

Министерство науки и высшего образования РФ  
Смоленский государственный университет

---

# **Системы компьютерной математики и их приложения**

Выпуск 25

Смоленск  
Издательство СмолГУ  
2024

УДК 621.396.218  
ББК 32.97  
С 409

*Печатается по решению  
редакционно-издательского  
совета СмолГУ*

### **Редакционная коллегия**

*К.М. Расулов, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор)*  
*Н.М. Тимофеева, канд. пед. наук, доц. (отв. секретарь)*  
*В.В. Борисов, д-р техн. наук, проф. (Смоленск, Россия)*  
*Ю.М. Вувуникян, д-р физ.-мат. наук, проф. (Гродно, Республика Беларусь)*  
*Л.Г. Гагарина, д-р техн. наук, проф. (Зеленоград, Россия)*  
*С.А. Гомонов, канд. физ.-мат. наук, доц. (Смоленск, Россия)*  
*А.П. Карпенко, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)*  
*А.Б. Костин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)*  
*В.И. Мунерман, канд. техн. наук, доц. (Смоленск, Россия)*  
*Г.Е. Сенькина, д-р пед. наук, проф. (Смоленск, Россия)*  
*И.В. Тихонов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)*  
*В.Б. Шерстюков, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)*

С 409 **Системы компьютерной математики и их приложения:**  
межвузовский сборник научных трудов. Смоленск: Изд-во  
СмолГУ, 2024. Вып. 25. 392 с.  
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В настоящем выпуске сборника публикуются расширенные тексты научных докладов, представленных на XXV Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 24–25 мая 2024 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218  
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,  
*продолжающееся издание*

© Авторы, 2024  
© Издательство СмолГУ, 2024

# РАЗДЕЛ 1

## Системы компьютерной математики

Е.Р. Алексеев, Е.А. Вербичева,  
К.В. Дога, Д.Т. Головатин, Д.Е. Юрченко  
*Кубанский государственный университет*

УДК 004.4

### ЈУРУТЕР КАК УНИВЕРСАЛЬНАЯ СРЕДА ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ И НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Ключевые слова: *свободное программное обеспечение, интерактивный блокнот, вычислительный модуль, Jupyter, Scilab, Octave, Julia, Wolfram Language.*

*В статье рассматриваются новые принципы публикации учебных пособий и научных статей с учётом развития информационных технологий в современном мире. Проанализированы возможности использования Jupyter в качестве универсальной среды для написания интерактивных учебников и научных статей, а также описаны возможности подключения Scilab, Octave, Julia, Wolfram Language в качестве вычислительных модулей Jupyter.*

Информационные технологии в течение последних 15 лет значительно изменили образование и науку. С одной стороны, ЭВМ и персональные компьютеры позволяют исследователю решать достаточно сложные задачи. С другой стороны, появились не виданные ранее возможности для «научного плагиата». Никакие системы антиплагиата не спасают. Фактически не работают законы об авторском праве. Сейчас информационные технологии позволяют так «преобразовать» научный результат, что его не узнает даже автор. Кроме того, в современном научном мире сложилась такая тенденция: в статье описывается задача, методы её решения в общих чертах и полученные результаты. При этом автор не приводит ни подробных алгоритмов, ни точных математических моделей. О том, чтобы привести коды работающих программ, и речи идти не может. Объясняется это заботой об авторских правах и возможностью получения коммерческой выгоды по подробному описанию решенной кем-то актуальной задачи. Кроме того, написанные подобным образом статьи не позволяют другим учёным подключиться к решению задач, а студентам – учиться на примерах решения практических задач. Если обратиться к научной

литературе 50-летней давности, то можно заметить, что в ней приводятся подробные математические модели, а зачастую и коды работающих программ.

Современные технологии значительно изменили подход к получению знаний. Классический учебник стремительно вытесняется электронными средствами обучения. К преимуществам последних можно отнести: мгновенное распространение в Сети; простоту редактирования; доступность обучающимся из любой точки мира; наличие в учебнике интерактивных фрагментов.

Для авторов классических учебников, как и для исследователей, актуальными являются проблемы плагиата и авторских прав. С развитием информационных технологий возникла необходимость изменения принципов публикации результатов научных исследований и учебников для студентов (возможно, и для старшекласников). Мы предлагаем внедрить следующие принципы публикации учебников и научных статей по математическим, естественно-научным и техническим дисциплинам:

1. Доступность и бесплатность для всех желающих.
2. Полное описание решённой задачи.
3. Интерактивность. Учебник и научная статья могут содержать интерактивные части, чтобы любой желающий мог проверить приведенные результаты, попробовать их усовершенствовать, а студент (школьник) мог учиться на реальном научном исследовании.
4. Автоматическое закрепление авторства при публикации.

Мы предлагаем перенести принципы GNU GPL[1] и GNU FDL[2] в образование и науку, так как современный мир буквально требует этого.

В данной работе рассматривается один из вопросов, связанных с поставленной нами проблемой – выбор программного обеспечения для создания современных учебников и статей. Электронные учебные пособия математической, естественно-научной и технической направленности имеют следующие особенности.

1. Структурированность учебной информации.
2. Возможность включения в текст списков, рисунков, формул, таблиц, гиперссылок и пр.
3. Наличие интерактивной расчётной части, в которой можно проводить численные и аналитические вычисления, а также осуществлять вывод информации в графическом виде. Желательно иметь возможность выбора модуля для расчётной части. Учебные пособия разной тематики требуют различного программного обеспечения для решения задач.
4. Открытый формат файлов.
5. Возможность конвертации в широко распространённые форматы, такие как pdf, html и подобные.

6. Кроссплатформенность.

7. Бесплатное, а в идеале свободно распространяемое программное обеспечение.

Нерационально использовать форматы html, tex, md, odt, doc(docx) для подготовки электронных учебных пособий именно из-за отсутствия в них интерактивного вычислительного блока.

Можно использовать Wolfram Mathematica [3] для создания интерактивных документов с комментариями. Однако программа имеет закрытый формат файлов, высокие входной порог и стоимость, а также предъявляет серьёзные аппаратные требования к вычислительной системе.

Долгое время одним из средств для формирования интерактивных математических документов являлся формат MathCAD [4]. К его особенностям можно отнести:

1. закрытый формат;
2. смену структуры файла от версии к версии;
3. высокую стоимость программы;
4. работу только в одной проприетарной операционной системе;
5. отсутствие выбора модуля интерактивной расчётной части.

Кроме Wolfram Mathematica и MathCAD, для разработки электронных учебников можно использовать свободные программы Cantor [5] и Jupyter [6], которые являются надстройками над математическими пакетами.

Оба приложения позволяют создать документ, в котором могут быть блоки структурированного текста в формате markdown, таблицы, рисунки, гиперссылки, блоки текста с формулами в формате LaTeX, а также интерактивные вычислительные зоны.

Cantor позволяет использовать в интерактивных вычислительных зонах документа следующие вычислительные модули: Julia, KAlgebra, Lua, Maxima, Octave, Python, Qalculate, R, Sage и Scilab.

Число поддерживаемых языков в Jupyter значительно больше. Jupyter, по существу, является полноценной IDE, позволяющей осуществлять вывод графиков, таблиц, формул как результата работы интерактивного вычислительного блока. Ещё одним принципиальным отличием приложения приложений является его кроссплатформенность Jupyter. Cantor работает только под управлением Linux.

Поэтому авторы остановили свой выбор на Jupyter. Рассмотрим возможности Jupyter как среды для обучения и научных исследований.

Знакомство пользователя с Jupyter начнётся с установки, которая предельно проста и мало чем отличается в различных ОС. Предварительно должны быть установлены интерпретатор Python 3.x и утилита pip, которая служит для установки пакетов в Python. Pip – это аббревиатура от фразы «package installer for Python» (установщик

пакетов для Python). В большинстве дистрибутивов Linux Python 3.x доступен сразу после установки. Остается установить pip:

```
# apt-get install python3-pip
```

Пользователям Windows требуется установить последнюю версию интерпретатора Python с официального сайта (python.org), после чего утилита pip станет доступна.

Далее необходимо установить Jupyter Notebook и (или) JupyterLab. Эта установка мало чем отличается в различных операционных системах (ОС).

В терминале необходимо ввести команду:

```
#pip install notebook //для Jupyter Notebook  
#pip install jupyterlab//для Jupyter JupyterLab
```

Следующий шаг — создание документа, в котором присутствуют текстовые блоки в формате markdown, интерактивные вычислительные блоки (по умолчанию в формате Python) с использованием установленных библиотек Python. Кроме того, в качестве вычислительного модуля доступны следующие языки программирования и разметки: *bash* (%%bash команды), *js* (%%js команды), *perl* (%%perl команды), *html* (%%html команды), *latex* (%%latex команды), *R* (%%r команды), *ruby* (%%ruby команды) и др.

Даже с настройками по умолчанию пользователь на своём компьютере получает интерактивный блокнот, сопоставимый по возможностям с GoogleColab [7], но с гораздо большим количеством вычислительных модулей. Значительный интерес представляет использование математических пакетов в качестве вычислительных модулей. Чтобы использовать свободные пакеты Scilab [8] и Octave [9], их необходимо установить стандартным для используемой операционной системы образом, а затем в терминале выполнить следующие команды:

```
#pip install scilab_kernel //для Scilab  
#pip install octave_kernel //для Octave
```

В последние годы бурно развивается язык Julia [10], который также можно использовать в качестве вычислительного модуля в Jupyter. Для этого после установки Julia необходимо выполнить следующее.

1. Запустить Julia в режиме командной строки.
2. Нажать клавишу ] и перейти в режим установки пакетов.
3. Выполнить команду `add IJulia`, дождаться установки необходимых пакетов.
4. Выйти из Julia, после чего данный вычислительный модуль будет доступен в Jupyter.

На взгляд авторов, интересным вычислительным модулем, который можно установить в Jupyter, является Wolfram Language. Это

вычислительный язык, разрабатываемый Стивеном Вольфрамом более 30 лет. Сейчас существует возможность использовать сам язык бесплатно, а затем подключить его в качестве вычислительного модуля в Jupyter, для этого необходимо:

1. скачать бесплатный «движок» (engine) Wolfram Mathematica (Wolfram Language) [11];
2. запустить скрипт для установки бесплатного «движка» Wolfram Mathematica;
3. запустить в терминале бесплатный «движок» Wolfram Mathematica с помощью команды `wolframscript`.

Для установки модуля Wolfram Mathematica в Jupyter служит проект WolframLanguageForJupyter [12]. Для его использования необходимо выполнить команды терминала:

```
$git clone https://github.com/WolframResearch/WolframLanguageForJupyter
$ mv WolframLanguageForJupyter ~
$ cd ~/WolframLanguageForJupyter
$ ./configure-jupyter.wls add
```

В результате, кроме стандартных вычислительных модулей, в Jupyter доступны Scilab, Octave, Julia, WolframLanguage. Получаем инструмент, который позволяет создавать электронные документы с интерактивными блоками для научных исследований. Следует отметить, что в качестве вычислительных модулей могут использоваться и другие программы.

Авторами статьи разрабатывается программный продукт, посвященный построению специализированных математических пакетов на базе Jupyter [13].

Jupyter востребован на факультете математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета. Особенно активно мы используем его при обучении информационным дисциплинам (программирование, компьютерное моделирование, информационные системы и др.) будущих учителей математики и информатики (направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование», профили «Математика, Информатика»). Здесь <https://kurl.ru/PKQxc> можно увидеть наши разработки и учебные пособия по программированию на Scilab, Python и др.

В последние годы Jupyter широко используется в научных исследованиях, анализе данных и др. В работе [14] приведено достаточно много ссылок на блокноты Jupyter по машинному обучению и большим данным. Проект [15] посвящен книгам в формате Jupyter. Заслуживает внимания небольшой учебник по Julia в формате Jupyter [16]. Ряд публикаций в научных изданиях посвящен использованию

Jupyter в образовании [17; 18].

Авторами рассмотрено использование возможностей программ семейства Jupyter [6] в качестве универсальной среды для обучения и научных исследований, обоснован выбор программного обеспечения для создания современных учебников и статей по математическим и техническим дисциплинам, предложена новая концепция разработки статей по результатам исследований и электронных учебников.

### Литература

1. Лицензии – Проект GNU – Фонд свободного программного обеспечения. URL: <https://www.gnu.org/licenses/>.
2. Лицензия свободной документации GNU 1.3 – Проект GNU – Фонд свободного программного обеспечения. URL: <https://www.gnu.org/licenses/fdl-1.3.html>.
3. Wolfram Mathematica: Современные технические вычисления. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/index.php.ru?source=footer>.
4. Mathcad: Math Software for Engineering Calculations | Mathcad. URL: <https://www.mathcad.com/en/>.
5. Cantor | KDE Frontend to mathematical applications. URL: <https://cantor.kde.org/>.
6. Project Jupyter | Home. URL: <https://jupyter.org/>.
7. Colab.google. URL: <https://colab.google/>.
8. Scilab | Scilab. URL: <https://www.scilab.org/>.
9. GNU Octave. URL: <https://octave.org/>.
10. The Julia Programming Language. URL: <https://julialang.org/>.
11. Wolfram Engine. URL: <https://www.wolfram.com/engine/>.
12. GitHub – WolframResearch/WolframLanguageForJupyter: Wolfram Language kernel for Jupyter notebooks. URL: <https://github.com/WolframResearch/WolframLanguageForJupyter>.
13. Головатин Д.Т. Разработка свободной среды обработки математических данных на основе языка программирования Julia: выпускная квалификационная работа (бакалаврская работа). Краснодар: КубГУ, 2023.
14. Галерея лучших блокнотов по ML и Data Science / Хабр. URL: <https://habr.com/ru/articles/460321/>.
15. Built with Jupyter Book. URL: <https://jupyterbook.org/en/stable/intro.html>.
16. GitHub – statist-bhfz/julia\_stats: Изучаем Julia. URL: [https://github.com/statist-bhfz/julia\\_stats](https://github.com/statist-bhfz/julia_stats).
17. Логинова Л.Н., Кулагин М.А. Применение технологии Jupyter Notebook / Jupyter Hub для эффективного обучения в вузах // Ректор ВУЗа. 2021. № 4. С. 32-37. EDN FXIILL.
18. Бутенко А.И., Ахатов Д.О., Дехканов Ш.М. Использование Jupyter Book для создания полноценных интерактивных книг // Наука и образование. 2023. Т. 6, № 3. EDN NBAJDR.

**E.R. Alekseev, E.A. Verbicheva,  
K.V. Doga, D.T. Golovatin, D.E. Yurchenko**  
Kuban State University

## JUPYTER AS A UNIVERSAL LEARNING AND RESEARCH ENVIRONMENT

**Keywords:** *open source software, interactive notebook, computing module, Jupyter, Scilab, Octave, Julia, Wolfram Language.*

**Abstract.** *The authors propose new principles for publishing textbooks and scientific articles at the current stage of information technology development. In this paper, the possibilities of using Jupyter as a base for interactive textbooks and scientific articles are considered. The possibilities of connecting Scilab, Octave, Julia, Wolfram Language as Jupyter computing modules are described.*

**Т.К. Бирюкова, М.М. Гершкович, В.И. Синицин**  
ФИЦ ИУ РАН

УДК 004.93, 004.8, 004.045, 004.047, 004.735

## МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ ХРАНИЛИЩ ДАННЫХ С УЧЕТОМ СМЫСЛОВОГО СОДЕРЖАНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Ключевые слова: *распознавание изображений, распознавание фотографий, большие данные, искусственный интеллект, хранение данных, информационная система, автоматизированная информационная система, ценность информации.*

*В статье рассмотрены рациональные способы хранения больших объемов данных, в состав которых входят изображения, в крупных автоматизированных информационных системах (АИС). С целью повышения быстродействия алгоритмов анализа изображений, а также скорости обучения нейронных сетей, использующих изображения, предложен метод распределения данных по физическим средствам хранения разных типов в зависимости от смыслового содержания информации. Дескрипторы изображений, содержащие характерные черты и используемые для сравнения изображений, рекомендовано хранить как в файлах, так и, дополнительно, в реляционной базе данных (БД). Хранение изображений и связанных с ними данных (дескрипторов, текстовых описаний) в единой реляционной БД обладает рядом преимуществ перед другими способами: позволяет существенно упростить процедуры администрирования и резервного копирования данных (повышая надежность АИС), а также обеспечить параллельный доступ разных процессов к данным, в том числе при обучении нейронных сетей. Рекомендовано данные, используемые для*

*поиска в БД, хранить на твердотельных накопителях с высокой скоростью чтения и записи, а изображения – на обычных жестких дисках меньшей стоимости.*

**1. Введение.** В серии работ авторов [1-3] исследованы вопросы организации сбора и хранения данных, управления потоками информации в крупных территориально-распределенных АИС, что входит в число наиболее важных процессов в АИС [4, 5]. В статье [6] в сборнике материалов конференции СКМП-2022 рассматривалась проблема приоритетной доставки адресату наиболее ценной информации. Для этого было предложено при отправке данных выделять блоки по смысловому содержанию информации – так, например, назначать высокий приоритет наиболее «свежей» информации. Как правило, также целесообразно считать, что при несоответствии интенсивности потока данных пропускной способности канала, в том числе после аварий, оперативная доставка текстовой информации важнее, чем изображений (имеющих существенно больший объем, по сравнению с текстом).

В продолжение исследований, связанных с оптимизацией хранения и циркуляции информации в АИС с большими объемами данных, и в развитие темы разделения информации по смыслу при различных операциях, в данном докладе предлагаются методы организации хранения данных с учетом их смыслового содержания. Особое внимание уделено вопросам хранения изображений с возможностью быстрого доступа к ним.

**2. Рациональные способы хранения больших объемов данных, в число которых входят изображения.** Во многих АИС в число атрибутов событий и информационных объектов (ИО), данные о которых поступают и сохраняются в АИС, входят изображения. В настоящей статье предлагаются решения по оптимизации хранения больших объемов изображений для обеспечения быстрого доступа к ним с целью решения поисково-аналитических задач в АИС, обучения нейронных сетей, а также для рационализации резервного копирования данных. Следует отметить, что видеoinформация в большинстве случаев обрабатывается как последовательность изображений, поэтому дальнейшие рассуждения в статье обобщаются в отношении видеоданных.

При решении задач, связанных с поиском и анализом изображений в массиве данных в АИС, актуальна проблема упорядоченного хранения большого количества изображений, снабженных дополнительными атрибутами, позволяющими как идентифицировать изображения, так и относить к ним дополнительную текстовую описательную информацию. Также родственной проблемой является оптимизация хранения данных,

используемых при обучении, валидации и тестировании нейронных сетей, связанных с распознаванием изображений [7].

Следует отметить, что результат обучения нейронных сетей (точность работы в режиме эксплуатации) в большой мере зависит, не только от процедуры подбора весов (обучаемых параметров), но и от качества подготовки обучающих данных. Вопросы, связанные дальнейшей эксплуатацией нейронных сетей, обрабатывающих изображения (такие как повышение качества при дальнейшем обучении, противодействие атакам) тоже непосредственно связаны с хранением, обработкой и быстрым поиском во множестве изображений.

Поэтому создание эффективного хранилища изображений с оптимальным соотношением функциональных возможностей, скорости поиска и стоимости технических средств является важной задачей.

Поскольку наиболее проработанным способом хранения данных на текущий момент являются реляционные системы управления базами данных (СУБД), логично использовать их для размещения изображений. Следует обратить внимание, что при этом сами изображения в бинарном виде можно хранить в виде файлов на диске отдельно от СУБД. Однако при использовании файлового хранилища возрастают риски случайной потери или искажения файлов и усложняются организационные вопросы – например, процессы резервного копирования. Тем не менее изложенные ниже соображения верны для любой системы хранения информации (не только реляционной, но и файловой, и сетевой).

В настоящее время популярны нейронные сети, выполняющие распознавание изображений (например, для классификации), составление текстовых описаний изображений и видеороликов и, наоборот, генерацию изображений и видео по текстовому описанию. Часто встречаются задачи, связанные с распознаванием физических лиц по фотографиям. Распознавание лиц – это технология, которая позволяет автоматически идентифицировать (определить, кто именно изображен) или верифицировать (подтвердить, что на фотографии именно этот человек) людей на фото или видео. Для распознавания используют нейронные сети определенных типов (в основном, «сверточные» сети [8] и «трансформеры» [9]), которые умеют считывать и анализировать уникальные черты лица, а также иных изображений. Нейронная сеть обучается строить дескриптор («эмбединг») изображения – вектор, содержащий основные признаки. Сравнение изображений выполняется путем сравнения дескрипторов. Для поиска по эталонному изображению его дескриптор сравнивается с дескрипторами всех изображений в БД. Основное время при поиске тратится на считывание дескрипторов всех изображений их хранилища. Поэтому способ хранения дескрипторов существенно влияет на скорость поиска.

Анализ имеющихся в открытом доступе наборов данных, используемых для обучения и тестирования нейронных сетей вышеуказанных типов, показывает, что структура информации в таких наборах распределена приблизительно в соотношении: 15% – текстовые данные, 10% – дескрипторы изображений, 75% – сами изображения (бинарные). Однако, как показывает опыт использования реляционных СУБД, для организации быстрого поиска необходимо зарезервировать для индексной информации приблизительно 30% пространства. Соответственно итоговое распределение по видам информации в БД будет примерно следующим: 30% – индексы СУБД, 12% – текстовые данные, 6% – дескрипторы изображений, 52% – изображения.



Рис. 1. Типовое распределение данных, относящихся к изображениям, по видам в реляционных БД

Для выполнения быстрого сравнения изображений дескрипторы предлагается хранить на носителях информации с очень высокой скоростью чтения, в нескольких файлах, для которых осуществляется кэширование в оперативной памяти (чтобы сократить количество операций чтения), а сами файлы с изображениями – на обычных носителях меньшей стоимости. Сервер, где выполняется сравнение изображений, рекомендуется оснастить оперативной памятью большого объема. Копии дескрипторов изображений рекомендуется сохранять в реляционной БД на дисках того же типа, что и изображения, чтобы в случае аварии дескрипторы можно было легко восстановить из резервной копии (производимой штатными средствами СУБД).

Организация хранения изображений и связанных с ними данных (дескрипторов, текстовых описаний) в единой реляционной БД позволяет существенно упростить процедуры администрирования

данных, а также их переноса, резервного копирования. И особенно важно отметить, что указанный способ хранения изображений и сопутствующих данных в реляционной БД позволяет организовать одновременный доступ к данным различных процессов, в частности связанных с обучением. Это обеспечивает возможность создания платформы доступа к данным, необходимой как при распараллеливании процессов обучения нейронной сети в рамках решения одной задачи, так и организации работы принципиально разных процессов, связанных с обучением нейронных сетей. Использование СУБД обеспечивает возможность изменять динамически состав множеств данных для обучения и тестирования нейронных сетей, включая фильтрацию исходных данных «вручную» (например, выбор для обучения только фотографий животных из всех изображений, хранящихся в БД, с помощью фильтра), а также позволяет существенно структурировать описательную часть изображений для организации эффективной фильтрации. Текстовые описания изображений необходимо априори считать данными с искажениями (вызванными различными причинами – ошибками операторского ввода, разными способами транслитерации и т. д.). Для их сохранения в БД и поиска рекомендуется применять предложенные авторами в статьях [1-3] методы работы с информационными объектами, имеющими искажения.

**3. Заключение.** В статье рассмотрены рациональные способы хранения информации в крупных АИС с большими объемами данных, в число которых входят изображения. С целью повышения быстродействия алгоритмов анализа изображений, а также скорости обучения нейронных сетей, использующих изображения, предложен метод распределения данных по физическим средствам хранения разных типов в зависимости от смыслового содержания информации. Deskriptory («эмбединги») изображений, содержащие характерные черты и используемые для сравнения изображений рекомендовано хранить как в файлах, так и, дополнительно, в реляционной БД. Указано, что хранение изображений и связанных с ними данных (deskriptorov, текстовых описаний) в единой реляционной БД позволяет существенно упростить процедуры администрирования и резервного копирования данных, повышая надежность АИС и, тем самым, ее катастрофоустойчивость [10]. Также отмечено, что при использовании реляционной БД может быть обеспечен параллельный доступ разных процессов к данным, в том числе при обучении нейронных сетей.

Рекомендовано файлы реляционной БД размещать следующим образом:

– текстовые и индексные данные хранить на физических носителях, обеспечивающих высокую скорость чтения и записи («быстрых» дисках), например, на твердотельных накопителях SSD или FLASH;

– изображения хранить на дисках HDD меньшей стоимости по сравнению с «быстрыми» дисками при одинаковом размере дискового пространства;

– дескрипторы изображений, используемые для сравнения изображений, размещать в нескольких файлах на «быстрых» дисках, а также сохранять в реляционной БД на таких же дисках, что и изображения.

### Литература

1. Бирюкова Т.К., Гершкович М.М. Особенности компьютерной обработки данных с неточно известными параметрами в многоуровневых территориально-распределенных информационно-телекоммуникационных системах // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2021): материалы XXII Международной научной конференции (Смоленск, 28–29 мая 2021). Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2021. Вып. 22. С. 27–36.

2. Гершкович М.М., Бирюкова Т.К. Задачи идентификации информационных объектов в распределенных массивах данных // Системы и средства информатики, 2014. Т. 24, № 1. С. 224-241.

3. Гершкович М.М. Идентификация и мониторинг информационных объектов с использованием фотоизображений в территориально-распределенных информационных системах // Системы высокой доступности, 2019. № 1. С. 28-37.

4. Зацаринный А.А., Ионенков Ю.С. Метод выбора варианта построения информационно-телекоммуникационной системы // Системы и средства информатики, 2019. Т. 29. № 3. С. 114-126.

5. Зацаринный А.А., Ионенков Ю.С. Оценка эффективности информационно-телекоммуникационных систем. – М.: НИПКЦ Восход-А, 2020. 120 с.

6. Бирюкова Т.К., Гершкович М.М. Методы определения приоритета передачи логических блоков данных с учетом изменения ценности информации во времени // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2022): материалы XXIII Международной научной конференции (Смоленск, 27–28 мая 2022). – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. Вып. 23. С. 3–7.

7. Бирюкова Т.К. Алгоритм обработки сигналов в нейронных сетях с функциями активации в виде параболических интегродифференциальных сплайнов и частный случай его применения для классификации изображений // Системы высокой доступности, 2021. Т. 17. № 2. С. 11-25.

8. Шолле Ф. Глубокое обучение на Python. – СПб.: Питер, 2018. 400 с.

9. Mauricio J., Domingues I., Bernardino J. Comparing Vision Transformers and Convolutional Neural Networks for Image Classification: A Literature Review // April 2023. Applied Sciences 13(9):5521. DOI:10.3390/app13095521.

10. Будзко В. И., Беленков В. Г., Кейер П. А. К выбору варианта построения катастрофоустойчивых информационно-телекоммуникационных систем // Системы и средства информатики, 2003. Вып. 13. С. 16–40.

**T.K. Biryukova, M.M. Gershovich, V.I. Sinitsin**

*The Institute of Informatics Problems of the Federal Research Center  
"Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow*

## METHODS OF ORGANIZING DATA STORAGES CONSIDERING THE CONTENT OF INFORMATION

**Keywords:** *image recognition, photo recognition, big data, artificial intelligence, data storage, information system, automated information system, value of information.*

**Abstract.** *The article suggests rational ways of storing large volumes of data, which include images, in large automated information systems (AIS). In order to increase the performance of image analysis algorithms, as well as the speed of training of neural networks using images, a method for distributing data across physical storage media of different types depending on the semantic content of the information is proposed. It is recommended to store image descriptors containing characteristic features and used for image comparison both in files and, additionally, in a relational database. Storing images and associated data (descriptors, text descriptions) in a single relational database has a number of advantages over other methods - it can significantly simplify the procedures for administering and backup procedures (increasing the reliability of the AIS), as well as provide parallel access to data for different processes, in including when training neural networks. It is recommended to store data used for searching in the database on solid-state drives with high read and write speed, and images on regular hard drives of lower cost.*

**Д. Т. Головатин, Е. Р. Алексеев, Е. А. Вербичева, К. В. Дога**  
*Кубанский государственный университет*

УДК 004.42

## ИНСТРУМЕНТЫ РАЗРАБОТКИ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ

**Ключевые слова:** *система открытой математики COM, SysOpenMath (SOM), скрипт сборки, математический пакет, свободное программное обеспечение, Jupyter, Julia, Python, Scilab, Octave, Wolfram Language, xeus-cling.*

*Предлагается новая концепция разработки математических пакетов. Рассматриваются основные принципы свободной математической среды, на базе которых была создана система открытой математики – COM (SysOpenMath).*

Для решения технических и математических задач зачастую используются универсальные математические пакеты. Это связано с тем, что подобные программы могут быть использованы для решения большинства задач. Однако не всегда рационально, а иногда и

невозможно их использование для создания прикладных программ. К особенностям [1] математических программ можно отнести проприетарную лицензию, которая не позволяет полноценно использовать их в образовании, а также высокие аппаратные требования. Вместе с тем свободные математические пакеты и языки программирования (Python, Julia, C), ориентированные на решение сложных задач, могут соперничать с проприетарными в плане вычислительных возможностей, но значительно проигрывают им в плане пользовательского интерфейса. Чтобы выдерживать конкуренцию с проприетарными программами, свободные программные решения должны удовлетворять следующим условиям:

1. Мощный вычислительный модуль, настраиваемый под нужды пользователя. Примером подобного модуля может служить интерпретатор языка Julia (или Python) с подключенными специализированными библиотеками.

2. Возможность вставки в создаваемый документ текстовых блоков, с включением списков, рисунков, формул, таблиц, гиперссылок и т. д.

3. Автоматическая сборка подобного программного решения.

4. Удобный пользовательский интерфейс.

Авторами разработана концепция подобной системы, на базе которой была создана функционирующая версия системы открытой математики – COM (SysOpenMath – SOM) для операционных систем семейства Linux.

Главным компонентом любого математического пакета является его вычислительный модуль. Авторами предлагается использовать язык программирования Julia [2] для создания математической вычислительной среды. Julia – язык, разрабатываемый в MIT (Массачусетский технологический институт [3]) с 2016 года. Данный проект ориентирован на решение вычислительных и инженерных задач. Основными достоинствами языка являются: высокая скорость работы, достигаемая за счет встроенного JIT компилятора, специально спроектированная система типов, упрощающая создание и последующую работу с математическими абстракциями, а также богатую экосистему, которая постоянно пополняется инструментами для решения прикладных вычислительных задач. Синтаксис Julia схож с синтаксисом Scilab или Matlab [4]. Кроме этого, у языка предусмотрен удобный пакетный менеджер, который упрощает работу с внешними библиотеками. Исходя из вышеописанного, авторы решили, что язык Julia является хорошей основой для построения математического пакета. Желая создать инструмент, который можно будет использовать в прикладных целях, при проектировании математического пакета было принято решение включить в систему набор популярных библиотек из экосистемы [5] языка. Данные библиотеки разбиты группы в

зависимости от того, какой класс задач они решают. Данный подход позволит упростить знакомство с экосистемой языка, а также даст возможность создавать уникальные математические пакеты путем изменения содержимого наборов. Пользователю при установке системы будет предложено выбрать необходимые библиотеки, тем самым настроив систему под свои задачи. По умолчанию перечень библиотек ограничен, однако в создаваемой системе предусмотрена возможность изменения данного ограничения.

Помимо вычислительного ядра математические пакеты оснащены графическим интерфейсом, который служит для взаимодействия с системой и её настройки. В современном мире тяжело представить научный труд, который не сопровождался бы графическими иллюстрациями, таблицами и формулами, поэтому необходимо, чтобы пользователь системы мог работать с ними внутри графического интерфейса. Он должен быть прост в освоении и функционален, чтобы решать как можно больше задач, возникающих в работе.

В качестве такого интерфейса решено было использовать Jupyter [6]. Это свободное web приложение, которое представляет собой инструмент для работы с блокнотами, схожими с Wolfram Mathematica [7]. Jupyter является оболочкой, к которой подключается внешний вычислительный модуль. Программой поддерживается Python [8], Julia, Scilab [9], Wolfram Engine [10] и многое другое. Внутри Jupyter пользователь работает со структурированной информацией, которая записывается в ячейки. Ячейки – это сгруппированные вычислительные блоки, позволяющие записывать различные виды информации, такие как: код на языке программирования, формулы LaTeX, текст в формате Markdown, мультимедиа, таблицы и гиперссылки. Кроме этого, ячейки Jupyter позволяют сразу выполнять написанный код, отображая результат. В блокноте реализована подсветка синтаксиса, автоматическое дополнение синтаксических конструкций. Эти возможности позволяют создавать в Jupyter интерактивные отчеты, лекции [11] и даже книги [12, 13], что делает данный инструмент универсальным в качестве графической оболочки для математического пакета.

Каждая математическая среда, разработанная для решения вычислительных задач, предусматривает наличие справочной информации для помощи с работой в системе. Обычно в подобных руководствах описываются возможности продукта и примеры использования встроенных инструментов. Рассматриваемая система оснащена русскоязычным руководством, которое было разработано в стенах Кубанского государственного университета. Данный документ состоит двух глав, в первой объясняются основы синтаксиса языка Julia, во второй – кратко описываются некоторые прикладные модули,

присутствующие в математическом пакете. Кроме этого, в руководстве присутствуют практические задачи, способствующие изучению языка.

Кроме того, одним из критериев разработанной авторами программы SysOpenMath является простота в установке и настройке. Установка системы разделена на два этапа. Первый – установка базовых компонентов системы: Jupyter Notebook, Julia и русскоязычного руководства. Второй – установка дополнительных модулей для Julia. На первом этапе используется язык программирования bash, который поддерживается всеми операционными системами семейства Linux, за счет чего достигается универсальность в установке и настройке. При запуске разработанного установочного скрипта сборки пользователю будет предложено при помощи терминального меню выбрать версию языка программирования Julia, а также указать включить ли в процесс установки Jupyter Notebook и русскоязычную справку. Затем, после установки языка, используется программа на языке Julia, которая предложит пользователю выбрать необходимые дополнительные библиотеки.

В настоящий момент в OpenMathSys предусмотрены такие наборы пакетов как:

- *Стандартный набор* – здесь перечислены библиотеки, полезные для работы в системе;
- *Построение графиков* – библиотеки, решающие задачу построения графика;
- *Разработка приложений с графическим интерфейсом* – библиотеки для создания графического интерфейса;
- *Дополнительные структуры данных* – библиотеки, предусматривающие возможность работы со структурами, отсутствующими в языке;
- *Дифференциальные уравнения* – библиотеки, предназначенные для решения дифференциальных задач;
- *Символьные вычисления* – библиотеки для работы с символьными вычислениями;
- *Методы оптимизации* – библиотеки, предназначенные для решения задач методов оптимизации.

Данное разделение условно и отражает взгляд разработчика, касательно того, какие базовые модули должны идти в комплекте хорошего математического пакета. При необходимости пользователь, знакомый с экосистемой Julia, может поменять как названия наборов, так и их содержимое. Можно ознакомиться с проектом в [14, 15], где подробно описана инструкция по установке и настройке среды.

В результате работы авторами был создан скрипт – свободный инструмент для создания математических пакетов, благодаря которому пользователь может создать уникальный математический пакет под свои

нужды. Разработанный программный комплекс прост в использовании, многофункционален и ориентирован под конкретные вычислительные задачи.

В разработанной системе открытой математике (COM) в качестве вычислительного модуля используется язык программирования Julia, однако аналогичный подход можно применить, используя другие вычислительные модули – Python, Scilab, Octave, Wolfram Language, Xeus-cling[16] и др. Планируется расширение возможностей разработанной системы, в перспективе – написание универсального скрипта сборки на языке bash для генерации математического пакета по требованиям пользователя.

### Литература

1. Comparison of numerical-analysis software – Wikiwand. URL: [https://www.wikiwand.com/en/Comparison\\_of\\_numerical-analysis\\_software](https://www.wikiwand.com/en/Comparison_of_numerical-analysis_software) (Дата обращения 31.01.2024).
2. The Julia Programming Language. URL: <https://julialang.org/> (Дата обращения 31.01.2024).
3. MIT - Massachusetts Institute of Technology. URL: <https://web.mit.edu/> (Дата обращения 31.01.2024.).
4. MATLAB. URL: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html> (Дата обращения 31.01.2024.).
5. JuliaHub. URL: <https://juliahub.com/ui/Home> (Дата обращения 31.01.2024).
6. Project Jupyter | Home. URL: <https://jupyter.org/> (Дата обращения 31.01.2024).
7. Wolfram Mathematica: Modern Technical Computing. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/> (Дата обращения 31.01.2024).
8. Welcome to Python.org. URL: <https://www.python.org/> (Дата обращения 31.01.2024).
9. Scilab | Scilab. URL: <https://www.scilab.org/> (Дата обращения 31.01.2024).
10. Wolfram Engine. URL: <https://www.wolfram.com/engine/> (Дата обращения 31.01.2024).
11. Моисеева, Н. А. Возможности Jupyter Notebook для конструирования цифровых интерактивных учебных материалов / Н. А. Моисеева // Цифровые инструменты в образовании : Сборник статей по материалам Всероссийской научно- практической конференции с международным участием, Сургут, 06–07 апреля 2023 года. – Сургут: Сургутский государственный педагогический университет, 2023. – С. 62-64.
12. Бутенко, А. И. Использование Jupyter Book для создания полноценных интерактивных книг / А. И. Бутенко, Д. О. Ахатов, Ш. М. Дехканов // Наука и Образование. – 2023. – Т. 6, № 3.
13. Логинова, Л. Н. Применение технологии Jupyter Notebook / Jupyter Hub для эффективного обучения в вузах / Л. Н. Логинова, М. А. Кулагин // Ректор ВУЗа. – 2021. – № 4. – С. 32-37.
14. Головатин Д.Т. Разработка свободной среды обработки математических данных на основе языка программирования Julia. Выпускная квалификационная работа (Бакалаврская работа) / Головатин Давид Тимурович; Кубанский Государственный Университет. – Краснодар, КубГУ, 2023.
15. Github - EnckyOff/SysOpenMath. URL: <https://github.com/EnckyOff/SysOpenMath> (Дата обращения 31.01.2024).

16. Github - jupyter-xeus/xeus-cling: Jupyter kernel for the C++ programming language. URL: <https://github.com/jupyter-xeus/xeus-cling> (Дата обращения 31.01.2024).

**D.T. Golovatin, E. R. Alekseev, E.A. Verbicheva, K.V. Doga**  
Kuban State University

## **TOOLS FOR THE DEVELOPMENT OF SPECIALIZED MATHEMATICAL PACKAGES**

**Keywords:** *SOM open mathematics system, SysOpenMath (SOM), build script, math package, open source software, Jupyter, Julia, Python, Scilab, Octave, Wolfram Language, xeus-cling.*

**Abstract.** *New concept for the development of mathematical packages is proposed. Discusses the basic principles of the free mathematical environment, on the basis of which the open mathematics system was created – COM (SysOpenMath).*

**Д.Е. Коромбалёв, С.Е. Шерстнёв**  
ООО «АПРОСА Информационные технологии»  
**Р.А. Никеев, Н.В. Макушинская**  
АО «ПО «Кристалл»

УДК 004.42

## **РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА СБОРА И АНАЛИЗА ПАРАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ ДЛЯ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ РАЗМЕТКИ АЛМАЗОВ DIAMARK И ADVISOR STATION**

**Ключевые слова:** *время простоя, разметка алмазов, бриллиант, база данных, распределение нагрузки, оптимизация, СУБД MS SQL Server, язык программирования C#, Entity Framework Core, многопоточность.*

*В данной работе приводится описание созданного авторами комплекса приложений для решения задачи оптимизации производственного процесса и эффективного использования оборудования. Кроме того, в статье приведён алгоритм вычисления времени простоя оборудования для разметки алмазов на основании данных, получаемых из лог-файлов, содержащих последовательности технологических операций.*

**Введение.** Одной из ключевых операций в технологии обработки алмазов и производства бриллиантов является разметка. Именно от нее

во многом зависит эффективность использования сырья, качество получаемого бриллианта и его конечная стоимость. Для выполнения разметки алмазов на производстве используются программно-аппаратные комплексы DiaMark, Advisor Station и Station QC, представляющие собой специализированное оборудование и компьютер с установленным программным обеспечением фирмы Sarine Technologies Ltd, Израиль. Advisor® – это широко используемая в мире компьютеризированная система планирования обработки алмазов. Она объединяет информацию о сканировании внутренних включений в сырье и производит геометрический 3D-анализ необработанного алмаза. Все основные операции с камнем, производимые специалистом в процессе работы этих комплексов, записываются в виде структурированных текстовых инструкций-команд в лог-файл и локально хранятся на рабочей станции в течение 7 дней. Авторами было разработано ПО (программное обеспечение) для сбора и анализа данных, хранящихся в таких файлах. Это позволяет оптимизировать работу предприятия путем динамического перераспределения оборудования между структурными подразделениями и распределения нагрузки на оборудование в рамках одного подразделения. Кроме того, количественная статистика производимых операций позволяет более точно запланировать потребности в запасных частях с учётом их планового ресурса.

**Описание и структура лог-файла.** Операции разметки, производимые на оборудовании, делятся на машинные и компьютерные. Машинные операции выполняются только на оборудовании DiaMark. Компьютерные операции могут выполняться на любом из 3-х типов оборудования. Типы основных операций и их кодовое представление в лог-файле приведены в табл. 1.

*Таблица 1*

1. Операция	2. Тип операции	3. Кодовое представление
4. Сканирование	5. машинная	6. MapStone
7. Сканирование	8. машинная	9. LaserMapStone
10. Пересканирование	11. машинная	12. Realign[вид пересканирования] MapStone
13. Пересканирование	14. машинная	15. Realign[вид пересканирования] LaserMapStone
16. Маркирование	17. машинная	18. 'Current Mark Selections
19. Открытие проекта	20. компьютерная	21. LoadStone
22. Открытие вкладки Inclusion	23. компьютерная	24. EnterInclusionEditor
25. Добавление включения	26. компьютерная	27. AddInclusionEditorInclusion
28. Удаление включения	29. компьютерная	30. DeleteInclusionEditorInclusion

31. Построение проекции	32. компьютерная	33. AddInclusionEditorInclusionPlot AddInclusionEditorInclusionPlot
34. Удаление проекции	35. компьютерная	36. DeleteInclusionEditorInclusionPlot
37. Вписывание	38. компьютерная	39. Allocate
40. Печать этикетки	41. компьютерная	42. PrintLabel
43. Сохранение	44. компьютерная	45. SaveStoneAs 46. 'SavedStone: [имя файла]
47. Автосохранение	48. компьютерная	49. 'Saved Stone: [имя файла]
50. Открытие вкладки Cut	51. компьютерная	52. Calculate 0
53. Открытие вкладки Symmetry	55. компьютерная	56. Calculate 2
57. Изменение параметров бриллианта	58. компьютерная	59. CalculatorSetCurrentAction [номер параметра]
60. Сохранение результата с вкладки FineTune	61. компьютерная	62. CalculatorSave

**Алгоритм расчёта времени простоя.** Одной из основных задач анализа эффективности использования разметочного оборудования является учёт и статистика времени простоев. В настоящий момент за время начала рабочего дня ( $T_{н.р.}$ ) принято решение считать дату и время создания лог-файла ( $T_{с.ф.}$ ), временем завершения рабочего дня ( $T_{з.р.}$ ) – дату и время последнего изменения лог-файла ( $T_{п.и.}$ ). В простейшем случае  $T_{н.р.} = T_{с.ф.}$ ,  $T_{з.р.} = T_{п.и.}$ . Однако, в тех случаях, когда происходит одновременная работа в нескольких открытых вкладках приложения Advisor над несколькими проектами, количество лог-файлов определяется числом открытых вкладок, что осложняет их автоматизированную обработку. В таком случае  $T_{н.р.} = \min\{T_{1\ с.ф.}, T_{2\ с.ф.}, \dots, T_{k\ с.ф.}\}$ ,  $T_{з.р.} = \max\{T_{1\ п.и.}, T_{2\ п.и.}, \dots, T_{k\ п.и.}\}$ , где  $k$  – количество файлов. Продолжительность рабочего дня  $P = T_{з.р.} - T_{н.р.}$ . Ниже приведен фрагмент содержимого лог-файла:

```
LoadStone "4_12_6360_1100", "S:\Sort\6360 G\6360 1100"
ResetViewers
'ExportResults
EnterInclusionEditor
SelectInclusionEditorInclusion
SelectInclusionEditorInclusionPlot
ResetViewers
SaveStoneAs
'ExportResults
'Saved Stone: 6360 1100 G MS OK
*****
SelectInclusionEditorInclusion
'Saved Stone: 0.543CT_4_12_6360_1500_2_11_2023_10_35_18
SelectInclusionEditorInclusionPlot
```

SelectInclusionEditorInclusion

'Saved Stone: 0.543CT\_4\_12\_6360\_1500\_2\_11\_2023\_10\_45\_48

'Saved Stone: 0.543CT\_4\_12\_6360\_1500\_2\_11\_2023\_10\_56\_18

SelectInclusionEditorInclusionPlot

SelectInclusionEditorInclusion

'Saved Stone: 0.543CT\_4\_12\_6360\_1500\_2\_11\_2023\_11\_6\_48

'Saved Stone: 0.543CT\_4\_12\_6360\_1500\_2\_11\_2023\_11\_17\_18

'Saved Stone: 0.543CT\_4\_12\_6360\_1500\_2\_11\_2023\_11\_27\_48

'Saved Stone: 0.543CT\_4\_12\_6360\_1500\_2\_11\_2023\_11\_38\_18

'Saved Stone: 0.543CT\_4\_12\_6360\_1500\_2\_11\_2023\_11\_48\_48

'Saved Stone: 0.543CT\_4\_12\_6360\_1500\_2\_11\_2023\_11\_59\_18

DeleteInclusionEditorInclusions

Простой оборудования определяется как два или более подряд идущих автосохранения проекта, которые в лог-файле определяются инструкциями 'Saved Stone без предшествующей инструкции SaveStoneAs. Одиночные инструкции 'Saved Stone без предшествующей инструкции SaveStoneAs определяют автосохранение проекта, которое происходит вне зависимости от того, выполняются ли прочие технологические операции в данный момент времени или нет, и потому простое не считаются. Так как одновременно может идти работа над несколькими проектами и лог-файлов может быть несколько, периоды простоя по данным одного файла могут накладываться на период работы по данным из другого файла. В связи с этим был разработан алгоритм расчета времени простоя, учитывающий такие особенности.

