

Министерство науки и высшего образования РФ
Смоленский государственный университет

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 27
Часть 2

Смоленск
Издательство СмолГУ
2026

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета СмолГУ*

Редакционная коллегия

*К.М. Расулов, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор)
Н.М. Тимофеева, канд. пед. наук, доц. (ответственный секретарь)
В.В. Борисов, д-р техн. наук, проф. (Смоленск, Россия)
Ю.М. Вувуникян, д-р физ.-мат. наук, проф. (Гродно, Республика Беларусь)
Л.Г. Гагарина, д-р техн. наук, проф. (Зеленоград, Россия)
С.А. Гомонов, канд. физ.-мат. наук, доц. (Смоленск, Россия)
А.П. Карпенко, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)
А.Б. Костин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)
В.И. Мунерман, канд. техн. наук, доц. (Смоленск, Россия)
Г.Е. Сенькина, д-р пед. наук, проф. (Смоленск, Россия)
И.В. Тихонов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)
В.Б. Шерстюков, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)*

С 409 **Системы компьютерной математики и их приложения:**
межвузовский сборник научных трудов. Смоленск: Изд-во
СмолГУ, 2026. Вып. 27. Часть 2. 201 с.
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В настоящем выпуске сборника публикуются расширенные тексты научных докладов, представленных на XXVII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 22–23 мая 2026 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

© Авторы, 2026
© Издательство СмолГУ, 2026

РАЗДЕЛ 3

Математика и её приложения

М.А. Анохина

МГУ имени М.В. Ломоносова, МИАН

УДК 519.214.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МОМЕНТА МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ, ДОСТИГАЮЩЕГО РАЗЛИЧНЫХ ФИКСИРОВАННЫХ УРОВНЕЙ

Ключевые слова: случайные блуждания, ветвящиеся процессы, локальные предельные теоремы, интегро-локальные предельные теоремы.

Рассмотрим случайное блуждание с нулевым средним и конечной дисперсией, шаги которого являются арифметическими. Для момента достижения максимума случайным блужданием известен предельный закон арксинуса. В настоящей работе исследуется распределение момента достижения максимума при условии фиксации самого значения максимума. Рассмотрены случаи, когда значение максимума принадлежит зоне малых, нормальных и умеренных уклонов. Аналогичные результаты доказаны и в нерешетчатом случае. Результаты применены для изучения асимптотического поведения вероятности невырождения ВПССГ для случая, когда минимум сопровождающего случайного блуждания достигает уровня заданного порядка, принадлежащего зоне малых или нормальных уклонов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим случайное блуждание $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (сл.в.) с $EX_1 = 0$ и $EX_1^2 \in (0, \infty)$. Для этого блуждания хорошо известен закон арксинуса:

$$P\left(\frac{\tau_M}{n} \leq x\right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in [0, 1],$$

где τ_M – момент первого достижения максимума блужданием S_n .

Будем говорить, что X – решетчатая случайная величина, если существуют такие $d > 0$ и $a \in \mathbb{R}$, что $P(X \in a + d\mathbb{Z}) = 1$. Величины, не являющиеся решетчатыми, называются нерешетчатыми. При этом будем называть X арифметической сл.в., если она принимает только целые

значения и при этом не существует таких $d > 1$ и $a \in \mathbb{R}$, что $P(X \in a + d\mathbb{Z}) = 1$.

Нас будет интересовать задача исследования асимптотического поведения такой вероятности при $n \rightarrow \infty$ в случае арифметического случайного блуждания при условии достижения максимумом некоторого значения $k \in \mathbb{N}$, то есть

$$P\left(\frac{\tau_M}{n} \leq x \mid M_n = k\right), \quad x \in [0,1],$$

где $M_n = S_{\tau_M}$. Предполагается, что k может зависеть от n . Аналогичная

задача решается и для нерешетчатого случая. Нами исследовано асимптотическое поведение

$$P\left(\frac{\tau_M}{n} \leq x \mid M_n \in [z, z + \Delta)\right), \quad x \in [0,1],$$

где $z \in \mathbb{R}^+$, $\Delta > 0$, z может зависеть от n .

В работе рассмотрен [1] случай малых уклонений, когда $k \rightarrow \infty$ и $k = o(\sqrt{n})$, $n \rightarrow \infty$. Случай умеренных уклонений, когда $k/n^\alpha \rightarrow y > 0$, $n \rightarrow \infty$, $\alpha \in (1/2, 1)$, представлен в работе [2]. Результаты для данных

случаев получены и в арифметическом, и в нерешетчатом случаях. В зоне нормальных уклонений, когда $k/\sqrt{n} \rightarrow y > 0$, $n \rightarrow \infty$, в

арифметическом случае асимптотическое поведение интересующей нас вероятности получается напрямую из исследования асимптотического поведения вероятности $P(S_i > 0, i \leq n \mid S_n = k)$. В нерешетчатом случае

для получения предельной теоремы требуются некоторые дополнительные оценки, полученные в работах [3] и [4]. В работе [4] получено асимптотическое поведение вероятности $P(M_n = k)$ для более

широкого класса сл.в., а именно для величин, лежащих в области притяжения устойчивого закона. Пусть

$$\mathcal{A} = \{0 < \alpha < 1; |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2; |\beta| \leq 1\} \cup \{\alpha = 1, \beta = 0\} \cup \{\alpha = 2, \beta = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

Для $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ и сл.в. X говорят, что $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, если распределение X

принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$G_{\alpha,\beta}(t) = \exp \left\{ -c|t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\}, \quad c > 0,$$

и, к тому же $EX = 0$, если оно существует.

Данные результаты находят приложение в теории ветвящихся процессов. Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$ – н.о.р. сл.в., $\{f_n(s), n \in \mathbb{N}\}$ – семейство производящих функций, $\{X_{i,j}, i, j \in \mathbb{N}\}$ – семейство неотрицательных целочисленных случайных величин. Для фиксированного η сл.в. $X_{i,j}$ являются н.о.р. для каждого i , $X_{i,j} \sim f_{i,j}$.

Тогда будем называть ВПСС последовательность сл.в., заданных соотношениями

$$Z_0 = 1, \quad Z_n = X_{n+1,1} + \dots + X_{n+1,Z_n}, \quad n \geq 0.$$

Пусть $\xi_i = \ln f'_{\eta_i}(1)$. Тогда сопровождающее случайное блуждание для $\{Z_n\}$

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad n > 0.$$

Получено асимптотическое поведение вероятности невырождения ветвящегося процесса в случайной среде с геометрическим числом распределения потомков (ВПССГ) при условии, что минимум сопровождающего случайного блуждания равен заданному параметру k , принадлежащему зоне малых или нормальных уклонов.

Данные исследования тесно связаны с развивающейся в последние годы теорией локальных условных предельных теорем для случайных блужданий, рассматриваемых при условии их положительности на конечном или бесконечном интервале (см., например, [3; 5]).

Ниже приводятся формулировки полученных результатов в арифметическом случае (в нерешетчатом случае они аналогичны).

2. Основные результаты.

Теорема 1 ([1]). Пусть $X_1, X_2, \dots$ – н.о.р. арифметические сл.в. с $EX_1 = 0$ и $EX_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$, $\{k_n\}$ – некоторая целочисленная последовательность, удовлетворяющая соотношению $k_n = o(\sqrt{n})$, $n \rightarrow \infty$. Тогда для всех $x \geq 0$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{k_n^2} \leq x \mid M_n = k_n\right) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\sigma^2 x} \frac{e^{-1/u}}{u^{3/2}} du, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 2 ([2]). Пусть $X_1, X_2, \dots$ – н.о.р. арифметические сл.в. с $EX_1 = 0$ и $EX_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$, $Ee^{\delta X_1} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, $\{k_n\}$ – некоторая целочисленная последовательность, удовлетворяющая соотношению $k_n/n^\alpha \rightarrow y, n \rightarrow \infty, y > 0, \alpha \in (1/2, 1)$. Тогда для всех $x \geq 0$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\left(\frac{n - \tilde{\tau}}{n^\beta} \leq x \mid M_n = k_n\right) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{c^2 x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\tilde{\tau}$ – момент последнего достижения максимума случайным блужданием, $\beta = 2 - 2\alpha, c = y/\sqrt{2\sigma^2}$.

Теорема 3. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – н.о.р. арифметические сл.в и $X_i \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$. Пусть $c_n = n^{1/\alpha} L(n)$, $L(n)$ – медленно меняющаяся на бесконечности, $\{k_n\}$ – некоторая целочисленная последовательность, удовлетворяющая соотношению

$$k_n/c_n \rightarrow y > 0, n \rightarrow \infty, 0 < a < b < 1, \Delta > 0.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \in [a, b] \mid M_n = k_n\right) \rightarrow \frac{\int_a^b p_{\alpha, \beta}(yt^{-1/\alpha}) t^{\rho-1-1/\alpha} (1-t)^{-\rho} dt}{\int_0^1 p_{\alpha, \beta}(yt^{-1/\alpha}) t^{\rho-1-1/\alpha} (1-t)^{-\rho} dt},$$

где

$$\rho = \begin{cases} 1/2, & \alpha = 1; \\ 1/2 + \arctan(\beta \tan(\pi\alpha/2))/(\pi\alpha), & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Теорема 4. Пусть $\{Z_n\}$ – ВПССГ, $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \geq 0$ – его сопровождающее блуждание, $X_1, X_2, \dots$ – н.о.р. арифметические сл.в. с $EX_1 = 0$ и $EX_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$, $\{k_n\}$ – некоторая целочисленная последовательность, удовлетворяющая соотношению $k_n/\sqrt{n} \rightarrow y > 0, n \rightarrow \infty$. Тогда

$$e^{k_n} \mathbf{P}(Z_n > 0 \mid L_n = -k_n) \rightarrow I, \quad n \rightarrow \infty,$$

где I – некоторая константа.

Литература

1. Анохина М.А. Закон арксинуса для случайного блуждания с нулевым сносом и с низким максимумом // Теория вероятностей и ее применения. 2025. № 70(2). С. 383-391.

2. Анохина М.А. Предельная теорема для момента максимума случайного блуждания, достигающего фиксированного уровня, лежащего в зоне умеренно больших отклонений // Матем. заметки. 2024. № 115(4). С. 502-520.

3. Vatutin V. A., Wachtel V. Local probabilities for random walks conditioned to stay positive // Probability Theory Related Fields. 2009. № 143. P. 177-217.

4. Wachtel V. Local limit theorem for the maximum of asymptotically stable random walks // Probability Theory Related Fields. 2012. № 152. P. 407-424.

5. Caravenna F. A local limit theorem for random walks conditioned to stay positive // Probability Theory Related Fields. 2005. № 133. P. 508–530.

M.A. Anokhina

MSU, MIAN

LIMIT THEOREMS FOR THE MOMENT OF THE MAXIMUM OF RANDOM WALK REACHING VARIOUS FIXED LEVELS

Keywords: *random walk, branching process, limit theorem, integro-local limit theorem.*

Abstract. *Consider a random walk with zero mean, finite variance and arithmetic steps. The Arcsine Law is known for the moment of maximum of a random walk. In this paper we obtain the limit theorems for the moment of the maximum for random walk conditioned to the fixed value of the maximum. We consider the cases when the maximum value belongs to small, normal and moderate deviations zone. Similar results are proved in the nonlattice case. The results are applied to obtain the asymptotic behavior of the non-extinction probability of the BPRE with the geometric distribution of descendants for the case when the minimum of the associated random walk belongs to small or normal deviations zone.*

М.Б. Банару, Г.А. Банару

Смоленский государственный университет

УДК 514.76

ЗАМЕТКА ОБ ОДНОМ МАЛОИЗУЧЕННОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ключевые слова: *почти эрмитово многообразие, классификация Грея – Хервеллы, тензоры Кириченко.*

Рассматривается самый малоизученный класс Грея – Хервеллы почти эрмитовых многообразий – класс $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$. Формулируются

две задачи, связанные с многообразиями этого класса, существенные продвижения в решении которых представляются вполне реальными.

1.

Опубликованная более 45 лет назад статья Альфреда Грея и Луиса М. Хервеллы [1] остается одной из самых цитируемых работ в области геометрии почти комплексных и почти эрмитовых многообразий. Фундаментальный результат, который представлен в этой статье, – выделение 16 классов (хотя правильнее было бы сказать, «типов») почти эрмитовых структур.

Эти 16 классов Грея – Хервеллы почти эрмитовых структур исследованы крайне неравномерно. Менее всего изучены классы $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ (так называемые «большие» классы). За многообразиями класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ уже очень давно закрепилось название полукелеровых (semi-Kählerian, SK-) многообразий; многообразия классов $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ изучаются обычно под названиями G_1 - и G_2 -многообразий, соответственно [1–4]. А вот у многообразий класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ пока нет особого названия – потому, наверное, что эти многообразия отдельно практически не изучались. Причин тому несколько. Главная причина – существует крайне мало примеров многообразий с собственной $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ -структурой. Другая причина заключается в том, что условие принадлежности почти эрмитовой структуры этому классу (оно будет приведено ниже) – самое сложное из условий, характеризующих классы Грея – Хервеллы. Наконец, еще одним важным фактором является то, что исследование почти эрмитовых структур, принадлежащих «большим» классам, как правило, упирается в очень значительные технические сложности. Дело в том, что математический аппарат, разработанный при исследовании многообразий «малых» и «средних» классов почти эрмитовых многообразий, более или менее действенен лишь в случае полукелеровых многообразий. При этом не вызывает сомнений важность изучения $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ -многообразий, так как класс $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ содержит все келеровы, приближенно келеровы, локально конформные келеровы и квазикелеровы многообразия, а также многообразия Вайсмана – Грея [1]. Геометрии многообразий, принадлежащих этим классам (их относят к «малым» и «средним»), посвящены десятки статей, ежегодно публикуемых в хороших математических журналах в разных странах.

В данной заметке мы намечаем пути получения новых результатов, связанных, прежде всего, с почти контактными метрическими гиперповерхностями таких многообразий.

2.

Напомним [5], что почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, состоящая из почти комплексной структуры J и римановой метрики $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, которые должны быть согласованы следующим условием:

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}),$$

где $\mathfrak{N}(M^{2n})$ – модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n} . Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, которая определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура принадлежит классу $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, если:

$$\begin{aligned} & \nabla_X (F)(Y, Z) + \nabla_{JX} (F)(JY, Z) = \\ & = -\frac{1}{n-1} \{ \langle X, Y \rangle \theta F(Z) - \langle X, Z \rangle \theta F(Y) - \langle X, JY \rangle \theta F(JZ) \}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ∇ – риманова связность метрики $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, θ – оператор кодифференцирования [1]. Оказалось, что громоздкое и сложное условие (1) Грея – Хервеллы эквивалентно компактному и несложному условию в терминах виртуальных тензоров Кириченко [6–7]:

$$B^{ab}{}_c = \alpha^{[a} \delta^{b]}{}_c, \quad B_{ab}{}^c = \alpha_{[a} \delta_{b]}{}^c.$$

Характеризация в терминах тензоров Кириченко позволяет получить первую группу структурных уравнений почти эрмитова многообразия класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \alpha^{[a} \delta^{b]}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \alpha_{[a} \delta_{b]}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned} \quad (2)$$

Наш основной результат – детализация структурных уравнений (2) для различных частных случаев, в частности для $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ -подмногообразий алгебры Кэли. Отметим, что изучение почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав – важнейшее направление эрмитовой геометрии, заложенное Альфредом Греем (см. [2] и [8]).

Полученные структурные уравнения в числе прочего делают возможным применение дифференциально-геометрических построений Л.В. Степановой [9]. Эти построения позволяют из структурных уравнений почти эрмитова многообразия вывести структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на всякой ориентируемой гиперповерхности этого многообразия. Такого рода переход относительно несложно проведен для гиперповерхностей различных келеровых [10–12] и приближенно келеровых многообразий [13–14]; более сложен и тонок этот переход для гиперповерхностей

квазикелеровых многообразий [15]. И только совсем недавно он проведен для гиперповерхностей многообразий Вайсмана – Грея [16].

Возникает вопрос: возможен ли подобный переход для почти контактных метрических гиперповерхностей $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ -многообразий?

3.

В упомянутых выше структурных уравнениях почти контактной метрической структуры, индуцируемой на гиперповерхности почти эрмитова многообразия, естественным образом присутствует вторая квадратичная форма погружения этой гиперповерхности в данное многообразие. Самый простой случай, исследование которого представляется нам наиболее перспективным, – ситуация, в которой вторая квадратичная форма обращается в нуль (то есть гиперповерхность оказывается вполне геодезическим подмногообразием). Существенное упрощение структурных уравнений, на наш взгляд, позволит получить ряд новых результатов, связанных, например, с видом почти контактной метрической структуры на вполне геодезической гиперповерхности $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ -многообразия. Помимо этого, одним из возможных результатов могут быть ограничения на существование определенных видов почти контактных метрических структур на гиперповерхностях $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ -многообразия (такого плана результаты были получены, например, в [16] и [17]).

Если же потребовать, чтобы через каждую точку рассматриваемого $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ -многообразия проходила вполне геодезическая гиперповерхность (в эрмитовой геометрии в такой ситуации обычно говорят, что многообразие удовлетворяет аксиоме геодезических гиперповерхностей [18]), то, как часто бывает в подобных случаях, появляется возможность получить целый ряд результатов, связанных с внутренней геометрией рассматриваемого $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ -многообразия.

Вот почему в конце нашей заметки мы формулируем две следующие задачи:

1) определить, какая именно почти контактная метрическая структура может быть индуцирована на вполне геодезической гиперповерхности почти эрмитова многообразия класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$;

2) выяснить, какими геометрическими свойствами обладает $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ -многообразие, удовлетворяющее аксиоме вполне геодезических гиперповерхностей.

Еще раз отметим, что решение этих задач или существенные продвижения в направлении их решения, пусть пока только для некоторых частных случаев (например, с ограничением размерности рассматриваемого многообразия), представляются нам вполне реальными.

Литература

1. Gray A., Hervella L.M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // *Ann. Mat. Pura Appl.* 1980. Vol. 123, No. 4. P. 35-58.
2. Gray A. Some examples of almost Hermitian manifolds // *Illinois J. Math.* 1966. Vol.10, No. 2. P. 353-366.
3. Hervella L.M., Vidal E. Nouvelles géométries pseudo-kählériennes G_1 et G_2 // *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser.1.* 1976. V. 283. P. 115-118.
4. Banaru M. A note on six-dimensional G_1 -submanifolds of the octave algebra // *Taiwanese Journal of Mathematics.* 2002. Vol. 6, No. 3. P. 383-388.
5. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М.: МПГУ, 2003.
6. Банару М.Б. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли: дис. ... к.ф.-м.н. М. 1993.
7. Banaru M. On the Gray – Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra // *Annuaire de l'Université de Sofia "St. Kliment Ohridski". Faculté de Mathématiques et Informatique.* 2004. Vol. 95. P. 125-131.
8. Gray A. Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // *Tôhoku Math. J.* 1969. Vol.21, No. 4. P. 614-620.
9. Степанова Л.В. Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий: дис. ... к.ф.-м.н. М. 1995.
10. Банару М.Б. О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2003. № 7. С. 59-63.
11. Степанова Л.В., Банару Г.А., Банару М.Б. О геометрии QS-гиперповерхностей келеровых многообразий // *Сибирские электронные математические известия.* 2018. Т. 15. С. 815-822.
12. Банару М.Б., Банару Г.А. О гиперповерхностях со структурой Кириченко–Ускорева в келеровых многообразиях // *Сибирские электронные математические известия.* 2020. Т. 17. С. 1715-1721.
13. Banaru M.B. Almost contact metric hypersurfaces with type number 0 or 1 in nearly-Kählerian manifolds // *Moscow University Mathematics Bulletin.* 2014. Vol. 69, No. 3. P. 132-134.
14. Banaru M., Banaru G. A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // *Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III: Mathematics, Informatics, Physics.* 2015. Vol. 8, No. 2. P. 21-28.
15. Банару Г.А., Банару М.Б. Об одном свойстве квазикелеровых многообразий // *Математические заметки.* 2024. Т. 115, № 5. С. 658-664.
16. Abass M.Y. On generalized Kenmotsu manifolds as hypersurfaces of Vaisman – Gray manifolds // *Владикавказский математический журнал.* 2024. Т. 26, № 1. С. 5-12.
17. Банару Г.А. О несуществовании структуры Кенмоцу на асимптотических гиперповерхностях косимплектического типа келерова многообразия // *Дифференциальная геометрия многообразий фигур.* 2019. № 50. С. 23-28.
18. Абу-Салим А., Банару М.Б., Банару Г.А. Заметка об аксиомах почти контактных метрических гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий // *Дифференциальная геометрия многообразий фигур.* 2024. № 55(1). С. 5-13.

M.B. Banaru, G.A. Banaru
Smolensk State University

A NOTE ON A LITTLE-STUDIED CLASS OF ALMOST HERMITIAN MANIFOLDS

Keywords: *almost Hermitian manifold, Gray–Hervella classification, Kirichenko tensors.*

Abstract. *The class $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ that is the least studied Gray–Hervella class of almost Hermitian manifolds is considered. Two problems related to manifolds of this class are formulated, and significant progress in solving them appears entirely feasible.*

Ю.М. Вувуникян

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

УДК 517.98

ОБОБЩЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ИМПУЛЬСНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ

Ключевые слова: *обобщенные нелинейные эволюционные операторы, импульсные характеристики обобщенных нелинейных эволюционных операторов, условие причинности, импульсные нейронные сети, математические модели биологических нейронов.*

В статье определяется обобщенный нелинейный оператор эволюции системы и изучаются его свойства, строится математическая модель, основанная на импульсных уравнениях, и проводится анализ существования и единственности решения, что закладывает прочную теоретическую основу для последующих приложений. Импульсная природа оператора обеспечивает мгновенные переходы, вызываемые определенными моментами времени, состояниями или событиями, эффективно описывая событийно-управляемые динамические поведения.

1. Основная часть. Эволюционный оператор $V(t)$ системы описывает закон эволюции состояния динамической системы, и его общая форма имеет вид:

$$V'(t) = A(V(t)),$$

где A – производящий оператор эволюции системы.

В простейшем случае, когда A – ограниченный линейный оператор в полном нормированном пространстве, оператор эволюции системы определяется с помощью операторной экспоненты:

$$V(t) = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (t^k A^k).$$

В более общем случае, когда A – замкнутый линейный оператор с плотной областью определения в полном нормированном пространстве, построение оператора эволюции системы является основной частью классической теории полугрупп операторов.

В нелинейном случае мы рассматриваем уравнение

$$x'(t) = Ax(t), \quad (*)$$

где A – нелинейный оператор Вольтерра:

$$Ax(t) = \int_0^t K(t, s, x(s)) ds,$$

причем здесь ядро $K(t, s, x)$ – функция трех переменных, определенная и непрерывная на множестве $[0, b] \times [0, b] \times R$. Доказано, что если ядро удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу [1], т.е. существует такое число $L > 0$, что для всех $x_1, x_2 \in R$ справедливо неравенство

$$|K(t, s, x_2) - K(t, s, x_1)| \leq L |x_2 - x_1|,$$

то задача Коши $x(0) = x_0$ для интегро-дифференциального уравнения (*) имеет единственное решение. Обобщенный оператор эволюции $V(t)$, соответствующий рассматриваемому нелинейному интегро-дифференциальному уравнению, определяется равенством $V(t)x_0 = x(t)$.

Операторы эволюции систем играют основополагающую роль в моделировании, оптимизации и управлении динамическими системами. Среди них – операторы с импульсными характеристиками, обеспечивающие мощную математическую основу для описания явлений, включающих внезапные изменения состояния, мгновенные возмущения и событийные механизмы. Эта теория прочно устоялась в теории управления, но остаётся практически неисследованной в контексте архитектур глубокого обучения.

Хотя модели сверточных нейронных сетей являются фактическим стандартом распознавания изображений, они сталкиваются с постоянными проблемами, связанными с динамической адаптивностью (обработкой нестационарных потоков данных), устойчивостью и вычислительной эффективностью. Их типичная статичная природа, основанная на прямом распространении, плохо подходит для обработки внезапных изменений входных данных или для принятия разрозненных решений, основанных на событиях.

Основная цель настоящей статьи – преодолеть этот разрыв путем внедрения строгой математической концепции импульсных эволюционных операторов в разработку новых математических моделей, тем самым создав новый класс динамичных, эффективных и надежных нейронных сетей.

Сверточные нейронные сети превосходно работают с локальными стационарными и пространственно инвариантными данными, такими как изображения. Однако их основные принципы построения – локальная связность, распределение весов, пространственная инвариантность и статическая структура прямого распространения – накладывают фундаментальные ограничения при работе с данными, нестационарными распределениями данных и сложными сценариями, требующими эффективных механизмов, управляемых событиями.

Преодоление этих ограничений является актуальной темой для исследований в настоящее время. Механизмы внимания значительно расширили возможности глобального моделирования; графовые нейронные сети предлагают новую парадигму для обработки нерегулярно структурированных данных; импульсные нейронные сети являются пионерами в области эффективных вычислений, основанных на биологических принципах; динамические сети стремятся повысить вычислительную эффективность в рамках традиционных архитектур. Дальнейшие разработки будут направлены на гибридные архитектуры и более адаптивные, динамичные и разреженные вычислительные парадигмы для лучшего соответствия сложным, изменчивым и нестационарным реальным данным и требованиям задач.

Моделирование и управление динамическими системами являются основными темами в современной науке и технике. Их теоретические основы в значительной степени опираются на операторы эволюции систем, основной математический инструмент для описания эволюции состояний систем. Более того, широкое распространение мгновенных мутаций, сильных внешних возмущений и событийного поведения в реальном мире делает импульсные характеристики ключевым инструментом для описания этих прерывистых динамических процессов, имея незаменимое значение в теории управления, биологическом нейронном моделировании. Между тем, хотя сверточные нейронные сети достигли огромного успеха в таких областях, как компьютерное зрение, их присущая статичность и предположения о непрерывности обнаруживают существенные ограничения при столкновении со сложными динамическими средами реального мира. Эти проблемы в первую очередь проявляются в отсутствии динамической адаптивности, недостаточной надежности и низкой вычислительной эффективности. Эти ограничения проявляются следующим образом: традиционные модели с трудом справляются с

эффективной обработкой внезапных изменений данных (таких как внезапные изменения объектов на изображениях или смена сцен в видео). Таким образом, интеграция теории импульсных характеристик, описывающих внезапное и нестационарное поведение, с теорией систематических эволюционных операторов в структуру сверточных нейронных сетей представляет собой ключевой подход к преодолению этих узких мест.

Указанная интеграция не только обогащает ценность теории глубокого обучения, но и предлагает значительные потенциальные преимущества в улучшении динамической отзывчивости, надежности и вычислительной эффективности модели.

Для решения этих задач исследование направлено на систематическое изучение и создание класса систематических эволюционных операторов с импульсными характеристиками и их инновационное применение в сверточных нейронных сетях [2–6].

Конкретные цели исследования включают: предложение и строгое определение математической модели для этого типа оператора; систематический анализ его математических свойств (существование, уникальность, устойчивость и сходимость); разработку новых архитектур сверточных нейронных сетей или алгоритмов обучения на основе этого оператора; наконец, экспериментальную проверку его превосходства при решении конкретных задач. Данное исследование основано на существующих исследованиях в различных областях, включая теорию операторов эволюции систем, теорию импульсных и гибридных систем, импульсные нейронные сети и различные усовершенствования сверточных нейронных сетей.

Эволюционный оператор является математическим ядром моделирования динамических систем и обеспечивает теоретическую основу для анализа устойчивости и сходимости в области оптимизации и управления.

В данной работе, посвященной ключевой теоретической концепции операторов эволюции систем с импульсными свойствами, проводится комплексное исследование, охватывающее математические основы, инновационные модели глубокого обучения. Целью данного исследования является решение фундаментальных проблем, с которыми сталкиваются традиционные свёрточные нейронные сети при обработке нестационарных данных, внезапных событий и достижении более высокой вычислительной эффективности.

2. Заключение. Динамическое моделирование используется для моделирования непрерывных систем. Импульсная система описывает поведение при изменении состояний посредством непрерывной эволюции. Отметим, что обобщенный эволюционный оператор удовлетворяет условию причинности: если носитель входной функции

содержится в замкнутом интервале $[t_0; +\infty)$, то и носитель функции реакции эволюционной системы на рассматриваемое воздействие содержится в этом же интервале.

Одной из основных актуальных областей применения эволюционных операторов являются импульсные нейронные сети, использующие математические модели биологических нейронов.

В настоящей работе определён класс операторов эволюции систем, уникальный благодаря введению импульсных свойств. Эти операторы моделируются как гибридные динамические системы, эволюция которых управляется сочетанием непрерывных, постепенно меняющихся потоков и дискретных, мгновенных мутаций (импульсов), вызванных определёнными условиями (временем, состоянием или событиями). Мы тщательно анализируем математические свойства данных операторов, включая существование и единственность решений, устойчивость (например, достижение стабилизации системы посредством импульсного управления) и сходимость, закладывая прочную математическую основу для последующей разработки алгоритмов. Эта работа заполняет пробел в применении формализованной теории импульсных систем к архитектуре моделей глубокого обучения. Работа открывает новые возможности для взаимообогащения глубокого обучения и теории динамических систем.

Литература

1. Вувуникян Ю.М., Каландия Е.И. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с параметром // Весн. Гродз. дзярж. ун-та. Сер. 2: Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2023. Т. 13, № 1. С. 6–16.
2. Вувуникян Ю.М., Чжень Ваньли. Операторное моделирование импульсной нейронной сети и прямое произведение реакций системных операторов // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. Вып. 23. С. 202–210.
3. Вувуникян Ю.М., Чжень Ваньли. Методы прямого обучения глубоких импульсных нейронных сетей // Материалы Международного конгресса по информатике: информационные системы и технологии (CSIST'2022). (Минск, 27–28 октября 2022 г.). В 3 ч. Минск: БГУ, 2022. Ч. 2. С. 112–116.
4. Вувуникян Ю.М., Чжень Ваньли. Эволюционная нейронная модель Ижикевича и ее применение // Материалы Международной научно-практической конференции «Перспективные направления инновационного развития и подготовки кадров» («Prospective Guidelines of Innovative Development and Personnel Training») (Брест, 15–16 декабря 2022 г.). Брест: БТГУ, 2022. С. 108–115.
5. Чжень Ваньли. Эволюционная импульсная нейронная сеть Fitzhugh – Nagumo и ее обучение // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях // Сб. материалов XXVI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов (Гомель, 20–22 марта 2023 г.). Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2023.

6. Вувуникян Ю.М., Чжень Ваньли. Нелинейное интегральное уравнение Вольтерра и порождающий эволюционный оператор математической модели Е.М. Ижикевича импульсной нейронной сети // Системы компьютерной математики и их приложения: межвузовский сборник научных трудов. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2023. Вып. 24. С. 242–246.

Y.M. Vuvunikian
Grodno State University

GENERALIZED NONLINEAR EVOLUTIONARY OPERATORS AND THEIR APPLICATION IN IMPULSE NEURAL NETWORKS

Keywords: *generalized nonlinear evolutionary operators, impulse characteristics of generalized nonlinear evolutionary operators, causality condition, impulse neural networks, mathematical models of biological neurons.*

Abstract. *A generalized nonlinear operator for the evolution of the system is determined and its properties are studied, a mathematical model based on momentum equations is constructed, and an analysis of the existence and uniqueness of the solution is carried out, which lays a solid theoretical foundation for subsequent applications. The impulsive nature of the operator provides instantaneous transitions caused by specific points in time, states, or events, effectively describing event-driven dynamic behaviors.*

С.А. Гомонов
Смоленский государственный университет

УДК 372.851.21

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ОДНОМОНОТОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Ключевые слова: *одномонотонные и разномонотонные последовательности, параллельная перестановка, средние величины, неравенства Чебышёва.*

В статье рассматриваются элементарные подходы к получению весьма важных и часто применяемых в математике неравенств: соотношения между средними величинами, неравенств Чебышёва. Приёмы генерирования доказательств неравенств основываются на свойствах одинаково упорядоченных последовательностей.

Когда б вы знали из
какого сора растут
стихи, не ведая стыда
А.А. Ахматова

В математических исследованиях хорошо известны случаи, когда самые простые вычисления наводят на весьма ценные соображения и даже становятся источниками глубоких и интересных результатов. Правда, известно и другое: без новых идей теоретического характера даже самые громоздкие и сложные вычисления порой не позволяют обнаружить интересные математически закономерности сколь-нибудь общего характера. Достаточно вспомнить многолетние попытки найти формулу (с «хорошими» операциями), позволяющую получить все простые числа.

И здесь не лишне напомнить о так называемых многочленах Эйлера

$$x^2 + x + 41; 2x^2 + 29; x^2 - 79x + 1601.$$

Хорошим же примером, иллюстрирующим первую ситуацию, служат так называемые одномонотонные последовательности, иначе называемые одинаково упорядоченными последовательностями, и, конечно, их свойства.

Вот конкретный пример простых вычислений: рассмотрим две трехчленные числовые последовательности $(a_1, a_2, a_3) = (7; 3; 2)$ и $(b_1, b_2, b_3) = (4; 3; 1)$ и непосредственными вычислениями выясним, в каком случае будет принимать наибольшее, а в каком наименьшее значение выражение $a_1 \cdot b_{i_1} + a_2 \cdot b_{i_2} + a_3 \cdot b_{i_3}$, где (i_1, i_2, i_3) – произвольная перестановка чисел 1, 4 и 3. Придется сравнить шесть ($3! = 6$) чисел:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 &= 35, \\ 7 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 &= 32, \\ 7 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 &= 24 \text{ (min)}, \\ 7 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 &= 25, \\ 7 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 &= 37, \\ 7 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 &= 39 \text{ (max)}. \end{aligned}$$

Итак, получаем максимум, когда имеем дело с одинаково упорядоченными последовательностями (строго убывающими!): $(7; 3; 2)$ и $(4; 3; 1)$ и, минимум, когда они обратно упорядочены: $(7; 3; 2)$ и $(1; 3; 4)$.

Впрочем, этот результат нетрудно было предугадать. А вот то, что полученные соображения уже теперь позволяют генерировать простейшие неравенства, интересно и небесполезно.

Пример 1. Рассмотрим две последовательности положительных чисел (a^2, b^2, c^2) и $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ и расположим их члены друг над другом

так, что наименьший член второй последовательности стоит под наибольшим членом первой:

$$(a^2, b^2, c^2),$$

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right);$$

и тогда (по замеченной ранее закономерности) имеем два очевидных неравенства:

$$a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq a^2 \cdot \frac{1}{b} + b^2 \cdot \frac{1}{c} + c^2 \cdot \frac{1}{a} \text{ и}$$

$$a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq a^2 \cdot \frac{1}{c} + b^2 \cdot \frac{1}{a} + c^2 \cdot \frac{1}{b}.$$

Складывая их почленно и сокращая на 2, имеем интересное «замечательное неравенство»:

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b},$$

где $a, b, c \in (0; +\infty)$, а вот соотношением между a, b и c можно и не интересоваться.

Пример 2. Аналогичные рассуждения о последовательностях

$$(a^3, b^3, c^3) \text{ и } \left(\frac{a}{abc}, \frac{b}{abc}, \frac{c}{abc}\right), \text{ где } a, b, c \in (0; +\infty),$$

дают аналогичный результат, соединяя который с предыдущим имеем:

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab},$$

где $a, b, c \in (0; +\infty)$.

В дальнейшем для любых двух последовательностей действительных чисел

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ и } (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (1)$$

сумму вида $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ будем называть сверткой этих последовательностей и обозначать символом

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

(впрочем, сверткой последовательностей (1) в математике чаще называют сумму

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1).$$

Определение 1. Две конечные последовательности действительных чисел (a_k) и (b_k) ($k = 1, 2, \dots, n; n \in N$) называются:

а) одномонотонными (одинаково упорядоченными), если:

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\})((a_i \leq a_j) \rightarrow (b_i \leq b_j)) \text{ или}$$

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\})((a_i \geq a_j) \rightarrow (b_i \geq b_j)) \text{ и}$$

б) разномонотонными (обратно упорядоченными), если:

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\})((a_i \leq a_j) \rightarrow (b_i \geq b_j)) \text{ или}$$

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\})((a_i \geq a_j) \rightarrow (b_i \leq b_j)).$$

Примеры:

$$\text{а) } \left. \begin{matrix} (3; 2; 7; -2) \\ (2; 0; 6; 0) \end{matrix} \right\} - \text{одномонотонные,}$$

$$\text{б) } \left. \begin{matrix} (4; 8; 5) \\ (7; 9; 5) \end{matrix} \right\} - \text{разномонотонные.}$$

Отметим некоторые свойства двух одномонотонных последовательностей.

I. Если (a_k) и (b_k) – одномонотонные $(k = 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$, то существует такое число $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ (возможно, не одно), что

$$a_m = \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ и}$$

$$b_m = \max \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

II. Свойство одномонотонности двух последовательностей $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ $(n \geq 2)$ сохранится (как и величина их свертки), если в первой из них переставить члены a_k и a_m , а во второй члены тех же номеров b_k и b_m $(k, m \in \{1, 2, \dots, n\})$.

Замечание 1. Далее подобную перестановку в двух последовательностях будем называть парной или параллельной перестановкой.

III. Для любых двух одномонотонных последовательностей действительных чисел любое количество параллельных перестановок их членов приводит к получению двух одномонотонных последовательностей с тем же значением свертки, что и у исходных последовательностей.

IV. Две конечные последовательности действительных чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ являются одномонотонными тогда и только тогда, когда для них существует конечное число параллельных перестановок их членов, приводящее к получению двух неубывающих (невозрастающих) последовательностей.

Замечание 2. В учебном пособии [1] приведен вариант определения двух одномонотонных последовательностей (a_k) и (b_k) $(k = 1, 2, \dots, n)$ вида:

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\})((a_i - a_j) \cdot (b_i - b_j) \geq 0),$$

и аналогичного вида для разномонотонных:

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\})((a_i - a_j) \cdot (b_i - b_j) \leq 0),$$

которые, к сожалению, нуждаются в дополнительных ограничениях на (a_k) и (b_k) , а именно: их неконстантности.

Теорема. Для любых двух одномонотонных последовательностей действительных чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ и любой перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$ справедливы соотношения:

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ b_n, b_{n-1}, \dots, b_1 \end{bmatrix}.$$

Примеры.

а) Для любых $a, b, c \in [0; +\infty)$ $\begin{bmatrix} abc \\ a^2 b^2 c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} abc \\ c^2 a^2 b^2 \end{bmatrix}$, то есть

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

б) Для любых положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) справедливо неравенство $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$.

Доказательство. Так как $\begin{bmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ \frac{1}{-a_1} \frac{1}{-a_2} \dots \frac{1}{-a_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ \frac{1}{-a_2} \frac{1}{-a_3} \dots \frac{1}{-a_1} \end{bmatrix}$, то

$$-n \geq -\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \right), \text{ что и доказывает указанное неравенство.}$$

Достаточно легко можно ввести понятие одномонотонности нескольких (конечного числа) последовательностей и их свертки [1], и тогда критерий монотонности и свойства свертки позволяют очень быстро и без сложных выкладок обосновать ряд соотношений между средними величинами, а также ряд обобщений неравенств Чебышёва [1].

Литература

1. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. 10-11 кл.: учебное пособие. М.: Дрофа, 2007. 254 с.

S.A. Gomonov

Smolensk State University

ON SOME APPLICATIONS OF MONOTONE SEQUENCES

Keywords: *monotone and oppositely monotone sequences, parallel permutation, mean values, Chebyshev's inequalities.*

Abstract: *The paper considers elementary approaches to obtaining very important and frequently used inequalities in mathematics: relationships between mean values and Chebyshev's inequalities. The techniques for generating proofs of inequalities are based on the properties of similarly ordered sequences.*

Е.В. Кислякова, В.И. Мунерман
Смоленский государственный университет

УДК 519.2, 539.12

МНОГОМЕРНЫЕ МАТРИЦЫ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Ключевые слова: *алгебра многомерных матриц, стохастические матрицы, свойства элементарных частиц, взаимодействие элементарных частиц.*

Многомерные матрицы являются универсальным инструментом, позволяющим описывать сложные объекты, которые характеризуются множеством разнородных свойств. Одной из перспективных областей применения многомерных матриц может стать физика элементарных частиц. В статье обосновывается возможность применения многомерных матриц для представления ансамбля свойств элементарных частиц в наглядной и простой для интерпретации форме. Рассматривается использование стохастических матриц для описания процессов распада и рождения элементарных частиц, носящих вероятностный характер.

Введение. Современная физика привела к открытию множества частиц, как истинно элементарных (электроны, нейтрино пр.), так и обладающих внутренней структурой (протоны, нейтроны и другие частицы, состоящие из кварков). Каждую такую частицу можно рассматривать как математический объект, характеризующийся ансамблем численных параметров, таких как электрический заряд, энергия, импульс, спин, странность, четность и пр. Для ряда из этих параметров выполняются законы сохранения при любых взаимодействиях (например, для энергии и импульса), некоторые же параметры могут не сохраняться при конкретных взаимодействиях (например, четность не сохраняется при слабых взаимодействиях). Множественность свойств элементарных частиц привела к появлению различных математических интерпретаций и подходов к их описанию. Приведем лишь некоторые из них. Так, Н.Н. Попов и А.А. Кошелев связывают свойства элементарных частиц с явными и скрытыми

симметриями шестимерного псевдоевклидова пространства при помощи спиноров и гиперболических комплексных чисел [1]. Ф. Герман предлагает методику построения наглядных геометрических моделей характеристик для некоторых классов элементарных частиц [2]. Нам представляется перспективной идея, предложенная В.М. Максимовым, которая заключается в представлении свойств элементарных частиц в виде кубических матриц [3]. В.И. Мунерман и соавторы в работе [4] уточняют данный подход, предлагая использовать в таких случаях многомерные стохастические матрицы. Многомерные матрицы могут стать перспективным инструментом в физике элементарных частиц, так как позволяют не только в наглядной форме представлять совокупность свойств частицы, но и описывать взаимодействие элементарных частиц, результат которого носит вероятностный характер.

Краткая теория пространственных матриц. Основоположник теории многомерных матриц Н.П. Соколов дает следующее определение: *трехмерная матрица порядка n* – это система из n^3 элементов $A_{i,j,k}$ ($i,j,k=1,\dots,n$), расположенных в точках трехмерного пространства, определяемых координатами i,j,k [5]. В работе [4] авторы уточняют данное определение, распространяя его на многомерные матрицы: *p -мерная матрица* – это совокупность $A = \{a_{i_1 \dots i_p}\}$ элементов некоторого типа, где $i_1, \dots, i_p$ – совокупность индексов, принимающих значения от 1 до n_α ($\alpha = 1, \dots, p$), над которыми определены аддитивная и мультипликативная операции умножения. Стандартное обозначение многомерной матрицы $A = \|a_{i_1, \dots, i_p}\|$.

Основные операции над многомерными матрицами подробно рассмотрены в работе [4]. Рассмотрим умножение двух многомерных матриц $A = \|a_{i_1, \dots, i_p}\|$ и $B = \|b_{i_1, \dots, i_q}\|$ с размерностями p и q . Совокупность индексов данных матриц $i_1, \dots, i_p$ и $i_1, \dots, i_q$ разобьем на четыре группы, каждая из которых содержит κ , λ , μ и ν индексов. При этом должны выполняться условия: $\kappa + \lambda + \mu = p$ и $\lambda + \mu + \nu = q$. Для полученных групп индексов будем использовать следующие обозначения: $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$, $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$, $c = (c_1, \dots, c_\mu)$ и $m = (m_1, \dots, m_\nu)$. Тогда рассматриваемые матрицы можно представить в виде $A = \|a_{lsc}\|$ и $B = \|b_{scm}\|$, причем индексы групп s и c у данных матриц совпадают и называются соответственно скоттовыми и кэлиевыми. Матрица $C = \|c_{lsc}\|$, для которой отдельные элементы вычисляются по формуле $c_{lsm} = \sum_c a_{lsc} \times b_{scm}$, называется $(\lambda + \mu)$ -свернутым произведением и обозначается ${}^{\lambda, \mu}(A \times B)$.

Матрица $P = \|p_{i_1, i_2, i_3}\|$ называется стохастической, если $p_{i_1, i_2, i_3} \geq 0$ и $\sum p_{i_1, i_2, i_3} = 1$, $i_1, i_2, i_3 \in \Gamma$ (Γ – произвольный конечный алфавит) для всех $i_3 \in \Gamma$.

Матрица свойств элементарных частиц. Элементарную частицу можно рассматривать как математический объект, характеризующийся строго определенным ансамблем свойств, таких как электрический заряд (q), энергия (E), импульс (p), момент импульса (M), барионный заряд (B), лептонный заряд (L), спин (s), изотопический спин (T), странность (S), четность (P) и пр. Свойства частиц зависят от принадлежности частицы к определенному классу, ее «личных» параметров и условий эксперимента, а также могут по-разному «вести себя» при взаимодействиях.

Электрический заряд (q) можно считать «личным» свойством частицы, так как данный параметр не зависит от ее принадлежности к какому-либо классу. Частицы разных классов могут иметь одинаковый электрический заряд (например, электрон e^- и π^- мезон), а частицы одного класса – разный электрический заряд (K^+ и K^- мезоны). Мезоны и барионы, различающиеся только электрическим зарядом, объединяются в зарядовые мультиплеты на основе изотопического спина (T). Например, для группы π -мезонов $T=1$, а для отдельных частиц группы проекции изотопического спина T_z равны $+1$, 0 , -1 соответственно для π^+ , π^0 и π^- мезонов.

Некоторые свойства зависят от принадлежности частицы к определенному классу. Например, все бозоны имеют целый спин ($s=0; 1, \dots$), а фермионы – полуцелый ($s=\pm 1/2; 3/2, \dots$). Лептоны имеют лептонный заряд $L=+1$ (антилептоны $L=-1$), для всех остальных частиц, не принадлежащих к классу лептонов, $L=0$. Аналогично барионы характеризуются барионным зарядом $B=+1$ (антибарионы $B=-1$), все остальные частицы, не принадлежащие к классу барионов, имеют $B=0$. Внутренняя четность частицы зависит от поведения ψ -функции при инверсии пространства и также определяется принадлежностью частицы к определенному классу, но, в отличие от лептонного и барионного зарядов, классы частиц могут иметь одинаковую четность. Например, лептоны и барионы имеют одинаковую четность $P=+1$, а антилептоны и антибарионы – $P=-1$.

Странность (S) не является независимым свойством, а определяется через средний электрический заряд $\bar{q}$ зарядового мультиплета и барионный заряд: $S=2\bar{q}-B$. Например, для нуклонов (протона и нейтрона) $S=2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$.

Ряд параметров, таких как энергия (E), импульс (p) и момент импульса (M) зависит от условий эксперимента и скорости движения частицы.

Также свойства частиц можно классифицировать на основе выполнения законов сохранения. Например, такие свойства, как энергия (E) и импульс (p), сохраняются при любых взаимодействиях, странность (S) сохраняется при сильных и электромагнитных взаимодействиях, а изотопический спин (T) сохраняется только при сильных взаимодействиях.

Таким образом, каждой элементарной частице можно сопоставить многомерную матрицу, в которой численное значение каждого свойства (элемента с индексом i) зависит от выполнения целого ряда условий, таких как принадлежность частицы к определенному классу из множества (бозон–фермион; лептон–мезон–барион; частица–античастица и пр.), конкретные условия эксперимента (начальная энергия частицы, действие электромагнитных полей) и пр.

Остановимся на рассмотрении тех свойств частицы, которые не зависят от условий эксперимента. Можно сказать, что каждое свойство частицы определяет кортеж параметров {класс: бозон–фермион; класс: лептон–мезон–барион; класс: частица–античастица; зарядовый мультиплет и пр.}. В этом случае матрица свойств может иметь следующий вид: элементы с индексами i_1 соответствуют свойствам частицы; элементы с индексами $i_2 - i_n$ определяют принадлежность частицы к одному из группы следующих классов: лептон–мезон–барион; бозон–фермион; частица–античастица и пр. Если элемент с индексом $i_2 - i_n$ принимает значение «истина» (данная частица соответствует указанному классу), то элемент i_1 принимает значение, отличное от нуля, в противном случае элемент i_1 оказывается равным нулю.

В двумерном пространстве индексов i_1 и i_2 матрица свойств частицы имеет вид, указанный в таблице 1.

Таблица 1

Двумерная матрица свойств частицы

i_1 – индекс свойства i_2 – индекс класса		$i_2=1$	$i_2=2$	$i_2=3$
		лептон	мезон	барион
$i_1=1$	электрический заряд (q)	?	?	?
$i_1=2$	барионный заряд (B)	0	0	+1
$i_1=3$	лептонный заряд (L)	+1	0	0
$i_1=4$	четность (P)	+1	?	+1
$i_1=5$	спин (s)	?	?	?
$i_1=6$	изотопический спин (T)	0	?	?
$i_1=7$	странность (S)	0	?	?

Знаком «?» обозначены свойства, которые невозможно определить только из принадлежности частицы к одному из трех указанных классов. Для нахождения их численных характеристик необходимо задать другие параметры (новые «измерения» матрицы). Например, для нахождения спина нужна информация о принадлежности частицы к классу: бозон–фермион, а для нахождения странности и изотопического спина – информация о принадлежности частицы к определенному зарядовому мультиплету.

Если добавить к двумерной матрице еще одно измерение, например зарядовый мультиплет, то получится трехмерная матрица (рис. 1). В этой матрице мы можем определить такое свойство частицы, как странность. Например, для нуклона это точка А с координатами (S, дуплет, барион), в которую мы помещаем значение странности $S=0$.

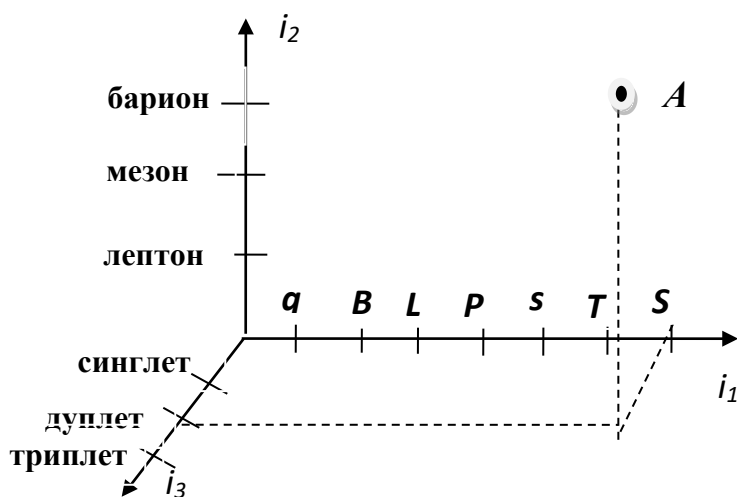


Рис.1. Трехмерная матрица свойств частицы

Стохастические матрицы взаимодействия элементарных частиц. В результате столкновения частиц появляются новые частицы, при этом свойства «родительских» и «рожденных» частиц можно задать при помощи многомерных матриц, а сам процесс «рождения» – операцией умножения матриц. Для описания процесса столкновения частиц матрицы потребуются добавление новых индексов. Так, необходимо учесть свойства частиц, зависящие от условий эксперимента и влияющие на результат столкновения: энергию (E), импульс (p) и момент импульса (M). Также необходимо учитывать характер взаимодействия (сильное, электромагнитное или слабое), так как ряд свойств не сохраняется при слабых взаимодействиях. Например, распад $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ происходит в результате сильного взаимодействия, в результате которого все свойства «родительской» частицы и пары «рожденных» частиц сохраняются. Распад $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ происходит в результате слабого взаимодействия, в котором, например, не выполняется закон сохранения странности и четности.

Такие многомерные матрицы можно привести к условно-трехмерным, разделив их индексы на группы: скоттовы индексы $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$ – свойства, которые в результате взаимодействия сохраняются (например, тип частицы, электрический заряд, барионный и лептонный заряды и пр.), кэлиевы индексы $c = (c_1, \dots, c_\mu)$ – свойства, которые в результате взаимодействия не сохраняются (например, странность при слабом взаимодействии), свободные индексы – свойства, которые зависят от условий эксперимента и могут принимать значения, не зависящие от параметров самой частицы (например, энергия и импульс).

Распад и рождение новых частиц носят вероятностный характер, поэтому для их описания применимы стохастические матрицы. Вероятность рождения частицы i_3 в результате взаимодействия частиц i_1 и i_2 можно представить как стохастическую матрицу $P = \|p_{i_1, i_2, i_3}\|$, в которой элемент P_{i_3} определяет вероятность появления частицы i_3 от «родительской» пары i_1 и i_2 за случайное время τ . Аналогичным образом можно построить стохастическую матрицу распада частицы i_3 на две «дочерние» частицы i_1 и i_2 .

Выводы. Элементарная частица характеризуется уникальным ансамблем свойств, таких как электрический заряд, барионный заряд, лептонный заряд, странность, четность и пр. Для однозначного определения этих свойств и идентификации частицы как математического объекта каждой частице можно сопоставить многомерную матрицу. В такой многомерной матрице отдельному свойству соответствует кортеж значений {свойство, класс частиц, условия эксперимента, характер взаимодействия}. Взаимодействие частиц в подобном случае можно представить в виде произведения матриц «родительских» частиц. Так как распад и рождение частиц носят вероятностный характер, результирующую матрицу следует рассматривать как стохастическую.

Литература

1. Попов Н.Н., Кошелев А.А. Структура пространства-времени и ее связь со свойствами элементарных частиц // Евразийское Научное Объединение. 2018. № 5-1(39). С. 6-13.
2. Герман Ф. Геометрическое моделирование характеристик элементарных частиц и кварков. 2024. URL: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcgclefindmkaj/https://kiwdresden.de/pdfText/artikel/Teilchen.pdf> (дата обращения: 24.02.2026).
3. Максимов В.М. Кубические стохастические матрицы и их вероятностные интерпретации // Теория вероятностей и ее применение. 1996. Т. 41. С. 98-106.
4. Мунерман В.И., Мунерман Д.В., Синицын И.Н. Условно-трехмерные матрицы и их применения // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2024. Вып. 25. С. 124-130.

5. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=464080> (дата обращения: 24.02.2026).

