме того, условное распределение траектории процесса обхода связного графа $(W_1, \dots, W_n)$ совпадает с распределением $(X_1, \dots, X_n)$ при условии

$$S_k \geq 0, \quad 0 < k < n, \quad S_n = -1.$$

На основе данной леммы строится точный алгоритм генерации. Сначала генерируется траектория неоднородного пуассоновского блуждания, удовлетворяющая указанным условиям. Затем по этой траектории восстанавливается дерево обхода, обеспечивающее связность графа, после чего оставшиеся допустимые рёбра добавляются независимо с исходной вероятностью p .

В докладе будет показано, что полученный алгоритм порождает именно распределение $G(n, p)$ при условии связности. Кроме того, при $p = c/n$ и фиксированном $c > 0$ вероятность положительности соответствующего пуассоновского блуждания, условленного на $S_n = -1$, имеет ненулевой предел [4]:

$$\mathbf{P}(S_k \geq 0, \quad 0 < k < n \mid S_n = -1) \rightarrow (1 - e^{-c}) \left(1 - \frac{ce^{-c}}{1 - e^{-c}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что среднее число попыток при генерации допустимой траектории остаётся ограниченным при $n \rightarrow \infty$, а ожидаемая сложность алгоритма в разреженном режиме составляет $O(n)$.

Также будет рассмотрено распространение метода на модель $G(n, M)$. Поскольку условное распределение $G(n, p)$ при фиксированном числе рёбер M является равномерным на множестве всех графов с n вершинами и M рёбрами, дополнительный отбор по условию $|E(G)| = M$ приводит к точной генерации связных графов в модели $G(n, M)$ [5].

Литература

1. Erdős P., Rényi A. On random graphs I, Publ. Math. Debrecen, 6, 1959, 290–297.
2. Райгородский А. М. Модели случайных графов и их применения, Труды Московского физико-технического института, 2(4), 2010.
3. Степанов В. Е. О вероятности связности случайного графа $G_m(t)$, Теория вероятн. и её примен., 15(1), 1970, 56–68.
4. Чиняев Б. Б., Шкляев А. В. Об асимптотике вероятности связности графов Эрдёша–Реньи, Теория вероятностей и её примен., 2025.
5. Chinyayev B. A Method for Generating Connected Erdős–Rényi Random Graphs, arXiv preprint arXiv:2504.05907, 2025.
6. van der Hofstad R., Spencer J. Counting connected graphs asymptotically, European J. Combin., 27(8), 2006, 1294–1320.

Предельные теоремы для максимумов непрерывных преобразований гауссовских стационарных процессов с дискретным временем

Савич А. В.

Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург
alexander.savich17@gmail.com

В докладе рассматривается стационарная гауссовская последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ с корреляционной функцией r_n , а также последовательность её непрерывных преобразований

$$\xi_n = f(X_n),$$

где $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая некоторым условиям. Исследуется асимптотическое поведение максимумов

$$M_n = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$$

при трёх режимах зависимости исходного процесса.

В случае слабой зависимости получена

Теорема 1. Пусть $r_n \ln n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq c_n x + d_n) = H(x),$$

где $H(x)$ — соответствующая функция из теоремы Гнеденко, а c_n, d_n — нормировочные коэффициенты из независимого случая.

В режиме средней зависимости верна

Теорема 2. Пусть $r_n \ln n \rightarrow \gamma \in (0, \infty)$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq c_n x + d_n) = \int_{-\infty}^{\infty} (2\gamma)^{-\frac{1}{2}} H(x)^{e^t} \varphi\left((2\gamma)^{-\frac{1}{2}}(t + \gamma)\right) dt.$$

где $H(x)$ — соответствующая функция из теоремы Гнеденко, а c_n, d_n — нормировочные коэффициенты из независимого случая.

Таким образом предельное распределение зависит от параметра γ и описывается как смесь классического экстремального закона с нормальным распределением.