Пусть имеется  $k$  штук файлов за один рабочий день, подлежащих обработке. Рассмотрим  $j$ -й файл. Обозначим  $V_{1,j} = T_{j \text{ с.ф.}}$  – время создания  $j$ -го файла. Далее приступим к анализу содержимого файла. Рассмотрим первый блок подряд идущих инструкций 'Saved Stone, определяющий начало простоя. Обозначим  $E_{1,j}$  – время первой инструкции 'Saved Stone в блоке,  $V_{2,j}$  – время последней инструкции 'Saved Stone в данном блоке. Аналогично рассмотрим следующий блок подряд идущих 'Saved Stone и получим  $E_{2,j}$  и  $V_{3,j}$ . И так далее. После рассмотрения последнего блока простоя в файле получим  $E_{n-1,j}$  и  $V_{n,j}$ .  $E_{n,j} = T_{j \text{ п.и.}}$  – время последнего изменения  $j$ -го файла. Обозначим данное множество  $R_j = \{(V_{i,j}, E_{i,j}), i = 1 \dots n\}$ . Аналогично рассмотрим все остальные файлы из набора. Количество пар элементов  $V$  и  $E$  для каждого файла определяется количеством найденных блоков работы, а количество пар элементов  $E$  и  $V$  – найденных блоков простоя. В итоге получим множество  $Q = \{R_j, j = 1 \dots k\}$ . Поместим все элементы  $V$  и  $E$  из множества  $Q$  в единый массив. Выполним сортировку данного массива по возрастанию времени символьных меток, а затем по самим символьным меткам  $V$  и  $E$  по алфавиту в порядке убывания. Далее введем переменную-счетчик (обозначим ее  $m$ ) и дадим начальное значение 0. Осуществим последовательный проход по массиву. Встречая символьную метку  $V$ , будем увеличивать значение  $m$  на 1, встречая символьную метку  $E$ ,

значение  $m$  будем уменьшать на 1. При проходе списка момент, когда  $m = 0$ , есть начало времени простоя. Очевидно, что это произойдет только в случае метки Е. Обозначим такой случай  $E_{m=1}$ . Следующее увеличение значения  $m = 1$  – момент завершения времени простоя. Это произойдет в случае метки В. Обозначим такой случай  $B_{m=0}$ . Пусть таких случаев, когда  $m$  меняет значение с 0 на 1, имеется  $t$  штук. Таким образом, общее время простоя одной установки за рабочий день  $S = \sum_{i=1}^t (B_{i(m=1)} - E_{i(m=0)})$ .

**Описание программного комплекса.** Программный комплекс состоит из 2-х приложений, которые разработаны на языке программирования С# с использованием платформы .NET 6 и технологии Windows Forms. Для построения работы с базой данных используется Microsoft Entity Framework Core 7. В качестве СУБД используется Microsoft SQL Server. Для формирования отчётов в виде файлов Microsoft Excel используется библиотека EPPlus 4.5.3.3.

Приложение-агент Advisor Action Log устанавливается на каждом рабочем месте и осуществляет сбор и парсинг лог-файлов, найденных в соответствующих рабочих каталогах. При этом отбираются файлы за все даты, исключая текущий день. Также производится проверка, были ли файлы обработаны ранее. Такие экземпляры исключаются из дальнейшей обработки. Последовательность операций по обработке файлов выглядит следующим образом:

1. получение списка файлов из каталогов;
2. отбор файлов, не обработанных ранее;
3. деление файлов на группы по датам создания;
4. чтение содержимого отобранных файлов, относящихся к одному рабочему дню;
5. подсчёт времени простоя за день;
6. подсчёт количества технологических операций;
7. транзакционная запись собранной информации и сведений о файлах в базу данных.

Каждый из этапов обработки контролируется на ошибки. В случае если хотя бы один из файлов в наборе за рабочий день прочитан или обработан некорректно, весь набор файлов за эту дату не обрабатывается, производится запись в список событий с указанием причины отмены обработки и происходит переход к обработке группы файлов за следующую дату, если таковая имеется.

Приложение-клиент Advisor Action Client предоставляет доступ к хранящейся в базе данных собранной информации. Оно позволяет формировать отчёты в виде документов Excel по выбранным фильтрам: типу оборудования и его отдельным экземплярам, типам шаблонов отчетов. Также есть возможность задавать временные нормы на каждую машинную или компьютерную технологическую операцию.

Ввиду большого количества вычислений при обработке данных, получаемых по запросам из базы данных, особое внимание было уделено распараллеливанию вычислительных процессов в приложении-клиенте. В частности, многопоточно и асинхронно обрабатываются данные, относящиеся к одной и той же установке. В случае большого количества выбранного оборудования и выбранного временного промежутка это дает существенный прирост в скорости формирования отчёта приложением. Для распараллеливания используются возможности классов Task и Parallel языка C# из пространства имен System.Threading.Tasks.

**Заключение.** В настоящее время разработанный программный комплекс внедрен в производственный процесс в АО «ПО «Кристалл», г. Смоленск и эксплуатируется более чем на 120 рабочих местах. Произведено опытное развертывание на производственной площадке в г. Москве и в ближайшей перспективе планируется развертывание на производственной площадке в г. Барнауле. При этом вся информация сохраняется в единую централизованную базу данных, в которой хранятся данные, получаемые со всех производств.

### Литература

1. Джозеф Албахари. C# 9.0. Справочник. Полное описание языка. СПб.: ООО «Диалектика», 2021. 1056 с.
2. <https://sarine.com/products/sarine-advisor/>.
3. <https://metanit.com/sharp/tutorial/>.

**D.E. Korombalev, S.E. Sherstnev**  
*ALROSA Information Technologies LLC*  
**R.A. Nikeenkov, N.V. Makushinskaia**  
*JSC Kristall Production Corporation*

### DEVELOPMENT OF A SOFTWARE PACKAGE FOR COLLECTING AND ANALYSING PARAMETERS OF TECHNOLOGICAL OPERATIONS FOR DIAMARK AND ADVISOR STATION COMPUTER DIAMOND MARKING SYSTEMS

**Keywords:** *downtime, diamond marking, diamond, database, load balancing, optimization, MS SQL Server DBMS, C# programming language, Entity Framework Core, multithreading.*

**Abstract.** *This paper describes a software package developed by the authors to solve the problem of production process optimization and equipment usage efficiency. In addition, the paper introduces an algorithm for calculating the downtime of diamond marking equipment based on data retrieved from the log files containing sequences of production operations.*

**В.Р. Кристалинский**  
*Смоленский государственный университет*  
**П.Л. Лютикас**  
*ВА ВПВО ВС РФ*

УДК 519.688

## **О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРФЕЙСА МЕЖДУ ДОКУМЕНТОМ WOLFRAM MATHEMATICA И ПРОЕКТОМ VISUAL STUDIO НА ЯЗЫКЕ C#**

Ключевые слова: *система Wolfram Mathematica, язык C#, модель на графах*

*В данной статье рассматривается технология подключения документа Wolfram Mathematica к проекту, разработанному в среде Visual Studio на языке C#. В качестве примера рассматриваются документы Wolfram Mathematica, реализующие возможности системы по исследованию марковских процессов, представленных в виде графа состояний.*

Система Wolfram Mathematica предоставляет большие возможности по исследованию математических моделей самого различного вида. При использовании этой системы пользователю предоставляется достаточно простой и удобный интерфейс. Однако во многих случаях в ходе исследований или учебного процесса может оказаться более предпочтительным использование привычного пользовательского интерфейса приложений Windows. Система Wolfram Mathematica дает возможность это сделать. А именно, можно построить проект на языке программирования C#, в котором подключается документ Wolfram Mathematica, но ввод и вывод данных осуществляется так, как это обычно делается в приложениях Windows Forms. В качестве примера таких проектов рассмотрим реализацию математических моделей сложных систем, описываемых с помощью марковских процессов. Реализация этих моделей средствами Mathematica рассмотрена нами в работах [1-3].

В работах [1-2] нами рассматривалась математическая модель функционирования сложной технической системы (зенитной ракетной батареи). Функционирование данной системы при сделанных в работах [1-2] предположениях описывается с помощью графа состояний, содержащего 120 вершин. Система Wolfram Mathematica позволяет, как показано в указанных работах, эффективно реализовать данную модель.

Рассмотрим подключение документа, реализующего модель к проекту на языке C#. Создадим проект Windows Forms в среде Visual Studio. Добавим к проекту библиотеку Wolfram.NETLink.dll и добавим

на панель инструментов компонент MathKernel. Добавим этот компонент на форму. Все эти действия описаны в статье [4]. После этого можно подключать к приложению проект Wolfram Mathematica.

Ввод исходных данных (вероятностей огневого поражения элементов зенитно-ракетного комплекса (ЗРК) и воздушных целей, а также времени цикла стрельбы ЗРК и средств воздушного нападения) осуществляется из формы Windows. Поскольку разделителем десятичных дробей в Mathematica служит точка, исходные данные должны быть преобразованы. После этого их нужно представить в виде рациональных чисел, поскольку только в таком виде они могут использоваться при моделировании марковского процесса. Это уже делается с помощью команд Wolfram Mathematica, например:

```
mathKernel1.Compute("Q0= Rationalize[" + H5+"]");
```

После этого строим вектор вероятностей начальных состояний.

```
mathKernel1.Compute("P0 = Table[0, {120}]);  
mathKernel1.Compute("P0[[1]]=1");
```

Затем строим матрицу переходов

```
mathKernel1.Compute("P[[16,1]]=0");  
mathKernel1.Compute("P[[31, 1]]=gamma2");  
mathKernel1.Compute("P[[61, 1]]=0");  
mathKernel1.Compute("P[[2, 2]] = (lambda1 + lambda2 + lambda3)+ alpha1  
*Q1 + alpha2 * Q2");
```

и т.д.

Строим главную диагональ матрицы переходов

```
mathKernel1.Compute("For i=1,i<=120,i++,For[j=1,j<=120,j++,M[[i]]=M[[i]]+P[[i,j]]");  
mathKernel1.Compute("For i=1,i<=120,i++,P[[i,i]]=-M[[i]]");
```

После этого можно осуществлять решение графа, то есть получение функций состояний

```
mathKernel1.Compute("Res = ContinuousMarkovProcess[P0, P]");
```

Далее получаем значение предельной вероятности одного из состояний, например, сто двадцатого, и выводим его на форму

```
mathKernel1.Compute("tt=N[PDF[Res[Infinity], 120]]");  
tbRes.Text = mathKernel1.Result.ToString();
```

Как указано в [2], программа в Wolfram Mathematica позволяет получить выражения для всех функций состояний и их графики. Тестирование программы на языке C# показало, что при попытке

получить аналитическое выражение для любой из функций состояний либо построить график она «зависает». Скорее всего, это связано с исчерпанием доступной программе оперативной памяти. Рабочее окно программы показано на рис.1.

Таким образом, при анализе графа, рассматриваемого в статьях [1-2] с помощью документа Wolfram Mathematica, встроенного в программу на С#, можно получить только значения предельных вероятностей состояний. В случае, если необходимо исследовать функции, определяющие зависимости вероятностей состояний от времени, нужно пользоваться документом Wolfram Mathematica.

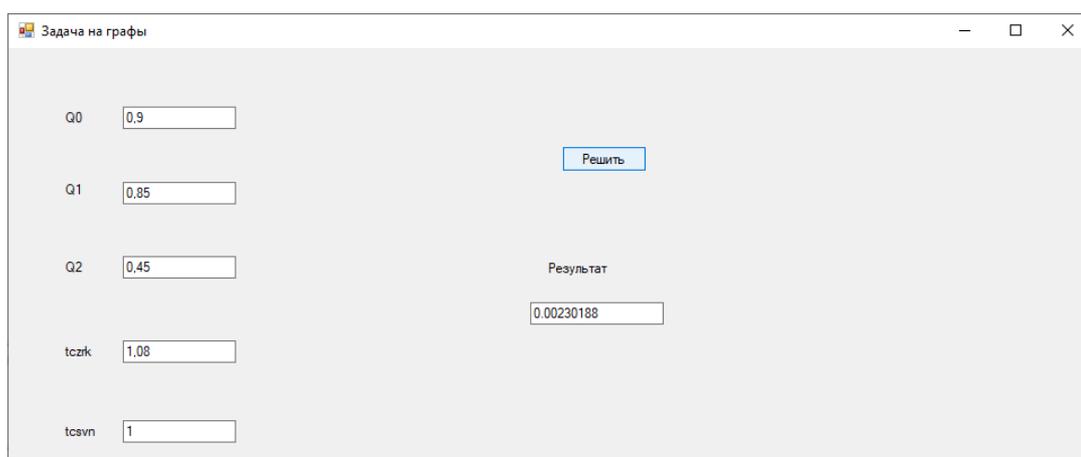


Рис.1. Рабочее окно программы для первой модели

Рассмотрим теперь граф состояний системы, моделирующей противодействие системы противовоздушной обороны (ПВО) налету группы из нескольких беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Подходы к построению этой модели представлены в работах М.С. Болдырева и Д.В. Зайцева [5-8], в которых изложен метод «волны вероятности» для расчета вероятностей предельных состояний графа. Исходными данными для расчетов в соответствии с данной моделью являются: общая интенсивность потока БПЛА, входящих в зону действия системы защиты объекта; интенсивность потока одного БПЛА, пролетающего через зону действия системы защиты к охраняемому объекту (величина, обратная времени пролета БПЛА через зону противодействия к охраняемому объекту); а также произведение вероятности поражения БПЛА на величину, обратно пропорциональную времени цикла стрельбы по одной цели.

Поскольку мы исходим из того, что даже прорыв одного БПЛА к прикрываемому объекту повлечет за собой уничтожение этого объекта, нас в первую очередь интересует вероятность состояния (в нашем случае  $S_{64}$ ), в котором все БПЛА поражены.

Для случая семи БПЛА граф показан на рис. 2.

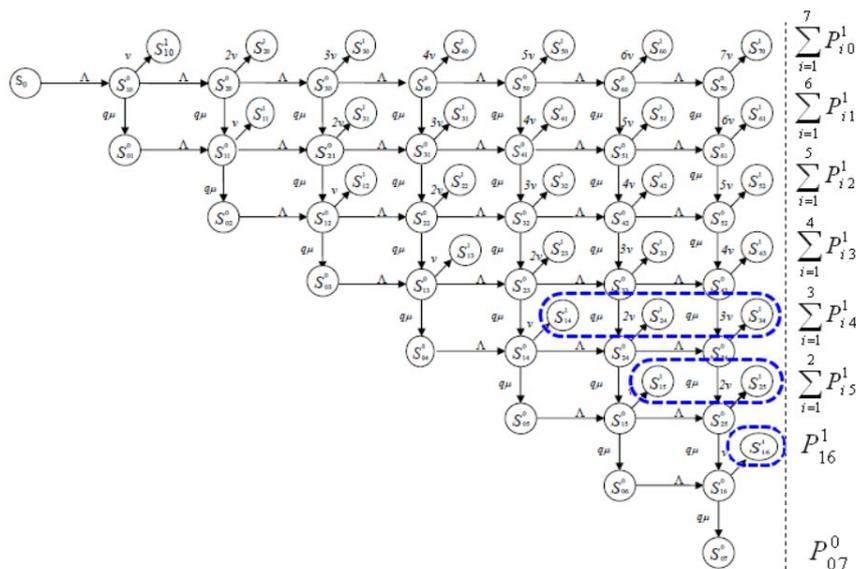


Рис.2. Граф состояний системы

Рассмотрим более подробно состояния графа на рис. 2 и переходы между ними. Состояние  $S_0$  – начальное, в зоне его поражения целей противника не обнаружено. Из состояния  $S_0$  возможен лишь один переход в состояние  $S_{10}^0$  с интенсивностью  $\Lambda$ . Данное состояние означает, что один ударный БПЛА находится в зоне поражения комплекса защищаемый объект не поражён. Из состояния  $S_{10}^0$  возможен переход в состояния: а) с интенсивностью  $\Lambda$  в состояние  $S_{20}^0$  – два ударных БПЛА находятся в зоне действия комплекса, защищаемый объект не поражён; б) с интенсивностью  $q_\mu$  в состояние  $S_{01}^0$  – ударный БПЛА поражён; в)  $S_{10}^1$  – один ударный БПЛА не поражён с помощью комплекса, пролетел к защищаемому объекту и поразил его. Интенсивность поражения объекта соответствует интенсивности потока одного ударного БПЛА  $v$  в зоне поражения комплекса.

Остальные состояния графа и переходы между ними описываются аналогично.

Описание исследования данной модели в системе Wolfram Mathematica приведено в [3].

Так же, как и в предыдущем случае, использование взаимодействия документа в Mathematica с программой на языке C# позволяет работать в стандартном интерфейсе, что в ряде случаев оказывается более целесообразным. Кроме того, в дальнейшем возможна разработка web-сервиса, реализующего указанную задачу.

Подключение к проекту системы Wolfram Mathematica, преобразование исходных данных и построение матрицы переходов осуществляется так же, как и в случае первой модели, например

```
mathKernel1.Compute("L= Rationalize[" + L1+""]");
```

Однако теперь кроме предельных вероятностей состояний можно получить также аналитические представления зависимостей этих

вероятностей от времени и графики этих функций с помощью следующего кода:

```
mathKernel1.Compute("U[t_]=PDF[Res[t],64]");  
    pictureBox1.Image = null;  
mathKernel1.GraphicsHeight = pictureBox1.Height;  
    mathKernel1.GraphicsWidth = pictureBox1.Width;  
mathKernel1.Compute("Plot[U[t], {t, 0, 1300}, PlotRange -> Full]");  
    if (mathKernel1.Graphics.Length > 0)  
        pictureBox1.Image = mathKernel1.Graphics[0];
```

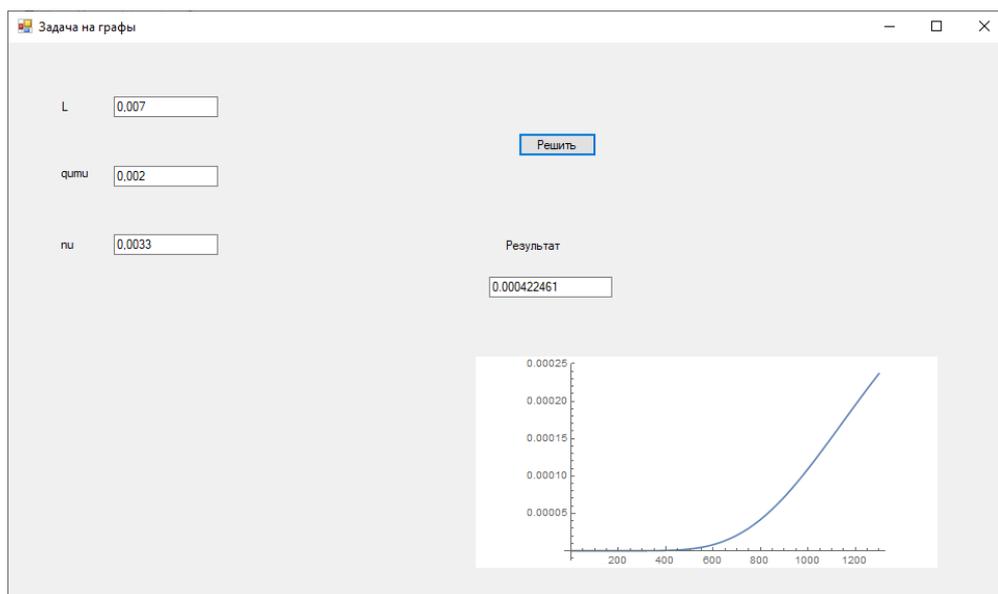


Рис.3. Рабочее окно программы для второй модели

Рабочее окно программы с результатами ее работы представлены на рис. 3.

Таким образом, имеется возможность объединять в единое целое колоссальные возможности СКМ Wolfram Mathematica и стандартный интерфейс, а также технологии построения web-сервисов, предоставляемые языком C#. На этой основе можно эффективно решать целый ряд задач научно-исследовательского и прикладного характера.

Данный подход переключается с технологией разработки кроссплатформенных приложений, описанной, в частности, в работе аспиранта СмолГУ Е.И. Гончарова [9]. Авторы выражают ему благодарность за полезное обсуждение рассматриваемых в настоящей статье вопросов.

## Литература

1. Кристалинский, В. Р. Имитационная математическая модель функционирования сложной технической системы / В. Р. Кристалинский, П. Л. Лютикас // Системы компьютерной математики и их приложения. – 2022. – № 23. – С. 12-22.

2. Кристалинский, В. Р. Об исследовании имитационной математической модели сложной технической системы в современных системах компьютерной математики / В. Р. Кристалинский, П. Л. Лютикас, Е. И. Пахомов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2022. – Т. 18, № 2. – С. 391-403. – DOI 10.25559/SITITO.18.202202.391-403.

3. Кристалинский В.Р. О реализации модели противодействия налету группы БПЛА в системе Mathematica. Материалы межвузовского научно-практического семинара «Вопросы информатизации образовательной деятельности, научных исследований и управления», Смоленск, ВА ВПВО ВС РФ. –2023, с. 80-81

4. Используем возможности Wolfram Mathematica в .NET приложениях. URL: <https://habr.com/ru/articles/154169/>

5. Зайцев, Д. В. Матричный подход к моделированию боевых действий / Д. В. Зайцев, М. С. Болдырев // Вооружение и экономика. – 2019. – № 3(49). – С. 38-46.

6. Зайцев, Д. В. Принципы построения математических моделей боя в условиях военных конфликтов низкой интенсивности / Д. В. Зайцев, Д. Ю. Сосков, В. Е. Салов // Вооружение и экономика. – 2016. – № 3(36). – С. 44-53.

7. Зайцев, Д. В. Моделирование боя на основе теории сетей массового обслуживания / Д. В. Зайцев // Стратегическая стабильность. – 2007. – № 4(41). – С. 30-37.

8. Зайцев Д.В., Болдырев М.С. Математическое моделирование противодействия беспилотным летательным аппаратам. Монография. – Сергиев Посад: 12 ЦНИИ Минобороны России. 2021. – 144 с.

9. Гончаров, Е. И. Средства разработки современных кроссплатформенных десктоп приложений / Е. И. Гончаров // Системы компьютерной математики и их приложения. – 2023. – № 24. – С. 98-102.

**V.R.Kristalinskii**

Smolensk State University

**P.L.Luticas**

Military Academy of the anti-aircraft defense systems of the Armed Forces  
of the Russian Federation

## **ABOUT BUILDING AN INTERFACE BETWEEN A WOLFRAM MATHEMATICA DOCUMENT AND A VISUAL STUDIO PROJECT IN C#**

**Keywords:** *Wolfram Mathematica system, C# language, graph model*

**Abstract.** *This article discusses the technology of connecting a Wolfram Mathematica document to a project developed in Visual Studio in C#. As an example, Wolfram Mathematica documents are considered, which implement the capabilities of the system for the study of Markov processes presented in the form of a graph of states.*

## О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ ОРГАНИЗАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ АДМИНИСТРИРОВАНИЯ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Ключевые слова: *Информационная система, требования, администрирование, атрибут, регламентные работы, Аппаратно-программные платформы.*

*Данная статья представляет собой описание различных аспектов администрирования на основе разработанной информационной системы. Рассмотрены вопросы управления содержимым информационных систем, роли операторов в наполнении сайтов информацией, создание инструментов для анализа и форматирования данных, а также функции и задачи специалистов по управлению информационными системами. Данный материал представляет интерес для специалистов в области информационных технологий и администрирования систем.*

**Введение.** В процессе развития интересов населения развитых стран основной круг взаимодействия пользователей с информационным пространством обязательно включает в себя немалый набор информационных систем. Такое программное множество неизбежно включает в себя как проекты, ориентированные на конкретного единичного пользователя, так и приложения, рассчитанные на большое количество клиентов. Для упрощения работы администратора системы разработчики нередко выделяют достаточно ограниченный набор типов пользователей, например, руководитель, администратор, сотрудник с ограниченными правами и клиент, причем для привлечения новых клиентов при необходимости простейшего ознакомления с некоторыми особенностями организации выделяют пользователя типа гость, который в дальнейшем может стать как клиентом, так и сотрудником. Подобный перевод пользователя из одного типа в другой обычно осуществляет администратор информационной системы, однако данный вид деятельности не определяет собой весь круг обязанностей администратора. Разработанная информационная система позволяет проиллюстрировать особенности некоторых элементов администрирования для подобных приложений.

**Описание проекта.** Представляемая программа является информационной системой книжного интернет-магазина. Необходимо отметить, что создание приложений сетевой торговли - это серьезный и

многогранный процесс, который требует тщательного планирования и анализа.

Организация элементов администрирования информационных систем состоит из следующих опорных пунктов [1]:

### 1. Установка информационных систем.

Данный пункт включает в себя разработку реляционной модели информационной системы. В рамках реализации данной модели должны быть учтены такие пункты, как:

- выбранный перечень отношений должен быть минимальным (см. рис. 1). Отношение используется только в том случае если его необходимость обусловлена формулировкой поставленной задачи.



ID	Bookcode	Name	Author	Yearof_writing	Covertype	
1	ВК001	"Загадочное наследие"	Иванов А.Т.	1920	мягкая обложка	редактировать
2	ВК002	"Путешествие во времени"	Смирнов А.И.	1935	твёрдая обложка	редактировать
3	ВК003	"Тайна черного леса"	Кузнецов А.В.	1947	мягкая обложка	редактировать
4	ВК004	"Свет и тьма"	Попов А.Л.	1951	мягкая обложка	редактировать
5	ВК005	"Песнь о драконах"	Васильев А.П.	1963	твёрдая обложка	редактировать
6	ВК006	"Зов предков"	Петров А.М.	1976	мягкая обложка	редактировать
7	ВК007	"Секреты старого дома"	Соколов А.Г.	1982	твёрдая обложка	редактировать
8	ВК008	"Лабиринты разума"	Михайлов А.Д.	1990	мягкая обложка	редактировать
9	ВК009	"Артефакты прошлого"	Новиков А.Н.	2001	мягкая обложка	редактировать
10	ВК010	"Долина таинств"	Федоров А.С.	2010	твёрдая обложка	редактировать
11	ВК011	"Остров забытых снов"	Морозов А.Р.	2015	мягкая обложка	редактировать
12	ВК012	"Призраки прошлого"	Волков А.К.	2021	мягкая обложка	редактировать
13	ВК013	"Дыхание природы"	Алексеев А.Ю.	1925	твёрдая обложка	редактировать
14	ВК014	"Магическая история"	Лебедев А.Е.	1937	мягкая обложка	редактировать
15	ВК015	"Сквозь время и пространство"	Григорьев А.Ф.	1949	мягкая обложка	редактировать
16	ВК016	"В поисках истины"	Титов А.З.	1953	твёрдая обложка	редактировать

Рис. 1. Интерфейс приложения

- Выбранный перечень атрибутов также должен быть минимален. Атрибут включается в отношение только в том случае, если он будет использоваться.
- Также требование минимальности должно соблюдаться для первичных ключей базы данных. То есть невозможно исключить ни один атрибут из идентифицирующей совокупности атрибутов, не нарушив при этом однозначности идентификации.
- При выполнении операций над данными не должно возникать трудностей.

### 2. Оперативное управление и регламентные работы.

Для обеспечения оперативного управления и проведения регламентных работ в разрабатываемой информационной системе (ИС), необходимо учесть следующие элементы:

1. Нормализованные таблицы справочной и учетной информации.
2. Запросы к данным.
3. Формы для ввода и просмотра данных.
4. Отчеты.
5. Система многопользовательской навигации.

6. Справки для новых пользователей.
7. Организация безопасности информации.

Выделяют следующие основные регламентные работы с базой данных:

1. Плановое создание резервных копий с последующей проверкой без восстановления;
2. Плановое восстановление ранее созданных резервных копий с целью полной проверки их работоспособности;
3. Анализ носителей информации, на которых расположены системные и все необходимые базы данных;
4. Плановая проверка работы необходимых служб;
5. Плановая оптимизация производительности системы;
6. Плановая проверка целостности данных;
7. Плановая проверка корректности данных.

Первые три пункта самые критичные, так как обеспечивают восстановление системы после различных сбоев. Однако, и последние три пункта необходимо планово выполнять, чтобы и пользователям было комфортно работать (все запросы выполнялись быстро или за приемлемое время), и данные были корректными в различных отчетных системах. Пункт 7 реализуется относительно предметной области, которая применяется в информационной системе.

### 3. Аппаратно-программные платформы администрирования БД

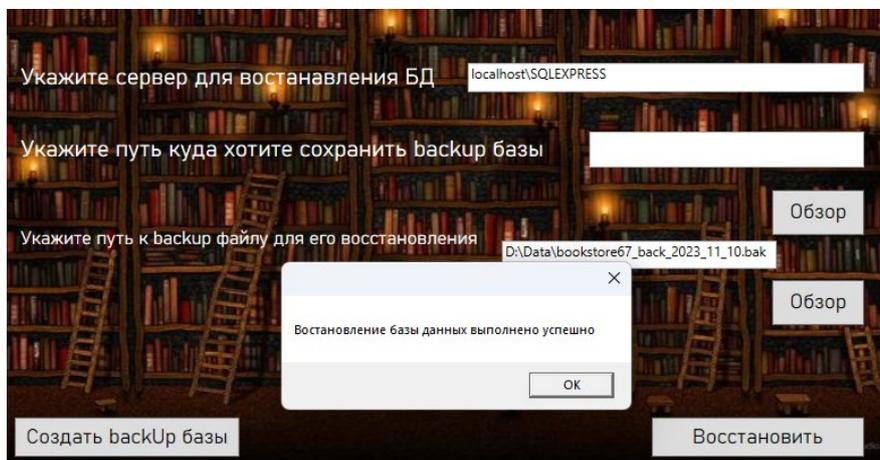


Рис. 2. Способ восстановления базы данных.

Аппаратно-программные платформы администрирования баз данных играют ключевую роль в обеспечении эффективной работы информационной системы [2]. Одним из важных аспектов их функционала является процедура восстановления данных базы данных. Этот процесс становится критическим в случае сбоев или потери информации, обеспечивая целостность и доступность данных. Разработчики и администраторы баз данных активно стремятся к

совершенствованию методов восстановления [3], чтобы минимизировать потери и обеспечить надежность хранения бизнес-данных (см. рис. 2).

#### **4. Аппаратно-программные платформы администрирования локальных сетей.**

Аппаратно-программные платформы администрирования локальных сетей. Администрирование локальных сетей включает в себя ряд ключевых аспектов, таких как проектирование и планирование топологии сети, выбор и установка программных продуктов, установка конфигурации, а также управление и обслуживание технических средств.

#### **5. Аппаратно-программные платформы администрирования служб информационных систем в глобальных сетях.**

Аппаратно-программные платформы управления информационными системами в глобальных сетях включают инструменты управления службами WWW, FTP, SMTP и NNTP, используя в качестве примера Microsoft IIS. Также в рамках данных платформ осуществляется администрирование служб маршрутизации и удаленного доступа с использованием Microsoft RRAS на серверах под управлением операционной системы Windows Server 2022.

Для эффективного администрирования информационных систем администратору необходимо обладать знанием следующих аспектов:

- Средства администрирования служб глобальных сетей.
- Средства маршрутизации.
- Средства администрирования удаленного доступа.

Также важно, чтобы администратор владел навыками по администрированию служб WWW, FTP, SMTP и NNTP, обеспечивая их эффективное функционирование.

#### **6. Администрирование и управление доступом в Internet**

Администрирование и управление доступом в Интернет являются ключевыми аспектами обеспечения безопасности и эффективного функционирования сети. Существует ряд технологий, предназначенных для контроля доступа к сетевым ресурсам. Примеры включают в себя брандмауэры, прокси-серверы, системы идентификации и аутентификации, веб-фильтры и виртуальные частные сети (VPN). Благодаря использованию этих технологий организации могут эффективно управлять политиками доступа, фильтровать контент и предотвращать несанкционированный доступ к ресурсам Интернета, обеспечивая тем самым безопасность и производительность своих сетей.

#### **7. Средства автоматизации администрирования**

Средства автоматизации администрирования занимают важное положение в оптимизации управленческих процессов и повышении эффективности организаций. Технологии автоматизации, такие как системы управления базами данных (СУБД), конфигурационные

менеджеры и инструменты мониторинга, предоставляют высокоэффективные средства для автоматизации задач, связанных с настройкой, контролем и обслуживанием информационных систем. Примерами таких технологий являются Ansible, Puppet и Docker, которые представляют собой инструменты, способствующие оптимизации администрирования через автоматизацию процессов развертывания, конфигурирования и управления приложениями в современных информационно-технологических инфраструктурах.

**Заключение.** Разработанное приложение прошло апробацию на сотрудниках интернет-площадки. Результат тестирования определил некоторые недостатки системы, которые практически ликвидированы в последней версии приложения. Однако частая рекомендация разработки мобильной версии приложения обуславливает основное направление дальнейшей модернизации [4]. Преимуществом системы является ее индивидуальность, но при этом возможность использования для площадок электронной торговли со схожими способами организации данных.

### Литература

1. Лимончелли, Томас Дж. Администрирование информационных систем и технологий / Томас Дж. Лимончелли. – Санкт - Петербург : Петербург, 2017. – 206 с.
2. Беспалов, Д.А. Администрирование баз данных и компьютерных сетей / Д.А. Беспалов, А.И. Костюк. – Ростов-на-Дону - Таганрог : Южный федеральный университет, 2020. – 127 с.
3. Сенчилов В.В., Григорьева Г.М., Ходченков В.Ю. О результатах внедрения в медицинскую практику методов интеллектуального анализа данных // Образование в цифровую эпоху: сборник статей по материалам Международной научно-практической конференции преподавателей, студентов, аспирантов, докторантов и заинтересованных лиц, Нижний Новгород, 10–11 декабря 2019 года. – Нижний Новгород: ФГБОУ ВО "Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина", 2019. – С. 183-186.
4. Сенчилов В.В., Тверской Е.А. Об одном способе разработки справочного мобильного приложения по физике для Android // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Смоленск, 22 апреля 2022 года. Том Вып. 6. – Киров: Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2022. – С. 167-173.

**D. A. Pyatyshev, V.V. Senchilov**  
Smolensk State University

### **ABOUT SOME WAYS TO ORGANIZE ADMINISTRATION ELEMENTS IN INFORMATION SYSTEMS**

**Keywords:** *Information system, requirements, administration, attribute, regulatory work, Hardware and software platforms.*

**Abstract.** *This article is a description of various aspects of information systems administration. Such as issues of managing the content of information systems, the role of operators in filling sites with information, creating tools for analyzing and formatting data, as well as the functions and tasks of information systems management specialists. The article also describes methods for troubleshooting, monitoring network nodes, and ensuring the reliability and security of distributed information systems. This material is valuable for specialists in the field of information technology and systems administration.*

**А.М. Тимотин**

*Научно-производственное предприятие «Грань» г. Смоленск*

УДК 004.051

## **ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАШИН (КИМ) НА СОВРЕМЕННОМ ПРОИЗВОДСТВЕ КАК СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ВЫПУСКАЕМОЙ ПРОДУКЦИИ**

Ключевые слова: *координатно-измерительная машина (КИМ), типовые схемы КИМ, контроль геометрических размеров, повышение качества выпускаемой продукции.*

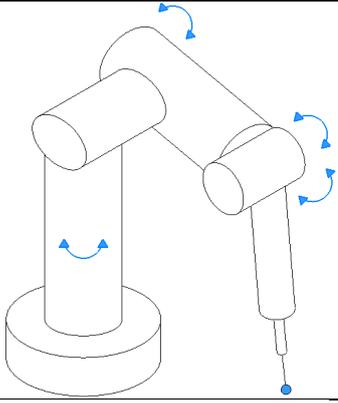
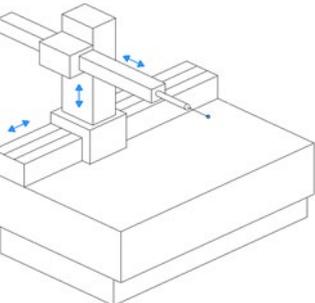
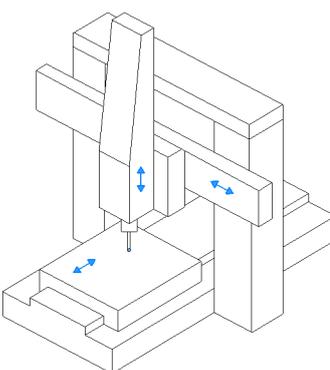
*В данной работе ставится проблема эффективного применения координатно-измерительных машин для контроля геометрии производимых деталей и рассматриваются типовые схемы КИМ.*

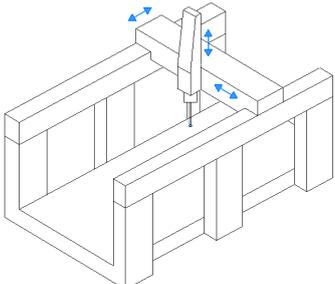
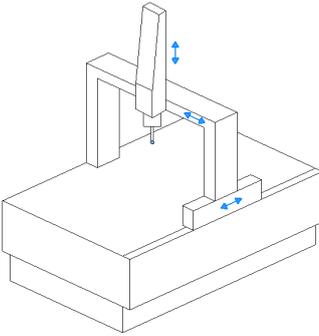
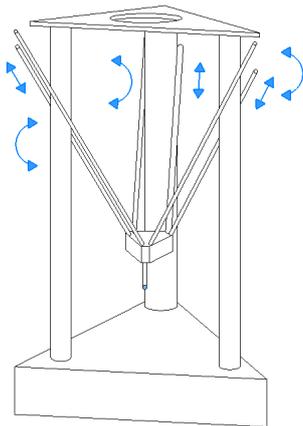
Возможности современного оборудования предполагают постоянное уменьшение производственных допусков на размеры деталей, и в настоящее время они гораздо меньше, чем были ранее. Одновременно с ужесточением допусков повышается доля трудоёмкости операций контроля в технологическом процессе изготовления деталей и изделий. В машиностроении контроль занимает около 15% общей трудоёмкости продукции, а в капитальных вложениях доля измерительных средств и контрольного оборудования достигает 20% объёма инвестиций. Поэтому точность измерений становится всё более важным фактором в стремлении поддерживать и улучшать качество продукции. При этом новые высокоточные станки требуют высокоскоростных методов измерений и контроля геометрических параметров деталей, соответствующих скоростям обработки на станках

с ЧПУ. В настоящее время одним из таких средств контроля служат координатно-измерительные машины (КИМ), в которых используется координатный метод измерения, сводящийся к последовательному нахождению координат ряда точек изделия и последовательному расчету размеров. Главное преимущество указанного метода в универсальности и возможности автоматизации процесса измерения. КИМ значительно упрощает метрологическую подготовку производства новых изделий, так как отпадает необходимость создания значительного количества средств специальной измерительной оснастки [1].

В качестве рабочего инструмента КИМ, как правило, использует контактный датчик, которым происходит «ощупывание» детали, геометрические параметры которой нужно определить. Современные КИМ позволяют измерять размеры с точностью до 0,28 мкм [2].

Таблица 1. Основные типы координатно-измерительных машин

Тип	Схема	Характеристика	
		достоинства	недостатки
Рука		Самые доступные. Мобильны, возможна переноска КИМ к месту замера.	Нет автоматического режима, все измерения проводятся в ручном режиме. Обладает не высокой точностью.
Горизонтальная (консольная)		Повышенная точность за счет достаточной жесткости системы.	Чувствительна к перемещению пиноли и изменению массы установленных на ней измерительных устройств.
Продольная 2-х стоечная (с неподвижным порталом)		Наиболее точная из всех типов КИМ.	Необходимость термостатированного помещения. Контроль изделий малых габаритов. Высокая стоимость.

Мостовая		Повышенная жесткость. Возможность замеров больших деталей.	Имеет ограниченный доступ с трёх сторон для загрузки деталей.
Портальная		Повышенная жесткость. Загрузка крупногабаритных деталей. Высокая чувствительность. Наличие массивной плиты стола позволяет улучшить условия измерений.	Высокая стоимость.
Гексапод (шести осевая КИМ)		6 степеней свободы позволяет быстрее замерять сложные детали с поднутрениями, где необходим подворот щупа.	Высокая стоимость.

Большое разнообразие конфигураций и исполнений КИМ позволяет выбрать систему, отвечающую требованиям и задачам, которые решаются на предприятии. Основные типовые схемы приведены в таблице 1. В рамках одной типовой схемы КИМ могут отличаться габаритами и соответственно размерами измеряемого (рабочего) пространства. При этом необходимо учитывать, что, магазин для измерительных модулей и щупов, а так-же измерительная головка из-за своих габаритов могут уменьшать рабочее измерительное пространство. При выборе и покупке КИМ возможно придется учесть запас на случай модернизации производства на выпуск более габаритной продукции.

Необходимым условием успешного применения КИМ в производственном процессе является компетентный оператор, который может определить допуск, плотность расположения точек, оценить графические результаты замеров и грамотно их интерпретировать [3].

Стоит учитывать, что на начальных этапах процесс замера с помощью КИМ может отнимать много времени по этой причине нет необходимости производить полный контроль всех размеров и геометрических параметров. Наиболее целесообразен контроль самых сложных мест, которые невозможно проверить универсальными способами и контроль мест, которые вызывают сомнения по причинам большого числа набегающих погрешностей при замере универсальными средствами измерений. При таком использовании в системе контроля качества на производстве значительно усиливается контроль выпускаемой продукции, а применение КИМ на ранних стадиях изготовления продукции (на пооперационном контроле) даёт преимущество по своевременному устранению несоответствий и оперативной корректировке геометрии выпускаемой продукции. По мере освоения и наработок программ замеров время на последующие замеры будет существенно сокращаться, а в случае необходимости 100% контроля выпускаемой продукции появляется существенное преимущество времени замера по отношению ручного контроля каждой детали. Это особенно заметно на серийном выпуске продукции, где появляется возможность в разы сократить время контроля за счёт работы в автоматическом режиме ЧПУ.