E.V. Kislyakova, V.I. Munerman
Smolensk State University

MULTIDIMENSIONAL MATRICES IN PARTICLE PHYSICS

Keywords: *multidimensional matrices algebra, stochastic matrices, properties of elementary particles, interaction of elementary particles.*

Abstract. *Multidimensional matrices are a versatile tool for describing complex objects characterized by a multitude of disparate properties. One promising area of application for multidimensional matrices may be elementary particle physics. This article explores the feasibility of using multidimensional matrices to represent the ensemble of elementary particle properties in a clear and easily interpretable form. The use of stochastic matrices to describe the decay and production processes of elementary particles, which are probabilistic in nature, is discussed.*

Н.Ю. Козловская

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

УДК 517.518.45

О ПРИЗНАКАХ СХОДИМОСТИ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ И ДИНИ-ЛИПШИЦА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Ключевые слова: *рациональная аппроксимация, рациональные тригонометрические ряды Фурье, признаки сходимости.*

В статье получены признаки сходимости рациональных тригонометрических рядов Фурье, аналогичные признакам Жордана – Дирихле и Дини – Липшица для полиномиальных рядов Фурье, при условии полноты соответствующей системы рациональных функций.

Введение. Впервые ряды Фурье появились в трудах Ж. Фурье, посвященных решению задач теплопроводности. В ходе их изучения было установлено, что одной непрерывности функции недостаточно для сходимости ее ряда Фурье. Это обусловило актуальность поиска дополнительных условий, накладываемых на функцию, которые гарантировали бы сходимость. К настоящему моменту известно множество различных достаточных условий поточечной и равномерной

сходимости рядов Фурье. Особое место среди них занимают классические признаки Дини – Липшица и Жордана – Дирихле.

Обобщением полиномиальных рядов стали рациональные тригонометрические ряды Фурье, построенные М.М. Джрбашяном [1]. Им же было получено компактное выражение для ядра Дирихле и доказаны аналоги признаков Дини – Липшица и Жордана – Дирихле для случая, когда полюсы рациональных функций не имеют предельных точек на единичной окружности.

В нашей работе исследуется сходимость рациональных тригонометрических рядов Фурье при условии полноты соответствующей системы рациональных функций.

Основная часть. Пусть $\alpha_0 = 0$, α_k , $k \in \mathbb{N}$, – произвольные комплексные числа, такие что $|\alpha_k| < 1$.

Рассмотрим систему рациональных функций

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_k(z) = \frac{\sqrt{1-|\alpha_k|^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-\alpha_k z} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{z-\alpha_j}{1-\alpha_j z}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

на единичной окружности $|z|=1$.

Введем обозначение:

$$\Phi_k(z) = \begin{cases} \varphi_k(z), & k \in \mathbb{N}_0, \\ \overline{\varphi_{-k}(z)}, & k < 0. \end{cases}$$

В [1] было показано, что система функций $\{\Phi_n(z)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ ортогональна на окружности $|z|=1$.

Пусть функция $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$. Разложим функцию $f(x)$ в тригонометрический рациональный ряд Фурье по системе функций $\{\Phi_n(z)\}$:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \Phi_k(z), \quad z = e^{ix}. \quad (2)$$

Коэффициенты Фурье для ряда (2) вычисляются по формулам

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\Phi_k(e^{ix})} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Из [1] следует, что частичную сумму ряда (2) можно записать в виде

$$S_n(x, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$D_n(x, t) = \frac{\sin \lambda_n(x, t)}{\sin \frac{t-x}{2}}, \quad (5)$$

где

$$\lambda_n(x, t) = \int_x^t \lambda_n(u) du, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

$$\lambda_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}, \quad \theta_k = \arg \alpha_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

Выполним в (4) замену $t \leftarrow x + t$, с учётом 2π -периодичности функций $f(t)$ и $D_n(x, t)$ получим:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(x, x+t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin \lambda_n(x, x+t)}{\sin \frac{t}{2}} dt. \quad (6)$$

На полюсы наложим далее условие

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|) = +\infty. \quad (A)$$

Отметим, что равенство (A) является необходимым и достаточным условием полноты системы функций $\left\{ \frac{1}{z - \alpha_k}, \frac{1}{1 - \overline{\alpha_k} z} \right\}_{k=1}^{\infty}$ в $C_{2\pi}$ [2].

Лемма 1. Пусть $\alpha_1 = 0$ и выполняется условие (A). Тогда для любой функции $\varphi(t) \in L_1[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(t) \exp(\pm i \lambda_n(x, t)) dt = 0$$

равномерно относительно $x, x \in \mathbb{R}$.

Доказательство леммы 1 приведено в работе [3].

На основании результатов, установленных в работе [1], несложно получить, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x, x+t) dt = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Лемма 2. Пусть последовательность $\{\alpha_k\}$ такова, что

$$\alpha_{2k} = -\alpha_{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (B)$$

Тогда

$$\int_0^{\pi} D_n(x, x+t) dt = \int_0^{\pi} D_n(x, x-t) dt = \pi.$$

Доказательство. Согласно равенству (7),

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x, x+t) dt = 2\pi.$$

При заданном условии (В) подинтегральная функция $D_n(x, x+t)$ является π -периодической. Поэтому

$$\int_0^{\pi} D_n(x, x+t) dt = \int_{-\pi}^0 D_n(x, x+t) dt = \pi.$$

В интеграле по промежутку $[-\pi, 0]$ сделаем замену переменной $t \sim -t$. В результате получим:

$$\int_0^{\pi} D_n(x, x+t) dt = \int_0^{\pi} D_n(x, x-t) dt = \pi.$$

Лемма 3. Если функция $f(x)$ монотонно возрастает в окрестности $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta > 0$, и непрерывна в точке x , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) D_n(x, t) dt = 2\pi f(x).$$

Если выполняется условие (В) и функция монотонно возрастает в окрестности $(x-\delta, x+\delta)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-\delta}^x f(t) D_n(x, t) dt = \pi f(x-0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+\delta} f(t) D_n(x, t) dt = \pi f(x+0).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда выполняется условие (В). Имеем:

$$\int_x^{x+\delta} f(t) D_n(x, t) dt = \int_x^{x+\delta} f(x+0) D_n(x, t) dt + \int_x^{x+\delta} (f(t) - f(x+0)) D_n(x, t) dt.$$

Далее получим:

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\delta} f(x+0) D_n(x, t) dt &= f(x+0) \int_x^{x+\delta} \frac{\sin \lambda_n(x, t)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt = \\ &= f(x+0) \cdot \left(\int_x^{x+\pi} \frac{\sin \lambda_n(x, t)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt - \int_{x+\delta}^{x+\pi} \frac{\sin \lambda_n(x, t)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt \right). \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x+\delta}^{x+\pi} \frac{\sin \lambda_n(x, t)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt = 0,$$

а согласно теореме 2, с учетом π -периодичности подинтегральной функции,

$$\int_x^{x+\pi} \frac{\sin \lambda_n(x, t)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt = \pi.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+\delta} f(x+0) D_n(x, t) dt = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x+0) \cdot \left(\int_x^{x+\pi} \frac{\sin \lambda_n(x, t)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt - \int_{x+\delta}^{x+\pi} \frac{\sin \lambda_n(x, t)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt \right) = \pi f(x+0). \end{aligned}$$

Теперь исследуем интеграл

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+\delta} (f(t) - f(x+0)) D_n(x, t) dt = \\ & = \int_x^{x+h} (f(t) - f(x+0)) D_n(x, t) dt + \int_{x+h}^{x+\delta} (f(t) - f(x+0)) D_n(x, t) dt. \end{aligned}$$

В силу того, что функция $f(x)$ монотонно возрастает на $(x-\delta, x)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h > 0, h < \delta: \quad 0 \leq f(x+h) - f(x+0) < \varepsilon, \quad \forall t \in (x, x+h),$$

функция $f(t) - f(+0)$ монотонно возрастает $(x, x+h)$, поэтому, согласно 2-й теореме о среднем, при некотором $\xi \in (x, x+h)$

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+h} (f(t) - f(x+0)) D_n(x, t) dt = (f(x+h) - f(x+0)) \int_{\xi}^{x+h} D_n(x, t) dt, \\ & \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x+0)) D_n(x, t) dt \right| < \varepsilon \left| \int_{\xi}^{x+h} D_n(x, t) dt \right|. \end{aligned}$$

По лемме 1 интеграл $\int_{x+h}^{x+\delta} (f(t) - f(x+0)) D_n(x, t) dt$ сходится к нулю

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{x+\delta} (f(t) - f(x+0)) D_n(x, t) dt = 0.$$

Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+\delta} f(t) D_n(x, t) dt = \pi f(x+0).$$

Аналогично,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-\delta}^x f(t) D_n(x, t) dt = \pi f(x-0).$$

Рассмотрим случай, когда функция f непрерывна в точке x .
Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)D_n(x,t)dt &= f(x) \int_{x-\delta}^{x+\delta} D_n(x,t)dt + \\ &+ \int_{x-\delta}^x (f(t) - f(x))D_n(x,t)dt + \int_x^{x+\delta} (f(t) - f(x))D_n(x,t)dt. \end{aligned}$$

Аналогично доказанному выше

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-\delta}^{x+\delta} (f(t) - f(x))D_n(x,t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-\delta}^x (f(t) - f(x))D_n(x,t)dt = 0;$$

$$\begin{aligned} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)D_n(x,t)dt &= \\ = f(x) \cdot \left(\int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{\sin \lambda_n(x,t)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt - \int_{x+\delta}^{x+\pi} \frac{\sin \lambda_n(x,t)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt - \int_{x-\pi}^{x-\delta} \frac{\sin \lambda_n(x,t)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt \right) &\rightarrow 2\pi f(x), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть функция $f \in L_1(-\pi, \pi)$ и в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, точки $x_0 \in (-\pi, \pi)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда при выполнении условий (A) и (B) справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0, f) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Если функция f непрерывна в точке x_0 , то при выполнении условия (A)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0, f) = f(x_0).$$

Доказательство. Как известно, функция ограниченной вариации представима в виде разности двух монотонно возрастающих функций; кроме того, если функция ограниченной вариации непрерывна, то ее можно представить как разность двух монотонно возрастающих и непрерывных функций. Поэтому достаточно доказать теорему 1 для монотонно возрастающих функций.

Имеем

$$\begin{aligned} S_n(x_0, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x_0, t)dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)D_n(x_0, t)dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(t)D_n(x_0, t)dt + \frac{1}{2\pi} \int_{x_0+\delta}^{\pi} f(t)D_n(x_0, t)dt. \end{aligned}$$

Согласно лемме 3,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t) D_n(x_0, t) dt = \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}.$$

А по лемме 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{x_0+\delta}^{\pi} f(t) D_n(x_0, t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(t) D_n(x_0, t) dt = 0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. Пусть для функции $f \in L_1(-\pi, \pi)$ в точке $x_0 \in (-\pi, \pi)$ определены пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, и интегралы

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+0)|}{t} dt, \quad \int_0^{\pi} \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-0)|}{t} dt$$

сходятся. Тогда при выполнении условий (А) и (В) справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0, f) = \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}.$$

Если функция f непрерывна в точке x_0 , то при выполнении условия (А)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0, f) = f(x_0).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда выполняются условия (А) и (В). Частичная сумма $S_n(x_0, f)$ рационального ряда Фурье представима в виде

$$\begin{aligned} S_n(x_0, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t) D_n(x_0, x_0+t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x_0+t) D_n(x_0, x_0+t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x_0-t) D_n(x_0, x_0-t) dt. \end{aligned}$$

Поскольку согласно лемме 2,

$$f(x_0-0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0-0) D_n(x_0, x_0-t) dt, \quad f(x_0+0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0+0) D_n(x_0, x_0+t) dt,$$

получим:

$$\begin{aligned} S_n(x_0, f) - \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0+t) - f(x_0+0)) D_n(x_0, x_0+t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0-t) - f(x_0-0)) D_n(x_0, x_0-t) dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} (f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) D_n(x_0, x_0 + t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{(f(x_0 + t) - f(x_0 + 0))}{t} \cdot \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \sin \lambda_n(x_0, x_0 + t) dt. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\frac{t}{\sin \frac{t}{2}}$ непрерывна на $[0, \pi]$, а следовательно, принадлежит $L_1[0, \pi]$, то в силу сходимости интеграла $\int_0^{\pi} \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)|}{t} dt$ функция $\frac{(f(x_0 + t) - f(x_0 + 0))}{t} \cdot \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \in L_1[0, \pi]$.

Тогда, согласно лемме 1,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} (f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) D_n(x_0, x_0 + t) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{(f(x_0 + t) - f(x_0 + 0))}{t} \cdot \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \sin \lambda_n(x_0, x_0 + t) dt = 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)) D_n(x_0, x_0 - t) dt = 0.$$

В случае, если функция f непрерывна в точке x_0 ,

$$S_n(x_0, f) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - f(x_0)) D_n(x_0, x_0 + t) dt,$$

откуда путем рассуждений, аналогичных приведенным выше, получим утверждение теоремы.

Литература

1. Джрбашян М.М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Известия Академии наук Армянской ССР. Серия физико-математических наук. 1956. Т. 9, № 7. С. 3–28.
2. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.
3. Козловская Н.Ю., Ровба Е.А. О сопряженных рациональных рядах Фурье и их аппроксимационных свойствах // Труды Института математики. 2023. Т. 13, № 1. С. 58–69.

N.Yu. Kazlouskaya
Grodno State University

**ON THE JORDAN – DIRICHLET AND DINI – LIPSCHITZ
CONVERGENCE TESTS FOR RATIONAL FOURIER SERIES**

Keywords: *rational approximation, rational trigonometric Fourier series, convergence tests.*

Abstract. *In this paper we obtained analogs of the Jordan – Dirichlet and Dini – Lipschitz convergence tests for rational trigonometric Fourier series under the condition of completeness of the corresponding system of rational functions.*

И.В. Коровкин, А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков
МГУ имени М.В. Ломоносова

УДК 517.954

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С РАЗРЫВНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Ключевые слова: *задача Дирихле, уравнение Лапласа, неограниченная область, разрывная граничная функция.*

В верхней полуплоскости рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа. Подробно изучается модельная ситуация, когда граничная функция имеет одну точку разрыва первого рода, а в остальных точках является гладкой. Обсуждаются свойства решений такой задачи.

В работах [1; 2] на примерах задачи Коши для уравнения теплопроводности и задачи Дирихле для уравнения Лапласа изучался вопрос о скорости приближения решений в метрике Хаусдорфа к простейшей разрывной начальной и, соответственно, граничной функции. В качестве такой модельной разрывной функции выбиралась функция Хевисайда. Вместе с тем в приложениях и в задачах анализа возникает потребность рассматривать начальные (граничные) функции с конечным (или даже счётным) множеством точек разрыва первого рода. Вопрос об оценках отклонения по Хаусдорфу решений от граничных данных приводит к необходимости более подробно изучить поведение решения в окрестности точки разрыва.

Перейдём к точной постановке задачи, обозначив для краткости $\Pi^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $\bar{\Pi}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ открытую (замкнутую) верхнюю полуплоскость. Классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа в области Π^+ с непрерывной граничной

функцией φ состоит в нахождении функции $u = u(x, y)$, удовлетворяющей условиям

$$\Delta u = 0, (x, y) \in \Pi^+, \quad (1)$$

$$\lim_{\Pi^+ \ni (x, y) \rightarrow (\zeta, 0)} u(x, y) = \varphi(\zeta), \zeta \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

В курсе уравнений математической физики (см., например, [3, гл. 4]) доказывается, что для любой функции $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$ существует решение $u \in C^2(\Pi^+) \cap C(\bar{\Pi}^+) \cap B(\bar{\Pi}^+)$, которое будет единственным в этом классе. При указанных предположениях относительно граничной функции φ упомянутое решение даётся формулой Пуассона

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi, (x, y) \in \Pi^+. \quad (3)$$

Введём обозначение для ядра Пуассона

$$K(x, y; s) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{(s - x)^2 + y^2}, x, s \in \mathbb{R}, y \neq 0. \quad (4)$$

Наши результаты показывают, что формула Пуассона позволяет находить решение задачи Дирихле для более широкого класса граничных функций.

Теорема 1. Для любой $\varphi \in B(\mathbb{R}) \cap L_{1,loc}(\mathbb{R})$ функция

$$v(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y; s) \varphi(s) ds, x \in \mathbb{R}, y \neq 0, \quad (5)$$

является гармонической и ограниченной как в области Π^+ , так и в области $\Pi^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$. При этом

$$\operatorname{ess\,inf}_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) \leq \pm v(x, y) \leq \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t), (x, y) \in \Pi^\pm, \quad (6)$$

где равенство (хотя бы одно) возможно лишь в случае, когда $v(x, y)$ есть тождественная константа в (соответствующей) области Π^+ или Π^- .

Следующий результат описывает поведение интеграла Пуассона (5) в окрестности точки разрыва первого рода граничной функции φ .

Теорема 2. Пусть граничная функция φ имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_c(x) + A\theta(x), & x \neq 0, \\ B, & x = 0, \end{cases}$$

где $\varphi_c \in C(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$, θ – функция Хевисайда, A, B – произвольные вещественные постоянные, $A > 0$. Тогда множество предельных точек функции v из формулы (5) при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ по области Π^+ есть отрезок $[\varphi_c(0), \varphi_c(0) + A]$.

Отметим, что значение $\varphi(0) = B$ граничной функции в точке разрыва никак не влияет на множество предельных точек функции v .

Приведём ещё одно свойство, характеризующее поведение интеграла Пуассона (5) в окрестности границы.

Утверждение. Пусть функция $\varphi \in B(\mathbb{R})$ и непрерывна на $\mathbb{R}$ всюду, за исключением изолированных точек разрыва первого рода, а функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ такова, что

$$\int_{-\infty}^0 f(s) ds = \int_0^{+\infty} f(s) ds = \frac{1}{2}.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо предельное соотношение

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{s-x}{\varepsilon}\right) \varphi(s) ds \rightarrow \frac{1}{2} (\varphi(x-0) + \varphi(x+0)), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Ясно, что функция

$$f(s) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}, \quad s \in \mathbb{R},$$

удовлетворяет всем условиям утверждения.

Следствие. Пусть $\varphi \in B(\mathbb{R})$ и непрерывна на $\mathbb{R}$ всюду, за исключением изолированных точек разрыва первого рода. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо предельное соотношение

$$v(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds \rightarrow \frac{1}{2} (\varphi(x-0) + \varphi(x+0)), \quad y \rightarrow +0.$$

Данное следствие поясняет, в каком смысле понимается условие (2) в случае разрывной функции φ .

Как видно из формулы Пуассона (3), изменение функции φ на любом счётном подмножестве $\mathbb{R}$ не изменяет интеграла, а следовательно, и саму функцию u . Это приводит, например, к следующему обобщению задачи (1), (2). Для непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$ функции φ требуется найти гармоническую и ограниченную в $\bar{\Pi}^+$ функцию u , удовлетворяющую (2) при каждом $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$.

Теорема 3. Пусть $\varphi \in B(\mathbb{R})$ и непрерывна на $\mathbb{R}$ всюду, за исключением, быть может, конечного множества точек $\{a_1, \dots, a_N\}$. Тогда существует, и притом единственная, гармоническая и ограниченная в Π^+ функция u , удовлетворяющая (2) для всех $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$.

Отметим, что обобщённая задача Дирихле в ограниченной области с разрывной граничной функцией обсуждается в [3, гл. 4; 4, гл. 4].

Литература

1. Kostin A.B., Sherstyukov V.B. Application of the Hausdorff Metric in Model Problems with Discontinuous Functions in Boundary Conditions // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 274, № 1. P. 511–522.
2. Костин А.Б., Садекова Е.Х., Шерстюков В.Б. О приближении в метрике Хаусдорфа начального условия решением задачи Коши для уравнения теплопроводности // Системы компьютерной математики и их приложения: межвузовский сборник научных трудов. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2023. Вып. 24. С. 268–273.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 798 с.
4. Привалов И.И. Субгармонические функции. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937. 200 с.

I.V. Korovkin, A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov
Lomonosov Moscow State University

MODEL PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION WITH A DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITION

Keywords: *Dirichlet problem, Laplace equation, unbounded domain, discontinuous boundary condition.*

Abstract. *In the upper half-plane, a Dirichlet problem for the Laplace equation is considered. The model situation where the boundary function has one discontinuity point of the first kind and is smooth elsewhere is studied in detail. Some properties of the solution to this problem are discussed.*

А.Б. Костин, С.Д. Макаров
МГУ имени М.В. Ломоносова

УДК 517.9

КОРРЕКТНОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КОНЕЧНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Ключевые слова: *обратная задача, производная Капуто, система уравнений дробного порядка, функция Миттаг–Леффлера, унитарное пространство, базисность системы элементов.*

Для линейной системы дифференциальных уравнений дробного порядка с неизвестной правой частью изучается обратная задача о нахождении источника. Рассмотрен случай конечномерного

унитарного пространства U . Доказаны критерии разрешимости этой обратной задачи как для диагонализуемого оператора, так и для произвольного линейного оператора в U .

В работах [1; 2] исследовалась обратная задача о восстановлении источника в абстрактном уравнении с производной Герасимова–Капуто в банаховом пространстве. Для неё были получены достаточные условия единственности и разрешимости. Здесь мы рассматриваем модельный случай обратной задачи в унитарном пространстве конечной размерности. Получены результаты, которые являются новыми даже для такой простейшей ситуации.

Пусть $\alpha \in (0,1)$, $T > 0$ фиксированы. Обозначим

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

где Γ – гамма-функция. Производной Капуто (Герасимова – Капуто) порядка α от непрерывной функции q называется

$$\begin{aligned} (D_t^\alpha q)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{q(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau - \frac{q(0)}{t^\alpha} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{d}{dt} \int_0^t [q(\tau) - q(0)] g_{1-\alpha}(t-\tau) d\tau, \quad t > 0. \end{aligned}$$

В унитарном пространстве $U = \mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением $(a, b) = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k$ рассмотрим задачу о нахождении пары $y \in AC([0, T], U)$ и $p \in U$ из условий

$$(D_t^\alpha y)(t) = Ay(t) + \Phi(t)p, \quad t > 0, \quad y(0) = y^0, \quad (1)$$

$$y(T) = y^1, \quad (2)$$

где заданными являются: $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ матрица, $a_{ij} \in \mathbb{C}$; столбцы $y^0, y^1 \in U$; $\Phi(t) = (\varphi_{ij}(t))$ – $n \times n$ матрица, $\varphi_{ij}(t) \in C([0, T], \mathbb{C})$. Если в (1) элемент $p \in U$ известен, то решение прямой задачи (1) существует, единственно и может быть найдено по формуле

$$y(t) = E_{\alpha,1}(t^\alpha A)y^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) \Phi(\tau)p d\tau.$$

Здесь

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$$

есть обобщённая функция Миттаг–Леффлера переменной $z \in \mathbb{C}$ с параметрами $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{C}$. При сделанных предположениях решение $y \in AC([0, T], U)$ для любого $p \in U$.

Задачу (1), (2) с $y^0 = y^1 = 0$ будем обозначать $(1_0), (2_0)$. Она всегда имеет тривиальное решение $y(t) = 0, p = 0$. В силу линейности обратной задачи (1), (2) единственность её решения равносильна отсутствию ненулевых решений у однородной обратной задачи $(1_0), (2_0)$.

Теорема 1. Пусть матрица A диагонализуема; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – её собственные значения; $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис пространства U из собственных векторов сопряжённой матрицы A^* , отвечающих собственным значениям $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$, а λ_0 – фиксированное число из резольвентного множества матрицы A . Определим систему элементов пространства U по правилу

$$\psi_k = (\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_0) \int_0^T (T - \tau)^{\alpha-1} \Phi^*(\tau) E_{\alpha, \alpha}((T - \tau)^\alpha A^*) e_k d\tau, \quad k = 1, \dots, n.$$

Решение обратной задачи (1), (2) единственно тогда и только тогда, когда $\psi_1, \dots, \psi_n$ есть базис в U .

Введём линейный оператор $B: U \rightarrow U$, действующий по правилу

$$Bp = \int_0^T (T - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((T - \tau)^\alpha A) \Phi(\tau) p d\tau.$$

Теорема 2. Обратная задача (1), (2) однозначно разрешима при любых $y^0, y^1 \in U$ тогда и только тогда, когда $\text{Ker } B = \{0\}$.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Обратная задача (1), (2) однозначно разрешима при любых $y^0, y^1 \in U$ тогда и только тогда, когда $\psi_1, \dots, \psi_n$ есть базис в U .

Для скалярного случая, т.е. когда $\Phi(t) = \varphi(t)I$ с единичной матрицей (тождественным оператором) I , формулировки результатов упрощаются.

Следствие 2. Пусть функция $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ и выполнены все условия теоремы 1. Введём характеристическую функцию задачи (1), (2) по формуле

$$L(\lambda) = \int_0^T (T - \tau)^{\alpha-1} \varphi(\tau) E_{\alpha, \alpha}((T - \tau)^\alpha \lambda) d\tau, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Обратная задача (1), (2) однозначно разрешима при любых $y^0, y^1 \in U$ тогда и только тогда, когда ни один нуль целой функции $L(\lambda)$ не является собственным значением матрицы A .

При $\alpha = 1$ характеристическая функция принимает вид

$$L(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda(T-\tau)} \varphi(\tau) d\tau$$

и хорошо известна в теории обратных задач для уравнений первого порядка (см., например, [3]).

Следствие 2 даёт удобный способ построения примеров неединственности решения обратной задачи. Действительно, пусть какое-то собственное значение λ матрицы A является нулём характеристической функции (3), а f – собственный вектор матрицы A , отвечающий этому λ . Тогда, как показывают несложные вычисления, пара

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \varphi(\tau) E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \lambda) d\tau f, \quad p = f$$

является нетривиальным решением однородной обратной задачи (1_0) , (2_0) , в которой $\Phi(t) = \varphi(t)I$.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих наши результаты.

Пример 1. В двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим обратную задачу с диагональной матрицей $\Phi(t) = \text{diag}(\varphi_j(t))$, где $\varphi_j(t) \geq 0$, непрерывны и не равны нулю тождественно на $[0, T]$. Пусть A – вещественная симметричная матрица, а $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ – её собственные значения с соответствующими ортонормированными собственными векторами e_1, e_2 . Тогда с точностью до ненулевых множителей имеем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} \Phi(\tau) E_{\alpha,\alpha}((T-\tau)^\alpha \lambda_1) e_1 d\tau \equiv \Lambda_1 e_1, \\ \psi_2 &= \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} \Phi(\tau) E_{\alpha,\alpha}((T-\tau)^\alpha \lambda_2) e_2 d\tau \equiv \Lambda_2 e_2. \end{aligned}$$

Здесь $\Lambda_k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k)$ – диагональные матрицы с элементами

$$\lambda_j^k = \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} \varphi_j(\tau) E_{\alpha,\alpha}((T-\tau)^\alpha \lambda_k) d\tau, \quad j, k = 1, 2.$$

Функция Миттаг – Леффлера $E_{\alpha,\alpha}(t) > 0$ при всех $t \geq 0$, а $\varphi_j(t) \not\equiv 0$ на $[0, T]$. Следовательно, $\lambda_j^k > 0$ при всех $j, k = 1, 2$. Докажем, что векторы ψ_1, ψ_2 линейно независимы. Предположим, что $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 = 0$ с некоторыми коэффициентами c_1, c_2 , для которых $|c_1| + |c_2| \neq 0$. При этом без ограничения общности считаем $c_1 \neq 0$. Используя выражения для ψ_1 и ψ_2 , запишем равенство

$$e_1 = -\frac{c_2}{c_1} \Lambda_1^{-1} \Lambda_2 e_2. \quad (4)$$

Матрица $\Lambda_1^{-1} \Lambda_2 = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_j = \lambda_j^2 / \lambda_j^1 > 0$. Пусть вектор $e_2 = (e_2^1, e_2^2)$. Вычислив скалярное произведение, из (4) получаем

$$0 = (e_1, e_2) = -\frac{c_2}{c_1} (\varepsilon_1 (e_2^1)^2 + \varepsilon_2 (e_2^2)^2).$$

Отсюда $c_2 = 0$, что противоречит (4). Поэтому система ψ_1, ψ_2 образует базис в $\mathbb{R}^2$ и обратная задача с такими матрицами A и Φ корректна.

Пример 2. Рассмотрим скалярный случай при $n = 2$ и $\Phi = I$. Характеристическая функция принимает вид

$$L(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{T^\alpha} E_{\alpha, \alpha}(\lambda s) ds \equiv T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda T^\alpha).$$

При $T \neq 0$ уравнение $L(\lambda) = 0$ эквивалентно уравнению $E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda T^\alpha) = 0$ и имеет бесконечное число корней $\lambda_m, m \in \mathbb{Z}$. Известно (см. [4, с. 33]), что при достаточно больших по модулю m корни простые, комплексные и имеют асимптотику

$$\lambda_m^\alpha = \frac{2\pi i m}{T} + \frac{\ln \alpha}{T} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) T (2\pi i m)^\alpha} + \varepsilon_m,$$

$$\varepsilon_m = \mathcal{O}\left(\frac{\ln |m|}{|m|^{1+\alpha}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|m|^{2\alpha}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2 |m|}{m^2}\right), \quad i^2 = -1.$$

Выберем один из таких комплексных корней и обозначим его λ_0 . Рассмотрим однородную задачу $(1_0), (2_0)$ со специальной матрицей $A = \begin{pmatrix} \text{Re } \lambda_0 & \text{Im } \lambda_0 \\ -\text{Im } \lambda_0 & \text{Re } \lambda_0 \end{pmatrix}$. Очевидно, что пара $y(t) \equiv 0, p = 0$ является тривиальным решением данной задачи. Введём вектор-функцию

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_0 (t-\tau)^\alpha) e_0 d\tau = t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_0 t^\alpha) e_0,$$

где $e_0 = (-i, 1)$ – комплексный собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению λ_0 . Тогда

$$Ay = \lambda y, \quad y(0) = y(T) = 0, \quad D_t^\alpha y = \lambda_0 y + e_0.$$

Следовательно, пара $y(t), e_0$ является решением задачи $(1_0), (2_0)$. Отсюда получаем две нетривиальные пары вещественных решений:

$$y_1(t) = t^\alpha \begin{pmatrix} \text{Im } E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_0 t^\alpha) \\ \text{Re } E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_0 t^\alpha) \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$y_2(t) = t^\alpha \begin{pmatrix} -\operatorname{Re} E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_0 t^\alpha) \\ \operatorname{Im} E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_0 t^\alpha) \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2 показывает, что наличие комплексных собственных значений у оператора A приводит к неединственности решения в линейной обратной задаче.

Литература

1. Глушак А.В. Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 5. С. 684–693.
2. Orlovsky D.G. Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 120, Is. 1. 012042.
3. Эйдельман Ю.С. Двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения с параметром // Докл. АН УССР. Серия А. 1983. № 4. С. 15–18.
4. Попов А.Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функций Миттаг – Леффлера // СМФН. 2011. Т. 40. С. 3–171.

A.B. Kostin, S.D. Makarov

Lomonosov Moscow State University

WELL-POSEDNESS OF THE LINEAR INVERSE PROBLEM FOR A FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION IN THE FINITE – DIMENSIONAL CASE

Keywords: *inverse problem, Caputo derivative, system of fractional-order equations, Mittag–Leffler function, unitary space, basis property of a system of elements.*

Abstract. *For a system of linear differential equations of fractional order with an unknown right-hand side, the inverse problem of finding the source is considered. The case of a finite-dimensional unitary space $\mathbf{U}$ is considered. The criteria for the solvability of this inverse problem are proved for both a diagonalizable operator and an arbitrary linear operator in $\mathbf{U}$.*

М.Я. Мазалов, Е.О. Дергачев

Филиал НИИУ «МЭИ» в г. Смоленске

УДК 517.575

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ЛЕММЫ КЁБЕ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *полианалитические функции, теорема единственности, лемма Кёбе, гармоническая мера.*

В статье получена теорема единственности для полианалитических функций в терминах скорости сходимости к нулю функции на последовательности отрезков.

1. Введение. Напомним (см., например, [1]), что полианалитическими функциями порядка n (кратко – n -аналитическими) называются решения уравнения $\partial^n f / \partial \bar{z}^n = 0$ на открытых подмножествах комплексной плоскости $\mathbb{C}$, где $\partial / \partial \bar{z} = (\partial / \partial x + i \partial / \partial y) / 2$ – оператор Коши – Римана. Каждая функция, n -аналитическая в области D , однозначно представима в виде:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(z) \bar{z}^m, \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, а все f_m – функции, аналитические в D , называемые аналитическими компонентами f . О граничных свойствах полианалитических функций см. обзор М.Б. Балка [1], а также статьи [2], [3].

В недавней работе [4] получена граничная теорема единственности для полианалитических функций в круге по скорости сходимости к нулю функции на достаточно редком множестве, а именно последовательности дуг концентрических окружностей, приближающихся к границе. По существу это аналог леммы Кёбе (см., например, [5, гл. 2, §3, лемма 1]).

Так как класс n -аналитических функций при $n > 1$ не инвариантен относительно конформных отображений (в том числе дробно-линейных преобразований), построение аналога леммы Кёбе для других областей сопряжено с определенными трудностями. В настоящей работе соответствующее утверждение (теорема 1) получено для функций, n -аналитических в прямоугольнике. В силу инвариантности класса полианалитических функций относительно преобразования подобия, а также специфики задачи достаточно ограничиться частным случаем прямоугольника $K = [0, 1] \times [-1, 1]$.

Будем рассматривать граничное поведение функций при $x \rightarrow 0$, при этом их ограниченность в K не предполагается. Ограничения на рост функции не слишком жесткие: существуют такие положительные постоянные M и p , что всюду в K выполнено неравенство:

$$|f(z)| < Mx^{-p}. \quad (2)$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть для произвольного фиксированного α , $0 < \alpha \leq 1/2$, γ_j – последовательность отрезков $\{x = x_j, -\alpha \leq y \leq \alpha\}$,

причем $x_{j+1} < x_j$ и $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0$. Пусть f – функция, n -аналитическая всюду внутри $K = [0,1] \times [-1,1]$ и удовлетворяющая во всех внутренних точках K условию (2). Тогда, если

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{f(x_j + iy)}{(x_j)^{n-1}} = 0 \quad (3)$$

равномерно по всем $y \in [-\alpha, \alpha]$ на отрезках γ_j , то $f \equiv 0$.

Замечание 1. Условие (3) ослабить нельзя, как показывает очевидный пример n -аналитического многочлена $f(x + iy) = x^{n-1}$.

Замечание 2. Ограничения на рост функции f необходимы уже в случае $n = 1$, что вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Для любого α , $0 < \alpha \leq 1/2$, и любой убывающей последовательности $x_j \rightarrow 0$ существует функция f , непостоянная и аналитическая внутри K , такая, что на отрезках $\gamma_j = \{x = x_j, -\alpha \leq y \leq \alpha\}$ равномерно по всем $y \in [-\alpha, \alpha]$:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j + iy) = 0.$$

Доказательство леммы 1. Пусть $K_j = [x_j, 1] \times [-1, 1]$, $E_j = K_j \cup \gamma_{j+1}$ для $j \in \mathbb{N}$. Пусть $f_1(z)$ – функция, равная 1 на компакте K_1 и равная 0 на γ_2 . Так как E_1 – компакт со связным дополнением, по теореме Мергеляна [6] существует многочлен $P_1(z)$, такой, что $|P_1(z) - f_1(z)| < 1/10$ на E_1 .

Далее, для $j > 1$ по индукции строим функцию $f_j(z)$, равную $P_{j-1}(z)$ на K_j и равную нулю на γ_{j+1} , и многочлен $P_j(z)$, такой, что $|P_j(z) - f_j(z)| < 1/10^j$ на E_j .

Последовательность многочленов $\{P_j\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах K° к функции, аналитической внутри K , которую обозначим f . Так как по построению имеем $|f(z)| > 1/2$ на K_1 и $|f(z)| < 2/10^j$ на γ_j , эта функция удовлетворяет всем условиям леммы. Лемма 1 доказана.

Замечание 3. Как ясно из построения, функция, удовлетворяющая условиям леммы 1, может убывать на последовательности отрезков γ_j как угодно быстро.

2. Доказательство теоремы 1. В доказательстве будем использовать согласованные функции. В силу очевидного равенства $\bar{z} = 2x - z$ исходная функция вида (1) однозначно представима в следующей форме:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{n-1} g_m(z) x^m, \quad (4)$$

где все g_m – функции, аналитические внутри K . Они являются подходящими линейными комбинациями функций f_m из (1), в частности,

$$g_0(z) = \sum_{m=0}^{n-1} (-z)^m f_m(z). \quad (5)$$

Для фиксированного $t \in [0,1)$ рассмотрим аналитическую внутри K функцию

$$h_t(z) = \sum_{m=0}^{n-1} g_m(z) t^m \quad (6)$$

и будем ее называть функцией, согласованной с (4) при $x = t$.

При $t > 0$, очевидно, h_t – единственная аналитическая функция, совпадающая с f при $x = t$, а функция h_0 совпадает с g_0 из (5). При этом для любого фиксированного z , лежащего внутри K , имеем:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_t(z) = g_0(z). \quad (7)$$

Функцию g_0 будем называть аналитической функцией, согласованной с f при $x = 0$. В силу (4) при $n \geq 2$ имеем тождество:

$$f(z) - g_0(z) = xg(z), \quad (8)$$

где g – функция, $n-1$ -аналитическая внутри K .

Ясно, что условие (2) в общем случае не гарантирует существования каких-либо граничных значений ни у f , ни у g_0 .

Доказательство теоремы 1 проведем индукцией по n . Случай $n = 1$ следует из леммы 2, а индукционный переход от $n-1$ к n – из леммы 3.

Лемма 2. Пусть f – функция, аналитическая в K , удовлетворяющая условию (2) и равномерно ограниченная на последовательности отрезков γ_j .

Если для любого $y \in (-\alpha/2, \alpha/2)$ имеем $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j + iy) = 0$, то $f \equiv 0$.

Доказательство леммы 2. Не ограничивая общности, можем считать, что $|f(z)| \leq 1$ на всех отрезках γ_j и что $x_1 < 1/4$.

Для произвольного j рассмотрим прямоугольник $P_j = [x_{j+1}, x_j] \times [-\alpha, \alpha]$, l'_j и l''_j – его граничные отрезки, расположенные соответственно на прямых $y = \alpha$ и $y = -\alpha$.

Пусть $\delta t = [t_1, t_2]$ – произвольный отрезок, принадлежащий l'_j , z – любая точка P_j , такая, что:

$$-\alpha/2 < y < \alpha/2.$$

Оценим гармоническую меру $\omega(z, \delta t, P_j)$ отрезка δt в точке z относительно области P_j . Воспользуемся принципом расширения области (см., например, [5, гл. 8, §4]): расширим область P_j до полуплоскости, ограниченной прямой $y = \alpha$, при этом гармоническая мера отрезка δt в точке z увеличится.

Заметим, что отрезок δt виден из точки z под углом $\psi < c_0 \pi |\delta t|$, где $|\delta t|$ – длина отрезка δt , постоянная c_0 зависит только от α . Поэтому (см., например, [5, гл. 8, §4 (8)]):

$$\omega(z, \delta t, P_j) \leq \frac{\psi}{\pi} < c_0 |\delta t|.$$

Аналогично оценив гармоническую меру произвольного отрезка, расположенного на l_j'' , и воспользовавшись теоремой о двух константах (см. [5, гл. 8, §4, теорема 1]), получим в силу (2) и $|f(z)| \leq 1$ на γ_j и γ_{j+1} :

$$\ln |f(z)| \leq \int_{l_j' \cup l_j''} \omega(z, dt, P_j) \ln(Mt^{-p}) < 2c \int_0^{1/4} \ln(Mt^{-p}) dt < c_1,$$

где постоянная c_1 зависит только от α , M и p .

Таким образом, функция f равномерно ограничена в прямоугольнике

$$(0, 1/4] \times (-\alpha/2, \alpha/2).$$

Так как $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j + iy) = 0$ для любого $y \in (-\alpha/2, \alpha/2)$, по теореме Фату и граничной теореме единственности Лузина – Привалова (см., например, [7]) получим, что $f \equiv 0$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть f – n -аналитическая в K функция вида (4), удовлетворяющая условию (2). Если функция $\frac{f(x + iy)}{x}$ равномерно ограничена на последовательности дуг $\gamma_j = \{x = x_j, -\alpha \leq y \leq \alpha\}$, то согласованная функция g_0 тождественно равна нулю.

Доказательство леммы 3. Напомним (см., например, [8, гл. 1, §1.5]), что гармоническая мера дуги окружности имеет следующий геометрический смысл.

Пусть z – произвольная внутренняя точка, а $l = (z_1, z_2)$ – произвольная граничная дуга круга Q ; $[z_1, z_1']$ и $[z_2, z_2']$ – хорды в Q , проходящие через точку z . Тогда гармоническая мера $\omega(z, l, Q)$ равна отношению длины дуги $l' = (z_1', z_2')$ к длине всей окружности.

Не ограничивая общности, можем считать α произвольно малым и $p > 3$ в (2). Для любого достаточно малого $\alpha > 0$ существует круг Q , пересекающий границу прямоугольника K только по отрезку $\gamma = [-\alpha, \alpha]$ оси Oy . При этом существует $\beta > 0$, зависящее только от α и p , такое, что для любого $z \in K(\alpha, p) = [\beta, 2\beta] \times [-\beta, \beta]$ выполнено неравенство

$$\omega(z, l, Q) > 1 - \frac{1}{2p},$$

где l – дуга граничной окружности Q , опирающаяся на отрезок γ как на хорду и лежащая вне K .

В силу принципа расширения области [5, гл. 8, §4] отсюда для всех достаточно больших j при $z \in K(\alpha, p)$ имеем:

$$\omega(z, \gamma_j, K_j) > 1 - \frac{1}{2p},$$

где, напомним, $K_j = [x_j, 1] \times [-1, 1]$.

Но тогда по теореме о двух константах с учетом условия (2) и $p > 3$ имеем для согласованных функций (6):

$$|h_{x_j}(z)| \leq (M(x_j)^{-p})^{1/2p} (c_2 x_j)^{1-1/2p} < c_3 (x_j)^\lambda,$$

где $\lambda > 1/4$, постоянные c_2 и c_3 зависят только от f .

Так как $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0$, в силу (7) получим, что $g_0(z) = 0$ в каждой точке $z \in K(\alpha, p)$. Следовательно, по внутренней теореме единственности аналитических функций $g_0(z) \equiv 0$. Лемма 3 доказана.

Завершим доказательство теоремы 1. В силу леммы 3 и (8) имеем:

$$f(z) = xg(z),$$

где g – функция, $n-1$ -аналитическая внутри K вида (4), удовлетворяющая всем условиям теоремы 1 с заменой n на $n-1$. Напомним, что случай $n=1$ был рассмотрен в лемме 2.

Теорема 1 доказана.

Литература

1. Balk M.B. Polyanalytic functions. Math. Research. V. 63. Berlin: Akademie Verlag, 1991.
2. Долженко Е.П. О граничном поведении компонент полианалитической функции // Матем. заметки. 1998. Т. 63. Вып. 6. С. 821–834.
3. Долженко Е.П., Данченко В.И. О граничных свойствах решений обобщенного уравнения Коши – Римана // Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 142–152.
4. Мазалов М.Я. Теорема единственности для полианалитических функций по скорости сходимости к нулю на дугах // Матем. заметки. 2026. Т. 119, вып. 3. С. 458–461.

5. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.
6. Мергелян С.Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного // Успехи матем. наук. 1952. Т. 7, вып. 2. С. 31–122.
7. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л., 1950.
8. Неванlinna Р. Однозначные аналитические функции. М.–Л.: Гостехиздат, 1941.

M.Y. Mazalov, E.O. Dergachev
Branch of the National Research University «Moscow Power
Engineering Institute» in Smolensk

AN ANALOG OF KOEBE'S LEMMA FOR POLYANALYTIC FUNCTIONS

Keywords: *polyanalytic functions, uniqueness theorem, Koebe's lemma, harmonic measure.*

Abstract. *A uniqueness theorem for polyanalytic functions in terms of the function convergence rate to zero on sequences of segments is obtained.*

А.Ю. Маркина, А.В. Шкляев
МГУ имени М.В. Ломоносова

УДК 519.214.4

О ВРЕМЕНИ ВЫРОЖДЕНИЯ ДВАЖДЫ КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ЧАСТИЦАМИ ДВУХ ПОЛОВ С БОЛЬШИМ НАЧАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ

Ключевые слова: *случайные блуждания, ветвящиеся процессы, процессы с частицами двух полов, время до вырождения, сильная аппроксимация*

Рассматривается ветвящийся процесс с частицами двух полов с идеальной верностью: частицы имеют два пола, они объединяются в пары, не нашедшие пары частицы погибают, не размножаясь, а каждая пара независимо от остальных по некоторому закону порождает случайное число мужских и женских потомков. В моделях такого рода хорошо исследован надкритический случай, однако для критического случая результатов достаточно мало, в частности не получены аналоги теорем Яглома и Колмогорова. Мы исследуем несколько более простую задачу, в которой начальное число пар велико и мы изучаем время до гибели процесса. При этом по обоим полам

размножение предполагается критическим (то есть среднее число мужских и женских потомков каждой пары равно единице). Для времени гибели процесса получены закон больших чисел и центральная предельная теорема, показано что оно значительно меньше чем у однополого критического процесса.

Введение. Ветвящиеся процессы с частицами двух полов впервые были введены Д.Дж. Дэйли в работе [1]. Пусть $(F_{n,i}, M_{n,i})$, $n, i > 0$, – независимые одинаково распределенные целочисленные неотрицательные случайные векторы с двумерным распределением Q . Будем использовать общее обозначение (F, M) для векторов с тем же распределением. Определим процесс ветвящийся процесс с частицами двух полов (ДВП) $\{N_n, n > 0\}$ следующим образом: в начальный момент количество пар N_0 предполагается равным фиксированной константе N , в каждом следующем поколении количество пар определяется соотношением

$$L\left(\sum_{i=1}^n F_{n,i}, \sum_{i=1}^n M_{n,i}\right).$$

Здесь функция $L: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция, которая называется функцией паросочетаний и определяет количество пар, которые образуют заданное число мужских и женских особей. Одной из наиболее естественных такого рода функций является $L(x, y) = \min(x, y)$, соответствующая моногамному поведению – делению особей на разнополые пары.

Будем называть ДВП докритическим, если $\min(EF, EM) < 1$, критическим, если $\max(EF, EM) > \min(EF, EM) = 1$, дважды критическим, если $EF = EM = 1$.

Теории ДВП, с одной стороны, посвящена достаточно обширная литература (см., например, обзор [2], а с другой – базовые результаты, известные для ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона в критическом и докритическом случае, для ДВП, по-видимому, неизвестны. Единственная известная нам работа, касающаяся критического случая, – диссертация А. Фалахати [3], в которой рассматривается несколько другая модель, отличная от классического ДВП. На наш взгляд, техника его доказательств не переносится на критические ДВП.

В настоящей работе рассматривается задача о вымирании большой популяции ДВП, стартующей с популяции размера N , который мы будем устремлять к бесконечности. Рассмотрим время гибели процесса $T_N = \min\{n: N_n = 0\}$. Для классического ветвящегося процесса предельная теорема для времени гибели популяции была получена Дж. Ламперти в работе [4] в критическом и докритическом случаях. Для ДВП в докритическом случае аналогичные результаты были получены М.

Абдюшевым в недавно вышедшей работе [5]. В критическом случае подобный результат известен для ДВП в случайной среде (см. работу [6]).

Для дважды критических ДВП ситуация оказывается значительно более сложной. В настоящей работе для времени вырождения процесса получены закон больших чисел и центральная предельная теорема.

Основные результаты

Пусть распределение Q имеет вектор средних $(1,1)$ (что соответствует дважды критическому случаю) и матрицу ковариаций

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$m := -\frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \sigma^2 := \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\pi - 1) + 2\rho}{2\pi}.$$

Замечание. Рассмотрим двумерное нормальное распределение R с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций Σ . Тогда m и σ^2 представляют собой математическое ожидание и дисперсию минимума компонент вектора R .

Теорема 1 (Закон больших чисел для дважды критического ДВП). Пусть при некотором $\gamma > 2$ выполнены условия $EF^\gamma < +\infty$, $EM^\gamma < +\infty$. Тогда

$$\frac{T_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow{P} \frac{2}{m}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Первая версия настоящего результата была получена А.Ю. Маркиной в ее дипломной работе. Естественным продолжением данного результата является центральная предельная теорема, описывающая предельное распределение величины

$$T_N + 2\sqrt{N} / m.$$

Теорема 2 (Центральная предельная теорема для дважды критического ДВП). Пусть при некотором положительном $\gamma_1 > 5/2$ выполнены условия $EF^{\gamma_1} < +\infty$ и $EM^{\gamma_1} < +\infty$. Тогда

$$\frac{T_N + 2\sqrt{N} / m}{\sigma^4 \sqrt{N}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{m^3}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Схема доказательства теорем 1 и 2

Теорема Ламперти в работе [4] получена на основе теоремы Колмогорова с использованием того, что вырождение популяции ветвящегося процесса Гальтона – Ватсона, стартующего с N частиц, соответствует вырождению последнего из N независимых процессов Гальтона – Ватсона с 1 начальной частицей. Для ДВП данный подход неприменим: аналога теоремы Колмогорова на данный момент не было получено, а процесс с N начальными парами не сводится к процессам с меньшим числом пар.

Работа Абдюшева [5] по существу использует докритичность процесса, работа Жиянова и Шкляева [6] использует невырожденность сопровождающего случайного блуждания, которое в нашем случае тождественно равно нулю. Идея обеих работ заключается в использовании родственных представлений:

$$N_n = \sum_{i=0}^{n-1} D_i \min(EF, EM)^{n-i}, D_0 = N, D_{n-1} := N_n - N_{n-1} \min(EF, EM)$$

в случае ДВП и

$$N_n = \sum_{i=0}^{n-1} D_i \prod_{j=i+1}^n \min(EF_j, EM_j), D_0 = N, D_{n-1} := N_n - N_{n-1} \min(EF_n, EM_n)$$

в случае ДВП в изменяющей (случайной) среде. Для слагаемых, кроме нулевого, показана их малость по сравнению с первым членом вплоть до момента достижения процессом N_n достаточно низкого уровня. Тем самым время достижения процессом N_n уровня аппроксимируется таким n , что $N \min(EF, EM)^n$ или $N \prod_{j=1}^n \min(EF_j, EM_j)$ имеет порядок константы.

Однако в нашем случае величина $\min(EF, EM)$ равна единице и требуется использовать более точное разложение. Для этих целей при каждом n мы рассматриваем сумму н.о.р. сл. векторов с распределением Q

$$\left(\sum_{i=1}^m (F_{n,i} - 1), \sum_{i=1}^m (M_{n,i} - 1) \right)$$

и используем для нее сильную гауссовскую аппроксимацию

$$\left(\sum_{i=1}^m U_{n,i}, \sum_{i=1}^m V_{n,i} \right),$$

то есть набор независимых сл. векторов $(U_{n,i}, V_{n,i}, i > 0)$ с распределением R , заданных на том же пространстве, для которых при всех натуральных k

$$E \sup_{m \leq k} \|\Delta_{n,m}\|^q \leq Ck,$$

где

$$\Delta_{n,m} := \left(\sum_{i=1}^m (F_{n,i} - U_{n,i} - 1), \sum_{i=1}^m (M_{n,i} - V_{n,i} - 1) \right).$$

Здесь мы воспользовались теоремой 11 работы [7] о сильном приближении для последовательности векторов.

Воспользуемся представлением

$$N_{n+1} = N_n + \sqrt{N_n} \min(A_n, B_n) + D_{n+1, N_n},$$

где

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{N_n}} \sum_{i=1}^{N_n} U_{n,i}, B_n = \frac{1}{\sqrt{N_n}} \sum_{i=1}^{N_n} V_{n,i}, D_{n+1, m} \leq \|\Delta_{n+1, m}\|.$$

Случайные векторы (A_n, B_n) имеют распределение R , однако, вообще говоря, зависимы при различных n в силу зависимости от N_n . В связи с этим мы аппроксимируем последовательность N_n детерминированной последовательностью $e_n := (N + mn)^2$, а векторы (A_n, B_n) – независимыми векторами (A_n^*, B_n^*) , определяемыми аналогично (A_n, B_n) , но с e_n вместо N_n в определении. Положим

$$D_{n+1}^* = \min(A_n, B_n) - \min(A_n^*, B_n^*).$$

Тогда

$$N_{n+1} = N_n + \sqrt{N_n} \min(A_n^*, B_n^*) + \sqrt{N_n} D_{n+1}^* + D_{n+1, N_n}.$$

Извлекая корень из последнего соотношения, получаем

$$\sqrt{N_{n+1}} = \sqrt{N_n} + \frac{1}{2} \min(A_n^*, B_n^*) + D_{n+1}^* + D_{n+1}^{**},$$

где D_{n+1}^{**} – остаточный член в форме Лагранжа из разложения $\sqrt{x+1}$ по формуле Тейлора до первого члена. Дальнейшие рассуждения сводятся к итеративному доказательству малости погрешностей

$$D_{n+1}^*, D_{n+1, N_n}, D_{n+1}^{**}$$

и тем самым сведению последовательности $\sqrt{N_n}$ к блужданию S_n с $S_0 = \sqrt{N}$ и шагами $\min(A_i^*, B_i^*)/2$, имеющими среднее m и дисперсию σ^2 . Остается аппроксимировать время вырождения ДВП N_n временем достижения 0 блужданием S_n .

Заключение

Решение задачи о вырождении критического ДВП оказывается значительно более сложным, чем решение аналогичной задачи для докритических ДВП (см. работу [5]) или критических ДВПСС (см. работу [6]). Основная проблема здесь в том, что в аппроксимации первого порядка

$$N_{n+1} = C_{n+1} N_n + \Delta_n$$

для докритических ДВП член C_{n+1} постоянен и меньше 1, а для критических ДВПСС случаен. Таким образом, доказывая малость Δ_{n+1} по отношению к N_n , мы сведем задачу к достижению фиксированной экспоненциально убывающей последовательности или случайного блуждания некоторой границы. Однако для критических ДВП (или, скажем, критических ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона, для которых, впрочем, есть куда более удобная техника работы) $C_{n+1}=1$ и определяющую роль в поведении последовательности N_{n+1} играет член Δ_n . Это требует дальнейшего разложения остаточного члена Δ_n , образованного функционалом от суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. В настоящей работе это реализовано с использованием сильной аппроксимации и сведением последовательности $\sqrt{N_n}$ к случайному блужданию с отрицательным

средним. Тем самым в случае ДВП требуется значительно более сложная техника, чем в случае ДВПСС.