В случае сильной зависимости наблюдается существенная разница между поведением гауссовских величин, отображённых в области притяжения Фреше и Гумбеля, а именно:

Теорема 3. Пусть $f(X_1)$ принадлежит области притяжения распределения Фреше, $r_n \rightarrow 0$, $r_n \ln n \rightarrow \infty$ монотонно при $n \rightarrow \infty$. Тогда не существует линейной нормировки максимумов M_n , приводящей к нетривиальному предельному распределению.

Наконец, когда ξ_i принадлежат классу распределений вейбулловского типа имеем:

Теорема 4. Пусть $r_n \rightarrow 0$, $r_n \ln n \rightarrow \infty$, монотонно при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \rightarrow \Phi,$$

где Φ — функция распределения стандартного нормального закона.

Таким образом, характер предельного поведения максимумов определяется как скоростью убывания корреляции гауссовского процесса, так и хвостовыми свойствами распределения преобразования $f(X_1)$.

Литература

1. Berman S. Limit theorems for the maximum term in stationary sequences, The Annals of Mathematical Statistics, 35(2), 1964, pp. 502-515.
2. Mittal Y., Ylvisaker D. Limit distributions for the maxima of stationary Gaussian processes, Stochastic Processes and their Applications, 3, 1975, pp. 1-18.

3. *Алексеев И. А., Питербарг В. И., Савич А. В.* Предельная теорема для зависимых гауссовских копул, Зап. научн. сем. ПОМИ, 535, 2024, стр. 5–23.

4. *Савич А. В.* Предельная теорема для максимумов функций гауссовских случайных величин с сильной зависимостью, Зап. научн. сем. ПОМИ, 544, 2025, стр. 295–313.

5. *Савич А. В.* Предельная теорема для максимумов функций гауссовских процессов с логарифмическим убыванием корреляции, Теория вероятн. и ее примен., 71:1, 2026, стр. 39–64.

Об одной задаче аппроксимации многопараметрических функций

Лимар И. А.

Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург
ivan.limar95@gmail.com

В данном докладе рассматривается вероятностный подход к анализу информационной сложности многопараметрической задачи аппроксимации функций из гильбертова пространства с квадратичным экспоненциальным воспроизводящим ядром. Приведём формальную постановку задачи.

Пусть APP_d – вложение из гильбертова пространства $\mathcal{H}_d$ с квадратичным экспоненциальным (гауссовским) ядром

$$\mathcal{K}_d(s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_d) = \prod_{j=1}^d \exp\left(-\gamma_j^2 (s_j - t_j)^2\right), \quad s_j, t_j \in \mathbb{R},$$

в $L_{2,d}$ – интегрируемые с квадратом вещественнозначные функции d переменных относительно центрированной гауссовской меры с диагональной матрицей ковариаций (дисперсии равняются 1/2).

Формально $\text{APP}_d f = f$, однако функция f не может быть введена в современные вычислительные системы, поэтому мы будем искать аппроксимации, использующие конечное количество непрерывных линейных функционалов от исходной функции f . Обозначим за $\mathcal{A}_{d,n}$ класс аппроксимирующих алгоритмов, использующих n линейных непрерывных функционалов от исходной функции. Оптимальной ошибкой алгоритма ранга n назовём величину

$$e(d, n) = \inf_{A_{d,n} \in \mathcal{A}_{d,n}} \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_d} \leq 1} \|\text{APP}_d f - A_{d,n} f\|_{L_{2,d}}.$$

Кроме того, рассмотрим начальную ошибку $e(d, 0)$:

$$e(d, 0) = \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_d} \leq 1} \|f\|_{L_{2,d}},$$

которую можно рассматривать как ошибку «константного» алгоритма, учитывающую параметрическую размерность d . Информационной сложностью (в минимаксной постановке) называется величина

$$n(d, \varepsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} : e(d, n) \leq \varepsilon e(d, 0)\},$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ – порог ошибки. Мы исследуем асимптотическое поведение данной величины при сколь угодно малом ε и $d \rightarrow \infty$.