### Литература

1. Координатные измерительные машины и их применение. А.А. Гапшис, А.Ю. Каспарайтис, М.Б. Модестов и др. – М.: Машиностроение, 1988. – 323 с., ил.
2. Сверхвысокоточные КИМ премиум класса ООО «Митутойо РУС»: [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://shop.mitutoyo.ru>, свободный.
3. Пекарш А.И., Феоктистов С.И., Колыханов Д.Г., Шпорт В.И. Координатно-измерительные машины и комплексы // Наука и технологии в промышленности 2011 № 3. С.36-48.

**A.M. Timotin**

Smolensk State, research and production enterprise "Gran"

### **THE USE OF COORDINATE MEASURING MACHINES (CMM) IN MODERN PRODUCTION AS A WAY TO IMPROVE THE EFFICIENCY OF QUALITY CONTROL OF PRODUCTS**

**Keywords:** *coordinate measuring machine (CMM), typical CMM schemes, geometric dimension control, product quality improvement.*

**Abstract.** *In this paper, the problem of the effective use of coordinate measuring machines for controlling the geometry of manufactured parts is posed and typical CMM schemes are considered.*

## **ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ АУДИОФАЙЛОВ**

Ключевые слова: *пакет Octave, аудиофайл, временное представление сигналов, алгоритмы обработки, спектральное представление сигналов.*

*В настоящей статье рассмотрены способы визуализации методов обработки звуковых файлов. На основе анализа временного и спектрального представления сигналов возможно провести сравнение способов обработки без прослушивания результатов.*

**Введение.** Цифровизация окружающего мира становится повсеместной: в цифровом виде информация хранится, обрабатывается, передается. Для реализации этих процессов требуется предварительное форматирование данных, получаемых от различных источников – как аналоговых, так и цифровых, то есть приведение к единому стандарту. Компьютерные пакеты, осуществляющие обработку исходных данных, находят широкое применение, однако для их корректного использования необходимы четкое понимание реализованных алгоритмов и проверка правильности использования встроенных методов. Для удобства интерпретации результатов работы применяют в том числе методы визуализации результатов. В некоторых случаях (например, при анализе работы алгоритмов сжатия графической информации) результат работы алгоритмов можно наглядно представить и оценивать, а при анализе алгоритмов обработки аудиоинформации обычно требуется прослушивание звуковых файлов. В настоящей статье сделана попытка визуализировать работу алгоритмов обработки аудиофайлов с использованием пакета Octave. Для сравнения представлены данные экспертных оценок, полученные при прослушивании обработанных аудиофайлов.

В пакете Octave реализованы все функции пакета MatLab, необходимые для обработки аудиофайлов, формирования фильтров, определения спектров сигналов, их полное описание есть в [1].

**1. Формирование файла данных.** В пакете Octave есть возможность формирования массива цифровых данных, получаемых из стандартных аудиофайлов. Для этого требуется перекодировка аудиофайла в формат .ogg, выполнение которой возможно многими стандартными способами, например, в конвертере Convertio [2]. Полученный массив представляет собой два вектора-столбца,

отражающего две дорожки звукового файла. Прослушивание получаемого файла возможно прямо из программы, написанной в пакете Octave. Ниже приведен фрагмент кода:

```
%Считываем файл песни
filename='detskie-v-lesu-rodilas-jolochka.ogg';
%Формируем массив и определяем частоту дискретизации
[x, FS] = audioread (filename);
% разбиваем на отдельные дорожки и формируем новый массив
x1 = x(:,1); x2 = x(:,2); x3 = [x1,x2]; % это возможность прослушать
% вывод на график одной дорожки для примера с частотой FS
t = 1 : FS : length(x1);
plot(t/x1)
% проигрываем эту песню
player = audioplayer(x3, FS);
play(player);
```

Полученный массив данных можно представить в графической форме (временное представление сигнала), оценить его гистограмму, а также определить спектр сигнала (спектральное представление).

Эти основные представления данных аудиофайла будут использованы для анализа правильности результатов цифровой обработки. Наряду с исследуемым звуковым файлом (использован фрагмент песенки «В лесу родилась елочка») необходимо рассмотреть тестовые сигналы, на которых проверяется работа алгоритма. В качестве тестового сигнала возьмем сигнал с постоянно возрастающей частотой и медленно меняющейся амплитудой. На рисунках 1 и 2 приведены временные представления тестового и исследуемого сигналов. Их гистограммы и спектральные представления. Эти данные будут использованы для сравнения результатов обработки.

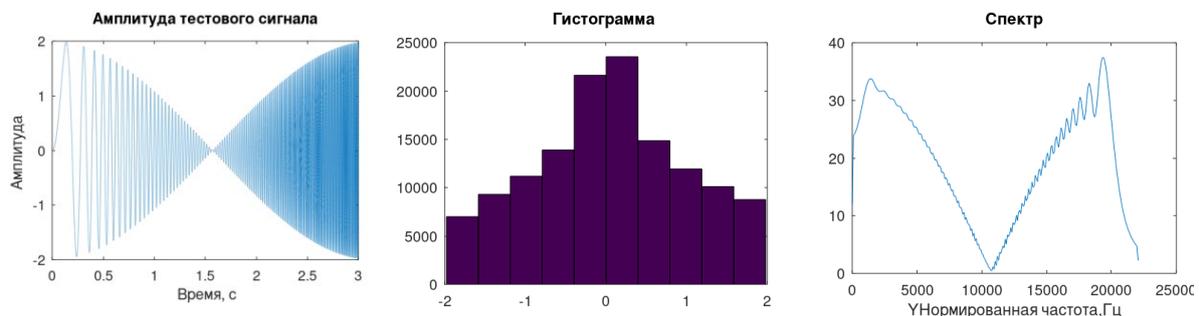


Рис. 1. Временное и спектральное представления тестового сигнала

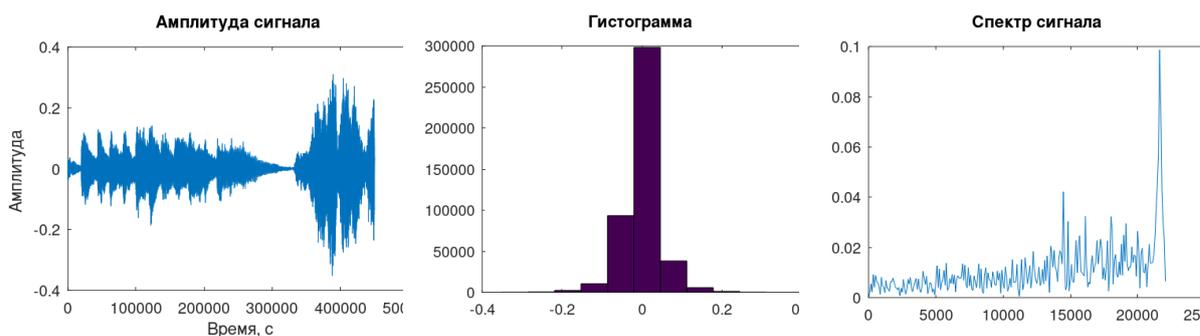


Рис.2. Временное и спектральное представления исследуемого сигнала

**2. Ограничение уровня сигнала.** Ограничения уровня сигналов используются повсеместно, например, с помощью регулировки громкости. Уменьшение амплитуды сигнала, например, в 2 раза, легко увидеть (рис. 3), сравнив исходный и ограниченный сигнал. Масштаб данных по вертикальной оси показывает это различие.

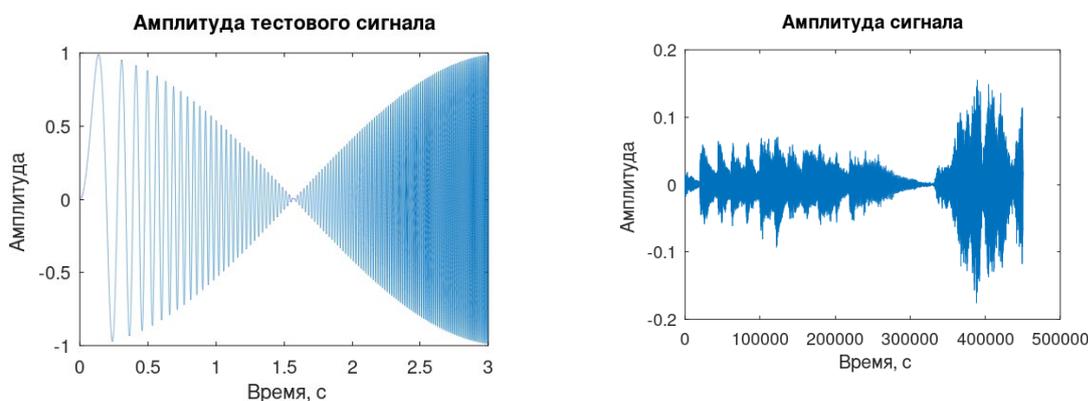


Рис. 3. Уменьшение уровня тестового и исследуемого сигнала.

При прослушивании преобразованного сигнала мы просто слышим более тихие звуки.

Интереснее рассмотреть ограничение только максимального уровня сигнала (это обуславливается физическими ограничениями аппаратуры, например, в сотовых телефонах). В этом случае изменяются только сигналы, амплитуда которых выходит за задаваемый уровень. Это видно при сравнении исходного и ограниченного сигнала, а также при анализе гистограмм сигналов (рис. 4).

Аналогичные рисунки можно получить и для исследуемого сигнала. При прослушивании преобразованного сигнала отмечается следующее: при незначительных ограничениях (порядка 0.8 от уровня исходного сигнала) различия почти незаметны, а при значительных ограничениях (ниже 0.5 от уровня исходного сигнала) слышны шумы.

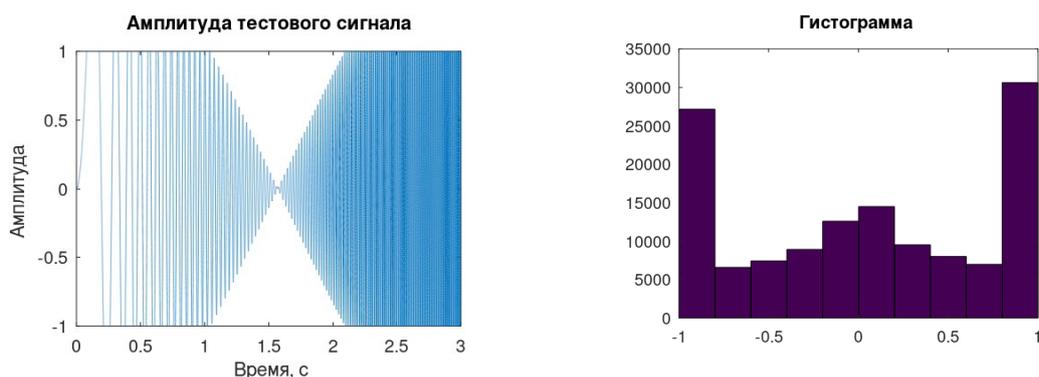


Рис. 4. Ограничение максимального уровня тестового сигнала и его гистограмма

### 3. Алгоритмы автоматической регулировки уровня сигнала.

Автоматическая регулировка уровня (АРУ) сигнала заключается в увеличении уровня сигналов с малой амплитудой и одновременном уменьшении уровня сигналов с большой амплитудой. Сигналы со средней амплитудой остаются без изменения. Методы АРУ широко используются в сотовых телефонах.

Влияние коэффициентов ограничения и усиления можно видеть как на графиках амплитуды, так и на гистограммах (рис. 5). Также можно заметить, что спектр сигнала изменяется. Здесь реализован простой алгоритм АРУ, пропорционально уменьшающий сигналы, превышающие определенный порог, и пропорционально увеличивающий сигналы, меньшие чем минимальный уровень. В реальности сложность АРУ значительно выше, но на вид графических результатов это не влияет.

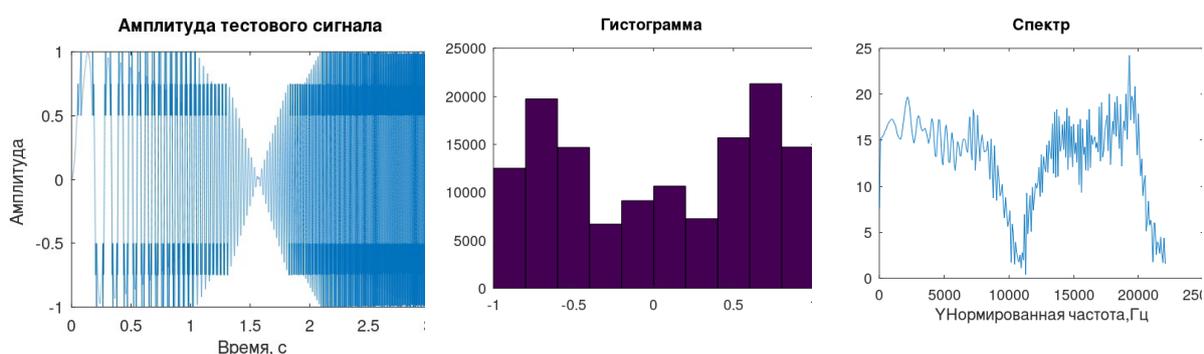


Рис. 5. Временное и спектральное представления тестового сигнала после АРУ

Из рисунков видно, что алгоритмы АРУ формируют сигнал в соответствии с задаваемой логикой. Проведем аналогичное преобразование исследуемого сигнала (рис. 6).

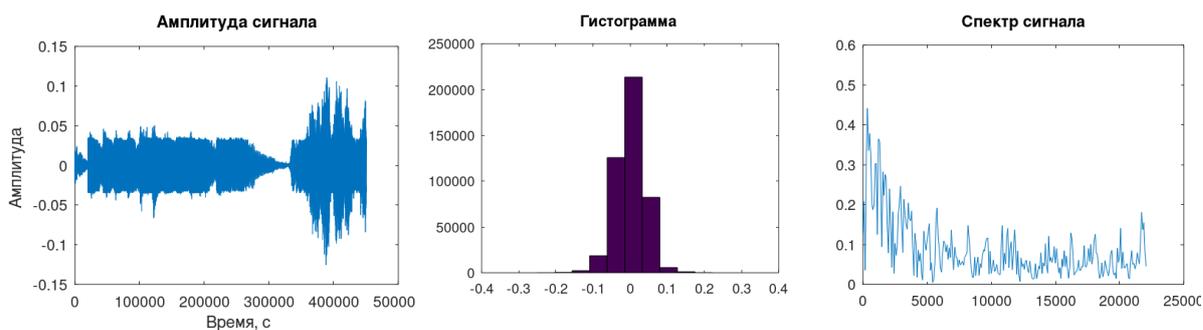


Рис. 6. Временное и спектральное представления исследуемого сигнала после АРУ

Рисунки 5 - 6 показывают заметные различия в амплитудах сигналов после работы АРУ. При прослушивании преобразованного аудиофайла ясно различимы шумы.

**4. Алгоритмы перемежения.** При хранении и передаче данных по цифровым линиям связи возникают помехи, методами борьбы с которыми посвящены многочисленные исследования. Самыми сложными в плане борьбы являются длительные помехи, при которых теряется информация на протяжении некоторого времени. Методом противодействия такого рода помехам является предварительное перемежение данных:

- на передающей стороне формируется новый массив данных, состоящий из записанных в другом (заранее задаваемом) порядке элементов исходного массива, так чтобы рядом стоящие элементы исходного массива находились на некотором удалении. Способы перемежения могут быть регулярными (например, сначала записываются элементы с номерами 1, 101, 201, и так далее, потом 2, 102, 202, и т.д), а могут быть нерегулярными, задаваемыми произвольной перестановкой чисел;

- полученный таким образом массив перемеженных данных передается по линиям связи или записывается на носитель для хранения;

- на приемной стороне производится обратное преобразование, и порядок элементов восстанавливается.

Если в процессе передачи произошла потеря части данных, то при восстановлении сигнала эти потерянные данные будут располагаться не подряд, а в отдельных местах, расположенных далеко друг от друга, и их влияние будет малозаметным.

Были проанализированы различные способы перемежения [3], и методом экспертных оценок после прослушивания аудиофайлов получен неочевидный результат: если потери информации составляют менее 50%, то слоговая разборчивость сохраняется, то есть понятно, какие слова произносятся (вернее, поются), и можно определить мелодию. При некоторых алгоритмах перемежения слоговая разборчивость сохраняется при потере до 80% данных, однако про качество воспроизводимого сигнала речь уже не идет.

Визуализация алгоритмов перемежения и дальнейшего восстановления (рис.7) подтверждается при просмотре гистограмм исходного и преобразованного сигналов (рис. 8) – эти гистограммы тождественны.

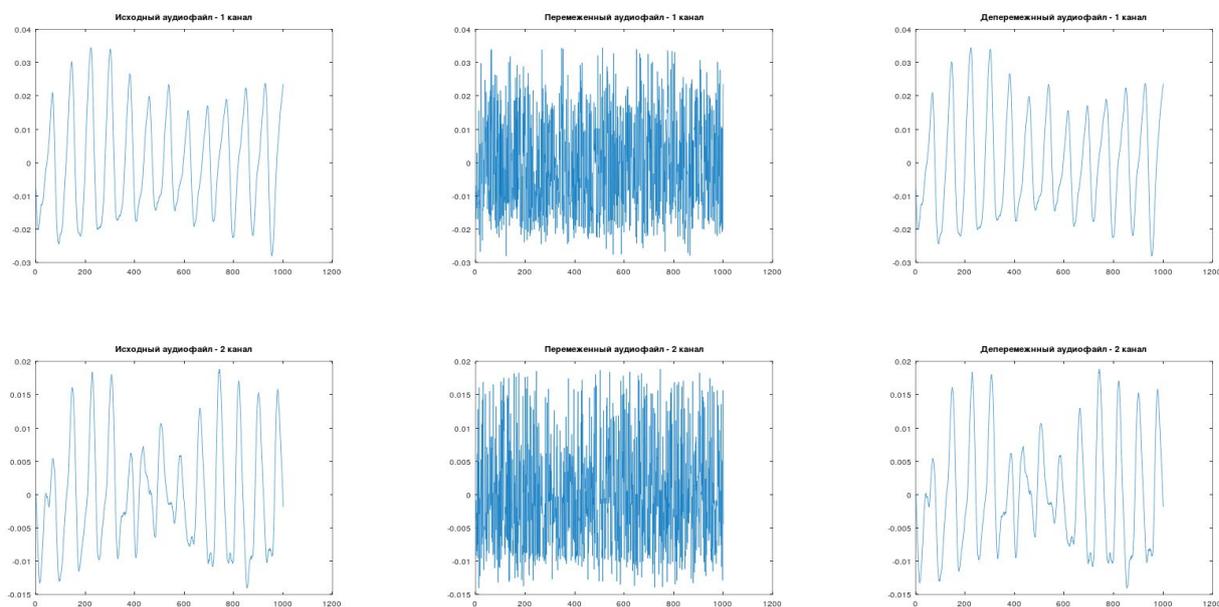


Рис.7. Тестовые сигналы: исходный, перемеженный и восстановленный.

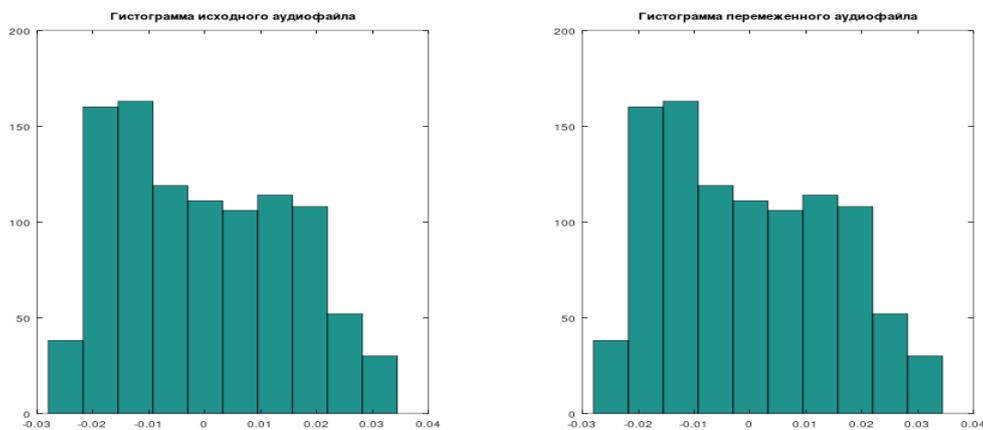


Рис 8. Гистограммы исходного и перемеженного тестовых сигналов.

На рисунке 9 можно видеть два канала реального аудиофайла. На левых рисунках графически представлен исходный сигнал, на вторых – сигнал после случайного перемежения. Графически сигналы кажутся различными, но сравнение их гистограмм доказывает правильность работы алгоритма перемежения. На третьих рисунках представлены перемеженные сигналы с 50% пропаданием, а на самых правых – восстановленные сигналы. Визуально эти сигналы похожи на исходные, однако при прослушивании заметны искажения. Даже при таком большом проценте потерянной информации смысл слов и мелодия легко угадывается.

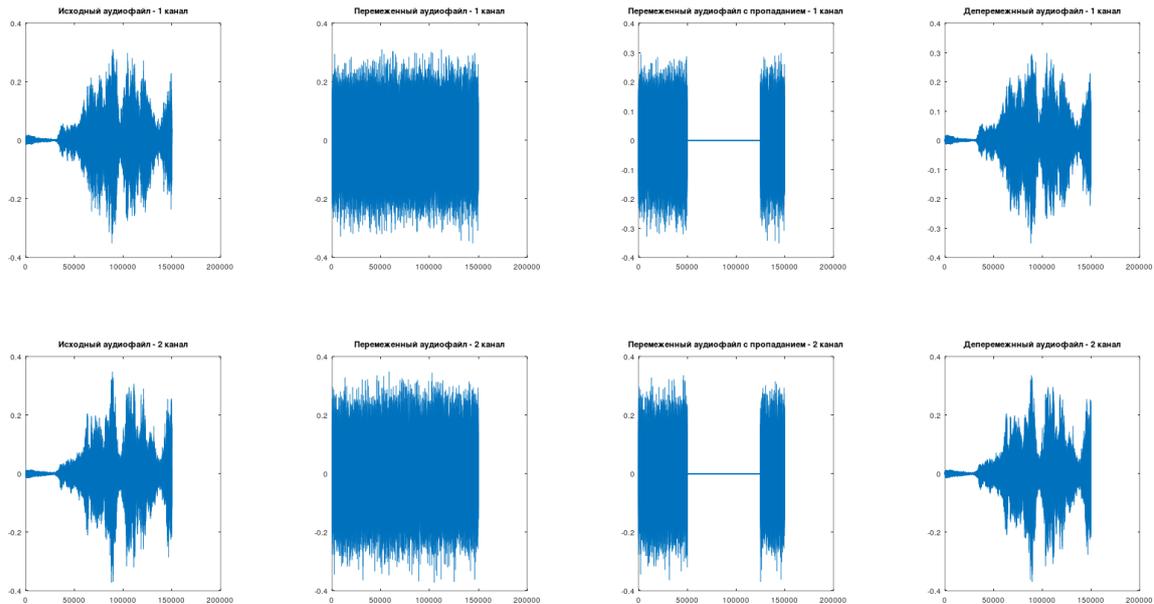


Рис. 9. Визуализация алгоритмов перемежения и пропадания сигналов.

Рисунки 7 - 9 показывают возможность анализа способов обработки аудиофайлов с помощью представления амплитуды сигналов.

**5. Фильтрация сигналов.** Преобразованием Фурье можно получить спектральное представление сигнала, а различные методы фильтрации позволяют уменьшать амплитуды сигналов на некоторых частотах, и усиливать на других. По своему эффекту фильтры можно разделить ([4]) на фильтры низких частот (уменьшающих амплитуды высокочастотных сигналов), фильтры высоких частот (уменьшающих амплитуды низкочастотных сигналов), режекторные фильтры (удаляющих амплитуды сигналов в заданной полосе частот), полосовые фильтры (оставляющие только сигналы в заданной полосе).

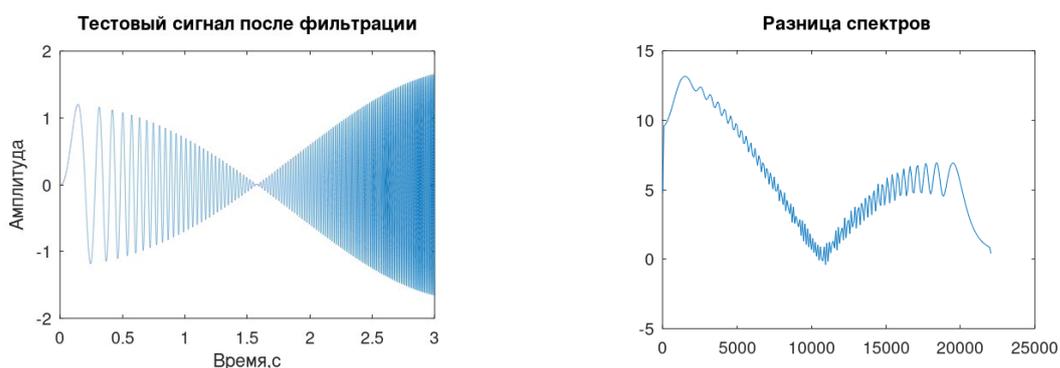


Рис. 10. Применение фильтра высоких частот к тестовому сигналу. На правом рисунке представлена разница спектров исходного и фильтрованного сигнала

Методами пакета Octave эти фильтры легко реализуются программно ([1]), и результаты обработки можно увидеть при анализе спектров сигналов. На рисунках представлены результаты применения фильтра высоких частот (рис. 10) и фильтра низких частот (рис. 11) к

тестовому сигналу. Для наглядности справа представлены не сами спектры, а разность между спектрами исходного и фильтрованного сигнала.

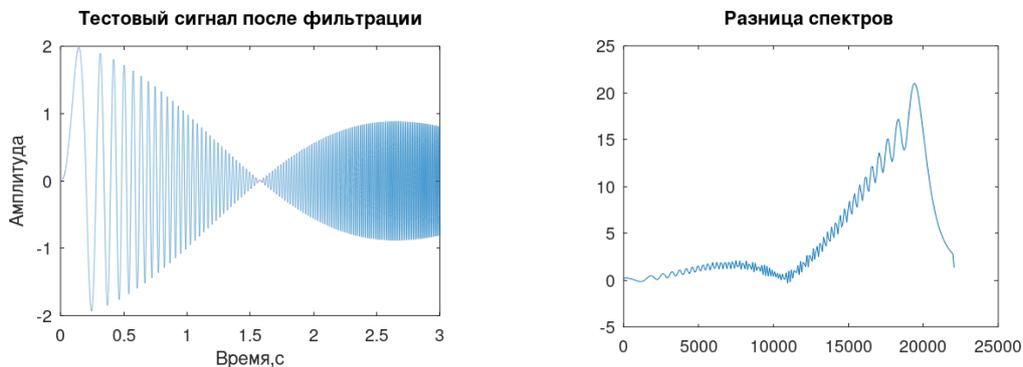


Рис. 11. Применение фильтра низких частот к тестовому сигналу. На правом рисунке представлена разность спектров исходного и фильтрованного тестового сигнала

Визуально видно отличие исходного тестового сигнала (рис. 1) и сигнала после фильтрации.

Графически результат применения фильтрации к исследуемому сигналу не так нагляден, так как спектр имеет много частот. Для примера на рис.12 приведена разность спектров исходного и фильтрованного исследуемых сигналов. Этот результат уже не так нагляден.

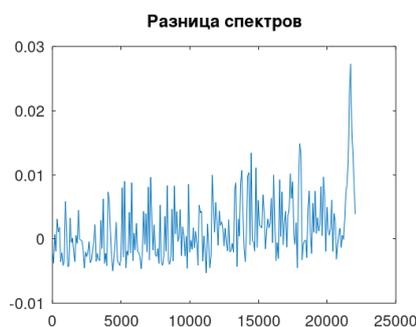


Рис. 12. Разница спектров исходного и фильтрованного исследуемых сигналов (после применения режекторного фильтра).

При прослушивании результаты применения фильтров к сигналу хорошо различимы – звучат либо только высокие, либо только низкие частоты.

Таким образом, для сигналов со сложными спектрами визуализация частотного представления несет меньше информации, чем аудиовоспроизведение. Для простых сигналов разница в спектрах при фильтрации наглядно видна.

**Заключение.** Визуализация работы алгоритмов цифровой обработки аудиофайлов позволяет во многих случаях проверить

правильность их работы и оценить их эффективность. Конечно, надежнее проводить прослушивание аудиофайлов, но если сделать это невозможно (например, в этой статье), то графическое представление также дает возможность проводить обоснованные оценки.

Для отладки алгоритмов обработки аудиофайлов можно использовать тестовые сигналы переменной частоты и амплитуды. Результаты применения различных алгоритмов к этим тестовым сигналам наиболее наглядны.

### Литература

1. Дьяконов В.П. MFNLAB и Simulink для радиоинженеров / Дьяконов В.П. – М.: - ДМК, 2011. – 975 с.
2. Конвертер MP3 OGG// С сайта [convertio.co/ru/mp3-ogg](http://convertio.co/ru/mp3-ogg)
3. Сапрыкин О.К. Использование алгоритмов перемежения данных при передаче аналоговой информации в цифровой системе связи/ Выпускная квалификационная работа, МИРЭА, 2024.
4. Скляр Бернард. Цифровая связь: теоретические основы и практическое применение /Скляр Б., Гроза Е.Г. [и др.] (пер. с англ.). – 2-е изд. – М.:Вильямс, 2016 =1099с.

**O.V.Tikhonova**

Russian Technological University MIREA

## VISUALIZATION OF AUDIO FILE PROCESSING METHODS

**Keywords:** *Octave package, audio file, time representation of signals, processing algorithms, spectral representation of signals.*

**Abstract.** *This article discusses ways to visualize audio file processing methods. Based on the analysis of the temporal and spectral representation of signals, it is possible to analyze processing methods without listening to the results.*

**Фам Тхань Туан, О.В.Тихонова**

*Российский технологический университет МИРЭА*

УДК 004.942

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОВ УМЕНЬШЕНИЯ ПИК-ФАКТОРА В СИСТЕМАХ OFDM

Ключевые слова: *математическая модель, вероятность битовой ошибки, отношение сигнал/шум, метод уменьшения пик-фактора, система OFDM*

Мультиплексирование с ортогональным частотным разделением (OFDM) является хорошо известным методом передачи больших данных по радиоканалу. В OFDM возникает серьезный недостаток, известный как PAPR (отношение пиковой и средней мощности). В статье рассматривается математическое моделирование методов уменьшения пик-фактора в системах OFDM. С помощью имитационных моделей можно оценить преимущества и недостатки каждого метода.

**1. Сигнал OFDM.** Сигнал OFDM, передаваемый с дискретным временем, с  $N$  поднесущими может быть задан следующим образом [1]:

$$S_{OFDM}(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{\frac{j \cdot 2\pi kn}{N}}; n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (1)$$

где  $N$  - количество поднесущих сигналов, а  $X(k)$  - представляет передаваемую информацию на  $k$ -й поднесущей. При сложении синусоидальных сигналов сильно меняется амплитуда, и следовательно, мощность итогового сигнала. Максимальные значения амплитуды могут значительно превышать средние значения, и эти выбросы - «пики» мешают качественной передаче сигнала.

Отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности (PAPR) передаваемых сигналов OFDM общем виде может быть записан как:

$$PAPR(S_{OFDM}(n)) = \frac{\text{Max}_n |S_{OFDM}^2(n)|}{P_{\text{сред}} \{ |S_{OFDM}^2(n)| \}} \quad (2)$$

где  $\text{Max}_n |S_{OFDM}^2(n)|$  - максимальная мощность OFDM сигнала,  $P_{\text{сред}} \{ |S_{OFDM}^2(n)| \}$  - средняя мощность OFDM сигнала,  $|S_{OFDM}(n)|$  - амплитуда сигнала  $n$ -го отсчета сигнала OFDM.

Дополнительная кумулятивная функция распределения (CCDF) является одним из наиболее широко используемых подходов для оценки эффективности снижения PAPR. CCDF указывает вероятность того, что PAPR сигнала OFDM превысит заданный пороговый уровень  $PAPR_0$ . Получено простое приближенное выражение для CCDF PAPR сигнала OFDM с  $N$  поднесущими, которое можно записать как [2]:

$$\begin{aligned} CCDF &= \Pr(PAPR_n > PAPR_0) \\ \Pr(PAPR_n > PAPR_0) &= 1 - (1 - e^{-PAPR_0})^N \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $PAPR_0$  – рассматриваемый пороговый уровень.

**2. Метод частичной последовательности передачи (PTS - Partial Transmit Sequence)** это один из стандартных методов уменьшения пик-фактора (PAPR) в системах OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Он основан на разделении исходного сигнала OFDM на несколько частичных последовательностей, которые затем

комбинируются для формирования итогового сигнала OFDM с более низким пиковым фактором.

В методе частичной последовательности передачи входной блок данных из  $N$  символов разделены на  $M$  непересекающихся подблоков. Затем ОБПФ для каждого подблока выполняется отдельно, а затем взвешивается соответствующим комплексным фазовым коэффициентом  $b_m = e^{j\phi_m}$ , где  $\phi_m \in [0, 2\pi]$ ,  $1 \leq m \leq M$ . Фазовые коэффициенты выбираются так, чтобы минимизировать PAPR объединенного сигнала всех субблоков. На рис. 1 показана блок-схема передатчика OFDM с технологией частичной последовательности передачи. Поток входных данных  $X$  разделяется на  $M$  ортогональных субблоков  $X_m$ , и для каждого субблока выполняется ОБПФ, взвешиваемое фазовым коэффициентом  $b_m$ . Цель состоит в том, чтобы выбрать набор фазовых коэффициентов  $b_m$ , который минимизирует [3].

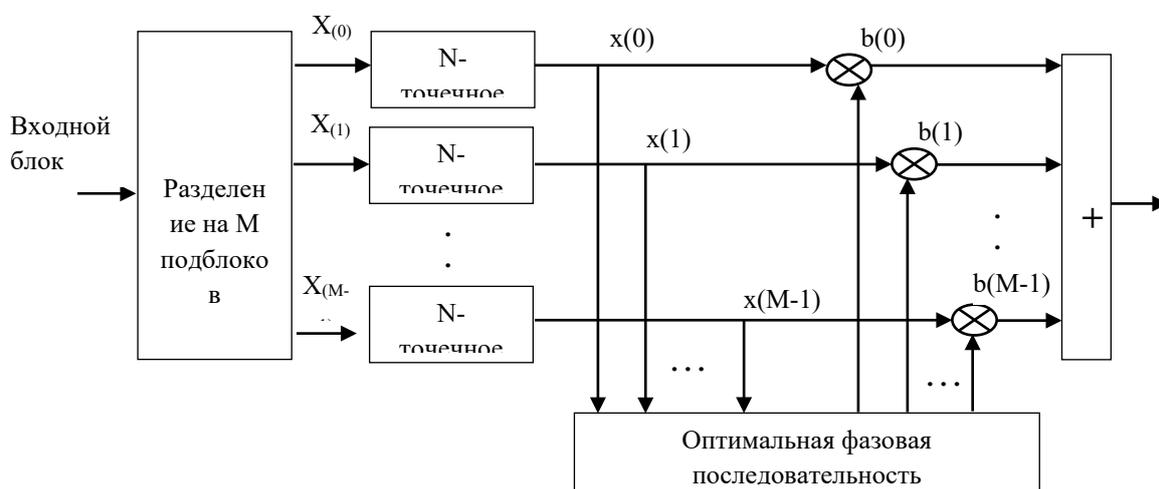


Рис. 1. Классическая блок-схема способа частичной последовательности передачи

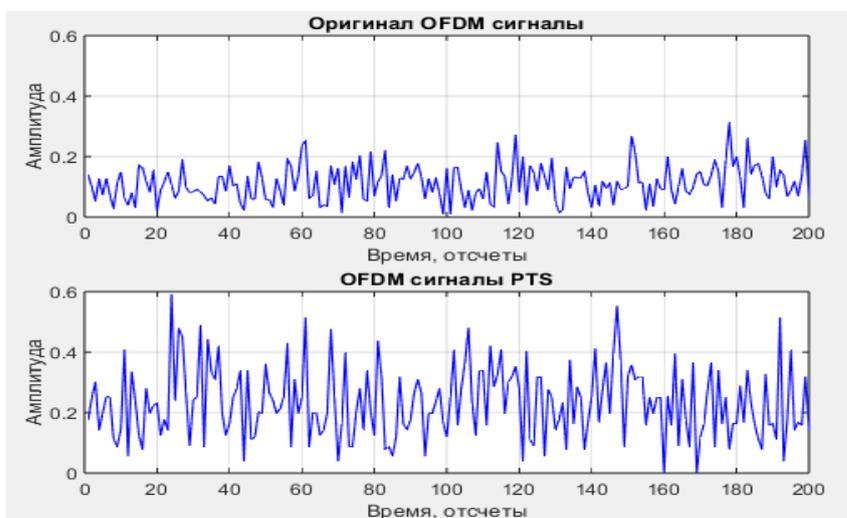


Рис. 2. Амплитуда OFDM сигналов до (верхний рисунок) и после (нижний рисунок) метода частичной последовательности передачи

Сигналы OFDM показаны на рисунке 2. Из рисунка видно, что при использовании метода частичной последовательности передачи пики сигнала все еще присутствуют, но намного меньше, чем исходный сигнал.

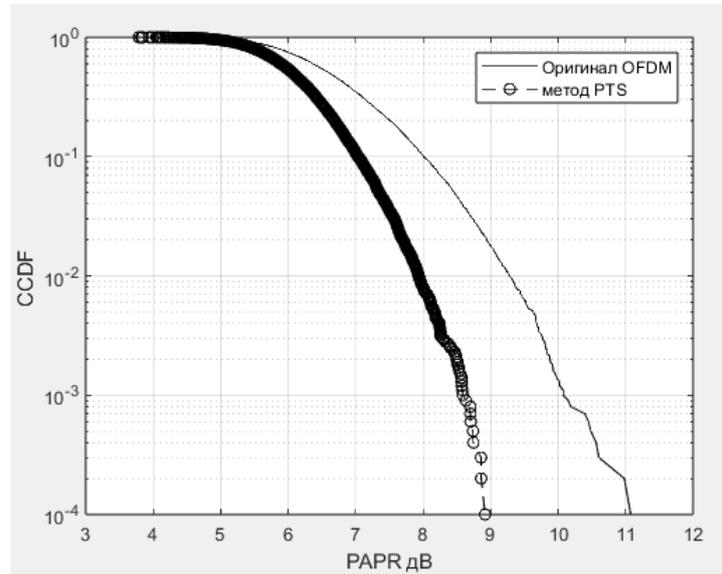


Рис. 3. Результат снижения PAPR OFDM-сигнала методом частичной последовательности передачи

На рисунке 3 результатом является уменьшение PAPR при  $M=4$  с фазой  $\mathbf{b}_m = [1 \ i \ -1 \ -i]$ . На рисунке выше видно, что при использовании метода частичной последовательности передачи значение пик-фактора уменьшается на 2 дБ.

### 3. Метод ограничения с дополнительным сигналом.

Разработанный автором метод ограничения с дополнительным сигналом OFDM-сигнала (МОДС) является новым методом для уменьшения PAPR сигнала [4-5]. В этом методе амплитуды OFDM-сигнала ограничиваются при превышении определенного порогового значения, при этом сохраняя исходную фазу  $n$ -го отсчетов, что можно представить в виде:

$$S_{огран}(n) = \begin{cases} S_{исход}(n), & |S_{исход}(n)| \leq C \\ C \cdot e^{j \cdot \phi_n}, & |S_{исход}(n)| > C \end{cases} \quad (4)$$

где  $C$  - это пороговое значение, или уровень ограничения сигнала,  $|S_{исход}(n)|$  - амплитуда исходного сигнала  $n$ -го отсчетов,  $\phi_n$  - фазовый угол  $n$ -го сигнала.

В этом методе в сигнале  $S_{OFDM}(n)$  производится поиск тех позиций (номер позиции обозначим  $p$ ), где амплитуда сигнала больше, чем пороговое значение  $C$ . При этом сигнал ограничивается в соответствии с выражением (4), а в дополнительных сигналах (их число не больше заранее заданного числа  $m$ ) указывается номер позиции сигнала  $p$  и

дополнительный сигнал  $S_{\text{допол}}(p)$  – разность между исходным и ограниченным сигналом, что описывается следующим выражением:

$$S_{\text{допол}}(p) = S_{\text{исход}}(p) - S_{\text{огран}}(p) . \quad (5)$$

Структурная схема OFDM-передатчика представлена на рисунке 4.

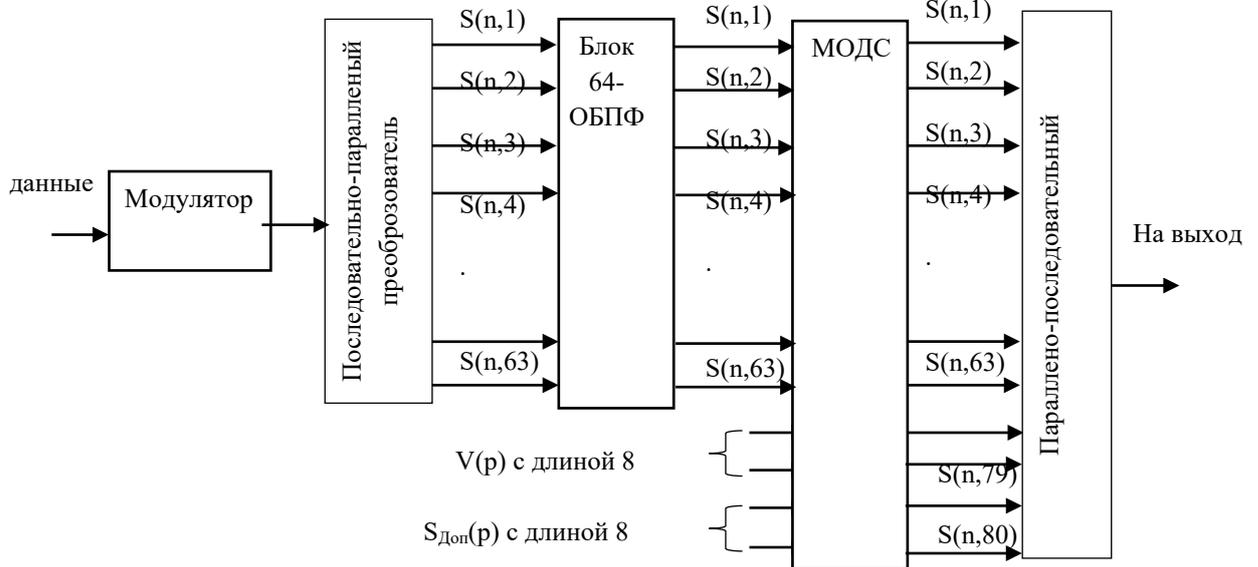


Рис.4. Структурная схема OFDM-передатчика при ограничении с дополнительным сигналом

Сигналы OFDM показаны на рисунке 5. Из рисунка видно, что при использовании метода ограничения с дополнительным сигналом пики сигнала все отсутствуют но объём сигналов немного увеличивается.