Отметим следующий интересный факт в представленном результате: если время вырождения ветвящегося процесса Гальтона – Ватсона (см. [4]) имеет порядок N начального числа частиц, то для дважды критического ДВП время значительно меньше – $\sqrt{N}$. Участие второго пола с тем же критическим поведением значительно ускоряет тенденцию к вымиранию.

При этом, по всей видимости, теорема для критических ДВП (то есть в ситуации, когда один пол воспроизводится надкритически, а другой критически) была бы близкой к результату Ламперти для классических процессов Гальтона – Ватсона.

Отметим, что ряд важных интересных вопросов для дважды критических ДВП остается открытым. Прежде всего это аналоги теоремы Колмогорова и теоремы Яглома, которые для ДВП неизвестны, и прямое применение той же техники, что и в настоящей работе, в их случае не видится возможным. Кажется естественным, что в этом случае может быть использован общий подход, представленный в книге [8], однако авторам настоящего доклада не удалось применить полученные там результаты к задаче об асимптотике невырождения дважды критического ДВП.

Литература

1. Daley D.J. Extinction conditions for certain bisexual Galton-Watson branching processes // *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*. 1968. Т. 9, №. 4. С. 315-322.
2. Molina M. Two-sex branching process literature // *Workshop on branching processes and their applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. С. 279-293.
3. Falahati A. Two-sex branching populations. Thesis for the degree of doctor of philosophy. Chalmers University of Technology, 1999.
4. Lamperti J. Limiting distributions for branching processes // *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66)*. 1967. Т. 2. С. 225-241.
5. Абдюшев М.Р. Предельная теорема для распределения времени вырождения докритических ветвящихся процессов с частицами двух полов с большой начальной популяцией // *Дискретная математика*. 2024. Т. 36, № 4. С. 3-12.
6. Zhiyanov A, Shklyaev A. On asymptotic behavior of time of extinction of critical bisexual branching process in random environment // *Journal of Applied Probability*. Published online 2026: 1-13. doi: 10.1017/jpr.2025.10072.
7. Зайцев А.Ю. Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых случайных векторов, УМН, 2013. Т. 68, вып. 4(412). С. 129–172.
8. Denisov D., Korshunov D., Wachtel V. At the edge of criticality: Markov chains with asymptotically zero drift // *arXiv preprint arXiv:1612.01592*. 2016.

A.Yu. Markina, A.V. Shklyayev
Lomonosov Moscow State University

ON THE EXTINCTION TIME OF TWICE CRITICAL BISEXUAL BRANCHING PROCESSES WITH A LARGE INITIAL NUMBER OF PARTICLES

Keywords: *random walks, branching processes, bisexual branching processes, extinction time, strong approximation*

Abstract. *We consider a bisexual branching process with perfect fidelity mating – the particles have two sexes, they form mating units (families), every mating unit gives a random number of male and female descendants and so on. For the bisexual branching processes the supercritical case is well-studied, however, much less is known about the critical case compared with the Galton-Watson-Bienayme processes. Particularly, no analogues of classic Yaglom and Kolmogorov theorems for the bisexual branching processes are available. We consider a related but simpler problem – studying the extinction time for a bisexual branching process with a large initial number of particles. We assume that the mean numbers of male and female, produced by one pair, are both equal to one. For the extinction time we prove the law of large numbers and the central limit theorem. We also show that the extinction time for a bisexual process is significantly shorter than for the Galton-Watson processes.*

К.М. Расулов
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Ключевые слова: *смешанная краевая задача, обобщенная аналитическая функция, дифференциальное уравнение Эйлера, единичный круг.*

В статье рассматривается смешанная краевая задача для обобщенных аналитических функций n -го порядка в произвольных односвязных областях. Доказано, что рассматриваемая краевая задача в единичном круге эквивалентна обобщенной (дифференциальной) задаче Римана для аналитических функций комплексного переменного. Кроме того, установлен один важный частный случай, когда исследуемая краевая задача в единичном круге решается в явном виде,

то есть когда ее решение сводится к последовательному решению классической задачи Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций комплексного переменного и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера.

1. Постановка задачи. Обозначим через T^+ конечную односвязную область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, содержащую внутри точку $z = 0$ и ограниченную замкнутым гладким контуром L .

Рассмотрим в области T^+ эллиптическое дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1 + z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $z = x + iy$ — комплексная переменная, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$,

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, n — некоторое фиксированное неотрицательное целое

число, а $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ — неизвестная функция.

Хорошо известно (см., например, [1–2]), что всякое регулярное решение дифференциального уравнения (1) в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = (1 + z\bar{z})^{n+1} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{\varphi(z)}{(1 + z\bar{z})^{n+1}} \right] + \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} \left[\frac{\overline{f(z)}}{(1 + z\bar{z})^{n+1}} \right] \right\}, \quad z \in T^+, \quad (2)$$

где $g(z)$, $f(z)$ — аналитические (голоморфные) в области T^+ функции.

Следуя [3], функции вида (2) будем называть *обобщенными аналитическими функциями порядка n* в области T^+ , а функции $\varphi(z)$ и $f(z)$, входящие в правую часть равенства (2), для удобства назовем соответственно *первой и второй аналитическими компонентами* обобщенной аналитической функции $W(z)$. Класс всех обобщенных аналитических функций порядка n в области T^+ будем обозначать символом $\mathbf{GA}_n(T^+)$.

В дальнейшем будем говорить, что обобщенная аналитическая функция порядка n ($n \geq 1$) в области T^+ принадлежит классу $\mathbf{GA}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, если в представлении (2) аналитические компоненты $\varphi(z)$, $f(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т.е. аналитические функции $\varphi(z)$, $f(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m — некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача ND_n . Требуется найти все функции $W(z)$, принадлежащие классу $GA_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n_-} + h_0(t)W(t) = h_1(t), \quad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_-}$ – производная по внешней нормали к L , а $h_k(t)$ – заданные на контуре L функции класса $H(L)$ (т.е. непрерывные на L в смысле Гельдера).

В дальнейшем задачу ND_n будем называть смешанной краевой задачей для обобщенных аналитических функций порядка n , а соответствующую однородную задачу ($h_1(t) \equiv 0$) назовем задачей ND_n^0 .

Важно заметить, что в частном случае, когда $h_0(t) \equiv 0$, задача ND_n представляет собой классическую краевую задачу Неймана для обобщенных аналитических функций, исследованную в работе [4].

Основной целью настоящей статьи является разработка конструктивного метода решения задачи ND_n в классе $GA_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$ в случае, когда $n=1$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

2. Метод решения задачи ND_n в случае, когда $n=1$,
 $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $L = \{t : |t| = 1\}$. В силу представления (2) при $n=1$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ всякую обобщенную аналитическую функцию $W(z)$ из класса $GA_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ можно задавать так:

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz}} - \frac{2z}{1+z\bar{z}}\overline{f^+(z)}, \quad z \in T^+, \quad (4)$$

где $\varphi^+(z), f^+(z)$ – аналитические (голоморфные) в круге T^+ функции, принадлежащие классу $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$. Следовательно, с учетом (4) и того, что на окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ выполняются соотношения $\bar{t} = \frac{1}{t}$ и

$$\frac{\partial W}{\partial n_-} = t \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial W}{\partial \bar{t}} \quad (\text{см., например, [5, с. 37]}), \quad \text{в рассматриваемом случае}$$

краевое условие (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & t \cdot \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + t \cdot \overline{\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2}} - \overline{\frac{df^+(t)}{dt}} + \\ & + h_0(t) \left(\frac{d\varphi^+(t)}{dt} - \frac{1}{t} \varphi^+(t) + \overline{\frac{df^+(t)}{dt}} - t \cdot \overline{f^+(t)} \right) = h_1(t), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (5)$$

В дальнейшем обозначим через T^- дополнение замкнутого единичного круга $T^+ \cup L$ до расширенной комплексной плоскости, т.е. $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Введем в рассмотрение вспомогательную аналитическую в T^- функцию $f^-(z)$, связанную с $f^+(z)$ по формуле

$$\varphi^-(z) = \overline{f^+ \left(\frac{1}{z} \right)}, \quad z \in T^-. \quad (6)$$

Нетрудно проверить (см. также, например, [5, с. 40]), что граничные значения функций $f^-(z)$, $f^+(z)$ и их производных первого порядка на $L = \{t : |t| = 1\}$ связаны следующими соотношениями:

$$\overline{f^+(t)} = \varphi^-(t), \quad \frac{\overline{df^+(t)}}{dt} = -t^2 \frac{d\varphi^-(t)}{dt}, \quad \frac{\overline{d^2 f^+(t)}}{dt^2} = t^4 \frac{d^2 \varphi^-(t)}{dt^2} + 2t^3 \frac{d\varphi^-(t)}{dt}. \quad (7)$$

В силу (7) краевое условие (5) можно переписать так:

$$\begin{aligned} t \cdot \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + (h_0(t) - 1) \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - \frac{h_0(t)}{t} \varphi^+(t) = - \\ - t^3 \cdot \frac{d^2 \varphi^-(t)}{dt^2} + t^2 (h_0(t) - 3) \frac{d\varphi^-(t)}{dt} + t \cdot h_0(t) \varphi^-(t) + h_1(t), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (8)$$

Но равенство (8) является краевым условием хорошо изученной дифференциальной задачи Римана (задачи сопряжения) относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ с линией скачков $L = \{t : |t| = 1\}$ (см., например, [6, с. 365]).

Предположим, что дифференциальная задача Римана (8) разрешима и уже найдено ее общее решение, то есть всевозможные пары аналитических функций $(\varphi_*^+(z), \varphi_*^-(z))$, удовлетворяющие краевому условию (8).

Далее, на основании формулы (6) находим функцию

$$f_*^+(z) = \overline{\varphi_*^+ \left(\frac{1}{z} \right)}, \quad z \in T^+. \quad (9)$$

Наконец, подставляя в правую часть формулы (4) вместо $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ найденные функции $\varphi_*^+(z)$ и $f_*^+(z)$ соответственно, получаем общее решение искомой задачи ND_n в виде

$$W_*(z) = \frac{d\varphi_*^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} \varphi_*^+(z) + \frac{\overline{df_*^+(z)}}{dz} - \frac{2z}{1+z\bar{z}} \overline{f_*^+(z)}, \quad z \in T^+. \quad (10)$$

Таким образом, справедливо следующее важное утверждение.

Теорема 1. Если $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, то решение смешанной задачи ND_1 в классе $GA_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ сводится к решению дифференциальной

задачи Римана (8) в классе ограниченных на бесконечности кусочно аналитических функций, причем для разрешимости задачи $\mathbf{ND}_n$ в единичном круге необходимо и достаточно, чтобы была разрешимой дифференциальная краевая задача Римана (8).

В заключение отметим, что в случае, когда выполняется условие

$$h_0(t) \equiv 1, \quad (11)$$

равенству (8) можно придать следующий простой вид:

$$t^2 \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} - \varphi^+(t) = -t^2 \cdot \left(t^2 \frac{d^2 \varphi^-(t)}{dt^2} - 2t \frac{d\varphi^-(t)}{dt} - \varphi^-(t) \right) + t h_1(t), \quad t \in L. \quad (12)$$

Следовательно, если ввести в рассмотрение две вспомогательные аналитические соответственно в областях T^+ и T^- функции вида

$$\Phi^+(z) = z^2 \cdot \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - \varphi^+(z), \quad z \in T^+, \quad (13)$$

$$\Phi^-(z) = z^2 \cdot \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} - 2z \frac{d\varphi^-(z)}{dz} - \varphi^-(z), \quad z \in T^-, \quad (14)$$

то равенство (12) примет вид:

$$\Phi^+(t) = -t^2 \cdot \Phi^-(t) + t \cdot h_1(t), \quad t \in L. \quad (15)$$

Но равенство (8) является краевым условием классической задачи Римана (задачи сопряжения) относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$.

Поскольку индекс задачи Римана (15) равен двум ($\chi = \text{Ind}_L(-t^2) = 2$), то она безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать формулами (см., например, [6, с. 112]):

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau h_1(\tau)}{\tau - z} d\tau - P_2(z), \quad z \in T^+, \quad (16)$$

$$\Phi^-(z) = -\frac{z^{-2}}{2\pi i} \int_L \frac{\tau h_1(\tau)}{\tau - z} d\tau + z^{-2} P_2(z), \quad z \in T^-, \quad (17)$$

где $P_2(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2$ — произвольный многочлен второй степени над полем комплексных чисел.

После того как найдены функции (16) и (17), для отыскания аналитических компонентов $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ искомой обобщенной аналитической функции нужно будет решить следующие линейные дифференциальные уравнения Эйлера:

$$z^2 \cdot \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T^+, \quad (18)$$

$$z^2 \cdot \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} - 2z \frac{d\varphi^-(z)}{dz} - \varphi^-(z) = \Phi^-(z), \quad z \in T^-. \quad (19)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$. Если выполняется условие (11), то решение смешанной задачи ND_1 в классе $GA_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ сводится к последовательному решению классической задачи Римана (15) для аналитических функций комплексного переменного и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера второго порядка (18) и (19).

Литература

1. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math / Schriften 23 (1965).
2. Bauer K.W., Ruscheweyh S. Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics. Edited by A.Dold and B. Eckmann, 791), 1980. 253 p.
3. Heersink R. Über Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum, Bericht № 268 (1986).
4. Расулов К.М. О явном решении краевой задачи типа Неймана для обобщенных аналитических функций в единичном круге // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. 2020. Т. 12, № 1. С. 31–36.
5. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.

K.M. Rasulov

Smolensk State University

MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS OF THE FIRST ORDER

Keywords: mixed boundary value problem, generalized analytic function, Euler differential equation, unit disk.

Abstract. The article considers a mixed boundary value problem for generalized analytic functions of the n th order in arbitrary simply connected domains. It is proved that the boundary value problem under consideration in the unit disk is equivalent to a generalized (differential) Riemann problem for analytic functions of a complex variable. Furthermore, an important special case is established in which the boundary value problem under study in the

unit disk is solved explicitly, i.e., its solution reduces to the sequential solution of the classical Riemann problem (the conjugation problem) for analytic functions of a complex variable and two linear Euler differential equations.

Н.М. Романов¹, А.А. Хартов^{1,2}

¹ Смоленский государственный университет,

² Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН

УДК 519.216.24

КОНЕЧНОРАНГОВАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА – УЛЕНБЕКА С РАССТОЯНИЕМ КУЛЬБАКА – ЛЕЙБЛЕРА

Ключевые слова: *конечноранговая аппроксимация, процесс Орнштейна – Уленбека, расстояние Кульбака – Лейблера, разложение Кархунена – Лозва, гауссовский процесс.*

Рассматривается задача конечноранговой аппроксимации случайного процесса второго порядка с использованием расстояния Кульбака – Лейблера в качестве меры ошибки, что представляет собой модификацию классической постановки в среднем. В качестве результата получена оценка порядка сложности аппроксимации известного (стационарного) гауссовского процесса Орнштейна–Уленбека при сколь угодно малом пороге допустимой ошибки.

1. Введение

Пусть на некотором вероятностном пространстве задан случайный процесс $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ с нулевым математическим ожиданием и непрерывной ковариационной функцией $K(t, s), t, s \in [0, 1]$. Мы изучаем проблему конечноранговой аппроксимации таких процессов. Классическая постановка формулируется следующим образом. Случайный процесс X рассматривается как случайный элемент пространства $L_2([0, 1])$, которое оснащено стандартным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ и нормой $\|\cdot\|_2$. Изучается так называемая *сложность аппроксимации в среднем* X (см. [12–15]):

$$n^{avg}(X, \varepsilon) := \min \{n \in \mathbb{N} : e(X, n) \leq \varepsilon e(X, 0)\},$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ – порог допустимой относительной погрешности. Здесь $e(X, n)$ обозначает наименьшую достижимую среднеквадратичную ошибку аппроксимации X элементами из класса:

$$A(X, n) := \left\{ \sum_{m=1}^n \langle X, \psi_m \rangle_2 \psi_m : \psi_m \in L_2([0, 1]), m = 1, \dots, n \right\}.$$

Точное значение ошибки выражается формулой:

$$e(X, n) := \inf \left\{ \sqrt{\mathbb{E} \|X - \tilde{X}_n\|_2^2} : \tilde{X}_n \in A(X, n) \right\}.$$

При этом:

$$e(X, 0) := \sqrt{\mathbb{E} \|X\|_2^2} = \sqrt{\int_0^1 K(t, t) dt} < \infty.$$

Таким образом, $n^{avg}(X, \varepsilon)$ есть наименьший ранг элемента $\tilde{X}_n$, достаточный для того, чтобы относительная ошибка аппроксимации процесса X не превышала заданный порог ε . Хорошо известно (см. [2], [3] и [16]), что оптимальными (в среднеквадратичном смысле) конечноранговыми аппроксимациями для процесса X являются частичные суммы X_n его разложения Кархунена – Лозва:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i \varphi_i(t), \quad t \in [0, 1],$$

где $\xi_i, i \in \mathbb{N}$ – некоррелированные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$ – собственные значения, а $\varphi_i, i \in \mathbb{N}$ – соответствующие собственные функции для ковариационного оператора процесса X , который действует по формуле

$$\mathcal{K}f(t) = \int_0^1 f(s) K(t, s) ds, \quad t, s \in [0, 1].$$

Известно, что $\lambda_i \geq 0, i \in \mathbb{N}, \sum \lambda_i < \infty, i \in \mathbb{N}$. При этом мы предполагаем, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Таким образом, имеем

$$n^{avg}(X, \varepsilon) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \mathbb{E} \|X - X_n\|_2^2 \leq \varepsilon^2 \mathbb{E} \|X\|_2^2 \right\}.$$

К настоящему моменту для данной постановки накопилось достаточно много результатов об асимптотическом поведении величины $n^{avg}(X, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. [12] и ссылки в ней). В многопараметрическом случае, когда $t = (t_1, \dots, t_d) \in [0, 1]^d$, есть результаты как для фиксированного d , так и для $d \rightarrow \infty$ (см. [9–12]).

В данной статье мы рассмотрим задачу, подобную вышеописанной, но с существенной модификацией. Для измерения ошибки вместо L_2 -нормы будет использоваться расстояние (дивергенция) Кульбака – Лейблера (см. [13–15]). Пусть P и Q – абсолютно непрерывные вероятностные распределения с плотностями p и q на $\mathbb{R}$, тогда расстояние определяется как (см. [5], с. 55):

$$D_{\text{KL}}(P \parallel Q) = \int_{\mathbb{R}} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx.$$

Данное расстояние измеряет потерянную информацию при использовании Q для приближения P . Определим сложность аппроксимации с расстоянием Кульбака – Лейблера по следующей формуле:

$$n^{\text{KL}}(X, \varepsilon) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{X_n}^t \parallel P_X^t) dt \leq \varepsilon \right\},$$

где $\varepsilon > 0$, а $X_n, n \in \mathbb{N}$, как и ранее обозначают частичные суммы разложения Кархунена – Лоэва для X . В такой постановке задача конечноранговой аппроксимации, как нам известно, не рассматривалась, и эта статья имеет целью сделать небольшой шаг в данном направлении. Мы ограничимся изучением величины $n^{\text{KL}}(X, \varepsilon)$ для важного частного случая, когда X является процессом Орнштейна – Уленбека, имеющего многочисленные применения в физике, финансовой математике и других областях (см. [6] и [8]).

2. Результаты

Рассматриваемый процесс Орнштейна – Уленбека – это гауссовский процесс $U = \{U(t), t \in \mathbb{R}\}$, имеющий

$$EU(t) = 0, \quad K_U(t, s) = e^{-\frac{\beta|t-s|}{2}}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

где $\beta > 0$ – основной параметр процесса. Напомним, что этот процесс является стационарным (см. [1] и [7]). Рассматривая U на отрезке $[0, 1]$, выпишем его разложение Кархунена – Лоэва:

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_k \varphi_k(t), \quad t \in [0, 1],$$

где ξ_k – независимые гауссовские случайные величины,

$$\lambda_k = \frac{2\beta}{\omega_k^2 + \beta^2}, \quad \varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{2\beta + \omega_k^2 + \beta^2}} (\omega_k \cos(\omega_k t) + \beta \sin(\omega_k t)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

здесь ω_k являются корнями трансцендентного уравнения

$$\text{ctg } \omega_k = \frac{\omega_k^2 - \beta^2}{2\beta\omega_k},$$

причем каждое ω_k выбирается в интервале $\pi(k-1) < \omega_k < \pi k$, $k = 1, 2, \dots$

Пусть U_n обозначают частичные суммы процесса U :

$$U_n(t) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} \xi_k \varphi_k(t), \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть P_U^t и $P_{U_n}^t$ соответственно обозначают распределения значений $U(t)$ и $U_n(t)$ для данного $t \in [0,1]$. Заметим, что P_U^t – стандартное нормальное распределение, так как $U(t)$ является гауссовским процессом с $\mathbb{E}U(t) = 0$ и $\mathbb{D}U(t) = 1$. Распределение $P_{U_n}^t$ также является гауссовским с нулевым средним и следующей дисперсией:

$$\sigma_n^2(t) = \mathbb{D}U_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{4\beta(\omega_k \cos(\omega_k t) + \beta \sin(\omega_k t))^2}{(\omega_k^2 + \beta^2)(2\beta + \omega_k^2 + \beta^2)}, \quad t \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Запишем сложность аппроксимации с расстоянием Кульбака – Лейблера для процесса Орнштейна – Уленбека:

$$n^{\text{KL}}(U, \varepsilon) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) dt \leq \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Основным результатом работы является следующая теорема, в которой дается оценка порядка величины $n^{\text{KL}}(U, \varepsilon)$ по ε . Запись $a_n \asymp b_n$ означает, что $\exists r_1, r_2 > 0$ такие, что $r_1 b_n \leq a_n \leq r_2 b_n$ для любых $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Для любого $\beta > 0$ выполнено

$$n^{\text{KL}}(U, \varepsilon) \asymp \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0.$$

В дипломной работе (см. [4]) была рассмотрена подобная задача, в которой получена асимптотическая оценка порядка для броуновского моста $B = \{B(t), t \in [0,1]\}$, гауссовского процесса с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K_B(t,s) = \min\{t,s\} - ts$, $t,s \in [0,1]$. Эта оценка описывается формулой:

$$n^{\text{KL}}(B, \varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Сравним приведенные оценки порядка процессов U и B . Мы видим, что процесс U имеет более низкую сложность аппроксимации по сравнению с процессом B . При рассмотрении доказательств данных результатов можно убедиться, что это обусловлено наличием стационарности у процесса U и ее отсутствием у процесса B .

3. Доказательство

Доказательство теоремы 1. Первым шагом оценим снизу интеграл, фигурирующий в формуле для сложности $n^{\text{KL}}(U, \varepsilon)$. Воспользуемся известным представлением для дивергенции Кульбака–Лейблера $D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t)$ (см. [4], с. 30). В нашем случае она принимает вид:

$$D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) = -\frac{1}{2} \ln \sigma_n^2(t) + \frac{1}{2} (\sigma_n^2(t) - 1), \quad t \in [0,1].$$

Это представление можно записать в виде ряда (см. [4, с. 31]):

$$D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} (1 - \sigma_n^2(t))^k = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} (\Delta^2(t))^k, \quad t \in [0, 1]. \quad (*)$$

Оставляя лишь первое слагаемое в последней сумме, мы получим оценку снизу:

$$D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} (\Delta^2(t))^k \geq \frac{1}{4} (\Delta^2(t))^2 = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2(t) \right)^2.$$

Тогда

$$\int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) dt \geq \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2(t) \right)^2 dt.$$

Далее используем неравенство Коши – Буняковского:

$$\left(\int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2(t) \right)^2 dt \cdot \int_0^1 1^2 dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2(t) \right)^2 dt.$$

С учетом равенства $\int_0^1 \varphi_k^2(t) dt = 1$ заметим:

$$\int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2(t) dt = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \int_0^1 \varphi_k^2(t) dt = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2\beta}{\omega_k^2 + \beta^2}.$$

Вспомним, что $\pi(k-1) < \omega_k < \pi k, k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2\beta}{\omega_k^2 + \beta^2} &> \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2\beta}{\pi^2 k^2 + \beta^2} \geq \int_{n+1}^{\infty} \frac{2\beta}{\pi^2 x^2 + \beta^2} dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi x}{\beta} \right) \Big|_{n+1}^{\infty} = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi(n+1)}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Согласно известному тождеству $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(1/x) = \pi/2, x \geq 0$, откуда $\operatorname{arctg}(x) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(1/x)$. Далее получаем

$$1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi(n+1)}{\beta} \right) = 1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{\pi(n+1)} \right) \right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{\pi(n+1)} \right).$$

Для арктангенса верна следующая оценка снизу:

$\operatorname{arctg} x \geq \frac{x}{1+x}, x \geq 0$. Действительно, рассмотрим функцию

$f(x) = \operatorname{arctg}(x) - \frac{x}{1+x}$, у которой $f(0) = 0$, и

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} > 0, \quad x > 0,$$

так как $(1+x)^2 > 1+x^2$. Следовательно, $f(x) \geq 0$ при всех $x \geq 0$.

Применяя доказанное неравенство, получим

$$\frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{\beta}{\pi(n+1)}\right) \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\beta}{\pi(n+1)}}{1 + \frac{\beta}{\pi(n+1)}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\beta}{\pi(n+1) + \beta} = \frac{2\beta}{\pi^2(n+1) + \pi\beta}.$$

Сводя вместе полученные оценки, приходим к неравенству:

$$D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) \geq \frac{1}{4} \left(\frac{2\beta}{\pi^2(n+1) + \pi\beta} \right)^2 = \left(\frac{\beta}{\pi^2(n+1) + \pi\beta} \right)^2.$$

Поскольку $n+1 \leq 2n$ и $\pi\beta \leq \pi\beta n$ при $n \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta}{\pi^2(n+1) + \pi\beta} \right)^2 &\geq \left(\frac{\beta}{\pi^2 \cdot 2n + \pi\beta} \right)^2 \geq \left(\frac{\beta}{2\pi^2 n + \pi\beta n} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\beta}{\pi n(2\pi + \beta)} \right)^2 = \frac{\beta^2}{\pi^2(2\pi + \beta)^2 n^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, оценка интеграла снизу имеет вид:

$$\int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) dt \geq \int_0^1 \frac{\beta^2}{\pi^2(2\pi + \beta)^2 n^2} dt = \frac{\frac{\beta^2}{\pi^2(2\pi + \beta)^2}}{n^2} = \frac{c_{1,\beta}^2}{n^2},$$

где $c_{1,\beta}^2 := \frac{\beta^2}{\pi^2(2\pi + \beta)^2}$.

Теперь оценим тот же интеграл сверху. В выражение (*) подставляем $\Delta^2(t)$, где

$$\Delta^2(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4\beta(\omega_k \cos(\omega_k t) + \beta \sin(\omega_k t))^2}{(\omega_k^2 + \beta^2)(2\beta + \omega_k^2 + \beta^2)},$$

тогда

$$D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4\beta(\omega_k \cos(\omega_k t) + \beta \sin(\omega_k t))^2}{(\omega_k^2 + \beta^2)(2\beta + \omega_k^2 + \beta^2)} \right)^k.$$

Далее оценим $\Delta^2(t)$ сверху через неравенство Коши – Буняковского:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2), \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Применяя это неравенство, получаем, что

$$(\omega_k \cos(\omega_k t) + \beta \sin(\omega_k t))^2 \leq (\omega_k^2 + \beta^2)(\cos^2(\omega_k t) + \sin^2(\omega_k t)) = \omega_k^2 + \beta^2.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4\beta(\omega_k \cos(\omega_k t) + \beta \sin(\omega_k t))^2}{(\omega_k^2 + \beta^2)(2\beta + \omega_k^2 + \beta^2)} &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4\beta(\omega_k^2 + \beta^2)}{(\omega_k^2 + \beta^2)(2\beta + \omega_k^2 + \beta^2)} = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4\beta}{(2\beta + \omega_k^2 + \beta^2)} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4\beta}{(2\beta + \pi^2(k-1)^2 + \beta^2)} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4\beta}{\pi^2(k-1)^2} = \frac{4\beta}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2}.$$

Вычислим эту сумму с помощью интегральной оценки, сделав замену $m = k - 1$, тогда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{1}{n^2} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{n^2} + \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{x} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}.$$

В итоге неравенство выглядит следующим образом

$$D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{4\beta}{\pi^2} \cdot \frac{2}{n} \right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{8\beta}{\pi^2 n} \right)^k.$$

Далее

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{8\beta}{\pi^2 n} \right)^k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8\beta}{\pi^2 n} \right)^2 \cdot \left(1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{k} \left(\frac{8\beta}{\pi^2 n} \right)^{k-2} \right).$$

Заметим, что при всех достаточно больших n

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{k} \left(\frac{8\beta}{\pi^2 n} \right)^{k-2} \leq \frac{2}{3} \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{8\beta}{\pi^2 n} \right)^{k-2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{8\beta}{\pi^2 n}}{1 - \frac{8\beta}{\pi^2 n}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8\beta}{\pi^2 n - 8\beta}.$$

Тогда имеем:

$$D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{8\beta}{\pi^2 n} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{16\beta}{3\pi^2 n - 24\beta} \right) = \frac{16\beta^2}{\pi^4 n^2} + \frac{256\beta^3}{\pi^4 n^2 (3\pi^2 n - 24\beta)}.$$

Рассмотрим второе слагаемое выражения, оно определено при $3\pi^2 n - 24\beta > 0$, т.е. $n > 8\beta / \pi^2$. Выберем для удобства $n \geq 9\beta / \pi^2$. Тогда

$$3\pi^2 n - 24\beta = 3\pi^2 n \left(1 - \frac{8\beta}{\pi^2 n} \right) \geq 3\pi^2 n \left(1 - \frac{8}{9} \right) = 3\pi^2 n \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \pi^2 n.$$

Подставляя эту оценку в знаменатель, получаем:

$$\frac{256\beta^3}{\pi^4 n^2 (3\pi^2 n - 24\beta)} \leq \frac{256\beta^3}{\pi^4 n^2 \cdot \frac{1}{3} \pi^2 n} = \frac{768\beta^3}{\pi^6 n^3} \leq \frac{768\beta^3}{\pi^6 n^2}.$$

Следовательно, при указанных n верна оценка интеграла сверху

$$\int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) dt \leq \int_0^1 \left(\frac{16\beta^2}{\pi^4 n^2} + \frac{768\beta^3}{\pi^6 n^2} \right) dt = \frac{\frac{16\beta^2}{\pi^4} + \frac{768\beta^3}{\pi^6}}{n^2}.$$

Для удобства в знаменателе заменим n^2 на $(n+1)^2$:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \leq \frac{4}{(n+1)^2},$$

т.е.

$$\int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) dt \leq \frac{c_{2,\beta}^*}{(n+1)^2},$$

где $c_{2,\beta}^* := \frac{64\beta^2}{\pi^4} + \frac{3072\beta^3}{\pi^6}$.

Ясно, что при $n < 9\beta / \pi^2$ найдется такая константа $c_{2,\beta}^{**}$, что

$$\int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) dt \leq \frac{c_{2,\beta}^{**}}{(n+1)^2}.$$

Итак, для всех n верно:

$$\int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) dt \leq \frac{c_{2,\beta}^2}{(n+1)^2}.$$

Таким образом, интеграл расстояния Кульбака – Лейблера удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$\frac{c_{1,\beta}^2}{n^2} \leq \int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) dt \leq \frac{c_{2,\beta}^2}{(n+1)^2}.$$

Вернемся к величине

$$n^{\text{KL}}(U, \varepsilon) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_n}^t \parallel P_U^t) dt \leq \varepsilon \right\}.$$

Заметим, что $\int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_{n^{\text{KL}}(U, \varepsilon)}}^t \parallel P_U^t) dt \leq \varepsilon$, откуда из двойного

неравенства мы получаем $c_{1,\beta}^2 / n^{\text{KL}}(U, \varepsilon)^2 \leq \varepsilon$, т.е. $n^{\text{KL}}(U, \varepsilon) \geq c_{1,\beta} / \sqrt{\varepsilon}$.

Далее, по определению $\int_0^1 D_{\text{KL}}(P_{U_{n^{\text{KL}}(U, \varepsilon)-1}}^t \parallel P_U^t) dt > \varepsilon$, и тогда

$c_{2,\beta}^2 / (n^{\text{KL}}(U, \varepsilon) - 1 + 1)^2 > \varepsilon$, откуда получаем $n^{\text{KL}}(U, \varepsilon) < c_{2,\beta} / \sqrt{\varepsilon}$.

Таким образом, асимптотическая оценка порядка имеет вид:

$$n^{\text{KL}}(U, \varepsilon) \asymp \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Литература

1. Стохастическое исчисление / С.В. Анулов и [и др.] // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 49. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–260.
2. Лозв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962. 720 с.
3. Пугачев В.С. Общая теория корреляции случайных функций // Изв. Академии Наук СССР. Серия: Матем. 1953. Т. 17, № 5. С. 401–420.
4. Романов Н.М. Аппроксимация броуновского моста с расстоянием Кульбака – Лейблера: дипломная работа. Смоленск, 2024.

5. Bishop C. Pattern Recognition and Machine Learning. New York: Springer Science Business Media, 2006. 738 p.
6. Coffey W.T., Kalmykov Yu.P., Waldron J.T. The Langevin Equation: With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering. Singapore: World Scientific, 2004. 413 p.
7. Cornuault J. Bayesian Analyses of Comparative Data with the Ornstein – Uhlenbeck Model: Potential Pitfalls // Systematic Biology. 2022. Vol. 71, No. 6. P. 1524–1540.
8. Kampen N.G. Stochastic Processes in Physics and Chemistry. USA: North-Holland, 1981. 464 p.
9. Khartov A.A. Average approximation of tensor product-type random fields of increasing dimension // Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. 2011. Vol. 396. P. 233–256.
10. Khartov A.A. Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements // J. Complexity. 2015. Vol. 31. P. 835–866.
11. Khartov A.A. Approximation of multiparametric Anderson – Darling processes // Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. 2022. Vol. 515. P. 214–232.
12. Lifshits M.A., Tulyakova E.V. Curse of dimensionality in approximation of random fields // Probab. Math. Statist. 2006. Vol. 26, No. 1. P. 97–112.
13. Novak E., Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems. Vol. I: Linear Information // EMS Tracts in Mathematics. Vol. 6. Zürich: EMS, 2008. 588 p.
14. Novak E., Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems. Vol. II: Standard Information for Functionals // EMS Tracts in Mathematics. Vol. 12. Zürich: EMS, 2010. 622 p.
15. Novak E., Woźniakowski H. Tractability of multivariate problems. Vol. III: Standard Information for Operators // EMS Tracts in Mathematics. Vol. 18. Zürich: EMS, 2012. 664 p.
16. Ritter K. Average-case Analysis of Numerical Problems // Lecture Notes in Math. No. 1733. Berlin: Springer, 2000. 272 p.

N.M. Romanov¹, A.A. Khartov^{1,2}

¹ *Smolensk State University,*

² *Institute for information transmission problems of the Russian Academy of Sciences*

APPROXIMATION OF THE ORNSTEIN – UHLENBECK PROCESS WITH THE KULLBACK – LEIBLER DISTANCE

Keywords: *finite-rank approximation, Ornstein-Uhlenbeck process, Kullback – Leibler distance, Karhunen – Loève expansion, Gaussian process.*

Abstract. *We consider the problem of finite-rank approximation of a second-order random process using the Kullback – Leibler distance as an error measure. This is a new modification of the classical average-case setting. As a result, we obtain an order estimate for the approximation complexity of a well-known (stationary) Ornstein – Uhlenbeck Gaussian process for an arbitrarily small threshold of the permissible error.*

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУР КРИПКЕ С НЕЧЕТКИМИ СОБЫТИЯМИ НА ОСНОВЕ ЛОГИКИ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ВРЕМЕНИ

Ключевые слова: нечеткая структура Крипке, нечеткое событие, лингвистическое высказывание, функция истинности, траектория реализации событий.

Статья посвящена расширению четкой логики ветвящегося времени до соответствующей нечеткой теории. Даны определения основных понятий нечеткой логики ветвящегося времени, структуры Крипке расширены до структур с нечеткими событиями. Доказана теорема о расширении CTL, демонстрирующая, что введенная семантика формул нечеткой CTL действительно расширяет четкую логику ветвящегося времени.

Анализ моделей на основе структур Крипке с помощью формул, выраженных формулами логики ветвящегося времени (CTL), не представляет собой большой сложности. Для верификации таких моделей используется алгоритм маркировки, описанный и реализованный, например, на языке программирования Python в работе [3]. Однако в [4] был поставлен вопрос о верификации моделей, включающих нечеткие (частичные) события. Ясно, что в этом случае формулы CTL могут принимать промежуточные значения истинности. В связи с этим возникает проблема расширения нечеткой логики темпоральными операторами.

Синтаксис формул нечеткой CTL по сравнению с синтаксисом четкой логики остается почти без изменений [1].

Определение (синтаксис CTL). Формула CTL определяется так:

- всякое атомарное утверждение есть формула: $p, q, \dots$;
- если φ, ψ – формулы, то $\neg\varphi$ (или $\bar{\varphi}$), $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ и $(\varphi \rightarrow \psi)$ – формулы;
- если φ, ψ – формулы, то $E\gamma$ и $A\gamma$ – формулы, где $\gamma = X\varphi$, или $\gamma = \varphi U \psi$, или $\gamma = F\varphi$, или $\gamma = G\varphi$;
- других формул нет.

Отметим, что в силу специфики формул нечеткой логики операции конъюнкции и импликации могут быть невыражаемы через другие операции (все зависит от того, как именно задана каждая из операций).

Поэтому в нечеткой логике их требуется определять по отдельности, в отличие от классической логики, где пара $\{\neg, \vee\}$ является одним из базисов.

Как и в четкой темпоральной логике, STL-формулы в нечеткой логике интерпретируются на структуре Крипке. События, происходящие в состояниях этой структуры, являются, по сути, нечеткими лингвистическими высказываниями.

Определение. Лингвистической переменной называется упорядоченный набор $\langle A, T(A), U, V, M \rangle$, где A – название переменной, $T(A)$ – так называемое терм-множество лингвистической переменной (множество названий), каждый элемент которого представляет собой нечеткую переменную вида $\langle a, U, G \rangle$ со значениями из U , V – синтаксическое правило, порождающее название значений переменной A , M – семантическое правило, ставящее в соответствие каждой нечеткой переменной из $T(A)$ нечеткое множество G из универсального множества U [2, с. 53].

Определение. Лингвистическое высказывание – одно из соответствий A какому-либо терму из $T(A)$ по правилу V , где этому терму по правилу M ставится в соответствие множество G , определенное на области рассуждения U [5].

Далее мы будем отождествлять лингвистическое высказывание с его нечетким множеством G (поскольку для целей данной статьи разница не имеет значения). Кроме того, область рассуждения U будем считать числовой.

Определим структуру Крипке с нечеткими событиями.

Определение. Структура Крипке с нечеткими событиями – это пятерка $\mathcal{M} = \langle K, K_0, R, P, F \rangle$, где K – конечное множество состояний, $K_0 \subseteq K$ – конечное множество начальных состояний, $R \subseteq K^2$ – бинарное отношение, удовлетворяющее условию: $(\forall k \in K)(\exists k' \in K)(k, k') \in R$, P – конечное множество лингвистических высказываний, $F: K \rightarrow 2^P$ – функция пометок, ставящая в соответствие каждому состоянию множество лингвистических высказываний. Вычислением (линией времени) структуры Крипке называется произвольная бесконечная последовательность $\sigma = k_0 k_1 k_2 \dots$ такая, что $k_0 \in K_0$ и существуют переходы из k_i в k_{i+1} . Траекторией структуры Крипке, индуцированной вычислением σ , называется бесконечная последовательность $F(\sigma) = F(k_0)F(k_1)F(k_2) \dots$

По сути, отличие структуры Крипке с нечеткими событиями от обычной структуры Крипке состоит в том, что состояниям K по

правилу F присваивается подмножество множества нечетких множеств, а не подмножество множества высказываний, принимающих истинное значение в данном состоянии.

Пример. Пусть $A = \{p, q\}$, $U = [0; 10]$, $K = \{k_0, k_1, k_2, k_3\}$, $K = k_0$. Остальные элементы изображены на рисунке 1, где представлен граф структуры Крипке. Состояние k_0 – пустое: в нем не происходит никаких событий. Состоянию k_1 соответствуют сразу два нечетких множества от переменных с названием p и q . Состояниям k_2 и k_3 соответствует по одному нечеткому множеству.

Пусть $x \in U$ – так называемая переменная реализации события. В каждом состоянии структуры Крипке переменная реализации принимает конкретное значение.

Определение. Пусть в состоянии k_i при некотором значении $x_p \in U$ имеет место равенство $\mu(x_p) = m$. Тогда x_p называется m -реализацией события p в состоянии k_i .

Замечание. В предельных случаях, когда $\mu(x_p) = 1$ будем говорить, что x_p является реализацией события p , а когда $\mu(x_p) = 0$, будем говорить, что x_p не является реализацией события p .

Определение. Траекторией реализации событий структуры Крипке называется бесконечная последовательность множеств значений $\mu(x)$ при условии, что x принимает конкретное значение в каждом состоянии. Например, одной из траекторий реализации указанной структуры Крипке, индуцированной вычислением $\sigma = k_0 k_1 k_2 k_3 k_3 k_1 \dots$, будет последовательность: $\{ \} \{0.4, 0.5\} \{0.2, \} \{1\} \{0.8\} \{0.2, 0.8\} \dots$

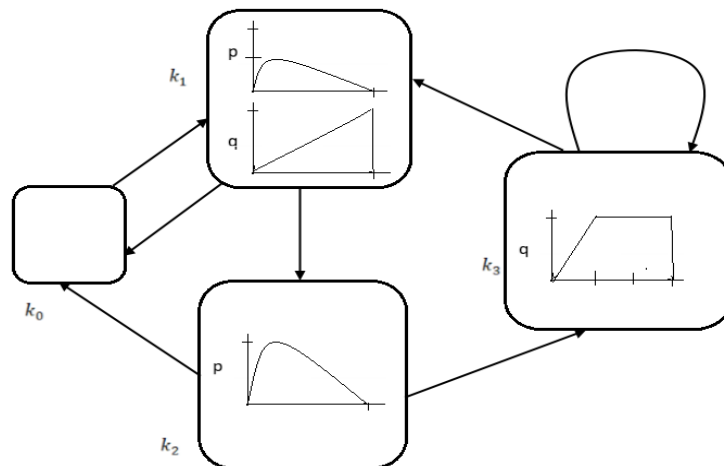


Рис. 1. Структура Крипке с нечеткими высказываниями

Поскольку формулы CTL интерпретируются на структуре Крипке, то на следующем этапе следует определить семантику таких формул.

Отметим, что каждая формула нечеткой CTL будет иметь свою функцию истинности $\mu(x)$. Запись $\mathcal{M}, \mu_k(x) \vdash \varphi$ означает, что φ имеет функцию истинности $\mu_k(x)$ на $\mathcal{M}$ в состоянии k ($\mathcal{M}$ в записи будем опускать, если понятно, о какой именно структуре Крипке идет речь).

Определение (семантика CTL). Функция истинности $\mu_{k_i}(x)$ формулы φ в состоянии k_i структуры Крипке $\mathcal{M}$ определяется индуктивно:

а) если $p \notin F(k_i)$, то $\emptyset_{k_i} \vdash p$, иначе $\mu_{k_i}(x) \vdash p$, где p – атомарное лингвистическое высказывание;

б) $\mu_{k_i}(x) \vdash \neg\varphi \equiv \overline{\mu_{k_i}(x)} \vdash \varphi$, где $\overline{\mu_{k_i}(x)}$ – дополнение над нечетким множеством, заданным функцией истинности $\mu_{k_i}(x)$;

в) $\mu_{k_i}(x) \vdash \varphi \wedge \psi \equiv (\mu_{k_i}(x) \vdash \varphi) T (\mu_{k_i}(x) \vdash \psi)$, где T – какая-либо Т-норма, задающая конъюнкцию над нечеткими множествами;

г) $\mu_{k_i}(x) \vdash \varphi \vee \psi \equiv (\mu_{k_i}(x) \vdash \varphi) \perp (\mu_{k_i}(x) \vdash \psi)$, где $\perp$ – сопряженная Т-конорма для Т-нормы, задающая нечеткую дизъюнкцию;

д) $\mu_{k_i}(x) \vdash AX\varphi \equiv (\forall k_{i+1}: k_i \rightarrow k_{i+1}) T (\mu_{k_{i+1}}(x)) \vdash \varphi$, где T – Т-норма, выполняющая операцию над всеми $\mu_{k_{i+1}}(x)$;

е) $\mu_{k_i}(x) \vdash EX\varphi \equiv (\forall k_{i+1}: k_i \rightarrow k_{i+1}) \perp (\mu_{k_{i+1}}(x)) \vdash \varphi$, где $\perp$ – Т-конорма, выполняющая операцию над всеми $\mu_{k_{i+1}}(x)$;

ж) $\mu_{k_i}(x) \vdash AG\varphi \equiv (\forall (k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots)) (\forall j \geq i) T_i T_j (\mu_{k_j}(x)) \vdash \varphi$, где $T_i T_j (\mu_{k_j}(x)) = T_i (T_j (\mu_{k_j}(x)))$, причем T_j выполняется над всеми функциями истинности, находящимися внутри одного вычисления, T_i выполняется над полученными функциями истинности из каждого вычисления;

з) $\mu_{k_i}(x) \vdash AF\varphi \equiv (\forall (k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots)) (\forall j \geq i) T_i \perp_j (\mu_{k_j}(x)) \vdash \varphi$;

и) $\mu_{k_i}(x) \vdash EG\varphi \equiv (\forall (k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots)) (\forall j \geq i) \perp_i T_j (\mu_{k_j}(x)) \vdash \varphi$;

к) $\mu_{k_i}(x) \vdash EF\varphi \equiv (\forall (k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots)) (\forall j \geq i) \perp_i \perp_j (\mu_{k_j}(x)) \vdash \varphi$;

л) $\mu_{k_i}(x) \vdash A(\varphi U \psi) \equiv (\forall (k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots)) (\forall j \geq i) (T_i \perp_j (\mu_{k_j}(x) \vdash \psi \wedge (\forall n: i \leq n < j) T_n (\mu_{k_n}(x)) \vdash \varphi))$

;

м)

$$\mu_{k_i}(x) \vdash E(\varphi U \psi) \equiv (\forall (k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots)) (\forall j \geq i) (\perp_i \perp_j (\mu_{k_j}(x) \vdash \psi \wedge (\forall n: i \leq n < j) T_n(\mu_{k_n}(x)) \vdash \varphi))$$

;

Определение. Формула CTL $\mathcal{M} \vdash_{\mu} \varphi$, если $\mathcal{M}, \mu_{k_0}(x) \vdash \varphi$, где k_0 – начальное состояние структуры Крипке. Иными словами, степень истинности формулы φ определяется степенью истинности в k_0 .

Теорема (о расширении CTL). Приведенное выше определение семантики нечеткой CTL расширяет семантику четкой CTL.

Имеется в виду, что если определенную выше семантику применить к верификации четкой CTL, то результаты совпадут с теми, что получаются при применении семантики четкой CTL.

Доказательство. В общем случае функция истинности четких высказываний с точки зрения лингвистического высказывания выглядит так: $\mu(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in S, \\ 0, \text{ в прочих случаях} \end{cases}$, где $S \subset U$, то есть на всей области рассуждения функция истинности (она же – характеристическая функция) принимает значение 0 или 1. Выберем произвольные значения $t \in S$ и $q \notin S$ при условии, что $\mu(x)$ не является ни тождественно истинной, ни тождественно ложной (в случае, когда является, доказательство тривиально).

В качестве Т-нормы выберем минимум, а сопряженной ей Т-конормой будет максимум. Операция же отрицания типичная для нечеткой логики: $\overline{\mu(x)} = 1 - \mu(x)$.

Будем рассматривать каждый пункт семантики нечеткой CTL и доказывать его эквивалентность с соответствующим пунктом четкой CTL.

А) В четкой CTL этот пункт выглядит следующим образом: $k_i \vdash p \equiv p \in F(k_i)$, где p – атомарное утверждение, что означает выполнимость утверждения p , если оно есть в состоянии k_i , что равносильно $\mu_{k_i}(t) \vdash p$ для любых $t \in S$, поскольку p выполняется в состоянии k_i . Тогда p представляет собой одну из реализаций событий в состоянии k_i , а это равносильно $\mu_{k_i}(x) \vdash p$, поскольку для любого $x = q$ реализация события q отсутствует в состоянии k_i .

Пусть теперь $p \notin F(k_i)$. В этом случае $k_i \not\vdash p$, то есть соответствующее лингвистическое высказывание будет иметь характеристическую функцию $\mu_{k_i}(x) \equiv 0$, что идентично $\emptyset_{k_i} \vdash p$ в нашем случае.

Б) В четкой CTL: $k_i \vdash \neg\varphi \equiv k_i \not\vdash \varphi$. Пусть S является множеством реализаций формулы φ в состоянии k_i . Поскольку $\overline{\mu(x)} = 1 - \mu(x)$, то при значениях $t \in S$ состояния k_i , где φ истинна, $\neg\varphi$ будет ложна, и наоборот, а значит, пункты эквивалентны.

В) В четкой CTL этот пункт отсутствует. В случае нечеткой логики без него не обойтись, так как конъюнкция и дизъюнкция могут быть определены независимо друг от друга. Пользуясь определением четкой CTL, можно получить следующее: $k_i \vdash \varphi \wedge \psi \equiv (k_i \vdash \varphi) \wedge (k_i \vdash \psi)$. Поскольку мы выбрали максиминные T-нормы, то $\mu_{k_i}(x)$ будет принимать истинное значение только в случае одновременной истинности φ и ψ (точнее, когда x является реализацией обоих событий φ и ψ в состоянии k_i), а в остальных случаях будет принимать ложное значение.

Г) В четкой CTL: $k_i \vdash \varphi \vee \psi \equiv (k_i \vdash \varphi) \vee (k_i \vdash \psi)$, что идентично нечеткому случаю. Действительно, пусть x является реализацией события φ , либо ψ , либо φ и ψ одновременно, тогда $\mu_{k_i}(x) \equiv (\mu_{k_i}(x) \vdash \varphi) \perp (\mu_{k_i}(x) \vdash \psi) = \max(1,0) = \max(0,1) = \max(1,1) = 1$

. Если же x не является реализацией ни одного из событий, то $\mu_{k_i}(x) \equiv \max(0,0) = 0$.

Д) В четкой CTL пункт выглядит следующим образом: $k_i \vdash AX\varphi \equiv (\forall k_{i+1}: k_i \rightarrow k_{i+1}) k_{i+1} \vdash \varphi$. Пусть значение x является реализацией события φ во всех состояниях k_{i+1} , имеющих предшественника k_i , то есть $\mu_{k_i}(x) = \forall k_{i+1} T(\mu_{k_{i+1}}(x)) = \min(1,1, \dots, 1) = 1$. Теперь пусть существуют такие состояния k_{i+1} , в которых x не является реализацией события φ (поставим его на первое место): $\mu_{k_i}(x) = k_{i+1} T(\mu_{k_{i+1}}(x)) = \min(0,1, \dots, 1) = 0$. Таким образом, формула $AX\varphi$ имеет $\mu_{k_i}(x) = 1$ тогда и только тогда, когда во всех k_{i+1} функция $\mu_{k_{i+1}}(x) = 1$, что полностью идентично четкой CTL.

Е) Пункт доказывается аналогично предыдущему. Для четкой CTL: $k_i \vdash EX\varphi \equiv (\exists k_{i+1}: k_i \rightarrow k_{i+1}) k_{i+1} \vdash \varphi$.

Ж) В четкой CTL этот пункт выглядит следующим образом: $k_i \vdash AG\varphi \equiv (\forall (k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots)) (\forall j \geq i) k_j \vdash \varphi$. По сути, это означает, что в каждом состоянии любого вычисления происходит событие φ . Покажем эквивалентность пунктов. Рассмотрим значение x

такое, что оно является реализацией события φ во всех состояниях всех вычислений структуры Крипке. В этом случае $T_i T_j (\mu_{k_j}(x)) = T_i \{ \min(1, 1, \dots, 1) \} = \min(1, 1, \dots, 1) = 1$, что идентично четкому случаю. Пусть теперь существует такое значение x , что хотя бы в одном состоянии k_m оно не является реализацией события φ . Тогда $T_m (\mu_{k_m}(x)) = 0$ и, следовательно, $T_i(n_1, n_2, \dots, 0, \dots, n_r) = 0$. Таким образом, функция истинности $AG\varphi$ принимает значение 1 в точке x , если x является реализацией события φ во всех будущих состояниях, и принимает значение 0, если существует хотя бы одно состояние, в котором x не является реализацией события φ . А это идентично четкому случаю.

Следующие пункты (З–К) доказываются аналогично. Опишем лишь эквивалентные им пункты для четкой CTL.

З) $k_i \vdash AF\varphi \equiv (\forall(k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots))(\exists j \geq i) k_j \vdash \varphi$ – в каждом вычислении хотя бы раз происходит событие φ .

И) $k_i \vdash EG\varphi \equiv (\exists(k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots))(\forall j \geq i) k_j \vdash \varphi$ – существует вычисление, в котором событие φ происходит во всех состояниях.

К) $k_i \vdash EF\varphi \equiv (\exists(k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots))(\exists j \geq i) k_j \vdash \varphi$ – событие φ произойдет хотя бы один раз хотя бы в одном из вычислений.