Известно, что $n(d, \varepsilon)$ может быть выражена через спектральные характеристики интегрального оператора I_d с ядром $\mathcal{K}_d$ (см. [1]):

$$n(d, \varepsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} : \lambda_{d,n+1} \leq \varepsilon \lambda_{d,1}\},$$

где $\lambda_{d,m}$ – m -е в порядке убывания собственное число оператора I_d , причём оно представляется в виде (см. [2]):

$$\lambda_{d,m} = \prod_{j=1}^d (1 - \omega_j) \omega_j^{k_j},$$

с некоторыми неотрицательными целыми k_j , где

$$\omega_j := \frac{2\gamma_j^2}{1 + 2\gamma_j + \sqrt{1 + 4\gamma_j^2}}.$$

В силу мультипликативной структуры собственных чисел величина $n(d, \varepsilon)$ может быть записана в вероятностной форме:

$$n(d, \varepsilon) = \exp\left(\sum_{j=1}^d |\ln(1 - \omega_j)|\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^d U_j\right) \mathbf{1}\left(\sum_{j=1}^d U_j < |\ln \varepsilon^2|\right)\right],$$

где U_j , $j \in \mathbb{N}$, – независимые случайные величины, вероятностное распределение которых задаётся в виде

$$\mathbb{P}(U_j = k | \ln \omega_j) = \omega_j^k (1 - \omega_j), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Таким образом, задачу анализа величины информационной сложности $n(d, \varepsilon)$ при $d \rightarrow \infty$ можно свести к анализу предельных распределений для сумм $\sum_{j=1}^d U_j$. В частности, отметим следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\omega_j = \omega + q_j$, где $q_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, $\omega \in (0, 1)$, причём $\ln d \sum_{j=1}^d |q_j| = o(d^r)$ при $d \rightarrow \infty$, где $r = |\ln \max \omega_j| / |\ln \min \omega_j|$. Тогда при любом $\varepsilon \in (0, \sqrt{\omega})$ справедлива асимптотика

$$\ln n(d, \varepsilon) = \frac{|\ln \varepsilon^2|}{|\ln \omega|} \ln d + o(\ln d), \quad d \rightarrow \infty.$$

Литература

1. Novak E., Woźniakowski H. Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information, EMS, Zürich, 2008.
2. Rasmussen C. E., Williams C. Gaussian Processes for Machine Learning, MIT Press, 2006.

Аппроксимация неоднородных тензорных произведений высокой размерности процессов Орнштейна–Уленбека

Ершов А. Р.

Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург
aleksandr.ershov@itmo.ru

Рассматривается гауссовское случайное поле $U_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, где $d \in \mathbb{N}$, с нулевым средним и ковариационной функцией следующего вида:

$$K_{U_d}(t, s) := e^{-\beta_1|t_1-s_1|} \cdot \dots \cdot e^{-\beta_d|t_d-s_d|},$$

с переменными $t = (t_1, \dots, t_d)$ и $s = (s_1, \dots, s_d)$ из $[0, 1]^d$ и параметрами $\beta_1, \dots, \beta_d > 0$. Как известно, функции $(t_j, s_j) \mapsto e^{-\beta_j|t_j-s_j|}$, $j = 1, \dots, d$, являются ковариациями случайных процессов Орнштейна–Уленбека с параметрами β_j . Поэтому случайное поле $U_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, называемое в литературе *тензорным произведением* этих процессов, естественно считать их многопараметрическим аналогом.

Мы решаем задачу аппроксимации $U_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, как случайного элемента U_d пространства $L_2([0, 1]^d)$, в котором $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ обозначает стандартное скалярное произведение, а $\| \cdot \|_2$ — норму. Приближение осуществляется *конечноранговыми* случайными полями:

$$U_{d,n}(t) = \sum_{k=1}^n \langle \varphi_k, U_d \rangle_2 \varphi_k(t), \quad t \in [0, 1]^d,$$

где φ_k являются некоторыми элементами $L_2([0, 1]^d)$. Мы исследуем величину *сложности аппроксимации*:

$$n^{U_d}(\varepsilon) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \inf_{U_{d,n}} \mathbb{E} \|U_d - U_{d,n}\|_2^2 \leq \varepsilon^2 \mathbb{E} \|U_d\|_2^2 \right\}, \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

которая представляет собой наименьший ранг приближающих элементов $U_{d,n}$ достаточный для того, чтобы относительная ошибка аппроксимации не превосходила заданного порога ε (см. [1] и [2]).