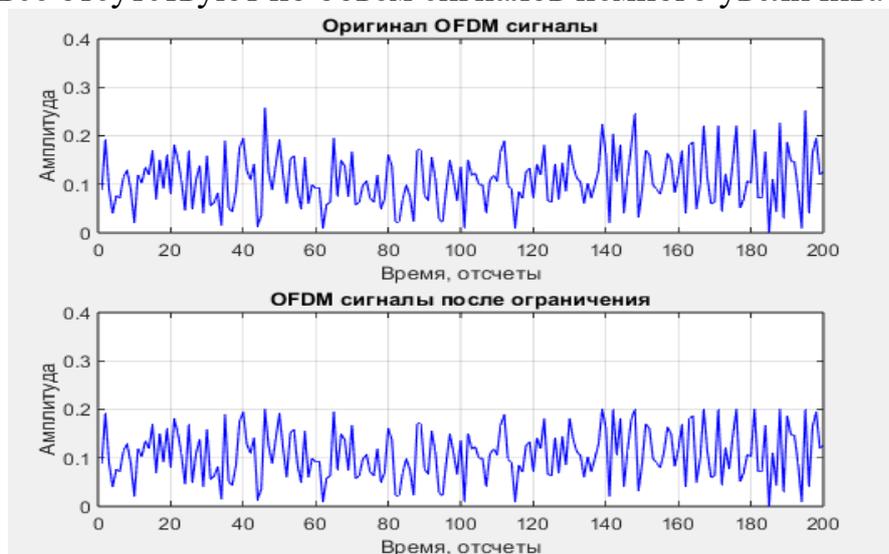


Рис. 5. Амплитуда OFDM сигналов до (верхний рисунок) и после (нижний рисунок) метода МОДС

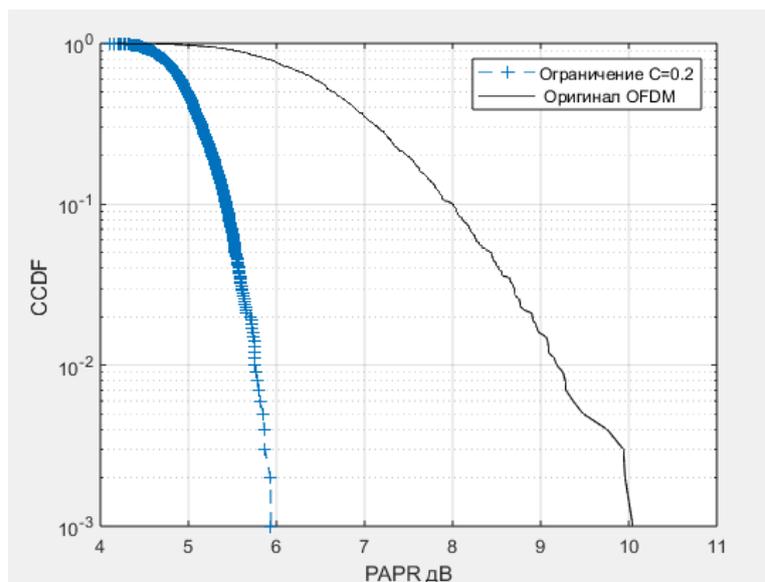


Рис. 6. Результат снижения PAPR OFDM-сигнала методом ограничения с дополнительным сигналом при  $m=16$  и  $C=0.2$

На рисунке 6 показаны результаты снижения пик-фактора сигналов OFDM при использовании метода ограничения с дополнительным сигналом, при этом достигается уменьшение PAPR на 4 дБ по сравнению с исходным сигналом.

Из приведенных рисунков видно, что с помощью математического моделирования можно проверять правильность предлагаемых технических решений и сравнивать эффективность различных способов решения поставленной задачи. С помощью математического моделирования можно сравнить методы уменьшения пик-фактора системы OFDM и подтвердить большую эффективность предлагаемого автором метода ограничения с дополнительным сигналом.

## Литература

1. Галустов Г. Г. Мультиплексирование с ортогональным частотным разделением сигналов : учебное пособие / Г. Г. Галустов, С. Н. Мелешкин. – Таганрог : Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – 80 с.
2. H. Y. Sakran, M. Shokair, and A. A. Elazm. An efficient technique for reducing PAPR of OFDM system in the presence of nonlinear high Power amplifier.// Progress In Electromagnetics Research C, 2008, Vol. 2, pp. 233–241.
3. Partial Transmit Sequence Optimization Using Improved Harmony Search Algorithm for PAPR Reduction in OFDM, ETRI Journal, Volume 39, Number 6, December 2017, pp. 782-793
4. Anoh, K., Tanriover, C., Adebisi, B., et al.: ‘A new approach to iterative clipping and filtering PAPR reduction scheme for OFDM systems’, IEEE.Access., 2018, 6, pp. 17533–17544.
5. Фам Тхань Туан, О. В. Тихонова. Метод ограничения с дополнительным сигналом для уменьшения пик-фактора в системе с ортогональным частотным разделением каналов / Фам Тхань Туан, О. В. Тихонова// Вопросы электромеханики. ТрудыВНИИЭМ. – 2023. –Т. 193. – № 2. – С. 34–38.

**Pham Thanh Tuan, O.V.Tikhonova**  
*Russian Technological University MIREA*

## **MATHEMATICAL MODELING OF METHODS FOR REDUCING CRUSH FACTOR IN OFDM SYSTEMS**

**Keywords:** *mathematical model, bit error probability, signal-to-noise ratio, crest factor reduction method, OFDM system.*

**Abstract.** *Orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) is a well-known technique for transmitting large data over radio waves. OFDM suffers from a serious disadvantage known as PAPR (Peak to Average Power Ratio). The article discusses mathematical modeling of methods for reducing the crest factor in OFDM systems. Using simulation models, you can evaluate the advantages and disadvantages of each method.*

**Хтет Сое Паинг, А.В. Щагин, Аунг Мью Нанг**  
*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»,*

УДК 681.52

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ И ПРОВЕДЕНИЕ ВИРТУАЛЬНЫХ СИМУЛЯЦИЙ КВАДРОКОПТЕРОВ В РАЗЛИЧНЫХ СЦЕНАРИЯХ ПОЛЕТА**

**Ключевые слова:** *мультиротор, режим следования, режим окружения, регулятор PID*

*Развитие мультироторных квадрокоптеров в целом и квадрокоптеров в частности позволяет использовать их в различных областях человеческой деятельности, а не только для впечатляющей съемки фото и видео. При решении более серьезных задач (например, отслеживание движущейся цели или полет по заданной траектории) предъявляются довольно высокие требования к системе управления квадрокоптером с точки зрения качества и скорости. Для разработки системы управления необходимо четко понимать, как функционирует квадрокоптер, как управляется данный объект, и для прямого разработки алгоритмов управления необходимо иметь наиболее адекватную математическую модель. В данной статье описан принцип полета и управления квадрокоптером; построена полная нелинейная математическая модель квадрокоптера с учетом работы двигателей.*

**1. Введение.** Квадрокоптер – это летающая машина, обычно имеющая крестообразную форму, с фиксированными двигателями, размещенными на концах его рук [1]. В настоящее время эти устройства находят применение в различных областях, включая съемку фото и видео, поисковые операции, доставку небольших и крупногабаритных грузов и осмотр конструкций [2]. Несмотря на его высокую маневренность, квадрокоптер обладает плохой стабильностью из-за относительно небольшой массы, что делает его чрезвычайно уязвимым для внешних атмосферных воздействий [6]. Система управления квадрокоптером должна решать такие фундаментальные задачи, как угловая и пространственная стабилизация, достижение определенной высоты при взлете, обеспечение контролируемой посадки, стабильное зависание в воздухе и следование предопределенной траектории во время полета [7, 8]. В целом, система управления квадрокоптером накладывает строгие требования к точности и скорости, учитывая заданные ограничения. При проектировании таких воздушных судов возникает проблема управления, и основным решением этой проблемы является моделирование. В этой статье мы разработаем высокоточный симулятор и параллельно создадим модель управления на основе регулятора PID во время симуляции. Регулятор PID представляет собой математическую модель управления и контроля квадрокоптерами.



Рис. 1. Основная структура вращений квадрокоптера

Напомним [1–3], что *квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$*  называются функции, определяемые по формуле

$$\sum_i^4 \omega_i^2 = \vec{F} \quad (1)$$

где

$$\vec{V} = \vec{F} - Gravity \quad (2)$$

Квадрокоптер оснащен инерционными ориентационными датчиками, такими как гироскоп, акселерометр и магнитометр. Эти датчики предоставляют информацию в реальном времени об ориентации квадрокоптера. Когда мы командуем корпусу квадрокоптера вращаться

до определенного угла, он использует алгоритм обратной связи. Этот алгоритм сравнивает фактические углы, измеренные датчиками, с желаемыми углами, которые мы планируем достичь. Чем больше расхождение между фактическими и желаемыми углами, тем больше квадрокоптер стремится повернуться к желаемым углам, регулируя скорости вращения двигателей. Этот процесс продолжается до тех пор, пока фактические углы не выровняются с желаемыми углами, что эффективно стабилизирует ориентацию квадрокоптера. Регулятор PID оказывается удобным предварительным алгоритмом управления для этой цели благодаря его простоте в настройке и реализации.

$$e(t) = x_d(t) - x(t), \quad (3)$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4)$$

Здесь  $e(t)$  - разница между желаемым состоянием  $x_{desired}(t)$  и текущим состоянием  $x(t)$ ,  $u(t)$  - управляющий сигнал, а  $k_p$ ,  $k_i$  и  $k_d$  - равные параметры для элементов пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих регулятора PID.

**2. Уравнение корпуса.** Для достижения нашей цели мы стремимся стабилизировать квадрокоптер на желаемой высоте с помощью регулятора высоты. Дрон работает в двух основных режимах: 1) режим следования и 2) режим окружения. В режиме следования синяя ось, обозначенная как ось камеры, постоянно направлена на цель. Во втором режиме, режиме окружения, дрон одновременно следует и окружает цель. Для расчета движения массы в центре квадрокоптера мы получаем выражения для силы тяги следующим образом: [Укажите здесь выражения для силы тяги.]

$$F = m(\dot{v} + \omega \times v)$$

$$M = I \cdot \dot{\omega} + \omega \times (I \cdot \omega) \quad (5)$$



Рис.2. Три основных угловых ориентации квадрокоптера

**3. Координаты путевых точек для траектории квадрокоптера и 3D-анимации.** Прежде всего, мы должны учесть значения квадрокоптера и создать файл с расширением ".m" с использованием языка программирования MATLAB. Затем мы создаем 3D-анимацию с помощью сценариев MATLAB для обработки сигналов и анимации. Трассы как для цели, так и для квадрокоптера должны быть определены,

что приводит к созданию матрицы, охватывающей значения  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ . Матрица путевых точек позволяет пользователям указывать движение цели, включая ее местоположение и время. В зависимости от выбранного режима дрон будет автономно следовать за целью или окружать ее. Для пояснения я предоставил некоторые скриншоты сценариев, а также создал сценарий симуляции для демонстрации ранее наблюдаемой анимации.

```

%% Setup Drone
m = 0.2
I = [[0.1,0,0];[0,0.1,0];[0,0,0.08]]

% sample time
ts = 0.01

% Initial States (Initial XYZ is generated by XYZsignal script)
Euler_0 = [0;0;0]
XYZ_0 = [1;1;0]
body_rate_0 = [0;0;0]

% Environment
g = [0;0;-9.8]

```

	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	0	0	3	3
3	2	0	3	8
4	2	0	3	10
5	2	1	3	16
6	2	1	3	18
7	-2	1	3	26
8	-2	1	5	30
9	-2	2	5	34
10	-2	2	5	36
11	3	2	5	46
12	3	2	5	48
13	3	5	5	54

Рис. 3. Файл команд MATLAB для настройки квадрокоптера и Координатные точки пути для траектории квадрокоптера.

```

%% Simulink 3D Animation with Moving Target
figure;
NewFigure([-5 5],[-3 7],[0 10],[-43,25,750,650]);
%VisAttitude([0,0,0],'black')
%VisAttitude(deg2rad(RefEuler),'g:')
pause(3)
AnimEulerTar(out.time,out.XYZ,out.EulerAngles,out.VXYZ,out.Tar)

```

Рис. 4. Сценарий анимации для траектории квадрокоптера.

**4. Метод теории управления.** Демонстрация симуляции в программном обеспечении MATLAB/Simulink изображена на рисунке 6, показывая реакцию модели на пошаговое воздействие, изображенное на рисунке 7. Блок-схема в Simulink дает обзор системы, где различные подсистемы представляют различные функции. Вот краткое описание блок-схемы в Simulink: [Вставьте краткое описание или ключевые компоненты блок-схемы] Таблица предоставляет значения коэффициентов для регуляторов PID, соответствующих различным переменным: [Вставьте таблицу коэффициентов регуляторов PID]. Этот интегрированный подход и настройка симуляции демонстрируют эффективность системы управления в реагировании на входы и поддержании стабильности во время полета.

	$K_p$	$K_i$	$K_d$
x	8.2	0.015	7.8
y	5.1	0.012	4.95
z	25	10	30
$\varphi$	8	0.02	5
$\theta$	10	0.1	8
$\psi$	20	0.1	15

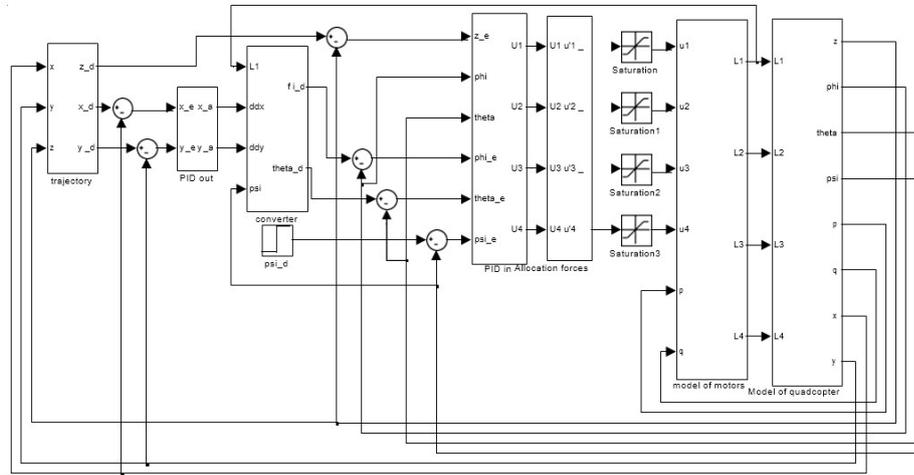


Рис. 6. Модель квадрокоптера в Simulink.

**5. Динамическое моделирование и симуляция квадрокоптера с 6 степенями свободы.** В этой статье подробно объясняются уравнения движения квадрокоптера с 6 степенями свободы (6 dof), руководство по созданию модели квадрокоптера в Simulink и демонстрация способов ее управления. Кроме того, предоставляются сведения о сценариях сигнала и анимации. Изучение этого проекта может улучшить ваше понимание динамики квадрокоптера с 6 степенями свободы.

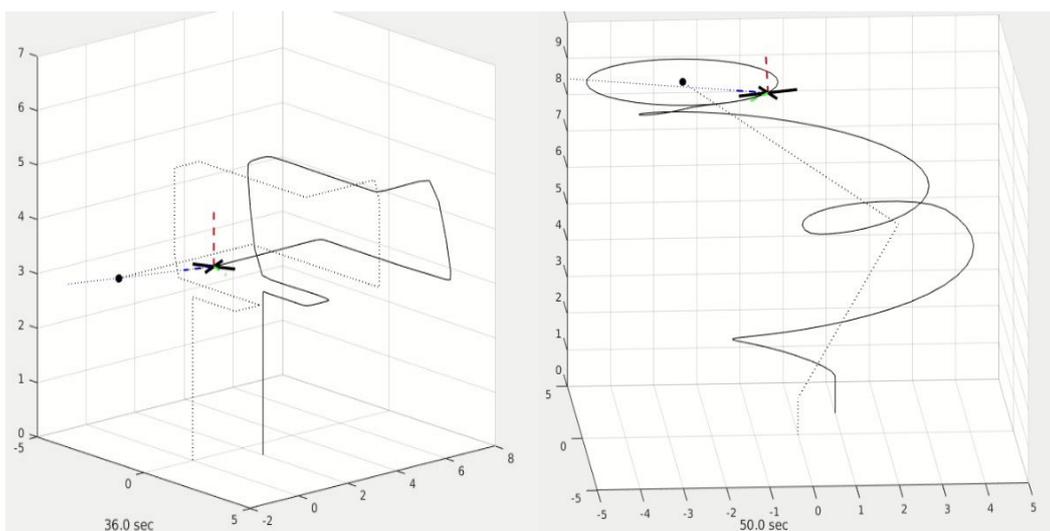


Рис. 7. Траектория следования за указанной черной точкой и окружения указанной черной точки

В проекте вы найдете две разные траектории для движущихся целей. Первая траектория следует методу, который поддерживает постоянное расстояние до точки движущейся цели (представленной черными точками). Вторая траектория более сложная, но дрон ловко следует за ней и окружает ее. Скорость окружения точно определяется окружающей угловой скоростью. Квадрокоптер окружает цель, используя камерный датчик, который постоянно направлен на цель (синяя ось).

**6. Заключение.** Монография предоставляет краткий и всесторонний обзор результатов, полученных в результате систематического анализа различных методов и средств противодействия угрозам на основе огневого поражения и электронного подавления. Эффективность этих методов противодействия обусловлена передовыми возможностями бортовых систем управления, обнаруженных в современных квадрокоптерах. Эти системы обеспечивают стабильность и управляемость в различных режимах полета. Основная цель квадрокоптера - достижение круговых условий полета в режимах следования и окружения, направленных на основную цель. Это достигается путем тщательной модуляции скорости и движения стабилизации, подчеркивая адаптивность и эффективность этих стратегий противодействия.

### Литература

1. B. Duisterhof et al., "Sniffy Bug:., et al. Application of unmanned aircraft like DJI INSPIRE 1V 2.0 quadcopter at people search on site. Nauka, tekhnika i obra-zovanie, 2018, no. 11, pp. 43–46 (in Russ.).
2. Golubev Yu.F. Fundamentals of Theoretical Mechanics. Moscow: Publishing House of Bauman Moscow State Technical University, 2000. 321 с.
3. Htet Soe Paing. 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus) pp.2370-2373.
4. Kyaw Myatt Tu. Electron. journal 2014. №11. URL: [sntbul.bmstu.ru/doc/741283.html](http://sntbul.bmstu.ru/doc/741283.html).
5. P. Pounds, R. Mahony, P. Corke. Elsevier Vol. 18, no. 7, pp. 691-699, 2010.
6. Petrov V.Yu., Rudashevskaya E.A. "Internet of Things" technology as a promising modern information technology – [Electronic resource] – Access mode: <http://fundamental-research.ru/ru/article/view?id=41775> (last accessed 01-12-2020).
7. Ershov V.V. Optimal control of the temperature regime in office and residential buildings – [Electronic resource]. – Access mode: <http://wila.ru/4/304/article32544/> (last accessed on 15-06-2020).
8. Gen K., Chulin N.A. Nauka i obrazovanie. Science and Education, 2015, no. 5. DOI: 10.7463/0515.0771076
9. Zavarzin B.B., Ryumin R.V., Chukarev A.G. Method of calculating heat loss for premises – [Electronic resource]. – Access mode: <https://moluch.ru/archive/177/46071/> (last accessed 22.11.2020).

**Htet Soe Paing, A.V. Schagin, Aung Myo Naing**  
National Research University of Electronic Technology

**EXPLORING THE DYNAMICS AND CONDUCTING VIRTUAL  
SIMULATIONS OF QUADCOPTERS ACROSS DIVERSE FLIGHT  
SCENARIOS.**

**Keywords:** *Keywords: multicopter, tracking mode, environment mode, PID controller.*

**Abstract.** *The development of multicopter quadcopters in general and quadcopters in particular enables their utilization in various domains of human activity, not just for impressive photo and video shooting. When tackling more serious tasks (such as tracking moving targets or flying along predefined trajectories), quite high demands are placed on the quadcopter control system in terms of quality and speed. To develop a control system, it is necessary to have a clear understanding of how the quadcopter functions, how this object is controlled, and to develop control algorithms directly, it is necessary to have the most adequate mathematical model. This article describes the principle of flight and control of a quadcopter; a complete nonlinear mathematical model of the quadcopter is constructed taking into account the operation of the engines.*

## РАЗДЕЛ 2

### Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

Т.А. Агасиев, А.П. Карпенко  
МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 519.6

#### БАЙЕСОВСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ НАИЛУЧШИХ ЗНАЧЕНИЙ ГИПЕРПАРАМЕТРОВ СУРРОГАТНОЙ МОДЕЛИ

Ключевые слова: *глобальная оптимизация; байесовская оптимизация; суррогатное моделирование; настройка гиперпараметров; ландшафтный анализ; карата вариативности целевой функции.*

*Байесовские алгоритмы широко используют для решения задач глобальной оптимизации, имеющих высокую вычислительную сложность целевой функции. Эффективность этих алгоритмов может сильно зависеть от значений (гипер)параметров используемой суррогатной модели целевой функции. Качество суррогатной модели можно значительно повысить путем использования «наилучших» значений этих параметров. Такие значения гиперпараметров обычно находят путем построения нескольких суррогатных моделей с различными значениями гиперпараметров, оценки эффективности этих моделей и выбора на этой основе лучшей модели. Построение нескольких суррогатных моделей (что приходится делать на каждой итерации байесовской оптимизации) требует высоких вычислительных затрат. В работе предложен новый подход к поиску «наилучших» значений гиперпараметров, имеющий меньшую вычислительную сложность и основанный на использовании характерных признаков ландшафта целевой функции.*

**1. Постановка базовой задачи оптимизации.** Рассматриваем (базовую) задачу глобальной параметрической оптимизации в постановке

$$\min_{X \in D_X \subset \mathbb{R}^{|X|}} f(X) = f(X^*) = f^*, \quad (1)$$

где  $X \in \mathbb{R}^{|X|}$  – вектор варьируемых параметров;  $f(X) \in \mathbb{R}^1$  – целевая функция;  $X^*, f^*$  – искомые оптимальное решение и соответствующее

значение целевой функции;  $D_X$  - односвязное множество допустимых значений вектора варьируемых параметров.

**2. Байесовской алгоритм решения базовой задачи.** Если задача (1) имеет высокую вычислительную сложность целевой функции, то для решения этой задачи используют алгоритмы оптимизации на основе построения суррогатной модели  $\hat{f}(X)$  этой функции. Алгоритм оптимизации называют байесовским, если суррогатную модель  $\hat{f}(X)$  строят на основе гауссовских процессов. В отличие от других типов суррогатных моделей, модели на основе гауссовских процессов позволяют не только прогнозировать приближенные значения целевой функции, но и оценивать степень достоверности этих прогнозов. В этом случае каждой точке пространства варьируемых параметров ставим в соответствие нормальное распределение  $N(\mu_{\hat{f}}, \sigma_{\hat{f}}^2)$  прогнозных значений целевой функции. Математическое ожидание  $\mu_{\hat{f}}$  этого распределения используем в качестве предсказания значения целевой функции в данной точке, а на основе стандартного отклонения  $\sigma_{\hat{f}}^2$  строим оценки достоверности этого предсказания.

Пусть на  $r$ -ой итерации решения базовой задачи оптимизации тем или иным способом получен набор векторов параметров  $\{X_i\}$  и набор соответствующих значений целевой функции  $\{f_i = f(X_i)\}$ . Суть байесовской оптимизации на итерации  $r+1$  передает следующая последовательность шагов.

1) На основе набора  $L_r = \{X_i, f_i\}$  синтезируем суррогатную модель  $\hat{f}_r(X)$  целевой функции, используя гауссовский процесс с заданным вектором гиперпараметров  $P$  ковариационной функции  $K(X_{i_1}, X_{i_2}, P) \in \mathfrak{R}^{|X| \times |X|}$ .

2) Находим допустимую точку  $X_{r+1}$  путем минимизации функции предпочтений, например, функции *LCB* (Lower Confidence Bound):

$$X_{r+1} = \arg \min_{X \in D_X} (\mu_{\hat{f}}(X) - \kappa \sigma_{\hat{f}}(X)). \quad (2)$$

Здесь  $\kappa$  – свободный параметр функции *LCB* (рекомендованное значение равно 2,576 [1]).

3) Вычисляем в точке  $X_{r+1}$  значение целевой функции  $f_{r+1}$ , дополняем набор  $L_r$  до набора  $L_{r+1} = L_r \cup \{X_{r+1}, f_{r+1}\}$  и повторяем шаги 1, 2 до исчерпания вычислительного бюджета [2].

**3. Байесовская оптимизация с настройкой гиперпараметров.** Эффективность байесовской оптимизации существенно зависит от качества суррогатной модели  $\hat{f}_r(X)$  и, как следствие, от выбранных

значений гиперпараметров  $P$  ковариационной функции  $K(X_{i_1}, X_{i_2}, P)$ . Настройку алгоритма байесовской оптимизации выполняем путем решения задачи (мета)оптимизации вида

$$\underset{P \in D_P}{extr} \phi(P) = \phi(P^*), \quad (3)$$

где  $\phi(P)$  - целевая метафункция – критерий качества суррогатной модели;  $D_P$  - множество допустимых значений компонентов вектора гиперпараметров  $P$ ;  $P^*$  - искомый оптимальный вектор. В качестве метафункции  $\phi(P)$  естественно использовать ошибку аппроксимации суррогатной модели на наборе  $L_r$ , например, среднеквадратичную ошибку.

Если базовая задача оптимизации имеет высокую вычислительную сложность целевой функции (что типично для современных практически значимых задач), то мощность набора  $L_r$  оказывается недостаточной для вычисления ошибки аппроксимации с приемлемой точностью. Поэтому приходится использовать процедуру  $n$ -блочной кросс-валидации. Соответствующую мета-функцию обозначаем  $\phi_{CV}(P) = \phi_{CV}(L_r, P)$ .

Рассматриваем также критерий качества суррогатной модели  $\phi_{RP}(P)$ , для вычисления которого необходимо построение лишь одной суррогатной модели с данным вектором  $P$ . Критерий  $\phi_{RP}(P)$  использует расширенную выборку  $L_r$ , обозначаемую  $L_r^{ext}$ , так что  $\phi_{RP}(P) = \phi_{RP}(L_r^{ext}, P)$ . Кроме того, рассматриваем критерий качества суррогатной модели  $\phi_{AD}(P) = \phi_{AD}(L_r^{ext}, P)$  [3].

**4. Байесовская оптимизация с прогнозированием гиперпараметров.** Предлагаем методику прогнозирования наилучших значений гиперпараметров  $P$  на основе характерных признаков целевой функции  $f(X)$ . Исходим из гипотезы, что оптимальные значения гиперпараметров близки для «подобных» целевых функций. Предлагаем выполнять настройку гиперпараметров в две следующие стадии.

1) Стадия исследования:

- формализуем в виде вектора характерных признаков  $S$  особенности целевых функций рассматриваемого класса базовых задач;
- отыскиваем набор  $\{P_i^*(C_i)\}$  оптимальных значений гиперпараметров для набора  $\{C_i\}$  значений характерных признаков;
- строим прогнозирующую модель  $\hat{P}^*(C)$  на основе известных пар значений  $\{C_i, P_i^*\}$ .

2) Стадия эксплуатации (см. шаг 1 алгоритма байесовской оптимизации):

1) вычисляем характерные признаки  $C_r$  данной целевой функции  $f(X)$  на основе выборки  $L_r$ ;

2) на основе набора  $\{C_i, P_i^*\}$  прогнозируем приближенно оптимальные значения гиперпараметров  $\hat{P}_r^* = \hat{P}^*(C_r)$  для функции  $f(X)$ ;

3) синтезируем суррогатную модель  $\hat{f}_r(X)$  целевой функции  $f(X)$  на основе выборки  $L_r$  с использованием гауссовского процесса с ковариационной функцией  $K(X_{i_1}, X_{i_2}, \hat{P}_r^*)$ .

**5. Вычислительный эксперимент.** В качестве целевых используем функции набора  $S = \{f_\alpha(X); \alpha \in [1:24]\}$  из библиотеки тестовых функций ВВОВ (<http://numbbo.github.io/coco/testsuites/bbob>), имеющих размерности  $|X|$  вектора варьируемых параметров, равные 2, 4, 8.

Рассматриваем гауссовские процессы с ковариационной функцией *Matern* [4]

$$K(X_{i_1}, X_{i_2}, \nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)2^{\nu-1}} \left( \frac{\sqrt{2\nu}}{l} d(X_{i_1}, X_{i_2}) \right)^{\nu} B_{\nu} \left( \frac{\sqrt{2\nu}}{\lambda} d(X_{i_1}, X_{i_2}) \right),$$

где  $\nu$  - гиперпараметр (размерность вектора  $P$  равна единице);  $d(X_{i_1}, X_{i_2})$  - евклидово расстояние между точками  $X_{i_1}, X_{i_2}$  области  $D_X$ .

Набор допустимых значений гиперпараметра  $\nu$  полагаем равным  $\{0,5, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0, \text{inf}\}$ ; рекомендованное значение этого гиперпараметра равно  $\nu^{rec} = 2,5$ .

Используем 84 характерных признака целевой функции:

- $C_1 - C_{41}$  - признаки, вычисляемые с помощью известной открытой библиотеки rFlasso;
- $C_{42} - C_{84}$  - признаки, вычисляемые на основе карты вариативности целевой функции [3].

Усредненные результаты решения 24 тестовых задач представлены на Рис. 1. Черным цветом обозначены результаты, полученные с использованием рекомендованного значения гиперпараметра  $\nu^{rec}$ , синим, красным, зеленым и оранжевым - с использованием мета-функций  $\phi_{CV}(L_r, P)$ ,  $\phi_{RP}(L_r^{ext}, P)$ ,  $\phi_{AD}(L_r^{ext}, P)$  и прогнозирующей модели соответственно. Рис. 1 показывает, что предложенный подход на основе прогнозирования оптимальных значений гиперпараметров дает лучшие результаты для бо'льшего числа задач. Метрика  $\phi_{CV}$ , требующая перекрестной проверки суррогатных моделей, является наиболее трудоемкой, но также и самой точной. С метриками  $\phi_{RP}$ ,  $\phi_{AD}$  результаты сопоставимого качества можно получить с меньшими усилиями более

чем на 50%. Используя стратегию прогнозирования гиперпараметров, задачи можно решить еще за меньшее время (до 70%), при этом качество результатов примерно на 5% лучше, чем для самой точной метрики  $\phi_{CV}$ .

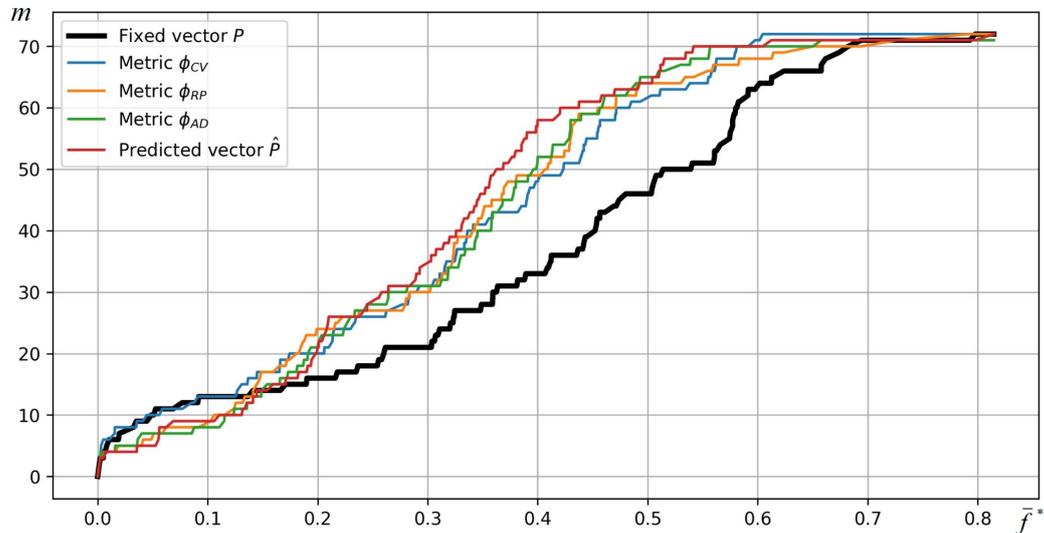


Рис. 1 Результаты вычислительного эксперимента:  $\bar{f}^*$  - нормированное наилучшее найденное значение целевой функции;  $m$  – общее число тестовых задач, для которых найденное значение целевой функции лучше данного

**Заключение.** Рассмотрен подход к повышению эффективности алгоритма байесовской оптимизации, основанный на выборе лучших значений гиперпараметров суррогатной модели, используемой этим алгоритмом. В известных методах этот выбор необходимо производить на каждой итерации байесовской оптимизации, что может привести к значительному увеличению времени, затрачиваемому на решение исходной задачи глобальной оптимизации. Предлагаем метод, основанный на прогнозировании лучших значений гиперпараметров и предполагающий ландшафтный анализ целевой функции исходной задачи оптимизации. Приводим результаты достаточно широкого вычислительного эксперимента по исследованию эффективности этого метода, показывающие его перспективность.

## Литература

1. Díaz-Manríquez, A.; Toscano-Pulido, G.; Gómez-Flores, W. On the selection of surrogate models in evolutionary optimization algorithms. In Proceedings of the IEEE congress of evolutionary computation (CEC), New Orleans, LA, USA, 05 – 08 June 2011; Publisher: IEEE; pp. 2155-2162.
2. Palar, P. S. et al. On the use of surrogate models in engineering design optimization and exploration: The key issues. In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion, Prague, Czech Republic, 13 – 17 July 2019; Publisher: Association for Computing Machinery, New York, NY, United States; pp. 1592-1602.

3. Agasiev, T.A. Characteristic feature analysis of continuous optimization problems based on Variability Map of objective function for optimization algorithm configuration. Open Computer Science 2020, Vol. 10, no. 1, pp. 97-111.

4. Genton, Marc G. Classes of kernels for machine learning: a statistics perspective. The Journal of Machine Learning Research, 2002, no. 3/1, pp. 303–304.

**T.A. Agasiev, A.P. Karpenko**

Bauman Moscow State Technical University (National research university of technology), Moscow, Russian Federation

## **BAYESIAN OPTIMIZATION WITH PREDICTION OF THE BEST VALUES OF HYPERPARAMETERS OF A SURROGATE MODEL**

**Keywords:** *global optimization; Bayesian optimization; surrogate modeling; hyperparameter tuning; landscape analysis; carat variability of the objective function.*

**Abstract.** *Bayesian algorithms are widely used to solve global optimization problems that have a high computational complexity of the objective function. The performance of these algorithms can be highly dependent on the (hyper)parameter values of the surrogate objective function model used. The quality of the surrogate model can be significantly improved by using the “best” values of these parameters. Such hyperparameter values are typically found by constructing several surrogate models with different hyperparameter values, evaluating the performance of these models, and selecting the best model based on this. Building multiple surrogate models (which has to be done at each iteration of Bayesian optimization) requires high computational resources. The paper proposes a new approach to searching for the “best” values of hyperparameters, which has less computational complexity and is based on the use of characteristic features of the objective function landscape.*

**В.В. Борисов, Ю.В. Снявский**

*Филиал ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ» в г. Смоленске*

УДК 004.89

## **НЕЧЕТКОЕ СИТУАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВТОНОМНЫМИ КОМПЛЕКСНЫМИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

**Ключевые слова:** *нечеткое ситуационное управление, автономная комплексная энергетическая система, композиционное гибридное моделирование.*

*Для эффективной работы автономных комплексных энергетических систем (АКЭС) требуется обеспечить баланс между выработкой энергии, потреблением и ее уровнем в накопителях. Это осложнено тем, что генерация возобновляемыми источниками энергии характеризуется: колебаниями с большой амплитудой и с изменением средних значений; наличием потребителей с различной приоритетностью; снижением генерирующих мощностей при эксплуатации; ограничениями накопителей на запас энергии и на число циклов глубокого заряда/разряда. Особенности АКЭС являются: нелинейная взаимозависимость между параметрами; неполнота данных, сложность и затратность экспериментов; риски возникновения опасных ситуаций; разнообразие, нестохастический характер воздействующих факторов; изменение структуры и параметров в ходе функционирования АКЭС. Особенности моделирования АКЭС позволяют обосновать целесообразность сочетания различных подходов для создания композиционных гибридных моделей АКЭС. В докладе рассматривается предлагаемый подход к нечеткому ситуационному управлению АКЭС на основе их композиционных гибридных моделей. Создаваемые на основе предлагаемого подхода методы сочетают достоинства композиционного гибридного моделирования и нечеткого ситуационного управления АКЭС. Полученные теоретические результаты позволят создать научно-методическое, алгоритмическое и информационное обеспечение, а также предложить совокупность научно-технологических решений по повышению эффективности управления АКЭС.*

В настоящее время активно развиваются автономные энергетические системы, включающие в себя возобновляемые источники энергии, такие как ветрогенерирующие установки, фотоэлектрические установки, мини-ГЭС. Особую важность эти системы представляют для арктических районов Российской Федерации, где отсутствует возможность подключения потребителей непосредственно к сетям распределения электрической энергии. Одной из основных проблем, препятствующей широкому внедрению таких энергетических систем, является существенная вариативность системных и внешних факторов, приводящая к большой нестабильности генерации электрической энергии [1-3].

Для решения этой проблемы создаются автономные комплексные энергетические системы (АКЭС), включающие в себя помимо установок на основе возобновляемых источников энергии дизель-генераторные установки и системы накопления энергии [4, 5].

Для эффективной работы АКЭС необходимо обеспечение баланса между выработкой энергии, ее потреблением и уровнем энергии в накопителях. Однако это осложнено следующими факторами:

- генерация энергии возобновляемыми источниками характеризуется короткопериодическими колебаниями с большой амплитудой и с тенденцией к изменению средних значений, вследствие изменения метеорологических условий;
- наличие потребителей разной приоритетности с изменением характера потребления изменяется во времени;
- в процессе эксплуатации может снижаться выработка электроэнергии из-за факторов окружающей среды и из-за выхода из строя оборудования;
- особенности накопителей энергии накладывают ограничения на запас энергии и на число циклов глубокого заряда/разряда.

Особенностями таких АКЭС также являются:

- нелинейная взаимозависимость между параметрами;
- неполнота исходных данных, сложность и затратность проведения экспериментов, риски возникновения опасных ситуаций и их негативные последствия;
- сложность переноса опыта на подобные системы;
- разнообразие воздействия различных факторов, их нестохастический характер;
- изменение структуры и параметров в ходе функционирования [6].

Особенности моделирования АКЭС позволяют обосновать целесообразность комбинирования различных подходов и методов для моделирования АКЭС.

При этом необходимо предусмотреть создание композиционных гибридных моделей АТЭС, учитывающих специфику разработки, обучения и взаимодействия разнотипных компонентных моделей.

Особенностями управления АКЭС являются:

- невозможность участия оператора в процессе управления;
- ситуационный характер управления представляет (выработка последовательностей управляющих решений для перехода их текущей в целевую ситуацию );
- неполнота и частичная неопределенность данных, сложность формализации критериев эффективности управления;
- критичность ошибок управления, приводящих к аварийным ситуациям;
- необходимость адаптации к изменению структуры и параметров в ходе функционирования АКЭС.

В докладе рассмотрен разработанный оригинальный метод анализа и композиционного гибридного моделирования АКЭС в условиях

неполноты информации, разнокачественных данных об их состоянии и функционировании, отличающийся сочетанием возможностей аналитического, нейросетевого и нечеткого подходов к построению композиционных гибридных моделей АКЭС, позволяющий осуществлять адаптацию к изменениям системных и внешних факторов, повысить точность моделирования, а также типизировать представление ситуационных признаков для эффективного нечеткого управления АКЭС [7]. Разработанный метод анализа и моделирования АКЭС включает в себя:

- сбор и обобщение информации об АКЭС;
- выделение компонентов АКЭС и выявление их значимых показателей;
- построение компонентных моделей АКЭС различных типов;
- формирование структуры композиционной гибридной модели АКЭС и структурно-параметрическую настройку взаимосвязей между компонентными моделями;
- мониторинг состояния компонентов АКЭС, структурно-параметрическую настройку и изменение типов компонентных моделей АКЭС.

В рамках созданного метода исследован механизм мониторинга состояния компонентов АКЭС, охарактеризованы типовые случаи мониторинга состояния компонентов АКЭС, причины, возможные меры и процедуры по обеспечению заданной точности композиционного гибридного моделирования АКЭС, а также сформулированы правила изменения типов компонентных моделей.

Для реализации отдельных этапов данного метода разработаны и усовершенствованы способы и методики: выявления значимых показателей компонентов АКЭС; обоснования и выбора совокупности компонентных моделей для построения композиционной гибридной модели АКЭС.

Предложена разновидность композиционных гибридных моделей АКЭС, включающих в себя композицию взаимодействующих компонентных моделей различных типов (аналитических моделей с четкими и нечеткими параметрами, нейросетевых моделей, нечетко-логических моделей; нейро-нечетких моделей; нечетко-нейросетевых моделей), и позволяющих осуществлять их структурно-параметрическую настройку с учетом накапливаемых и актуализируемых данных в ходе функционирования АКЭС.

Разработаны методики построения, структурно-параметрической настройки, обучения и использования компонентных моделей АКЭС различных типов

Предложен метод нечеткого ситуационного управления АКЭС на основе композиционных гибридных моделей, заключающийся в

применении нечеткой ситуационно-управляющей сети для идентификации текущих ситуаций, выбора последовательностей управляющих решений при переводе АКЭС в целевые ситуации, и обеспечивающий повышение эффективности управления в зависимости от стратегии управления и ограничений.

Для реализации отдельных этапов создаваемого метода нечеткого ситуационного управления АКЭС разработаны способы и процедуры:

- построения нечеткой ситуационно-управляющей сети;
- идентификации текущей нечеткой ситуации АКЭС;
- выбора последовательностей управляющих решений для достижения целевой ситуации в соответствии с выбранной стратегией нечеткого ситуационного управления АКЭС;
- адаптации нечеткой ситуационно-управляющей сети к изменениям композиционной гибридной модели АКЭС.

Предложены методики реализации различных стратегий нечеткого ситуационного управления АКЭС, обеспечивающих эффективность, качество, безопасность функционирования этих систем, а именно:

- выработки и динамической корректировки плана энергогенерации в соответствии с планом энергопотребления, прогнозом погоды, условиями внешней среды, диагностируемыми состояниями блоков комплексной энергетической установки;
- управления отключением и подключением потребителей по классам приоритетов в соответствии с текущим состоянием накопителей электрической энергии, состоянием энергогенерации и энергопотребления, планами энергогенерации и энергопотребления;
- управления отключением/подключением первичных возобновляемых источников энергии и дизель-генераторной установки в соответствии с текущим состоянием накопителя электрической энергии, состоянием энергогенерации и энергопотребления, планами энергогенерации и энергопотребления, условиями внешней среды;
- экстренного реагирования без вмешательства оператора на аварийные и предотказные ситуации, возникающие в процессе работы АКЭС.

### **Поддержка исследований**

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № FSWF-2023-0012).*

### **Литература**

1. Назарова Ю.А., Сыровецкий В.А. Возможности использования возобновляемых источников энергии для энергообеспечения Арктики // Корпоративное управление и инновационное развитие экономики Севера: Вестник

НИЦ корпоративного права, управления и венчурного инвестирования Сыктывкарского государственного университета. 2018. № 4. С. 25-35.

2. Коновалова О.Е., Никифорова Г.В. Малая возобновляемая энергетика на северо-западе Арктики // Труды Кольского научного центра РАН. 2016. № 1 (35). С. 117-131.

3. Мирошниченко А.А., Гордиевский Е.М., Кулганатов А.З., Ковалев А.А. Обзор существующих разработок по созданию мобильного энергокомплекса на основе возобновляемых источников энергии // Энергия – XXI век. 2018. № 4 (104). С. 68-72.

4. Solbakken K., Babar B., Boström T. Correlation of wind and solar power in high-latitude arctic areas in Northern Norway and Svalbard // Renew. Energy Environ. Sustain. 2016. 1, 42. DOI: 10.1051/rees/2016027.

5. Тягунов М.Г., Шевердиев Р.П. Влияние режимов работы гибридных энергетических комплексов на основе возобновляемых источников энергии на определение типа аккумуляторов энергии // Вестник Московского энергетического института. 2020. № 4. С. 62-70.

6. Sinyavsky Yu.V., Kirillova E.A. Intelligent control algorithm for autonomous integrated power plants for arctic regions // Journal of Applied Informatics. 2021. Vol. 16. № 4 (94), pp. 74-82.

7. Борисов В.В., Дли М.И., Синявский Ю.В., Федулов А.С. Композиционное гибридное моделирование автономных комплексных энергетических систем // Системы управления, связи и безопасности. 2022. № 4. С. 1-37.