Л) Для четкой CTL семантическая формула, определяющая оператор AU , имеет вид $k_i \vdash A(\varphi U \psi) \equiv (\forall(k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots))(\exists j \geq i)(k_j \vdash \psi \wedge (\forall n: i \leq n < j) k_n \vdash \varphi)$

Рассмотрим значение переменной x , которое не является реализацией события ψ во всех состояниях хотя бы одного вычисления i . Тогда $\forall j: \mu_{k_j}(x) = 0$ для формулы ψ , и в этом случае выражение под T-нормой T_i в нечеткой CTL будет таким: $\perp_j (\mu_{k_j}(x) \wedge y) = \max(0, 0, \dots, 0) = 0$ для некоторого i независимо от значения y , значит, хотя бы один операнд под T-нормой T_i будет равен 0. Следовательно, $\mu_{k_i}(x) = 0$ для всей рассматриваемой формулы, что эквивалентно четкой CTL.

Пусть теперь x будет реализацией события ψ во всех вычислениях хотя бы одного состояния, тогда $\exists j: \mu_{k_j}(x) = 1$ – первый внутренний операнд истинен, а значит, требуется проверка второго. Пусть x не

является реализацией события φ хотя бы в одном состоянии k_n для $\forall n: i \leq n < j$ хотя бы в одном вычислении, тогда $T_n(\mu_{k_n}(x)) = \min(..., 0, ...) = 0$, значит, хотя бы один операнд под Т-нормой T_i будет равен 0 из-за второго внутреннего операнда, то есть формула $A(\varphi U \psi)$ ложна, как и в четкой CTL.

Осталось рассмотреть случай, когда x является реализацией события φ во всех состояниях, удовлетворяющих условию $\forall n: i \leq n < j$ во всех вычислениях, тогда $T_n(\mu_{k_n}(x)) = \min(1, 1, ... 1) = 1$ и $T_i(1 \wedge 1) = \min(1) = 1$, и только в этом случае $A(\varphi U \psi)$ будет истинной, что снова эквивалентно четкой CTL. На этом возможные случаи в пункте исчерпаны.

М) Доказательство здесь аналогично доказательству предыдущего пункта. Для четкой CTL семантическая формула имеет вид: $k_i \vdash E(\varphi U \psi) \equiv (\exists(k_i \rightarrow k_{i+1} \rightarrow k_{i+2} \rightarrow \dots))(\exists j \geq i)(k_j \vdash \psi \wedge (\forall n: i \leq n < j) k_n \vdash \varphi)$

Таким образом, построенная нами семантика нечеткой CTL действительно расширяет семантику четкой CTL. Теорема доказана.

Замечание 1. В качестве высказываний можно рассматривать нечеткие множества с областью рассуждения, состоящей из единственного значения x . Это так называемые «высказывания в узком смысле», которые полностью соответствуют высказываниям, рассматриваемым в классической логике.

Замечание 2. В качестве конъюнкции в операторах AU и EU в общем случае принимается Т-норма, не обязательно совпадающая с определенной ранее.

Пример. Продемонстрируем практическое применение введенной выше нечеткой CTL. Рассмотрим простую структуру Крипке с нечеткими высказываниями в узком смысле, где неважно, на каком именно значении x реализуются события p и q , и вычислим степень истинности некоторых формул нечеткой CTL. Структура Крипке изображена на рисунке 2. Начальное состояние – k_0 .

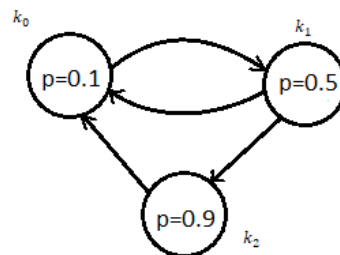


Рис. 2. Структура Крипке с нечеткими событиями в узком смысле

В качестве Т-нормы рассмотрим операцию умножения: $T(a,b) = a \cdot b$, тогда сопряженная ей Т-конорма: $\perp(a,b) = a + b - a \cdot b$.

Легко заметить, что $\mathcal{M} \vdash_{0.5} AXp$, так как для начального состояния следующее состояние – единственное. Сложнее проанализировать формулу $AXAXp$, так как для k_1 есть два следующих состояния: $\mathcal{M} \vdash_{0.09} AXAXp$. Формула же $AXEXp$ имеет степень истинности 0.91.

Анализ других формул приводит к очень сложным вычислениям. Например, при анализе формулы AGp будет иметь место бесконечное произведение бесконечных произведений m -реализаций события p в каждом состоянии каждой линии времени. Получаем следующие варианты бесконечных произведений для каждой линии времени: $\prod_{n=1}^{\infty} 0.1^n 0.5^n 0.9^k$ или $\prod_{n=1}^{\infty} 0.1^n 0.5^n 0.9^n$, где k – любое натуральное число, включая ноль. Все такие произведения расходятся к нулю, а значит, $\mathcal{M} \not\vdash AGp$. Если же взять максиминные Т-нормы, то получим $\mathcal{M} \vdash_{0.1} AGp$.

Мы видим, что анализ формул по определению – задача довольно сложная даже в тривиальных случаях, поэтому требуются специальные методы. В четкой CTL существует так называемый алгоритм маркировки, который существенно упрощает анализ. В связи с этим цель наших дальнейших исследований такова: получить обобщение алгоритма маркировки для случая нечеткой CTL.

Литература

1. Карпов Ю.Г. MODEL CHECKING. Верификация параллельных и распределенных программных систем. СПб.: БХВ-Петербург, 2010. 560 с.
2. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений. М., 2003. 81 с.
3. Светлаков А.В. Реализация проверки формул логики ветвящегося времени на языке программирования Python // Электронные информационные системы. 2024. № 3(42). С. 86-98.
4. Светлаков А.В. Проблема истины в темпоральных системах и методы ее решения // Философия в XXI веке: традиции и инновации: материалы III Международной научно-практической конференции (Зеленоград, 11 апреля 2025 года). В 2 ч. М.: Национальный исследовательский университет «МИЭТ», 2025. С. 82-91.
5. Царегородцев Е.Л., Банару Г.А., Светлаков А.В. Нечеткие исчисления и их приложения // Энергетика, информатика, инновации – 2021: сборник трудов XI Международной научно-технической конференции (Смоленск, 28–29 октября 2021 года). В 2 т. Смоленск: Универсум, 2021. С. 39-43.

A.V. Svetlakov¹, G.A. Banaru²

¹ National Research University of Electronic Technology

² Smolensk State University

ON DIFFERENT WAYS OF REPRESENTING SOME FUZZY-AUTOMATA LANGUAGES

Keywords: *fuzzy structure Kripke, fuzzy event, linguistic statement, truth function, event realization trajectory.*

Abstract. *This work is devoted to extending the precise logic of branching time to the corresponding fuzzy theory. Definitions of the basic concepts of fuzzy branching time logic are given, and Kripke structures are extended to structures with fuzzy events. A theorem on the extension of CTL is proven, demonstrating that the introduced semantics of fuzzy CTL formulas indeed extends the clear logic of branching time.*

А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

УДК 517.538.52+517.538.53

О СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ – ЛОРАНА

Ключевые слова: *аппроксимации Паде, степенные ряды, ряды Лорана, аппроксимации Паде–Лорана, теорема Фабри, теорема Монтессу.*

В статье установлено, что аппроксимации Паде, построенные для функции, представленной рядом Лорана, при условии, что его коэффициенты удовлетворяют условиям теоремы Фабри, дают конструктивное аналитическое продолжение этой функции за пределы её кольца аналитичности. Основная теорема является простейшим аналогом известной теоремы Монтессу де Болора для аппроксимаций Паде степенного ряда.

1. Введение. Задача эффективного аналитического продолжения заданной степенным рядом аналитической функции и изучения её свойств непосредственно по коэффициентам этого ряда является классической задачей анализа [1–2]. Фундаментальным результатом в этом направлении исследований стала теорема Монтессу о сходимости последовательности строчных аппроксимаций Паде степенного ряда, представляющего мероморфную функцию. Вполне естественно, что аналогичная задача представляет интерес и в том случае, когда

аналитическая функция f задается в кольце $K = \{z : r < |z| < R\}$ рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l z^l. \quad (1)$$

В работе [3] предложен новый подход к проблеме Паде – Лорана. Он опирается на классическую схему Г. Фробениуса [4] построения аппроксимации Паде и вместе с тем имеет отличие: вместо обычных многочленов рассматриваются *обобщенные многочлены (многочлены Лорана)*. В данной работе мы продолжаем исследования, начатые в [3]. В частности, показываем, что для построенных в [3] аппроксимаций Паде – Лорана ряда (1) при определенных условиях на коэффициенты $\{f_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ имеет место некоторый аналог теоремы Монтеcssу.

2. Аппроксимации Паде – Лорана. Напомним основные определения и результаты работы [3].

Обозначим через L_m множество всех рациональных дробей вида

$$Q(z) = \frac{a_{-p}}{z^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p, \quad p \leq m.$$

Функцию $Q \in L_m$ будем называть *обобщенным многочленом (многочленом Лорана) степени не выше m* , а $\deg Q = p \Leftrightarrow |a_{-p}| + |a_p| \neq 0$.

По определению n -й частной суммой ряда (1) будем называть обобщенный многочлен

$$S_n(z) = \sum_{l=-n}^n f_l z^l.$$

В [3] доказано, что для фиксированной пары индексов (n, m) и ряда (1) существуют такой тождественно не равный нулю обобщенный многочлен $Q_{n,m} \in L_m$ и такой обобщенный многочлен $P_{n,m} \in L_n$, что

$$(Q_{n,m} f - P_{n,m})(z) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} \left(c_k z^k + \frac{c_{-k}}{z^k} \right). \quad (2)$$

При $m = 0$ обобщенный многочлен $P_{n,0}$ является n -й частной суммой S_n ряда (1).

Рациональную дробь $[n/m]_f := P_{n,m} / Q_{n,m}$ будем называть *аппроксимацией Паде – Лорана типа (n, m) ряда (1)*. Обобщенные многочлены $Q_{n,m}$, $P_{n,m}$ условиями (2) определяются, вообще говоря, не единственным образом.

Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицу-строку

$$\mathbb{F}_l = (f_{l+m} \quad f_{l+m-1} \quad \dots \quad f_{l+1} \quad f_l \quad f_{l-1} \quad \dots \quad f_{l-m+1} \quad f_{l-m})$$

и при $m \neq 0$ рассмотрим определитель порядка $2m + 1$

$$D(n, m; z) := \begin{vmatrix} f_{n+2m} & \cdots & f_{n+m+1} & f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n+m+1} & \cdots & f_{n+2} & f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ z^{-m} & \cdots & z^{-1} & 1 & z & \cdots & z^m \\ f_{-n+m-1} & \cdots & f_{-n} & f_{-n-1} & f_{-n-2} & \cdots & f_{-n-m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{-n} & \cdots & f_{-n-m+1} & f_{-n-m} & f_{-n-m-1} & \cdots & f_{-n-2m} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $H_{n,m} = H_{n,m}(f)$ матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n, m; z)$ после удаления в нём $(m+1)$ -й строки. Если в определителе $D(n, m; z)$ заменить $(m+1)$ -ю строку на строку $\mathbb{F}_l$, получим новый определитель $d_l(n, m)$.

В [3] установлено, что с точностью до числового множителя многочлены $Q_{n,m}$, $P_{n,m}$ условиями (2) определяются единственным образом тогда и только тогда, когда матрица $H_{n,m}(f)$ является матрицей полного ранга. В этом случае при определённом выборе нормирующего множителя справедливы равенства

$$Q_{n,m}(z) = D(n, m; z),$$

$$P_{n,m}(z) = \sum_{p=-n}^n d_p(n, m) z^p,$$

$$(Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \{d_p(n, m) z^p + d_{-p}(n, m) z^{-p}\}.$$

3. Аналог теоремы Монтеессу для ряда Лорана. Для упрощения формулировок и доказательств в дальнейшем будем рассматривать только случай, когда $m=1$. В этом случае предыдущие равенства принимают вид:

$$Q_{n,1}(z) = \begin{vmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} & f_n \\ z^{-1} & 1 & z \\ f_{-n} & f_{-n-1} & f_{-n-2} \end{vmatrix}, \quad P_{n,1}(z) = \sum_{p=-n}^n d_p(n, 1) z^p, \quad (3)$$

$$(Q_{n,1}f - P_{n,1})(z) = \sum_{p=n+2}^{\infty} \{d_p(n, 1) z^p + d_{-p}(n, 1) z^{-p}\}, \quad (4)$$

$$d_p(n, 1) := \begin{vmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} & f_n \\ f_{p+1} & f_p & f_{p-1} \\ f_{-n} & f_{-n-1} & f_{-n-2} \end{vmatrix}, \quad H_{n,1} := \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} & f_n \\ f_{-n} & f_{-n-1} & f_{-n-2} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Предположим, что коэффициенты $\{f_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ ряда (1) удовлетворяют условиям

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = z_+ \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{-n}}{f_{-n-1}} = \frac{1}{z_-} \neq \infty, \quad (6)$$

где $|z_-| < |z_+|$. Тогда по теореме Фабри об отношении [1] ряд Лорана (1) сходится в кольце $K = \{z : |z_-| = r < |z| < R = |z_+|\}$, а точки $z_{\pm}$ являются изолированными особыми точками функции f , лежащими на границе этого кольца. Введем в рассмотрение новое кольцо $K^* = \{z : r^* \leq |z| \leq R^*\}$, где $r^2 / R < r^* < r$, $R < R^* < R^2 / r$. Считаем, что в кольце K^* , кроме $z_{\pm}$, нет других особых точек функции f .

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Равномерно на компактных подмножествах множества $K^* \setminus \{z_{\pm}\}$*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [n/1]_f(z) = f(z).$$

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *При достаточно больших n определитель*

$$G_n = \begin{vmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{-n} & f_{-n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда $G_{n_k} = 0$ для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Это значит, что справедливы равенства

$$\frac{f_{n_k+1}}{f_{n_k+2}} = \frac{f_{-n_k-1}}{f_{-n_k}}.$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow +\infty$, получим, что $z_+ = z_-$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Из леммы следует, что при больших n матрица $H_{n,1}$ имеет полный ранг, а значит, справедливы равенства (3)–(5). Так как функция аналитична в кольце K , то для коэффициентов ряда Лорана (1) справедливы неравенства Коши

$$|f_l| \leq \frac{M_{\rho}}{\rho^l}, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

где $M_{\rho} = \max_{|z|=\rho} |f(z)|$, $r < \rho < R$.

Положим

$$B(z) = \frac{1}{z}(z - z_+)(z - z_-) = B_1 z + B_0 + \frac{B_{-1}}{z}.$$

Очевидно, что $B(z) \in L_1$ и $B_1 = 1$. Определим функцию

$$A(z) := B(z)f(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p z^p,$$

где

$$A_p = \sum_{l=-1}^1 f_{p-l} B_l = f_{p+1} B_{-1} + f_p B_0 + f_{p-1} B_1. \quad (8)$$

Поскольку $A(z)$ аналитична в каждой точке замкнутого кольца K^* , то она аналитична в некоторой более широкой области, содержащей K^* , и для модулей коэффициентов её ряда Лорана справедливы неравенства Коши

$$|A_l| \leq \frac{M_\rho^*}{\rho^l}, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

где $M_\rho^* = \max_{|z|=\rho} |A(z)|$, $r_1 \leq \rho \leq R_1$, $r_1 < r^* < R^* < R_1$.

Пусть

$$[n/1]_f(z) = \frac{P_{n,1}(z)}{Q_{n,1}(z)} = \frac{\sum_{l=-n}^n a_l^{[n,1]} z^l}{b_{-1}^{[n,1]} z^{-1} + b_0^{[n,1]} + b_1^{[n,1]} z}.$$

Коэффициенты обобщённого многочлена $Q_{n,1}$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{l=-1}^1 f_{p-l} b_l^{[n,1]} = 0, \quad p = \pm(n+1). \quad (10)$$

Пронормируем дробь $[n/1]_f$ так, чтобы $b_1^{[n,1]} = 1$. Это можно сделать при достаточно больших n , так как согласно лемме в этом случае $G_n \neq 0$, и поэтому коэффициент при z в многочлене $Q_{n,1}$ не равен нулю.

Покажем, что для каждого $l \in \{-1, 0, 1\}$ последовательность $b_l^{[n,1]} \rightarrow B_l$ при $n \rightarrow +\infty$. Для этого положим $\Delta_n^l = B_l - b_l^{[n,1]}$. В силу принятой нормировки $\Delta_n^1 = 0$. Вычтя (10) из (8), получим систему

$$\begin{cases} f_{n+2} \Delta_n^{-1} + f_{n+1} \Delta_n^0 = A_{n+1}, \\ f_{-n} \Delta_n^{-1} + f_{-n-1} \Delta_n^0 = A_{-n-1} \end{cases}$$

для отыскания неизвестных Δ_n^{-1} , Δ_n^0 , главный определитель которой $G_n \neq 0$. Решение её может быть найдено по формулам Крамера

$$\Delta_n^{-1} = \frac{1}{G_n} \cdot \begin{vmatrix} A_{n+1} & f_{n+1} \\ A_{-n-1} & f_{-n-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n^0 = \frac{1}{G_n} \cdot \begin{vmatrix} f_{n+2} & A_{n+1} \\ f_{-n} & A_{-n-1} \end{vmatrix}.$$

Перейдём к доказательству равенства $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n^{-1} = 0$. Равенство $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n^0 = 0$ доказывается аналогично. Учитывая, что $B_{-1} = z_+ \cdot z_-$, $B_0 = -z_+ \cdot z_-$, $B_1 = 1$, последовательно получаем:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n^{-1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_{n+1}f_{-n-1} - A_{-n-1}f_{n+1}}{f_{n+2}f_{-n-1} - f_{n+1}f_{-n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_{-1}(f_{n+2}f_{-n-1} - f_{-n}f_{n+1}) + B_1(f_n f_{-n-1} - f_{-n-2}f_{n+1})}{f_{n+2}f_{-n-1} - f_{n+1}f_{-n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_{-1} \left(\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} - \frac{f_{-n}}{f_{-n-1}} \right) + B_1 \left(\frac{f_n}{f_{n+1}} - \frac{f_{-n-2}}{f_{-n-1}} \right)}{\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} - \frac{f_{-n}}{f_{-n-1}}} = \frac{z_+ z_- (z_+^{-1} - z_-^{-1}) + z_+ - z_-}{z_+^{-1} - z_-^{-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Докажем теперь равномерную сходимость. Рассмотрим разность

$$f(z) - [n/1]_f(z) = \frac{A(z)}{B(z)} - \frac{P_{n,1}(z)}{Q_{n,1}(z)} = \frac{A(z)Q_{n,1}(z) - B(z)P_{n,1}(z)}{B(z)Q_{n,1}(z)}. \quad (11)$$

Имеем

$$A(z)Q_{n,1}(z) = \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p z^p \right) \left(\sum_{j=-1}^1 b_j^{[n,1]} z^j \right) = \sum_{j=-1}^1 \left(b_j^{[n,1]} \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{p-j} z^p \right). \quad (12)$$

Так как $B(z)P_{n,1}(z) \in L_{n+1}$ и

$$A(z)Q_{n,1}(z) - B(z)P_{n,1}(z) = B(z)(Q_{n,1}(z)f(z) - P_{n,1}(z)),$$

то из определения $[n,1]_f$ следует, что

$$A(z)Q_{n,1}(z) = B(z) \sum_{p=n+2}^{\infty} (d_p(n,1)z^p + d_{-p}(n,1)z^{-p}) + B(z)P_{n,1}(z).$$

Отсюда и из (12) в силу единственности разложения в ряд Лорана получаем

$$\begin{aligned}
|A(z)Q_{n,1}(z) - B(z)P_{n,1}(z)| &\leq \sum_{j=-1}^1 |b_j^{[n,1]}| \left| \sum_{p=n+2}^{\infty} (A_{p-j} z^p + A_{-p-j} z^{-p}) \right| + \\
&+ |b_{-1}^{[n,1]} d_{n+2}(n,1) z^{n+1} + b_1^{[n,1]} d_{-n-2}(n,1) z^{-n-1}|. \quad (13)
\end{aligned}$$

Пусть $z \in K^*$. Тогда $r^* \leq |z| \leq R^*$. Из (9) следует, что

$$|A_{-l}| \leq M_{r_1}^* r_1^l, \quad |A_l| \leq \frac{M_{R_1}^*}{R_1^l}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Тогда при $p \geq n+2$

$$|A_{p-j} z^p + A_{-p-j} z^{-p}| \leq M_{R_1}^* \left(\frac{|z|}{R_1} \right)^p + M_{r_1}^* \left(\frac{r_1}{|z|} \right)^p \leq M_{R_1}^* \left(\frac{R^*}{R_1} \right)^p + M_{r_1}^* \left(\frac{r_1}{r^*} \right)^p = O(q^p),$$

где $0 < q < 1$. Учитывая, что коэффициенты $b_j^{[n,1]}$ при $n \rightarrow +\infty$ ограничены, первая сумма в правой части неравенства (13) стремится к

нулю при $n \rightarrow +\infty$ равномерно по всем $z \in K^*$. Оценим второе слагаемое в правой части (13). Рассмотрим определитель

$$d_{n+2}(n,1) = \begin{vmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} & f_n \\ f_{n+3} & f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{-n} & f_{-n-1} & f_{-n-2} \end{vmatrix}.$$

Возьмём достаточно малое $\varepsilon > 0$ так, чтобы $r < r + \varepsilon < R - \varepsilon < R$. Если обозначить через $\rho_{\varepsilon_r} = r + \varepsilon$, $\rho_{\varepsilon_R} = R - \varepsilon$, то из (7) следует, что

$$|f_{-p}| \leq M_{\rho_{\varepsilon_r}} (r + \varepsilon)^p, \quad |f_p| \leq \frac{M_{\rho_{\varepsilon_R}}}{(R - \varepsilon)^p}, \quad p = n, n+1, n+2, n+3.$$

Учитывая, что определитель $d_{n+2}(n,1)$ равен сумме шести слагаемых, составленных из произведений трёх его элементов, лежащих в разных строках, получим

$$|d_{n+2}(n,1)z^{n+1}| \leq M_\varepsilon \max \left\{ \left(\frac{r + \varepsilon}{(R - \varepsilon)^2} \right)^p : p = n, n+1, n+2, n+3 \right\} |z|^{n+1},$$

где $M_\varepsilon = 6 \max \{ M_{\rho_{\varepsilon_r}}, M_{\rho_{\varepsilon_R}} \}$. Аналогично

$$|d_{-n-2}(n,1)z^{-n-1}| \leq M_\varepsilon \max \left\{ \left(\frac{(r + \varepsilon)^2}{R - \varepsilon} \right)^p : p = n, n+1, n+2, n+3 \right\} \frac{1}{|z|^{n+1}}.$$

Учитывая, что при $\varepsilon \rightarrow +0$ функции

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{r + \varepsilon}{(R - \varepsilon)^2} \rightarrow \frac{r}{R^2}, \quad \phi(\varepsilon) = \frac{(r + \varepsilon)^2}{R - \varepsilon} \rightarrow \frac{r^2}{R},$$

а также характер монотонности этих функций при малых положительных ε , легко заметить, что существует такое ε^* , для которого

$$\frac{r}{R} r < \frac{(r + \varepsilon^*)}{R - \varepsilon^*} = r_{\varepsilon^*} < r^* < r, \quad R < R^* < \frac{(R - \varepsilon^*)^2}{r - \varepsilon^*} = R_{\varepsilon^*} < \frac{R}{r} R.$$

Тогда для любого $z \in K^*$

$$|d_{n+2}(n,1)z^{n+1} + d_{-n-2}(n,1)z^{-n-1}| \leq M_{\varepsilon^*} \left\{ \left(\frac{|z|}{R_{\varepsilon^*}} \right)^n + \left(\frac{r_{\varepsilon^*}}{|z|} \right)^n \right\} = O(q_1^n),$$

где $0 < q_1 < 1$. Поэтому числитель правой части (11) стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$ равномерно по всем $z \in K^*$.

Займёмся теперь знаменателем правой части (11). Предположим, что z принадлежит компакту $\mathfrak{M} \subset K^* \setminus \{z_\pm\}$. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ будет справедливо неравенство $|B(z)| > 2\varepsilon$. Поскольку равномерно на $\mathfrak{M}$ обобщенный многочлен $Q_{n,1}(z) \rightarrow B(z)$, то найдётся такой номер n_ε ,

что $|Q_{n,1}(z)| > \varepsilon$ для всех $n > n_\varepsilon$ и $z \in \mathfrak{M}$. Следовательно, модуль знаменателя правой части равенства (11) ограничен снизу величиной $2\varepsilon^2$ для всех $n > n_\varepsilon$ и $z \in \mathfrak{M}$, а числитель стремится к нулю. Следовательно, $f(z) - [n/1]_f(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ равномерно на компактных подмножествах K^* . Теорема доказана.

Литература

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967. 240 с.
2. Суетин С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // Успехи математических наук. 2002. № 1(343). С. 45–142.
3. Старовойтов А.П., Рябченко Н.В. Рациональные аппроксимации рядов Лорана // Проблемы физики, математики и техники. 2024. № 1(58). С. 68–73.
4. Бейкер мл. Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения. М.: Мир, 1986. 502 с.

A.P. Starovoitov, I.V. Kruglikov
Francisk Skorina Gomel State University

ON THE CONVERGENCE OF PADE – LAURENT APPROXIMATIONS

Keyword: *Pade approximants, power series, Laurent series, Pade – Laurent approximants, Fabry's theorem, Montessus's theorem.*

Abstract. *The paper establishes that Pade approximants constructed for a function represented by a Laurent series, provided that its coefficients satisfy the conditions of the Fabry theorem, provide a constructive analytic continuation of this function beyond its analyticity annulus. The main theorem is a simple analogue of the well-known Montessus de Ballore theorem for Pade approximants of power series.*

А.В. Трусило, Е.А. Ровба
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

УДК 517.5

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ РАЦИОНАЛЬНОМ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ

Ключевые слова: *тригонометрический полином, тригонометрическая рациональная функция, интерполирование.*

В статье получены представления некоторых тригонометрических рациональных функций через отношение тригонометрических полиномов и исследованы свойства нулей найденных функций. Построены интерполяционные рациональные функции Лагранжа с узлами в нулях вышеуказанных специальных функций и установлена их точность для соответствующих рациональных тригонометрических функций специального вида.

1. Постановка задачи. Известно, что в теории интерполирования в тригонометрическом случае важную роль играют равноотстоящие узлы. Возникает вопрос, каким будет их обобщение на случай интерполирования рациональными функциями. В настоящей работе предлагается подход, схожий с классическим полиномиальным подходом, см. [1]. Здесь узлы выбираются в нулях некоторой синус-функции, рассматриваются свойства специальных тригонометрических рациональных функций и их нулей. Целью работы является построение и исследование новых формул для тригонометрического рационального интерполирования, основанных на специальном выборе узлов интерполяции.

2. Построение интерполяционной тригонометрической рациональной функции в общем случае. Пусть $\alpha_k, k=1,2,\dots,n$ – некоторые комплексные числа, принадлежащие единичному кругу $|z|<1$. Введём следующие функции:

$$\lambda_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}, \quad \theta_k = \arg \alpha_k, k=1,2,\dots,n;$$

$$\varphi_n(x) = \int_a^x \left(\frac{1}{2} + \lambda_n(u) \right) du, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$S_n(x) = \sin \varphi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 1. Справедливо равенство:

$$S_n(x) = \frac{q_{n+\frac{1}{2}}(x)}{w_n(x)},$$

где $q_{n+\frac{1}{2}}(x)$ – некоторый тригонометрический полином полуцелого

порядка $n + \frac{1}{2}$, см. [2] и

$$w_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - 2|\alpha_k| \cos(x - \theta_k) + |\alpha_k|^2).$$

Лемма 1 доказывается на основании одного представления произведения Бляшке для круга [3].

Лемма 2. Функция $S_n(x)$ на промежутке $[a; a + 2\pi)$ имеет $2n + 1$ нуль, то есть существуют точки x_k , $k = 0, 1, \dots, 2n$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < a + 2\pi$ такие, что

$$S_n(x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Доказательство. Функция $\varphi_n(x)$ — возрастающая на $[a; a + 2\pi)$. Нетрудно найти, что

$$\varphi_n(a) = 0, \quad \varphi_n(a + 2\pi) = (2n + 1)\pi.$$

Воспользуемся теоремой Больцано – Коши о промежуточном значении непрерывной функции. В силу этого и монотонности функции $\varphi_n(x)$ каждое уравнение

$$\varphi_n(x) = k\pi, \quad k = 0, 1, \dots, 2n,$$

имеет единственное решение x_k , $k = 0, 1, \dots, 2n$. Лемма 2 доказана.

Следствие леммы 2. В случае, когда $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, функция $S_n(x)$ является тригонометрическим полиномом и её нули задаются следующей формулой

$$x_k = a + \frac{2\pi k}{2n + 1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n,$$

то есть являются равноотстоящими.

Введём следующие функции:

$$t_k(x) = \frac{(-1)^k S_n(x)}{\sin \frac{x - x_k}{2} (1 + 2\lambda_n(x_k))}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Лемма 3. Функции $t_k(x)$ являются тригонометрическими рациональными порядка не выше n следующего вида

$$t_k(x) = \frac{q_n^{(k)}(x)}{w_n(x)},$$

где $q_n^{(k)}(x)$ — некоторые тригонометрические полиномы порядка n , $k = 0, 1, \dots, 2n$, причём справедливы равенства

$$t_k(x_j) = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j, \quad k, j = 0, 1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Теорема 1. Интерполяционная рациональная тригонометрическая функция Лагранжа $L_n(x)$ с узлами в точках x_k , $k = 0, 1, \dots, 2n$, может быть представлена в виде

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} y_k t_k(x),$$

где $y_0, y_1, \dots, y_{2n} \in \mathbb{R}$, причём $L_n(x)$ есть функция следующего вида:

$$L_n(x) = \frac{q_n(x)}{w_n(x)},$$

где $q_n(x)$ – некоторый тригонометрический полином порядка не выше n .

Лемма 4. Интерполяционная тригонометрическая рациональная функция Лагранжа $L_n(x)$ является точной для всякой функции вида

$$f(x) = \frac{t_n(x)}{w_n(x)},$$

где $t_n(x) \in \mathbb{T}_n$, в частности для функции $f(x) = 1$.

3. Построение чётной интерполяционной рациональной функции. Пусть $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, 2n$, некоторые действительные числа, принадлежащие интервалу $(-1, 1)$, $\alpha_{n+k} = -\alpha_k, k = 1, 2, \dots, n$, то есть параметры α_k симметричны относительно начала координат. Определим следующие функции:

$$\lambda_{2n}(u) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}, \quad \theta_k = \arg \alpha_k, \quad u \in \mathbb{R};$$

$$\varphi_{2n}(x) = \int_0^x \lambda_{2n}(u) du, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$S_{2n}(x) = \sin \varphi_{2n}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Представим функцию $\lambda_{2n}(u)$ в следующем виде:

$$\lambda_{2n}(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}.$$

Преобразовав это выражение, получим

$$\lambda_{2n}(u) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^4}{1 - 2|\alpha_k|^2 \cos 2u + |\alpha_k|^4}.$$

Лемма 5. Функция $S_{2n}(x)$ является рациональной нечетной, и справедливо представление

$$S_{2n}(x) = \frac{q_{2n}(x)}{w_{2n}(x)},$$

где $q_{2n}(x)$ – некоторый нечетный тригонометрический полином порядка $2n$ и

$$w_{2n}(x) = \prod_{k=1}^n (1 - 2\alpha_k^2 \cos 2x + \alpha_k^4).$$

Лемма 6. Функция $S_{2n}(x)$ имеет $4n$ нулей на полуинтервале $(-\pi; \pi]$, $-\pi < x_{4n-1} < x_{4n-2} < \dots < x_{2n+1} < 0 = x_0 < \dots < x_{2n} = \pi$, причем $x_{2n+k} = -x_k, k = 1, 2, \dots, 2n-1$.

Теперь в качестве узлов интерполирования возьмем точки $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ и построим четную интерполяционную рациональную тригонометрическую функцию. Определим следующие функции:

$$t_0(x) = \frac{S_{2n}(x) \sin x}{2\lambda_{2n}(x_0)(1 - \cos x)};$$

$$t_k(x) = \frac{(-1)^{k+1} S_{2n}(x) \sin x}{\lambda_{2n}(x_k)(\cos x - \cos x_k)}, k = 1, 2, \dots, 2n-1;$$

$$t_{2n}(x) = -\frac{S_{2n}(x) \sin x}{2\lambda_{2n}(x_{2n})(1 + \cos x)}.$$

Лемма 7. Функции $t_k(x), k = 0, 1, \dots, 2n$, являются четными тригонометрическими рациональными порядка $2n$ вида

$$t_k(x) = \frac{q_{2n}^{(k)}(x)}{w_{2n}(x)}, k = 0, 1, \dots, 2n,$$

где $q_{2n}^{(k)}(x)$ – тригонометрический полином порядка $2n$, причем справедливы равенства

$$t_k(x_j) = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j, k, j = 0, 1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Теорема 2. Интерполяционная рациональная тригонометрическая четная функция $L_{2n}(x)$ с узлами в точках $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ на отрезке $[0; \pi]$ может быть представлена в виде

$$L_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} y_k t_k(x), y_0, y_1, \dots, y_{2n} \in \mathbb{R},$$

причем $L_{2n}(x)$ имеет вид

$$L_{2n}(x) = \frac{q_{2n}(x)}{w_{2n}(x)},$$

где $q_{2n}(x)$ – некоторый тригонометрический четный полином порядка $2n$ и является точной для функции $f(x) = 1$.

Преимущество данного подхода состоит в том, что он обобщает классический полиномиальный метод на случай рациональных тригонометрических функций, что позволяет получить более эффективные методы построения интерполяционных рациональных тригонометрических функций.

Литература

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. 688 с.
2. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. Минск: Вышэйшая школа, 1968. 320 с.

3. Джрбашян М.М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Известия Академии наук Армянской ССР. Серия: Физико-математические, естественные и технические науки. 1956. Т. 9, № 7. С. 3–28.

A.V. Trusilo, Y.A. Rouba
Yanka Kupala State University of Grodno

ON TRIGONOMETRIC RATIONAL INTERPOLATION

Keywords: *trigonometric polynomial, trigonometric rational function, interpolation.*

Abstract. *On the basis of our work representations of some trigonometric rational functions through the ratio of trigonometric polynomials are obtained and properties of zeros of the found functions are investigated. We construct interpolation rational Lagrange functions with nodes in the zeros of the above special functions and establish their accuracy for the corresponding rational trigonometric functions of special kind.*

Д.А. Тукмаков
ИММ ФИЦ КазНЦ РАН

УДК 51-72

ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОТЧЕТА ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СРЕДЫ

Ключевые слова: *механика жидкости и газа, математическое моделирование, математическая физика*

Статья посвящена вопросам математического моделирования процессов механики жидкости и газа. Представлены различные записи системы уравнений Навье – Стокса для одномерного течения сжимаемой теплопроводной среды в рамках четырехпараметрической группы преобразований Галилея – Ньютона.

1. Введение. Одной из задач механики жидкости и газа является разработка математических моделей различных течений [1–5]. Математические модели могут быть как численными [6–12], так и аналитическими [13–16]. Поскольку теоретический аппарат механики жидкости и газа основан на теории дифференциальных уравнений, разработка моделей течений связана с алгебраическими структурами [1],

в том числе и задача изменения системы координат. В общем случае моделирования нестационарного процесса с трехмерной геометрией полная группа преобразований координат Галилея – Ньютона состоит из десяти преобразований [2] – трех вращений (группа поворотов в евклидовом пространстве) системы координат, трех переносов центра координат по пространству и одного сдвига начального времени отсчета и трех подвижных преобразований координат.

В общем виде система уравнений динамики сплошной среды включает в себя уравнение сохранения массы (1) систему уравнений сохранения импульса – систему уравнений Навье – Стокса (2) и уравнение сохранения энергии (3), и в векторном виде может быть записана как:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho V^k}{\partial t} + \nabla^i (\rho V^k V^i + \delta_{ik} p - \tau_{ik}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(e)}{\partial t} + \nabla^i (V^i (e + p - \tau_{ii}) - V^k \tau_{ki}) = 0. \quad (3)$$

Здесь V^i – компоненты вектора скорости δ_{ik} – символ Кронекера, e – полная энергия среды, τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений. Для теплопроводной среды уравнение (3) записывают в виде (4), где T – температура, λ – теплопроводность:

$$\frac{\partial(e)}{\partial t} + \nabla^i (V^i (e + p - \tau_{ii}) - V^k \tau_{ki} - \lambda \nabla^i T) = 0. \quad (4)$$

2. Одномерная математическая модель. В ряде случаев возможно пренебречь трехмерными и плоскими эффектами течений сплошных сред. В таких случаях течение возможно описать как течение, все функции которого изменяются только вдоль одной пространственной координаты x . При этом может быть необходимо моделировать течение среды при повороте направления координатной оси или при движении начала координат $0'$ со скоростью u_0 (рис. 1).

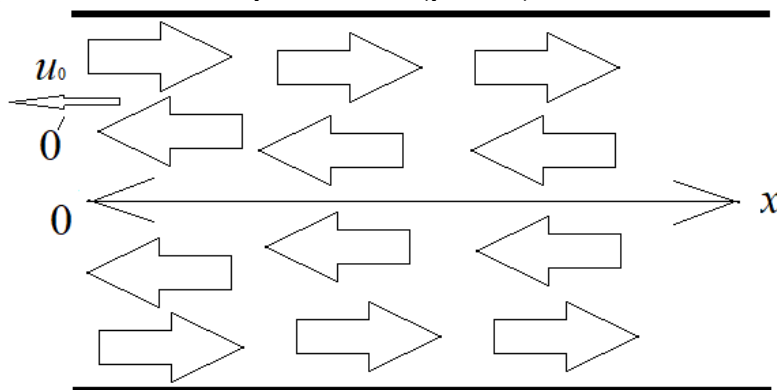


Рис. 1. Общая схема одномерного течения сплошной среды

Для одномерного случая $\nabla^i = \text{div} = \frac{\partial}{\partial x}$, u – функция скорости, $\tau(u)$ – функция вязких напряжений.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left([e + p - \tau]u - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0. \quad (7)$$

При этом делается предположение существования замыкающих соотношений (8), где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ параметры, определяемые свойствами среды:

$$e = \alpha T, \tau = \beta p, \tau = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8)$$

В одномерном случае система уравнений теплопроводной среды записывается в виде (см. [7]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial(e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((e + p)u) - \frac{4}{3} \mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (11)$$

3. Преобразование координат. Для течения с одномерной геометрией группа преобразований Галилея – Ньютона состоит из четырех преобразований – $x_1 = x + x_0$, $t_1 = t + t_0$ – пространственного и временного переноса. В трехмерном случае группа преобразований поворота имеет вид $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ – вектор, $\mathbf{A}$ – матрица, чей определитель $\det||\mathbf{A}|| = 1$, для одномерного случая преобразование вращения $x_1 = ax$ ($a = -1$), $\xi(x, t) = x - u_0 t$ – перенос к движущейся оси, u_0 – скорость движения точки начала координат. Для преобразований пространственного и временного переноса дифференциальные операторы не изменяются $\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t}$.

В одномерном случае при вращении координат производная преобразуется к виду – $\frac{\partial}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x}$, таким образом, система уравнений (9)–(11) имеет вид (12)–(14):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x_1} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u^2 + p) - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial(e)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1}((e+p)u) - \frac{4}{3}\mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = 0. \quad (14)$$

При переходе к движущейся системе координат $x(\xi, t) = \xi + u_0 t$ производные преобразуются к виду:

$$\frac{\partial(\rho + u_0^{-1} \rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial(\rho u + u_0^{-1}(\rho u^2 + p))}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho u^2 + p) - \frac{4}{3}\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2u_0^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial t} + u_0^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(e + u_0^{-1}(e+p)u) + \frac{\partial}{\partial \xi}((e+p)u) - \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + 2u_0^{-1} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial t} + u_0^{-2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) - \\ & - \frac{4}{3}\mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + u_0^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2u_0^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial t} + u_0^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В работе проведены исследование записи одномерной системы уравнений Навье – Стокса в четырёхпараметрической группе преобразований Ньютона – Галилея преобразования системы координат одномерного нестационарного течения. Результаты возможно применить при моделировании течения вязкой жидкости в трубах и каналах с допущением одномерной геометрии течения.

Благодарности

Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

Литература

1. Душин В.Р., Смирнов Н.Н. Основные понятия и алгоритмы группового анализа дифференциальных уравнений. М.: МГУ. 2017. 63 с.
2. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подobie. М.: Иностранная литература, 1963. 246 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1–2. М.: Наука. 1994.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.В. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 784 с.

7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1991. 504 с.
8. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 2003. 284 с.
9. Тукмаков А.Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2006. № 4. С. 33-36.
10. Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния направления вдува капель на поглощение частиц пыли // Инженерные технологии и системы. 2025. Т. 35, № 4. С. 786-807.
11. Тукмаков Д.А. Конечно-разностная схема Эйлера первого порядка точности для моделирования одномерного стационарного течения порошковой среды // Международный научно-исследовательский журнал. 2025. № 10 (160). С. 1–8.
12. Тукмаков Д.А. Сопоставление численных реализаций метода квадратур решения интегрального уравнения // Многофазные системы. 2025. Т. 20, № 1. С. 7–11.
13. Синявский Ю.В., Борисов В.В. Интеллектуальный анализ гидромеханических процессов перемешивания // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 221-224.
14. Модель экзоскелета с пятью звеньями переменной длины и регулируемой посредством магнитно-реологической жидкости жесткостью / А.О. Блинов [и др] // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2023. Вып. 24. С. 225-230.
15. Тукмаков Д.А. Однопараметрические подгруппы аффинных преобразований для системы уравнений одномерной нестационарной динамики вязкой несжимаемой среды // Системы компьютерной математики. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2025. Вып. 26. С. 286-293.
16. Тукмаков Д.А. Применение k-ε модели турбулентности для математического описания одномерного нестационарного течения теплопроводной несжимаемой жидкости с пульсациями // Вестник научного общества студентов, аспирантов, молодых ученых. 2021. № 1. С. 75-83.

D.A. Tukmakov
KazSC RAS

GROUP OF TRANSFORMATIONS OF THE INERTIAL REFERENCE SYSTEM OF A ONE-DIMENSIONAL NON- STATIONARY SYSTEM OF NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR THE FLOW OF A COMPRESSIBLE HEAT-CONDUCTING MEDIUM

Keywords: *fluid and gas mechanics, mathematical modeling, mathematical physics.*

Abstract. *This paper examines the mathematical modeling of fluid and gas mechanics processes. Various representations of the Navier-Stokes equations for the one-dimensional flow of a compressible, heat-conducting medium are presented within the framework of the four-parametric Galileo-Newtonian transformation group.*

Acknowledgments.

The work was carried out within the framework of the state assignment of the Federal Research Center of the Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

А.П. Шилин

Белорусский государственный университет

УДК 517.968.7

К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗНЫМИ ТИПАМИ ИНТЕГРАЛОВ

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение, сингулярный интеграл, гиперсингулярный интеграл, формулы Сохоцкого, краевая задача о скачке, линейное дифференциальное уравнение.*

Изучается интегро-дифференциальное уравнение первого порядка, содержащее регулярные, сингулярные и гиперсингулярные интегралы. Уравнение задается на замкнутой кривой в комплексной плоскости. Все коэффициенты уравнения выражаются некоторым образом через одну заданную функцию. Используются классические и обобщенные формулы Сохоцкого, теория краевых задач для аналитических функций и теория линейных дифференциальных уравнений в областях комплексной плоскости. Решение исходного уравнения указывается в явном виде. Приводится пример.

1. Постановка задачи. Обозначим через L простую гладкую замкнутую кривую на комплексной плоскости. Пусть L_* – кривая, симметричная кривой L относительно точки $z = 0$. Будем предполагать, что $L \cap L_* = \emptyset$. На обеих кривых L и L_* выберем положительную ориентацию. Обозначим D_+ и D_1 внутренности кривых L и L_* соответственно, $D_* = \hat{\mathbb{C}} \setminus (D_+ \cup L \cup D_1 \cup L_*)$ (см. рис. 1).

Зададим H -непрерывную (то есть удовлетворяющую условию Гельдера) функцию $f(t)$ и H -непрерывно дифференцируемую функцию $p(t)$, $t \in L$. Будем искать H -непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, $t \in L$, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(t)}{\pi i} \left(\int_L \frac{p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \int_L \frac{p(\tau) d\tau}{(\tau+t)^2} \right) - \frac{\varphi'(t)}{\pi i} \left(\int_L \frac{p(\tau) d\tau}{\tau-t} + \int_L \frac{p(\tau) d\tau}{\tau+t} \right) + \\ & + \frac{p'(t)}{\pi i} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} + \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau+t} \right) - \frac{p(t)}{\pi i} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau+t)^2} \right) = f(t), \quad t \in L. \quad (1) \end{aligned}$$

Интегралы в этом уравнении с $(\tau+t)$, $(\tau+t)^2$ в знаменателе являются регулярными. Интегралы с $\tau-t$ в знаменателе являются сингулярными и понимаются в смысле главного значения по Коши. Интегралы с $(\tau-t)^2$ в знаменателе являются гиперсингулярными и понимаются в смысле конечной части по Адамару [1]. В отличие от [2], где указаны близкие уравнения, от функции $p(t)$ не требуется аналитическая продолжимость с кривой, и, кроме того, решение уравнения (1) удастся записать непосредственно через заданные функции. Близкое уравнение без регулярных интегралов изучалось в [3].

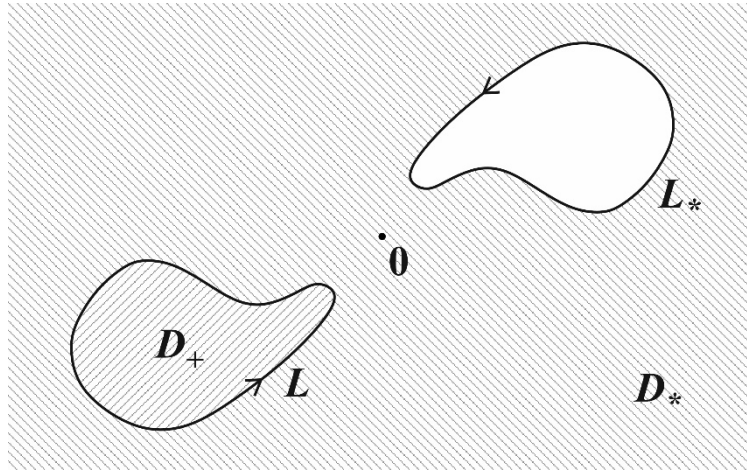


Рис. 1. Возможный вид кривых L , L_* и областей D_+ , D_*

2. Решение уравнения. Введем функции

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-z} + \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau+z} \right) &= \begin{cases} \Phi_+(z), & z \in D_+, \\ \Phi_*(z), & z \in D_*, \end{cases} \\ \frac{1}{2\pi i} \left(\int_L \frac{p(\tau) d\tau}{\tau-z} + \int_L \frac{p(\tau) d\tau}{\tau+z} \right) &= \begin{cases} P_+(z), & z \in D_+, \\ P_*(z), & z \in D_*. \end{cases} \end{aligned}$$

Функции $P_+(z)$ и $\Phi_+(z)$ будут аналитическими в области D_+ . Функции $P_*(z)$ и $\Phi_*(z)$ будут четными аналитическими в области D_* , исчезающими на бесконечности. Согласно [1], все эти функции будут иметь на кривой L H -непрерывно дифференцируемые предельные значения $P_+(z)$, $\Phi_+(z)$, $P_*(z)$, $\Phi_*(z)$, причем с помощью классических и обобщенных формул Сохоцкого несложно получить равенства

$$\begin{aligned}
p^{(k)}(t) &= P_+^{(k)}(t) - P_*^{(k)}(t), \\
\varphi^{(k)}(t) &= \Phi_+^{(k)}(t) - \Phi_*^{(k)}(t), \\
\frac{1}{\pi i} \left(\int_L \frac{p(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} + (-1)^k \int_L \frac{p(\tau) d\tau}{(\tau + t)^{k+1}} \right) &= P_+^{(k)}(t) + P_*^{(k)}(t), \\
\frac{1}{\pi i} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} + (-1)^k \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau + t)^{k+1}} \right) &= \Phi_+^{(k)}(t) + \Phi_*^{(k)}(t), \quad k = 0, 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Используя записанные равенства, уравнению (1) можно придать сначала вид

$$\begin{aligned}
&(\Phi_+(t) - \Phi_*(t))(P'_+(t) + P'_*(t)) - (\Phi'_+(t) - \Phi'_*(t))(P_+(t) + P_*(t)) + \\
&+ (P'_+(t) - P'_*(t))(\Phi_+(t) + \Phi_*(t)) - (P_+(t) - P_*(t))(\Phi'_+(t) + \Phi'_*(t)) = f(t),
\end{aligned}$$

а затем после упрощений вид краевой задачи о скачке

$$F_+(t) - F_*(t) = \frac{f(t)}{2}, \quad t \in L, \tag{3}$$

где $F_+(t)$ и $F_*(t)$ – предельные значения на кривой L аналитических функций

$$F_+(z) = P'_+(z)\Phi_+(z) - P_+(z)\Phi'_+(z), \quad z \in D_+, \tag{4}$$

$$F_*(z) = P'_*(z)\Phi_*(z) - P_*(z)\Phi'_*(z), \quad z \in D_*. \tag{5}$$

Поскольку дифференцирование меняет характер четности функции, то легко заметить, что функция $F_*(z)$ будет нечетной в области D_* .

Дальнейшие рассуждения проведем в предположении, что $P_+(z) \neq 0$, если $z \in D_+ \cup L$; $P_*(z) \neq 0$, если $z \in (D_* \cup L) \setminus \{\infty\}$. Точка $z = \infty$ согласно свойствам интегралов типа Коши будет являться нулем четного порядка функции $P_*(z)$, для определенности пусть это будет нуль 2-го порядка. Запишем разложения в ряды Лорана в окрестности точки $z = \infty$ четных функций $P_*(z)$ и $\Phi_*(z)$:

$$P_*(z) = \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_4}{z^4} + \dots, \quad \Phi_*(z) = \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_4}{z^4} + \dots,$$

где $a_2, a_4, \dots, b_2, b_4, \dots$ – некоторые коэффициенты. Тогда для аналогичного разложения функции $F_*(z)$ будет получаться

$$F_*(z) = \frac{2a_2b_4 - 2a_4b_2}{z^7} + \dots,$$

т.е. функция $F_*(z)$ будет иметь на бесконечности нуль по меньшей мере 7-го порядка.

Несложно обосновать, что для разрешимости краевой задачи (3) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L f(t) t^k dt = 0, \quad k = 0, 2, 4. \tag{6}$$

Если условия (6) выполнены, то решение этой задачи единственно и дается формулой

$$\frac{1}{4\pi i} \left(\int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z} - \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau + z} \right) = \begin{cases} F_+(z), & z \in D_+, \\ F_*(z), & z \in D_*. \end{cases}$$

Предположим, что условия (6) выполнены. Тогда после нахождения функций $F_+(z)$, $F_*(z)$ соотношения (4), (5) станут линейными дифференциальными уравнениями для нахождения функций $\Phi_+(z)$, $\Phi_*(z)$. Решение уравнения (4) записывается по формуле

$$\Phi_+(z) = P_+(z) \left(C_+ - \int_{z_1}^z \frac{F_+(\zeta) d\zeta}{P_+^2(\zeta)} \right), \quad z \in D_+, \quad (7)$$

где C_+ – произвольная комплексная постоянная, z_1 – фиксированная точка в области D_+ , а интегрирование проводится по любой кривой в области D_+ , соединяющей точки z_1 и z . Решение уравнения (5) записывается по аналогичной формуле

$$\Phi_*(z) = P_*(z) \left(C_* - \int_{\infty}^z \frac{F_*(\zeta) d\zeta}{P_*^2(\zeta)} \right), \quad z \in D_*, \quad (8)$$

где C_* – произвольная комплексная постоянная, а интегрирование проводится по любой кривой в области D_* , соединяющей бесконечно удаленную точку с точкой z .

Отметим, что при сделанных предположениях подынтегральная нечетная функция в формуле (8) будет иметь на бесконечности нуль по меньшей мере 3-го порядка. Следовательно, интеграл будет сходиться и давать четную функцию, исчезающую на бесконечности. Важно обосновать также, что интегрирование в формуле (8), осуществляемое по кривым в бесконечной двусвязной области, приводит к однозначной функции. Очевидно, что для однозначности функции $\Phi_*(z)$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L \frac{F_*(t) dt}{P_*^2(t)} = 0, \quad \int_{L_*} \frac{F_*(t) dt}{P_*^2(t)} = 0. \quad (9)$$

Но, так как интегралы от нечетных функций по симметричным относительно точки $z = 0$ кривым равны, из условий (9) можно оставить лишь первое условие. Пусть L_0 – некоторая окружность в области D_* , пробегаемая по часовой стрелке и охватывающая кривые L и L_* . По интегральной теореме Коши

$$\int_{L_0} \frac{F_*(t) dt}{P_*^2(t)} = \int_L \frac{F_*(t) dt}{P_*^2(t)} + \int_{L_*} \frac{F_*(t) dt}{P_*^2(t)} = 2 \int_L \frac{F_*(t) dt}{P_*^2(t)},$$

откуда

$$\int_L \frac{F_*(t)dt}{P_*^2(t)} = \frac{1}{2} \int_{L_0} \frac{F_*(t)dt}{P_*^2(t)} = \pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{F_*(z)}{P_*^2(z)}.$$

Поскольку $\frac{F_*(z)}{P_*^2(z)} = O\left(\frac{1}{z^3}\right)$, $z \rightarrow \infty$, то $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{F_*(z)}{P_*^2(z)} = 0$.

Следовательно, условия (9) будут выполнены.

3. Формулировка результата. Пример. Используя формулу (2) при $k=0$, теперь можно сформулировать окончательный результат, справедливый при сделанных выше предположениях.