Асимптотики $n^{U_d}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ с любыми фиксированными $d \in \mathbb{N}$ и $\beta_1, \dots, \beta_d > 0$ хорошо известны (см. [2] и ссылки в ней). Мы фокусируемся на задачах «высокой параметрической размерности» (см. [3]), в которых для заданной последовательности основных параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \dots$ требуется найти асимптотику сложности аппроксимации $n^{U_d}(\varepsilon)$ при $d \rightarrow \infty$ и сколь угодно малом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1)$. В докладе для данных задач будут приведены новые результаты для случая $\beta_j \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$, которые были получены с помощью специального вероятностного подхода. Мы покажем, что при достаточно широких предположениях на скорость стремления β_j к нулю, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$, имеет место асимптотика

$$\ln n^{U_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon^2)b_d + o(b_d), \quad d \rightarrow \infty,$$

где Φ — функция распределения стандартного нормального закона, а последовательности $(a_d)_{d \in \mathbb{N}}$ и $(b_d)_{d \in \mathbb{N}}$ (и их асимптотики) полностью определяются через $(\beta_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Литература

1. *Novak E., Woźniakowski H.* Tractability of Multivariate Problems: Volume I: Linear Information, EMS Publishing House, Zürich, 2008.
2. *Lifshits M., Tulyakova E. V.*, Curse of dimensionality in approximation of random fields. Probability and Mathematical Statistics, Vol. 26, 2006, pp. 97–112.
3. *Khartov A. A.* Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements, J. Complexity, 31 (2015), 6, 835–866.

Предельная теорема для количества частиц второго типа в ветвящемся процессе с мутациями в одном гене

Швайков М. Д.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
г. Москва
mikhail.shvaikov@math.msu.ru

Рассмотрим схему серий для бесконечнотипного ветвящегося процесса. На каждом этапе фиксируется число n — длительность существования ветвящегося процесса, а также зависящие от n вероятности p_n и q_n . Каждая частица при рождении наследует с вероятностью $1 - p_n - q_n$ тип родителя, с вероятностью p_n приобретает следующий, более высокий, тип или с вероятностью q_n предыдущий, более низкий. Процесс начинается с одной

частицы первого типа, которая имеет математическое ожидание числа потомков $\mu_1 > 1$. Количества потомков частиц каждого типа независимы и одинаково распределены, но частицы более высокого типа в среднем порождают большее число потомков: $\mu_{i+1} > \mu_i$, $i \in \mathbb{Z}$. Всегда считается, что $q_n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, исследуется предельное распределение количества частиц каждого типа в зависимости от порядка малости p_n .

Будем называть рассматриваемый процесс ветвящимися процессом с мутациями (ВПМ). Более формально его можно описать так: при каждом целом i , m , k вводится набор случайных величин $(X_{m,n,k}^{(i)})$ – количество потомков, которое даст k -я частица i -го типа в m -м поколении. Введем также набор независимых случайных величин $I_{nmk}(i; j)$, $n, m, k, i, j \in \mathbb{Z}$. Величина $I_{nmk}(i; j)$ – это индикатор события $\{\text{в ВПМ, рассматриваемом на протяжении } n \text{ поколений, } k\text{-я частица } i\text{-го типа в } m\text{-м поколении изменила свой тип на } j\text{-й}\}$. Индекс n для упрощения записи будем опускать в записи, но подразумевать при этом зависимость от n . По определению рассматриваемого ВПМ для всех m, n, k имеем:

$$\mathbf{P}(I_{mk}(i; j) = 1) = \begin{cases} p_n, & j = i + 1, \\ q_n, & j = i - 1, \\ 1 - p_n - q_n, & j = i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для каждого i, j, k, m, n разыграем значения случайных величин $X_{m,n,k}^{(i)}$ и $I_{nmk}(i; j)$. Вектор

$$\left(\sum_{l=1}^{X_{m,k}^{(j)}} I_{ml}(j; j-1), \sum_{l=1}^{X_{m,k}^{(j)}} I_{ml}(j; j), \sum_{l=1}^{X_{m,k}^{(j)}} I_{ml}(j; j+1) \right)$$

задает то, какое количество потомков k -ой частицы в m -ом поколении приобрели более низкий тип (деградировали), наследовали родительский или приобрели более высокий (эволюционировали).