**V.V. Borisov, Yu.V. Sinyavsky**

The Branch of the National Research University  
“Moscow Power Engineering Institute” in Smolensk

## **FUZZY SITUATIONAL CONTROL OF AUTONOMOUS INTEGRATED ENERGY SYSTEMS**

**Keywords:** *fuzzy situational control, autonomous integrated energy system, composite hybrid modeling.*

**Abstract.** *For the efficient operation of autonomous integrated energy systems (AIES), it is necessary to ensure a balance between energy production, its consumption and the energy level in storage. This is complicated by the fact that energy generation by renewable energy sources is characterized by: short-period fluctuations with a large amplitude and with a tendency to change average values; the presence of consumers of different priorities; generating capacities during operation can reduce production; the features of energy storage impose restrictions on the energy reserve and on the number of deep charge/discharge cycles.*

*The features of the AIES are: nonlinear interdependence between parameters; incompleteness of initial data, complexity and cost of conducting experiments; risks of dangerous situations and their negative consequences; a variety of factors affecting the AIES, their non-stochastic nature; changes in the structure and parameters during the operation of the AIES.*

*The features of AIES modeling make it possible to justify the expediency of combining various approaches to build composite models of AIES, taking into account the specifics of the development, training and interaction of different types of component models.*

*The report examines the proposed approach to fuzzy situational management of AIES based on their composite hybrid models. The methods created on the basis of the proposed approach combine the advantages of composite hybrid modeling and fuzzy situational control of the AIES. The theoretical results obtained make it possible to create scientific, methodological, algorithmic and information support, as well as to offer a set of scientific and technological solutions to improve the efficiency of the management of the AIES.*

**А.А. Винокуров**

*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.9

## **РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ИЗБЫТОЧНЫХ И НЕДОСТОВЕРНЫХ ДАННЫХ**

Ключевые слова: *избыточные данные, недостоверные данные, динамическая система, многослойная нейронная сеть.*

*В статье описана математическая модель оценки состояния объекта управления при избыточных и недостоверных данных. Для накопления информации о параметрах объекта управления с различных данных с учетом времени измерения предлагается использовать блок последовательно соединенных звеньев с задержкой. Для определения параметров объекта управления используется многослойная нейронная сеть с распространением вперед, позволяющая обрабатывать повторяющийся входной сигнал с учетом временного сдвига. Кроме того, теоретические выводы подтверждаются практическими исследованиями и оценкой точности полученной математической модели.*

**1. Введение.** В настоящее время для контроля и управления производственными и технологическими процессами используется большое количество разнообразных средств сбора информации, к которым относятся датчики, сенсоры, счетчики, камеры видеонаблюдения и пр. Зачастую, средства сбора информации

расположены в нескольких местах и позволяют измерять одинаковые параметры объекта управления в силу своей избыточной функциональности. При этом к инструментальной погрешности средства сбора информации добавляется погрешность, связанная с местом измерения параметра объекта управления. В связи с чем, оценка состояния объекта управления при избыточных и недостоверных данных является критически важной задачей для эффективного управления. Для ее решения применяются методы статистического анализа, экспертные оценки, моделирование неопределенности и другие инструменты, позволяющие воспроизводить различные сценарии развития событий. Основным недостатком данных методов является их высокая вычислительная сложность, поскольку требуется обрабатывать большое количество данных, и зависимость полученных результатов от точности моделирования процесса. Кроме того, широко применяются методы машинного обучения и искусственного интеллекта для анализа данных и прогнозирования возможных последствий. Для более точной и надежной оценки состояния объекта управления при избыточных и недостоверных данных целесообразно использовать комбинированные подходы, что требует детальной формализации состояния объекта управления. Следовательно, разработка математической модели оценки состояния объекта управления при избыточных и недостоверных данных является своевременной и актуальной задачей.

**2. Математическое моделирование процесса оценки состояния объекта управления.** В работе [1] для описания состояния объекта управления предлагается использовать математическое представление вида:

$$E_S = \langle (a_{1i}, v_{1i}), \dots, (a_{ni}, v_{ni}) \rangle \quad (1)$$

где  $(a_{ij}, v_{ij})$  – упорядоченная пара параметра объекта управления и его значения.

Тогда, с учетом избыточности и недостоверности данных о параметрах объекта управления, для процесса оценки его состояния используются уравнения теории динамических систем в пространстве состояний. При этом важно учитывать не только множество значений одного параметра, но и время их появления. Для этого при моделировании объекта управления в его структуре предлагается использовать последовательно соединенные звенья с задержкой, состояние которых описывается уравнением:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n-k)x(k) \quad (2)$$

где  $y(n)$  - выходное воздействие,  $x(k)$  - входное воздействие,  $h(n-k)$  - импульсная переходная функция.

Используя свертку выходного воздействия  $y(n)$  уравнения (2) при  $z$ -преобразовании вида  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$ , получим передаточную функцию  $Y(z) = H(z)X(z)$ , где  $X(z)$ ,  $Y(z)$ ,  $H(z)$  -  $z$ -образы функций  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно.

Объект управления с последовательно соединенными звеньями с задержкой характеризуется:

- числом звеньев  $p$ ;
- импульсной переходной функцией каждого звена, равной обратному преобразованию  $h(n) = Z^{-1}[H(z)]$ ;

- общей импульсной переходной функцией  $h_p(n) = Z^{-1}\{[H(z)]^p\}$ , являющейся  $p$ -кратной сверткой  $h(n)$ ;

- глубиной  $D = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot h_p(n)$ , показывающей количество данных по каждому параметру с учетом времени измерения.

Для имитации описанной выше динамической системы используются многослойные нейронные сети с распространением вперед. На вход данной нейронной сети подаются повторяющиеся сигналы с различной временной задержкой, обрабатывают которые нейроны скрытого и выходного слоя. При этом входной сигнал может быть векторным. Нейронная сеть с распространением вперед позволяет не только выполнять структурное распознавание состояния объекта, но и распознавать состояние в течение некоторого временного интервала, что является обязательным условием для работы с избыточными и недостоверными параметрами. При таком устройстве нейронной сети происходит обработка текущих входных данных с учетом их прошлых значений.

Входной сигнал нейронной сети представляет собой набор текущего и предшествующих значений параметра объекта управления  $\{x(n), \dots, x(n-p)\}$ . Для определения достоверности и достаточности параметра используется среднеквадратичная ошибка, определяемая как разность между текущим выходным сигналом нейронной сети  $y(n)$  и ожидаемым. Для расчета среднеквадратичной ошибки может быть использован один или несколько нейронов на скрытом слое (рис.1).

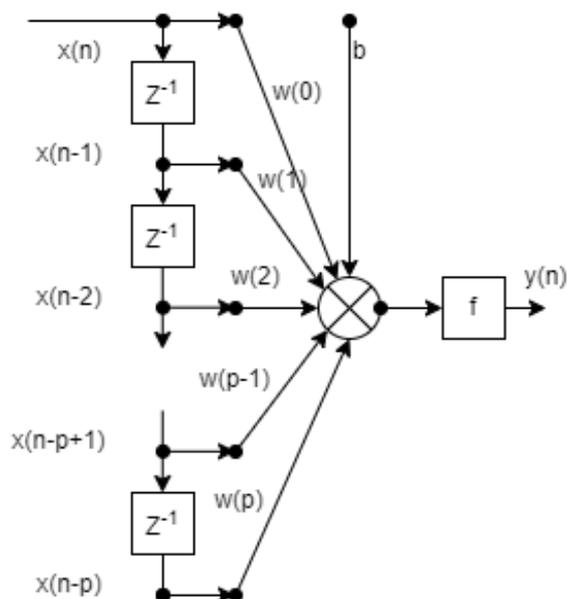


Рис.1. Структура нейронной сети динамической системы

Зависящая от времени обработка информации осуществляется в блоках с задержкой, имеющих дополнительные связи с синапсами нейронов в других слоях. Входная информация с различными данными одного и того же параметра с учетом временного контекста распределяется по синаптическим весам.

При этом входной сигнал нейронной сети определяется уравнением:

$$y_j(n) = f\left(\sum_{k=0}^p w_j(k)x(n-k) + b_j\right) \quad (3)$$

где  $f$  - функция активации нейрона,  $w_j(k)$  - синаптические веса,  $b_j$  - допустимое значение погрешности параметра объекта управления.

Для оценки точности предложенной модели рассмотрим результаты эксперимента, который заключался в определении состояния объекта управления по нескольким параметрам: температуре, давлению, влажности, запыленности. Датчики для измерения параметров располагались в нескольких точках как на самом объекте, так и вблизи него. Контрольные значения параметров определялись эталонными датчиками. Для наглядности в таблице 1 приведены результаты определения температуры объекта управления.

Таблица 1.

Значения параметра объекта управления в течение времени

Время измерения	00:00	01:00	02:00	...	09:00	10:00
Датчик 1	25°C	24°C	25°C	...	26°C	27°C
Датчик 2	26°C	27°C	28°C	...	31°C	34°C

Датчик 3	25°C	23°C	23°C	...	28°C	25°C
Контрольный датчик	25°C	25°C	26°C		26°C	25°C
Нейронная сеть	25°C	25°C	26°C	...	26°C	26°C

Исходя из представленных результатов эксперимента точность оценки состояния объекта управления при избыточной и недостоверной информации с использованием описанной выше математической модели составляет 98%.

**3. Заключение.** Разработанная математическая модель с применением многослойной нейронной сети с распространением вперед позволяет оценивать состояние объекта управления при избыточных и недостоверных данных. Предложенная модель с блоком последовательно соединенных звеньев с задержкой позволяет накапливать значения параметра с различных средств сбора информации с учетом времени измерения. Подобный подход позволяет обрабатывать параметры объекта как динамически (зависящая от времени обработка), так и статически. Динамическая обработка информации позволяет определить состояние объекта управления в текущий момент времени при избыточной и недостоверной информации, статическая – накапливать данные об объекте с целью дальнейшего их исследования, например, для вопросов прогнозирования состояния.

### Литература

1. Шевнина Ю.С. Метод оценки состояния нелинейной системы на основе логического анализа данных // Известия вузов. Электроника, Т. 27 №3. 2022, С. 407-415.
2. Шевнина Ю.С., Гагарина Л.Г., Конюхов Е.В., Харитонов А.Д. Метод кластерного анализа гетерогенных данных с использованием положений нечеткой логики // Известия вузов. Электроника. 2023. № 4. С. 445-452.
3. Шевнина Ю.С. Метод декомпозиции сложной нелинейной системы на основе процессного подхода // Системы управления и информационные технологии, №3(85), 2021. – С. 24-29.
4. Шевнина Ю.С. Иерархическая модель нелинейной динамической системы // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики, №8, 2021. – С. 135-139.

**A.A. Vinokurov**

National Research University "MIET"

### DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR ASSESSING THE STATE OF A CONTROL OBJECT WITH INCOMPLETE AND UNRELIABLE DATA

**Keywords:** *redundant data, unreliable data, dynamic system, multilayer neural network.*

**Abstract.** *The article describes a mathematical model for assessing the state of a control object with redundant and unreliable data. To accumulate information about the parameters of the control object from various data, taking into account the measurement time, it is proposed to use a block of series-connected links with a delay. To determine the parameters of the control object, a multilayer neural network with forward propagation is used, which allows processing a repeating input signal taking into account the time shift. In addition, the theoretical conclusions are confirmed by practical research and assessment of the accuracy of the resulting mathematical model.*

**А.С.Волков, Е.М. Портнов, С.Ф.Царапкин, В.В. Слюсарь**  
*Национальный исследовательский университет "МИЭТ"*

УДК 004.413.5

## **МЕТОД РАЗРАБОТКИ ПРИЛОЖЕНИЙ НА УДАЛЕННОМ СЕРВЕРЕ**

Ключевые слова: *разработка приложений, удаленный сервер, алгоритм, загрузка файлов, быстродействие*

*Предложено формализованное представление и создан новый метод разработки приложений на удаленном сервере, позволяющий значительно уменьшить трудозатраты при разворачивании локального окружения и сократить время, затрачиваемое на не связанные непосредственно с разработкой действия. В ходе проведения экспериментов по оценке быстродействия установлено, что предложенная методика в зависимости от коэффициента изменения файлов обеспечивает снижение времени разработки приложений в 1,61-2,89 раз, при этом размер файлов на эффективность методики не влияет.*

В процессе создания работы над программным проектом пользователь постоянно имеет дело с файлами исходного кода. Для выяснения времени работы необходимо знать количество файлов и размер одного файла. Общий размер изменяемого во время работы исходного кода вычисляется по формуле:

$$src(C_{\text{файл}}) = C_{\text{файл}} \cdot S_{\text{файл}} \quad (1)$$

где  $C_{\text{файл}}$  – количество файлов;  $S_{\text{файл}}$  – размер одного файла.

Общее время выполнения одной итерации разработки, в которую входит изменение файлов, сборка и тестирование на локальной машине,

загрузка файлов на сервер, сборка и тестирование на сервере вычисляется по формуле:

$$t_{\text{итер}}(src) = t_{\text{изм}} + t_{\text{лок.сборка}} + t_{\text{загрузка}} + t_{\text{сер.сборка}} \quad (2)$$

где  $t_{\text{изм}}$  – время изменения файлов;  $t_{\text{лок.сборка}}$  – время сборки на локальном компьютере;  $t_{\text{загрузка}}$  – время загрузки файлов на сервер;  $t_{\text{сер.сборка}}$  – время сборки на сервере.

Время изменения файлов в первую очередь зависит от размера изменяемых файлов, так же этот параметр зависит от многих других факторов, такие как скорость набора пользователя, удобства редактора и т.д. Но в данной работе этими факторами можно пренебречь и выбрать усредненный коэффициент, который будет учитывать эти факторы. Поэтому время изменения файлов рассчитывается по следующей формуле:

$$t_{\text{изм}}(src) = (src \cdot k_{\text{изм}})^{3/2} \quad (3)$$

где  $k_{\text{изм}}$  – коэффициент времени изменения файлов.

Время загрузки файлов на сервер, так же как и время изменения файлов зависит от размера изменяемых файлов, и тоже зависит от других параметров, такие как скорость интернета, протокол обмена и т.д. Но в данной работе этими факторами можно пренебречь и выбрать усредненный коэффициент, который будет учитывать эти факторы. Еще надо учитывать время, затрачиваемое пользователем на выбор инструмента загрузки и установку соединения, это время будет константным для всех загрузок. Поэтому время загрузки файлов на сервер рассчитывается по следующей формуле:

$$t_{\text{загрузка}}(src) = src \cdot k_{\text{загрузка}} + tc_{\text{загрузка}} \quad (4)$$

где  $k_{\text{загрузка}}$  – коэффициент времени загрузки файлов на сервер;  $tc_{\text{загрузка}}$  – время, затрачиваемое на выбор инструмента загрузки и установку соединения.

Общее время одного цикла разработки складывается из времени всех итераций, но на некоторых итерациях, на которых возникла ошибка компиляции или тестирования производится еще одна итерация, но с меньшим количеством файлов.

$$t_{\text{цикл}}(C_{\text{итер}}) = \sum_{i=0}^{i=C_{\text{итер}}} (t_{\text{итер}}(src_i) + t_{\text{итер}}(src_i / 2) \cdot E_i) \quad (5)$$

где  $C_{\text{итер}}$  – количество итераций в цикле;  $src_i$  – размер исходного кода, изменяющийся в итерации;  $E_i$  – случайная величина, которая принимает значение 0, в случае если ошибка не произошла и 1, если произошла.

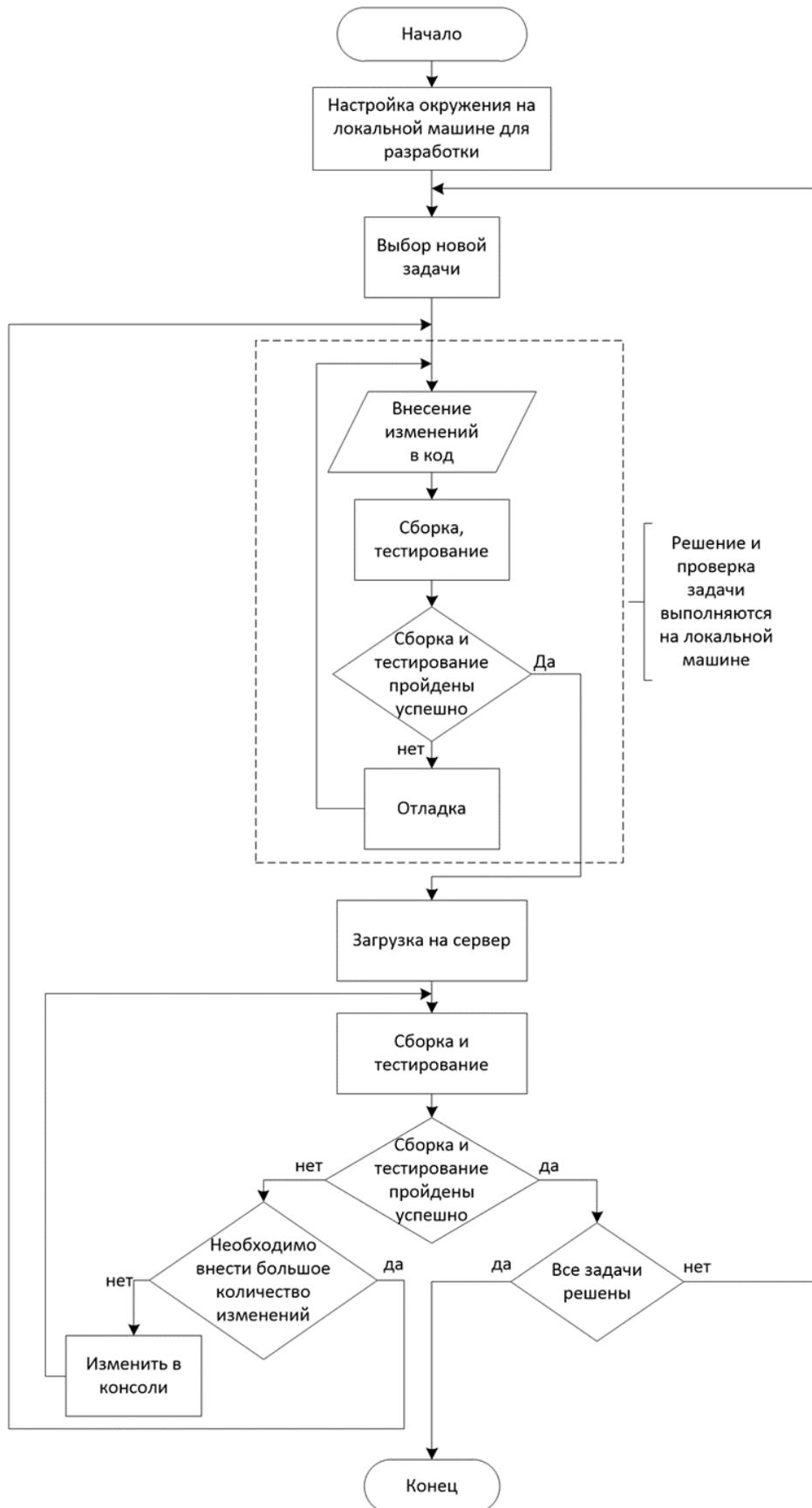


Рис. 1. Существующая методика разработки веб-приложений

Новая методика должна позволить уменьшить общее время одного цикла разработки.

На рисунке 1 показана существующая методика разработки веб-приложений.

Для удобного решения проблемы было решено разбить проблемы на более мелкие части и рассматривать более мелкие части. Первая подпроблема, которая встает перед разработчиком это настройка локальной машины.

Второй подпроблемой является постоянные загрузки файлов на сервер. При возникновении необходимости каких-либо изменений в проекте практически всегда программисту приходится заново загружать измененные файлы на сервер.

Третьей подпроблемой можно выделить редактирование файлов на сервере. При разработке, недостаточно базовых функций, встроенных во многие редакторы, редакторы должны поддерживать умный переход по файлам, поиск по файлам вхождений различных определений или объявлений функций или классов, автодополнение.

Четвертой и последней подпроблемой, которую можно выделить является отладка программы на удаленном сервере. Если ошибка проявляется только на удаленном сервере, то ее невозможно отследить средствами отладки, встроенными в ИСР, расположенной на локальной машине.

Существующий подход разработки веб-приложений требуют локального размещения, установки и конфигурации программного обеспечения на компьютере [1,2]. Настройка инструментов разработки требует довольно много усилий и времени. Если замерить время, требующееся на установку Eclipse с плагинами для отслеживания ошибок, системой контроля версий и стандартным языком программирования, то получится от начала до конца не меньше 18 минут.

Следующий шаг – установка рабочего пространства для разработчика. Это самая долгая процедура. Для больших приложений, особенно веб-приложений Java, может потребоваться час для тщательной конфигурации для опытного разработчика, даже если все необходимые плагины уже имеются. Эта проблема обостряется сравнительно небольшими возможностями Eclipse для обмена конфигурациями между рабочими областями и отсутствующей поддержкой безопасного клонирования рабочих областей.

Местное размещение и установка накладывают бремя поддержки и обновлений установки на разработчика. В то время как это позволяет отдельному разработчику управлять рисками и временем необходимым для обновления, постоянные затраты на обновления всегда несутся всеми разработчиками. Разрешение требований конфликтующих версий

плагинов хорошо известная головная боль для большинства пользователей ИСР, так же как и прерывистые регрессии из-за случайных неполных обновлений плагинов [3,4].

На рисунке 2 показывается взаимодействие клиентов и сервера при разворачивании среды разработки на локальной ЭВМ.  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  – множество клиентов подключенных к серверу.  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  – множество репозитория, которые располагаются на локальных ЭВМ разработчиков. Общий размер установленных библиотек на различных ЭВМ, высчитывается по формуле:

$$libs_{общ} = libs \cdot (n + 1) \tag{6}$$

Практически полностью можно будет оказаться от настройки локальной машины, если весь исходный код разработчика и все библиотеки будут находиться на сервере, а локальная машина будет выступать только интерфейсом для обращения к проекту. С таким подходом пользователю не придется задумываться о текущей версии того или иного инструмента или библиотеки. Единственным, что будет необходимо настроить является клиент, расположенный на локальной машине.

Если разработчик работает более чем на одном компьютере, то устанавливать все перечисленное придется не один раз, особенно если работа ведется на нескольких платформах. Перемещая свое рабочее пространство с Windows на Linux дома, требуется полная установка всего с самого начала.

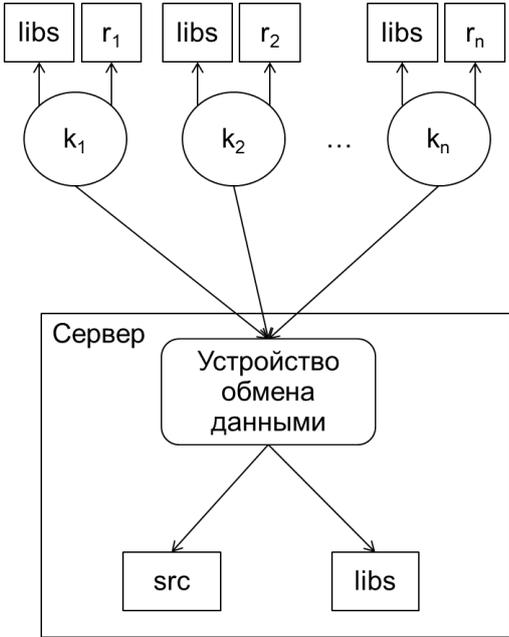


Рис. 2. Схема взаимодействия клиентов с сервером, используя существующую методику

На рисунке 3 показывается взаимодействие клиентов и сервера при отсутствии среды разработки на локальной ЭВМ.  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  – множество репозиториях расположенных на сервере, на каждого клиента свой репозиторий. *src* – размер исходного кода, который находится в общем репозитории. *libs* – размер библиотек, используемых в проекте.

Конечно, с таким подходом существуют и минусы, связанные с тем, что у пользователя не останется выбора инструмента, который ему больше подходит. Но этот недостаток можно свести к минимуму, если дать пользователю возможность гибкой настройки своего клиента. Так же этот недостаток не является значительным во многих компаниях, в которых существуют корпоративные стандарты, которым придерживаются все сотрудники.

Из первой главы этой диссертации можно сделать вывод, что очень удачным выбором клиента может оказаться веб-браузер. Так же надо отметить, что при выборе в качестве клиента веб-браузер пользователь будет практически независим от машины, на которой происходит разработка. В связи с этим разработка может быть очень гибкой и осуществляться практически в любом месте.

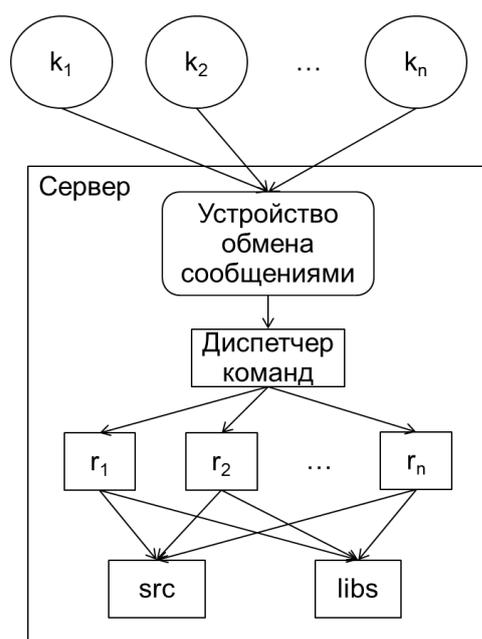


Рис.3. Схема взаимодействия клиентов с сервером, используя новую методику

На рисунке 4 представлены графики, показывающие общее время разработки для разного количества итераций в цикле разработки.

По результатам проведенных экспериментов можно заключить, что предложенная методика в зависимости от коэффициента изменения файлов обеспечивает снижение времени разработки приложений в 1,61-2,89 раз.



Рис. 4. Зависимость времени разработки от количества итераций

## Литература

1. Ганин Е.А. Подход к разработке масштабируемых веб-приложений // Перспективы развития информационных технологий. 2013. № 12. С. 62-66.
2. Пупыкина А.А. Анализ современных подходов к автоматизации разработки веб-приложений//Межотраслевая информационная служба. 2011. № 3. С. 12-20.
3. Мэтьюз Марти , Кронан Джон Динамическое веб-программирование (+ CD-ROM); Эксмо - Москва, 2010. - 384 с.
4. Хоган Б., Уоррен К., Уэбер М., Джонсон К., Годин А. Книга веб-программиста. Секреты профессиональной разработки веб-сайтов; Питер - Москва, 2013. - 288 с.

**A.S. Volkov, E.M. Portnov, S.F. Carapkin, V.V. Slyusar'**  
National Research University of Electronic Technology (MIET)

## A METHOD FOR DEVELOPING APPLICATIONS ON A REMOTE SERVER

**Keywords:** *application development, remote server, algorithm, file upload, performance.*

**Abstract.** *A formalized representation is proposed and a new method for developing applications on a remote server is created, which significantly reduces labor costs when deploying a local environment and reduces the time spent on actions not directly related to development. During the performance assessment experiments, it was found that the proposed technique, depending on the file change coefficient, reduces application development time by 1.61-2.89 times, while the file size does not affect the effectiveness of the technique.*

## УДАЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ БАЗОЙ ДАННЫХ МУЛЬТИМЕДИЙНЫХ ФАЙЛОВ

Ключевые слова: СУБД, хранение данных, обработка запросов.

*В данной работе рассматривается одна из возможных реализаций модуля удаленного доступа и управления базой данных мультимедийных файлов, адаптированного для работы веб-приложений.*

**Введение.** В настоящий момент все большее количество рабочих процессов проводятся в удаленном режиме. В случаях, когда для обеспечения удаленного режима доступа к рабочим ресурсам используются веб-приложения, существует значительное количество функционала, общего для различных веб-приложений. В частности, среди прочего можно выделить функционал предоставления доступа к СУБД. Он заключается в предоставлении API для доступа к базе данных, в санитизации ввода от вредоносного содержания, в создании и ведении служебных полей в базе данных.

Хотя некоторые существующие СУБД поддерживают возможность удаленного подключения и управления с использованием протокола HTTP или обладают схожим функционалом, из соображений безопасности имеет смысл создание модуля-посредника.

Таким образом, можно сформулировать задачу разработки программного модуля удаленного управления базой данных (ПМ УУБД), предоставляющего интерфейс для взаимодействия с СУБД. ПМ УУБД должен позволять доступ к мультимедийным файлам различных форматов, включая их загрузку пользователем, и должен подходить для работы широкого круга веб-приложений и порталов (см. рис 1).

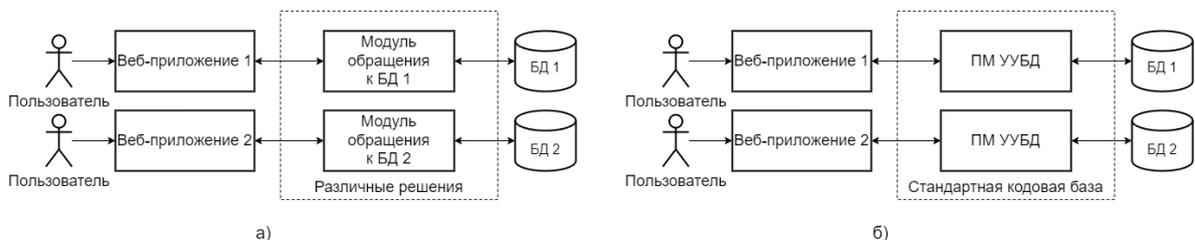


Рис 1. Веб-приложение до (а) и после (б) разработки ПМ УУБД

**Требования к проекту.** ПМ УУБД должен обеспечить поиск по загруженным мультимедийным файлам, для чего необходимо хранить

их атрибуты. Соответственно, было принято решение хранить эти атрибуты вместе с мультимедийным файлом в формате JSON.

Так как JSON является распространенным форматом, веб-приложение потенциально будет загружать в том числе JSON-файлы. Соответственно, JSON выделен в отдельный подкласс мультимедийных файлов.

Таким образом, основные требования к ПМ УУБД таковы:

1) ПМ УУБД должен, без предоставления непосредственного доступа к СУБД или к возможности выполнять произвольные команды, предоставлять возможность:

- 1.1) доступа к мультимедийным файлам;
- 1.2) доступа к JSON-файлам;
- 1.3) поиска по JSON-файлам и атрибутам мультимедийных файлов;

2) ПМ УУБД может предъявлять требования только к:

- 2.1) максимальному размеру файла;
- 2.2) соответствию файла его заявленному формату;

3) функционал, описанный в пунктах с 1 и 2, должен быть доступен в рамках API, использующего HTTP-протокол;

4) ПМ УУБД должен предоставлять API управления состоянием.

При составлении выборок по мультимедийным файлам в соответствии с требованием 1.3 сами файлы не должны передаваться. Причиной этого является то, что поисковый запрос на составление такой выборки может соответствовать большому количеству хранимых мультимедийных файлов, а также то, что объем индивидуального файла также может быть высоким. Таким образом, объем передаваемых данных при полной передаче всех данных по выборке неоправданно велик. Для его уменьшения должны передаваться только необходимые данные.

**Реализация проекта.** При реализации API ПМ УУБД разделяется на два изолированных друг от друга интерфейса. Первый интерфейс — интерфейс доступа к данным — реализует функционал, описанный в требовании 1, и использует стиль REST и протокол HTTP. Второй интерфейс — интерфейс управления состоянием — использует протокол gRPC [2].

Для реализации ПМ УУБД используется язык программирования C#, информация хранится в СУБД MongoDB [1, 2].

**Детали реализации.** Разрабатываемый модуль делится на пять функциональных подмодулей, их логические связи представлены на рис. 2.

Подмодуль Control отвечает за:

- 1) хранение информации о состоянии модуля;
- 2) управление общими функциями, такими как резервирование данных, журналирование действий;

3) общее управление состоянием интерфейса доступа к данным, т.е. будет ли ПМ УУБД отвечать на запросы конкретных типов, и будет ли он вообще отвечать на запросы в рамках интерфейса доступа к данным;

4) реализацию внутренней логики интерфейса управления состоянием, т.е. за фактическое изменение состояния модуля.

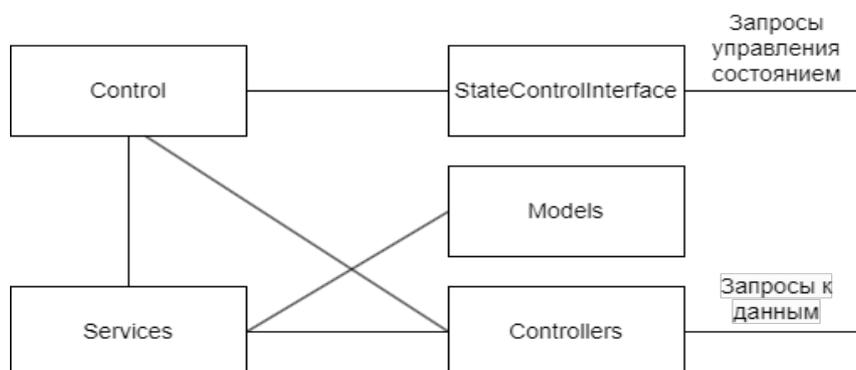


Рис. 2. Логические связи подмодулей

Подмодуль StateControlInterface отвечает за реализацию коммуникаций в рамках интерфейса управления состоянием, в частности, обработку и ответ на входящие запросы.

Подмодуль Controllers отвечает за реализацию коммуникаций в рамках интерфейса доступа к данным. В зависимости от того, ожидается ли JSON или мультимедийный файл, реализованы два комплекта функций интерфейса (см. табл. 1). Заметим, что указанный путь (/api/data/{id}/, /api/file/{id}/ и т.п.) является демонстрационным вариантом, предусматривается возможность его конфигурации.

Таблица 1

Функции интерфейса доступа к данным

Работа с JSON-файлами	Работа с мультимедийными файлами	Описание
GET /api/data/{id}/	GET /api/file/{id}/	Чтение указанного файла
HEAD /api/data/{id}/	HEAD /api/file/{id}/	Чтение указанного файла (возвращаются только заголовки)
PUT /api/data/{id}/	PUT /api/file/{id}/	Редактирование указанного файла
POST /api/data/	POST /api/file/	Запись указанного файла
GET /api/data/	GET /api/file/	Поиск по хранимым данным
DELETE /api/data/{id}/	DELETE /api/file/{id}/	Удаление указанного файла

Подмодуль Services отвечает за реализацию внутренней логики интерфейса доступа к данным, т.е. за фактическое чтение, запись или изменение хранимых данных, составление выборок. Заметим, что в

зависимости от наличия аргументов в теле запроса поиска вызываются две разные внутренние функции, соответствующие собственно поиску и предоставлению выборки всех доступных данных.

Подмодуль Models имплементирует используемые модели данных. В частности:

1) модели FileEntry и DataEntry, используемые для хранения мультимедийных и JSON-файлов соответственно;

2) модели FileFormat и DataFormat, соответствующие формату передачи мультимедийных и JSON-файлов соответственно;

3) модель ShortFormat, соответствующую краткому формату передачи данных в рамках выборок по мультимедийным файлам.

Внутренняя репрезентация данных состоит из трех основных таблиц. Две таблицы, FileEntries и DataEntries, хранят данные о мультимедийных и JSON-файлах соответственно, их поля представлены в таблице 2. Можно выделить соответствие в полях двух таблиц, за исключением поля FileLocation таблицы FileEntries, у которого нет аналога в таблице DataEntries (в таблице 2 отмечено прочерком).

Таблица 2

*Внутреннее представление данных*

Наименование полей в таблице FileEntries	Наименование полей в таблице DataEntries	Содержание
ObjectId	ObjectId	Уникальный ObjectId файла
FileName	DataName	Имя файла
FileExtension	DataType	Тип хранимых данных
CreationDate	CreationDate	Дата загрузки (создания)
LastChanged	LastChanged	Дата последнего изменения
Ownership	Ownership	Данные о владении файлом
FileMetadata	DataContent	Поле для хранения JSON-документа с атрибутами
FileLocation	–	Расположение файла
MarkedForDeletion	MarkedForDeletion	Должен ли файл быть удален в дальнейшем

Видимые конечному пользователю данные представляют собой мультимедийный файл, а также JSON-файл с

- 1) документом JSON с атрибутами файла (поле FileMetadata);
- 2) именем файла (FileName);
- 3) расширением файла (FileExtension);
- 4) датой создания (CreationDate);
- 5) датой последнего изменения (LastChanged).

В случае если производится работа с JSON-файлом, используются поля DataContent, DataName, DataType, CreationDate и LastChanged соответственно.

Доступ к полям с датой создания и последнего изменения предоставляется только на чтение. Поля с именем и расширением допустимо опускать при загрузке, в таком случае произойдет их автозаполнение.

**Заключение.** ПМ УУБД реализует общий для веб-приложений, использующих СУБД, функционал, тем самым позволяя сэкономить время на разработку и отладку соответствующего модуля для отдельных веб-приложений; уменьшает вероятность пропуска уязвимости при отладке веб-приложений.

### Литература

1. MongoDB: The Developer Data Platform | MongoDB [Электронный ресурс] — Режим доступа: <https://www.mongodb.com/>, свободный.
2. Microsoft Learn: Build skills that open doors in your career [Электронный ресурс] — Режим доступа: <https://learn.microsoft.com/>, свободный (дата обращения 22.12.2023).

**V.R. Vostrikov, A.I. Kononova**

National Research University of Electronic Technology

## REMOTE CONTROL OF A DATABASE OF MULTIMEDIA FILES

**Keywords:** *DBMS, data storage, query processing.*

**Abstract.** *This paper examines one of the possible implementations of a module for remote access and management of a database of multimedia files, adapted for web applications.*

**И.О. Гайдук, А.В. Можжухина**

*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»,  
НПК «Технологический центр»*

УДК 004.67:621.3.049.77

## ГРАФОВЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ И МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ В ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ БИС

Ключевые слова: *БИС, размещение, САПР, графы, GNN, глубокое обучение с подкреплением, параллельные вычисления.*

*В данной работе рассматривается возможность внедрения технологий искусственного интеллекта в системах автоматизированного проектирования (САПР) в сфере производства*

*изделий микроэлектроники. Приведено формальное представление задачи размещения элементов больших интегральных схем (БИС) на базовом матричном кристалле (БМК). На основе формального описания сделаны выводы о целесообразности использования механизмов глубокого обучения с подкреплением для решения поставленной задачи. Кроме того, проанализированы подходы разноуровневого масштабирования и параллелизации вычислений для сокращения затрат временных и вычислительных ресурсов.*

## **1. Введение.**

В настоящее время применение искусственного интеллекта (ИИ) на производстве неуклонно растет: в 2022 году мировой рынок промышленного программного обеспечения с ИИ вырос на 14%, а к 2024 году объем этого рынка должен составить \$30.6 млрд при ежегодном приросте этой сферы деятельности на 44%. По итогам 2023 года объем инвестиций в стартапы в области искусственного интеллекта в глобальном масштабе достиг почти \$50 млрд. Это примерно на 9% больше результата за предыдущий год. По состоянию на начало 2024 года различные решения на базе искусственного интеллекта применяют 39% российских компаний [1].

Изначально такой раздел машинного обучения, как обучение с подкреплением (RL, reinforcement learning) развивался исключительно в рамках задач игровой индустрии [2, 3]. Однако, в последнее время появляется все больше идей о его применении не только для анализа игровых данных, но и в различных видах производств [4] и автономных систем принятия решений, в частности, в САПР.

Одной из первых компаний, которая опубликовала статью о создании ИИ для размещения элементов процессоров, стала компания Google [5]. Следом за ней последовали анонсы и статьи с вариантами использования ИИ в размещении или на других этапах проектирования от таких крупных компаний, как Cadence [6] (Innovus, Cerebrus), Synopsys [7] (DSO.ai), NVIDIA (совместные разработки с Google), Siemens (Calibre). Чаще всего эти разработки связаны с созданием процессоров и чипов для ИИ. Некоторые разработки хранят описание микросхем на языке, отличном от Verilog или VHDL (у Google netlist считывается в opensource формате «protocol buffer»).

Таким образом, использование зарубежного опыта внедрения ИИ на разных уровнях САПР позволяет сделать вывод об актуальности исследований в области применения ИИ в отечественных САПР, в частности на этапе размещения элементов.

## **2. Формальное представление задачи.**

На настоящий момент чаще всего микросхемы представляют в виде графов [8]. Таким образом, в БИС есть множество элементов  $E = \{e_1, e_2,$

...,  $e_n$  ...,  $e_N$ }, которые обладают рядом характеристик [9]. Использование нейронных сетей для размещения элементов накладывает ряд ограничений на входные данные, в частности связанные с масштабируемостью. Для устранения проблемы с масштабируемостью используется векторное представление (эмбединнг) элементов БИС. Тогда на основе этого можно составить матрицу, содержащую все характеристики вершин — это матрица эмбедингов элементов, позволяющая закодировать изменение схемы в процессе размещения в каждый момент времени (1):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & h_1 & w_1 & x_1 & y_1 & placed_1 & \dots & type_1 \\ 2 & h_2 & w_2 & x_2 & y_2 & placed_2 & \dots & type_2 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ n & h_n & w_n & x_n & y_n & placed_n & \dots & type_n \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ N & h_N & w_N & x_N & y_N & placed_N & \dots & type_N \end{pmatrix} \quad (1)$$

где  $N$  – номер элемента в схеме,  $h$  – высота,  $w$  – ширина,  $x$  и  $y$  — координаты размещения,  $placed$  – признак размещения (в схеме могут быть и предразмещенные элементы, например, периферийные),  $type$  – тип элемента и другие важные характеристики, на которые будет необходимо обращать внимание при обучении. Таким образом, закрепление для всех вершин одинакового количества характеристик — длины эмбединга — приведет к тому, что в матрице эмбедингов любой микросхемы будет одинаковое количество столбцов, а количество элементов повлияет только на количество строк. Также в описание графа входит список ребер и, при необходимости, их вес.

Область размещения стандартно состоит из некоторого количества вентилях — ячеек, которые берутся за базовую единицу площади  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m, \dots, p_M\}$ . Каждый элемент может состоять из одной или множества таких единиц, чаще всего прямоугольной формы. Таким образом, площадь области размещения должна быть как минимум равна площади размещаемых элементов (2).

$$\sum_{n=1}^N (h_n * w_n) \leq \sum_{m=1}^M p_m \quad (2)$$

На практике в большинстве проектов процент заполнения в среднем около 70-80. Задача сводится к получению такого отображения множества элементов на множество ячеек области размещения (3), чтобы конечное размещение удовлетворяло некоторому ряду правил.

$$f : E \rightarrow P; \square \forall e_1, e_2 \in E : e_1 \neq e_2 \Rightarrow f(e_1) \neq f(e_2); \square \forall e \in E : \exists p \in P : e = f(p) \quad (3)$$

Такое отображение не будет биективным по нескольким причинам:

1) некоторые элементы будут занимать не одну, а сразу несколько располагающихся рядом ячеек (при условии, что нет специфических элементов нестандартной формы);

2) некоторые ячейки могут остаться пустыми, если процент заполнения области размещения меньше 100%;

3) некоторые ячейки могут быть недоступны для размещения элементов.

Из основных правил оценки конечного размещения можно выделить такие, как:

1) оценка суммарного расстояния между соединенными элементами;

2) оценка равномерности распределения элементов по площади размещения для снижения количества мест с завышенной концентрацией элементов при больших объемах пустых ячеек в некоторой окрестности.

Дополнительным правилом может служить оценка расстояний и элементов между триггерами для расстановки в соответствии с примерными задержками сигнала.

В таком виде задача сводится к марковскому процессу принятия решений [10]. В этом случае ее можно решить, используя обучение с подкреплением через задачу о максимизации награды.

### **3. Обучение с подкреплением в задаче размещения элементов БИС.**

Для использования обучения с подкреплением необходимо создать следующие составляющие методики:

1) среду, в которой агент обучается;

2) алгоритм, согласно которому агент корректирует свое поведение при принятии решений;

3) начальную политику принятия решений, которую агент улучшает в процессе обучения (в данном случае подразумевается подпор начальных гиперпараметров нейронной сети);

4) функция награды, основанная на правилах размещения, которые определяют эффективность действий агента в текущей ситуации, а также позволяющая оценить конечное размещение и скорректировать политику принятия решений.

При работе алгоритма необходимо на каждом шаге алгоритма четко кодировать состояние среды. Учитывая среднее количество элементов на схеме и все возможные варианты их размещения, невозможно построить исчерпывающую таблицу, содержащую все возможные сценарии. В связи с этим, необходимо использовать приближенные приближенные методы решения. Одним из вариантов аппроксимации является нейронная сеть [11]. Так как БИС при постановке задачи

представляется в виде графа, то нейронная сеть должна содержать несколько графовых слоев [12].

Из алгоритмов глубокого обучения с подкреплением, то есть использующих в качестве политики нейронную сеть, в качестве подходящих для текущей задачи многообещающими являются алгоритмы PPO, SAC. PPO наиболее удобен, так как использует единую политику, возможность распараллеливания вычислений, а также сравнительно быструю скорость работы [13].