Теорема. Для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение условий (6). Если эти условия выполняются, то общее решение уравнения (1) выражается по формуле

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \left(\frac{1}{2} p(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau+t} \right) \times \\ & \times \left(C_+ - \pi i \int_{z_1}^t \frac{\frac{\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} - \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\tau+\zeta}}{\left(\int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} + \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau+\zeta} \right)^2} d\zeta \right) + \\ & + \left(\frac{1}{2} p(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau+t} \right) \times \\ & \times \left(C_* - \pi i \int_{\infty}^t \frac{\frac{\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} - \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\tau+\zeta}}{\left(\int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} + \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau+\zeta} \right)^2} d\zeta \right), \end{aligned}$$

где C_+ , C_* – произвольные комплексные постоянные, а интегралы $\int_{z_1}^t$, $\int_{\infty}^t$

берутся по любым кривым, расположенным в областях соответственно D_+ , D_* .

Рассмотрим пример уравнения (1) на окружности $|t-2|=1$, взяв

$$p(t) = \frac{t-3}{t-2}, \quad f(t) = \frac{2(t^6 - 6t^5 + 9t^4 + 8t^3 - 24t^2 - t - 16)}{(t^2 - 4)^4}.$$

Из представления

$$\frac{t-3}{t-2} = \frac{t+1}{t+2} - \frac{4}{t^2-4}$$

понятно, что $P_+(t) = \frac{t+1}{t+2}$, $P_*(t) = \frac{4}{t^2-4}$, поэтому

$$\frac{1}{\pi i} \left(\int_{|\tau-2|=1} \frac{p(\tau) d\tau}{\tau-t} + \int_{|\tau-2|=1} \frac{p(\tau) d\tau}{\tau+t} \right) = P_+(t) + P_*(t) = \frac{t^2-t+2}{t^2-4},$$

$$\frac{1}{\pi i} \left(\int_{|\tau-2|=1} \frac{p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \int_{|\tau-2|=1} \frac{p(\tau) d\tau}{(\tau+t)^2} \right) = P'_+(t) + P'_*(t) = \frac{t^2-12t+4}{(t^2-4)^2},$$

и тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{(t^2-12t+4)\varphi(t)}{(t^2-4)^2} - \frac{(t^2-t+2)\varphi'(t)}{t^2-4} + \frac{1}{\pi i(t-2)^2} \left(\int_{|\tau-2|=1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} + \int_{|\tau-2|=1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau+t} \right) - \\ - \frac{t-3}{\pi i(t-2)} \left(\int_{|\tau-2|=1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \int_{|\tau-2|=1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau+t)^2} \right) = \\ = \frac{2(t^6-6t^5+9t^4+8t^3-24t^2-t-16)}{(t^2-4)^4}, \quad |t-2|=1. \end{aligned} \quad (10)$$

С помощью разложения на сумму простых дробей свободному члену уравнения (10), деленному на 2, несложно придать вид

$$\frac{t^6-6t^5+9t^4+8t^3-24t^2-t-16}{(t^2-4)^4} = \frac{(t+1)^2}{(t+2)^4} - \frac{t}{(t^2-4)^4},$$

откуда, очевидно, $F_+(z) = \frac{(z+1)^2}{(z+2)^4}$, $F_*(z) = \frac{z}{(z^2-4)^4}$. Области D_+ и D_* аналитичности функций $F_+(z)$ и $F_*(z)$ соответственно в случае примера изображены на рисунке 2.

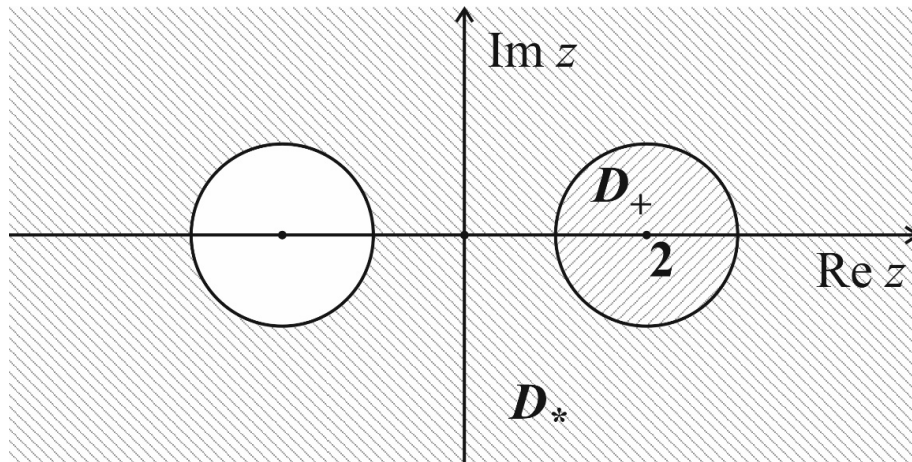


Рис. 2. Области D_+ и D_* в случае уравнения (10)

Важно заметить, что функция $F_*(z)$ имеет на бесконечности нуль 7-го порядка, так что условия (6) выполняются.

Формула (7), в которой возьмем $z_1 = 2$, примет вид

$$\Phi_+(z) = \frac{z+1}{z+2} \left(C_+ - \int_2^z \frac{d\zeta}{(\zeta+2)^2} \right) = \frac{z+1}{z+2} \left(C_+ + \frac{2-z}{4(z+2)} \right),$$

а формула (8) примет вид

$$\Phi_*(z) = \frac{4}{z^2-4} \left(C_* - \frac{1}{16} \int_{\infty}^z \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta^2-4)^2} \right) = \frac{4}{z^2-4} \left(C_* + \frac{1}{32(z^2-4)} \right).$$

Наконец, по формуле (2) при $k = 0$ получим общее решение примера

$$\varphi(t) = \frac{t+1}{t+2} \left(C_+ + \frac{2-t}{4(t+2)} \right) - \frac{4}{t^2-4} \left(C_* + \frac{1}{32(t^2-4)} \right), \quad |t-2|=1.$$

4. Заключительное замечание. Интегро-дифференциальное уравнение (1) можно обобщить на случай произвольных порядков. Записывать такие обобщения удобно с помощью определителей. Например, обобщение на случай уравнения 2-го порядка можно сделать аналогично работе [4], где изучалось уравнение без регулярных интегралов.

Литература

1. Зверович Э.И. Обобщение формул Сохоцкого // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2012. № 2. С. 24-28.
2. Шилин А.П. О решении интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих регулярные, сингулярные и гиперсингулярные интегралы // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2025. Вып. 26. С. 293-299.
3. Шилин А.П. О решении одного интегро-дифференциального уравнения с сингулярными и гиперсингулярными интегралами // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2020. Т. 56, № 3. С. 298-309.
4. Шилин А.П. Решение одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, заданного с помощью определителей // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XV Междунар. н.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 1-4 декабря 2020 г.) / под ред. И.В. Бойкова. Пенза: Изд-во ПГУ, 2020. С. 18-22.

A.P. Shilin

Belarusian State University

ON THE SOLUTION OF FIRST-ORDER INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DIFFERENT TYPES OF INTEGRALS

Keywords: *integro-differential equation, singular integral, hypersingular integral, Sokhotsky formulas, boundary value problem of the jump, linear differential equation.*

Abstract. *We study a first-order integro-differential equation containing regular, singular and hypersingular integrals. The equation is defined on a closed curve in the complex plane. All coefficients of the equation are*

expressed in some way through on given function. The classical and generalized formulas of Sokhotsky, the theory of boundary value problems for analytic functions, and the theory of linear differential equations in domains of the complex plane are used. The solution of the original equation is given explicitly. An example is given.

М.Ю. Ястребов

*Санкт-Петербургский государственный университет
Морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова*

УДК 004.6: 656.6

ЭНТРОПИЙНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРИКЛАДНЫХ КОНТИНУАЛЬНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Ключевые слова: энтропия, теория вероятностей, математическое моделирование, математическое программирование.

В последнее время в научной литературе интенсивно обсуждаются различные аспекты приложения классического понятия энтропии и связанного с ней понятия информации в смысле Шеннона – Хинчина к описанию технических и экономических систем. В статье переносится на ситуацию континуальных задач математического программирования рассмотренная для дискретного случая в [1] оценка потери информации, заложенной в исходных данных, при переходе от абсолютного оптимума к формально не оптимальному плану с целью учета факторов, количественное описание которых в рамках математической модели затруднительно.

С 1970-х годов можно констатировать интерес к информационным и тесно с ними связанным энтропийным, описывающим неопределенность аспектам управления техническими и экономическими системами. Укажем здесь на публикации [2–5], а также на исходную точку рассматриваемого здесь подхода – публикацию [6], в которой сформулирован (не получивший, впрочем, там дальнейшего развития) тезис о максимальной упорядоченности оптимального плана. Обзор современных публикаций на эту тему приведен в [1].

Введенное Шенноном [7] понятие энтропии как меры неопределенности, связанной с испытанием, получило у Хинчина [8] аксиоматическое построение, исходно опирающееся на понятие конечной схемы – полной системы попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ с их вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ и балансовым условием

$$\sum_i p_i = 1. \quad (1)$$

Конечную схему в [8] можно рассматривать как закон распределения случайной величины при соответствующей трактовке составляющих ее событий. Как отмечается там же, «для ряда приложений представляется желательным введение такой величины, которая разумным образом измеряла бы собой степень неопределённости, создаваемой любой данной конечной схемой» [8, с. 4]. Таким измерителем служит энтропия:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_k) = - \sum_{i=1}^k p_i \log p_i \quad (2)$$

(основание логарифма может быть выбрано произвольным, большим единицы).

В подходе, изложенном в [3], под количеством информации, связанной с двумя актами получения сигнала, понимается разность соответствующих значений их энтропии:

$$I = H_1 - H_2.$$

В развитие данного подхода и с заменой акта получения произвольного сигнала по каналу связи с помехой на произвольный выбор плана $X = (x_1, \dots, x_n)$ из множества альтернатив, для задачи математического программирования

$$f(X) \rightarrow \text{opt}, \quad (3)$$

$$X \in D \subset R^n, \quad (4)$$

в [1] (применительно к проблеме оптимизации проектной надежности большой распределенной информационно-управляющей системы [9]) в случае конечной области ограничений D предложен следующий подход приписывания энтропии произвольному допустимому плану X (а не только имеющему оптимальному плану).

Пусть N — количество элементов совокупности D , $k \in f(D)$ — возможное значение целевой функции, $n(k)$ — количество элементов в полном прообразе $f^{-1}(k)$. Тогда, согласно [1], каждый план $X \in f^{-1}(k)$ и одновременно соответствующее значение k характеризуются энтропией

$$H(X) = H(k) = - \sum_{k \in f(D)} A \cdot \frac{n(k)}{N} \cdot \log(A \cdot \frac{n(k)}{N}), \quad (5)$$

где корректирующий множитель A обеспечивает балансовое условие (1) для «предвероятностей» $\frac{n(k)}{N}$ и позволяет трактовать отношение под знаком логарифма как вероятность случайного выбора плана из совокупности $\Delta(k)$ планов с не лучшим, чем k , значением критерия. В рассматриваемой ситуации дискретной конечной области D получаем для A :

$$\sum_{k \in f(D)} A \cdot \frac{n(k)}{N} = \frac{A}{N} \sum_{k \in f(D)} n(k) = A,$$

поскольку

$$\sum_{k \in f(D)} n(k) = N.$$

Таким образом, в (5) $A=1$, и

$$H(X) = H(k) = - \sum_{k \in f(D)} \frac{n(k)}{N} \cdot \log\left(\frac{n(k)}{N}\right), \quad (6)$$

что упрощает соответствующие формулы в [1].

Оставаясь в ситуации конечной допустимой области, рассмотрим возможную связь формулы (5) с постулированным в [6] тезисом об априорном нулевом значении энтропии оптимального плана. Если число $k^{(0)}$ является оптимальным значением критерия для задачи (3)–(4), и при всех $k \in f(D)$ выполняется $n(k)=1$, то есть значения критерия f на всех планах различны, то $n(k_0)=1$. Тогда

$$H(X) = H(k) = - \sum_{k \in f(D)} \frac{1}{N} \cdot \log\left(\frac{1}{N}\right) = -\frac{1}{N} \sum_{k \in f(D)} \log\left(\frac{1}{N}\right) = -\frac{1}{N} N \log\left(\frac{1}{N}\right) = \log N,$$

что не соответствует обсуждаемому тезису о нулевом значении энтропии.

Пусть теперь критерий f не является инъективным отображением. Пронумеруем возможные значения f по возрастанию: $k_1 < k_2 < \dots < k_l = k^{(0)}$. Имеем

$$\sum_{i=1}^l \frac{n(k_i)}{N} = 1$$

и

$$-\sum_{i=1}^l \frac{n(k_i)}{N} \log\left(\frac{n(k_i)}{N}\right) \leq -\sum_{i=1}^l \frac{1}{N} \log\left(\frac{1}{N}\right) = \log N. \quad (7)$$

Действительно, если хотя бы одно из $n(k_i)$ больше единицы, то

$$-\log\left(\frac{n(k_i)}{N}\right) < \log N,$$

и

$$-\sum_{i=1}^l \frac{n(k_i)}{N} \log\left(\frac{n(k_i)}{N}\right) < \log N \cdot \sum_{i=1}^l \frac{n(k_i)}{N} = \log N.$$

Так, например, при $N=10$, $l=3$, $n(k_1)=3$, $n(k_2)=5$, $n(k_3)=2$ выражение в левой части неравенства дает в случае натурального логарифма приближенное значение 0.938, а выражение в правой части – 2.303. Неравенство (7) вполне соответствует следующему тезису в [8, с. 5]: «Представляется очевидным, что наибольшей неопределённостью обладает схема, в которой все исходы одинаково вероятны».

Таким образом, оптимальный план обладает наибольшей энтропией, что имеет содержательное объяснение: его выбор означает максимальное использование содержащейся в исходных данных информации, а информация, получаемая при реализации конечной схемы, как раз и совпадает по определению с энтропией: «Информация,

которую даёт нам реализация какого-либо испытания, состоит в снятии той неопределённости, которая предшествовала этому испытанию. Чем больше была эта неопределённость, тем выше мы должны оценивать информацию, полученную нами в результате её ликвидации» [8, с. 7].

Нулевая энтропия означала бы одновременно и нулевую использованную при выборе плана информацию, что противоречит самой идее рассмотрения альтернативных вариантов при оптимизации.

Обратимся теперь к континуальным моделям, представленным в [9]. Отвлекаясь от содержательного смысла управляемых переменных $D \subset R^n$ и коэффициентов целевой линейной функции $c_1, \dots, c_n$, имеем задачу

$$c_1 x_1, \dots, c_n x_n \rightarrow opt \quad (7)$$

с простыми двусторонними ограничениями (характерными для многих технических задач проектирования)

$$a_i \leq x_i \leq b_i; \quad (8)$$

последние задают в R^n n -мерный параллелепипед D объема $\mu(D) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. В [1] запись общей (в том числе и для континуальной D) формулы энтропии допустимого плана имеет вид

$$H(X) = - \sum_{k \in f(D)} A \cdot \frac{\mu(\tau(k))}{\mu(D)} \log_2 \left(A \cdot \frac{\mu(\tau(k))}{\mu(D)} \right), \quad (9)$$

где $\tau(k)$ при $k \in f(D)$ — полный прообраз этого значения нелинейной (в случае, рассматриваемом в [9]) функции и с тем же смыслом для A . Как описание прообраза, так и вычисление его меры существенно зависит от конкретного вида f . Если оказывается, что имеет меньшую размерность (вкладывается в R^l при $l < n$), то его объем в R^n равен нулю. У соответствующих допустимых планов $H(X) = 0$.

Для вычисления объемов, входящих в (9), можно воспользоваться, например, методами, изложенными в [10] и [11].

В заключение отметим, что в случае конечности $f(D)$ к разбиению допустимой области $D = \bigcup_{k \in f(D)} \tau(k)$ применимо также понятие энтропии

Колмогорова – Синая, которая в используемых здесь обозначениях определяется в виде

$$H_{f,D} = - \sum_{k \in f(D)} \mu(\tau(k)) \cdot \log(\mu(\tau(k))).$$

Литература

1. Коротков В.В., Ястребов М.Ю. Энтропийный аспект оптимизационных моделей проектной надежности АСУ // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2026. № 18 (2). С. 51-56.
2. Веников В.А. Теория подобия и моделирование. М.: Высшая школа, 1976. 479 с.

3. Горский Ю.М. Информационные аспекты управления и моделирования. М.: Наука, 1978. 223 с.
4. Иваненко В.И. Неопределенность в стохастических системах управления // Автоматика и телемеханика. 1983. № 4. С. 50-57.
5. Бонгард М.М. О понятии «полезная информация» // Проблемы кибернетики. 1983. № 9. С. 71-102.
6. Соколов В.К. О связи информации и экономического эффекта АСДУ // Известия АН СССР, Энергетика и транспорт. 1989. № 4. С. 31-37.
7. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетики. М.: ИЛ, 1963. 830 с.
8. Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // Успехи математических наук. 1953. Т. 8, № 3(55). С. 3-20.
9. Коротков В.В. Математические модели проектной оптимизации аппаратного контура АСУ // Наука и техника транспорта. 2026. №1. С. 40-48.
10. Баеков Ш.Г. Выражение объемов n-мерного симплекса и n-мерного параллелепипеда через коэффициенты уравнений их гиперграней // Молодой ученый. 2015. №2 (82). С. 1-4.
11. Степанова М.А. Вычисление объема симплекса в барицентрических координатах в многомерном евклидовом пространстве // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 5. С. 996–998.

M.Yu. Yastrebov

*Saint Petersburg Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping*

ENTROPY CHARACTERISTICS OF APPLIED CONTINUAL OPTIMIZATION MODELS

Keywords: *entropy, information, probability theory, mathematical modeling, mathematical programming.*

Abstract. *Recently, various aspects of the application of the classical concept of entropy and the related concept of information in the Shannon-Khinchin sense to the description of technical and economic systems have been intensively discussed in the scientific literature. In this article, the estimation of the loss of information contained in the initial data, considered for the discrete case in [1], is transferred to the situation of continuous problems of mathematical programming, when moving from an absolute optimum to a formally non-optimal plan in order to take into account factors whose quantitative description within the framework of a mathematical model is difficult.*

РАЗДЕЛ 4

Новые информационные технологии в образовании

М.М. Абдуллаева, А.А. Агапова

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

УДК 159.9.072

ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ВЫБОРА ОНЛАЙН-РЕПЕТИТОРА РОДИТЕЛЯМИ И УЧЕНИКАМИ

Ключевые слова: *психологическая оценка, критерии выбора, онлайн-репетиторство, родители, учащиеся.*

В статье обсуждаются психологические критерии оценки онлайн-репетиторов родителями и учениками. Актуальность исследования связана с постоянным ростом конкуренции на рынке онлайн-репетиторских услуг. Существует множество онлайн-платформ, с помощью которых можно найти репетиторов с разным опытом, квалификацией, ценой и отзывами [1]. В этой ситуации родителям становится все сложнее сделать осознанный и обоснованный выбор.

Введение. Репетиторство как частная преподавательская деятельность, иллюстрирующая для многих людей важность хорошего образования, вызывает интерес разных специалистов. Для экономистов – это проблема «теневой» экономики [2] или «shadow education» [3], для социологов – выделение двух групп педагогов, работающих только в школе или исключительно в сфере репетиторства, как самостоятельно, так и на онлайн-платформах [4], для самих педагогов – проблема эффективности преподавания [5]. В своем исследовании мы обратились к психологическим аспектам онлайн-репетиторства – быстро

молодеющей сферы, привлекающей педагогов способом заработка и являющейся для многих стратегией выживания.

Цель работы – выявление и описание психологических критериев, определяющих выбор онлайн-репетитора родителями и учащимися в условиях высокой конкуренции на рынке онлайн-образования.

Профессия онлайн-репетитора, возникшая на пересечении педагогики и информационных технологий, представляет собой относительно новое явление в сфере образования. За кажущейся простотой взаимодействия с обучающимся с помощью цифровых средств коммуникации скрывается множество сложностей. Онлайн-формат преподавания существенным образом трансформирует традиционные аспекты педагогической деятельности. Если в условиях очного обучения педагог обладает возможностью легко считывать эмоциональное состояние аудитории, то в цифровой среде взаимодействие сводится к ограниченному набору средств, представленных на экране, зачастую сопровождающихся техническими ограничениями (нестабильное интернет-соединение, низкое качество звука и изображения). Возникает парадоксальная ситуация: с одной стороны, онлайн-репетитор получает автономию и свободу в выборе формата работы, определении содержания занятий, а с другой – он вынужден компенсировать отсутствие физического присутствия психологическими навыками. Непосредственное взаимодействие с учеником заменяется опосредованным, что требует от преподавателя навыков эффективной коммуникации в цифровой среде.

Портрет успешного онлайн-репетитора включает в себя несколько ключевых компонентов. Во-первых, преподавателю необходимо умение быстро адаптироваться к различным ситуациям, возникающим в процессе онлайн-занятия, учитывать особенности учеников (возраст, менталитет, уровень мотивации и знаний) и менять подход в зависимости от контекста. Во-вторых, репетитор должен уметь создавать ощущение «присутствия» даже через экран. Ученик должен чувствовать, что его видят и слышат не только в «техническом» смысле, но и на эмоциональном уровне. Кроме того, онлайн-обучение требует от репетитора постоянного нахождения в режиме мгновенного переключения внимания.

Репетиторство представляет собой сложную систему, в которой взаимодействуют несколько ключевых участников [6]. Это ученики с их индивидуальными потребностями и целями, родители учеников, выбирающие и оплачивающие преподавателя, сами репетиторы, предлагающие свои услуги и определяющие специфику взаимодействия. Онлайн-платформы являются связующим звеном между репетиторами и учениками с их родителями, они выступают как посредники, обеспечивающие доступ к информации и облегчающие выбор.

Понимание роли и потребностей каждого из участников необходимо для эффективного функционирования рынка репетиторских услуг. Запросы учеников могут быть различными: повышение успеваемости в школе, подготовка к экзаменам (ОГЭ, ЕГЭ), углубленное изучение предмета, ликвидация пробелов в знаниях. Их мнение учитывается при выборе специалиста и оценке результатов занятий.

Методика. Для достижения поставленной цели был проведен опрос двух групп респондентов по специально подготовленной анкете, в которую вошли вопросы, направленные на выявление:

- 1) социально-демографических характеристик респондентов;
- 2) мотивов обращения к онлайн-репетитору;
- 3) критериев, значимых для выбора репетитора (академических характеристик, личностных качеств, организационных аспектов);
- 4) оценки эффективности и удовлетворенности занятиями с репетитором.

Выборка учеников: в данную группу вошли 28 учащихся средних и старших классов (возраст от 13 до 18 лет, $M = 17,29$, $SD = 1,12$). В гендерном составе преобладали девушки, составляющие 64,3% от общего числа респондентов. Преобладающим форматом занятий был онлайн (75%), а длительность занятий с репетитором у большинства учеников (60,7%) превышала шесть месяцев.

Выборка родителей: в группу родителей вошли 26 человек, являющихся родителями учеников, занимающихся с репетиторами. Средний возраст респондентов – 43 года ($M = 43,04$, $SD = 5,98$), преобладающим было участие женщин (88,5%). Данное соотношение мужчин и женщин оправданно: чаще именно женщины ищут репетиторов детям и взаимодействуют с ними. Наибольшая доля респондентов (42,3%) оценила материальный достаток своей семьи в диапазоне от 71 до 100 тысяч рублей в месяц. Преобладающим форматом занятий в группе родителей являлись очные занятия (у них на дому – 42,3%, на дому у репетитора – 26,9%). длительность занятий с репетитором у подавляющего большинства респондентов (92,3%) превышала шесть месяцев.

Результаты. На основе проведенного исследования, сопоставляющего ответы учеников и родителей о критериях выбора онлайн-репетитора, можно выделить некоторые ключевые моменты.

Основные мотивы обращения к репетитору у учеников сосредоточены вокруг академических задач: подготовка к экзаменам (24 из 28), поступление в вузы (15 из 28) и более качественное понимание предмета (13 из 28). Это подчеркивает их ориентацию на конкретные результаты обучения.

Наибольшее значение для учеников имеют аспекты, обеспечивающие комфортное и эффективное обучение: больше всего

ученикам нравится чувство понимания на занятии (19 из 28), благоприятная атмосфера на занятиях (16 из 28), использование качественных материалов на занятиях и практических заданий (15 из 28 каждый).

И ученики, и родители в первую очередь обращают внимание на опыт работы репетитора и отзывы / рекомендации. Однако ученикам больше, чем родителям, важно образование репетитора, а родителям больше, чем ученикам, важно проявление интереса их ребенка к занятиям. Находясь в процессе обучения, ученики осознают образованность репетитора как непосредственный источник знаний и навыков, необходимых для успешного освоения предмета. Образование репетитора для них – гарантия качества обучения, уверенность в том, что репетитор обладает глубокими знаниями и сможет эффективно подготовить их к контрольным работам, экзаменам и поступлению в вуз. Они ценят возможность получить знания из первых рук, от эксперта в своей области. А родители, обладая большим жизненным опытом, понимают, что, помимо академических знаний, важны интерес и мотивация ребенка. Они осознают, что даже самый образованный репетитор не сможет эффективно обучить, если ребенок не заинтересован в предмете и не проявляет вовлеченности в процесс обучения.

И ученики, и родители отмечают важность умения репетитора находить общий язык и доступно объяснять материал.

Для учеников наиболее важна доброта репетитора, обеспечивающая ощущение безопасности и комфорта. Для родителей же важнее умение репетитора заинтересовать ребенка, что способствует формированию долгосрочной мотивации к обучению.

Интересно, что большинство представителей обеих групп предпочитают репетитора женского пола в возрасте от 26 до 35 лет, что не соответствует описанию современного российского репетитора, зарегистрированного на онлайн-платформе, представляющего собой частное лицо, преимущественно женского пола, в возрасте 45–59 лет [2].

Несмотря на высокую оценку улучшения знаний и комфорта, более половины учеников выразили желание заниматься с репетитором реже, если текущий результат сохранится.

Выводы. В целом проведенное исследование выявило как общие, так и различающиеся критерии выбора онлайн-репетитора у учеников и родителей. Ученики больше ценят образованность репетитора, рассматривая ее как гарантию качества обучения и возможность получить знания от эксперта. Родителям важнее проявление интереса ребенка к занятиям, что они расценивают как ключевой фактор долгосрочного успеха и вовлеченности в процесс обучения.

Таким образом, ученики больше ориентируются на комфорт и качество взаимодействия в процессе обучения, в то время как родители – на долгосрочную эффективность и мотивацию ребенка. Эти различия следует учитывать при формировании стратегий поиска и найма репетиторов, а также при организации учебного процесса.

Литература

1. Макеев П.А. Репетиторство в России: нельзя увидеть, но можно услышать // Журнал социологии и социальной антропологии. 2020. № 23(3). С. 100-121. <https://doi.org/10.31119/jssa.2020.23.3.5>.
2. Донецкая С.С., Третьякова В.А. Предпринимательство или стратегия выживания? Профессиональные характеристики и устремления современного российского репетитора // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. 2023. № 3 (71). С. 86-93.
3. Byun S., Baker D. Shadow education // Scott R.A., Kosslyn S.M. (eds.) *Emerging Trends in the Social and Behavioral Sciences*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2015. P. 1-9.
4. Абанкина И.В., Белова Ю.Ю., Зиньковский К.В., Латыпова Е.В., Милованов А.Е. Есть ли у педагогов альтернатива репетиторству для увеличения доходов? / И.В. Абанкина [и др.] // Вопросы образования / Educational Studies Moscow. 2022. № 4. С. 8-32. <https://doi.org/10.17323/1814-9545-2022-4-8-32>.
5. Нуриева Л.М., Киселев С.Г. О бедном репетиторе замолвите слово (еще раз об эффективности репетиторства для подготовки к ЕГЭ) // Образование и наука. 2018. Т. 20, № 8. С. 148-163.
6. Санников Д.А. Репетиторство как вид педагогической деятельности // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2021. № 199. С. 189-195.

M.M. Abdullaeva, A.A. Agapova
Lomonosov Moscow State University

PSYCHOLOGICAL CRITERIA FOR CHOOSING AN ONLINE TUTOR BY PARENTS AND STUDENTS

Keywords: *psychological assessment, selection criteria, online tutoring, parents, students.*

Abstract. *This article discusses the psychological criteria for evaluating online tutors by parents and students. The relevance of the study is related to the constant growth of competition in the online tutoring services market. There are many online platforms that can be used to find tutors with different experience, qualifications, prices, and reviews. In this situation, it becomes increasingly difficult for parents to make an informed and reasonable choice.*

Е.Р. Алексеев, Ю.Р. Чуракова,
Д.Т. Головатин, А.А. Щетинкина,
Т.И. Залукаева, И.А. Горбунова
Кубанский государственный университет

УДК 004.4:51

СИСТЕМА ОТКРЫТОЙ МАТЕМАТИКИ В ОБРАЗОВАНИИ И НАУКЕ

Ключевые слова: *свободное программное обеспечение, интерактивный блокнот, система открытой математики, вычислительный модуль, Jupyter, Julia, Python, Asymptote.*

В статье рассмотрены возможности практического использования системы открытой математики (COM) при обучении студентов и в научных исследованиях.

Решение многих современных задач моделирования зачастую требует использования нескольких программных средств. Каждая из программ может потребовать сложной индивидуальной настройки, что создает высокий порог вхождения и отвлекает от решения задач. Решение этой проблемы, на взгляд авторов, заключается в разработке целостной экосистемы, которая объединяет несколько программных инструментов.

Одной из подобных систем является система открытой математики (COM) [1–5], разрабатываемая в Кубанском государственном университете [1].

Система открытой математики (SysOpenMath, COM) – свободная программная экосистема, предназначенная для обработки математических данных.

COM изначально представляет из себя набор установочных скриптов для ОС Linux, запуск которых формирует специализированную систему открытой математики.

После запуска системы скриптов мы получаем вычислительную систему на базе интерактивных блокнотов Jupyter, поддерживающую работу с различными вычислительными ядрами. На данный момент COM поддерживает следующие вычислительные ядра: Python, Julia, Scilab, Octave.

В состав экосистемы COM также входит разработанное авторами учебное пособие «Использование языка программирования Julia для решения математических и инженерных задач» [6].

Данные в системе открытой математики хранятся в формате Jupyter, что позволяет создавать интерактивные документы, которые включают

два типа ячеек:

- текстовые ячейки в формате markdown, в которых исследователь может описывать задачу, математическую модель с полноценными формулами, а преподаватель – писать текст лекции;
- интерактивные вычислительные ячейки на базе различных ядер, в которых учёный может решать свои исследовательские задачи, а преподаватель – показывать студентам коды, поясняющие теоретический материал лекции.

Первым опытом практического использования СОМ в учебном процессе было написание одним из авторов краткого интерактивного курса лекций по Python для будущих учителей математики и информатики Кубанского государственного университета. Текущая версия этого курса лекций доступна по адресу <https://github.com/AnnaSheTi/Python-file>.

Учебное пособие по языку программирования Julia, входящее в состав текущей версии СОМ, также было написано с использованием возможностей СОМ. К *собственным разработкам авторов*, представленным в пособии, следует отнести подробное описание взаимодействия между программами на языке Julia и библиотеками, написанными на C/C++ и Fortran [6].

При обучении студентов факультета математики и компьютерных наук и исследовательской деятельности авторами с использованием СОМ решались следующие задачи.

Таблица 1. Проверка больших чисел (сотни разрядов) на простоту с использованием теста Миллера – Рабина.

Таблица 2. Алгебраические уравнения и системы.

Таблица 3. Задачи моделирования с использованием дифференциальных уравнений и систем.

Таблица 4. Обработка экспериментальных данных.

Таблица 5. Поиск экстремума нелинейной функции многих переменных.

Файлы в формате Jupyter Notebook, посвящённые решению этих задач, можно найти по адресу <https://github.com/JuliaChurakova>.

Ещё одним направлением использования экосистемы СОМ является обучение будущих учителей математики и информатики языку Asymptote [7]. Asymptote был создан в 2004 году А. Хаммерлиндлом, Д. Боуменом и Т. Принсом. Синтаксис языка напоминает такие языки программирования, как C++ и Java.

Первооткрывателями этого направления в России являются волгоградские коллеги во главе с Юрием Геннадьевичем Крячковым [8–9].

Изначально Asymptote задумывался как средство иллюстрирования для LaTeX.

В преамбуле документа прописываются следующие команды:

```
\usepackage {graphicx}  
\usepackage {asymptote}
```

После этого можно создавать блоки текста с графикой, используя специальное окружение, оно выглядит следующим образом:

```
\begin{asy} ... \end{asy}
```

Процесс компиляции такого документа включает три обязательных ключевых этапа.

1. Первоначальная компиляция: `pdflatex file.tex`, где `file` – имя вашего файла.

2. Создание графики Asymptote: `asy file-*.asy`.

3. Сборка документа с включением готовой графики: `pdflatex file.tex`.

В результате получается LaTeX-документ с графикой высочайшего качества, которая масштабируется без потери четкости.

Авторами были разработаны шаблоны для включения фрагментов на языке Asymptote в программы на языках Python и Julia (<https://github.com/AnnaSheTi/Asymptote-file>), что позволило включать фрагменты кода на Asymptote в документы формата Jupyter, формируемые с помощью экосистемы COM. Совместное использование Julia (Python) и Asymptote значительно ускоряет процесс сложной визуализации.

Для иллюстрации возможностей интеграции Asymptote с Python и Julia рассмотрим две задачи из области аналитической геометрии.

1. Требуется изобразить график функции, заданный параметрически:

$$\begin{cases} x(t) = 2a \cos^2 t + b \cos t \\ y(t) = 2 \sin 2t + b \sin t \end{cases}$$

2. Для эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, требуется найти координаты фокусов, уравнения директрис и эксцентриситет, а также проверить фундаментальное свойство: для любой точки, лежащей на эллипсе, отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию от этой же точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету.

Решения данных задач в экосистеме COM (Julia+Asymptote, Python+Asymptote) доступны всем желающим по адресу <https://github.com/AnnaSheTi/Asymptote-file>. На рисунке 1 приведены графические решения задач 1 и 2.

Экосистема COM разрабатывается и широко применяется на факультете математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета. Мы используем систему в учебном процессе и исследовательских проектах. Сейчас разрабатываются и

другие реализации системы открытой математики (COM).

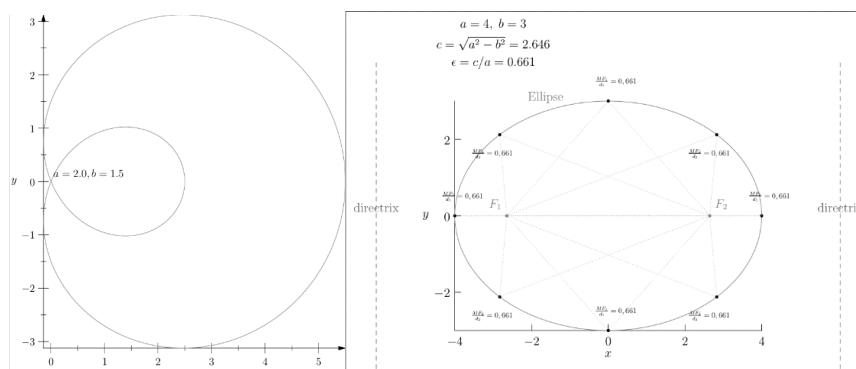


Рис. 1. Графическое решение задач 1 и 2

Литература

1. GitHub – EnckyOff/SysOpenMath. URL: <https://github.com/EnckyOff/SysOpenMath> (дата обращения: 01.02.2026).
2. Инструменты разработки специализированных математических пакетов / Д.Т. Головатин [и др.] // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2024. Вып. 25. С. 15-20.
3. Головатин Д.Т. Разработка свободной среды обработки математических данных на основе языка программирования Julia: выпускная квалификационная работа. Краснодар: КубГУ, 2023.
4. Интерактивные блокноты семейства Jupyter: универсальная среда для обучения и разработки / Д.Т. Головатин [и др.] // Алгебра и приложения. сборник научных трудов. Краснодар, 2025. С. 147-161.
5. Головатин, Д.Т. Инструменты для разработки специализированных математических пакетов: выпускная квалификационная работа (магистерская диссертация). Краснодар, КубГУ, 2025.
6. Использование языка программирования Julia для решения математических и инженерных задач. URL: <https://github.com/JuliaChurakova/Julia/tree/main> (дата обращения: 01.02.2026).
7. Asymptote. URL: <https://asymptote.sourceforge.io>. (Дата обращения 01.02.2026).
8. Крячков Ю.Г. Asymptote для начинающих: создание рисунков на языке векторной графики.
9. Жданович П., Крячков Ю. Использование языка Asymptote при обучении математике, информатике и физике // Двадцать первая конференция «Свободное программное обеспечение в высшей школе». М.: Макс Пресс, 2026. С. 89-90.

**E.R. Alekseev, J.R. Churakova,
D.T. Golovatin, A.A. Cshetinkina,
T.I. Zalukaeva, I.A. Gorbunova**
Kuban State University

**THE SYSTEM OF OPEN MATHEMATICS IN EDUCATION
AND RESEARCH**

Keywords: *open source software, interactive notebook, The System of Open Mathematics, Computational Module, Jupyter, Julia, Python, Asymptote.*

Abstract. *The paper examines the possibilities of practical application of the System of Open Mathematics (SOM) in student education and scientific research.*

Н.Н. Богданова

Смоленский государственный университет

УДК 519.283

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В СКМ WOLFRAM MATHEMATICA

Ключевые слова: *метод конечных разностей, уравнения математической физики, задача о колебании конечной струны, задача о теплопроводности стержня, ограниченного с обоих концов, система компьютерной математики Wolfram Mathematica.*

В статье на конкретных примерах рассматриваются возможности использования математического пакета Wolfram Mathematica для решения классических задач математической физики о колебании конечной струны и теплопроводности стержня, на концах которого поддерживается постоянная температура.

1. Введение. Разностные методы относятся к тем методам, на которых основано компьютерное моделирование задач, описываемых с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Такие задачи являются ключевыми в естественных науках (физике, химии, экологии, биологии и т.д.), а также инженерных приложениях. Они плодотворно используются в экономике, социологии, статистике и других науках. При этом сами разностные модели являются сравнительно простыми и конечномерными. Метод конечных разностей (МКР) – это численный метод решения дифференциальных уравнений в частных производных, основанный на замене непрерывных производных их приближенными разностными аналогами на дискретной сетке. Непрерывная область заменяется набором узлов (сеткой), а дифференциальное уравнение превращается в систему алгебраических уравнений. МКР широко применяется для моделирования физических

процессов, так как позволяет свести сложные дифференциальные уравнения к виду, пригодному для компьютерных расчетов.

2. Решение задач. Рассмотрим задачу о колебании конечной струны, закрепленной на концах. Требуется найти дважды дифференцируемую функцию, удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

начальным и краевым условиям:

$$U(x, 0) = x(1 - x), \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \\ U(0, t) = U(1, t) = 0$$

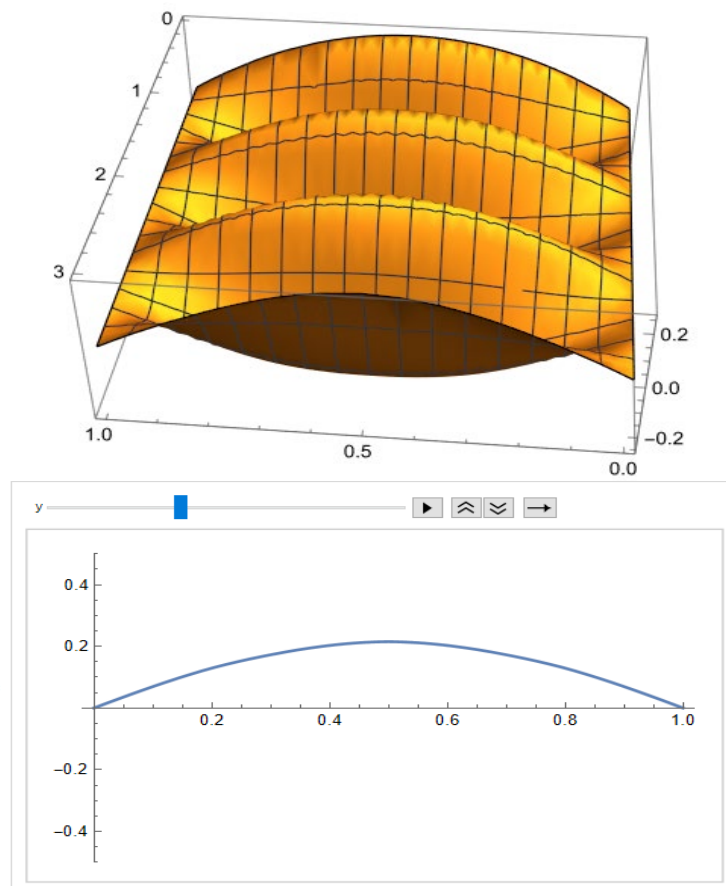
методом конечных разностей.

```
(*Зададим коэффициент волнового уравнения*)
a = 2;
(*Зададим длину струны*)
L = 1;
(*Зададим начальную форму струны*)
f[x_] = x * (L - x);
(*Зададим начальную скорость точек струны*)
phi[x_] = 0;
(*Зададим количество частичных отрезков по оси Ox*)
n = 10;
(*Найдем шаг разбиения отрезка [0;L]*)
h = L / n;
(*Построим разбиение отрезка [0;L]*)
X = Table[k * h, {k, 0, n}];
(*Зададим время наблюдения за струной*)
EoT = 3;
(*Зададим количество частичных отрезков по оси Ot*)
m = 100;
(*Найдем шаг разбиения отрезка [0;EoT]*)
tau = EoT / m;
(*Построим разбиение отрезка [0;EoT]*)
T = Table[j * tau, {j, 0, m}];
|_таблица значений
(*Построим сеточные функции*)
F = Table[f[X[[k]]], {k, 1, n + 1}];
|_таблица значений
Phi = Table[phi[X[[k]]], {k, 1, n + 1}];
|_таблица значений
(*Построим каркас приближенного решения*)
U = Table[0, {k, 0, n}, {j, 0, m}];
|_таблица значений
```

```

(*Найдем значения приближенного решения в узлах нулевого и первого слоёв*)
For[k = 2, k ≤ n, k++,
|цикл ДЛЯ
    U[[k, 1]] = F[[k]];
    U[[k, 2]] = U[[k, 1]] + τ * Φ[[k]]
];
(*Зададим параметр γ*)
γ = a^2 * τ^2 / h^2;
(*Найдем значения приближенного решения в узлах сетки*)
For[j = 2, j ≤ m, j++,
|цикл ДЛЯ
    For[k = 2, k ≤ n, k++,
|цикл ДЛЯ
        U[[k, j + 1]] = γ * (U[[k + 1, j]] - 2 * U[[k, j]] + U[[k - 1, j]]) + 2 * U[[k, j]] - U[[k, j - 1]]
    ]
];
(*Выполним интерполяцию приближенного решения*)
u = ListInterpolation[U, {{0, L}, {0, EoT}}];
|интерполяция по массиву значений
(*Построим график приближенного решения*)
Plot3D[u[x, t], {x, 0, L}, {t, 0, EoT}, PlotRange → All]
|график функции 2-х переменных |отображае... |всё
(*Выполним анимацию колебаний струны*)
Animate[Plot[u[x, y], {x, 0, L}, PlotRange → {-0.5, 0.5}], {y, 0, EoT},
|анимир... |график функции |отображаемый диапазон графика
    AnimationRunning → False]
|проигрывание анимации |ложь

```



Решим задачу о теплопроводности стержня, ограниченного с обоих концов:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = \sin \pi x,$$

используя: а) явный двухслойный шаблон; а) явный трехслойный шаблон.

"А) явный двухслойный шаблон";

$$y_i^{l+1} = (1 - 2\gamma) y_i^l + \gamma (y_{i-1}^l + y_{i+1}^l)$$

$$y_i^{l+1} = (1 - 2\gamma) y_i^l + \gamma (y_{i-1}^l + y_{i+1}^l)$$

$$\gamma = \tau / h^2$$

```
(*Зададим количество частичных отрезков по оси Ox*)
n = 20;
(*Зададим длину стержня*)
L = 1;
(*Найдем шаг разбиения отрезка [0;L] *)
h = L / n;
(*Зададим T*)
TT = 0.01;
(*Зададим количество частичных отрезков по оси Ot*)
m = 40;
(*Найдем шаг разбиения отрезка [0;TT] *)
tau = TT / m;
(*Построим каркас приближенного решения*)
U = Table[0, {i, 0, n}, {j, 0, m}];
|_таблица значений
(*Найдем значения приближенного решения в узлах нулевого слоя*)
For[i = 1, i ≤ n + 1, i++,
|_цикл ДЛЯ
    U[[i, 1]] = Sin[Pi * (i - 1) * h] // N;
    |_си... |_число пи |_численное приближение
];
(*Зададим граничные условия*)
For[j = 1, j ≤ m, j++,
|_цикл ДЛЯ
    U[[1, j]] = 0;
    U[[n + 1, j]] = 0;
];
(*Зададим параметр λ*)
λ = tau / h2;
```

(*Найдем значения приближенного решения в узлах сетки*)

For[i = 2, i ≤ n, i++,

цикл ДЛЯ

For[j = 1, j ≤ m, j++,

цикл ДЛЯ

U[[i, j + 1]] = (1 - 2 * λ) * U[[i, j]] + λ * (U[[i + 1, j]] + U[[i - 1, j]]);

]];

u = ListInterpolation[U, {{0, L}, {0, TT}}];

интерполяция по массиву значений

Plot3D[u[x, t], {x, 0, L}, {t, 0, TT}, PlotRange → All]

график функции 2-х переменных

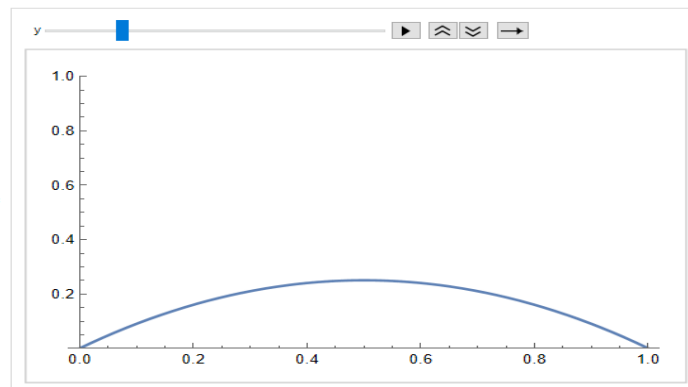
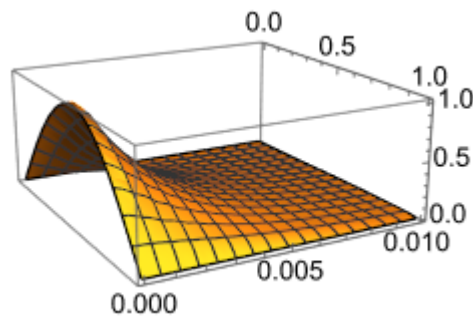
отображае... все

Animate[Plot[u[x, y], {x, 0, L}, PlotRange → {0, 1}], {y, 0, TT}, AnimationRunning → False]

анимиру... график функции

отображаемый диапазон графика

проигрывание анимации ложь



"Б) явный трехслойный шаблон: воспользуемся трехслойной схемой «ромб» (схема Дюфорта и Франкела)";

$$\frac{y_i^{l+1} - y_i^{l-1}}{2\tau} = \frac{y_{i-1}^l - y_i^{l+1} - y_i^{l-1} + y_{i+1}^l}{h^2}$$

(*Зададим количество частичных отрезков по оси Ox*)

n = 20;

(*Зададим длину стержня*)

L = 1;

(*Найдем шаг разбиения отрезка [0; L] *)

h = L / n;

(*Зададим T*)

TT = 0.01;

(*Зададим количество частичных отрезков по оси Ot*)

m = 40;

(*Найдем шаг разбиения отрезка [0; TT] *)

τ = TT / m;

(*Построим каркас приближенного решения*)

U = Table[0, {i, 0, n}, {j, 0, m}];

таблица значений

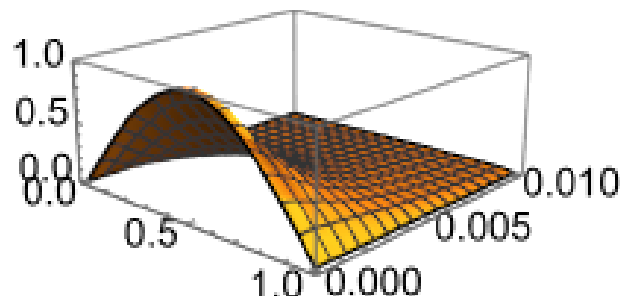
```

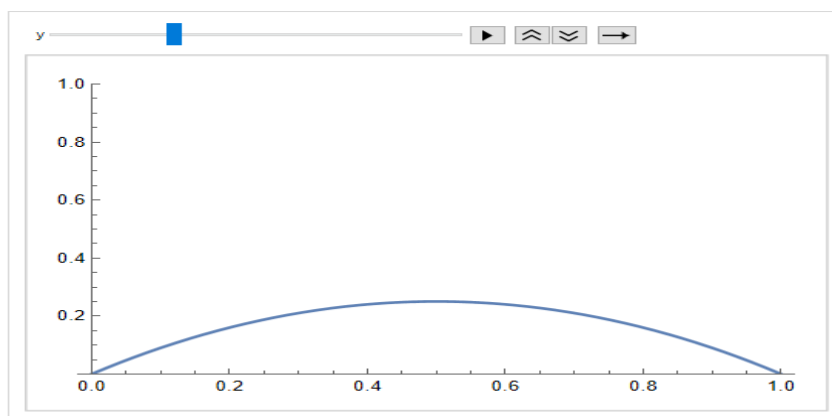
(*Найдем значения приближенного решения в узлах нулевого слоя*)
For[i = 1, i ≤ n + 1, i++,
|цикл ДЛЯ
    U[[i, 1]] = Sin[Pi * (i - 1) * h] // N;
    |си... |число пи |численное приближение
];
(*Заполним граничные условия*)
For[j = 1, j ≤ m, j++,
|цикл ДЛЯ
    U[[1, j]] = 0;
    U[[n + 1, j]] = 0;
];
(*Найдем значения приближенного решения в узлах 1 слоя,
воспользовавшись двухслойным шаблоном*)
For[i = 2, i ≤ n, i++,
|цикл ДЛЯ
    U[[i, 2]] = (1 - 2 * τ / h²) * U[[i, 1]] + τ / h² * (U[[i + 1, 1]] + U[[i - 1, 1]]); // N;
    |численное приближение
];
(*значения приближенного решения в узлах сетки,
используя трехслойную схему «ромб» (схему Дюфорта и Франкела) *)
(*Зададим λ*)
λ =  $\frac{2 * \tau}{h^2}$ ;
For[i = 2, i ≤ n, i++,
|цикл ДЛЯ
    For[j = 2, j ≤ m, j++,
|цикл ДЛЯ
        U[[i, j + 1]] =  $\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} * U[[i, j - 1]] + \frac{\lambda}{1 + \lambda} * (U[[i - 1, j]] + U[[i + 1, j]])$ ;
    ];
];
u = ListInterpolation[U, {{0, L}, {0, TT}}];
|интерполяция по массиву значений

Plot3D[u[x, t], {x, 0, L}, {t, 0, TT}, PlotRange → All]
|график функции 2-х переменных |отображае... |всё

Animate[Plot[u[x, y], {x, 0, L}, PlotRange → {0, 1}], {y, 0, TT}, AnimationRunning → False]
|анимир... |график функции |отображаемый диапазон графика |проигрывание анимации |ложь

```





U // MatrixForm

матричная форма

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.156434	0.156049	0.155666	0.104033	0.103777	0.0693552	0.0691847	0.0462368	0.0461232
0.309017	0.308256	0.307498	0.231448	0.222338	0.171595	0.159784	0.125928	0.114229
0.45399	0.452873	0.451759	0.353165	0.339748	0.272499	0.255098	0.208297	0.191053
0.587785	0.586338	0.584897	0.466185	0.448792	0.367415	0.344611	0.287459	0.264457
0.707107	0.705366	0.703632	0.567727	0.546785	0.453283	0.425759	0.359624	0.331749
0.809017	0.807025	0.805041	0.655289	0.631315	0.52799	0.496424	0.422953	0.390887
0.891007	0.888813	0.886628	0.726715	0.7003	0.589696	0.554865	0.475868	0.440402
0.951057	0.948715	0.946382	0.780248	0.752041	0.636882	0.599643	0.517065	0.479073
0.987688	0.985256	0.982834	0.814568	0.785264	0.668385	0.629656	0.545531	0.505948
1.	0.997538	0.995085	0.828831	0.799152	0.683431	0.644165	0.560564	0.520365
0.987688	0.985256	0.982834	0.822685	0.793361	0.681649	0.642813	0.561793	0.521969
0.951057	0.948715	0.946382	0.796282	0.768036	0.663082	0.625632	0.54919	0.51072
0.891007	0.888813	0.886628	0.750272	0.723799	0.628187	0.593046	0.523064	0.486896
0.809017	0.807025	0.805041	0.685788	0.661739	0.577825	0.545857	0.484058	0.451082
0.707107	0.705366	0.703632	0.604417	0.583386	0.513235	0.485228	0.433133	0.404162
0.587785	0.586338	0.584897	0.508164	0.490667	0.436007	0.412651	0.371543	0.347289
0.45399	0.452873	0.451759	0.399398	0.385867	0.348043	0.329912	0.300804	0.281865
0.309017	0.308256	0.307498	0.280797	0.271565	0.251509	0.239051	0.222658	0.209501
0.156434	0.156049	0.155666	0.155283	0.150577	0.148783	0.142303	0.13903	0.131978
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Метод конечных разностей (МКР) является достаточно универсальным численным методом, ориентированным на решение задач с граничными условиями как в одномерных, так и в многомерных системах [1–3]. Причем следует отметить, что этот метод относится к немногим численным методам, которые используются для решения математических моделей процессов с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

Литература

1. Дегтярев А.А. Разностные методы решения дифференциальных уравнений: учебное пособие. Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2021.
2. Голубева Н.В. Математическое моделирование систем и процессов: учебное пособие. 2-е изд., стер. СПб: Лань, 2022.
3. Слабнов В.Д. Численные методы: учебник. СПб: Лань, 2020.