Тогда рассматриваемый ВПМ задается в виде:

$$Z_{m+1}^{(i)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{Z_m^{(j)}} \sum_{l=1}^{X_{m,i,k}^{(j)}} I_{ml}(j; i),$$

где $Z_m^{(i)}$ – число частиц с типом i в m -м поколении. При этом $Z_0^{(i)} = I_{i=1}$, то есть в первом поколении есть одна частица первого типа. В данной работе на ВПМ накладывается дополнительное ограничение $\mathbb{E} \left(X_{1,1}^{(1)} \ln X_{1,1}^{(1)} \right) < \infty$. Необходимость подобного условия обосновывается в замечании 1, везде далее считается, что оно выполнено.

В работе используются формулировки “процесс с генами” и “вероятность мутаций”. Это связано с физической интерпретацией изучаемого процесса.

Можно считать, что изменение типа частицы вызвано некоторой генетической мутацией, которая влияет на размножение биологического вида. В частности, удобно интерпретировать частицы более высокого типа, как более фертильные. Такая интерпретация естественным образом соотносится с тем, что следующие типы дают в среднем больше потомков.

Подобного рода модели рассматривались ранее в литературе. В частности, Marek Kimmel и David E. Axelrod в работе [1] рассматривают общие свойства бесконечнотипных ветвящихся процессов с геномом. Встречаются статьи (см., например, [2]), в которых исследуются двуполые процессы подобного вида. Существуют и другие интерпретации схожих процессов, например, в работе В.А. Ватутина [3] описана модель разрозненных островов, на которых проживают изолированные популяции. Однако его модель отлична от исследуемой, в частности, он рассматривает конечное число типов, и частицы могут лишь повысить свой тип. В свою очередь, в данном докладе рассматривается специфическая задача исследования моментов первого появления частиц каждого типа и изучения их предельного распределения.

В настоящей работе показано, что при значениях $p_n \sim C\mu_1^{-n}$ при $n \rightarrow \infty$, где C – это некоторая константа, за некоторое конечное время до завершения процесса появляются частицы второго типа, и их количество в этом случае имеет некоторое невырожденное распределение. Кроме того, выводится явный вид этого распределения.

Перейдем к формулировке основного результата. Введем счетное число новых ветвящихся процессов $\{\tilde{Z}_n^{(k)}, n \geq 0\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Каждый из этих процессов определим на том же вероятностном пространстве, что и исходный ВПМ. Эти процессы являются классическими ветвящимися процессами Гальтона-Ватсона, для которых распределение количества потомков каждой частицы такое же, как у частиц соответствующего типа в исходном ВПМ. Производящие функции случайных величин $\tilde{Z}_n^{(k)}$ обозначим как $\varphi_{\tilde{Z}_n^{(k)}}(s)$. Из общей теории ветвящихся процессов (см. [4]) известно, что последовательность случайных величин $\tilde{Z}_n^{(1)}/\mu_1^n$ при $n \rightarrow \infty$ сходится почти наверное к некоторой случайной величине, которую мы назовем $W^{(1)}$.

Замечание 1. В силу надкритичности рассматриваемого ВПМ и условия $\mathbb{E}\left(X_{1,1,1}^{(1)} \ln X_{1,1,1}^{(1)}\right) < \infty$ можно заключить, что $\mathbb{E}W^{(1)} = 1$. Доказательство данного факта приведено в §10 первой главы [4]. Таким образом, $W^{(1)}$ – невырожденная случайная величина.