#### **4. Возможные варианты снижения временных затрат на получение конечного решения.**

PPO является многоагентным алгоритмом. Это одна из причин его скорости работы — более быстрая генерация данных для обучения. Однако это приводит к проблемам, связанным с большими объемами данных.

**Пример.** Пусть в схеме имеется  $N = 100\ 000$  элементов. Минимальный вектор эмбединга элемента состоит из номера элемента, высоты, ширины и его координат. Вес закодированного состояния системы за один шаг алгоритма представляет собой матрицу эмбедингов всех  $N$  элементов. Для номера элемента в данной схеме достаточно `int32` — 4 байта. Для ширины и высоты в ячейках `int8` — 1 байт. Так как координаты  $x, y$  варьируются в зависимости от площади размещения, но расчет будет в ячейках, то для текущей схемы должно хватить от 100 000 (по 1 ячейке на элемент, 100% заполнение) до  $255*255*N=6\ 502\ 500\ 000$  (по 65 025 ячеек на элемент при 100% заполнении) типа `int64` — 8 байт. Таким образом, один эмбединг занимает  $4+1+1+8+8 = 22$  байта, а для кодировки всех элементов потребуется 2,2 Мбайта. Всего для кодирования всех состояний среды в процессе размещения потребуется  $N$  таких записей, то есть 220 Гбайт. Это объем данных, не считая информации о расчетах, состоянии агента и оценках конечного размещения, который приходится в текущей схеме на одного агента. Если удастся закодировать в ячейках большего размера, то можно на координаты отвести `int32` — 4 байта, тогда конечная цифра на одного агента уменьшится до 140 Гбайт.

Желательное количество агентов на один запуск алгоритма — от 8 до 16. Такое количество агентов обусловлено тем, что алгоритмы глубокого обучения с подкреплением подвержены проблеме корреляций и неравномерности распределения данных, так как последовательные решения связаны между собой, то есть схожи по закодированному состоянию среды. Для снижения влияния корреляции работают с решениями нескольких агентов посредством обучения на выборке из их траекторий. В итоге получается от 1,12 Тб необходимого места на диске при втором варианте кодирования, до 3,52 Тб для первого варианта

кодирования по худшему случаю. На практике, количество элементов в современных схемах намного больше.

В таких условиях крайне важно сократить объем вычислений и хранимой информации без потери качества обучения агента. Одним из вариантов непосредственно при обучении является анализ компонент сильной связности графа и разбиение на отдельные подсхемы. В соответствии с наборами вершин в подсхемах необходимо перераспределить площадь размещения между этими группами в соответствии с суммарной площадью элементов. В качестве периферийных предрасставленных элементов (якорных ячеек), выступает либо периферия, либо элементы из соседних групп. Таким образом, сокращается объем используемой для хранения состояния среды памяти, а также появляется возможность рассматривать и намного более крупные микросхемы. Однако могут возникнуть проблемы с группировкой в случае сильно связанных графов.

Такой вариант разбиения графа способствует решению проблемы перерасстановки – если на более поздних этапах выявили цепь или множество цепей, которые не прошли, например, по задержкам, то с помощью анализа графа можно определить наименьшую связанную группу элементов, которую необходимо переставить в некоторой окрестности для достижения заданных характеристик цепи.

## Литература

1. Аналитический портал Tadviser.ru [Электронный ресурс]: Искусственный интеллект (мировой рынок). URL: [https://www.tadviser.ru/index.php/Статья:Искусственный\\_интеллект\\_\(мировой\\_рынок\)](https://www.tadviser.ru/index.php/Статья:Искусственный_интеллект_(мировой_рынок)) (дата обращения: 28.02.2024).
2. Tesaro G. Programming backgammon using self-teaching neural nets. // *Artificial Intelligence*. – 2002. – № 134(1-2). – С. 181-199. DOI: 10.1016/S0004-3702(01)00110-2.
3. Garisto D. Google AI beats top human players at strategy game StarCraft II // *Nature*. – Springer Nature, 2019. DOI: 10.1038/s41586-021-03544-w.
4. Winder P. Reinforcement Learning. *Industrial Applications of Intelligent Agents*. – O'Reilly Media, Inc., 2021. – 405 с.
5. Goldie A., Mirhoseini A. Placement optimization with deep reinforcement learning // *Proceedings of the 2020 International Symposium on Physical Design*. – 2020. – С. 3-7.
6. Cadence Design Systems, Inc. [Электронный ресурс]: AI in Chip Design. URL: [https://www.cadence.com/en\\_US/home/explore/ai-chip-design.html](https://www.cadence.com/en_US/home/explore/ai-chip-design.html) (дата обращения: 28.02.2024).
7. Synopsys, Inc. [Электронный ресурс]: DSO.ai Team Interview. URL: <https://www.synopsys.com/implementation-and-signoff/resources/newsletters/designers-digest/interview/dso-ai-team.html> (дата обращения: 28.02.2024).
8. Yao Ma, Jiliang Tang. *Deep learning on Graphs*. – Cambridge University press, 2021. – 339 с.
9. Гаврилов С.В., Денисов А.Н., Коняхин В.В., Соколовская М.М. [под ред. Саурова А.Н.] Система автоматизированного проектирования «Ковчег 3.04». М.: Микрон-Принт, 2019. – 308 с.

10. Sutton R., Barto A. Reinforcement Learning, Second Edition. An Introduction. Second edition. – The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 2020. – 548 с.

11. Morales M. grokking Deep Reinforcement Learning. – Manning Publications Co, 2020. – 472 p.

12. Hamilton W. Graph Representation Learning. // Synthesis Lectures on Artificial Intelligence and Machine Learning. – Springer Nature, Vol. 14, №. 3, 2020. – P. 1-141. DOI: 10.1007/978-3-031-01588-5.

13. Чачанидзе Е.Р. Сравнительный анализ алгоритмов Proximal Policy Optimization И Soft-Actor-Critic // E-Scio. 2020. №5 (44). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz-algoritmov-proximal-policy-optimization-i-soft-actor-critic> (дата обращения: 28.02.2024).

**I.O. Gaiduk, A.V. Mozzhukhina**

National Research University of Electronic Technology,  
SMC “Technological Center”

## **GRAPH NEURAL NETWORKS AND REINFORCEMENT LEARNING IN THE PROBLEM OF PLACEMENT OF LSI ELEMENTS**

**Keywords:** *LSI, placement, CAD, graphs, GNN, deep reinforcement learning, parallel computing.*

**Abstract.** *This paper examines the possibility of introducing artificial intelligence technologies into CAD in the field of designing microelectronics products. A formal representation of the problem of placing LSI elements on a BMK is given. Based on the formal description, conclusions are drawn about the advisability of using deep reinforcement learning mechanisms to solve the problem. In addition, the article analyzes approaches to multi-level scaling and parallelization of calculations to reduce the cost of time and computing resources.*

**А. В. Городилов, А. И. Кононова**

*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.5

## **ВЬЕТНАМСКАЯ ДИАКРИТИКА И ХКВ**

Ключевые слова: *клавиатура, GNU/Linux, Хкв, вьетнамский язык, раскладки клавиатуры, ввод данных*

*В статье рассматривается ввод текстов на вьетнамском языке, необходимые для этого символы и используемые раскладки клавиатуры, возможности настройки ввода в операционной системе GNU/Linux, используемые инструменты, возможности Unicode, полученные результаты. Рассматриваются планируемые варианты раскладки.*

Наиболее распространённая в настоящее время во Вьетнаме письменность – куокнгы – основана на латинском алфавите. Основные отличия вьетнамского алфавита от латинского в том, что есть дополнительные пять гласных букв — *ă, â, ê, ô, ơ*, которые по начертанию можно считать вариантами букв *a, e, o, u* — и одна дополнительная согласная *đ*. Условно отсутствующими во вьетнамском алфавите можно назвать буквы *f, j, w, z*, которые не используются во вьетнамских словах, но могут быть использованы для записи иностранных слов.

Кроме того, есть шесть тонов, которые могут применяться к любому слову. Каждый из них, кроме ровного, изображается над одной из гласных букв дополнительным диакритическим знаком [1].

### **3. Существующие методы ввода.**

В настоящее время самым популярным способом ввода для клавиатуры ПК является метод Telex. В нём тон и вид буквы задается нажатием дополнительной клавиши после буквы. Комбинация «*aa*» задаёт символ *â*, «*aw*» — символ *ă* и т. п. Тоны задаются буквами *xsfjg*, набранными после буквы. Таким образом, возможно напечатать любую букву с любым тоном, используя максимум два дополнительных нажатия. Буквы *f, j, w, z* могут быть введены дополнительным нажатием соответствующей клавиши. Также существуют методы ввода VNI и VIQR, также требующие дополнительных нажатий для задания букв и тонов, но использующие для этого другие наборы символов — цифры для VNI и «мнемонические» символы «*`?~.^+(»*), а также сочетание *dd* для VIQR. Все три метода, преобразующие последовательность нажимаемых символов в букву куокнгы — Telex, VNI и VIQR — объединяются под названием UniKey [2].

Для виртуальной клавиатуры Android также возможно использование Telex и VNI, а кроме того — выбор нужного символа из подсказки после долгого нажатия на базовую букву.

Для методов ввода Telex, VNI и виртуальной клавиатуры обычно используется раскладка *qwerty*.

### **2. Постановка задачи.**

Аналогично тому, как для ввода русского языка с элементами латиницы оказалось возможным гибко настроить ввод при помощи подсистемы Xkb GNU/Linux и вывести на первый уровень (набираемый без Shift и иных модификаторов) самые частые знаки препинания [3, 4],

предлагается сократить количество нажатий по сравнению с Telex и аналогами.

Для ввода наиболее частотных букв куокнги предлагается переопределить клавиши F1-F12, Insert и другие редко используемые клавиши вне алфавитно-цифрового блока (оригинальные символы, расположенные на этих клавишах ранее, будут размещены на третьем уровне). Соответственно, клавиша CapsLock, как и в [3], будет переопределена как модификатор третьего уровня, позволяющий разместить на одной клавише не два, а четыре символа.

Буквы куокнги, отсутствующие в раскладке qwerty, но часто встречающиеся в текстах, будут вводиться одним нажатием на переопределённую клавишу.

**3. Символы.** Хотя все гласные буквы и тоны куокнги можно задать, ставя после буквы латиницы один или два комбинируемых диакритических знака Unicode, для каждого сочетания буквы и тона в таблице Unicode есть и отдельный символ. Для ввода одним нажатием необходимо указать в файле раскладки именно его: в подсистеме Xkb нет простого способа сопоставить одному нажатию клавиши цепочку символов.

В таблице 1 показан перечень вьетнамских гласных букв и тонов, а также коды соответствующих символов Unicode. Буквы куокнги, присутствующие в латинском алфавите, то есть в разделе Unicode Основная латиница (0000–007F, ASCII-символы), указаны без их кода Unicode (совпадающего с ASCII-кодом), так как в конфигурационных файлах /usr/share/X11/xkb/symbols/\* они задаются не кодом Unicode, а соответствующим символом; кроме того, их не придётся вводить в раскладку: они и так присутствуют в раскладке qwerty.

Таблица 1.

Полный перечень вьетнамских гласных букв и тонов

Ровный	Восходящий ( <i>sắc</i> )	Нисходящий ( <i>huyền</i> )	Вопросительный (восходяще-нисходящий, <i>hỏi</i> )	Остро-вопросительный (нисходяще-восходящий с гортанной смычкой, <i>ngã</i> )	Тяжёлый (падающий, резко нисходящий, <i> nặng</i> )
A a	Á U00C1 á U00E1	À U00C0 à U00E0	Ả U1EA2 ả U1EA3	Ã U00C3 ã U00E3	Ạ U1EA0 ạ U1EA1
Ă U0102 ă U0103	Ắ U1EAE ắ U1EAF	Ằ U1EB0 ằ U1EB1	Ẵ U1EB2 ẵ U1EB3	Ẳ U1EB4 ẳ U1EB5	Ẹ U1EB6 ẹ U1EB7
Â U00C2 â U00E2	Ằ U1EA4 ằ U1EA5	Ẳ U1EA6 ẳ U1EA7	Ẵ U1EA8 ẵ U1EA9	Ẳ U1EAA ẳ U1EAB	Ằ U1EAC ằ U1EAD
E e	É U00C9 é U00E9	È U00C8 è U00E8	Ẻ U1EBA ẻ U1EBB	Ẻ U1EBC ẻ U1EBD	Ệ U1EB8 ệ U1EB9

Ê U00CA ê U00EA	É U1EBE é U1EBF	È U1EC0 è U1EC1	Ê U1EC2 ê U1EC3	Ë U1EC4 ë U1EC5	Ë U1EC6 ë U1EC7
I i	Í U00CD í U00ED	Ì U00CC ì U00EC	Ĭ U1EC8 ĭ U1EC9	Ĩ U0128 ĩ U0129	Ị U1ECA ị U1ECB
O o	Ó U00D3 ó U00F3	Ò U00D2 ò U00F2	Ô U1ECE ô U1ECF	Õ U00D5 õ U00F5	Ơ U1ECC ơ U1ECD
Ô U00D4 ô U00F4	Ó U1ED0 ó U1ED1	Ò U1ED2 ò U1ED3	Ô U1ED4 ô U1ED5	Õ U1ED6 õ U1ED7	Ơ U1ED8 ơ U1ED9
Õ U01A0 ơ U01A1	Ớ U1EDA ớ U1EDB	Ỗ U1EDC ỗ U1EDD	Ỗ U1EDE ỗ U1EDF	Ỗ U1EE0 ỗ U1EE1	Ơ U1EE2 ơ U1EE3
U u	Ú U00DA ú U00FA	Ù U00D9 ù U00F9	Û U1EE6 ũ U1EE7	Û U0168 ũ U0169	Ụ U1EE4 ụ U1EE5
Ư U01AF ư U01B0	Ứ U1EE8 ứ U1EE9	Ừ U1EEA ừ U1EEB	Ừ U1EEC ừ U1EED	Ừ U1EEE ừ U1EEF	Ư U1EF0 ư U1EF1
Y y	Ý U00DD ý U00FD	Ỡ U1EF2 ỡ U1EF3	Ỡ U1EF6 ỡ U1EF7	Ỡ U1EF8 ỡ U1EF9	Ỡ U1EF4 ỡ U1EF5

Большая часть дополнительных букв куокнгы, включая согласную đ (символы Đ U0110 и đ U0111) присутствует в разделах Unicode Дополнение к латинице — 1 (0080–00FF) и Расширенная латиница — A (0100–017F); буквы σ и τ — в разделе Расширенная латиница — B (0180–024F). Комбинации буквы и тона находятся в разделе Дополнительная расширенная латиница (1E00–1EFF), в подразделах Вьетнамское письмо на латинской графической основе и Основное расширенное латинское письмо.

**4. Частотность.** Максимальное количество клавиш, которое можно использовать для ввода дополнительных символов на европейской 105-клавишной клавиатуре — 33 (F1–F12, PrintScreen, ScrollLock, Break, Insert, LSGT и цифровой блок), на американской 104-клавишной — только 32. При этом в таблице 1 с шестью столбцами и двенадцатью строками представлено 72 буквы; шесть из них — буквы латиницы, кроме того, в таблице не представлена согласная đ, так что общее количество дополнительных символов — 67.

Соответственно, необходимо проанализировать частотность символов таблицы 1 во вьетнамском языке и выбрать наиболее частые, сохранив для редких ввод методом Telex. Возможно, для некоторых символов имеет смысл добавить альтернативный способ ввода при помощи модификатора третьего уровня.

Во вьетнамской письменности буквы с тонами и варианты букв встречаются почти так же часто, как и без них [5], однако частота различных тонов не одинакова. Самым редким тоном является ngã, буквы с ним встречается с частотой 1.54% среди всех букв со всеми тонами. Самым частотным является тон huyên – 4,55%, затем sác – 4,23%, nặg – 3,66%, hỏi – 2,92%.

Согласно [5], наиболее частыми символами, кроме основной латиницы, являются Đ Æ Ô Û Á Ô Û Ê Æ Ó Æ Ó. Ими переопределены

клавиши F1–F12 (оригинальные символы F1–F12 доступны с модификатором третьего уровня):

```
partial function_keys xkb_symbols "common_f1f12_viet_patch" {
    key.type="CTRL+ALT";
    key <FK01> {[ U0111, U0110, F1, F1, XF86_Switch_VT_1 ]}; // đĐ
    key <FK02> {[ U00E0, U00C0, F2, F2, XF86_Switch_VT_2 ]}; // àÀ
    key <FK03> {[ U00F4, U00D4, F3, F3, XF86_Switch_VT_3 ]}; // ôÔ
    key <FK04> {[ U01B0, U01AF, F4, F4, XF86_Switch_VT_4 ]}; // ưƯ

    key <FK05> {[ U00E1, U00C1, F5, F5, XF86_Switch_VT_5 ]}; // áÁ
    key <FK06> {[ U1ED9, U1ED8, F6, F6, XF86_Switch_VT_6 ]}; // ôÔ
    key <FK07> {[ U1EE7, U1EE6, F7, F7, XF86_Switch_VT_7 ]}; // ưƯ
    key <FK08> {[ U1EBF, U1EBE, F8, F8, XF86_Switch_VT_8 ]}; // éÉ

    key <FK09> {[ U00E3, U00C3, F9, F9, XF86_Switch_VT_9 ]}; // ãÃ
    key <FK10> {[ U1ED1, U1ED0, F10, F10, XF86_Switch_VT_10]}; // óÓ
    key <FK11> {[ U1EA5, U1EA4, F11, F11, XF86_Switch_VT_11]}; // áÁ
    key <FK12> {[ U1EDB, U1EDA, F12, F12, XF86_Switch_VT_12]}; // óÓ
};
```

В перспективе планируется создать для раскладки, включающей дополнительные буквы вьетнамского языка, отдельный файл и, возможно, отдельный репозиторий. В настоящее время для тестирования раскладки её фрагмент, в том числе описанный выше, вместе с файлом раскладки JCUKEN находится в репозитории [3].

Выполненные исследования приводят к следующим **выводам**:

- подсистема Xkb GNU/Linux позволяет определять раскладку в соответствии с нуждами пользователя;
- переопределение возможно для каждой клавиши, а не только для буквы или цифры;
- при этом возможен ввод букв и тонов куокнгы более удобным способом, чем при помощи Telex.

### Литература

1. Невзоров А. Как не потерять во вьетнамских диакритических знаках? <https://lplib.ru/kak-ne-poteryatsya-vo-vietnamskih-diakriticheskikh-znakah/?ysclid=lt8pnkou9e932458026>, 2023.
2. Fry M. Encoding of Vietnamese typing methods Telex, VNI and VIQR on UniKey. <https://tipsmake.com/encoding-of-vietnamese-typing-methods-telex-vni-and-viqr-on-unikey>, 2019.
3. Электронный ресурс: Кононова А. И. Именная раскладка клавиатуры для xkb. <https://gitlab.com/illinc/xkb-symbols-illinc>, 2021–2024.
4. Городилов А. В., Кононова А. И. Ввод данных: традиция или реакция // Системы компьютерной математики и их приложения. – 2022. – № 23. – С. 100-109.
5. Электронный ресурс: Alphabet and Character Frequency: Vietnamese (Việt) <https://www.sttmedia.com/characterfrequency-vietnamese>

**A. V. Gorodilov, A. I. Kononova**  
National Research University of Electronic Technology

## **VIETNAMESE DIACRITICS AND XKB**

**Keywords:** keyboard, GNU/Linux, Xkb, vietnamese, layouts, diacritics

**Abstract.** *The article discusses text input in Vietnamese language, required symbols and keyboard layouts, input settings in GNU/Linux operating system, applicable tools, features of Unicode, and obtained results. Also discussed some planned layouts.*

**В.В. Кокин , Е.М. Портнов, Ю.Ю. Юдахин,**  
Национальный исследовательский университет “МИЭТ”

УДК 681.5.033

## **МЕТОД ОЦЕНКИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГОСНАБЖЕНИЕМ**

**Ключевые слова:** *автоматизированная система управления энергоснабжением, быстродействие, источники кодовых сообщений*

*Разработан метод расчета временных параметров автоматизированных систем управления энергоснабжением при опросе источников кодовых сообщений (ИКС), позволяющая оценить зависимость времени сбора и доставки информации от ИКС в АРМ диспетчера системы от скорости передачи информации по каналу связи для различного числа ИКС, подключенных к одному контролируемому пункту. Расчет временных параметров делается в предположении, что для считывания данных одного ИКС требуется провести один информационный обмен.*

Современные системы управления энергоснабжением промышленных предприятий включают каналы сопряжения с гаммой источников кодовых сообщений (ИКС) - устройствами защиты и автоматики, цифровыми преобразователями измеряемых параметров, счетчиками, регистраторами текущей и аварийной информации. Проблема повышения эффективности информационных обменов в таких системах стоит достаточно остро, ввиду ограниченности пропускной способности каналов связи и не учета большого количества факторов,

влияющих на процессы приема-передачи информации про опросе состояния ИКС и передачи данных в канал связи.

Для оценки реального быстродействия системы управления энергоснабжением используем схему (рис.1) трассы доставки информации от ИКС в приемник, например, ПЭВМ АРМ диспетчера.

ИКС по магистрали (интерфейс RS-485, протокол Modbus) подключаются к функциональному модулю концентратора пункта управления (ПУ) устройства контролируемого пункта (КП). Команды опроса данных ИКС подаются модулем ПУ, а данные от ИКС направляются от ПУ в контроллер – линейный адаптер устройства КП, который проводит информационные обмены с устройством ПУ по предоставленному каналу связи.

Данные от КП принимаются линейным адаптером (в приведенном примере используется радиальный канал связи, т.е. данные от КП<sub>х</sub> принимаются в ПУ индивидуальным линейным адаптером ЛА КП<sub>х</sub>). Полученные данные ретранслируются (по внутренней магистрали устройства ПУ) в контроллер, сопряженный с ПЭВМ АРМ диспетчера.

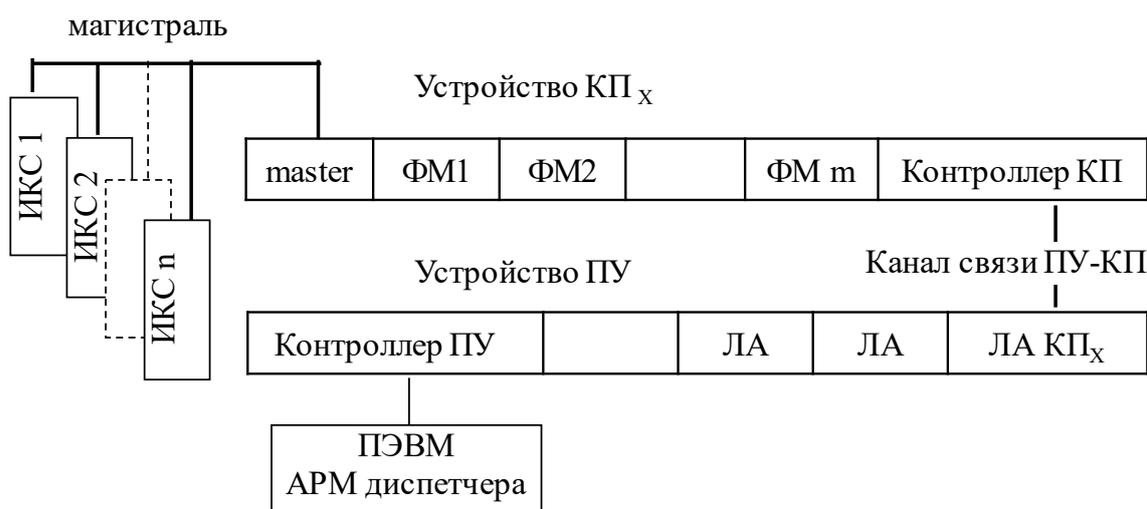


Рис. 1. Структура трассы доставки информации от ИКС в ПЭВМ АРМ диспетчера

Отметим стандартные процедуры, выполняемые при получении информации от ИКС:

1) формирование с помощью ПЭВМ АРМ диспетчера запроса информации от выбранного ИКС, передача сформированного запроса в контроллер устройства ПУ ;

2) прерывание контроллером ПУ процедуры циклического поочередного опроса готовности линейных адаптеров, сопряженных с каналами связи ПУ-КП,

- замена опроса готовности на команду вызова информации ИКС<sub>у</sub>, подключенного к КП<sub>х</sub>,

- ретрансляция по внутренней магистрали устройства ПУ команды вызова информации в линейный адаптер ЛА КП<sub>х</sub>, т.е. ввод команды вызова информации в ЛА КП<sub>х</sub>;

3) синхронизация устройств ПУ – КП, например, передачей синхронизирующих сообщений – меандров ,

- передача команды вызова информации в КП<sub>х</sub> по каналу связи ПУ-КП [1-2],

- прием команды вызова информации линейным адаптером – контроллером КП<sub>х</sub>;

4) ретрансляция по внутренней магистрали устройства КП<sub>х</sub> команды вызова информации в модуль ПУ, сопряженный с ИКС;

5) передача команды вызова информации ИКС<sub>у</sub> в магистраль связи с ИКС;

6) подготовка ИКС<sub>у</sub> к передаче запрошенной информации;

7) передача запрошенной информации ИКС<sub>у</sub> по магистрали сопряжения с ПУ, ввод данных в модуль ПУ;

8) ожидание очередного цикла периодического опроса контроллером КП готовности к передаче информации модуля ПУ;

9) передача запрошенных данных от модуля ПУ в контроллер – линейный адаптер устройства КП;

10) синхронизация устройств КП – ПУ,

11) ожидание ЛА КП<sub>х</sub> очередного опроса готовности к передаче информации;

12) передача по внутренней магистрали устройства ПУ запрошенной информации от ЛА КП<sub>х</sub> в контроллер ПУ;

13) ввод информации от ИКС<sub>у</sub> от контроллера устройства ПУ в ПЭВМ АРМ диспетчера;

14) обработка данных от ИКС<sub>у</sub> в ПЭВМ АРМ диспетчера.

Оценим временные характеристики отмеченных выше процедур  $T_{n1} \dots T_{n14}$ .

$T_{n1}$  – время трансляции от ПЭВМ команды вызов данных ИКС<sub>у</sub> , подключенного в КП<sub>х</sub>.

$$T_{n1} = \frac{N_{\text{ВЫЗ}}}{F_{\text{ПЭВМ}}}, \quad (1)$$

где  $N_{\text{ВЫЗ}}$  – длина (в битах) информационного сообщения вызов данных ИКС,  $F_{\text{ПЭВМ}}$  – скорость информационного обмена между ПЭВМ АРМ диспетчера и контроллером ПУ.

Время  $T_{n2}$  равно задержке между получением контроллером ПУ команды вызов данных ИКС и ретрансляцией команды в линейный адаптер КП<sub>х</sub>. Для этого при циклическом опросе контроллером ПУ готовности к передаче полученной линейными адаптерами информации

команда опроса ЛА КП<sub>х</sub> должна быть заменена командой вызова. При числе линейных адаптеров, включенных в устройство ПУ, равном  $n$ , наилучшим окажется вариант, при котором до связи с ЛА КП<sub>х</sub> контроллер ПУ проведет  $(n-1)$  цикл опроса готовности к передаче информации других ЛА.

Для расчета примем усредненное число циклов, проведенных контроллером до связи с ЛА КП<sub>х</sub>, равным  $0,5 n$ . Тогда:

$$T_{П2} = \frac{0,5 \cdot n \cdot (N_{ОПРОС} + N_{ОТВЕТ}) + (N_{ВЫЗ} + N_{ОТВЕТ})}{F_{ВНУТР}^{МАГ}} \quad (2)$$

где  $N_{ОПРОС}$  – длина команды опроса готовности к передаче информации линейных адаптеров и других модулей, включенных в состав устройства ПУ;

$N_{ОТВЕТ}$  – длина ответного сообщения, передаваемого опрашиваемым модулем. Структура указанного сообщения эквивалентна команде опроса, поэтому длина указанного сообщения равна  $N_{ОПРОС}$ .

$N_{ВЫЗ}$  – длина (в битах) команды вызова данных. Команда вызова должна включать координаты вызываемого устройства, требуемый режим работы и вид вызываемой информации. С достаточной точностью можно принять  $N_{ВЫЗ} = 2 \cdot N_{ОПРОС}$ . Тогда после преобразования (2) представляется в виде:

$$T_{П2} = \frac{(n+3) \cdot N_{ОПРОС}}{F_{ВНУТР}^{МАГ}} \quad (3)$$

Полученная команда должна быть ретранслирована линейным адаптером ЛА КП<sub>х</sub> в канал связи ПУ-КП. В рассматриваемом примере для синхронизации информационных обменов по каналам связи ПУ – КП используется меандр - чередующаяся последовательность сигналов 1 и 0. При необходимости передачи информационного сообщения меандр заменяется передачей требуемого сообщения. Пассивный ответ, т.е. отсутствие меандра или информационного сообщения, воспринимается как ошибка связи между ПУ и КП. В рассматриваемом режиме цикл информационного обмена между ПУ и КП состоит из передачи ответного меандра от КП и передачи (вместо меандра) команды вызова данных ИКС от ПУ. При длине меандра (в битах) –  $N_{МЕАНДР}$ , получим:

$$T_{П3} = \frac{N_{МЕАНДР} + N_{ВЫЗ}}{F_{ПУ-КП}} \quad (4)$$

где  $F_{ПУ-КП}$  скорость передачи информации по каналу связи ПУ-КП.

Информационное сообщение, принятое от ПУ, заносится в линейный адаптер – контроллер устройства КП. Контроллер должен ретранслировать полученные данные в модуль, тип и адрес которого

указываются в команде вызова. В рассматриваемом режиме работы данные заносятся в модуль ПУ, сопряженный с устройствами slave - ИКС. Т.к. внутренняя структура устройств ПУ и КП идентична, можно считать, что скорость информационного обмена по внутренней магистрали устройств ПУ и КП одинакова.

Контроллер КП ретранслирует команду вызова в соответствующий модуль ПУ, прерывая цикл последовательного и периодического опроса готовности модулей к передаче информации. Тогда:

$$T_{П4} = \frac{N_{ВЫЗ}}{F_{ВНУТР}^{МАГ}} \quad (5)$$

Команда вызова информации ретранслируется ПУ в выбранный ИКС<sub>У</sub> по внешней магистрали со скоростью  $F_{ВНЕШН}^{МАГ}$ . Следовательно:

$$T_{П5} = \frac{N_{ВЫЗ}}{F_{ВНЕШН}^{МАГ}} \quad (6)$$

Время подготовки выбранного ИКС<sub>У</sub> к передаче запрошенной информации определяется внутренней структурой и параметрами устройства:

$$T_{П6} = T_{ПОДГ} \quad (7)$$

После завершения подготовки вызванной информации ИКС передает информационное сообщение, воспринимаемое модулем ПУ. Запрошенные данные представляются информационным сообщением  $N_{ИНФ}$ . Тогда [3]:

$$T_{П7} = \frac{N_{ИНФ}}{F_{ВНЕШН}^{МАГ}} \quad (8)$$

Полученная модулем ПУ информация должна быть ретранслирована в центральный контроллер устройства КП по внутренней магистрали. Так как контроллер проводит циклические опросы готовности модулей к передаче данных, возникает задержка  $T_{П8}$  от момента завершения ввода данных ИКС<sub>У</sub> в модуль ПУ до установления связи центрального контроллера с модулем – источником информации. При общем числе модулей устройства КП, равном  $m$ , среднестатистическое время задержки окажется равным:

$$T_{П8} = \frac{0,5m(N_{ОПР} + N_{ОТВ})}{F_{ВНУТР}^{МАГ}} = \frac{m \cdot N_{ОПР}}{F_{ВНУТР}^{МАГ}} \quad (9)$$

После установления связи контроллера КП с модулем ПУ информация по внутренней магистрали устройства ретранслируется в контроллер.

$$T_{П9} = \frac{N_{ИНФ}}{F_{ВНУТР}^{МАГ}} \quad (10)$$

Центральный контроллер преобразует полученное сообщение в вид, соответствующий принятому протоколу информационного обмена КП с ПУ. В частности, к исходным данным добавляются координаты адреса устройства КП, признаки режима работы и вида информации, контрольная последовательность – помехозащитная часть информационного сообщения. Таким образом, полученное от ИКС информационное сообщение длиной  $N_{ИНФ}$  преобразуется в сообщение длиной  $K \cdot N_{ИНФ}$ , где  $K$  - коэффициент удлинения исходного сообщения, который зависит от принятого протокола информационных обменов КП с ПУ. Для базового протокола HDLC  $K=1,5$  [4].

Сформированное сообщение должно быть передано контроллером устройства КП в канал связи ПУ-КП. По аналогии с  $T_{П5}$  определяем:

$$T_{П10} = \frac{N_{МЕАНДР} + K \cdot N_{ИНФ}}{F_{ПУ-КП}} \quad (11)$$

Линейный адаптер ЛА КП<sub>х</sub>, принявший информационное сообщение от КП<sub>х</sub>, должен его ретранслировать по внутренней магистрали устройства ПУ в контроллер. Время задержки вывода полученной ЛА КП<sub>х</sub> информации ( $T_{П11}$ ) определяется аналогично  $T_{П8}$  и равно:

$$T_{П11} = \frac{0,5n \cdot (N_{ОПР} + N_{ОТВ})}{F_{ВНУТР}^{МАГ}} \quad (12)$$

После установления связи контроллера устройства ПУ с ЛА КП<sub>х</sub> полученные от ИКС<sub>у</sub> данные ретранслируются в контроллер. Время ретрансляции ( $T_{П12}$ ) равно

$$T_{П12} = \frac{K \cdot N_{ИНФ}}{F_{ВНУТР}^{МАГ}} \quad (13)$$

Контроллер ПУ вводит данные в ПЭВМ АРМ диспетчера для обработки. Время ввода ( $T_{П13}$ ) равно:

$$T_{П13} = \frac{K \cdot N_{ИНФ}}{F_{ПЭВМ}} \quad (14)$$

Примем время обработки данных в ПЭВМ АРМ диспетчера равным

$$T_{П14} = T_{ОБР} \quad (15)$$

При подключении к КП<sub>х</sub>  $S$  ИКС и при условии, что процедуры проведения информационных обменов со всеми ИКС идентичны, можно

определить суммарное время ( $T_{ИКС}$ ), затрачиваемое на сбор, передачу и обработку данных от ИКС.

Расчет временных параметров делается в предположении, что для считывания данных одного ИКС требуется провести один информационный обмен.

Получаем:

$$T_{ИКС} = S \sum_1^{14} T_{П} \quad (16)$$

После группирования слагаемых выражения для  $T_{ИКС}$ , получим

$$T_{ИКС} = S \cdot (T_{ПОДГ} + T_{ОБР} + \frac{2N_{ОПР} + K \cdot N_{ИНФ}}{F_{ПЭВМ}} + \frac{(2n + m + 5)N_{ОПР} + (1 + K) \cdot N_{ИНФ}}{F_{ВНУТР}^{МАГ}} + \frac{2N_{ОПР} + N_{ИНФ}}{F_{ВНЕШН}^{МАГ}} + \frac{2N_{МЕАНДР} + 2N_{ОПР} + K \cdot N_{ИНФ}}{F_{ПУ-КП}}).$$

(17)

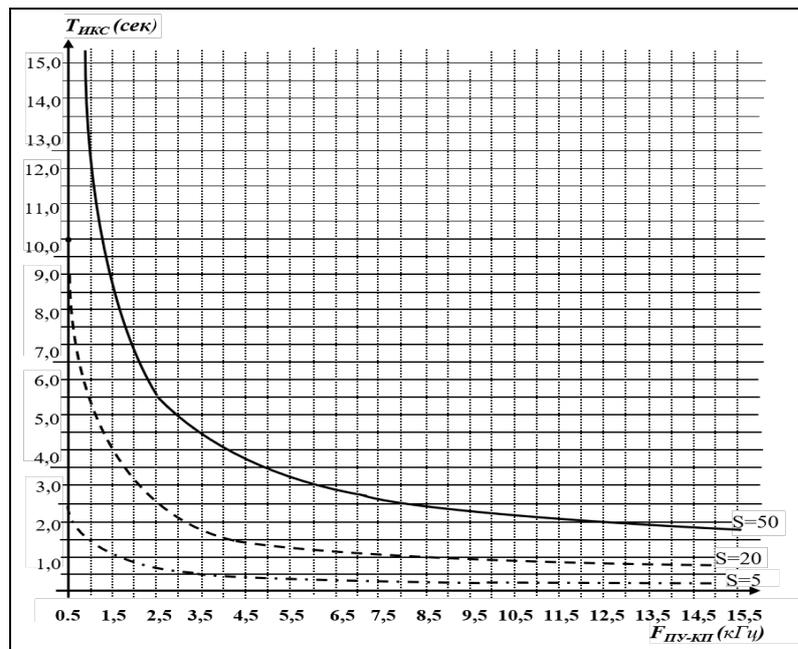


Рис. 2. Зависимость времени сбора данных ИКС от  $F_{ПУ-КП}$

По результатам анализа данных реальных устройств КП и ПУ систем энергообеспечения промышленных объектов с достаточной точностью можно принять :  $N_{ИНФ} = 8 \cdot N_{ОПР}$ ,  $N_{МЕАНДР} = 0,5 \cdot N_{ОПР}$ ,  $2 \cdot N_{ОПР} = N_{ВЫЗ} = 32$ ,  $n = m = 10$ ,  $F_{ПЭВМ} = 50$  КГц,  $F_{ВНУТР}^{МАГ} = 200$  КГц;  $F_{ВНЕШН}^{МАГ} = 50$  КГц,  $T_{ПОДГ} = 5$  мс,  $T_{ОБР} = 10$  мс.

Подставив указанные значения в (17), получим:

$$T_{ИКС} = S \cdot (0,015 + \frac{220}{F_{ПЭВМ}} + \frac{880}{F_{ВНУТР}^{МАГ}} + \frac{160}{F_{ВНЕШН}^{МАГ}} + \frac{240}{F_{ПУ-КП}}) \quad (18)$$

Для оценки  $T_{ИКС} = f(F_{ПУ-КП})$  воспользуемся данными приведенных начальных условий. Тогда:

$$T_{ИКС} = S(0,02 + \frac{240}{F_{ПУ-КП}}) \quad (19)$$

На рис.2 приведены зависимости времени сбора и доставки информации от ИКС в ПЭВМ АРМ диспетчера от скорости передачи информации по каналу связи ПУ-КП для различного числа ИКС, подключенных к одному КП. Представленная методика позволяет оценить реальное быстродействие информационных обменов системы управления энергообеспечением.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-29-00530).

### Литература

1. Аунг Чжо Мьо, Кокин В.В., Портнов Е.М., Каунг Сан, Чжо Зин Лин. Метод обнаружения отказов в сложных системах управления технологическими процессами // Международная научно-практическая конференция «Инновационные, информационные и коммуникационные технологии» Сочи, 2017. С. 514-518.
2. Аунг Чжо Мьо, Портнов Е.М., Кокин В.В., Зо Хейн. Методика формирования относительных меток времени в автоматизированных системах управления энергообеспечением // Конференция ТРИС «Технологии разработки информационных систем» г. Геленджик, Россия. 6-13 сентября 2019. С. 96-104.
3. Чжо Зо.Е., Чжо З.Л., Портнов Е.М., Баин А.М., Лисов О.И. Оценка эффективности информационно-управляющих телемеханических комплексов, использующих протокол IEC 60870-5-101 (104) // В сборнике: Информационные технологии в науке, образовании и управлении. под редакцией проф. Е.Л. Глориозова. 2015. С. 166-172.
4. Артюшенков С.Н., Баин А.М. К вопросу повышения эффективности контроля магистральных энергообъектов // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 4. С. 207.

**V.V. Kokin, E.M. Portnov, Y.Y.Yudahin**

National Research University of Electronic Technology (MIET)

### **A METHOD FOR EVALUATING THE PERFORMANCE OF AUTOMATED POWER SUPPLY MANAGEMENT SYSTEMS**

**Keywords:** *automated power supply management system, performance, code message sources*

**Abstract.** *A method has been developed for calculating the time parameters of automated power supply management systems when interviewing code message sources (CMS), which makes it possible to assess the dependence of the time of collection and delivery of information from*

*CMS to the automated control system of the system dispatcher on the speed of information transmission over the communication channel for a different number of ICS connected to one controlled point. The calculation of the time parameters is done on the assumption that one information exchange is required to read the data of one CMS.*

**Д.Ю. Михайленко, В.И. Мунерман**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 517.968.23

## **РАЗРАБОТКА МЕТОДА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЗАПРОСА В РАЗНЫХ МОДЕЛЯХ ДАНЫХ**

*Ключевые слова: эквивалентность аксиоматических теорий, многомерно–матричная модель, теоретико–множественная модель, реляционная модель, аддитивная модель SQL запроса, мультипликативная модель SQL запроса.*

*В данной работе приводится доказательство эквивалентности аксиоматических теорий многомерно–матричных и реляционных моделей при помощи посредника в лице теоретико–множественной(файловой) модели. На их основе в статье разработан конструктивный алгоритм использования отображения двух операций из многомерно–матричной на реляционную модель.*

**1. Постановка задачи.** При аксиоматическом построении системы мы исходим из некоторой системы аксиом, или аксиоматики. Эквивалентность аксиоматических теорий можно установить в том случае, если в терминах одной аксиоматических теории можно образовать такую модели, для которой основные понятия и отношения можно доказать во второй и наоборот. Тогда в любой интерпретации аксиоматической первой теории существуют основные объекты и основные отношения и выполняются аксиомы аксиоматики второй теории. Тогда эквивалентные аксиоматические теории обладают одними и теми же свойствами непротиворечивости и полноты, приводя к одной и той же математической структуре [2].

В нашем случае субъектом являются модели. Обозначим их как:  $T$  – матричная;  $T^r$  – реляционная, а аксиому в этих моделях обозначим с заглавной  $A$ . На основе этих идей и будут основываться дальнейшие

рассуждения. Для этого определимся со следующими основополагающими объектами работы:

1) Данные  $D$  представлены как неизменные, однозначно трактуемые как многомерные матрицы с взаимно-однозначным соответствием состояний хранимой информации.

2) Рассматривается два действия – сложение и произведение матриц.

Так мы получаем алгебраическую систему вида  $\langle D; +, \times \rangle$ .

**2. Построим действия над данными.** На основе статьи [1] мы получаем возможность использования алгебраической системы  $\langle D; +, \times \rangle$  с явными аксиомами  $A, A'$  в соответствующих теориях  $T, T'$ . Воспользуемся лучшими качества каждой теории:

1) Матричной модели, одна из наиболее распространённых форм представления количественной экономической информации. Применяется в случаях, когда совокупность данных (или неизвестных) величин может быть изображена посредством матрицы. Такое представление реализуемо, если изучаемая совокупность величин может быть упорядочена по двум признакам, каждый из которых принимает конечное число значений. Имеет такие достоинства как: лаконичность, компактность, наглядность записи алгебраических выражений.

2) Реляционной модели базы данных представляется в виде совокупности таблиц, над которыми могут выполняться операции, формулируемые в терминах реляционной алгебры [3]. Таблицы не содержат строки, соответствующие нейтральным значениям всех неключевых полей, что позволяет экономно хранить разреженные многомерные матрицы.

Далее рассматриваются алгебраические выражения в алгебре многомерных матриц и реляционной алгебре (запросы), содержащие только аддитивную и мультипликативную операции. В статье [1] построены аксиоматические теории для таких алгебраических систем и показано, что эти теории эквивалентны.

В этом случае операции сложения многомерных матриц соответствует запрос:

```
SELECT UnionAll.K1, ..., UnionAll.Kp, SUM(UnionAll.W) FROM  
(SELECT * FROM A UNION ALL SELECT * FROM B) AS UnionAll  
GROUP BY UnionAll.K1, ..., UnionAll.Kp,
```

где  $A(K_1, \dots, K_p, W)$  и  $B(K_1, \dots, K_p, W)$  – таблицы, схемы которых совпадают.  $K_1, \dots, K_p$  – составной ключ, по которому эти таблицы находятся в третьей нормальной форме.  $W$  – неключевые атрибуты, которые могут быть однотипными кортежами, над которыми определена бинарная операция  $\omega$ . Также определена групповая (агрегатная) операция  $\Omega$  над группами значений  $W_A \omega W_B = \Omega(W_A \omega W_B)$ .