N.N. Bogdanova
Smolensk State University

NUMERIC DIFFERENTIATION WITH WOLFRAM MATHEMATICA

Keywords: *method of finite differences, equations of mathematical physics, problem on oscillation of finite string, problem on thermal conductivity of rod bounded at both ends, computer mathematics system Wolfram Mathematica.*

Abstract. *In this article, using specific examples, we consider the possibilities of using the Wolfram Mathematica mathematical package to solve the classical problems of mathematical physics about the oscillation of the finite string and the thermal conductivity of a rod at the ends of which a constant temperature is maintained.*

Д.А. Бояринов
Смоленский государственный университет

УДК 37.01:004

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО: РАЗЛИЧНЫЕ ТРАКТОВКИ

Ключевые слова: *образовательное пространство, субъекты образовательного пространства, цифровизация образования, информационное образовательное пространство.*

В статье рассматриваются различные подходы к рассмотрению понятия «образовательное пространство» в исследованиях отечественных ученых и анализу его социальной роли. Указывается на наличие четырёх основных направлений таких подходов, которые можно условно обозначить как «территориально-институциональное», «социокультурно-социологическое», «событийно-гуманистическое» (или феноменологическое) и «системно-деятельностное». Выявляются существенные различия между этими направлениями, относящиеся прежде всего к определению роли образовательного пространства в системе социальных взаимодействий и, шире, его роли в общественной жизни в целом. Отмечается, что все исследователи в качестве основных субъектов образовательного пространства выделяют обучающихся и преподавателей.

Понятие «образовательное пространство» является элементом понятийного аппарата отечественной педагогики достаточно длительное

время. В последние годы интерес к этому понятию вырос в связи с развитием процессов цифровой трансформации системы образования и привёл к возникновению понятия «информационное образовательное пространство», обладающего большой актуальностью. В настоящем исследовании мы рассмотрим корпус работ отечественных учёных, посвященных различным трактовкам понятия «образовательное пространство». Мы полагаем, что в рамках современных подходов к рассмотрению этого понятия можно выделить четыре основных направления. Предлагаемые нами названия этих направлений условны, но отражают основные смысловые установки соответствующих авторов. Также мы обратим внимание на то, каким образом в рамках рассматриваемых направлений выделяются субъекты образовательного пространства.

1. Территориально-институциональное направление.

В рамках данного направления образовательное пространство понимается как территориально организованная совокупность образовательных учреждений, программ и управленческих структур, органично вписанная в социальное и географическое устройство социума.

М.В. Груздев в своём исследовании [1] рассматривает сельское образовательное пространство как своего рода «пространство в пространстве». И.А. Жигалова [2] трактует образовательное пространство НПО федерального округа в качестве системы региональных структур с доминирующими горизонтальными связями. А.А. Шогенов [3] рассматривает образовательное пространство как систему, ограниченную определенными юридическими рамками и включающую в свою структуру разноуровневые институты.

В рамках данного подхода субъекты образовательного пространства определяются через функциональные роли в системе управления и реализации образовательной политики. В число субъектов входят: учреждения образования; семьи; органы власти; социальные партнёры; общественные организации.

2. Социокультурно-социологическое направление.

В рамках данного направления образовательное пространство трактуется как преимущественно социокультурный феномен, интегрирующий глобальные и локальные культурные коды, этнические особенности, ценности, социальные практики и разнообразные коммуникативные среды.

Е.А. Игумнова в своём исследовании [4] в понимании регионального образовательного пространства исходит из его рассмотрения в качестве социогуманитарного феномена. Н.Г. Маркова [5] рассматривает поликультурное образовательное пространство вуза как межкультурную среду. Л.А. Барановская [6] трактует

социокультурное образовательное пространство как институциональную среду освоения и трансформации разнообразных культурных практик. А.И. Улзытуева в своей работе [7] рассматривает билингвальное образовательное пространство как пространство межкультурной коммуникации.

Субъекты образовательного пространства в рамках данного подхода определяются через участие в культурной деятельности и межкультурном взаимодействии. К субъектам относятся: студенты и педагоги как носители культур; семьи и этнические сообщества; представители социума (культуры, бизнеса, общественности).

3. Событийно-гуманистическое или феноменологическое направление.

В рамках этого направления образовательное пространство понимается как событийная, смысловая, диалогическая реальность, возникающая в момент «события» – встречи субъектов, раскрывающих многомерность личности и её трансцендентные свойства.

И.А. Малапов [8] и О.А. Леонова [9] рассматривают образовательное пространство в региональном аспекте. Е.А. Чекунова [10] трактует образовательное пространство как «динамическую структурно-уровневую систему многоплановых отношений», функционирующую в пространственно-временном континууме.

Субъекты образовательного пространства в рамках данного подхода определяются на основе присущей им активной, рефлексивной, инициативной, смыслопорождающей позиции. К числу субъектов относятся: преподаватели и обучающиеся как равноправные субъекты; коллективный педагогический субъект; личность в целом как носитель потенциала самореализации и социальной целостности.

4. Системно-деятельностное направление.

В рамках этого направления образовательное пространство рассматривается как открытая, неравновесная, самоорганизующаяся педагогическая система, обеспечивающая формирование у своих субъектов метакомпетенций, профессиональных качеств и этически-ценностных установок.

М.В. Сёмина [11] рассматривает фамилистическое образовательное пространство через призму синергетического подхода. Г.И. Мугуев [12] исследует образовательное пространство многоуровневого вуза, основываясь на целостности как сущностном факторе. Э.К. Самерханова [13] описывает образовательное пространство как «образовательный континуум», включающий в себя пять основных компонент. Л.Н. Волошина [14] характеризует здоровьесберегающее образовательное пространство как интегративную педагогическую реальность.

Субъекты образовательного пространства в рамках данного подхода определяются на основе анализа особенностей их деятельности

в рамках педагогической системы: преподаватели и администрация образовательных учреждений как организаторы условий для обучения и саморазвития обучающихся; студенты как субъекты обучения и саморазвития; внешние субъекты в рамках различных сценариев взаимодействия.

В качестве вывода к проведенному нами исследованию можно отметить, что при всём разнообразии подходов к определению понятия «образовательное пространство» в качестве его основных субъектов все авторы выделяют в первую очередь обучающихся и преподавателей, что отвечает традициям отечественной педагогики. С другой стороны, можно констатировать значительное разнообразие подходов к определению роли образовательного пространства в системе социальных взаимодействий и, шире, его роли в общественной жизни в целом.

Литература

1. Груздев М.В. Формирование образовательного пространства сельских территорий: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Ярославль, 2004. 40 с.
2. Жигалова И.А. Формирование образовательного пространства начального профессионального образования в федеральном округе: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. М., 2005. 44 с.
3. Шогенов А.А. Интеграционные процессы как фактор развития образовательного пространства поликультурного региона: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. М., 2008. 46 с.
4. Игумнова Е.А. Экологическое образование школьников в региональном образовательном пространстве (естественнонаучная предметная область): автореф. дис. ... д-ра пед. наук. М., 2013. 45 с.
5. Маркова Н.Г. Формирование культуры межнациональных отношений студентов в поликультурном образовательном пространстве вуза: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Казань, 2010. 41 с.
6. Барановская Л.А. Формирование социальной ответственности студента в социокультурном образовательном пространстве: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Чита, 2012. 42 с.
7. Улзытуева А.И. Культурно-диалогическое развитие дошкольников в билингвальном образовательном пространстве: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Чита, 2012. 46 с.
8. Малапов И.А. Развитие регионального образовательного пространства в контексте цивилизационного подхода: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Улан-Удэ, 2012. 47 с.
9. Леонова О.А. Региональное образовательное пространство: принципы формирования и прогнозирования развития: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Волгоград, 2009. 46 с.
10. Чекунова Е.А. Формирование образовательного пространства современной школы в контексте социокультурных и педагогических инноваций: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Ставрополь, 2012. 48 с.
11. Сёмина М.В. Становление фамилистической метакомпетентности молодежи в образовательном пространстве вуза: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Чита, 2013. 46 с.

12. Мугуев Г.И. Формирование целостного образовательного пространства в многоуровневом профессиональном учебном заведении: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Якутск, 2010. 41 с.

13. Самарханова Э.К. Организация единого образовательного пространства в высшем учебном заведении: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Нижний Новгород, 2006. 48 с.

14. Волошина Л.Н. Развитие здоровьесберегающего образовательного пространства дошкольных учреждений (методология, теория, практика): автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Екатеринбург, 2006. 48 с.

D.A. Boyarinov
Smolensk State University

EDUCATIONAL SPACE ENVIRONMENT VARIOUS INTERPRETATIONS

Keywords: *educational environment, subjects of the educational environment, digitalization of education, information educational environment.*

Abstract. *The given article examines various approaches to the concept of «educational space» in Russian research and the analysis of its social role. It identifies four main approaches, which can be roughly classified as «territorial-institutional», «sociocultural-sociological», «event-humanistic» (or phenomenological), and «systemic-activity». Significant differences between these approaches are identified, primarily related to defining the role of educational space in the system of social interactions and, more broadly, its role in public life as a whole. It is also noted that all researchers identify learners and teachers as the primary actors in educational space.*

А.В. Дюндин
Смоленский государственный университет

УДК 371.213.8

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ КАК ВРЕМЕННОЕ РЕШЕНИЕ КАДРОВЫХ ПРОБЛЕМ СОВРЕМЕННОЙ ШКОЛЫ

Ключевые слова: *кадровые потребности экономики, подготовка учителей, дистанционное обучение.*

Статья посвящена одному из вариантов использования элементов дистанционного обучения для повышения качества подготовки абитуриентов в условиях нехватки квалифицированных педагогических кадров. Предложен вариант дистанционного контроля деятельности

обучающихся с использованием электронного варианта рабочей тетради.

Существующие в настоящее время проблемы с квалифицированными кадрами практически во всех областях народного хозяйства в ближайшей перспективе способны существенно замедлить развитие экономики, что вместе с очередными действиями недружественных стран обязывает нас мобилизовать внутренние ресурсы, причем в первую очередь кадровые.

На основании методики формирования потребностей экономики РФ в кадрах [7] был подготовлен прогноз кадровой потребности экономики на период до 2030 года [5], в соответствии с которым к 2029 году:

- вырастет потребность в кадрах в сфере персональных услуг, в обрабатывающих производствах, в области транспортировки и хранения, гостиничном и общественном питании, а также в профдеятельности и науке;

- снизится востребованность кадров в торговле, госуправлении и, как ни странно, обеспечении электроэнергией;

- специалисты высшей квалификации будут нужны в разработке и анализе приложений, медицине, технике, системах управления базами данных, а также архитектуре и проектировании.

Приводить числовые данные в рамках данной работы мы считаем нецелесообразным, однако явно прослеживается тенденция на усиление роли среднего профессионального образования, а также на первоочередное развитие высшего технического образования.

В отчете Председателя Правительства РФ за 2025 год [3] М.В. Мишустин отметил, что «по самым востребованным специальностям, в первую очередь нужным для достижения технологического лидерства, будем увеличивать количество бюджетных мест, и уже сейчас больше половины из них приходится именно на технические профессии».

Повышение квалификации выпускников учреждений профессионального образования (как высшего, так и среднего) невозможно без улучшения качества подготовки абитуриентов, а оно, в свою очередь, зависит от наличия преподавателей высокой квалификации, особенно в естественно-математическом профиле.

В соответствии с постановлением Правительства [6] одной из основных задач программы «Развитие образования» является «создание системы непрерывного профессионального роста, задающей карьерную вертикаль от молодого педагога до педагога-методиста и педагога-наставника (путем введения соответствующих квалификационных категорий), внедрение программы наставничества с привлечением в качестве наставников учителей предпенсионного и пенсионного возраста, молодых учителей в части развития компетенций по

информационно-коммуникационным технологиям, адресное повышение квалификации и методическая поддержка педагогов».

На заседании президиума Совета при Президенте России по науке и образованию [2] в качестве одной из проблем с кадрами по естественно-математическому направлению указано, что «школы и другие образовательные учреждения сталкиваются с нехваткой преподавателей в этих областях, что вызывает особую озабоченность», а также выявлено «снижение числа выпускников с глубокими знаниями в данных предметах (математика и предметы естественно-научного цикла) и уменьшение количества профильных классов с углубленным изучением математики».

И наконец, на заседании Совета при Президенте по науке и образованию [1] В.В. Путин предложил «комплексно обновить программы по математике и естественно-научным дисциплинам, сбалансировать объём учебного материала, сделать его доступным, понятным и, что самое главное, интересным для школьника».

Опираясь на изложенные выше материалы, можно сделать вывод о наличии подготовленной базы (как законодательной, так и материальной) для реформирования системы образования под новые перспективные задачи, однако существующий дефицит кадров существенно тормозит решение этих задач. Объём дефицита кадров в сфере образования очень сильно разнится по разным источникам, поэтому будем считать его достоверным сложно. Например, по итогам исследования [8] «на начало 2023/2024 года в государственных школах России учителями работали 1,054 млн. чел., из них 88,4% составляли женщины, кадровый дефицит составлял 18 160 учителей», а в одном из докладов министра Просвещения приводилась цифра в 40 тыс. учителей, которые покинут школу по разным причинам к 2030 году.

Таким образом, мы наблюдаем временное противоречие между потребностями государства в кадрах и невозможностью эти кадры качественно подготовить в ближайшей перспективе, так как начатые реформы не смогут дать быстрый результат, в то же время подготовленные абитуриенты нужны уже сейчас.

В условиях дефицита кадров к работе со школьниками привлекают:

- учителей смежных дисциплин;
- студентов-педагогов старших курсов;
- студентов непедагогических направлений после профессиональной переподготовки;
- специалистов из системы дополнительного образования.

К сожалению, в рамках обучения математике, физике, химии и другим «негуманитарным» дисциплинам отсутствие квалифицированного опытного специалиста не позволяет получить удовлетворительный результат.

Один из путей временного решения данного вопроса мы видим в использовании элементов дистанционного (электронного) обучения с удаленным привлечением специалистов данного (или соседнего) региона, а также некоторого количества специалистов менее высокой квалификации.

В статье 16 закона об образовании электронное обучение определяется как «организация образовательной деятельности с применением содержащейся в базах данных и используемой при реализации образовательных программ информации и обеспечивающих ее обработку информационных технологий, технических средств, а также информационно-телекоммуникационных сетей, обеспечивающих передачу по линиям связи указанной информации, взаимодействие обучающихся и педагогических работников» [9]. В дальнейшем мы все же будем использовать термин «дистанционное обучение», рассматривая его как синоним электронного из указанного выше закона.

Основные теоретические вопросы, связанные с дистанционным обучением и его организацией, подробно рассмотрены в различных работах Е.С. Полат, например [4], и на них мы останавливаться не будем.

Разработанные специалистами элементы дистанционного обучения могут использоваться и неспециалистами и в системе позволяют получить приемлемый результат обучения, разумеется, при соблюдении определенных условий.

При использовании элементов систем дистанционного обучения мы можем обойтись без серьезных управляющих модулей и контроль за выполнением тех или иных элементов поручить в том числе студентам.

В структуре рассматриваемой системы можно выделить три стандартных блока:

- информационный;
- коммуникативный;
- контрольный.

Информационный блок включает в себя:

• видеозаписи уроков, подготовленных учителями высокой квалификации;

- примеры решения задач;
- демонстрационный эксперимент (физика и химия);
- дополнительные материалы и др.

Контрольный блок содержит:

- вопросы и тесты для самопроверки;
- задачи с ответами и примерами решения;
- контрольные работы;
- дополнительные творческие задания и др.

Отметим, что для контроля за выполнением элементов первого и последнего модулей не требуется специалист высокой квалификации и для успешной реализации компонентов достаточно инструкций, подобных поурочным рекомендациям. Подготовку материалов можно значительно ускорить, используя электронные версии методических комплектов, которые подготовлены практически всеми авторскими коллективами, однако в разных объемах. Одним из самых объемных электронных УМК является, по нашему мнению, [10].

Коммуникативный блок содержит:

- формы обратной связи;
- видеоконференции;
- оперативный контроль деятельности.

Отдельно обратим внимание на возможность индивидуализации контроля посредством подготовленных вариантов заданий для самостоятельной работы с использованием планшетов с графическим пером (стилусом).

Каждый из учеников выполняет записи в электронном аналоге рабочей тетради, а учитель (в данном случае специалист) имеет возможность в режиме реального времени просмотреть выполненные записи, оценить результат, дать комментарии, указания и др.

В заключение отметим, что рассматриваемая система должна реализовываться под руководством как минимум муниципальных органов власти с привлечением учителей высокой квалификации и специалистов из профильных вузов.

Литература

1. Заседание Совета при Президенте по науке и образованию 06.02.2025. URL: <http://www.kremlin.ru/events/president/news/76222> (дата обращения: 28.02.2026).
2. Материалы заседания президиума Совета при президенте России по науке и образованию от 16.09.2024. URL: <https://www.gazeta.ru/social/news/2024/09/16/23938621.shtml> (дата обращения: 28.02.2026).
3. Отчет Председателя Правительства РФ за 2025 год. URL: <https://ria.ru/20260225/mishustin-2076551973.html> (дата обращения: 28.02.2026).
4. Полат Е.С. Дистанционное обучение // Педагогические и информационные технологии в образовании. 2001. № 4. URL: <http://journals.susu.ru/pit-edu/article/view/318> (дата обращения: 28.02.2026).
5. Прогноз кадровой потребности: основные тренды и результаты. URL: <https://kosa.permkrai.ru/upload/iblock/98f/1cykejv1xor5napo4qkki0dsgeir22y.pdf> (дата обращения: 28.02.2026).
6. Постановление Правительства РФ от 7 октября 2021 г. N 1701 «О внесении изменений в государственную программу Российской Федерации «Развитие образования» и признании утратившими силу некоторых актов Правительства Российской Федерации и отдельных положений некоторых актов Правительства Российской Федерации». URL: <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/402807035/> (дата обращения: 28.02.2026).

7. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 11.09.2024 № 2461-р «О методике формирования прогноза потребности экономики РФ в кадрах». URL: <http://publication.pravo.gov.ru/document/0001202409200037?index=1> (дата обращения: 28.02.2026).

8. Самое важное о проблемах образования. Данные статистики. Исследование профсоюза «Учитель» по открытым источникам. URL: <https://pedagog-prof.org/oplata-truda/samoe-vazhnoe-o-problemah-obrazovaniya-dannye-statistiki/> (дата обращения: 28.02.2026).

9. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 08.12.2020). URL: <https://fzrf.su/zakon/ob-obrazovanii-273-fz/> (дата обращения: 28.02.2026).

10. Физика. Инженеры будущего. URL: <https://physics-engineers.ru/> (дата обращения: 28.02.2026).

A.V. Dyndin
Smolensk State University

ELEMENTS OF DISTANCE LEARNING AS A TEMPORARY SOLUTION AMIDST STAFFING PROBLEMS IN MODERN SCHOOLS

Key words: *staffing needs, teacher training, distance learning.*

This paper addresses one of the possible ways of utilising elements of distance learning for bettering education quality of future school graduates amidst a shortage of qualified teachers. We propose remote monitoring of students' activity using a digital version of a workbook.

А.С. Кузнецова
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

УДК 159.9:331.101.3

КОМПЛЕКСНАЯ МЕТОДОЛОГИЯ АНАЛИЗА СТРЕССОВЫХ СОСТОЯНИЙ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ И УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Ключевые слова: *профессиональный стресс, стресс-факторы, стрессовые состояния, копинг-ресурсы, профессиональное выгорание.*

В статье рассматриваются достижения исследований, выполненных на основе трех основных парадигм психологического анализа стресса (экологической, транзактной, регуляторной); соотносятся разные трактовки понимания стресса, возможности и ограничения в его изучении. Приводятся примеры исследований,

выполненных на контингентах студентов и педагогов. Анализируется специфика стресса в профессиональной и учебной среде. Обсуждаются возможности комплексной методологии анализа стресса А.Б. Леоновой как современной базы для разработки технологий прогностической оценки и коррекции причин развития, форм проявления и характера последствий переживания и проживания стресса.

Актуальность проблемы исследования. В психологической науке существуют (и успешно сосуществуют) разные парадигмы исследований стресса [4]. В качестве основных выделяются три (см. рис. 1). Как показано на рисунке 1, в фокусе внимания исследователей и психологов-практиков – разные аспекты стресса как целостного явления.

В рамках «экологической» парадигмы стресс рассматривается как дисбаланс между внешними факторами (стрессорами) и возможностями человека успешно преодолеть разрушающее действие стрессоров и не допустить последствий – деструкций деятельности и/или развития устойчивых изменений личности и хронических форм потери здоровья. Фактически вошедшие в психологическую науку исследования представляют собой результаты вычленения и анализа устойчивых корреляционных связей между (1) стрессорами как причинами развития стрессовой реакции и (2) отсроченными деструктивными последствиями частого (или постоянного) воздействия данных стрессоров [5; 8; 9].

Основные современные парадигмы изучения стресса

«Экологическая»	«Трансактная»	«Регуляторная»
Модели соответствия «личность- среда»	Когнитивные и трансактные модели	Модели регуляции состояний и деятельностный подход
Стресс как дисбаланс между требованиями внешней среды и внутренними ресурсами	Стресс как процесс субъективной оценки и актуализации копинг-механизмов	Стресс как изменение механизмов регуляции деятельности: динамика состояний

Рис. 1. Стресс как объект исследования в трех психологических парадигмах

На основе данной методологии («стресс – это причины, которые его вызывают») были выявлены стрессоры педагогов, характерные для процесса внедрения инноваций в системе среднего образования начала-середины 10-х годов XXI века [3; 7]:

- большой объем рабочей нагрузки (проверка работ, заполнение плановых и отчетных документов) в условиях дефицита времени;
- необходимость постоянного общения с большим количеством людей (с учениками, их родителями, коллегами, руководством);
- высокая степень эмоциональной насыщенности работы в сочетании с жесткими организационными требованиями корректного поведения;
- высокий уровень ответственности за результаты труда;
- давление организационного контроля со стороны администрации;
- невысокий уровень оплаты труда;
- ограниченность карьерного роста и развития;
- высокие требования к умению работать с разными информационными и компьютерными системами;
- отсутствие в школах специализированных помещений для рекреации.

В качестве второго примера исследований, направленных на выявление типичных причин развития стресса, можно привести результаты анализа стрессоров студентов вузов [2]. К числу пяти наиболее значимых источников учебного стресса относятся:

- необходимость посвящать учебе вечернее и даже ночное время;
- отсутствие времени на личную жизнь из-за полной включенности в учебный процесс;
- нехватка времени на полноценное питание во время учебного дня;
- недостаток времени на удовлетворение личных нужд;
- случаи, когда полученная на экзамене оценка не связана с действительно имеющимися знаниями.

По второй линии исследований, развиваемых в соответствии с базовыми целями «экологической» парадигмы («стресс – это устойчивые последствия, к которым приводит систематическое воздействие стрессоров»), важным направлением является анализ вероятности развития профессионально-личностных деформаций по типу профессионального выгорания. Показано, что педагоги относятся к группе риска. Вместе с тем установлено, что педагоги со стажем в профессии более 15 лет являются одной из самых благополучных групп, свободных от признаков наличия данного синдрома [1; 3].

Главное направление исследований стресса в рамках **трансактной** парадигмы – изучение процесса субъективной интерпретации воздействия внешних стрессоров в соотношении с оценкой собственных ресурсов, пригодных для преодоления этого воздействия: «стресс – это результат несоответствия (1) интересных, но сложных задач, (2) угрожающих мне или (3) фрустрирующих меня проблем моим возможностям справиться с ними». Такое понимание стресса позволяет

ответить на вопрос: почему при одинаковых внешних воздействиях на разных людей у кого-то развивается стрессовая реакция, а у кого-то нет. Исследования данного направления выявили когнитивные механизмы развертывания стрессовой реакции: (а) построение образа ситуации, который никогда не идентичен реальности, и включает только существенную информацию; (б) субъективная интерпретация образа ситуации как содержащего обстоятельства угрожающего, фрустрирующего или «проверяющего мои возможности» типа [5].

Изучение роли субъективной оценки в развитии стрессового ответа позволило показать правомерность взгляда на стресс как на субъективный феномен, и доказать медиаторный характер когнитивных процессов интерпретации внешних обстоятельств в развитии стрессовой реакции. Так, перечисленные выше объективно существующие стрессоры педагогической и учебной среды для каждого человека имеют разный субъективный рейтинг в списке причин развития стресса. На материале обследования педагогов во время внедрения инноваций показано, насколько одни и те же объективные факторы обладают неодинаковой стрессовой нагрузкой для разных педагогов [6; 7].

В рамках «трансактной» парадигмы развивается и проблематика изучения копинг-процессов, направленных на совладание со стрессовыми воздействиями. Исследования копинг-ресурсов педагогов выявили преобладание социально-ориентированных стратегий преодоления стресса: активизацию социальных контактов для позитивного общения, а также поиск поддержки у близких людей [3; 7].

«Регуляторная» парадигма предполагает понимание стресса как состояния; развитие стресса связано со сменой механизмов регуляции деятельности: «стресс – это одно из функциональных состояний, развивающихся в субъективно сложных и значимых для человека условиях. Соответственно, в исследованиях детально анализируются особенности проявления стрессового состояния в разных ситуациях [6; 8]. Данное понимание стресса наиболее знакомо большинству людей, и при обращениях к психологам за консультацией по вопросам преодоления стресса многие из нас ждут помощи в поиске путей минимизации стрессовых проявлений в стрессогенных ситуациях.

Интеграция верифицированных результатов научных исследований, развивающихся в русле разных парадигм, необходима для создания целостного представления о психологии стресса. Пример такой интеграции – разработанная профессором Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова А.Б. Леоновой комплексная методология анализа стресса [4; 5; 6]. Если сформулировать, что есть стресс, на основе положений данной методологии, то определение выглядит так: «стресс – это цепочка следующих компонентов: стрессоры как объективные факторы; их

субъективная интерпретация в качестве причин развития стресса в конкретной ситуации; стресс как состояние с характерным синдромом проявлений; при условии неэффективного функционирования копинг-процессов – развитие хронических форм стресса, переходящих в профессионально-личностные деформации и заболевания стрессовой этиологии».

В качестве основного итога представленного обзора следует подчеркнуть, что принципы данной методологии позволяют рассматривать стресс как целостное явление. Это расширяет возможности точной оценки вероятности развития стресса и прогноза его динамики посредством системного анализа причин, проявлений и последствий. На основе комплексной методологии профессора А.Б. Леоновой ее учениками и коллегами созданы и активно применяются в психологической практике прикладные технологии индивидуальной диагностики и коррекции стресса (ИДИКС), индивидуальной оценки стресс-резистентности (ИОСР), модульные программы обучения навыкам саморегуляции состояния в стрессогенных условиях [4; 6].

Литература

1. Величковская С.Б. Исследование ценностно-мотивационных установок и удовлетворенности трудом у преподавателей иностранных языков // Вестник Московского государственного лингвистического университета. Образование и педагогические науки. 2025. № 1 (854). С. 82–90.
2. Величковская С.Б. Психологические трудности студентов в учебном процессе и возможности их преодоления // Вестник Московского государственного лингвистического университета. Образование и педагогические науки. 2018. Выпуск 2 (796). С. 212 –224.
3. Кузнецова А.С., Буряя И.А., Гизатуллина Ю.Ф., Широкая М.Ю. Инновационные изменения как фактор риска развития выгорания учителей средних школ (по материалам исследования преподавателей России и Узбекистана) // Выгорание и профессионализация / под ред. В.В. Лукьянова [и др.]. Курск: Курск. гос. ун-т, 2013. С. 61–87.
4. Леонова А.Б. Комплексные психологические технологии управления стрессом и оценка индивидуальной стресс-резистентности: опыт интеграции различных исследовательских парадигм // Вестник Моск. ун-та. Серия 14. Психология. 2016. № 3. С. 63–72.
5. Леонова, А.Б. Основные подходы к изучению профессионального стресса // Вестник Моск. ун-та. Серия 14. Психология. 2000. № 3. С. 4–21.
6. Леонова А.Б. Мотовилина И.А. Профессиональный стресс в процессе организационных изменений // Психологический журнал. 2006. Т. 27. № 2. С. 79–92.
7. Титова М.А., Яшина С.С. Проактивное совладающее поведение учителей школы и преподавателей колледжа с разным отношением к цифровой трансформации труда // Психология стресса и совладающего поведения: ресурсы и устойчивость в мире неопределенности. Кострома: Костромской гос. ун-т, 2025. С. 435-439.

8. Richter P., Rohlandt A. Assessment of task design and mental load // Occupational health and safety aspects of stress at modern workplaces / ed. by P. Ullsperger [et al]. Bremenhafen, 1996. P. 28–38.

9. Siegrist J., Peter R. Job stressors and coping characteristics in work-related disease: issues of validity // Work and Stress. 1994. Vol. 8(2). P. 130-140.

A.S. Kuznetsova

Lomonosov Moscow State University

MENTAL REPRESENTATION OF OPTIMAL HUMAN FUNCTIONAL STATES' CHARACTERISTICS IN EXAM SITUATIONS: PHYSICS STUDENTS' VIEWPOINT

Keywords: *occupational stress, stressors, stress as a state, coping, professional burnout.*

Abstract. *The article examines the achievements of research conducted within the three main paradigms of psychological stress analysis (ecological, transactional, regulatory). It compares different interpretations of stress, as well as the potential and limitations of studying this phenomenon. Examples of studies conducted on students and teachers in secondary and higher education are provided. The specifics of stress in professional and educational environments are analyzed. The potential of A.B. Leonova's comprehensive stress analysis methodology as a modern basis for developing technologies for prognostic assessment and correction of the stress causes, manifestations, and consequences is discussed.*

И.А. Куклев

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

УДК 623.746.4

РАЗРАБОТКА МЕТОДА УЛУЧШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ БПЛА С НИЗКИМИ ТРЕБОВАНИЯМИ К АППАРАТНОЙ ПЛАТФОРМЕ

Ключевые слова: *обнаружение БПЛА; набор данных реальных сценариев; модуль Ghost; легковесная модель улучшения признаков; модуль SIMAM*

Обнаружение беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в реальном времени является быстро развивающейся областью исследований, сосредоточенной на передовых алгоритмах компьютерного зрения и глубокого обучения. Однако рост числа беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) вызвал множество опасений из-за возможности их злонамеренного использования в незаконной деятельности. Для решения этих проблем недавно были

разработаны методы обнаружения БПЛА на основе компьютерного зрения. Тем не менее обнаружение БПЛА в реальных сценариях, например на изображениях с разнообразным фоном и с различных ракурсов, остается малоизученным. YOLO, популярный одноэтапный подход к обнаружению объектов, широко используется для обнаружения БПЛА в различных средах благодаря своей эффективности и простоте. Однако детекторы этой серии сталкиваются с проблемами в реальных сценариях, такими как избыточные вычисления и неоптимальная частота обнаружения. Предлагается нейросетевая модель улучшения признаков (НМУП) для решения этих ограничений с низкими требованиями к аппаратным ресурсам. Эксперименты на наборах данных UAVDT и DOTAv1.0 демонстрируют эффективность рассматриваемого подхода. Предложенная НМУП достигает 93,2% mAP50, превосходя базовые модели, сохраняя при этом низкие требования к аппаратным ресурсам.

1. Введение. Обнаружение объектов является фундаментальной задачей компьютерного зрения и было предметом обширных исследований. Ранние методы в основном полагались на традиционные методы, основанные на ручном создании признаков, как описано в [3–8]. Однако с появлением глубокого обучения сверточные нейронные сети (CNN) продемонстрировали замечательное улучшение производительности обнаружения объектов.

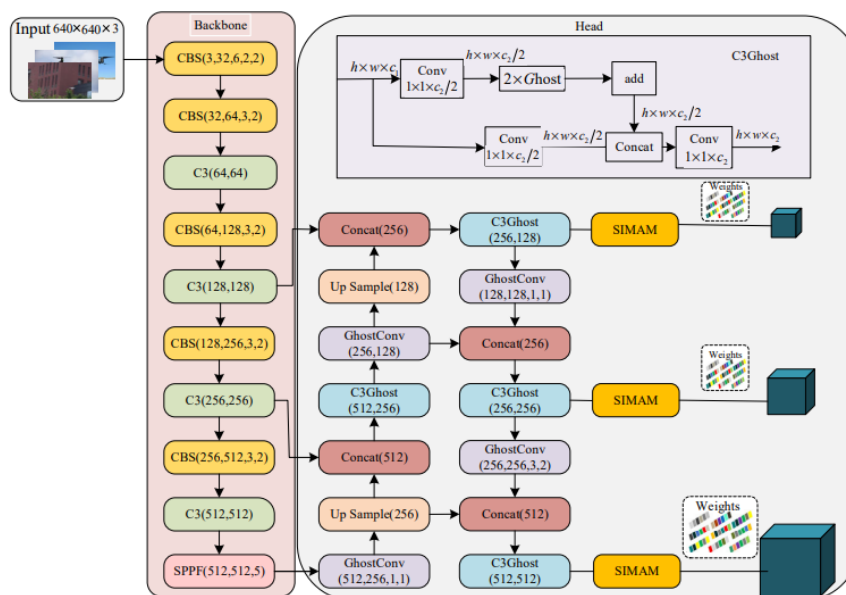


Рис. 1. Сетевая архитектура предлагаемого метода

Общая архитектура предлагаемой нейросетевой модели улучшения признаков (НМУП) показана на рисунке 1. Фреймворк YOLOv5 состоит

из трех основных компонентов: Вход (Input), Основа (Backbone) и Голова (Head).

Для повышения производительности и снижения сложности стандартные операции свертки в сети заменяются модулем свертки Ghost. Кроме того, модуль SIMAM интегрируется в компонент головы для обеспечения эффективного многоуровневого слияния признаков. Эти объединенные и улучшенные карты признаков затем обрабатываются тремя головами обнаружения, которые выдают прогнозы для оценок достоверности (confidence scores), категорий объектов и анкерных рамок (anchor boxes).

Пусть входные и выходные карты признаков обозначены как $X \in \mathbb{R}^{c_1 \times h_1 \times w_1}$ и соответственно. Здесь c_1 и c_2 представляют количество входных и выходных каналов, h_1 и h_2 обозначают высоту входных и выходных карт признаков, а w_1 и w_2 – ширину входных и выходных карт признаков. Размер ядра сверточных фильтров представлен как $n \times n$. В процессе свертки требуемое количество операций с плавающей запятой может быть вычислено как $h_2 \times w_2 \times c_2 \times c_1 \times k \times k$, и это значение обычно превышает порядок величины 10^5 из-за того, что c_2 и c_1 обычно довольно велики.

Легковесный модуль Ghost разделяет сверточный слой на два сегмента, применяя различные вычислительные стратегии к каждому. В первом сегменте используется стандартная свертка, при этом количество карт признаков строго контролируется, чтобы вычисления оставались управляемыми. На втором этапе дополнительные карты признаков генерируются не обычной сверткой, а с помощью простого "линейного преобразования". На основе приведенного выше анализа общее количество операций с плавающей запятой легковесного модуля Ghost

вычисляется как $h_2 \times w_2 \times \frac{c_2}{s} \times c_1 \times k \times k + (s-1) \times h_2 \times w_2 \times \frac{c_2}{s} \times l \times l$, где s ($s \ll c_1$) – это количество операций преобразования, выполняемых с низкой стоимостью, а размер ядра линейных операций обозначен как $l \times l$. Количественно оценили улучшения модуля Ghost, вычислив отношение операций с плавающей запятой, демонстрирующее его теоретическое ускорение по сравнению со стандартной сверткой.

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{h_2 \times w_2 \times c_2 \times c_1 \times k \times k}{h_2 \times w_2 \times \frac{c_2}{s} \times c_1 \times k \times k + (s-1) \times h_2 \times w_2 \times \frac{c_2}{s} \times l \times l} = \\
 &= \frac{c_1 \times k \times k}{\frac{1}{s} \times c_1 \times k \times k \times \frac{(s-1)}{s} \times l \times l} \approx \frac{s \times c_1}{s + c_1 - 1} \approx s.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Используя приведенную выше формулу, видим, что FLOPs модуля Ghost примерно в s раз меньше по сравнению с обычной сверткой. Учитывая его высокую производительность, заменили стандартные свертки в сети шеи (neck) на GhostConv (фиолетовый цвет на рисунке 1) и модули C3Ghost (синий цвет на рисунке 1) для улучшенных модулей CBS и C3, что значительно снизило как вычисления, так и сложность модели. Соответственно, можем использовать преимущества текущих библиотек машинного обучения, таких как PyTorch 2.1.2.

Модуль внимания обычно применяется в глубоком обучении для улучшения извлечения признаков и достижения высокой производительности. Однако большинство существующих модулей внимания имеют два основных ограничения. Во-первых, они обычно улучшают карты признаков независимо по каналам и пространственным измерениям, что затрудняет одновременное изучение весов внимания из обоих измерений. Во-вторых, некоторые модули внимания полагаются на гиперпараметры, что требует обширных экспертных знаний для оптимизации производительности. Чтобы решить эти проблемы, предлагается SIMAM – подход без параметров [52], который использует 3D-веса внимания. Рисунок 2 показывает модуль улучшения признаков SIMAM. Как показано на рисунке 2, модули SIMAM напрямую генерируют 3D-веса из признаков X , а затем расширяют сгенерированные веса для улучшения признаков. Здесь одинаковый цвет означает, что для каждой точки на карте признаков используется одно скалярное значение.

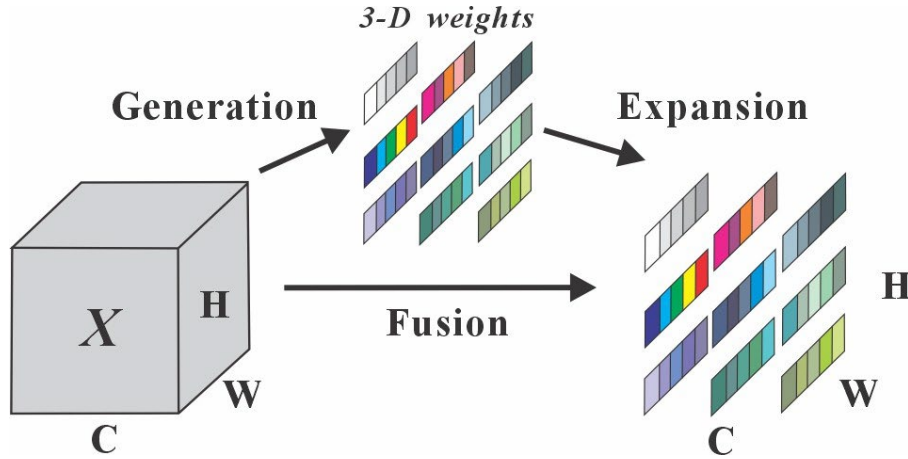


Рис. 2. Модуль улучшения признаков SIMAM

SIMAM захватывает существенные признаки, используя энергетическую функцию, которая определяет энергию для каждого нейрона следующим образом:

$$e_t(w_t, b_t, y, x_i) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} (-1 - (w_t x_i + b_t))^2 + (1 - (w_t x_i + b_t))^2 + \lambda w_t^2. \quad (2)$$

Здесь t и x_i представляют целевой нейрон и другие нейроны в пределах каждого канала входного признака $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{C \times H \times W}$, где i обозначает индекс пространственного измерения. $M = H \times W$ дает количество нейронов на канал. Веса преобразования и смещение, w_t и b_t , определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} w_t &= -\frac{2(t - \mu_t)}{(t - \mu_t)^2 + \frac{2}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} (x_i - \mu_t)^2 + 2\lambda} \\ b_t &= -\frac{1}{2}(t - \mu_t)w_t \\ \mu_t &= \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} x_i, \end{aligned} \quad (3)$$

где среднее значение вычисляется по всем нейронам в канале, исключая t . На основе вышеуказанных операций можно вычислить минимальную энергию следующим образом:

$$\begin{aligned} e_t^* &= \frac{4 \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i - \hat{\mu})^2 + \lambda \right)}{(t - \hat{\mu})^2 + \frac{2}{M} \sum_{i=1}^M (x_i - \hat{\mu})^2 + 2\lambda} \\ \hat{\mu} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i, \end{aligned} \quad (4)$$

предполагая, что все пиксели следуют одному и тому же распределению, что снижает вычислительную сложность. Согласно уравнению (4), вес для каждого нейрона представлен как $1/e_t^*$. В результате модуль улучшения признаков определяется следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{X}} = \text{sigmoid}\left(\frac{1}{E}\right) \odot \mathcal{X}. \quad (5)$$

Здесь E группирует $1/e_t^*$ как по каналам, так и по пространственным измерениям. Сигмоидная функция применяется для предотвращения чрезмерно больших значений весов.

Предлагаемый набор данных содержит 14 592 изображения, включая разнообразные фоны, такие как городские условия, помещения, открытые пространства, луга, яркие и пасмурные условия, как показано на рисунке 3. Кроме того, в наборе данных распределение БПЛА является дисперсным с относительно равномерным горизонтальным и

вертикальным разбросом, что повышает робастность моделей, обученных на этих данных, как видно на рисунке 4. Результирующий набор данных включает несколько типов БПЛА, такие как самолеты с неподвижным крылом, средние и микро-винтокрылые дроны, как показано на рисунке 5. Учитывая, что методы обнаружения БПЛА в литературе недостаточно исследованы для многомасштабного обнаружения БПЛА, особенно под влиянием сложного фона, такого как здания, трава и деревья, учли различные размеры дронов с разных ракурсов в предлагаемом наборе данных, как видно на рисунке 6. Чтобы обеспечить робастность моделей, обученных на наборе данных, уделили внимание разнообразию масштабов. Набор данных содержит БПЛА, снятые с разных расстояний, что приводит к широкому диапазону масштабов объектов от $30 \times 30 \times 30$ до $600 \times 600 \times 600$ пикселей, а это создает серьезную проблему для алгоритмов многомасштабного обнаружения.

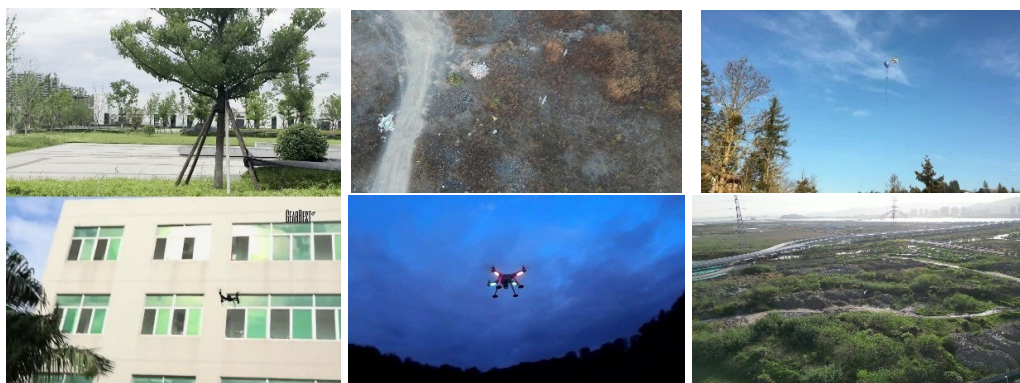


Рис. 3. Примеры изображений с разнообразным фоном из набора данных



Рис. 4. Примеры изображений БПЛА в наборе данных, показывающие относительно равномерное распределение

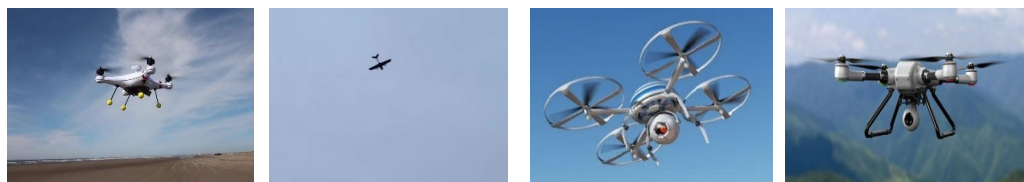


Рис. 5. Примеры нескольких типов БПЛА



Рис. 6. Примеры различных размеров БПЛА

Все эксперименты проводились на аннотированном наборе данных. Предлагаемый метод был реализован с использованием PyTorch 2.1.2 в среде глубокого обучения и выполнен на системах Ubuntu 20.04. Сеть запускалась на графическом процессоре NVIDIA RTX 4090 с версией CUDA 12.0. Все модели обучались с нуля со случайной инициализацией в течение 100 эпох, с размером пакета (batch size) 64. Размер входного изображения был фиксирован на 640×640 пикселей. Использовался оптимизатор SGD со скоростью обучения 0.001. Использовали среднюю среднюю точность (mean Average Precision, mAP), точность (precision) и полноту (recall) в качестве метрик производительности для количественной оценки предлагаемой модели и других существующих моделей, где более высокие значения указывают на лучшую производительность. Для сравнения сложности модели записали количество параметров и FLOPs для каждой модели, где более низкие значения этих метрик указывают на более легкую модель. Каждый эксперимент повторялся пять раз с различными случайными начальными значениями, при этом результаты сообщаются как средняя производительность и соответствующие 95% доверительные интервалы.

Как показано в таблице 1, предлагаемый метод НМУП превосходит все другие модели по метрикам оценки, одновременно сокращая количество параметров. Напротив, модели Faster R-CNN и RetinaNet показывают низкую производительность на сложном наборе данных RWSD, который включает различные сложные сценарии. В результате эти модели не соответствуют требованиям обнаружения для реальных приложений. Хотя YOLOv5, YOLOv8 и YOLOv10 демонстрируют более высокую достоверность обнаружения для БПЛА, их производительность все еще ниже по сравнению с методом НМУП. Напротив, НМУП доказывает, что тщательно разработанная архитектура CNN может превзойти эти модели с минимальной сложностью, что является критическим преимуществом для сценариев реального времени.

Чтобы подтвердить эффективность предлагаемой модели НМУП, провели эксперименты на двух общедоступных наборах данных: DOTA_{v1.0} [7] для сценариев дистанционного зондирования и UAVDT [8] для обнаружения объектов на основе дронов. Сравнили НМУП с тремя основными методами: YOLO_{v10}, YOLO_{v8} и YOLO_{v5}. Производительность оценивалась с использованием mAP₅₀ (средняя средняя точность при Intersection over Union 50%) и полноты (Recall). Для обеспечения статистической надежности каждый эксперимент повторялся пять раз с различными случайными начальными значениями, при этом результаты сообщаются как средняя производительность и соответствующие 95% доверительные интервалы (обозначенные $\pm$), как подробно описано в Таблице 3. Результаты на наборе данных UAVDT показывают, что НМУП значительно превзошла все другие методы, достигнув mAP₅₀ $54.79 \pm 0.40\%$ и полноты $52.64 \pm 1.28\%$. Это подчеркивает явное преимущество НМУП в обнаружении объектов на основе дронов.

Таблица 1

Производительность различных моделей обнаружения объектов на UAVDT и DOTA_{v1.0}, т.е. 95% доверительные интервалы указаны после символа $\pm$

Method	Param. {M}	UAVDT		DOTA _{v1.0}	
		mAP ₅₀ (%)	Recall (%)	mAP ₅₀ (%)	Recall (%)
Yolov10	7.02	53.99 ± 1.90	50.68 ± 0.11	72.36 ± 0.27	67.63 ± 0.53
Yolov8	11.10	49.75 ± 1.33	48.75 ± 0.80	71.88 ± 0.21	69.19 ± 0.13
Yolov5	8.10	52.50 ± 0.77	48.41 ± 1.97	69.61 ± 0.37	67.61 ± 0.17
LFEM	5.62	54.79 ± 0.40	52.64 ± 1.28	73.10 ± 0.16	69.45 ± 0.40

Чтобы оценить эффективность легковесного модуля Ghost и модуля улучшения признаков SIMAM, было проведено абляционное исследование предлагаемого алгоритма НМУП. Модули Ghost, которые заменяют стандартные свертки и блоки СЗ в шее для создания легковесной пирамиды признаков, продемонстрировали способность значительно снижать вычислительную нагрузку, сохраняя при этом почти идентичную производительность по сравнению с базовой линией. Как показано в таблице 2, количество параметров было сокращено на 20.0%, а GFLOPs уменьшились на 15.7%. Экспериментальные результаты демонстрируют, что предлагаемый метод НМУП значительно повышает скорость вывода, сохраняя точность обнаружения. По сравнению с базовой моделью НМУП сокращает время вывода с 4.80 ms до 4.30 ms, достигая 10.4% улучшения эффективности вывода. Несмотря на эти сокращения, mAP_{0.5} снизилась всего на 0.3%, в то время как показатель полноты улучшился на 0.8%.

Более того, интеграция модуля SIMAM, стратегически размещенного в конце базовой сети и на вершине головы обнаружения для уточнения высокоуровневых семантических признаков, еще больше улучшила производительность. Позволяя сети фокусироваться на релевантных целевых объектах с помощью 3D-весов внимания на картах признаков, это улучшение повысило производительность обнаружения, особенно в сложных реальных сценариях. Примечательно, что SIMAM не вводит дополнительных параметров, сохраняя общее количество параметров. После включения модуля SIMAM точность и полнота сети увеличились на 1.24% и 1.75% соответственно, что представляет собой существенное улучшение производительности обнаружения.

Таблица 2

Результаты абляционного теста для предлагаемого метода НМУП, т.е. 95% доверительные интервалы указаны после символа $\pm$

Method	Param. (M)		Precision	Recall	mAP ₅₀	mAP ₉₅
Time	GFLOPs	Inf.				
		(ms)	(%)	(%)	(%)	(%)
Yolov5 (Baseline)	7.02	15.9	4.80	95.37 $\pm$ 0.70	85.74 $\pm$ 0.42	90.62 $\pm$ 0.11
+SIMAM	7.02	15.9	5.20	96.61 $\pm$ 0.20	86.99 $\pm$ 0.60	92.01 $\pm$ 0.22
+Ghost	5.62	13.4	4.10	95.07 $\pm$ 0.71	85.58 $\pm$ 0.55	90.33 $\pm$ 0.29
LFEM	5.62	13.4	4.30	96.57 $\pm$ 0.41	87.49 $\pm$ 0.74	93.04 $\pm$ 0.54

Литература

1. Lort M., Aguasca A., Lopez-Martinez C., Marin T.M. Initial evaluation of SAR capabilities in UAV multicopter platforms // IEEE J. Sel. Top. Appl. Earth Obs. Remote Sens. 2017, 11. P. 127-140. [CrossRef].
2. Skrinjar J.P., Skorput P., Furdic M. Application of Unmanned Aerial Vehicles in Logistic Processes New Technologies, Development and Application 4. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2019. P. 359-366.
3. Xu Y., Yu, G., Wang Y., Wu X., Ma Y. Car Detection from Low-Altitude UAV Imagery with the Faster R-CNN. J. Adv. Transp. 2017, 2823617. [CrossRef].
4. Cheng H., Lin L., Zheng Z., Guan Y., Liu Z. An autonomous vision-based target tracking system for rotorcraft unmanned aerial vehicles. In Proceedings of the 2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Vancouver, BC, Canada, 24-28 September 2017. IEEE: New York, NY, USA, 2017. P. 1732-1738.
5. Hoffmann F., Ritchie M., Fioranelli F., Charlish A., Griffiths H. Micro-Doppler based detection and tracking of UAVs with multistatic radar. In Proceedings of the 2016. IEEE Radar Conference (RadarConf), Philadelphia, PA, USA, 2-6 May 2016; IEEE: New York, NY, USA, 2016. P. 1-6.
6. Abunada A.H., Osman A.Y., Khandakar A., Chowdhury M.E.H., Khattab T., Touati F. Design and implementation of a RF based anti-drone system. In Proceedings of the 2020 IEEE International Conference on Informatics, IoT, and Enabling Technologies (ICIoT), Doha, Qatar, 2-5 February 2020. IEEE: New York, NY, USA, 2020. P. 35-42.
7. Chang X., Yang C., Wu J., Shi X., Shi Z. A surveillance system for drone localization and tracking using acoustic arrays. In Proceedings of the 2018 IEEE 10th

Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM), Sheffield, UK, 8-11 July 2018. IEEE: New York, NY, USA, 2018. P. 573-577.

8. Jocher G., Chaurasia A., Qiu J. Ultralytics YOLOv8, 2023. Available online: <https://github.com/ultralytics/ultralytics> (accessed on 15 October 2024).

I.A. Kuklev

National Research University of Electronic Technology (MIET)

DEVELOPMENT OF A METHOD FOR IMPROVING CHARACTERISTICS FOR DETECTING UAVS WITH LOW REQUIREMENTS FOR THE HARDWARE PLATFORM

Keywords: *UAV detection; real-world scenarios dataset; Ghost module; lightweight feature enhancement model; SIMAM module.*

Abstract. *Real-time Unmanned Aerial Vehicle (UAV) detection is a growing research field centered on advanced computer vision and deep learning algorithms. However, the rise of unmanned aerial vehicles (UAVs) has sparked numerous concerns due to their potential for malicious use in illegal activities. To address these concerns, Vision-based object detection approaches for UAVs have recently been developed. Nonetheless, UAV detection in real-world scenarios, such as images with diverse backgrounds and various perspectives, remains underexplored. To fill this gap, we present a new UAV detection dataset called the real-world scenarios dataset (RWSD). This dataset leverages real-world footage and is constructed under challenging conditions, including complex backgrounds, varying UAV sizes, different perspectives, and multiple UAV types. It aims to support the development of robust UAV detection algorithms that can perform well in diverse and realistic conditions. YOLO, a popular one-stage object detection approach, is widely employed for UAV detection across different environments due to its efficiency and simplicity. However, this series of detectors encounters challenges in real-world scenarios, such as excessive computation and suboptimal detection rates. In this study, we propose a lightweight feature enhancement model (HMYII) to address these limitations. Specifically, we base our model on YOLOv5, introducing the Ghost module to improve UAV detection with fewer floatingpoint operations (FLOPs). Additionally, we incorporate the SIMAM module to enhance feature representation, particularly for real-world scenarios. Extensive experiments on the RWSD, UAVDT, and DOTAv1.0 datasets demonstrate the effectiveness of our approach. Our proposed HMYII achieves an impressive 93.2% mAP50, outperforming baseline models while maintaining a lightweight profile. Comparative and ablation studies further confirm that our algorithm is a promising and efficient solution for practical UAV detection tasks.*

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ПРОСЛЕЖИВАНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ 3D-КООРДИНАТ ЦЕЛЕВЫХ ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ КАМЕРЫ

Ключевые слова: БПЛА; оценка 3D-координат; модели движения; геометрическая калибровка; слежение за объектами; инерциальная навигация; комплексирование данных; модель камеры-обскуры; вычисление дальности; фильтр Калмана.