Теорема 1. Пусть ветвящийся процесс с мутациями $\{Z_m, 0 \leq m \leq n\}$ имеет вероятности мутации $p_n = C\mu_1^{-n}$, где C – некоторая константа, и $q_n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$. Пусть также $\mathbb{E}\left(X_{1,1,1}^{(1)} \ln X_{1,1,1}^{(1)}\right) < \infty$. Тогда количество частиц второго типа к моменту n стремится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к случайной величине с производящей функцией следующего вида:

$$\mathbb{E} \exp \left(W^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_1^k} \left(\varphi_{\tilde{Z}_k^{(2)}}(s) - 1 \right) \right).$$

Литература

1. *Kimmel M., Axelrod D. E.* Branching Processes in Biology, Springer New York, NY, 2015.
2. *González M., Hull D. M., Martinez R., Mota M.* Bisexual branching processes in a genetic context: the extinction problem for Y-linked genes, Math Biosci, 2006.
3. *Vatutin V. A.* The structure of the decomposable reduced branching processes. I. Finite-dimensional distributions, Theory Probab. Appl. 59(4), 641–662 (2015).
4. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching Processes, Springer-Verlag, NY, 1972.
5. *Le Cam L.* An approximation theorem for the Poisson binomial distribution, Pacific J. Math. 10 (4) 1181 - 1197, 1960.

Обобщенные формулы Леви–Хинчина для целочисленных распределений

Харченко И. С.

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
marvel6704@gmail.com

Пусть на некотором вероятностном пространстве задана случайная величина X , которая принимает значения $0, 1, \dots, n$, где $n \in \mathbb{N}$, с вероятностями $p_0, p_1, \dots, p_n \geq 0$, соответственно, $\sum_{k=0}^n p_k = 1$. Пусть f — характеристическая функция X , т.е.

$$f(t) := \sum_{k=0}^n p_k e^{itk}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Как известно, в невырожденном случае ($n > 0$ и хотя бы две вероятности из набора $p_0, \dots, p_n$ положительны) случайная величина X не является безгранично делимой. Тем не менее, если $f(t) \neq 0$ при всех $t \in [-\pi, \pi]$, то f допускает представление типа Леви–Хинчина (см. [1]):

$$f(t) = \exp \left\{ it\gamma + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \lambda_k (e^{itk} - 1) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$ и $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, причем $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\lambda_k| < \infty$. Заметим, что параметр γ и числа λ_k определяются однозначно по распределению X .

В докладе будет показано, что, на самом деле, любая характеристическая функция f вида (1) допускает представление типа Леви–Хинчина (2) при всех $t \in \mathbb{R}$, в которых $f(t) \neq 0$ (обозначим это множество через

T). В таком представлении по-прежнему $\gamma \in \mathbb{Z}$ и $\lambda_k \in \mathbb{R}$, однако абсолютная сходимость ряда из λ_k здесь заменяется на существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 < |k| \leq n} \lambda_k e^{itk}$ при всех $t \in T$. Следует отметить, что в случае $T \neq \mathbb{R}$ параметр γ и коэффициенты λ_k не определяются однозначно.

Описанные обобщенные формулы Леви–Хинчина вида (2) могут использоваться в характеристизации (через γ и λ_k) сходимости по распределению целочисленных случайных величин. Для случая $T = \mathbb{R}$ это показано в работе [1] (см. также [2]). В докладе будут приведены новые результаты, демонстрирующие, что это возможно и для случая $T \neq \mathbb{R}$.

Литература

1. *Lindner A., Pan L., Sato K.* On quasi-infinitely divisible distributions, Trans. Amer. Math. Soc. 370 (2018), 8483–8520.
2. *Khartov A. A.* Compactness criteria for quasi-infinitely divisible distributions on the integers, Stat.&Prob. Letters 153 (2019), 1–6.

Составители сборника:

Ватутин Владимир Алексеевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН, vatutin@mi-ras.ru;

Хартов Алексей Андреевич, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, доцент Смоленского государственного университета, alexeykhartov@gmail.com.