Операции  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения и  ${}^{\lambda, \mu}(A \times B)$  соответствует запрос,

```
SELECT A.L1, ..., A.Lk, A.S1, ..., A.Sl, B.M1, ..., B.Mn,  $\Omega(A.W \omega B.W)$ 
FROM A INNER JOIN B ON (A.C1= B.C1) AND ... AND (A.Cm =
B.Cm)
```

GROUP BY A.L<sub>1</sub>, ..., A.L<sub>k</sub>, A.S<sub>1</sub>, ..., A.S<sub>l</sub>, B.M<sub>1</sub>, ..., B.M<sub>n</sub>,  
где схемы таблиц  $A(A_1, \dots, A_u)$  и  $B(B_1, \dots, B_v)$  могут быть представлены в виде  $A(L_1, \dots, L_k, S_1, \dots, S_l, C_1, \dots, C_m, W)$  и  $B(S_1, \dots, S_l, C_1, \dots, C_m, M_1, \dots, M_n, W)$ . Здесь атрибуты (столбцы таблицы)  $S_1, \dots, S_l$  и  $C_1, \dots, C_m$  – общие для таблиц  $A$  и  $B$ , и атрибуты  $L_1, \dots, L_k, S_1, \dots, S_l, M_1, \dots, M_n$  – ключи–кандидаты таблицы–результата запроса.

**3. Формализация алгоритма.** В статье предлагается описание решения задачи трансляции алгебраического выражения в многомерной матричной модели данных в соответствующий запрос в реляционной модели данных.

Далее приводится описание записи, которая позволяет отобразить наши действия в качестве понятной последовательности действий при дальнейшей работе с таблицами, позволяя сначала выбрать направление работы и оптимизировать действия перед затрагивание данных. Для выполнения следующего шага, перехода от матричного к реляционному, необходимо указать таблицы с их ключами. Для этого укажем при записи:

Индексы разбиения  $c$  – кэлиевыми (для указания условия «для каких выполняется действие»). В SQL запросе мультипликативной модели указываются после ON).

Индексы разбиения  $s$  – скоттовыми (общие, но не затрагиваемые)

Индексы разбиения  $m, l$  – свободными (остальные не общие ключи двух таблиц).

Индекс разбиения  $w$  – ключ (тип – число), над которым выполняется действие. На языке SQL в запросе указываются в действии: SUM (UnionAll. ключ) – аддитивная модель, SUM (1таблица. ключ \* 2таблица. ключ) – мультипликативная модель.

1) В аддитивной модели

$$A.w + B.w$$

$$A / c_1, c_2 \dots c_k, w$$

$$B / c_1, c_2 \dots c_k, w$$

Результатом станет таблица следующего вида:

$$C / c_1, c_2 \dots c_k, w$$

Образующий SQL запрос, основанный на статье [1], который позволяет исключить потерю дублирующих ключей таблиц:

```
SELECT UA2.c1, ... UA2.ck, SUM(UA2.w) AS w FROM
(SELECT A.c1, ... A.ck, A.w FROM A Union All SELECT UA1.* FROM
```

(SELECT  $B.c_1, \dots, B.c_k, B.w$  FROM  $B$ ) AS  $UA1$ ) AS  $UA2$   
 GROUP BY  $UA2.c_1, \dots, UA2.c_k, UA2.w$

2) В мультипликативной модели

$$\lambda, c_1, c_2, \dots, c_k (A.w \times B.w)$$

$$A / l_1, l_2, \dots, l_n, s_1, s_2, \dots, s_f, c_1, c_2, \dots, c_k, w$$

$$B / c_1, c_2, \dots, c_k, s_1, s_2, \dots, s_f, m_1, m_2, \dots, m_p, w$$

Результатом станет таблица следующего вида:

$$C / l_1, l_2, \dots, l_n, s_1, s_2, \dots, s_f, m_1, m_2, \dots, m_p, w$$

Образующий SQL запрос основанный на статье [1]:

SELECT  $A.l_1, \dots, A.l_k, A.s_1, \dots, A.s_k, B.m_1, \dots, B.m_k, \text{SUM}(A.w * B.w)$  AS  $w$   
 FROM  $A$  Inner Join  $B$  ON ( $A.c_1 = B.c_1$ ) AND ... AND ( $A.c_k = B.c_k$ )

GROUP BY  $A.l_1, \dots, A.l_k, A.s_1, \dots, A.s_k, B.m_1, \dots, B.m_k, A.w$

*Замечание. Вводится запрет на использование индификаторов  $IJ, UA$  и  $DUB$  с числом (ввиду их использования в алгоритме).*

**4. Результаты трансляции выражения.** Во время работы с SQL стандартная запись последовательно исполняющих запросов требует выполнения запроса, формирование новой таблицы и её хранения до востребования. Это создаёт ряд промежуточных шагов с дополнительной нагрузкой памяти. В статье [1] придуман новый, оптимальный способ выполнения SQL запросов. Его суть заключается в выполнении запросов по востребованности, то есть превращение данных при обычной записи в метаданные, обходящие недостатки стандартной записи.

Так в рассмотренных выше примерах использована конструкция, при которой любой из двух элементов действия (таблиц) можно заменить действием других элементов. Она позволяет создать новые таблицы, называемые  $IJ, UA$  (INNER JOIN, UNION ALL соответственно) с припиской номера порядка её появления, и сохранить, образующий их, запрос при встрече в матричном уравнении и использовать их по востребованности в других действиях. Так последнее действие включает в себя все предыдущие.

Но во время работы с SQL иногда приходится выполнять повторяющиеся действия. Если они встречаются, то можно, не повторяя создание их запроса, взять уже созданный запрос и подставить в соответствующее место. Однако повторение таблиц невозможно в рамках одного действия ввиду запрета на повторения названия таблиц в SQL.

Эта проблема разрешима при помощи замены названия второй таблицы функцией AS и фиктивной таблицей DUB (duplicate) с припиской номера порядка её появления. Но данный способ уже используется при указании запроса, если он внутри другого. Поэтому добавим примечание о том, что, если таблица имеет название  $IJ$  или  $UA$

с числом и второй элемент имеет тоже имя таблицы, то название второго заменяется на DUB с припиской номера порядка её появления.

На основе этого получается следующая последовательность действий:

1) Задаётся уравнение и таблицы с ключами:

$$\lambda, K2(E.W * (\lambda, K3(D.W * D.W) + \lambda, K3(D.W * D.W)))$$

$$D / K1, K2, K3, W$$

$$E / K2, K3, W$$

2) Записываем данное уравнение в постфиксной форме:

$$E.W / D.W / D.W / (\lambda, K3) / D.W / D.W / (\lambda, K3) / + / (\lambda, K2)$$

3) На основе полученной последовательности и информации о таблицах формируем SQL запрос:

```
SELECT E.K2,E.K3, SUM(E.W*UA2.W) AS W FROM E Inner Join
(SELECT UA2.K1,UA2.K2,UA2.K3, SUM(UA2.W) AS W FROM
(SELECT IJ1.K1,IJ1.K2,IJ1.K3,IJ1.W FROM
(SELECT D.K1,D.K2,D.K3, SUM(D.W*D.W) AS W
FROM D Inner Join D AS DUB1 ON (D.K3=D.K3)
GROUP BY D.K1,D.K2,D.K3,D.W) AS IJ1 Union All SELECT UA1.*
FROM (SELECT DUB1.K1,DUB1.K2,DUB1.K3,DUB1.W FROM
(SELECT D.K1,D.K2,D.K3, SUM(D.W*D.W) AS W
FROM D Inner Join D AS DUB1 ON (D.K3= DUB1.K3)
GROUP BY D.K1,D.K2,D.K3,D.W) AS DUB2) AS UA1) AS UA2
GROUP BY UA2.K1,UA2.K2,UA2.K3,UA2.W) AS UA2
ON (E.K2=UA2.K2) GROUP BY E.K2,E.K3,E.W
```

## Литература

1. Мунерман В.И., Мунерман Д.В. Аксиоматический метод доказательства соответствия формализованных в различных моделях данных запросов // VIII Международная научная конференция «Конвергентные когнитивно–информационные технологии» 2023
2. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965.
3. Бутенко Е.А. Реляционная модель базы данных // IX Международная студенческая научная конференция «Студенческий научный форум – 2017»

**D.Y. Mikhailenko, V.I. Munerman**  
Smolensk State University

## DEVELOPMENT OF A METHOD FOR PROVING QUERY EQUIVALENCE IN DIFFERENT DATA MODELS

**Keywords:** *equivalence of axiomatic theories, multidimensional matrix model, relational model, set–theoretic model, additive model, multiplicative model.*

**Abstract.** *This paper provides proof of the equivalence of axiomatic theories of multidimensional matrix and relational models using an*

*intermediary in the form of a set-theoretic (file) model. Based on them, the article develops a constructive algorithm for using the mapping of two operations from a multidimensional matrix to a relational model.*

**В.И. Мунерман, Д.Е. Кавченков**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

## **ПОДХОД СОЗДАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ МАШИНЫ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГЕБРЫ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ**

Ключевые слова: *универсальная алгебраическая машина, алгебра многомерных матриц, тип данных, набор правил, операции над многомерными матрицами, рекурсивный метод для обхода многомерных матриц*

*В данной работе представлен подход для создания универсальной алгебраической машины, реализующей алгебру многомерных матриц. Разработанный метод позволяет работать с многомерными матрицами любой размерности и основанными на любом типе данных. Кроме того, в статье представлен алгоритм рекурсивного обхода многомерной матрицы. Основной практический результат проиллюстрирован на конкретном примере.*

**1. Описание подхода.** Введем четырехосновную алгебру  $A$ , имеющую следующий вид

$$A = \langle M, T, R, O \rangle \quad (1)$$

где  $M$  – множество многомерных матриц,  $T$  – множество типов данных, лежащих в основании многомерных матриц множества  $M$ ,  $R$  – множество правил, применяемых для типов данных из множества  $T$ ,  $O$  – множество матричных операций, выполняемых над элементами множества  $M$ .

Множество  $M$  содержит многомерные матрицы любой размерности. Множество  $T$  может содержать любые типы данных, как простые, так и пользовательские. Например, в качестве простых типов данных могут выступать целые числа и булевы значения, а в качестве пользовательского типа данных может быть класс объектов, описывающих собой вершину графа. Множество правил  $R$  содержит в себе наборы, описывающие аддитивную и мультипликативную операции, а также нейтральные элементы этих операций, для конкретного типа данных из множества  $T$ . Множество  $O$  содержит

унарные и бинарные операции для многомерных матриц. В данной работе, в качестве унарной операции использовалась операция свертки многомерной матрицы, а в качестве бинарной операции сложение двух многомерных матриц.

Для работы универсальной алгебраической машины требуется описать многомерные матрицы, над которыми будут выполняться матричные операции. В описание входит определение типов данных, правил для этих типов данных, и непосредственно заполнение многомерных матриц. На основе типов данных и правил для них универсальная алгебраическая машина будет выполнять матричные операции.

## 2. Пример определения типов данных и описания их правил.

Пусть требуется выполнить работу над двумя многомерными матрицами, которые обозначим как  $a$  и  $b$  соответственно. Матрицы, используемые в работе, имеют одинаковую размерность, представляющую собой совокупность индексов  $\{2, 2, 2\}$ , а в качестве типа данных применяется множество целых чисел  $z$ . Таким образом, множество  $M$  имеет вид  $\{a, b\}$ , а множество  $T = \{Z\}$ .

В качестве правила для типа данных  $Z$  из множества  $T$  определим следующий набор. Пусть в качестве аддитивной операции будет выбрано сложение двух целых чисел, имеющее следующий вид

$$\forall(a, b \in Z) \exists(c \in Z) : a + b = c \quad (2)$$

а в качестве мультипликативной операции выбрано произведение двух целых чисел следующего вида

$$\forall(a, b \in Z) \exists(c \in Z) : ab = c \quad (3)$$

тогда нейтральные элементы для операций (2) и (3) имеют следующий вид

$$\forall(a \in Z) : a + e^+ = e^+ + a = a \quad (4)$$

$$\forall(a \in Z) : ae^* = e^*a = a \quad (5)$$

таким образом, описанное правило для множества  $Z$  обозначим, как  $r_z$ . На основе описанных множества многомерных матриц  $M = \{a, b\}$ , множества типов данных  $T = \{Z\}$  и множества правил  $R = \{r_z\}$  универсальная алгебраическая машина способна выполнять матричные операции из множества  $O$ .

## 3. Описание алгоритма рекурсивного обхода матриц.

Универсальная алгебраическая машина предоставляет возможность работы с многомерными матрицами любой размерности. Данная особенность вызывает сложность в ее программной реализации. Проблема заключается в отсутствии заранее известных совокупностей индексов для матриц. Решение данной проблемы может быть решено путем реализации универсальной алгебраической машины для

многомерных матриц конкретной размерности, например создание универсальной алгебраической машины для алгебры тензоров. В качестве разрешения проблемы в данной статье использовался рекурсивный подход для обхода многомерной матрицы.

Данный подход позволяет обойти многомерную матрицу и применить аддитивную и мультипликативную операции над ее элементами, не зная заранее совокупности индексов.

Пусть есть многомерная матрица  $a$ , совокупность индексов которой имеет вид  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ , где каждый индекс имеет верхнюю и нижнюю границы  $u$  и  $l$  соответственно. Тогда алгоритм рекурсивного обхода многомерной матрицы будет описан следующим образом.

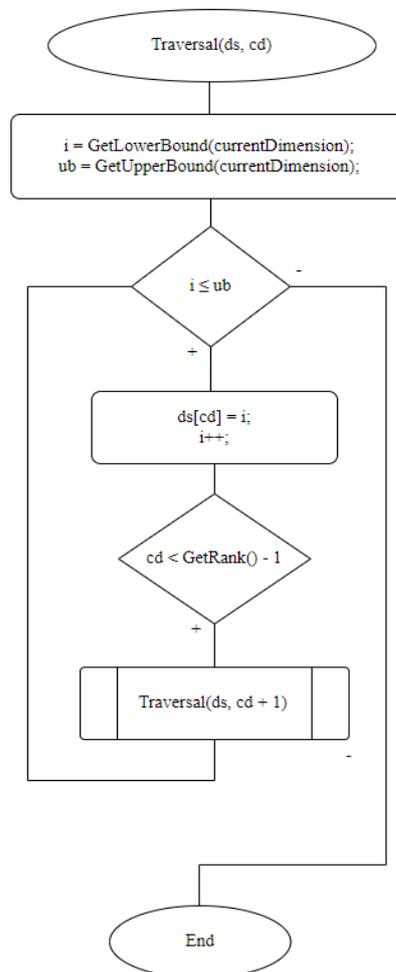


Рис. 1. Блок схема рекурсивного обхода многомерной матрицы

*Шаг 1.* Определяется верхняя и нижняя границы,  $u$  и  $l$  соответственно, для индекса  $i_k$ , где  $k$  принимает значение от 1 до  $n$ .

*Шаг 2.* Используя границы индекса, полученные на шаге 1,  $u$  и  $l$  соответственно, запускается цикл для значений индекса  $i_k$ , собирающий совокупность индексов. В ходе каждой итерации  $j$  сохраняется значение равное  $i_k$  и проверяется равенство  $k$  и ранга обходящейся многомерной

матрицы  $a$ . Если значение  $k$  меньше ранга матрицы  $a$ , то осуществляется переход на шаг 3.

*Шаг 3.* Повторить шаги 1 и 2 для  $i_{k+1}$  до тех пор, пока не будет собрана совокупность индексов, длина которой равна длине совокупности индексов матрицы  $a$ .

Описанный алгоритм позволяет обойти многомерную матрицу без заранее известной её совокупности индексов. Рекурсивный обход многомерной матрицы применяется для реализации матричных операций. В момент достижения последнего индекса размерности многомерной матрицы применяется операция для элементов матрицы с координатами равной собранной в ходе обхода совокупности индексов.

Блок схема для рекурсивного обхода многомерной матрицы представлена на рисунке 1.

```

Матрица А
[0, 0, 0]: 5
[0, 0, 1]: 7
[0, 1, 0]: 1
[0, 1, 1]: 2
[1, 0, 0]: 2
[1, 0, 1]: 8
[1, 1, 0]: 2
[1, 1, 1]: 6

Матрица В
[0, 0, 0]: 4
[0, 0, 1]: 5
[0, 1, 0]: 6
[0, 1, 1]: 4
[1, 0, 0]: 5
[1, 0, 1]: 1
[1, 1, 0]: 5
[1, 1, 1]: 8

Свертка матрицы А по индексам 1, 2
[0, 0]: 12
[0, 1]: 3
[1, 0]: 10
[1, 1]: 8

Сложение матриц А и В
[0, 0, 0]: 9
[0, 0, 1]: 12
[0, 1, 0]: 7
[0, 1, 1]: 6
[1, 0, 0]: 7
[1, 0, 1]: 9
[1, 1, 0]: 7
[1, 1, 1]: 14

```

Рис. 2. Результат выполнения матричных операций

**4. Практический результат.** Далее будет представлен практический результат данной работы. В ходе эксперимента были использованы две многомерные матрицы, реализованные над множеством целых чисел и размерность которых представлена совокупностью индексов  $\{i_1, i_2, i_3\}$ , где каждый индекс принимает значение от 0 до 1.

Результат выполнения матричных операций свертки и сложения представлен на рисунке 2.

**5. Заключение.** Таким образом, с применением разработанного метода была создана универсальная алгебраическая машина для реализации алгебры многомерных матриц. Полученный результат можно использовать в разработке и исследованиях, связанных с обработкой многомерных данных.

Разработанная универсальная алгебраическая машина упрощает работу с многомерными матрицами, избавляет от необходимости реализовывать матричные операции, что является нетривиальной задачей, пользователю достаточно описать нужный ему тип данных и набор правил для этого типа данных.

### Литература

1. Ковалёв В. А., Мунерман В. И. Использование многомерных матриц для решения задач нахождения путей в графе //Системы компьютерной математики и их приложения. – 2016. – №. 17. – С. 52-53.
2. Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. – Рипол Классик, 2013.
3. Гончаров Е. И. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ СВЕРТОК МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ НА ПРОИЗВОДСТВЕ //Системы компьютерной математики и их приложения. – 2021. – №. 22. – С. 108-112.
4. Goncharov E. I. Реализация  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения многомерных матриц средствами операции `tensor_dot` из библиотек для тензорной алгебры //Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2022. – Т. 18. – №. 4. – С. 781-789.
5. Гончаров Е. И. и др. Подход к повышению эффективности алгоритмов свертки в современных системах высокой доступности //Системы высокой доступности. – 2021. – Т. 17. – №. 1. – С. 15-24.
6. Гончаров Е. И. Многомерно-матричное определение операции свертки //Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2021. – Т. 17. – №. 3. – С. 541-549.)

**V.I. Munerman, D.E. Kavchenkov**

Smolensk State University

## THE APPROACH OF CREATING A UNIVERSAL ALGEBRAIC MACHINE FOR THE IMPLEMENTATION OF THE ALGEBRA OF MULTIDIMENSIONAL MATRICES

**Keywords:** *universal algebraic machine, algebra of multidimensional matrices, data type, set of rules, operations on multidimensional matrices, recursive method for traversing multidimensional matrices.*

**Abstract.** *This paper presents an approach for creating a universal algebraic machine that implements the algebra of multidimensional matrices. The developed method allows you to work with multidimensional matrices of*

*any dimension and based on any type of data. In addition, the article presents an algorithm for recursive traversal of a multidimensional matrix. The main practical result is illustrated by a concrete example.*

**В.И. Мунерман, Е.И. Гончаров**  
Смоленский государственный университет

УДК 004.021

## **К ВОПРОСУ О МНОГОМЕРНЫХ БАЗАХ ДАННЫХ**

*Ключевые слова: многомерные структуры данных, многомерные кубы, OLAP, алгебра многомерных матриц, массовая обработка данных*

*В статье рассмотрена группа задач, требующих онлайн-аналитической обработки данных. Авторы разбирают составляющие части OLAP технологии: многомерные кубы, методы реализации и методы обращения к ним. На основании разбора делается вывод о том, что истинно многомерные базы данных не существуют. Предложена алгебра многомерных матриц, которая соответствует реляционной алгебре. Показано, что на основе этой алгебры можно разработать СУБД, которая обеспечит эффективную параллельную реализацию OLAP технологии. Предложен метод построения многомерно-матричной машины баз данных на основе имеющихся программных и аппаратных средств.*

**Введение.** Большинство современных задач требуют обработки данных в реальном времени. Способ организации базы данных для такой обработки зависит от специфики задачи. OLAP системы, используются для анализа больших объемов данных и формирования отчетов, например, в маркетинге и финансовых технологиях.

**История появления.** Начало работы в этой области приписывают Дону Нельсону и его GIRLS [1] разработанного им в 60-тые годы по заказу американского правительства. В статье [2] в 1993 году Эдгар Кодд заложил основные идеи OLAP, в которых данные хранились в виде многомерных кубов. Практическое воплощение эти идеи получили в 1997 году (стандарт ODBO [3]) и в 2001 году (стандарт XMLA [4]). Эти стандарты стали общепринятыми.

**Многомерные кубы.** Выражения OLAP и куб исторически были неразрывно связаны. "OLAP" следует понимать буквально: указание на возможность выполнять аналитическую обработку данных в реальном времени. Куб – модель обрабатываемых данных, в которой измерениями

являются категории, а в ячейках внутри куба содержатся факты и агрегаты. Фактически к кубу следует относиться как к дизайн-паттерну модели данных.

**Реализация OLAP-технологий сегодня.** Есть несколько разновидностей архитектур OLAP:

1. ROLAP – реляционный OLAP. В системах с такой архитектурой все данные хранятся в плоских таблицах реляционной базы данных.

2. MOLAP – многомерный OLAP. Система MOLAP хранит все предварительно рассчитанные данные в гиперкубе.

3. HOLAP – гибридный OLAP сочетает MOLAP и ROLAP.

**Методы взаимодействия.** Основными методами обращения к OLAP кубам являются языки из упомянутых выше стандартов:

1. MDX (MultiDimensional eXpressions) – SQL-подобный язык запросов к многомерным структурам данных.

2. mdXML – язык запросов к многомерным структурам данных, оборачивающий MDX запросы в XML теги, является частью стандарта XMLA.

В [5] прямо утверждается, что "в системах MOLAP многомерные массивы используются для хранения таблиц фактов, выгруженных из внешней реляционной базы данных". В виду того, что куб уже содержит агрегированные данные из всех баз данных, то операции с ним все унарные и тривиальные. Из всего сказанного следует, что любое изменение данных, на основе которых строится куб, приводит к полной его перестройке как в плане изменения размерности отдельных индексов, так и в плане изменения размерности всего куба – числа его индексов.

**Алгебра многомерных матриц и реляционная алгебра.** В этом разделе рассмотрена возможность корректировки аналитического гиперкуба средствами алгебры многомерных матриц, предложенной Н.П. Соколовым в 60-х годах 20 века и изложенной в книге [6]. В монографии [7] приведено доказательство гомоморфизма алгебры многомерных матриц и реляционной алгебры. Далее приводится без доказательства соответствие бинарных операций алгебры многомерных матриц и реляционной алгебры.

**Сложение многомерных матриц и слияние "строго упорядоченных" таблиц.** Суммой двух  $p$ -мерных матриц  $A = \parallel a_{i_1 \dots i_p} \parallel$  и  $B = \parallel b_{i_1 \dots i_p} \parallel$  с одинаковыми наборами индексов  $i_1, \dots, i_p$  называется  $p$ -мерная матрица  $C = \parallel c_{i_1 \dots i_p} \parallel$  с тем же набором индексов, элементы которой вычисляются по формуле  $c_{i_1 \dots i_p} = a_{i_1 \dots i_p} + b_{i_1 \dots i_p}$ .

Этой операции соответствует [7] операция *слияние "строго упорядоченных" таблиц*. Термин "строго упорядоченных" взят в

кавычки, поскольку в реляционной теории баз данных сортировка не рассматривается как самостоятельная операция. Заметим, что в технологии систем управления базами данных операция сортировки явно используется в алгоритмах, реализующих основные операции.

Пусть  $A(K_1, \dots, K_p, W)$  и  $B(K_1, \dots, K_p, W)$  – таблицы, схемы которых совпадают.  $K_1, \dots, K_p$  – составной ключ, по которому эти таблицы находятся в третьей нормальной форме.  $W$  – неключевые атрибуты, которые могут быть однотипными кортежами, над которыми определена бинарная операция  $\omega$ . Также определена групповая (агрегатная) операция  $\Omega$  над группами значений  $W_A \omega W_B - \Omega(W_A \omega W_B)$ . Тогда запрос

```
SELECT UnionAll.K1, ..., UnionAll.Kp, SUM(UnionAll.W)
FROM (SELECT * FROM A UNION ALL SELECT * FROM B)
```

AS *UnionAll* GROUP BY *UnionAll.K<sub>1</sub>, ..., UnionAll.K<sub>p</sub>* реализует операцию слияние "строго упорядоченных" таблиц. Здесь используется "нереляционная" операция UNION ALL, но она реализована во всех современных SQL-реляционных СУБД.

**Умножение многомерных матриц и операция Join.** Пусть матрицы  $A = \|a_{i_1 \dots i_p}\|$  и  $B = \|b_{i_1 \dots i_q}\|$ ,  $p$  и  $q$ -мерные соответственно. Совокупности индексов этих матриц  $i_1, \dots, i_p$  и  $i_1, \dots, i_q$  разбиваются на четыре группы, содержащие соответственно  $\kappa, \lambda, \mu$  и  $\nu$  индексов ( $\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0$ ). Причем  $\kappa + \lambda + \mu = p$ , а  $\lambda + \mu + \nu = q$ . Для полученных групп индексов используются обозначения:  $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$ ,  $c = (c_1, \dots, c_\mu)$  и  $m = (m_1, \dots, m_\nu)$ . Тогда матрицы  $A$  и  $B$  можно представить в виде в виде  $A = \|a_{lsc}\|$  и  $B = \|b_{csm}\|$ . Индексы групп  $s$  и  $c$  в матрицах  $A$  и  $B$  полностью совпадают. Так же как в операции свертки, индексы разбиения  $c$  называются кэлиевыми. Индексы разбиения  $s$  называются скоттовыми, а индексы разбиения  $m$ , так же, как и индексы разбиения  $l$ , – свободными. Матрица  $C = \|c_{lsm}\|$ , элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} \times b_{csm},$$
 называется  $(\lambda, \mu)$ -свернутым произведением и обозначается  ${}^{\lambda, \mu}(A \times B)$ .

Пусть даны таблицы  $A(K_1, \dots, K_p, W)$  и  $B(K_1, \dots, K_q, W)$ , схемы которых не совпадают.  $K_1, \dots, K_p$  и  $K_1, \dots, K_q$  – составные ключи, по которым эти таблицы находятся в третьей нормальной форме.  $W$  – неключевые атрибуты, которые могут быть не обязательно однотипными кортежами, над которыми определена бинарная операция  $\omega$ . Также определена групповая (агрегатная) операция  $\Omega$  над группами значений  $W_A \omega W_B - \Omega(W_A \omega W_B)$ . Кроме того, часть ключей обеих таблиц совпадает. Без ограничения общности можно считать, что это ключи  $K_1, \dots, K_s$  ( $s < p, s < q$ ). Тогда одному и тому же набору значений ключей  $K_1,$

...,  $K_s$  может соответствовать несколько строк таблицы, то есть они соответствуют нестрого упорядоченным файлам. Не нарушая общности можно предположить, что ключи, используемые в предикате ON имеют в обеих таблицах индексы  $1, \dots, s$ . Если часть остальных ключей таблицы  $A$  совпадают с ключами таблицы  $B$ , то в список полей оператора SELECT они включаются только один раз.

Следующий запрос демонстрирует общий вид этой операции.

```
SELECT A.Ks+1, ..., A.Kp, B.Ks+1, ..., B.Kq,  $\Omega(A.W \omega B.W)$ 
FROM A INNER JOIN B ON A.K1, ..., A.Ks = B.K1, ..., B.Ks
GROUP BY A.Ks+1, ..., A.Kp, B.Ks+1, ..., B.Kq
```

В [7] доказано соответствие этих операций.

**Пример соответствия вычислений в алгебре многомерных матриц и реляционной алгебре.** Пусть дана реляционная база данных, схемы и содержание таблиц которой приведены в таблице 1.

Таблица 1.  
База данных примера

A		B			C			D				E		Res	
K1	W	K1	K2	W	K2	K3	W	K2	K3	K4	W	K4	W	K1	S
p1	100	p1	e1	6	e1	s1	10	e1	s1	m1	10	m1	3	p1	93300
p2	200	p1	e2	3	e1	s1	5	e1	s1	m2	5	m2	5	p2	133000
		p2	e1	2	e1	s2	7	e1	s2	m4	7	m3	2		
		p2	e2	7	e2	s1	5	e2	s1	m2	5	m4	7		
		e2	s2	1	e2	s2	m3	1							
		e2	s3	2	e2	s3	m1	2							

Значение поля  $S$  для каждого значения поля  $K1$  вычисляется по формуле  $S = A.W \times \sum_{(K2)} B.W \times (C.W + \sum_{(K4)} D.W \times E.W)$ . В листинге 1 приведен

запрос, реализующий вычисление таблицы Res из таблиц  $A, B, C, D, E$ .

Листинг 1. Вычисление таблицы Res

1. SELECT A.K1, SUM(A.W\*Q4.W) FROM A Inner Join
2. (SELECT B.K1, B.K2, SUM(B.W\*Q3.W) AS W FROM B Inner Join
3. (SELECT UA.K2, UA.K3, SUM(UA.W) AS W FROM
4. (SELECT C.K2, C.K3, C.W FROM C Union All SELECT Q2.\* FROM
5. (SELECT Q1.K2, Q1.K3, Q1.W FROM
6. (SELECT D.K2 AS K2, D.K3 AS K3, SUM(D.W\*E.W) AS W
7. FROM D Inner Join E ON D.K4=E.K4
8. GROUP BY D.K2, D.K3)
9. AS Q1)
10. AS Q2)
11. AS UA
12. GROUP BY UA.K2, UA.K3)
13. AS Q3
14. ON B.K2=Q3.K2
15. GROUP BY B.K1, B.K2)
16. AS Q4
17. ON A.K1=Q4.K1

## 18. GROUP BY A.K1

Домены ключей K1, K2, K3, K4 – конечные множества. Поэтому можно задать нумерацию их элементов. Тогда этим ключам соответствуют индексы  $i_1, i_2, i_3, i_4$ . Таблицам соответствуют матрицы

$$A = \|a_{i_1}\| = \|100, 200\|, B = \|b_{i_2}\| = \left\| \begin{array}{cc} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{array} \right\|, C = \|b_{i_2 i_3}\| = \left\| \begin{array}{ccc} 10 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \end{array} \right\|,$$
$$D = \|d_{i_2 i_3 i_4}\| = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, E = \|e_{i_4}\| = \|5, 2, 7\|.$$

Таблице Res соответствует матрица  $R$ , аналогичная матрице  $A$ . Выражение, вычисляющее значение матрицы  $R$  вид  $R = {}^{0,1}(A \times {}^{0,1}(B \times (C + {}^{0,1}(D \times E))))$ .

Это выражение приводит к вычислению тех же значений, что и SQL-запрос.

### Реализация многомерной СУБД.

Из соответствия моделей вычислений прямо следует возможность построения программно-аппаратного комплекса, реализующего логику запросов к многомерной базе данных с помощью сложения и  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения многомерных матриц.

В [7] показано, как может быть построен программно-аппаратный комплекс, реализующий параллельную реализацию  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения. В статье [8] приведено строгое доказательство того, что вычисление  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения многомерных матриц может быть сведено к параллельному вычислению  $(0, \mu)$ -свернутых произведений их скоттовых сечений.

Современные библиотеки: *NumPy*, *CuPy*, *PyTorch*, *TensorFlow* — ориентированные на работу с тензорам, включают параллельные реализации операций:

- сложение многомерных массивов;
- тензорное сжатие вдоль осей ( $\text{tensordot}(A, B, \mu)$ ). Эта операция в точности совпадает с  $(0, \mu)$ -свернутым произведением  $A$  и  $B$ .

Таким образом мы получаем весь необходимых функционал для построения такого программно-аппаратного комплекса. Важно отметить, что с использованием библиотек, обозначенных выше, можно эффективно задействовать все основные вычислительные среды (*CPU*, *GPU*, *TPU*).

**Заключение.** Несмотря на обилие слова "многомерный" в разбираемых объектах, многомерных баз данных не существует. Существует только способ организации баз данных, использующий предварительно агрегированные данные, хранимые в многомерной структуре для ускорения обрабатываемых запросов, сформулированных

в соответствии с его архитектурой. Из сказанного в статье можно сделать вывод о том, что может быть построена многомерно-матричная машина баз данных, в которой все действия над данными: ввод, поддержание в актуальном состоянии, обработка и вывод, могут быть реализованы в многомерно-матричной модели вычислений.

### Литература

1. Tincat Group / [Электронный ресурс] // : [сайт]. — URL: <http://www.tincat-group.com/mv/Nelson-GIRLS-1965.html> (дата обращения: 19.10.2023).
2. Codd E. F., Codd S. B., Salley C. T. Providing OLAP (on-line analytical processing) to user-analysts // An IT Mandate. White Paper. Arbor Software Corporation. – 1993. – Т. 4.
3. OLE DB for OLAP // URL: [https://help.sap.com/doc/saphelp\\_nw74/7.4.16/en-us/03/cf903c47c95875e10000000a11405a/content.htm?no\\_cache=true](https://help.sap.com/doc/saphelp_nw74/7.4.16/en-us/03/cf903c47c95875e10000000a11405a/content.htm?no_cache=true) (дата обращения: 06.11.2023).
4. XML for Analysis Specification // URL: <http://xml.coverpages.org/xmlaV11-20021120.pdf> (дата обращения: 06.11.2023).
5. Tsuji T., Hara A., Higuchi K. An extendible multidimensional array system for MOLAP // Proceedings of the 2006 ACM symposium on applied computing. – 2006. – С. 503-510.
6. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972 г. – 176 с.
7. Мунерман, В. И. Массовая обработка данных. Алгебраические модели и методы: монография / В.И. Мунерман. – Москва : ИНФРА-М, 2023. – 229 с. – (Научная мысль). URL: <https://znanium.com/catalog/product/1906037> (дата обращения: 10.03.2024).
8. Goncharov, E.I. Реализация  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения многомерных матриц средствами операции `tensor dot` из библиотек для тензорной алгебры. Современные информационные технологии и ИТ-образование, [S.l.], v. 18, n. 4, p. 781-789, dec. 2022.

**V.I. Munerman, E.I. Goncharov**  
Smolensk State University

### ABOUT MULTIDIMENSIONAL DATABASES AS AN ESSENTIAL PHENOMENON

**Keywords:** *multidimensional data structures, multidimensional cubes, OLAP, multidimensional matrices algebra, massively data processing.*

**Abstract.** *The article discusses a group of tasks that require online analytical data processing. The authors analyze the components of OLAP technology: multidimensional cubes, implementation methods and methods for accessing them. Based on the analysis, it is concluded that truly multidimensional databases do not exist. An algebra of multidimensional matrices is proposed, which corresponds to relational algebra. It is shown that on the basis of this algebra it is possible to develop a DBMS that will*

*provide an effective parallel implementation of OLAP technology. A method for constructing a multidimensional matrix database engine based on available software and hardware is proposed.*

**В.И. Мунерман, Д.В. Мунерман**

*Смоленский государственный университет*

**И.Н. Синицын**

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»*

*Российской академии наук*

УДК 004.051

## **УСЛОВНО-ТРЕХМЕРНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ**

*Памяти Евгения Петровича Емельченкова*

*Ключевые слова: алгебра многомерных матриц; параллельные вычисления; случайные матрицы; стохастические матрицы*

*Рассматриваются представления многомерных матриц в виде условно-трехмерных (пространственных или кубических) матриц. Предложен основанный на системах счисления метод, который позволяет представлять многомерные матрицы – операнды  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения в виде условно-трехмерных матриц. Этот метод также позволяет достаточно просто обобщить результаты, полученные для трехмерных матриц на матрицы произвольной размерности. Рассмотрен ряд задач из различных предметных областей, решение которых основано на применении трехмерных матриц. Особое внимание уделено трехмерным и условно-трехмерным стохастическим и случайным матрицам.*

**Применение пространственных матриц.** Разработанная в 60-е годы прошлого века теория пространственных, или как их еще называют трехмерных или кубических матриц [1], нашла широкое применение в различных предметных областях от математики и физики до экономических и географических исследований. Например, в статье [2] рассматривается применение трехмерных матриц в алгебре гиперкомплексных чисел, статья [3] посвящена построению и анализу операций над трехмерными матрицами со специфической структурой, в статье [4] проведено обобщение стохастических матриц на случай кубических матриц и показано их применение в статьях [5,6] рассмотрено применение трехмерных матриц к решению социально-

экономических и геоинформационных задач. В задачах практики часто встречаются объекты, которые характеризуются большим числом параметров. Такие объекты представляются многомерными матрицами.

В работах [7, 8] было рассмотрено обобщение блочных алгоритмов параллельного умножения матриц на случай многомерных матриц, посредством их представления в виде условно-трехмерных матриц и их условно-двумерных сечений.

**Пространственные и многомерные матрицы.** В книге основоположника теории пространственных и многомерных матриц Н.П. Соколова пространственная (трехмерная или кубическая) матрица порядка  $n$  определяется как любая система из  $n^3$  элементов  $A_{ijk}$  ( $i, j, k = 1, \dots, n$ ), расположенных в точках трехмерного пространства, определяемых координатами  $i, j, k$  [1]. В его же книге [2] дано определение многомерной матрицы, которое скорректировано авторами применительно к задачам массовой обработки данных следующим образом.

Пусть  $i_1, \dots, i_p$  – совокупность индексов, принимающих значения от 1 до  $n_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, p$ ) соответственно. Тогда  $p$ -мерная матрица – это совокупность  $A = \{a_{i_1 \dots i_p}\}$  элементов некоторого типа, над которым определены аддитивная и мультипликативная операция умножения. Стандартное обозначение многомерной матрицы  $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$ . Размерности матриц, а также числовые свойства их индексов имеют существенное значение для операций их свертки и умножения. Далее приводятся определения этих операций.

**Простое  $m$ -кратное сечение.** Пусть в  $m$  индексах ( $1 \leq m \leq p$ ) совокупности индексов  $(i_1, \dots, i_p)$  матрицы зафиксировано по одному значению. Для простоты и без ограничения общности можно считать, что это индексы  $(i_1, \dots, i_m)$ .  $(p - m)$ -мерная матрица  $\left\| A_{(i_1^0, \dots, i_m^0, i_{m+1}, \dots, i_p)} \right\|$ , состоящая только из тех элементов матрицы  $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$ , в которых индексы  $(i_1, \dots, i_m)$  имеют единственное фиксированное значение  $(i_1^0, \dots, i_m^0)$ , называется простым  $m$ -кратным сечением матрицы  $A$  ориентации  $(i_1, \dots, i_m)$ . При необходимости оно будет обозначаться  $A|_{i_1, \dots, i_m}$ .

**Свертка.** Пусть дано разбиение совокупности индексов матрицы  $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$  на совокупности  $l = (l_1, \dots, l_k)$  и  $c = (c_1, \dots, c_\mu)$ ,  $\kappa + \mu = p$ . Матрица

${}^{\mu}A = \|a_l\|$ , элементы которой связаны с элементами матрицы  $A = \|a_{lc}\|$  соотношением  $a_l = \sum_{(c)} a_{lc}$ , называется  $\mu$ -свернутой матрицей и обозначается  ${}^{\mu}A = \left\| \sum_{(c)} a_{lc} \right\|$ . Индексы разбиения  $l=(l_1, \dots, l_{\kappa})$  называются свободными индексами, а индексы разбиения  $c=(c_1, \dots, c_{\mu})$  – кэлиевыми индексами.

**Умножение.** Пусть матрицы  $A = \|a_{i_1 \dots i_p}\|$  и  $B = \|b_{i_1 \dots i_q}\|$ , имеют размерности  $p$  и  $q$  соответственно. Совокупности индексов этих матриц  $i_1, \dots, i_p$  и  $i_1, \dots, i_q$  разбиваются на четыре группы, содержащие соответственно  $\kappa, \lambda, \mu$  и  $\nu$  индексов ( $\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0$ ), причем  $\kappa + \lambda + \mu = p$ , а  $\lambda + \mu + \nu = q$ . Для полученных групп этих индексов используются обозначения:  $l = (l_1, \dots, l_{\kappa})$ ,  $s = (s_1, \dots, s_{\lambda})$ ,  $c = (c_1, \dots, c_{\mu})$  и  $m = (m_1, \dots, m_{\nu})$ . Тогда матрицы  $A$  и  $B$  можно представить в виде  $A = \|a_{lsc}\|$  и  $B = \|b_{scm}\|$ . Индексы групп  $s$  и  $c$  в матрицах  $A$  и  $B$  полностью совпадают. Так же как в операции свертки, индексы разбиения  $c$  называются кэлиевыми. Индексы разбиения  $s$  называются скоттовыми, а индексы разбиения  $m$ , так же, как и индексы разбиения  $l$ , – свободными.

Матрица  $C = \|c_{lsm}\|$ , элементы которой вычисляются по формуле  $c_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} \times b_{scm}$ , называется  $(\lambda, \mu)$ -свернутым произведением и обозначается  ${}^{\lambda, \mu}(A \times B)$ .

### Построение условно-трехмерных матриц.

**Матрицы-операнды одного порядка.** Если все индексы многомерной матрицы принимают одни и те же значения ( $\forall \alpha n_{\alpha} = E$ ), то эта матрица имеет порядок  $E$ . В этом случае совокупности индексов каждого разбиения  $l, s, c, m$  можно рассматривать как числа в  $E$ -ричной системе счисления. Это означает, что они изменяются от 0 до  $E^{\kappa}-1, E^{\lambda}-1, E^{\mu}-1, E^{\nu}-1$  соответственно. В этом случае матрицы-операнды  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения  $A = \|a_{lsc}\|$  и  $B = \|b_{scm}\|$  можно рассматривать как условно-трехмерные. В том случае когда  $\kappa = \lambda = \mu = \nu = \rho = N$  обе матрицы можно рассматривать как условно-трехмерные матрицы, содержащие  $E^{3N}$  элементов.

**Матрицы-операнды разных порядков.** Если каждый из индексов матриц-операндов имеет свою область изменения, то есть все  $n_{\alpha}$  различные, построение условно-трехмерных матриц невозможно.

Однако, если все индексы в каждом разбиении  $l, s, c, m$  принимают значения  $E_l, E_s, E_c, E_m$  соответственно, то каждую совокупность индексов можно рассматривать как числа в  $E_l$ -,  $E_s$ -,  $E_c$ -,  $E_m$ -ричных системах счисления. Эти числа изменяются от 0 до  $E_l^\kappa - 1, E_s^\lambda - 1, E_c^\mu - 1, E_m^\eta - 1$  соответственно. Тогда можно утверждать, что многомерные матрицы-операнды могут быть представлены как совместимые по умножению условно-трехмерные матрицы  $A = \|a_{lsc}\|$  и  $B = \|b_{scm}\|$ .

*Замечание.* Поскольку каждый индекс условно-трехмерной матрицы построен из нескольких индексов исходной многомерной матрицы, то в дальнейшем они будут при необходимости называться мультииндексами.

**Трехмерные стохастические матрицы и их вероятностные интерпретации.** В статье [4], посвященной исследованию трехмерных стохастических матриц, рассмотрены три ассоциативные операции умножения трехмерных матриц, обобщающее обычное матричное умножение. Также в [4] впервые введены трехмерные аналогии стохастических матриц и даны их вероятностные интерпретации на основе марковских цепей.

Далее эти операции определяются в терминах алгебры условно трехмерных матриц следующим образом. Следует отметить, что все эти операции есть варианты  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения при транспонированиях матриц-операндов согласно взаимно соответствующим подстановкам  $\left( \begin{matrix} l, s, c \\ l_1, s_1, c_1 \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} s, c, m \\ s_1, c_1, m_1 \end{matrix} \right)$  их индексов.