Статья посвящена разработке метода прослеживания и вычисления трехмерных координат наземных целевых объектов с борта беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Предполагается, что БПЛА оснащен спутниково-инерциальной навигационной системой, позволяющей получать данные о его положении и ориентации. Для комплексирования навигационных данных предлагается использование расширенного фильтра Калмана. В работе решается задача вычисления глобальных 3D-координат объекта при его первом обнаружении в кадре на основе модели камеры-обскуры и известных априорных физических размеров объекта. Для последующего слежения разработана процедура прогнозирования положения и изменения размеров объекта на текущем кадре. В случае наличия информации об объекте на одном предыдущем кадре прогноз строится на основе максимально возможной скорости движения объекта, что позволяет существенно сократить область поиска. При наличии информации о двух предыдущих кадрах используется линейная модель движения с учетом ограничений на максимальное ускорение и замедление, что повышает точность локализации области поиска и позволяет корректировать возможный «дрейф» алгоритмов слежения. Предложенный подход направлен на снижение вычислительной нагрузки по сравнению с классическими методами, такими как фильтр Калмана, при сохранении надежности слежения.

1. Введение. Будем считать, что БПЛА оснащен спутниково-инерциальной навигационной системой (GPS+INS), которая позволяет в каждый момент времени получать информацию о положении и ориентации аппарата в глобальной системе координат. Положение в i -й момент времени задается в геодезической системе координат: долгота в градусах, широта в градусах, высота в метрах над референсным земным эллипсоидом (lon_i, lat_i, alt_i) , а ориентация – углами тангажа, крена и

рысканья ($\varphi_i, \psi_i, \theta_i$). Для системы GPS обычно используется референсная модель WGS-84 [10]. Источником данных являются показания датчика GPS, а также показания гироскопов и акселерометров: линейные и угловые ускорения по каждой из осей координат. Путем двойного интегрирования значений ускорения возможно вычислить текущие координаты БПЛА и его ориентацию.

2. Вычисление 3D-координат целевого объекта при его первом появлении в кадре. Для инерциальной навигационной системы характерно довольно точное вычисление положения и ориентации, но также она обладает свойством накопления ошибки в вычислениях с течением времени. Показания GPS-датчика обладают постоянной точностью, но полученная траектория не всегда является гладкой и может содержать в себе «прыжки». Для устранения недостатков двух подходов к навигации используется комплексирование навигационных данных на основе расширенного фильтра Калмана (Extended Kalman Filter).

Также условимся, что нам доступна информация о взаимной ориентации и положении между системами координат GPS-приемника и видеокамеры, которые задаются в виде матрицы поворота R^{GC} и вектора параллельного переноса T^{GC} . Эти значения могут быть получены в ходе процедуры под названием «hand-eye calibration», для решения данной задачи к настоящему времени разработано много различных алгоритмов. Заметим, что эту процедуру необходимо выполнить всего один раз (при условии, что видеокамера и GPS-приемник жестко скреплены между собой).

Зная lon_i, lat_i, alt_i и $\varphi_i, \psi_i, \theta_i$, легко вычислить ориентацию и положение GPS-приемника в геоцентрической (прямоугольной) системе координат, начало которой привязано к центру референсного земного эллипсоида. Ориентация задается ортонормированной матрицей $\tilde{R}_i^w$ размера 3×3 , положение – трехмерным вектором $\tilde{T}_i^w$. А затем можно восстановить ориентацию и положение видеокамеры на БПЛА: $R_i^w = R^{GC} \tilde{R}_i^w$, $T_i^w = R^{GC} \tilde{T}_i^w + T^{GC}$.

Предположим, что на i -м изображении с камеры на БПЛА алгоритмом детектирования (сверточная нейронная сеть YOLOv3 или CenterNet) обнаружен некоторый целевой объект, на изображении определена прямоугольная рамка, в которую этот объект вписан. Обозначим прямоугольник как $rect_i$, он задается 4 числами: координаты верхнего левого угла, ширина и высота ($x_{rect}, y_{rect}, w_{rect}, h_{rect}$). Пусть центр этой рамки имеет на изображении координаты q_i . Задача состоит в том, чтобы оценить 3D-координаты объекта в глобальной системе координат в текущий момент времени, обозначим их как P_i^w . Воспользуемся

классической моделью камеры-обскуры [11], чтобы связать координаты P_i^w и q_i :

$$P_i^c = \begin{bmatrix} X_i^c \\ Y_i^c \\ Z_i^c \end{bmatrix} = R_i^w P_i^w + T_i^w, \tilde{q}_i = \begin{bmatrix} X_i^c / Z_i^c \\ Y_i^c / Z_i^c \\ 1 \end{bmatrix}, q_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} = M \tilde{q}_i = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{q}_i. \quad (1.1)$$

Здесь P_i^c – 3D-координаты объекта в системе координат $O^c X^c Y^c Z^c$, привязанной к оптическому центру камеры, $\tilde{q}_i$ – 2D-координаты объекта в так называемой нормализованной системе координат, M – матрица внутренних параметров камеры, f_x и f_y – фокальные длины, (c_x, c_y) – координаты так называемой главной точки (principal point), в которой оптическая ось камеры пересекается с плоскостью изображения. Внутренние параметры камеры могут быть вычислены однократно в ходе предварительной калибровки камеры. В общем случае в список внутренних параметров входят также коэффициенты различных типов дисторсии (радиальной, тангенциальной и др.), вызывающие искажение изображения. Но для простоты будем считать, что камера откалибрована, коэффициенты дисторсии известны, что позволяет программно выполнять геометрическую коррекцию изображения, как если бы оно было выполнено камерой, свободной от дисторсии.

Набор уравнений (1.1) позволяет вычислить координаты P_i^w при известных координатах q_i :

$$P_i^w = (R_i^w)^t (P_i^c - T_i^w), \quad P_i^c = Z_i^c (M^{-1} q_i). \quad (1.2)$$

То есть необходимо найти Z_i^c – расстояние между камерой и объектом, отложенное по оси $O^c Z^c$.

Пусть нам доступны априорные сведения о физических размерах объектов того класса, которому принадлежит детектированный объект. Размеры задаются в виде ширины и/или высоты. Пусть физическая высота объекта (в метрах) равна H^{obj} , тогда имеет место следующая пропорция, из которой легко вычислить расстояние до детектированного объекта, а затем и его 3D-координаты в глобальной системе координат:

$$\frac{H^{obj}}{h_{rect}} = \frac{Z_i^c}{f_y} \Rightarrow Z_i^c = \frac{f_y H^{obj}}{h_{rect}}. \quad (1.3)$$

Пропорция доказывается по свойству подобия треугольников. Расстояние до объекта при его известной физической ширине вычисляется по схожему принципу.

3. Оценка координат и размеров объекта на текущем кадре при известных координатах объекта в предыдущий момент времени. Хотя для прогнозирования координат объекта (в случае, если задана модель его движения) часто применяются различные варианты фильтра Калмана, было решено разработать собственную процедуру предсказания координат, поскольку фильтр Калмана (особенно его версия, которая в навигационных задачах применяется наиболее широко, – расширенный фильтр Калмана) является вычислительно затратным.

4. Оценка координат и размеров объекта на текущем кадре при известных координатах объекта в два предыдущих момента времени. Предположим, что нам известно, с какой максимально возможной скоростью может двигаться объект данного класса, обозначим эту скорость как V_{max}^{obj} . Пусть искомый целевой объект присутствовал на одном предыдущем кадре, В момент времени $i-1$ объект имел координаты P_{i-1}^w в глобальной системе координат. Следовательно, в текущий момент времени объект может находиться в точке, отстоящей от точки P_{i-1}^w на расстоянии не более чем $S_{max} = V_{max}^{obj} \Delta t_{i-1}^i$, где Δt_{i-1}^i – промежуток времени между получением предыдущего и текущего кадров с БПЛА. С помощью выражений (1.4) вычисляем 3D-координаты точки P_{i-1}^w в системе координат камеры в текущий момент времени, получаем точку P_{i-1}^c , а затем проецируем эту точку на изображение, получаем точку q_{i-1} :

$$P_{i-1}^c = \begin{bmatrix} X_{i-1}^c \\ Y_{i-1}^c \\ Z_{i-1}^c \end{bmatrix} = R_i^w P_{i-1}^w + T_i^w, \quad \tilde{q}_{i-1} = \begin{bmatrix} X_{i-1}^c / Z_{i-1}^c \\ Y_{i-1}^c / Z_{i-1}^c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_{i-1} = \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = M \tilde{q}_{i-1}. \quad (1.4)$$

Далее, по аналогии с выражением (1.3), можно составить пропорцию, которая связывает величины S_{max} , Z_{i-1}^c , фокальную длину камеры и проекцию расстояния S_{max} на плоскость изображения камеры (обозначим длину этой проекции как r_{i-1}):

$$\frac{S_{max}}{r_{i-1}} = \frac{Z_{i-1}^c}{f_y} \Rightarrow r_{i-1} = \frac{f_y S_{max}}{Z_{i-1}^c}. \quad (1.5)$$

Данная пропорция также легко доказывается по свойству подобия треугольников. Смысл величины r_{i-1} состоит в том, что на видеокadre в текущий момент времени искомый объект может находиться на расстоянии не более чем r_{i-1} пикселей от точки q_{i-1} . Тем самым,

существенно сокращается область поиска целевого объекта на видеокадре.

Кроме того, при известных координатах и размерах прямоугольной рамки $rect_{i-1}$ можно оценить примерные размеры рамки, которая ограничивает область, занимаемую объектом в текущий момент времени. Опять же в силу свойства подобия треугольников легко доказать, что между предыдущим и текущим кадром ширина и высота рамки могут увеличиться в количество раз, лежащее в промежутке

$$\left[\frac{Z_{i-1}^c}{Z_i^c + S_{max}} \dots \frac{Z_{i-1}^c}{Z_i^c - S_{max}} \right]. \quad (1.6)$$

Этот факт позволяет частично решить проблему «дрейфа» – проблему накопления ошибки локализации объекта алгоритмом слежения, выражающуюся в постепенном смещении рамки от объекта слежения. Если размеры рамки вокруг объекта, вычисленной алгоритмом KCF Tracker либо алгоритмом оптического потока, не соответствуют размерам, предсказанным на основании вышеизложенной методики, то размеры рамки соответствующим образом корректируются.

5. Оценка координат и размеров объекта на текущем кадре при известных координатах объекта в два предыдущих момента времени. Предположим, что нам доступна следующая априорная информация о каждом классе подвижных целевых объектов:

- a_{max}^{obj} – максимально возможное ускорение, с которым может двигаться объект данного класса;
- a_{max}^{obj} – максимально возможное замедление для объектов данного класса, т.е. насколько максимально может уменьшиться скорость объекта за единицу времени.

Пусть нам известны 3D-координаты объекта в два предыдущих момента времени $i-2$ и $i-1$, обозначим эти координаты как P_{i-2}^w и P_{i-1}^w . Следовательно, на участке движения между этими двумя моментами средняя скорость объекта составляла $\tilde{V} = \frac{\|P_{i-2}^w - P_{i-1}^w\|}{\Delta t_{i-2}^{i-1}}$, где Δt_{i-2}^{i-1} – промежуток времени между получением кадров $i-2$ и $i-1$.

Введем линейную модель движения: будем считать, что текущее положение P_i^w должно лежать на отрезке $P_{i-2}^w P_{i-1}^w$. Оценим, насколько может меняться средняя скорость объекта при его движении на промежутке $P_{i-1}^w P_i^w$. С одной стороны, если известно, насколько максимально может уменьшиться скорость объекта данного класса за единицу времени (a_{max}^{obj}), то скорость объекта не может быть меньше чем

$\tilde{V}_{min} = \tilde{V} - a_{neg}^{obj} \Delta t_{i-1}^i$. С другой стороны, скорость объекта не может увеличиться больше чем на $a_{max}^{obj} \Delta t_{i-1}^i$, но и не может стать больше чем V_{max}^{obj} .

Таким образом, скорость объекта при его движении на промежутке $P_{i-1}^w P_i^w$ лежит в диапазоне

$$\begin{aligned} \bar{V} &\in [\tilde{V}_{min} \dots \tilde{V}_{max}], \\ \tilde{V}_{max} &= \max(\tilde{V} + a_{max}^{obj} \Delta t_{i-1}^i, V_{max}^{obj}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отрезок $P_{i-2}^w P_{i-1}^w$ определяет вектор $\vec{P}$ единичной длины:

$$\vec{P} = \frac{P_{i-1}^w - P_{i-2}^w}{\|P_{i-1}^w - P_{i-2}^w\|}. \quad (1.8)$$

С учетом линейной модели движения текущие координаты объекта лежат на отрезке, начало которого – точка $P_{i-1}^w + \vec{P} \tilde{V}_{min} \Delta t_{i-1}^i$, а конец – точка $P_{i-1}^w + \vec{P} \tilde{V}_{max} \Delta t_{i-1}^i$.

Вычисляем координаты этих точек в системе координат камеры в текущий момент времени, проецируем на плоскость изображения камеры, находим координаты и размеры прямоугольника, который ограничивает эти две точки. Полученный прямоугольник можно несколько расширить, чтобы учесть возможные нелинейности в динамике движения объекта. Этот прямоугольник задает область поиска объекта на текущем кадре. Используя координаты и размеры прямоугольной рамки $rect_{i-1}$ и выражение (1.6), можно оценить примерные размеры габаритного прямоугольника, ограничивающего объект на текущем кадре.

Литература

1. Яценков В.С. Основы спутниковой навигации. Системы GPS NAVSTAR и ГЛОНАСС. М.: Горячая линия – Телеком, 2005. 272 с.
2. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Ч. I: Математические модели инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 2011. 136 с.
3. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2003. 370 с.
4. Zhang Z.A Flexible New Technique for Camera Calibration // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2000. Vol. 22, No. 11. P. 1330-1334.

5. Tsai R.Y. A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-Shelf TV Cameras and Lenses // IEEE Journal of Robotics and Automation. 1987. Vol. 3, No. 4. P. 323-344.
6. Redmon J., Farhadi A. YOLOv3: An Incremental Improvement // arXiv preprint arXiv:1804.02767. 2018.
7. Zhou X., Wang D., Krähenbühl P. CenterNet: Objects as Points // arXiv preprint arXiv:1904.07850. 2019.
8. Hartley R., Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 670 p.
9. Bradski G., Kaehler A. Learning OpenCV: Computer Vision with the OpenCV Library. Sebastopol: O'Reilly Media, Inc., 2008. 580 p.
10. National Imagery and Mapping Agency. Department of Defense World Geodetic System 1984: Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems. NIMA TR8350.2. 3rd ed. 2000.

I.A. Kuklev

National Research University of Electronic Technology (MIET)

DEVELOPMENT OF A METHOD FOR TRACKING AND CALCULATING 3D COORDINATES OF TARGET OBJECTS TAKING INTO ACCOUNT CAMERA MOVEMENT MODELS

Keywords: *UAV; 3D coordinate estimation; motion models; geometric calibration; object tracking; inertial navigation; data fusion; pinhole camera model; range calculation; Kalman filter.*

Abstract. *This article is devoted to the development of a method for tracking and calculating the three-dimensional coordinates of ground target objects from an unmanned aerial vehicle (UAV). It is assumed that the UAV is equipped with a satellite-inertial navigation system capable of obtaining position and orientation data. An extended Kalman filter should be used to integrate navigation data. The problem of calculating the 3D coordinates of an object upon its first detection in a frame is solved using a pinhole camera model and known a priori physical dimensions of the object. For subsequent tracking, a procedure for predicting the position and size change of the object in the current frame is developed. If information about the object is detected in one previous frame, the prediction is based on the maximum possible speed of the object, which allows for a reduction in the observation area. If information is available in the two previous frames, a linear motion model is used, taking into account the maximum acceleration and deceleration limits. This increases the accuracy of localizing the search and correction areas, thereby enabling the implementation of possible «drift» tracking algorithms. The proposed approach aims to reduce the computational load compared to classical methods such as the Kalman filter while maintaining tracking reliability.*

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ДИСЦИПЛИН У СТУДЕНТОВ ГУМАНИТАРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Ключевые слова: компьютерная грамотность, образование, ЕГЭ, пропедевтика, студенты.

Во время обучения студентов гуманитарных направлений подготовки многие преподаватели университетов сталкиваются с проблемой низкой компьютерной грамотности. В статье выявляются причины снижения грамотности, предлагается их классификация по месту возникновения, а также возможные пути повышения компьютерной грамотности в школе и в университетах.

XXI век, безусловно, стал эпохой информационных технологий. Компьютеризация и информатизация затронули все сферы человеческой деятельности, передовые технологии проникают в самые удаленные уголки земли. Владение современными технологиями стало неотъемлемым навыком для образованного человека.

На переходе к новому тысячелетию проблема компьютерной грамотности была весьма значительной. Люди, которые росли без домашних и рабочих компьютеров, сталкивались с необходимостью использовать инновационные технологии того времени в своей профессиональной деятельности. Адаптация сотрудников более старшего возраста к компьютеризации их привычной работы и обучение компьютерной грамотности таких работников широко освещались в ряде публикаций.

К началу 20-х годов текущего века эти трудности, казалось бы, отошли на второй план. Однако практика показывает, что вопрос компьютерной грамотности по-прежнему остается актуальным. Первокурсники гуманитарных направлений часто оказываются не готовыми активно использовать компьютеры в учебе из-за нехватки опыта работы с интерфейсами операционных систем и прикладными программами. Это проявляется в их неумении эффективно применять основные функции текстовых редакторов, электронных таблиц и средств для создания презентаций. Возникают также проблемы с установкой и настройкой операционных систем, установкой и удалением программ, а иногда даже с использованием компьютерной мыши.

Эти трудности могут привести к нежелательным последствиям, включая снижение успеваемости по предметам, требующим использования компьютера в процессе обучения, что, в свою очередь, снижает общую эффективность выполнения заданий по различным дисциплинам.

Компьютерная грамотность может рассматриваться в комплексе и как составляющая цифровой грамотности, которая, в свою очередь, описывается как совокупность следующих компетенций:

- базовое владение компьютером (умение включить-выключить, использовать самые распространенные прикладные программы и основные функции операционных систем);
- продвинутое владение компьютером (умение устанавливать аппаратные компоненты ПК, умение устанавливать и настраивать операционную систему и прикладные программы, устранять простые неисправности);
- умение критического поиска в сети (способность подвергать сомнению информацию из интернета, оценивать достоверность новостей,);
- цифровая безопасность (умение безопасно распоряжаться персональными данными, не заходить на потенциально подозрительные ресурсы, выявлять мошенников);
- инновационная открытость (способность успешно осваивать новые технологии и инновации и активно применять их в повседневной жизни).

Причины снижения компьютерной грамотности у абитуриентов и студентов гуманитарных дисциплин многообразны и могут быть схематически представлены на диаграмме (см. рис. 1).



Рис. 1. Диаграмма причин

Согласно представленной диаграмме, причины делятся на две категории: связанные с системой школьного образования и касающиеся тенденций развития информационных технологий и общества в целом.

Современное образование основывается на приоритете подготовки школьников по ограниченному набору ключевых предметов, чтобы достичь высоких результатов на ЕГЭ и выиграть бюджетные места в более престижных вузах. В результате дисциплины, не связанные с выбранными ЕГЭ, изучаются учениками во вторую очередь или вовсе исключаются из их образовательного процесса.

Компьютерная грамотность страдает больше всего у школьников, что, естественно, затрагивает и студентов, ориентирующихся на гуманитарные направления, которые не выбирают информатику как профильный предмет. В некоторых случаях школы не могут в полном объеме предложить изучение информатики из-за отсутствия подходящих кадров или необходимого оборудования. Тем не менее такие ситуации довольно редки, так как государственная поддержка в организации компьютерных классов и программы помощи молодым учителям способствуют развитию возможностей компьютерного обучения в школах.

Второй группой причин снижения компьютерной грамотности молодежи стали, парадоксальным образом, тенденции в развитии IT-отрасли и цифровых устройств. Широкое распространение смартфонов и планшетов, которые могут выполнять функции персональных компьютеров, снижает потребность в домашних ПК, как показывает рынок. В результате компьютер уходит из повседневной жизни, что сказывается на уровне бытовой компьютерной грамотности.

ПК и ноутбуки становятся инструментами для работы, для развлечений все чаще используются игровые консоли, а мобильные устройства берут на себя выполнение повседневных задач. Их интерфейсы значительно отличаются от интерфейсов ПК, что приводит к трудностям для старшеклассников и студентов, не имевших практики с компьютерами.

Проблема снижения компьютерной грамотности, которая проявляется в последние 3–5 лет, очевидно, будет углубляться, так как рынок IT продолжает развиваться в том же направлении, а изменения в школьной системе не способны полностью восполнить недостаток навыков в использовании и настройке ПК. Поэтому для решения данной проблемы требуется комплексный подход, который можно изобразить в виде дерева решений (см. рис. 2).

Решение проблемы может быть достигнуто путем как совершенствования системы школьного образования, так и модификации подхода к повышению компьютерной грамотности студентов гуманитарных специальностей в вузах. В школьной программе могут быть увеличены часы, отведенные на изучение компьютеров, начиная с аппаратной части, их спецификации, установки и настройки. Навыки работы с современными операционными

системами и офисными программами должны выглядеть актуальными. Более активное использование компьютеров в других учебных дисциплинах, не связанных с информатикой, также может помочь, если будут включены задания, требующие работы на ПК и выполняемые в специализированных классах.



Рис. 2. Дерево решений

Университеты могли бы предлагать школьникам различных возрастов курсы для приобретения базовых навыков работы на компьютерах. Также стоит рассмотреть возможность введения элективных курсов по компьютерной грамотности. В базовый курс информатики для студентов первого или второго года обучения можно добавить темы, касающиеся основ компьютерной грамотности, которые могут быть как обязательными, так и расставляющими дополнительные акценты.

Также необходимо отметить, что в последние пять лет студенты в процессе обучения стали активно использовать искусственный интеллект. Ранее этим инструментом пользовались в основном хорошо разбирающиеся в особенностях его работы специалисты и учащиеся профильных направлений. Но с развитием нейросетей их доступность и простота использования стала привлекать все более и более широкий круг лиц, включая студентов гуманитарных направлений. Нейросетевой искусственный интеллект применяется студентами не только для решения конкретных задач и поиска ответа на вопросы, например, тестов. Совершенствование генеративных нейросетей дало возможность студентам обращаться за помощью к ИИ для решения творческих задач кейсового типа, написания эссе и рефератов, компьютерных программ и выполнения иных заданий, не предусматривающих единого готового ответа.

Исходя из вышесказанного, можно увидеть серьезную проблему возможного снижения качества образования, так как студенты

постепенно привыкают полагаться на нейросети не только как на помощника в поиске и обработке информации, но и как на поставщика готовых решений. С одной стороны, качество этих готовых решений во многих случаях вызывает сомнение, а с другой – даже в случае корректного выполнения нейросетью условий задания нивелирует личный вклад студента в работу. Проверка сделанных при помощи искусственного интеллекта заданий преподавателем также требует больше времени для выяснения вклада непосредственно сдающего работу студента.

Кроме того, студенты, использующие нейросети, часто не обладают навыками правильного их использования, не могут адекватно сформулировать запрос и, не обладая достаточным уровнем такого компонента цифровой грамотности, как критическое мышление, не в состоянии проверить достоверность и релевантность полученных результатов.

В целом использование нейросетей в учебном процессе – вопрос до сих пор дискуссионный, требующий отдельного рассмотрения.

Специфика обучения студентов гуманитарных направлений предполагает более широкое по сравнению с техническими направлениями использование заданий с открытым ответом, кейс-методов, проектных заданий, интегрирующих знания и умения, полученные в ходе предшествующего изучения различных дисциплин. Все это обуславливает большую востребованность аналитических качеств и критического мышления для учащихся этих направлений, а следовательно, и формирование соответствующих цифровых компетенций.

Централизованный подход к решению проблемы развития цифровых компетенций будет более уместен для первого этапа решения проблемы повышения цифровой грамотности у студентов-гуманитариев, но следующим шагом, несомненно, должна стать индивидуализация подхода к каждому обучающемуся. Уровень цифровой грамотности у каждого выпускника школы разный, он сильно варьируется и зависит от среды, в которой обучался будущий студент. Следовательно, нельзя ограничиваться общими методами – необходимо в ходе тестирований выявить уровень грамотности каждого студента и при необходимости провести индивидуализацию образовательной траектории.

Методика, позволяющая решить обозначенные в статье проблемы, все еще находится в стадии разработки, окончательное формирование ее в соответствии с системным подходом не завершено, но отдельные подходы, приемы и решения собраны в комплекс методов, находящийся в стадии апробации.

Комплекс методов был опробован в ходе обучения дисциплине «Информатика» студентов первого курса направления подготовки

«Менеджмент» в осеннем семестре 2025–2026 учебного года. Теоретические навыки критического поиска информации, защиты информации, базовые знания об использовании нейросетей в совокупности с индивидуальным подходом к заданиям лабораторных работ позволили повысить уровень подготовки тех студентов, у которых в прошлом могли возникнуть проблемы с выполнением практических заданий курса. Текущая успеваемость улучшилась, в то же время говорить об общем повышении баллов по дисциплине можно будет после завершения зачетной сессии.

Предложенные методы повышения компьютерной грамотности студентов гуманитарных направлений не являются исчерпывающими, поскольку информационные технологии продолжают развиваться и все чаще появляются новые методы обучения и образовательные подходы. Тем не менее, предложенные направления могут помочь если не полностью решить проблему, то, по крайней мере, повысить уровень компьютерной грамотности у студентов этой группы, а также их эффективность в качестве будущих специалистов.

Литература

1. Чичканова Н.Л. Некоторые особенности преподавания информатики в условиях современной школы // Вестник науки. 2024. № 9 (78). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/nekotorye-osobennosti-prepodavaniya-informatiki-v-usloviyah-sovremennoy-shkoly> (дата обращения: 05.02.2026).
2. Андреа А. Сесса. Компьютерная грамотность и «Общая картина», касающаяся компьютеров в математическом образовании // Журнал математического мышления и обучения. 2018. Т. 20. С. 3-31.
3. Пойнтон Н, Тимоти А. Компьютерная грамотность на протяжении всей жизни: обзор, имеющий значение для педагогов. // Компьютеры в поведении человека. 2005. С. 5-25.
4. Почти свободное падение: продажи ПК и ноутбуков снижаются гораздо быстрее прогнозов аналитиков. URL: <https://habr.com/ru/companies/selectel/articles/709870/> (дата обращения: 10.02.26).
5. Падение на мировом рынке ПК продолжается. URL: <https://www.itbestsellers.ru/statistics/detail.php?ID=54268> (дата обращения: 11.02.26).

S.S. Lupin

National Research University of Electronic Technology (MIET)

FAETURES OF TEACHING COMPUTER DISCIPLINES TO STUDENTS OF HUMANITIES.

Keywords: *computer literacy, education, teaching, USE (uniform state exam), students.*

Abstract. *Many university instructors face the challenge of low computer literacy when teaching humanities students. This article identifies the causes of this decline, classifies them by origin, and explores possible ways to improve computer literacy in schools and universities.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ КАЛЬКУЛЯТОРОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Ключевые слова: *GeoGebra, математическая модель, математическое программирование.*

Статья посвящена описанию графического метода решения задач математического программирования, реализуемого с помощью графического онлайн-калькулятора GeoGebra. Обосновывается целесообразность подробного изучения графического метода, а также приводятся преимущества использования GeoGebra перед решением «вручную». Рассматривается конкретный пример, решенный с помощью GeoGebra.

Задачи математического программирования являются важной частью изучения многих дисциплин, например, «Линейные модели в экономике» для направления подготовки «01.03.02 Прикладная математика и информатика» или «Математическое моделирование» для «09.03.03 Прикладная информатика». Наиболее подробно при этом разбираются задачи линейного программирования. Это происходит в силу нескольких причин: во-первых, линейное программирование позволяет моделировать множество реальных процессов (задача о распределении ресурсов, транспортная задача, задача об оптимальном раскрое); во-вторых, многие свойства более сложных задач (целочисленное программирование, выпуклое программирование) выводятся из теории линейного программирования; в-третьих, для этих задач разработаны эффективные алгоритмы, которые находят оптимальное решение за конечное число шагов (или доказывают, что его нет).

Существует ряд методов решения задач линейного программирования: графический метод, симплекс-метод, методы для специальных задач, например метод потенциалов для транспортной задачи, и многие другие. Для автоматических расчетов применяются MS Excel (надстройка «Поиск решения»), системы компьютерной математики (Mathcad, MATLAB, Wolfram Mathematica) и языки программирования, например Python с библиотеками Sci/PuLP.

Освоение графического метода является важным этапом изучения линейного программирования. Это метод максимальной визуализации.

Он наглядно показывает, что такое область допустимых решений (ОДР); линии графиков демонстрируют, как каждое условие влияет на ОДР; становится более понятно, почему оптимальное решение всегда находится в одной из вершин многоугольника решений. Также на графике гораздо проще увидеть особенность некоторых нестандартных ситуаций, например, когда опорная прямая совпадает с одной из сторон ОДР (при этом получается целый отрезок оптимальных решений). Кроме того, при анализе модели на чувствительность графическим методом наглядно видно, почему какие-то ограничения – связывающие, а те или иные ресурсы – дефицитные; как меняется ОДР при изменении запасов ресурсов; в каких пределах можно менять коэффициенты целевой функции, чтобы при этом оптимальное решение осталось неизменным.

Таким образом, графический подход незаменим для понимания сути процесса решения задач линейного программирования.

Безусловно, можно (и даже полезно) начинать обучение графическому методу с решения задач «вручную», строя ОДР и линию уровня, а также опорную прямую на бумаге. Однако для рассмотрения большого количества примеров это неудобно: построение графиков занимает время; в случае неудачного выбора масштаба может пострадать точность. Поэтому после нескольких примеров, решенных «вручную», целесообразно перейти к использованию каких-либо графических калькуляторов, например, таких, как GeoGebra или Desmos, с помощью которых легко строятся графики функций и уравнений.

Одним из наиболее доступных графических онлайн-калькуляторов является GeoGebra. Это бесплатная кроссплатформенная математическая программа, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику.

Рассмотрим алгоритм решения задачи линейного программирования с использованием GeoGebra и проиллюстрируем его на конкретном примере.

Пример. Решить задачу линейного программирования (см. [1, с. 7]):

$$x, y - ?$$

$$\begin{cases} 6x + 4y \leq 24, \\ x + 2y \leq 6, \\ -x + y \leq 1, \\ y \leq 2, \\ x \geq 0, y \geq 0; \end{cases}$$

$$z = 5x + 4y \rightarrow \max.$$

Решение. Вместо того, чтобы строить каждую прямую отдельно, в GeoGebra можно задать всю систему сразу, используя оператор И (&).

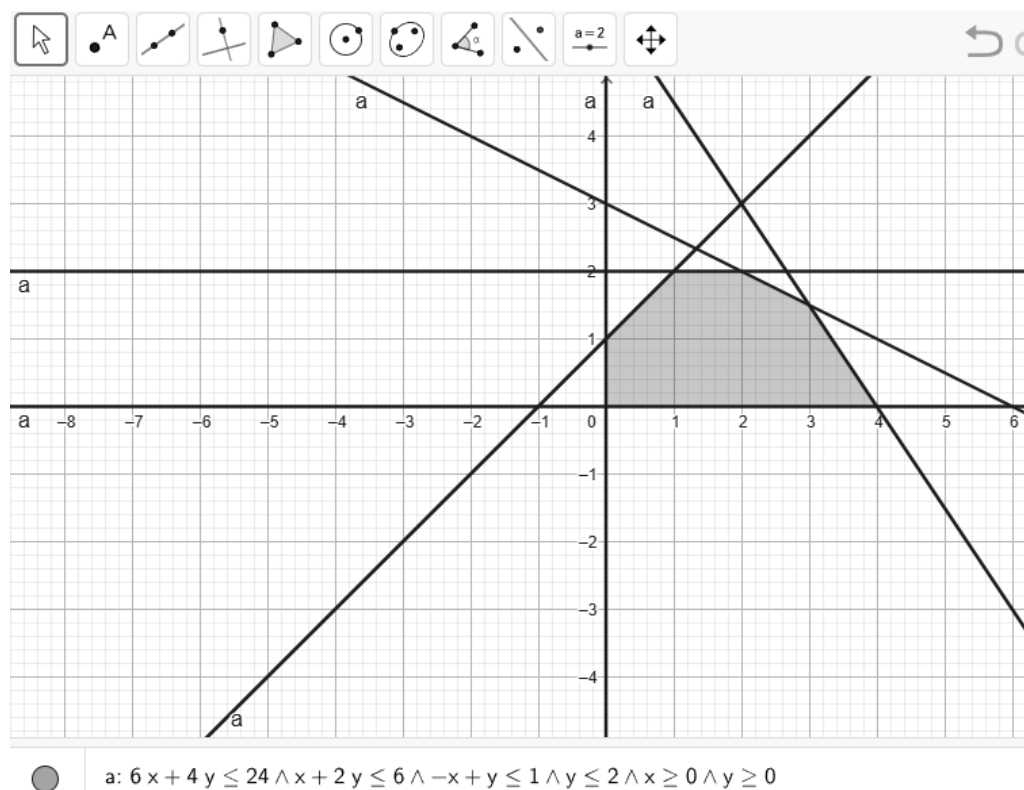


Рис. 1

В результате программа закрасила многоугольник, который является пересечением всех полуплоскостей. Это и есть ОДР (рис. 1).

Далее построим линию уровня и визуализируем ее передвижение до нужной опорной прямой. Для этого приравняем $5x + 4y$ к параметру t , при этом GeoGebra автоматически создает ползунок, передвигая который можно показать положение нужной опорной прямой. Иногда при этом необходимо поменять встроенные пределы ползунка. Обычно при появлении они равны -5 и 5 . В нашей задаче достаточно выбрать верхний предел равным 25 , и тогда линия уровня свободно двигается, выходя за границу ОДР.

В GeoGebra можно создать вектор градиента, показывающий направление максимального роста функции. Это помогает выбрать нужную опорную прямую (см. рис. 2).

Отметим, что координаты точки оптимального решения легко находятся с помощью встроенной функции Пересечение.

Используя ее, получаем результат:

$$x = 3; \quad y = 1,5; \quad z_{\max} = 21.$$

Таким образом, применение GeoGebra позволило быстро и эффективно решить пример. Кроме того, при необходимости можно почти мгновенно перестроить ОДР, поменяв неравенства в командной строке.

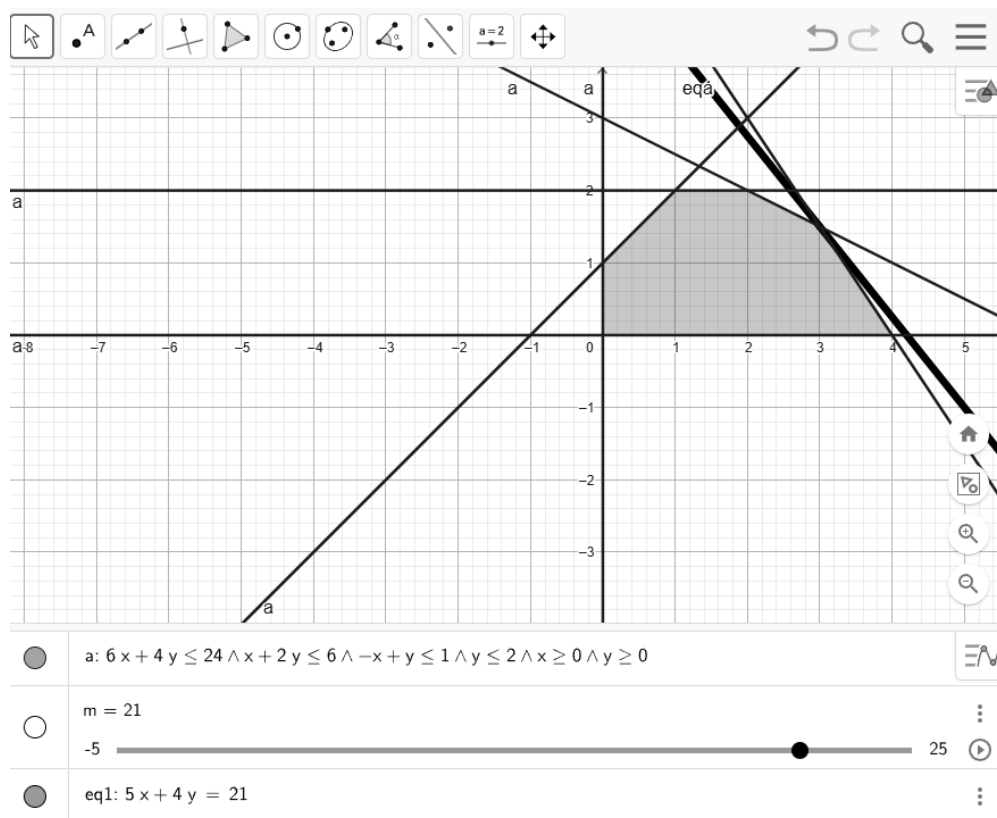


Рис. 2

В целом графические калькуляторы снимают вычислительную нагрузку, позволяя сфокусироваться на анализе, и поэтому они так полезны в обучении математическому программированию.

Литература

1. Ксенофонтов С.А., Перельман Н.Р. Методы оптимальных решений: учебно-методическое пособие. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. 97 с.

N.R. Perelman

Smolensk State University

USING GRAPHICAL CALCULATORS IN TEACHING MATHEMATICAL PROGRAMMING

Keywords: *GeoGebra, mathematical model, mathematical programming.*

Abstract. *This article describes a graphical method for solving mathematical programming problems using the GeoGebra online graphical calculator. The rationale for a detailed study of the graphical method is justified, and the advantages of using GeoGebra over manual solution are discussed. A specific example solved using GeoGebra is also discussed.*

**НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
ПРИ ОБУЧЕНИИ ЛЮДЕЙ С КОНСЕРВАТИВНЫМ
ИЛИ РИГИДНЫМ МЫШЛЕНИЕМ.
ВОЗМОЖНОСТИ, ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ**

Ключевые слова: когнитивная ригидность, низкая толерантность к ригидности, лучевая терапия, цифровые технологии, молодые специалисты, опытные сотрудники.

В статье представлены результаты лонгитюдного исследования по преодолению когнитивной ригидности у специалистов лучевой терапии. На первом этапе студенты обучались с использованием цифровых технологий. На втором – выпускники экспериментальной группы, ставшие молодыми специалистами онкодиспансера, наблюдались в профессиональной среде, что позволило выявить феномен низкой толерантности к ригидности у опытных сотрудников. Для решения проблемы применён цифровой инструментарий, основанный на структурировании данных. В ходе двухмесячного эксперимента по внедрению стереотаксической лучевой терапии сравнивались результаты молодых и опытных специалистов. Установлено, что предложенный метод сократил время освоения материала опытными сотрудниками и нивелировал у них низкую толерантность к когнитивной ригидности. Дополнительным эффектом стало распространение подхода на самообразование молодых специалистов.

Когнитивная ригидность – вызов современному профессионалу.

Человек с ригидным мышлением – это не просто тот, кто медленно учится. В психологии когнитивная ригидность обозначает негибкость познавательных процессов, неспособность своевременно перестраивать привычные стратегии решения задач, трудность в принятии новых концепций и смене устоявшихся взглядов. Это качество, действительно, нередко усиливается с возрастом и становится серьёзным барьером на пути освоения новых знаний и технологий.

Настоящая статья является продолжением (второй частью) работы [1], где мы рассмотрели экспериментальную группу студентов, которые осваивали образовательную программу с использованием современных технологий, включая облачные ресурсы и персонализированный подход. Все участники успешно завершили обучение и вышли в

профессиональную жизнь, вооружённые приобретённым багажом знаний. Многие из них разошлись по просторам нашей страны, однако часть экспериментальной группы продолжила свой путь в стенах учреждения УЗ «Могилёвский онкологический диспансер». Это обстоятельство открыло уникальную возможность для наблюдения: мы получили шанс проследить профессиональную судьбу наших подопечных, зафиксировать новые закономерности и в конечном счёте приступить к написанию настоящей статьи, которая, как уже отмечено выше, является продолжением [1].

Сегодня вчерашние студенты – уже полноправные коллеги, успешно реализующие себя в профессии в статусе молодых специалистов. «Молодая кровь», – с долей одобрительной ностальгии говорят о них старшие товарищи, подчёркивая тем самым приток свежих сил в профессиональную среду.

Работа в области лучевой терапии предъявляет особые требования к интеллектуальному аппарату человека. Здесь необходимы не только фундаментальные знания, но и подлинная гибкость мышления, цепкость ума, способность стремительно усваивать значительные объёмы постоянно обновляющейся информации. Эта сфера неизменно находится на острие технологического прогресса: сложные математические модели, расчёты поглощённых доз, периоды полураспада радионуклидов, формулы, требующие безупречной точности, – всё это держит специалиста в состоянии интеллектуального тонуса, не позволяя расслабляться ни на минуту.

Сравнивая молодых амбициозных сотрудников с их опытными коллегами, нельзя не заметить любопытную закономерность: возраст и стаж далеко не всегда гарантируют преимущество. В ситуациях, когда возникает новая, прежде не встречавшаяся задача, не имеющая готового алгоритма решения, молодой специалист нередко оказывается проворнее. Он легче переключается между разноплановыми темами, оперативно находит необходимую информацию в сети, не стесняется обращаться за советом к коллегам. Опытный сотрудник, напротив, затрачивает больше времени и когнитивных ресурсов на освоение нового материала. Однако благодаря накопленному багажу знаний и профессиональной интуиции впоследствии он допускает меньше ошибок, страхуя результат своей въедливостью и пониманием нюансов.

Любопытный психологический феномен возникает в тех случаях, когда молодой специалист справляется с задачей раньше старшего. У опытного сотрудника нередко развивается состояние скрытой фрустрации. Внешне он сохраняет невозмутимость, но внутреннее напряжение выдаёт борьбу самолюбия с объективной реальностью. Возраст и стаж перестают быть неоспоримым преимуществом, а время, как выясняется, иногда играет против нас. Этот внутренний дискомфорт,

вызванный осознанием временного превосходства менее искушённого коллеги, представляет собой интересный феномен, требующий отдельного осмысления.

Наблюдаемая картина побудила нас к формулировке исследовательского вопроса: существует ли возможность целенаправленного воздействия на низкую толерантность к ригидности мышления у специалистов старшего возраста? Иными словами, можно ли направить внутреннее неприятие собственной негибкости в конструктивное русло, пробудив дух здорового соперничества и позволив опытному сотруднику, опираясь на накопленные знания, успешно взаимодействовать (или конкурировать) с молодыми специалистами, чьё обучение изначально строилось на базе информационных технологий?

Для решения поставленной задачи мы вновь обратились к информационным технологиям, но на этот раз – более узконаправленного действия. Современные цифровые инструменты позволяют эффективно структурировать большие объёмы данных, анализировать их и представлять в форме, удобной для восприятия. Именно этой возможностью мы и решили воспользоваться. На первом этапе мы выявили у наших коллег проблемные вопросы, для решения которых требовалось изучение значительного объёма новой информации. Однако в процессе подготовки выяснилось, что глубокий, всесторонний анализ материала не всегда обязателен: зачастую для выполнения конкретной задачи достаточно поверхностного, но структурированного понимания темы. В связи с этим пятеро сотрудников были зарегистрированы на специализированных образовательных платформах, функционал которых позволяет не только анализировать данные и выстраивать логические связи, но и, что особенно важно, представлять информацию в наглядной форме – в виде логических таблиц и схем. Такой подход позволил участникам эксперимента сосредоточиться на ключевых аспектах и внутренней логике изучаемого материала, а не на механическом запоминании деталей. В результате время усвоения новой информации сократилось, а старшее поколение получило возможность обрабатывать её с лёгкостью, сопоставимой с уровнем молодых специалистов.

Для чистоты эксперимента была выбрана методика стереотаксической лучевой терапии, которая на момент начала исследования ещё не применялась в нашем учреждении. Перед двумя группами – бывшими студентами (участниками первой части исследования, описанного в [1]) и опытными сотрудниками – была поставлена задача: изучить данный метод, внедрить его в практику и допустить при этом наименьшее количество ошибок. Срок эксперимента составил два месяца. Первая группа (молодые специалисты)

использовала привычный для них способ получения информации, сформировавшийся ещё в университетские годы. Вторая группа (опытные сотрудники) применила новый подход, основанный на работе со структурированными данными и логическими таблицами, описанными выше.

Спустя два месяца результаты оказались весьма показательными. Обе группы успешно справились с поставленной задачей. Однако между ними обнаружилось принципиальное различие. Первая группа овладела необходимыми данными для проведения сеанса лучевой терапии и успешно применяла их в стандартных ситуациях, но глубина понимания материала оставалась ограниченной. В сложных, нестандартных случаях молодым специалистам требовалось дополнительное время на анализ и изучение новых источников. Вторая группа, напротив, благодаря сформированным логическим связям и умению анализировать данные в сложных клинических ситуациях ориентировалась значительно легче и быстрее. Опытные сотрудники решали задачи без необходимости обращаться к дополнительным источникам, что в условиях реальной клинической практики играет решающую роль. Примечательно, что по завершении эксперимента у опытных сотрудников не осталось и следа от прежней низкой толерантности к собственной когнитивной ригидности. Исчезло внутреннее напряжение, связанное с осознанием своей негибкости, уступив место уверенности и интересу к дальнейшему освоению нового. Соревновательный и увлекательный подход к изучению материала, изложенный в [1] (при работе со студентами), сработал и здесь – но уже в отношении старшего поколения.

На сегодняшний день мы можем с гордостью констатировать: благодаря внедрению новых цифровых технологий наше учреждение не только получило инструмент, позволяющий опытным сотрудникам эффективно обрабатывать большие объёмы данных, но и смогло внедрить современные методики лечения, ранее недоступные. Это, в свою очередь, позволило обеспечить множество пациентов качественной и квалифицированной медицинской помощью.

Наибольший интерес вызывает тот факт, что эксперимент оказался настолько успешным, что некоторые молодые сотрудники, вдохновившись увиденным, решили применить этот же метод для изучения иностранного языка. Таким образом, предложенный подход не только решил исходную задачу, но и породил новый, неожиданный вектор саморазвития среди коллег.

Литература

1. Розенков П.Е. Новые информационные технологии в образовании. Возможности, проблемы и пути их решения // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2025. Вып. 26. С. 358–363.

2. Васильева Е.Ю., Макарова М.В. Мотивы включения и факторы успешности научно-исследовательской работы врачей // Педагогика и психология образования. 2017. № 3. С. 72–79.
3. Бирюкова Т.Ю. Особенности организации обучения с помощью информационных технологий // Опыт создания и реализации технологических инноваций в образовании: сб. тр. конф. 2020. С. 24–28.
4. Когнитивные нарушения и состояние глиальных клеток мозга в отдаленный период после гамма-облучения головы мышей / А.С. Жирник [и др.] // Медицинская радиология и радиационная безопасность. 2022. Т. 67, № 5. С. 18–23.
5. Москвичева Л.И., Медведев С.В., Болотина Л.В. Возможности современной лучевой терапии у больных раком поджелудочной железы // Медицинская радиология и радиационная безопасность. 2022. Т. 67, № 5. С. 52–58.
6. Сравнительная характеристика креативности студентов-педиатров и студентов-психологов образования / Т.Ю. Удалова [и др.] // Личность в меняющемся мире: здоровье, адаптация, развитие. 2021. Т. 9, № 2(33). С. 183–191.
7. Осин Е.Н. От редакции: Ясность – сестра цитирования: немного об искусстве аннотации // Организационная психология. 2013. Т. 3, № 1. С. 2–7.
8. Laack N.N., Brown P.D. Cognitive sequelae of brain radiation in adults // Seminars in Oncology. 2004. Vol. 31, № 5. P. 702–713.

P.E. Rozhenkov

Mogilev Regional Oncology Dispensary

NEW INFORMATION TECHNOLOGIES IN TEACHING PEOPLE WITH CONSERVATIVE OR RIGID THINKING. OPPORTUNITIES, CHALLENGES AND SOLUTIONS

Keywords: *cognitive rigidity, low tolerance to rigidity, radiation therapy, digital technologies, young specialists, experienced employees.*

Abstract. *The article presents the results of a longitudinal study on overcoming cognitive rigidity of radiation therapy field specialists. At the first stage, students were trained using digital technologies. At the second stage, graduates of the experimental group, who became young specialists of Mogilev Regional oncological centre, were observed in a professional environment, which revealed the phenomenon of low tolerance to rigidity among experienced employees. To address the problem, digital tools based on data structuring were applied. During a two-month experiment on the implementation of stereotactic radiation therapy, the results of young and experienced specialists were compared. It was found that the proposed method reduced the time required for experienced staff to master new material and eliminated their low tolerance to cognitive rigidity. An additional effect was the extension of this approach to the self-education of young specialists.*

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПЛАТФОРМ УЧЕНИКАМИ, СТУДЕНТАМИ И УЧИТЕЛЯМИ

Ключевые слова: образовательные платформы, преимущества и недостатки, образовательные потребности, особенности применения, предпочтения пользователей.

Статья посвящена анализу особенностей применения образовательных платформ студентами бакалавриата направления «Педагогическое образование» на примере физико-математического факультета Смоленского государственного университета, а также учителями и школьниками. Выявляются различия в выборе и оценивании преимуществ и недостатков образовательных платформ учениками, студентами и учителями. Делается вывод о необходимости совершенствования образовательных платформ для удовлетворения индивидуальных запросов обучающихся и педагогов.

В условиях цифровой трансформации образования становится актуальной проблема использования образовательных платформ студентами, учениками и учителями [1–3]. Насколько востребованы образовательные платформы, соответствуют ли они потребностям школьников, будущих педагогов и учителей?

Будем исходить из того, что цифровая образовательная платформа – интегрированная система программного обеспечения и аппаратных средств, обеспечивающая сбор, обработку и анализ больших объемов данных в образовании, а также предоставляющая доступ к различным сервисам и приложениям, востребованным в образовании. Широкий спектр различных образовательных платформ, применяемых в образовании (РЭШ – Российская электронная школа, МЭШ – Московская электронная школа, Моя школа, Якласс, Учи.ру, Яндекс.Школа, Сферум, Фоксфорд и др.). Практика их применения в образовательных организациях выявляет разнообразие предпочтений платформ обучающимися и педагогами, связанное с их различными потребностями в образовании.

Для выявления особенностей применения образовательных платформ обучающимися и педагогами нами проведен опрос студентов бакалавриата направления «Педагогическое образование» на 3–5 курсах физико-математического факультета Смоленского государственного

университета (профили «Математика и информатика», «Физика и информатика»), а также обучающихся и учителей школ г. Смоленска (МБОУ СОШ № 6, 26, 27, 29, 34, 40).

Диаграмма 1

Предпочтения учителей в выборе образовательных платформ

В процессе обучения вы предпочитаете использовать:

24 ответа

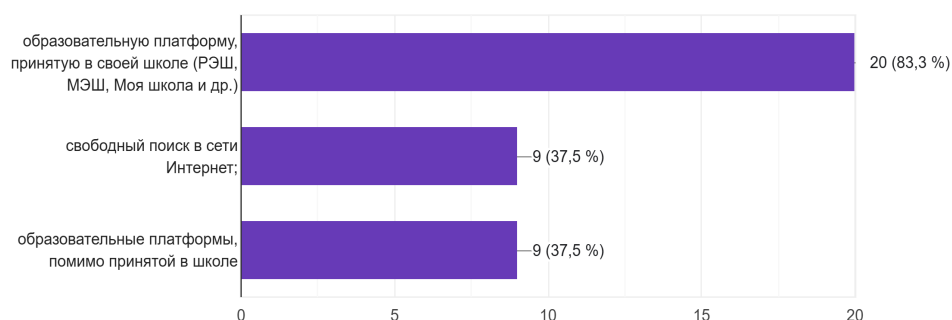


Диаграмма 2

Предпочтения школьников в выборе образовательных платформ

В процессе обучения вы предпочитаете использовать:

191 ответ

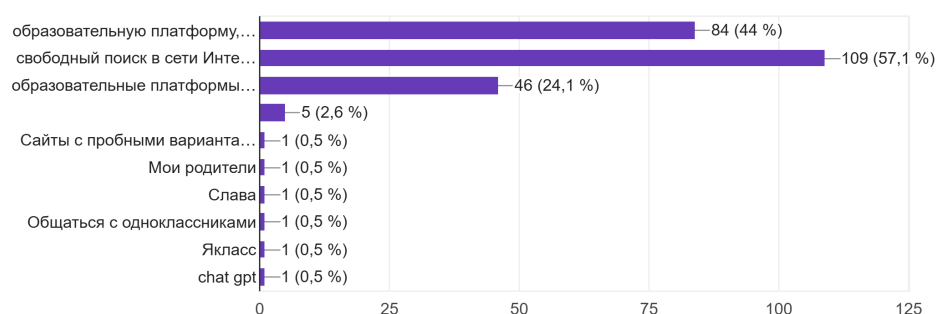
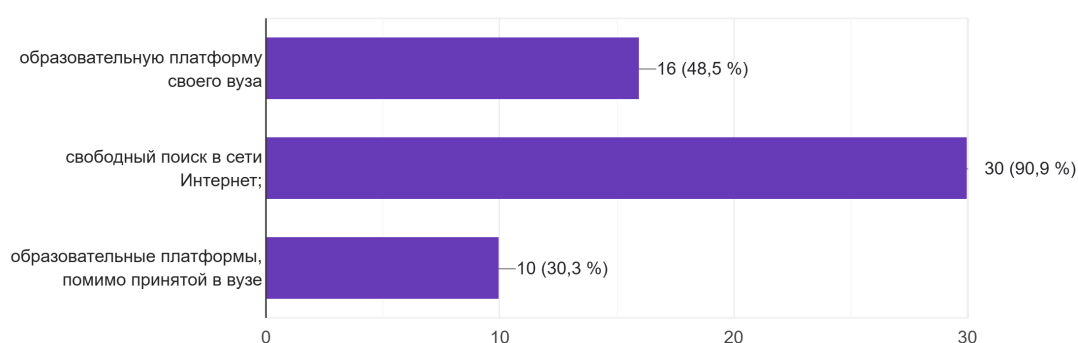


Диаграмма 3

Предпочтения студентов в выборе образовательных платформ

В процессе обучения вы предпочитаете использовать:

33 ответа



Результаты исследования подтверждают различные предпочтения в выборе образовательных платформ опрашиваемыми группами респондентов. Так, при ответе на вопрос: «Какие платформы вы предпочитаете использовать?» – мы получили следующие результаты (см. диаграммы 1–3).

Большинство учителей (83,3%), в отличие от школьников (44%) и студентов (48,5%), выбирают образовательную платформу, принятую (рекомендованную) в их школе.

Ответы на вопрос: «Укажите, какую из используемых вами образовательных платформ вы считаете наиболее предпочтительной?» (см. диаграмму 4, таблицы 1 и 2) примечательны тем, что в ответах учителей мы видим расхождение с предшествующим выбором рекомендованных школой платформ. Наиболее предпочтительны для них другие платформы: Учи.ру, Якласс. Здесь, по-видимому, сказывается то, что рекомендованные платформы (РЭШ, Моя школа) не в полной мере удовлетворяют требованиям учителей, в частности, к подготовке к ЕГЭ, автоматизированному подбору заданий для разных учеников и др.

Диаграмма 4

Наиболее предпочтительные платформы для учителей

Укажите, какую из используемых вами образовательных платформ вы считаете наиболее предпочтительной?

19 ответов

- Рэш
- Рэш
- Якласс
- Лекта
- Предпочитаю несколько
- Совершенного варианта нет пока
- Учи. ру
- Учи.ру
- Учи.ру, ЯКласс
- Учи.ру, Моя школа
- Моя школа
- ЯКласс
- Учи.ру. ЯКласс

Таблица 1

Наиболее предпочтительные платформы для студентов

Название платформы (сайта)	Процент выбравших (%)
Не знаю	40,9
Moodle	22,7

Название платформы (сайта)	Процент выбравших (%)
Stepik	13,6
Google	4,6
YouTube	4,6
Юрайт	4,6
Студфайл	4,6
Skysmart	4,6

Студенты также дают расхождения с предшествующими ответами. Если изначально почти половина респондентов ответили, что выбирают платформу, рекомендованную вузом, то наиболее предпочтительной считают эту платформу лишь 22,7%, а 40,9% не могут определиться (табл. 1). Остальные студенты выбирают платформы весьма произвольно. То есть и здесь можно сделать вывод, что не существует образовательной платформы, которая удовлетворяет образовательные запросы большинства студентов.

Школьники весьма разнообразно ответили на вопрос о выборе наиболее предпочтительной платформы (см. табл. 2), тем самым подтверждая, что на сегодняшний день ни одна из существующих платформ не способна выстраивать индивидуальный образовательный маршрут обучающегося в соответствии с его запросами.

Таблица 2

Наиболее предпочтительные платформы для школьников

Название платформы (сайта)	Процент выбравших (%)
РЭШ	11,9%
Учи.ру	11,9%
Свободный поиск в интернете (Яндекс, Google и др.)	10,7%
Не пользуюсь	10,7%
Не знаю	9,5%
ЯКласс	8,3%
Сферум	6%
Умскул	4,8%
Ютуб	3,6%
Чат GPT	3,6%
Моя школа	2,4%
Фоксфорд	2,4%
Телеграм	2,4%
Решу ОГЭ	1,2%
Википедия	1,2%
Сайт Степенина	1,2%

Название платформы (сайта)	Процент выбравших (%)
Skil box	1,2%
Оксфорд	1,2%
Skysmart	1,2%
Госуслуги	1,2%
Инфоурок	1,2%
Лекторий Достоевский	1,2%
Эл. журнал	1,2%

К достоинствам образовательных платформ большинство (более 50%) респондентов относят гибкость и удобство (доступ в любое время и в любом месте, использование в своем темпе), вовлеченность за счет различных форм и методов представления материала, практически мгновенную обратную связь на основе предоставляемых тестов и заданий, возможность исправления ошибок. Менее оптимистично оценивается учителями (25,0%) и учениками (36,5%), в отличие от студентов (57,6%), персонализированный опыт обучения (возможность адаптации к потребностям пользователей).

К недостаткам образовательных платформ учителя относят обеспечение социального взаимодействия (66,7%), тогда как обучающиеся в меньшей мере относят это к недостаткам: ученики – 41,4%, студенты – 42,4%.

Необходимость самодисциплины и мотивации достаточно серьезно оценивают студенты (72,7%) и учителя (66,7%), тогда как лишь 45,5% учеников видят в этом проблему. С техническими же проблемами сталкиваются большинство учителей (70,8%) и студентов (54,5%), у учеников с этим проблем меньше (46,6%) в силу их большей адаптивности к освоению новых технологий и гаджетов. К недостаткам платформ в равной мере учителя, ученики и студенты (около 30 %) относят ограниченный практический опыт. Не все практические занятия и лабораторные работы могут быть представлены на образовательных платформах.

В целом исследование позволяет сделать вывод, что содержание, структура, предоставляемые ресурсы и сервисы существующих образовательных платформ требуют дальнейшего совершенствования с учетом появления новых технологий, позволяющих в большей мере учитывать индивидуальные запросы обучающихся и педагогов.

В связи с этим выделим следующие актуальные задачи в процессе совершенствования образовательных платформ, которые необходимо решать:

- создание, апробация новых и использование существующих цифровых платформ обучения с их коррекцией по мере выявления недостатков и недоработок;
- разработка, апробация и реализация адаптивных и интеллектуальных обучающих платформ и методик их внедрения;
- анализ образовательных данных, полученных в процессе апробации образовательных платформ, и прогнозирование результатов обучения.

Литература

1. Груздева М.Л., Феофанова Т.Д. Возможности использования цифровых платформ в образовании // Современные наукоемкие технологии. 2022. № 6. С. 104–108. URL: <https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=39208> (дата обращения: 01.03.2026).
2. Курдюмова И.М. Образовательные платформы как онлайн-продукт: особенности и преимущества применения // European research: сборник статей XXI Международной научно-практической конференции. Ч. 2. М.: Институт стратегии развития образования РАО, 2019. С. 183–186.
3. Переломов С.В. Использование цифровых образовательных платформ в образовательном процессе // Информатика и ИКТ. 2021. URL: https://урок.рф/library/ispolzovanie_tcifrovih_obrazovatelnih_platform_v_202515.html (дата обращения: 15.06.2022).

G.E. Senkina, K.M. Rasulov
Smolensk State University

A COMPARATIVE ANALYSIS OF THE USE OF EDUCATIONAL PLATFORMS BY PUPILS, STUDENTS AND TEACHERS

Keywords: *educational platforms, advantages and disadvantages, educational needs, application characteristics, user preferences*

Abstract. *This article analyzes the use of educational platforms by undergraduate students majoring in Teacher Education, using the Physics and Mathematics Faculty of Smolensk State University as an example, as well as by teachers and schoolchildren. Differences in the selection and evaluation of the advantages and disadvantages of educational platforms by students, university students, and teachers are identified. A conclusion is drawn regarding the need to improve educational platforms to meet the individual needs of students and teachers.*

**ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ СИНГУЛЯРНОСТЬ
В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ИТ-
ДИСЦИПЛИН: ОТ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РЕПРОДУКЦИИ
К ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОМУ СИМБИОЗУ С ИИ**

Ключевые слова: образовательная сингулярность, генеративный искусственный интеллект, дидактика высшей школы, цифровая трансформация образования, системы компьютерной математики (СКМ), интеллектуальный симбиоз, когнитивные навыки высокого порядка, промпт-инжиниринг, междисциплинарный синтез.

В статье исследуется радикальная трансформация дидактических моделей высшей технической школы, вызванная массовым внедрением генеративного искусственного интеллекта (ИИ) и его интеграцией с системами компьютерной математики. Автор обосновывает концепцию «образовательной сингулярности» – момента, когда традиционные репродуктивные методы обучения и контроля теряют свою эффективность ввиду автоматизации интеллектуальных операций. Предложена модель дидактического симбиоза, в которой фокус образовательного процесса смещается с алгоритмического исполнения на когнитивные навыки высокого порядка: декомпозицию задач, архитектурный синтез и критическую верификацию результатов, полученных с помощью ИИ. Рассматриваются практические сценарии адаптации учебных планов и форматов аттестации, обеспечивающие сохранение фундаментальности образования в условиях тотальной автоматизации интеллектуального труда.

1. Феномен образовательной сингулярности в точных науках

Три года массового распространения генеративного искусственного интеллекта (ИИ) окончательно стерли грань между сложной технологической инновацией и повседневной когнитивной практикой [1–2]. Для высшей школы, особенно в области математики, телекоммуникаций и ИТ, этот сдвиг означает не просто эволюцию методов, а системный кризис легитимности классических педагогических моделей [3].

Автор определяет текущий момент как *образовательную сингулярность* [4]. В технологическом дискурсе сингулярность связывают с моментом, когда ИИ превзойдет человеческий интеллект [5]. В дидактике же это критическая точка, после которой традиционные

подходы, основанные на трансляции и индивидуальной репродукции нормативного знания, теряют свою операциональную ценность [6].

Критерием наступления этой точки является фундаментальный когнитивный диссонанс: инструменты, доступные студенту вне аудитории (LLM-модели, специализированные GPT-агенты, плагины Wolfram), оказываются на порядки эффективнее для решения типовых учебных задач, чем методы, санкционированные внутри образовательного процесса. Если классическая система компьютерной математики (СКМ) – это «продвинутый калькулятор», требующий от пользователя строгого синтаксиса [7], то современный генеративный ИИ – это «активный агент», способный предлагать саму логику решения на естественном языке [8].

Пример. Требуется решить задачу по курсу случайных процессов. Студент использует сборник задач в виде файла djvu посредственного качества. Выделенную задачу он сохраняет в виде скрина (рис. 1) и загружает в одну из нейронных сетей (НС).

14.631. Ковариационная функция случайного процесса $X(t)$ задана в виде $K_X(t_1, t_2) = t_1^2 + t_1 t_2 + 2t_2^2$. Найти взаимную ковариационную функцию $K_{XY}(t_1, t_2)$ случайных процессов $X(t)$ и $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.

Рис. 1. Исходный фрагмент для НС

Сеть распознает задачу и корректирует условие (рис. 2).

Нам дано:

$$K_X(t_1, t_2) = t_1^2 + t_1 t_2 + 2t_2^2$$

и процесс

$$Y(t) = \int X(s) ds.$$

Судя по контексту, интеграл, скорее всего, определённый от 0 до t :

$$Y(t) = \int_0^t X(s) ds.$$

Рис. 2. Коррекция условия НС

Далее НС по шагам расписывает решение (рис. 3–4).

1. Взаимная ковариационная функция

По определению:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \text{cov}(X(t_1), Y(t_2)).$$

Подставим выражение для $Y(t_2)$:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \text{cov}\left(X(t_1), \int_0^{t_2} X(s) ds\right).$$

Ковариация линейна по второму аргументу, поэтому:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \text{cov}(X(t_1), X(s)) ds.$$

Но $\text{cov}(X(t_1), X(s)) = K_X(t_1, s)$.

Таким образом:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} K_X(t_1, s) ds.$$

Рис. 3. Первый шаг решения задачи НС

2. Подстановка K_X

$$K_X(t_1, s) = t_1^2 + t_1 s + 2s^2.$$

Интегрируем по s от 0 до t_2 :

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} (t_1^2 + t_1 s + 2s^2) ds.$$

Вычисляем каждый интеграл:

$$\begin{aligned} 1. \int_0^{t_2} t_1^2 ds &= t_1^2 \cdot t_2. \\ 2. \int_0^{t_2} t_1 s ds &= t_1 \cdot \frac{t_2^2}{2}. \\ 3. \int_0^{t_2} 2s^2 ds &= 2 \cdot \frac{t_2^3}{3} = \frac{2t_2^3}{3}. \end{aligned}$$

Складываем:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = t_1^2 t_2 + \frac{t_1 t_2^2}{2} + \frac{2t_2^3}{3}.$$

Рис. 4. Второй шаг решения задачи НС

И наконец, результат с замечательным комментарием относительно корректности изначальной задачи и вариативности ее восстановления (рис. 5).

Ответ:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = t_1^2 t_2 + \frac{t_1 t_2^2}{2} + \frac{2t_2^3}{3}$$

Если бы интеграл был неопределённым, задача была бы некорректна (процесс $Y(t)$ не определён). Поэтому предположили интеграл с переменным верхним пределом.

Рис. 5. Результат и комментарий НС

Этот пример показывает, что традиционная дидактика и методики преподавания оказались сломаны с появлением новых инструментов выполнения традиционных образовательных задач.

Все, что потребовалось от студента – загрузить исходный вопрос в НС и нажать ввод. Поэтому образовательный процесс меняется кардинально, что и предлагается называть образовательной сингулярностью [4].

Вершиной этого явления стало использование преподавателями ИИ для проверки студенческих работ. Как итог – один ИИ решает/пишет, другой ИИ оценивает. Каковы при этом роли студента и педагога? И какое отношение это имеет к образованию?

2. Генезис симбиоза: От калькулятора к когнитивному партнеру

Трансформация роли интеллектуальных систем в математическом образовании прошла три ключевых этапа [5].

1. *Автоматизация (1990–2000)*. Использование ИИ для проверки тестов и оптимизации рутины. Воздействие на ядро педагогики было периферийным.

2. *Адаптация (2010-е)*. Появление интеллектуальных обучающих систем и развитие СКМ (MATLAB, Maple, Wolfram Mathematica) [7]. ИИ помогал персонализировать усвоение статичного контента, но цель оставалась прежней – индивидуальное решение задач человеком.

3. *Генеративный симбиоз (текущий этап)*. ИИ становится соавтором. Студент взаимодействует не с базой данных, а с активным партнером, способным генерировать код, доказательства теорем и математические модели в диалоговом режиме.

Это меняет онтологию познания: фокус смещается с обладания информацией на управление совместной интеллектуальной работой – постановку задач, итеративное уточнение запросов (*prompt engineering*) и критическую верификацию результатов [8–9].

3. Когнитивная поляризация обучающихся

Вызов сингулярности приходит в вуз в лице нового поколения студентов, чей опыт работы с ИИ глубоко поляризован [4]. Мы выделяем три ключевые группы:

– «симбионты»: продвинутые пользователи, встроившие ИИ в свою «когнитивную архитектуру». Они не мыслят решение задачи без

ИИ-ассистентов. Их риск – атрофия базовых навыков вычисления, но их преимущество – колоссальная продуктивность;

– «*потребители*»: используют ИИ как усовершенствованную шпаргалку. Их профиль характеризуется дефицитом критической верификации: они склонны принимать «галлюцинации» ИИ за истину без перепроверки;

– «*аутсайдеры*»: студенты, сознательно или вынужденно избегающие технологий. Они обучаются по старым моделям и рискуют оказаться профессионально неконкурентоспособными уже на старте карьеры.

Задача преподавателя математики усложняется: необходимо нивелировать этот цифровой разрыв, подтягивая «аутсайдеров» и создавая содержательные вызовы для «симбионтов», переводя их активность в плоскость архитектурного проектирования.

4. Ревизия содержания: Делегирование и ядро компетенций

Если парадигма сменилась, первым шагом должен стать критический пересмотр учебных планов. Ключевой вопрос: «Что в курсе остается уникальной человеческой компетенцией, а что превращается в операцию, делегируемую машине?»

4.1. Аудит «зоны делегирования»

Проведем анализ рутинных компонентов, которые перестают быть значимыми целями обучения:

– в программировании: написание шаблонного кода, стандартных CRUD-операций, поиск тривиальных синтаксических ошибок;

– в математике: выполнение типовых расчетов, решение стандартных дифференциальных уравнений, статистическая обработка данных и базовая визуализация.

Делегирование этих операций не делает их ненужными для понимания. Напротив, фундаментальные знания становятся языком верификации [9–10]. Однако проверять их освоение через индивидуальное выполнение «вручную» – все равно что проверять умение считать в столбик на экзамене, где разрешен калькулятор. Это теряет педагогический смысл.

4.2. Новое ядро компетенций: Архитектурное мышление

Высвободившиеся ресурсы должны быть направлены на развитие компетенций высокого порядка.

1. *AI Literacy как дисциплина мышления*: способность декомпозировать сложную абстрактную проблему на последовательность контекстуализированных запросов [8].

2. *Углубленная фундаментальность*: чтобы ставить задачи ИИ в сложных областях, необходимо более глубокое, интуитивное понимание математических моделей. Фундаментальное образование становится «страховым полисом» против ошибок ИИ.

3. *Этическая и контекстуальная экспертиза*: ответственность за решения, принятые в симбиозе с ИИ, оценка социальных последствий алгоритмов [8].

5. Методологический переворот: От трансляции к фасилитации

Модель «преподаватель как первичный источник знания» уступает место модели образовательной фасилитации, где главной целью становится организация процесса совместного (человек + ИИ) познания.

5.1. Таксономия заданий «эпохи пост-ChatGPT»

Парадигма домашнего задания в классическом виде мертва. Ей на смену приходят новые форматы [1; 4]:

- «Суд над ИИ-решением»: студент получает сгенерированное ИИ решение сложной задачи, содержащее скрытую ошибку. Задача — верифицировать результат, найти «галлюцинацию» и обосновать исправление;

- «Паспортизация промптов»: оценивается не финальный ответ, а лог взаимодействия (Chain of Thought). Студент должен предоставить историю итераций, описание введенных ограничений и метод финальной проверки достоверности;

- «Оптимизация черновика»: дать студенту «грязный» код от ИИ. Задача – переписать его под строгие стандарты (например, оптимизировать по памяти или сложности), объяснив, почему ИИ не предложил это сразу.

5.2. Использование дефицитов ИИ как дидактический ресурс

Эффективным инструментом борьбы с «тупым списыванием» становится использование специфических слабостей современных LLM [1].

Логические мины: задачи, где ИИ систематически ошибается (например, модифицированные классические парадоксы или задачи с противоречивыми начальными данными).

Вычислительная точность: задания на работу с очень большими числами или специфическими краевыми случаями, где ИИ склонен к округлению.

Галлюцинации в доказательствах: просьба доказать заведомо ложное утверждение. ИИ часто конструирует убедительные на вид, но ложные логические переходы. Умение студента найти этот разрыв – высшая форма проверки знаний.

6. Кризис контроля и аутентичное оценивание

Самый острый вопрос: «Как оценивать?» Ответ – в переходе от оценки продукта к оцениванию *познавательного процесса и экспертного суждения* [4; 10].

Сдвиг фокуса на аргументацию: естественностью обладает не код, а обоснование выбора алгоритма и критический анализ ответа ИИ.

Устный Дето-экзамен: защита работы перед терминалом в реальном времени. Преподаватель меняет параметры задачи на лету – студент должен перенастроить ИИ-ассистента и объяснить результат. Это неуязвимо для прямой генерации.

7. Специфика российского контекста и СКМП

Для российской высшей школы текущий момент – это уникальное сочетание вызовов и возможностей. Сильная школа фундаментальной математической подготовки – наш главный актив. В эпоху симбиоза математика нужна не для того, чтобы заменять машину в вычислениях, а для того, чтобы иметь «язык», на котором можно ставить задачи сложным системам и нести за них ответственность [4].

Проблемы внедрения (жесткость ФГОС, нагрузка на ППС, инфраструктурные ограничения) не должны становиться поводом для запретов [3]. Реалистичный сценарий – сетевая адаптация, начинающаяся с личной инициативы преподавателей: перепроектирования одного модуля, внедрения новых форматов заданий и открытого диалога со студентами.

Заключение

Образовательная сингулярность – это не конец классического университета, а его возвращение к истокам. ИИ забирает рутину, возвращая нам миссию выращивания интеллектуально независимого специалиста. Наша задача сегодня – не столько научить пользоваться ИИ, сколько заново определить и отстоять уникальную ценность человеческого разума. Чем мощнее становятся наши инструменты, тем выше должна быть планка нашего собственного мышления.

Литература

1. Kasneci E., Seidlmayer K., et al. ChatGPT for Good? On Opportunities and Challenges of Large Language Models for Education // Learning and Individual Differences. 2023. Vol. 103. 102274.
2. Baidoo-Anu D., Ansah L.O. Education in the Era of Generative Artificial Intelligence (AI): Understanding the Potential Benefits of ChatGPT in Promoting Teaching and Learning // Journal of AI. 2023. Vol. 7, No. 1. P. 52–62.
3. Замятин А.В. Искусственный интеллект в университетском образовании: возможности и риски // Высшее образование в России. 2023. Т. 32, № 6. С. 28–45.
4. Синева И.С. Образовательная сингулярность: к новой дидактике высшей школы в условиях симбиоза с искусственным интеллектом // Методические вопросы преподавания инфокоммуникаций в высшей школе. 2026. № 1. С. 69-78.
5. Luckin R. Machine Learning and Human Intelligence: The Future of Education for the 21st Century. London: UCL Institute of Education Press, 2018. 162 p.
6. Шмелева Е.Д. Цифровая дидактика: теория, методология, практика: монография. М.: МПГУ, 2021. 218 с.
7. Дьяконов В.П. Системы компьютерной математики: учебный курс. СПб.: Питер, 2001. 624 с.
8. UNESCO. Guidance for generative AI in education and research. Paris: UNESCO, 2023. 44 p. URL: unesdoc.unesco.org.

9. Выготский Л.С. Мышление и речь. М.: Лабиринт, 1999. 352 с.
10. Блум Б.С. Таксономия образовательных целей: сфера познания / пер. с англ. М.: Педагогика, 2019. 152 с.

I.S. Sineva

Moscow technical university of communications and informatics

EDUCATIONAL SINGULARITY IN TEACHING MATHEMATICAL AND IT DISCIPLINES: FROM ALGORITHMIC REPRODUCTION TO INTELLECTUAL SYMBIOSIS WITH AI

Keywords: *educational singularity, generative artificial intelligence, higher education didactics, digital transformation of education, computer algebra systems (CAS), intellectual symbiosis, high-order cognitive skills, prompt engineering, interdisciplinary synthesis.*

Abstract. *The article explores the radical transformation of didactic models in higher technical education driven by the widespread implementation of generative artificial intelligence (AI) and its integration with computer algebra systems. The author substantiates the concept of "educational singularity" – a point where traditional reproductive methods of teaching and assessment lose their effectiveness due to the automation of intellectual operations. A model of didactic symbiosis is proposed, in which the focus of the educational process shifts from algorithmic execution to high-order cognitive skills: problem decomposition, architectural synthesis, and critical verification of AI-generated results. The paper examines practical scenarios for adapting curricula and assessment formats to ensure the preservation of educational foundations in the context of total automation of intellectual labor.*

Н.М. Тимофеева

Смоленский государственный университет

УДК 37.02

УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ЭПОХУ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ИННОВАЦИЙ: НОВЫЕ ТРЕБОВАНИЯ

Ключевые слова: *учитель математики и информатики, профессиональная подготовка, образовательные инновации, современный инновационный образовательный процесс.*

Цель статьи – выявить и систематизировать требования, предъявляемые современными образовательными трендами к готовности будущих учителей математики и информатики к инновационной деятельности. Через анализ ключевых трендов (цифровизация образовательного процесса; метапредметность и double skills; активный спрос на soft skills; практикоориентированность; индивидуальные и персонализированные образовательные треки; эдьютейнмент и геймификация) раскрывается содержание инноваций в современном образовании и конкретизируются требования к подготовке учителя математики и информатики.

Современные социальные, технологические и информационные вызовы заставляют сферу образования развиваться и реформироваться. К направлениям таких изменений относятся:

- цифровизация образовательного процесса;
- метапредметность и double skills;
- активный спрос на soft skills;
- практикоориентированность;
- индивидуальные и персонализированные образовательные треки;
- эдьютейнмент и геймификация и др.

Перечисленные направления в совокупности описывают особенности *современного инновационного образовательного процесса*, так как раскрывают комплекс происходящих в нем взаимосвязанных изменений: меняются средства организации учебного процесса (цифровые платформы и VR/AR), его цели (метапредметность, soft skills), методы (кейсы, проекты, геймификация), организация (индивидуализация и персонализированные образовательные треки) и роли основных его участников (учитель – навигатор, ученик – субъект выбора).

Реализация перечисленных трендов в образовательном процессе невозможна без специально подготовленного педагога, обладающего не только предметными знаниями, но и сформированной готовностью к инновационной деятельности, что требует пересмотра содержания и методов профессиональной подготовки. Рассмотрим подробнее суть изменений образовательного процесса, выявим, какие требования они предъявляют к подготовке будущих учителей (на примере профиля подготовки «Математика, информатика»).

Цифровизация образовательного процесса подразумевает создание гибкой образовательной среды на основе цифровых платформ и сервисов, реализующих смешанное обучение (blended learning) и персонализацию образовательных траекторий на базе Learning Analytics,

а также предполагающих активное использование интерактивного контента (симуляторов, тренажеров, VR/AR). Данный тренд ведет к изменению ролей участников образовательного процесса: учитель из источника и транслятора знаний становится организатором и навигатором в цифровом пространстве; обучающийся становится субъектом в построении собственного образовательного маршрута, от него ожидается владение цифровыми компетенциями и навыками самостоятельной и проектной деятельности. Применительно к подготовке будущего учителя математики и информатики описываемый подход требует владения цифровым инструментарием профессиональных сред (например, GeoGebra, Desmos), сред программирования (например, Scratch, Python), конструкторов интерактивных заданий и VR/AR-лабораторий. У педагога должны быть сформированы навыки педагогического дизайна в цифровой среде для создания собственных образовательных продуктов и выстраивания индивидуальных траекторий обучения на цифровых платформах [1–3].

Образовательный тренд *метапредметность и double skills* предполагает отход от узкопредметного преподавания и формирование у обучающихся универсальных компетенций (критическое мышление, работа с информацией и коммуникация). Интеграция предметных областей математики и информатики в профиле «Математика, информатика» – пример междисциплинарных взаимодополняющих компетенций учителя. Информатика в этом тандеме играет роль инструментальной основы метапредметного мышления педагога, а математика является его каркасом и языком описания реальности. Методы искусственного интеллекта, имитационное моделирование, обработка больших данных позволяют учителю строить интегрированные уроки и межпредметные проекты, органично используя современные информационные технологии как инструмент для решения прикладных задач. Математический компонент метапредметности учителя позволяет перевести практические жизненные задачи на формальный язык, выявлять закономерности, прививает привычку к строгости и доказательности [4; 5].

Тренд *активный спрос на soft skills* означает смещение фокуса с исключительно предметных знаний на универсальные личностные качества и междисциплинарные компетенции: коммуникабельность, эмоциональный интеллект, умение работать в команде, критическое мышление, креативность и адаптивность. Учитель должен понимать эмоциональное состояние обучающихся, создавать психологически комфортную среду для изучения сложных абстрактных тем, быть способен адаптировать план урока и язык изложения материала под разные аудитории, иметь навыки организации проектной и командной работы [6; 7]. Для конкурентоспособности на рынке труда педагог

должен обладать такими гибкими навыками, как обучаемость и открытость всему новому; умение быстро вникать в суть процессов; готовность воспринимать и сразу же применять новую информацию, без сопротивления и «стадии отрицания».

Способность педагога демонстрировать прикладную ценность предмета, владение проектным методом и кейс-технологиями – реализация требований образовательного тренда *практикоориентированность* [6–8] В контексте подготовки будущих учителей математики и информатики этот тренд приобретает особую значимость. Недостаточно, чтобы педагог сам умел решать задачи или писать код. Его ключевая компетенция заключается в трансформации учебного материала:

- демонстрация прикладной ценности выступает мотивационным ядром – ученик должен понимать, зачем ему изучать предлагаемый материал (перевод заданий с абстрактного языка на язык бытовых, жизненных проблем);
- кейс-технологии являются инструментом погружения (применение знаний в условиях, максимально приближенных к реальным);
- проектный метод позволяет обучающемуся пройти цикл от формулировки проблемы до создания конкретного продукта (модель, исследование).

Суть обучения по системе *«индивидуальные и персонализированные образовательные треки»* заключается в том, что для каждого обучающегося разрабатывается уникальная образовательная программа (траектория) с учетом его личных целей, особенностей, интересов [9; 10]. Конструирование образовательного процесса предполагает при этом активное участие самого обучающегося в построении своего образовательного маршрута с использованием цифровых платформ и адаптивного контента [11; 12]. Этот тренд требует от будущих учителей математики и информатики овладения:

- методами педагогической диагностики (для выявления пробелов в знаниях, когнитивного стиля ученика, его интересов и зоны ближайшего развития);
- навыками проектирования вариативного содержания (для разработки разноуровневых модулей и заданий);
- навыками работы с цифровыми платформами с адаптивным функционалом (для автоматического подбора контента под уровень ученика, назначения индивидуальных заданий и отслеживания прогресса в освоении учебного материала).

Тренд *эдьютейнмент и геймификация* представляет собой интеграцию игровых и развлекательных форматов в образовательный процесс. Этот подход повышает мотивацию и эмоциональную

включенность учащихся в обучение [13; 14]. Подача материала с помощью образовательных видео, квестов, с использованием игровых механик (баллы, рейтинги, уровни, соревновательность) превращает решение рутинных заданий в увлекательный процесс. От учителей математики и информатики этот тренд требует:

- владения навыками разработки и интеграции образовательных игр, в том числе с использованием готовых игровых платформ (например, Kahoot!, Quizlet и др.);
- способности к сторителлингу (для переформулирования абстрактной математической или алгоритмической задачи в захватывающую историю или квест, благодаря чему сложный контекст становится доступнее для эмоционального восприятия);
- развития творческого подхода и гибкости (для быстрой адаптации игровых сценариев под реакцию и уровень подготовки класса);
- сформированности дидактической рефлексии (для определения границ применимости игровых и развлекательных форматов, чтобы они не подменяли, а углубляли предметное содержание).

Перечисленные тренды выступают реакцией системы образования на запросы цифровой экономики и общества, требующие от выпускников педагогической специальности способности к саморазвитию, коммуникации и решению нестандартных задач в ситуациях, не имеющих готовых алгоритмов решения.

Литература

1. Быков А.А., Киселева О.М. Педагогические компоненты дистанционного обучения. Смоленск: Универсум, 2025. 196 с.
2. Тимофеева Н.М. О цифровизации образовательного процесса в условиях полного его переноса в онлайн // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2021. Вып. 22. С. 388-394.
3. Тимофеева Н.М., Тимофеева Т.И. Инфографика как средство цифровизации образования // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 410-415.
4. Быков А.А., Коноплев Д.Ю., Киселева О.М. Формирование метапредметных компетенций у студентов технических специальностей // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 12-1. С. 184-187.
5. Тимофеева Н.М., Киселева О.М. Некоторые аспекты формирования метапредметных образовательных результатов в дистанционном обучении математике детей с ограниченными возможностями здоровья // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 393-400.

6. Самарина А.Е., Киселева М.П., Тимофеева Н.М. Использование информационных сетевых технологий в проекте изучения культуры родного края // Учитель и время. 2016. № 11. С. 210-213.
7. Тимофеева Н.М. Разработка сетевых проектов с использованием возможностей технологии Thinglink for education // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 256-257.
8. Тимофеева Н.М. Использование метода анализа конкретных ситуаций при обучении информатике в средней школе // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. Вып. 18. С. 259-260.
9. Быков А.А., Киселева О.М. О применении элементов индивидуального обучения в дистанционной работе со студентами // Современные наукоемкие технологии. 2020. № 9. С. 106-110.
10. Козлов С.В. Система индивидуального тестирования «Комплекс измерения обученности» // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2007. Вып. 8. С. 223-225.
11. Шатохина А.А., Киселева О.М. Построение индивидуальной траектории обучения информатике для детей с ограниченными возможностями здоровья // Молодёжь и наука: актуальные проблемы педагогики и психологии. 2017. № 2. С. 235 - 239.
12. Бояринов Д.А. Педагогическое проектирование информационного образовательного пространства личностного развития учащихся // Фундаментальные исследования. 2014. № 12-2. С. 379-383.
13. Тимофеева Н.М. Оценка дидактического потенциала комиксов // Современные наукоемкие технологии. 2023. № 7. С. 203-207.
14. Тимофеева Н.М. Методические аспекты применения комиксов в образовательном процессе // Современные наукоемкие технологии. 2024. № 1. С. 145-149.

N.M. Timofeeva
Smolensk State University

TEACHER OF MATHEMATICS AND INFORMATICS IN THE ERA OF EDUCATIONAL INNOVATIONS: NEW REQUIREMENTS

Keywords: *teacher of mathematics and informatics, professional training, educational innovations, modern innovative educational process.*

Abstract. *The purpose of the article is to identify and systematize the requirements imposed by modern educational trends on the readiness of future mathematics and computer science teachers for innovative activities. Through the analysis of key trends (digitalization of the educational process; meta-subjectivity and double skills; active demand for soft skills; practice-oriented approach; individual and personalized educational tracks; edutainment and gamification), the content of innovations in modern education is revealed and the requirements for the training of a mathematics and computer science teacher are specified.*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПАКЕТЫ КАК ИНСТРУМЕНТ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Ключевые слова: пакет компьютерной математики Wolfram Mathematica; решение задач математического анализа в СКМП; математическое моделирование посредством математических пакетов.

В статье иллюстрируются возможности математического пакета компьютерной математики Wolfram Mathematica для решения задач математического анализа, преподаваемого студентам 1 и 2 курсов на физико-математическом факультете Смоленского государственного университета. Данная публикация продолжает авторский цикл, посвящённый решению задач математического анализа средствами математических пакетов.

В современный век бурного развития информационно-коммуникационных технологий, систем компьютерной математики и искусственного интеллекта процесс обучения даже таким «старым» и фундаментальным наукам, как математика (в частности, её разделу математический анализ), не может сохранить традиционный многолетний формат «доска-мел» и дополняется современными инструментами, которые позволяют визуализировать классические предметные задачи и упростить процесс их решения, что полезно для самопроверки и рационализации учебных действий.

Мы в своей образовательной деятельности в Смоленском государственном университете используем математическое моделирование в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica. Данная СКМП применяется на таких направлениях физико-математической подготовки, как «44.03.05 Педагогическое образование» (профиль «Математика и информатика»), «01.03.02 Прикладная математика и информатика» (профиль «Математическое и информационное моделирование»), «11.03.01 Радиотехника» (профиль «Радиоэлектронные системы и комплексы»). Предусмотрены как аудиторные занятия в рамках вычислительной практики, так и самостоятельная домашняя работа студентов при изучении математического анализа на 1 и 2 курсе. Охвачены такие ключевые математические задачи, как алгебраические вычисления; решение уравнений, неравенств и их систем; нахождение пределов числовых последовательностей и функций одной и нескольких переменных;

вычисление производных и частных производных различных порядков функций; поиск дифференциалов; исследование функций и построение графиков; интегрирование функции одной и нескольких переменных; исследование на сходимость числовых и функциональных рядов; решение обыкновенных дифференциальных уравнений; рассмотрение задач нелинейного программирования и другие проблемы математического анализа.

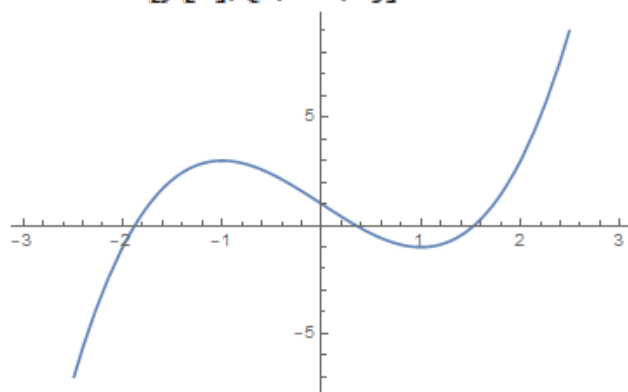
В этой статье мы приводим некоторые работы бакалавров и продолжаем цикл работ автора по заявленной тематике [1–6].

Пример 1. Найти корень уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$ на отрезке $[1; 2]$ с точностью до 0,1.

Решение.

$f[x] := x^3 - 3 * x + 1$

$G = \text{Plot}[f[x], \{x, -3, 3\}]$



$\epsilon = 0.1;$

$a = 1;$

$b = 2;$

$It = \text{List}[];$

$n = 0;$

$\text{While}[b - a \geq \epsilon, c = (a + b)/2;$

$It = \text{AppendTo}[It, \{c, 0\}]; n = n + 1;$

$\text{If}[f[c] == 0, \text{Break}[]];$

$\text{If}[f[a] * f[c] < 0, b = c, a = c];$

$\text{Print}["\text{Корень уравнения равен: ", c]$

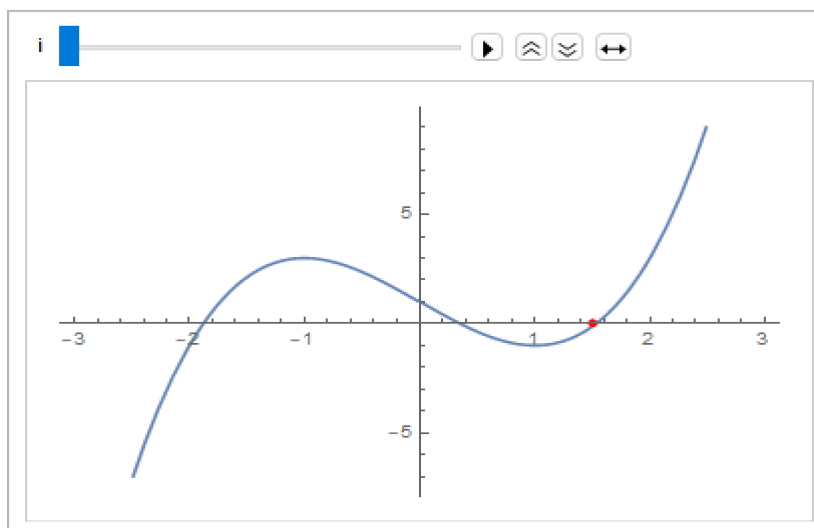
Корень уравнения равен: $\frac{25}{16}$

$\text{Print}["\text{Количество приближений равно: ", n]$

Количество приближений равно: 4

$\text{Animate}[\text{Show}[G, \text{ListPlot}[\{It[[i]]\}], \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Red}], \{i, 1, n, 1\},$

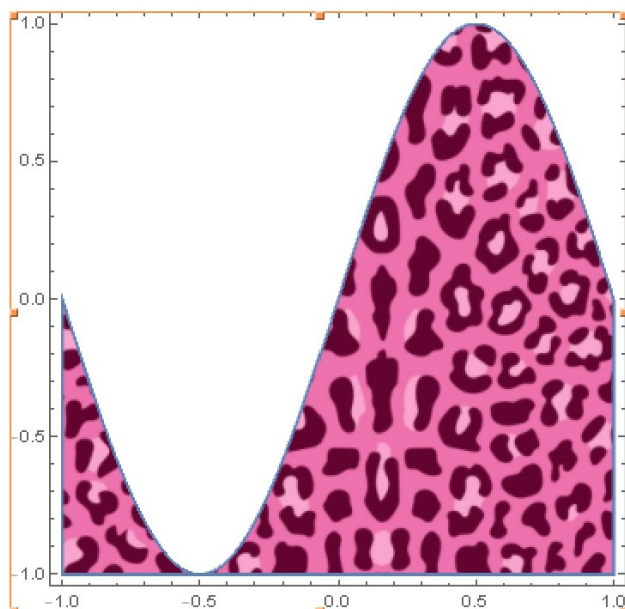
$\text{AnimationRunning} \rightarrow \text{False}]$



Пример 2. Изобразить область интегрирования и вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + y) dx dy$, $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq \sin \pi x$.

Решение.

`RegionPlot[-1 ≤ x ≤ 1 && -1 ≤ y ≤ Sin[π * x], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotStyle → Texture[`
визуализация геометрической области ... синус стиль графика текстура `]`



$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^{\sin(\pi x)} (x + y) dy dx$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$$

Пример 3. Написать уравнения касательных к кривой $f(x) = x^2 - 2x$, проходящих через точку $M(1;-5)$. Изобразить параболу и найденные касательные.

Решение.

$f[x_] := x^2 - 2 * x$

$M(1;-5);$

$k = D[f[x], x];$

$Solve[-5 - f[x] == k * (1 - x)]$

$\{\{x \rightarrow -1\}, \{x \rightarrow 3\}\}$

$f1 = f[-1];$

$f2 = D[f[x], x] /. x \rightarrow -1;$

$Print["Уравнение первой касательной: y = ", f2 * (x + 1) + f1 // Simplify]$

Уравнение первой касательной: $y = -1 - 4x$

$f3 = f[3];$

$f4 = D[f[x], x] /. x \rightarrow 3;$

$Print["Уравнение второй касательной: y = ", f4 * (x - 3) + f3 // Simplify]$

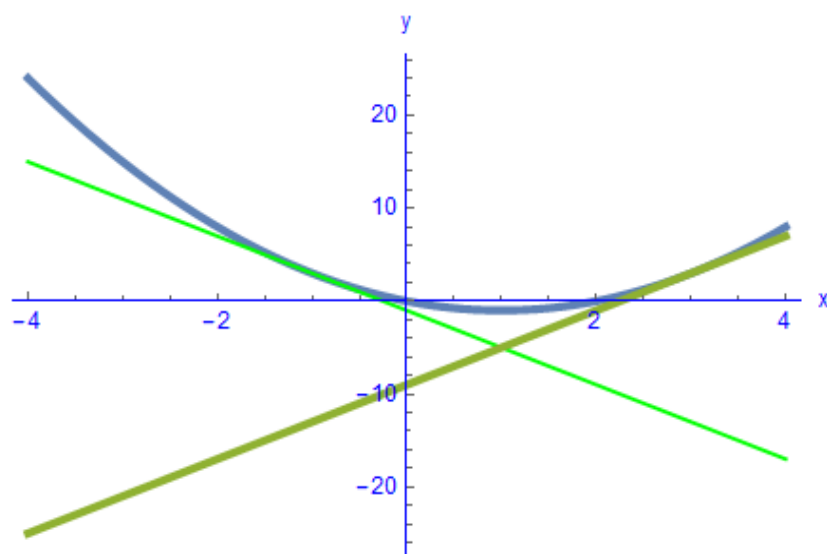
Уравнение второй касательной: $y = -9 + 4x$

$y[x_] := -1 - 4 * x$

$u[x_] := -9 + 4 * x$

$Plot[\{f[x], y[x], u[x]\}, \{x, -4, 4\}, PlotStyle \rightarrow \{Thickness[0.01], Green\},$

$AxesStyle \rightarrow \{Directive[Blue], Blue\}, AxesLabel \rightarrow \{"x", "y"\}]$



Литература

1. Шерстнёва Н.А. Применение системы Wolfram Mathematica в преподавании математического анализа // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Вып. 3. Киров: Изд-во МЦИТО, 2019. С. 144-148.
2. Шерстнёва Н.А. Решение математических задач средствами системы компьютерной математики Wolfram Mathematica // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXI Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. Вып.21. С. 422 – 427.
3. Шерстнёва Н.А. Визуализация математического материала посредством систем компьютерной математики // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Вып. 5. Киров: Изд-во МЦИТО, 2021. С. 131-136.
4. Шерстнёва Н.А. О некоторых приложениях системы компьютерной математики Wolfram Mathematica в преподавании математического анализа // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXIII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. Вып. 23. С. 392 – 397.
5. Шерстнёва Н.А. Решение математических задач в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXIV Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2023. Вып. 24. С. 429-433.
6. Шерстнёва Н.А. Математическое моделирование в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXV Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2024. Вып. 25. С. 367-372.

N.A. Sherstneva

Smolensk State University

MATHEMATICAL PACKAGES AS A TOOL FOR STUDYING MATHEMATICAL ANALYSIS

Keywords: Wolfram Mathematica, a computer mathematics package; solving mathematical analysis problems in Wolfram Mathematica; mathematical modeling using mathematical packages.

Abstract. *The article illustrates the capabilities of the Wolfram Mathematica computer mathematics package for solving mathematical analysis problems taught to first- and second-year students at the Physics and Mathematics Department of Smolensk State University (training areas 44.03.05 Pedagogical Education (profile «Mathematics and Computer Science»); 01.03.02 «Applied Mathematics and Computer Science»; 11.03.01 «Radio Engineering»). This publication continues the author's series devoted to solving mathematical analysis problems by means of mathematical packages.*

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Абдуллаева Мехирбан Махаметжановна – кандидат психологических наук, доцент, доцент факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: mehirban@rambler.ru.

Агапова Анастасия Алексеевна – студентка факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: anastasa239@mail.ru.

Алексеев Евгений Ростиславович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета. Email: er.alekseev@yandex.ru

Анохина Мария Андреевна – аспирант механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: anokhina.mary1@gmail.com.

Банару Галина Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com.

Банару Михаил Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com.

Богданова Надежда Николаевна – старший преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: nadingioia@yandex.ru.

Бояринов Дмитрий Анатольевич – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: dmboyarinov@mail.ru.

Вувуникян Юрий Микиртычевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики ГрГУ им. Я. Купалы (Беларусь). E-mail: vuv64@mail.ru.

Головатин Давид Тимурович – инженер управления информационных технологий Кубанского государственного университета. Email: golovatind@yandex.ru.

Гомонов Сергей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: gomonov.serg@yandex.ru.

Горбунова Ирина Алексеевна – студент Кубанского государственного университета. Email: irinaalekseevna2004@gmail.com.

Дергачев Егор Олегович – студент факультета информатики и вычислительной техники филиала НИУ «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: dergachev.eo.ivt2.25@gmail.com.

Дюндин Андрей Викторович – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и технических дисциплин Смоленского государственного университета. E-mail: avdyndin@yandex.ru.

Залукаева Тамара Игоревна – студентка Кубанского государственного университета. E-mail: t_zalukaeva@mail.ru

Кислякова Елена Васильевна – кандидат педагогических наук, доцент, декан физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: elena151082@mail.ru.

Козловская Наталья Юрьевна – старший преподаватель кафедры математического и информационного обеспечения экономических систем ГрГУ им. Я. Купалы (Беларусь). E-mail: kozlowskaya_natalya@tut.by

Коровкин Илья Валерьевич – магистрант факультета вычислительной математики и кибернетики, МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: ilyuska.k@gmail.com.

Костин Андрей Борисович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова. E-mail: abkostin@yandex.ru.

Кругликов Игорь Викторович – студент факультета математики и технологий программирования Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. E-mail: igor.v.kruglikov@gmail.com

Кузнецова Алла Спартаковна – кандидат психологических наук, доцент кафедры психологии труда и инженерной психологии факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: kuznetsovamsu@rambler.ru.

Куклев Игорь Александрович – доцент кафедры РЛС И АСУ военного учебного центра при НИУ «МИЭТ». E-mail: goshakuklev@yandex.ru.

Лупин Сергей Сергеевич – кандидат технических наук, доцент Института системной и программной инженерии и информационных технологий (Институт СПИНТех) НИУ «МИЭТ». E-mail: sergeylupin.jr@gmail.com.

Мазалов Максим Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики филиала НИУ «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: maksimmazalov@yandex.ru.

Макаров Степан Дмитриевич – магистрант факультета вычислительной математики и кибернетики, МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: leofeen@yandex.ru.

Маркина Анна Юрьевна – руководитель отдела аналитики Т-Банк, выпускница кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: annmarkena@gmail.com.

Мунерман Виктор Иосифович – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: vimoona@gmail.com.

Перельман Наталья Романовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: perelmannr@gmail.com.

Расулов Карим Магомедович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: kahrimanr@yandex.ru.

Ровба Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики ГрГУ имени Я. Купалы (Беларусь). E-mail: rovba@grsu.by.

Розенков Павел Евгеньевич – инженер (заведующий) инженерно-технического радиологического отделения Могилевского областного онкологического диспансера. E-mail: poul_rosenkow@mail.ru.

Романов Никита Михайлович – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: czuavm@bk.ru.

Светлаков Алексей Владимирович – аспирант НИУ «МИЭТ». E-mail: seferlian@mail.ru.

Сенькина Гульжан Ержановна – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: gulzhan.senkina@gmail.com.

Синева Ирина Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и прикладной математики Московского государственного университета связи и информатики (МТУСИ). E-mail: sinevamtuci@gmail.com.

Старовойтов Александр Павлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины (Беларусь). E-mail: svoitov@gsu.by.

Тимофеева Наталья Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: nat.timopheeva@yandex.ru.

Трусило Анжелика Викторовна – магистрант кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры ГрГУ имени Я. Купалы (Беларусь). E-mail: anzhelika.trusilo@gmail.com.

Тукмаков Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики сплошных сред ИММ ФИЦ КазНЦ РАН. E-mail: tukmakovda@imm.knc.ru

Хартов Алексей Андреевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: khartov.a@iitp.ru, alexeykhartov@gmail.com.

Чуракова Юлия Романовна – студентка Кубанского государственного университета. E-mail: jusya05@mail.ru.

Шерстнева Наталья Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: MathSmolgu@gmail.com.

Шерстюков Владимир Борисович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: shervb73@gmail.com.

Шилин Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета (Беларусь). E-mail: a.p.shilin@gmail.com.

Шкляев Александр Викторович – ведущий научный сотрудник кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: alexander.shklyaev@math.msu.ru.

Щетинкина Анна Александровна – студентка Кубанского государственного университета. E-mail: annashchetinkina25@gmail.com

Ястребов Михаил Юрьевич – кандидат экономических наук, профессор кафедры высшей математики и кафедры комплексной защиты информационной безопасности Санкт-Петербургского государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. E-mail: mikyast@gmail.com.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 3. Математика и её приложения	3
<i>Анохина М.А.</i> Предельные теоремы для момента максимума случайного блуждания, достигающего различных фиксированных уровней	3
<i>Банару М.Б., Банару Г.А.</i> Заметка об одном малоизученном классе почти эрмитовых многообразий	7
<i>Вувуникян Ю.М.</i> Обобщенные нелинейные эволюционные операторы и их применение в импульсных нейронных сетях	12
<i>Гомонов С.А.</i> О некоторых применениях односторонних последовательностей	17
<i>Кислякова Е.В., Мунерман В.И.</i> Многомерные матрицы в физике элементарных частиц	22
<i>Козловская Н.Ю.</i> О признаках сходимости Жордана – Дирихле и Дини – Липшица для рациональных рядов Фурье	28
<i>Коровкин И.В., Костин А.Б., Шерстюков В.Б.</i> Модельная задача для уравнения Лапласа с разрывным граничным условием	36
<i>Костин А.Б., Макаров С.Д.</i> Корректность линейной обратной задачи для уравнения с дробной производной в конечномерном случае	39
<i>Мазалов М.Я., Дергачев Е.О.</i> Об одном аналоге леммы Кёбе для полианалитических функций	44
<i>Маркина А.Ю., Шкляев А.В.</i> О времени вырождения дважды критических ветвящихся процессов с частицами двух полов с большим начальным числом частиц	50
<i>Расулов К.М.</i> Смешанная краевая задача для обобщенных аналитических функций первого порядка	56
<i>Романов Н.М., Хартов А.А.</i> Конечноранговая аппроксимация процесса Орштейна – Уленбека с расстоянием Кульбака – Лейблера	62
<i>Светлаков А.В., Банару Г.А.</i> Построение структур Крипке с нечеткими событиями на основе логики ветвящегося времени	71
<i>Старовойтов А.П., Кругликов И.В.</i> О сходимости аппроксимаций Паде – Лорана	80
<i>Трусило А.В., Ровба Е.А.</i> О тригонометрическом рациональном интерполировании	87
<i>Тукманов Д.А.</i> Группа преобразований инерциальной системы отчета одномерной нестационарной системы уравнений Навье – Стокса течения сжимаемой теплопроводной среды	92
<i>Шилин А.П.</i> К решению интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с разными типами интегралов	97
<i>Ястребов М.Ю.</i> Энтропийная характеристика прикладных континуальных	

оптимизационных моделей	104
РАЗДЕЛ 4. Новые информационные технологии в образовании	109
<i>Абдуллаева М.М., Агапова А.А.</i> Психологические критерии выбора онлайн-репетитора родителями и учениками	109
<i>Алексеев Е.Р., Чуракова Ю.Р., Головатин Д.Т., Щетинкина А.А., Залукаева Т.И., Горбунова И.А.</i> Система открытой математики в образовании и науке	114
<i>Богданова Н.Н.</i> Метод конечных разностей в СКМ Wolfram Mathematica	118
<i>Бояринов Д.А.</i> Образовательное пространство: различные трактовки	125
<i>Дюндин А.В.</i> Элементы дистанционного обучения как временное решение кадровых проблем современной школы	129
<i>Кузнецова А.С.</i> Комплексная методология анализа стрессовых состояний в профессиональной и учебной деятельности	134
<i>Куклев И.А.</i> Разработка метода улучшения характеристик для обнаружения БПЛА с низкими требованиями к аппаратной платформе	139
<i>Куклев И.А.</i> Разработка метода прослеживания и вычисления 3d-координат целевых объектов с учетом моделей движения камеры	149
<i>Лупин С.С.</i> Особенности преподавания компьютерных дисциплин у студентов гуманитарных направлений	156
<i>Перельман Н.Р.</i> Использование графических калькуляторов при обучении математическому программированию	162
<i>Розенков П.Е.</i> Новые информационные технологии при обучении людей с консервативным или ригидным мышлением. Возможности, проблемы и пути их решения	166
<i>Сенькина Г.Е., Расулов К.М.</i> Сравнительный анализ применения образовательных платформ учениками, студентами и учителями	171
<i>Синева И.С.</i> Образовательная сингулярность в преподавании математических и IT-дисциплин: от алгоритмической репродукции к интеллектуальному симбиозу с ИИ	177
<i>Тимофеева Н.М.</i> Учитель математики и информатики в эпоху образовательных инноваций: новые требования	184
<i>Шерстнёва Н.А.</i> Математические пакеты как инструмент изучения математического анализа	190
Сведения об авторах	195

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 27

Часть 2

Издательство Смоленского государственного
университета

Редакторы *О.В. Папко, И.В. Марусова, И.А. Казилина*

Подписано к печати 22.04.2026. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать ризографическая.

Усл. п. л. 12,6. Уч.-изд. л. 12,6. Тираж 300 экз.

Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета

ИП Суркова Н.Н.

214000 г. Смоленск, ул. Б. Советская, д. 12/1

Тел.: 8-951-697-22-23