Пусть  $\Gamma$  – произвольный конечный алфавит. В рассматриваемом случае  $\Gamma$  – это конечное множество, содержащее все числа в  $E$ -ричной системе счисления в интервале от 0 до  $E^N - 1$ . В этом случае введенные в [4] операции умножения можно рассматривать как различные варианты  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения при  $\lambda, \mu = 0, 1, 2$ .

Пусть даны две условно-трехмерные матрицы  $A = \|a_{i_1 i_2 i_3}\|$  и  $B = \|b_{i_4 i_5 i_6}\|$ , а  $(i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, i_{\alpha_3}), (i_{\alpha_4}, i_{\alpha_5}, i_{\alpha_6})$  – произвольные перестановки их индексов. Тогда возможны следующие  $(\lambda, \mu)$ -свернутые произведения.

1.  $i_{\alpha_2} = c_1, i_{\alpha_3} = c_2, i_{\alpha_4} = c_1, i_{\alpha_5} = c_2$  – кэлиевы индексы: результат – квадратная матрица  ${}^{0,2}(A \times B) = \left\| \sum_{(c_1, c_2)} a_{i_{\alpha_1} c_1 c_2} \times b_{c_1 c_2 i_{\alpha_6}} \right\| = \|c_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_6}}\|$ ;

2.  $i_{\alpha_3} = c_1, i_{\alpha_4} = c_1$  – кэлиевы индексы: результат – четырехмерная матрица  ${}^{0,2}(A \times B) = \left\| \sum_{(c_1)} a_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} c_1} \times b_{c_1 i_{\alpha_5} i_{\alpha_6}} \right\| = \|c_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} i_{\alpha_5} i_{\alpha_6}}\|$ ;

3.  $i_{\alpha_2} = s_1, i_{\alpha_3} = s_2, i_{\alpha_4} = s_1, i_{\alpha_5} = s_2$  – скоттовы индексы: результат – четырехмерная матрица  ${}^{2,0}(A \times B) = \left\| a_{i_{\alpha_1} s_1 s_2} \times b_{s_1 s_2 i_{\alpha_6}} \right\| = \left\| c_{i_{\alpha_1} s_1 s_2 i_{\alpha_6}} \right\|$ ;

4.  $i_{\alpha_3} = s_1, i_{\alpha_4} = s_1$  – скоттовы индексы: результат – пятимерная матрица  ${}^{1,0}(A \times B) = \left\| a_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} s_1} \times b_{s_1 i_{\alpha_5} i_{\alpha_6}} \right\| = \left\| c_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} s_1 i_{\alpha_5} i_{\alpha_6}} \right\|$ ;

5.  $i_{\alpha_2} = s_1, i_{\alpha_5} = s_1$  – скоттовы индексы  $i_{\alpha_3} = c_1, i_{\alpha_4} = c_1$  – кэлиевы индексы: результат – трехмерная матрица  ${}^{0,2}(A \times B) = \left\| \sum_{(c_1)} a_{i_{\alpha_1} s_1 c_1} \times b_{c_1 s_1 i_{\alpha_6}} \right\| = \left\| c_{i_{\alpha_1} s_1 i_{\alpha_6}} \right\|$ .

Определенные в [4] операции умножения реализуются операциями 1 и 5, причем каждой операции может предшествовать соответствующее транспонирование матриц-операндов.

**Стохастические матрицы.** Матрица  $P = \left\| p_{i_1 i_2 i_3} \right\|$  называется стохастической, если  $p_{i_1 i_2 i_3} \geq 0$  и  $\sum_{(i_3)} p_{i_1 i_2 i_3} = 1$ ,  $i_1, i_2, i_3 \in \Gamma$  для всех  $i_3 \in \Gamma$ , то

есть свертка по кэлиеву индексу  $i_3$  простого 1-кратного сечения матрицы  $P$  по свободным индексам  $i_1, i_2$  задается формулой  ${}^1P|_{i_1, i_2} = 1$ . Учитывая тот факт, что каждый мультииндекс принимает в рассматриваемом случае  $E^N$  значений, то число таких сверток также равно  $E^N$ .

Трехмерная стохастическая матрица называется дважды стохастической, если  ${}^1P|_{i_1, i_2} = \frac{1}{E^N}$  при всех  $i_1, i_2 \in \Gamma$ .

Для стохастической матрицы  $P = \left\| p_{i_1 i_2 i_3} \right\|$  значение элемента  $p_{i_1 i_2 i_3}$  можно интерпретировать как вероятность для частицы типа  $i_3$  иметь упорядоченную родительскую пару типов  $i_1$  и  $i_2$ . Тогда элемент месте матрицы означает вероятность для частицы типа  $i_3$ , полученной через  $n$  единиц времени, иметь исходную родительскую упорядоченную пару частиц типа  $i_1$  и  $i_2$ . В случае дважды стохастической матрицы элемент  $p_{i_1 i_2 i_3}^{(n)}$  матрицы  $P^n$  можно рассматривать как вероятность появления частицы типа  $i_3$  из частицы типа  $i_1$  за  $n$  единиц времени при условии, что на первом шаге появится частица типа  $i_2$ .

Стохастические матрицы нашли применения в задачах анализа и синтеза стохастических процессов и стохастических систем информатики, и управления [10].

## Литература

1. Соколов, Н. П. Пространственные матрицы и их приложения / Н. П. Соколов. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 299 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL:

<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=464080> (дата обращения: 10.01.2024). – Текст : электронный.

2. Приходовский М. А. Гиперкомплексные числовые системы и пространственные матрицы // Успехи современного естествознания. – 2014. – №. 4. – С. 79-81.

3. Гальмак А. М. Полиадические операции на множестве пространственных матриц. Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2011. – N 2 (62). – С. 15-21.

4. В. М. Максимов, Кубические стохастические матрицы и их вероятностные интерпретации, Теория вероятн. и ее примен., 1996, том 41, выпуск 1, 89–106, DOI: 10.4213/tvp2777

5. Ерзнкян Б. А. Технологическое и институциональное развитие социально-экономической системы в гетерогенной среде // Journal of Institutional Studies (Журнал институциональных исследований). – 2012. – Т. 4. – №. 3. – С. 79-94.

6. Розенберг И. Н. Обработка пространственной информации // Перспективы науки и образования. – 2015. – №. 3 (15). – С. 17-24.

7. Захаров В. Н., Мунерман В. И. Параллельная реализация обработки интенсивно используемых данных на основе алгебры многомерных матриц // Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных: XVII Международная конференция DAMDID/RCDL. – 2015. – С. 217-223.

8. Мунерман, В. И. Массовая обработка данных. Алгебраические модели и методы: монография / В.И. Мунерман. – Москва : ИНФРА-М, 2023. — 229 с. — (Научная мысль). — DOI 10.12737/1906037. - ISBN 978-5-16-018035-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1906037> (дата обращения: 06.11.2023). – Режим доступа: по подписке.

9. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972 г. – 176 с.

10. Синицын И.Н. Канонические представления случайных функций. Теория и применение. – М.: Торус Пресс, 2023. 816 с.

**V.I. Munerman, D.V. Munerman**

Smolensk State University

**I.N. Sinitsyn**

Principal Research Scientist Institute of Informatics Problems,

Federal Research Center "Computer Science and Control",

Russian Academy of Sciences

## **CONDITIONALLY THREE-DIMENSIONAL MATRICES AND THEIR APPLICATIONS**

**Keywords:** *of multidimensional matrices algebra; parallel computing, stochastic matrices.*

**Abstract.** *Representations of multidimensional matrices in the form of conditionally three-dimensional (spatial or cubic) matrices are considered. A method based on number systems is proposed. It allows you to represent multidimensional matrices-operands of a  $(\lambda, \mu)$ -convolution product in the form of conditionally three-dimensional matrices. This method also allows one to quite simply generalize the results obtained for three-dimensional*

*matrices to matrices of arbitrary dimension. A number of problems are considered from various subject areas, the solution of which is based on the use of three-dimensional matrices. Particular attention is paid to three-dimensional and conditionally three-dimensional stochastic matrices.*

**Е.Н. Петров, Е.М. Портнов**  
*Национальный исследовательский университет “МИЭТ”*

УДК 004.93

## **МЕТОД КЛАССИФИКАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ЗАПИСЕЙ С ПОМОЩЬЮ УСЛОВНО- СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ**

Ключевые слова: *классификация, обработка данных, машинное обучение*

*Предложено формализованное представление и создан метод классификации элементов библиографических записей с помощью условно-случайных полей, позволяющий переводить библиографические данные из произвольного формата в структурированный. Предложены методы обучения и использования классификатора на основе формализованного представления. Приведены результаты вычислительного эксперимента и сравнения обученного в соответствии с разработанным методом классификатора с нейронными сетями на одинаковых наборах признаков и данных, подтверждающие эффективность разработанного метода.*

В последние годы наблюдается взрывной рост объемов информации, которые зачастую представлены в неструктурированном или слабо структурированном виде. Представленная в таком виде потенциально полезная деловая информация представляет интерес, однако отсутствие явной структуры мешает ее эффективной обработке и анализу.

Одной из сфер, в которой существуют проблемы обработки информации, являются библиографические данные, используемые на предприятиях, в институтах и других организациях, занимающихся научной деятельностью или ведущих библиографический учет.

В данной статье предложено формализованное представление и создан метод классификации элементов библиографических записей с помощью условно-случайных полей, позволяющий проводить автоматизированную обработку библиографических записей с выделением классов входящих в нее элементов. Такая обработка

позволяет переводить библиографические данные из произвольного формата в структурированный, пригодный для последующего сохранения в базах данных или преобразования в целевой формат.

Пусть  $Y$  — множество меток классов библиографической записи,  $X$  — множество слов. Вероятность того, что последовательность меток  $y \in Y$  длины  $n$  верно классифицирует последовательность элементов библиографической записи, состоящую слов  $x \in X$ :

$$p(y|x, w) = \frac{\exp w\Phi(y, x)}{Z(x, w)},$$

$$w\Phi(y, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i-1}^{i+1} (w_c f_c(y_{k-1}, y_k, x_k) + w_p f_p(y_{k-1}, y_k, x_k) + w_o f_o(y_{k-1}, y_k, x_k) + w_{cn} f_{cn}(y_{k-1}, y_k, x_k) + w_n f_n(y_k, k)),$$

где  $F_c$  — функции признаков символьного состава (наличие или отсутствие в слове букв, цифр и специальных знаков);  $F_p$  — функции признаков регистра (регистр первой буквы слова, а также регистр самого слова целиком - верхний или нижний);  $F_o$  — функции признаков окончания слов (заканчивается ли слово на точку или запятую);  $F_{сп}$  — специальные функции признаков (совпадает ли слово с символом “//” или “№”);  $F_{п}$  — функции признаков положения (находится ли слово в начале рассматриваемой строки, конце или середине);  $\Phi$  — глобальная функция признаков;  $w$  — веса соответствующих функций признаков;  $Z$  — нормирующий коэффициент.

Таким образом, задача классификации элементов библиографической записей сводится к нахождению такой последовательности меток, что:

$$\tilde{y} = \operatorname{argmax}_y p(y|x, w),$$

Для решения этой задачи проводится обучение классификатора, выполняемое на тестовой выборке библиографических записей с размеченными элементами. В процессе обучения происходит вычисление весов функций признаков, выделенных в процессе формализации.

Непосредственно обучение классификатора производилось с помощью максимизации условного логарифма правдоподобия вероятности верного ответа классификатора при заданном наборе функций признаков  $F$ :

$$L(w, y|x) = \sum_{i=1}^n p(y_i | x_i, w),$$

$$\frac{\delta L(w, y|x)}{\delta w_j} = \sum_{i=1}^n f_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_y f_{ij} p(\bar{y} | x_i) - \sum_j \frac{w_j}{\sigma^2},$$

где  $f_{ij}$  - функция признака  $j$  слова  $i$ ,  $\sigma$  - параметр регуляризации  $L_2$ .

Для максимизации данной функции использовался алгоритм Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно, более известный как BFGS:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= I(\text{единичная матрица}), \\
 w_0 &= \text{единичный вектор}, \\
 p_k &= -H_k \square L_k, \\
 w_{k+1} &= w_k + \alpha_k p_k, \\
 s_k &= x_{k+1} - x_k, \\
 y_k &= L_{k+1} - L_k, \\
 H_{k+1} &= (I - p_k s_k y_k^T) H_k (I - p_k y_k s_k^T) + p_k s_k s_k^T.
 \end{aligned}$$

Условие Вольфе для  $\alpha_k$ :

$$\begin{aligned}
 L(x_k + \alpha_k p_k) &\leq L(x_k) + c_1 \alpha_k \square L_k^T p_k, \\
 L(x_k + \alpha_k p_k)^T &\geq c_2 \square L_k^T p_k, 0 < c_1 < c_2 < 1.
 \end{aligned}$$

Нахождение оптимальной последовательности меток при использовании классификатора осуществлялось на основе алгоритма поиска наиболее подходящего списка состояний Витерби:

$$\begin{aligned}
 \underline{y} &= \operatorname{argmax}_y p(y | x, w) = \operatorname{argmax}_y \sum_{i=1}^n \overline{w} f(y_{i-1}, y_i), \\
 \pi[i, y] &= \max_y \sum_{j=1}^i \overline{w} f(y_{j-1}, y_j), \\
 \pi[i, y] &= \overline{w} f(y_0, y), \\
 \pi[i, y] &= \max_{y'} \pi(i-1, y') + \overline{w} f(y', y), \\
 k[i, y] &= \operatorname{argmax}_{y'} \pi(i-1, y') + \overline{w} f(y', y), \\
 \overline{y} &= \overline{y}_1 \dots \overline{y}_n, \\
 \overline{y} &= \operatorname{argmax}_y \pi(n, y), \overline{y}_i = k[i, \overline{y}_{i+1}] \quad i = n-1 \dots 1.
 \end{aligned}$$

В ходе вычислительного эксперимента входными данными являлась тестовая выборка размеченных библиографических записей, полученных из открытых источников. 80% тестовой выборки использовалось для обучения классификатора, на оставшихся 20%, не задействованных в процессе обучения, проводилась оценка качества классификатора. В качестве характеристик для оценки качества классификации использовались метрики точности, полноты и F-меры. Показатели классификатора сравнивались с показателями, полученными с помощью нейронной сети прямого распространения и рекуррентной нейронной сети на тех же функциях признаков и данных (таблица 1).

На основе полученных результатов можно сделать вывод, что средний прирост точности обработки составил 12% по сравнению с нейронной сетью прямого распространения и 6% по сравнению с рекуррентной нейронной сетью.

Таблица 1.  
Сравнение точности (Т), полноты (П) и F-меры (F)

Метка	Нейронная сеть прямого распространения			Рекуррентная нейронная сеть			Метод на основе условно-случайных полей		
	Т	П	F	Т	П	F	Т	П	F
Автор статьи	0.93	0.98	0.95	0.99	0.96	0.98	1.00	1.00	1.00
Разделитель “-”	0.98	0.95	0.96	0.97	1.00	0.99	0.94	1.00	0.97
Название журнала	0.66	0.76	0.71	0.69	0.69	0.69	0.94	0.96	0.95
Город издания	1.00	0.20	0.33	1.00	0.75	0.86	0.80	0.80	0.80
Страницы	0.91	0.91	0.91	1.00	0.89	0.94	1.00	1.00	1.00
Издательство	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.50	0.67
Название статьи	0.84	0.74	0.78	0.83	0.84	0.83	1.00	1.00	1.00
Разделитель “/”	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Номер тома	1.00	0.88	0.93	0.91	0.91	0.91	1.00	0.89	0.94
Год издания	0.83	1.00	0.91	0.86	1.00	0.92	0.80	0.84	0.82
Среднее	0.92	0.84	0.85	0.92	0.90	0.91	<b>0.97</b>	<b>0.97</b>	<b>0.97</b>

Предложенный метод классификации элементов библиографических записей с помощью условно-случайных полей позволит выполнять классификацию библиографических данных в произвольном слабо структурированном формате на русском языке. При использовании разработанного метода на практике возможен автоматизированный перевод библиографических записей из произвольного формата в структурированный, пригодный к хранению в базах данных или последующему преобразованию в целевой формат, необходимый конкретным организациям, работающим с библиографическими данными.

### Литература

1. Lafferty J., McCallum A., Pereira F. Conditional random fields: Probabilistic models for segmenting and labeling sequence data // International Conference on Machine Learning. – 2001. – Т. 1. – №. 2. – С. 1-10.
2. Forney G.D. The Viterbi algorithm // Proceedings of the IEEE. – 1973. – Т. 61. – №. 3. – С. 268-278.
3. Liu D. C., Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization // Mathematical programming. – 1989. – Т. 45. – №. 1. – С. 503-528.

**E.N. Petrov, E.M. Portnov**

National Research University of Electronic Technology - MIET

### CRF-BASED CLASSIFICATION METHOD OF BIBLIOGRAPHIC RECORDS ELEMENTS

**Keywords:** *classification, data processing, machine learning*

**Abstract.** *In this article a CRF-based classification method of bibliographic records elements is presented. The article includes learning and usage methods of classifier based on formalized representation of bibliographic classification task. Method's efficiency was verified by a computational experiment, the results of which were compared with neural network classifiers that used the same feature functions and data.*

**К.А. Петрова, Т.А. Самойлова**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.89

## **СИСТЕМА БИОМЕТРИЧЕСКОЙ АУТЕНТИФИКАЦИИ ЛИЦ НА ОСНОВЕ DEEPFACE**

**Ключевые слова:** *биометрическая аутентификация, сопоставление лиц, метрики сходства, DeepFace, VGG-Face, ArcFace, Tkinter.*

*Статья посвящена решению проблемы низкой достоверности биометрической аутентификации по лицу. Первый тип ошибок – когда система не пропускает легального пользователя; второй – когда система ошибается и принимает одного человека за другого. Эти ошибки сопоставления возникают из-за различий в освещении, позе, выражении лица и возрасте. В статье мы предлагаем метод, в основе которого определение сходства между лицом с камеры и изображениями лиц из базы данных выполняется, посредством последовательного вычисления двух метрик, – косинусного сходства и евклидова расстояния. Выбирая наиболее подходящий показатель сходства для конкретного лица, мы получаем более точные и значимые результаты. Отобранная для проведения эксперимента библиотека DeepFace позволяет выполнять аутентификацию разными моделями. На основе предложенного метода разработано и испытано пользовательское приложение, на котором показана эффективность предложенного метода.*

**1. Введение.** Биометрические системы играют важную роль в обеспечении безопасности на основе идентификации людей. Биометрическая аутентификация по лицу – самая быстрая технология, которая идентифицирует человека без его участия. Ее широкое использование обусловлено усовершенствованием в последние годы глубоких сверточных нейронных сетей. Однако, существует несколько

серьезных проблем, связанных с идентификацией лиц, которые ограничивают эффективность данной технологии в практических сценариях [1]. К ним относятся качество изображений лиц, получаемых с видеокamеры, угол наблюдения, изменения освещенности, позы, ошибки при сопоставлении двух лиц. Неверное сопоставление затрудняет идентификацию и приводит к ложноположительным и ложноотрицательным результатам при классификации [2], что отрицательно влияет на эффективность сопоставления. Именно поэтому биометрическая аутентификация по лицу имеет низкую достоверность. Ведь она должна быстро обнаруживать и идентифицировать человека в режиме реального времени, когда он оказывается перед камерой.

**2. Проблема сопоставления лиц и её решение.** Задача сравнения лица, полученного камерой, с лицами, фотографии которых находятся в базе данных, весьма проблемна. Алгоритмы распознавания лиц тщательно исследованы, повышение точности современных моделей глубокого обучения подтверждено документально [3], но подобных исследований в области улучшения качества сопоставления, которому посвящена настоящая статья, крайне мало. Обычно сопоставление реализуется путем вычисления вектора признаков – расстояния между двумя наборами векторов, которые нейросеть модели идентификации присваивает каждому лицу [4]. Таким образом, для сравнения лиц необходимы соответствующие показатели расстояния между ними – метрики сходства [5]. Лучшей метрикой при сравнении «один ко многим», когда используется сравнение лица с базой данных распознанных лиц, признано косинусное сходство [6]. В случае сравнения «один к одному» (задача верификации), когда лицо с камеры сравнивается с этим же лицом в базе данных, наилучшей метрикой считается евклидово расстояние [7]. Поскольку при биометрической аутентификации присутствуют оба типа сравнения, в этой статье мы предлагаем метод, в основе которого определение сходства выполняется согласно последовательному вычислению двух метрик – косинусного сходства и евклидова расстояния. Использование обеих метрик приводит к алгоритму, который улучшает способность к установлению сходства. Возможность выбора более подходящего показателя сходства для конкретного лица позволяет получить более точные и значимые результаты. Отобранная для проведения эксперимента библиотека DeepFace основывается на анализе геометрических и структурных особенностей лица – форме глаз, носа и губ. Отличительная особенность библиотеки – идентификация в реальном времени, позволяя выполнять сопоставление лица с камеры и изображений лиц из базы данных за короткий период. DeepFace включает в себя несколько современных моделей глубокого обучения для обработки лиц: VGG-Face, Google FaceNet, OpenFace, Facebook DeepFace, DeepID, ArcFace и Dlib. Их

точность – 97,53% при выполнении задач по распознаванию лиц, а точность сопоставления определяется в каждом конкретном случае. В настоящей работе эксперимент выполнен двумя моделями библиотеки – VGG-Face и ArcFace. Результат сопоставления каждого изображения лица соответствует результату выполнения модели с более подходящей метрикой сходства. На основе предложенного метода разработано и протестировано пользовательское приложение, позволяющее оценить его эффективность. Показано, что последовательное использование различных метрик сходства улучшает биометрическую аутентификацию системы. Графический интерфейс приложения выполнен средствами Python - библиотеки Tkinter, чтобы пользователь мог его использовать без серверной платформы.

**3. Предлагаемая биометрическая система** состоит из этапа регистрации и этапа распознавания. На этапе регистрации биометрическая информация пользователей (например, фотографии всех сотрудников организации) записывается в базу данных. Это однократный процесс. Как правило, на этом этапе измерение соответствующей информации производится очень точно. Распознавание – вторая фаза системы, начинается с обнаружения лица по данным камеры. Этап должен быть быстрым, точным и позволять легко определить проблему аутентификации. Представленная на рисунке 1, архитектура биометрической системы состоит из трёх блоков.

Камера – это первый блок, интерфейс между системой и реальным миром, она сканирует человеческое лицо, содержащее все важные данные для биометрии. Для эффективной работы камера должна иметь хорошие характеристики – разрешение, частота кадров видеопотока, **фокусное расстояние и ширину объектива**. Основная задача – сделать передаваемое изображение максимально четким. Чем выше качество видеопотока, тем точнее будет результат идентификации.

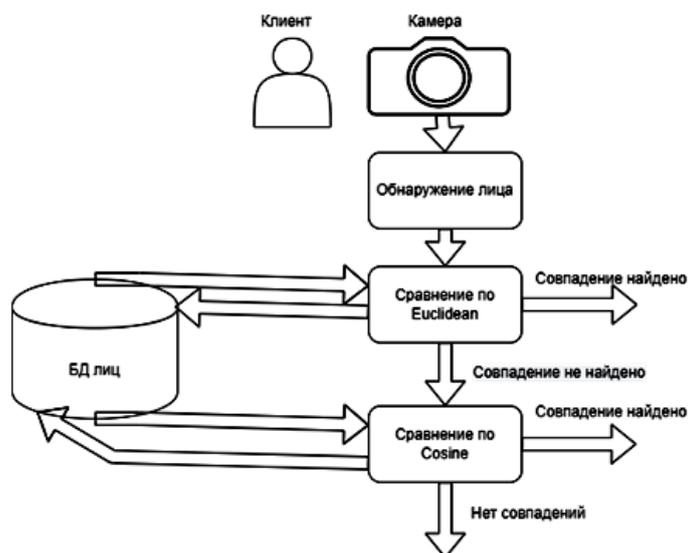


Рис.1. Архитектура биометрической системы

Обнаружение лица – второй блок, который выполняет обнаружение лица на полученном с камеры изображении. Его функция – выделить лицо для дальнейшего анализа. Он использует для этого каскадный классификатор Хаара [8] из библиотеки OpenCV.

Извлечение признаков и сравнение лиц – третий и самый важный компонент биометрической системы. Здесь необходимо извлечь векторную информацию (признаки) лиц из базы данных и признаки лица, обнаруженного с камеры, чтобы выполнить их сравнение. Нахождение признаков выполняется средствами библиотеки DeepFace, сравнение лиц проведено на основе последовательного вычисления двух метрик.

В разрабатываемом приложении идентифицируется изображение лица в неограниченных условиях с неизбежными помехами, такими как освещение, выражение, поза, что затрудняет определение сходства. Чтобы повысить устойчивость к вмешательству внешней среды, увеличить точность и скорость обработки наборов данных, отобранная для определения сходства модель DeepFace сравнивает лица с помощью двух идентичных сверточных нейронных подсетей (СНС), образующих так называемую сиамскую сеть [9]. Архитектура сиамской сети для сравнения лиц в предлагаемой системе представлена на рисунке 2. Образующие ее СНС разделяют между собой веса (share weights) и каждая подсеть создает векторы внедрения своих, соответствующих лицу, входных данных. При этом каждая преобразует эти данные – изображение лица – в некое многомерное векторное пространство – 3D модель лица. Затем результаты обеих подсетей – многомерные вектора  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  сравниваются с использованием двух метрик сходства – евклидова и косинусного. Таким образом, расстояние (distance) между двумя многомерными векторами определяют сходство (несходство) между лицами.

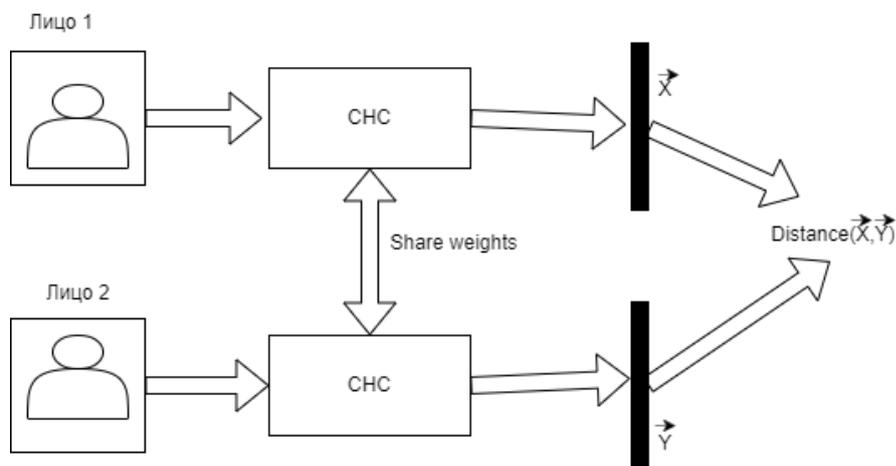


Рис.2. Сиамская сетевая архитектура

Итак, в n-мерном пространстве сиамская сеть формирует два вектора  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ , соответствующие сравниваемым лицам. Необходимо оценить расстояние между ними. Формула для Евклидова расстояния:

$$euclidean = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\vec{x}_i - \vec{y}_i)^2}$$

Косинусное сходство рассчитывается по формуле:

$$euclidean = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\vec{x}_i - \vec{y}_i)^2} \quad cosine = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{x}_i \vec{y}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \vec{x}_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \vec{y}_i^2}}$$

Расстояние косинусного сходства может принимать значения от -1 до 1, где 1 указывает на полное сходство, а -1 указывает на полное несходство лиц.

**4. Программное обеспечение** разработанной биометрической системы состоит из трех модулей:

- Подключение видеокамеры
- Вызов и настройка модели
- Обращение к библиотекам и вывод результатов

Листинг 1. Подключение видеокамеры

```
1. cap = cv2.VideoCapture(1) // подключение видеокамеры телефона
2. while True: // начало цикла
3. ret, frame = cap.read() // получение изображения с видеокамеры
4. cv2.imshow('камера', frame) // вывод изображения на экран
5. if cv2.waitKey(1) & 0xFF == ord('q'): // ожидание отклика пользователя
6. break
7. cap.release() // завершение подключения камеры
8. cv2.destroyAllWindows() // закрытие окон настройки камеры
```

Листинг 2. Вызов и настройка модели

```
1. models = ['VGG-Face', 'ArcFace'] // модели для поиска похожих лиц
2. metrics = ['cosine', 'euclidean'] // метрики для сравнения лиц
3. def recognichen_cosine(): // поиск похожих лиц в БД
4. def recognichen_euclidean(): // если нет, то поиск по второй метрике
```

Листинг 3. Обращение к библиотекам и вывод результатов

```
1. recognition = DeepFace.find(img_path, db_path="foto", model_name =
models, distance_metric = metrics // библиотека DeepFace
2. root = tk.Tk() // библиотека Tkinter
3. tk.Button() // распознать при нажатии на кнопку
4. cv2.imwrite(image) // вывод распознанного лица
5. tk.Label(result) // вывод результатов сравнения
```

**5. Результаты эксперимента.** В базе данных хранятся изображения множества разных лиц, при этом одно и то же лицо может быть представлено несколькими фотографиями (рисунок 3):



Рис.3. Фотографии одного лица из базы данных

При изображении лица с камеры в фас, в базе данных найдено сходство с тремя фотографиями этого лица. Результат обнаружения и идентификации приведен на рисунке 4а. Если прикрыть одну часть лица (рисунок 4б), то программа не находит человека в базе данных (Not in DB).

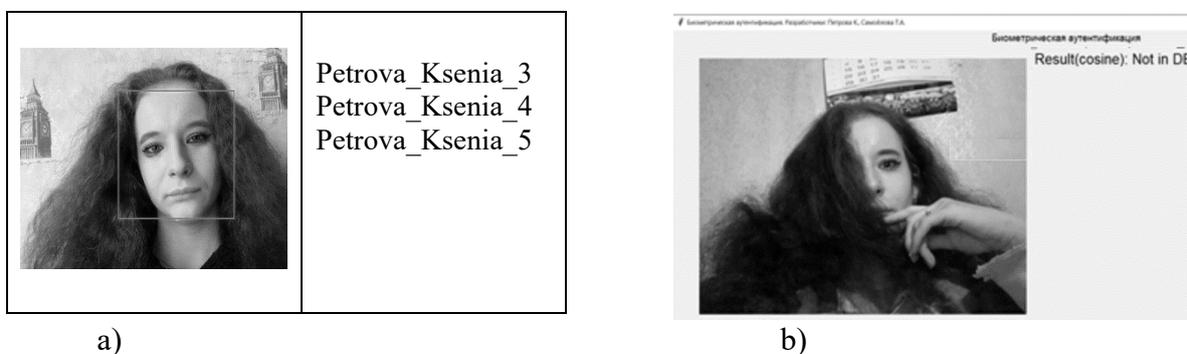


Рис.4. Обнаружение и идентификация лица

В таблице 1 приведены результаты работы биометрической системы с указанием значений выбранной метрики сходства. Указано, по какой более подходящей метрике идентифицируются разные изображения, соответствующие лицу с камеры. Идентификация производилась по моделям VGG-Face и ArcFace, к которым последовательно применялись метрики cosine и euclidean.

Оба эксперимента, результаты которых представлены в таблице 1, показывают, что обнаружение лица клиента в разных ракурсах происходит по-разному. В первом случае система нашла три фотографии, совпадающие с базой данных. Во втором – при изменении положения и позы клиента произошло совпадение лишь с одной фотографией из базы данных. Кроме того, на работу системы влияет освещенность в помещении, положение лица человека, эмоции, качество изображения веб - камеры и открытость лица. Проанализировав результаты аналогичных экспериментов с другими клиентами, следует заметить, что при последовательном вычислении двух метрик сходства, результат идентификации возрастает в разы.

Таблица 1

Результаты выбора метрики сходства

	Identity	VGG-Face		ArcFace	
		cosine	euclidean	cosine	euclidean
	Petrova_Ksenia_5		1.564398	0.354317	
	Petrova_Ksenia_4	0.275579			3.371218
	Petrova_Ksenia_3	0.396422		0.049232	
	Petrova_Ksenia_3		1.924673		3.572937

В дальнейшем эксперимент был проведен на 14 участниках, а база их изображений с камеры содержала 10 снимков каждого, на которых они изменяли позы, прически, ракурс камеры. На рисунке 5 приведено соотношение распознанных изображений лиц с общим количеством снимков каждого участника.

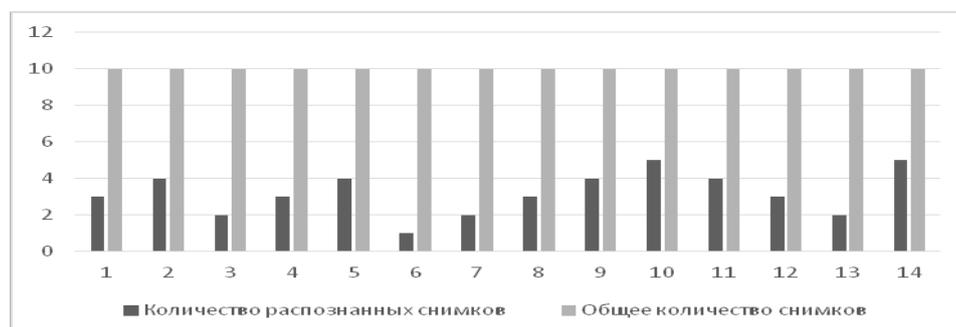


Рис. 5. Количество распознанных снимков

На рисунке 6 представлено сравнение результатов работы системы с двумя моделями библиотеки DeepFace: VGG-Face и ArcFace. Данные на графиках показывают долю распознавания участников эксперимента этими моделями.

Проанализировав график, можно заметить, что модель ArcFace лучше идентифицирует лица.

**6. Возможные применения.** Биометрическую аутентификацию лиц можно использовать для доступа к различным секретным объектам, поиску преступников, контролю на транспортных узлах и общественных мероприятиях, для доступа в учебные заведения, тем самым препятствуя проникновению посторонних лиц.

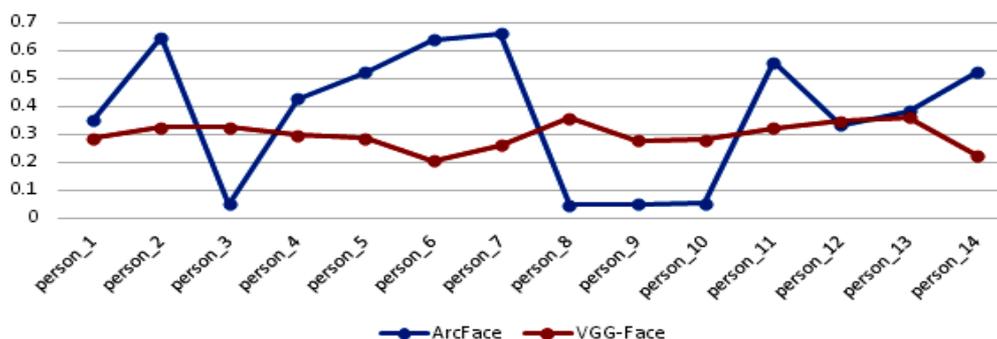


Рис.6. Сравнение ArcFace и VGG-Face

**7. Заключение.** На основе анализа предметной области были получены следующие результаты:

- Выбраны модели распознавания лиц, в наибольшей степени соответствующие поставленной задаче.
- Разработано программное обеспечение, связывающее изображение, полученное с видеокамеры с выбранными библиотеками программ и БД лиц.
- Проведен эксперимент, показавший эффективность разработанной системы.

### Литература

1. Югай Л. Ю. Биометрическая идентификация личности по изображению лица человека: опыт Республики Узбекистан. – 2023.
2. Зинин, А. М. Идентификация человека по признакам внешности и методы биометрии / А. М. Зинин // Вестник Университета имени О.Е. Кутафина (МГЮА). – 2022. – № 2(90). – С. 58-66.
3. Городничев, Д. Ю. Машинное обучение и глубокое обучение / Д. Ю. Городничев // Современные проблемы лингвистики и методики преподавания русского языка в ВУЗе и школе. – 2022. – № 38. – С. 278-281.
4. Формирование векторов признаков для систем видеонаблюдения / Д. В. Васильева, С. С. Дворников, Ю. Е. Толстуха [и др.] // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения. – 2023. – № 4. – С. 62-68.
5. Бериков В. Б. Ансамблевые метрики сходства в задачах машинного обучения // Марчуковские научные чтения. – 2022. – Т. 1. – С. 9.
6. Мутаиров Ш. И., Бушмелева К. И. АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СХОДСТВА ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ СОЦИАЛЬНОСТИ СЕТИ //Инновационные, информационные и коммуникационные технологии. – 2022. – С. 112-116.
7. Морозова Р. А. ПОДХОДЫ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ МЕТОДОВ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА //Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук. – 2022. – С. 210-215.
8. Мигас З. И. Распознавание объектов в видеопотоке с применением библиотеки OpenCV //79-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета. – 2022. – С. 360-363..
9. Сиденко, Н. Е. Поиск оптимальной модели предварительно обученной нейронной сети для решения задачи идентификации лиц / Н. Е. Сиденко // StudNet. – 2022. – Т. 5, № 4.

**K.A. Petrova, T.A. Samoilo**  
Smolensk State University

## **BIOMETRIC FACE AUTHENTICATION SYSTEM BASED ON DEEPFACE**

**Keywords:** *biometric authentication, face matching, similarity metrics, DeepFace, VGG-Face, ArcFace, Tkinter.*

**Abstract.** *The paper is devoted to solving the problem of low face-based biometric authentication reliability. The first type of error is when the system fails to pass a legitimate user; the second is when the system makes a mistake and mistakes one person for another. These matching errors occur due to differences in lighting, pose, facial expression and age. In this paper, we propose a method based on which the determination of similarity between a face from a camera and face images from a database is performed, by sequentially computing two metrics, - cosine similarity and Euclidean distance. By selecting the most appropriate similarity metric for a particular face, we obtain more accurate and meaningful results. The DeepFace library selected for the experiment allows authentication by different models. Based on the proposed method, a custom application is developed and tested, which shows the effectiveness of the proposed method.*

**Н.А. Прохоренков, Т.А. Самойлова**  
Смоленский государственный университет

УДК 656.025

## **РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕПИ ПОСТАВОК СРЕДСТВАМИ PuPL**

**Ключевые слова:** *оптимизация цепи поставок, математическая модель, целочисленное линейное программирование, PuPL.*

*Оптимизация цепи поставок – это процесс настройки цепи поставок производства для работы с максимальной производительностью за счет оптимального использования ресурсов и минимизации затрат на поставку. Целью данного исследования является выбор и разработка эффективной модели оптимизации, средствами которой можно выполнять обработку данных в динамических средах, где данные можно постоянно добавлять, удалять или обновлять. Для создания математической модели задачи взят*

*метод целочисленного линейного программирования. Для решения задачи импортозамещения авторы провели анализ свободно распространяемых программных пакетов. Результатом стал выбор пакета PuPL, средствами которого разработана программа оптимизации цепочек поставок в условиях изменяющейся среды. В результате эксперимента получены общие минимальные затраты на удовлетворение потребительского спроса. Исследование будет способствовать разработке новых методов и стратегий для решения задач оптимизации цепей поставок.*

**1. Введение.** В статье рассмотрена задача выбора метода оптимизации с учетом следующих характеристик реализуемой сети цепи поставок:

- Сеть цепи поставок состоит из нескольких предприятий, расположенных в разных регионах.
- Потребители продукции также расположены в разных регионах, а доставка продукции выполняется автотранспортными средствами.
- Оптимизация маршрута проводится с учетом затрат на хранение, времени выполнения поставки, ограничений на выбросы углерода.

В силу возможных изменений предприятий, потребителей, средств доставки, цен на транспортировку, а также сроков, в течении которых должна доставляться продукция, задача оптимизации цепи поставок становится динамической. Возникает необходимость частого перерасчета цепи с целью ее оптимизации в новых условиях. Известно [1], что такая задача NP-трудная, в том случае, когда требуется целочисленное решение. Поэтому разработка математической модели оптимизации цепи поставок и ее эффективной программной реализации в каждом конкретном случае – актуальная задача. Алгоритмы решения этой задачи можно разделить на три основные категории: машинное обучение, эвристика и оптимизация. Машинному обучению нужны качественные обучающие данные, процесс обучения модели зависит от достоверной и своевременной информации. Это обязательно вызовет проблемы при создании модели. Цель оптимизации и эвристики одна и та же – предоставить наилучшее возможное решение конкретной проблемы цепи поставок – но их результаты различаются. Основное преимущество эвристического подхода заключается в скорости решения, недостаток – низкое качество, что и становится решающим фактором в принятии решений об алгоритме модели, делая оптимизацию наилучшим выбором. При этом для создания математической модели, как правило, используется метод линейного программирования, в котором целевая функция и ограничения задаются линейными зависимостями. В задаче оптимизации цепей поставок – целевая функция – это достижение минимальных затрат на поставку.

Трудность этой задачи состоит в том, что в нашем случае требуется целочисленное решение. Существуют различные методы реализации моделей линейного программирования. К ним относят Excel [2], специализированные программные средства [3] и свободно распространяемые библиотеки программ, из которых нам хорошо известны PuPL и Google OR-Tools для Python [4]. В силу проблем, связанных с импортозамещением, авторы провели анализ свободно распространяемых программных пакетов Python. В качестве факторов рассматривалось наличие хорошей документации, удобство использования и отзывы программистов–разработчиков, на основе анализа был выбран пакет PuPL, включающий в себя несколько решателей (классов), предназначенных для решения математических задач. С помощью набора решателей можно поэтапно реализовать алгоритм целочисленного линейного программирования методом ветвей и границ [5], позволяющим уменьшить вычислительную сложность задачи оптимизации. В статье приведено описание метода разработки эффективной программы оптимизации цепи поставок, которая будет работать в динамической среде, где данные можно постоянно добавлять, удалять или обновлять.

## **2. Построение математической модели**

**2.1. Определение проблемы.** В настоящем исследовании предлагается выбрать такую цепочку поставок, где будут учтены недавнее увеличение стоимости доставки и прогнозы будущего спроса. Решая данную проблему, должно быть найдено оптимальное расположение производственных мощностей для удовлетворения спроса клиентов и снижения производственных затрат. Каждое производственное подразделение может иметь предприятия малой и большой мощности. Предполагается что для  $n$  населенных пунктов  $L = \{L_1, L_2, L_3, \dots, L_n\}$ , должно быть предложено  $n$  вариаций расположения производственных мощностей. Важно заметить, что расположение предприятия большой или малой мощности в населенном пункте не исключает расположение предприятия противоположного вида в том же районе. Также, в результате работы должна быть получена цепочка поставок с предполагаемыми поставками в регионы в соответствии с нуждами и ограничениями каждого из них. На рисунке 1 показано схематическое изображение рассматриваемой цепи поставок.

Другие предположения заключаются в следующем:

- Уровень выбросов топливных отходов не может превышать заданных значений.
  - Поставки должны прибывать в срок и в полном объеме.
- Программа должны учитывать переменные и постоянные затраты, а также стоимость хранения продукции.

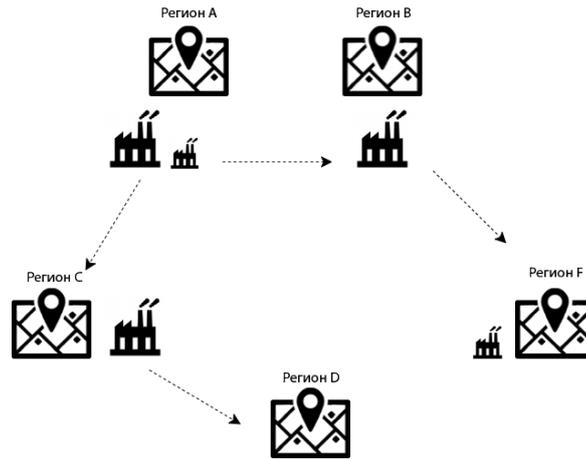


Рис. 1. Схема цепи поставок

**2.2. Математическая модель.** Рассматривается математическая оптимизационная модель производственно-логистической системы цепи поставок. Задача состоит в минимизации издержек в зависимости от размещения предприятий. Данная задача формулируется как задача целочисленного линейного программирования. В качестве целевой функции рассматриваются суммарные затраты на производственную деятельность.

Набор индексов, используемых в модели:

$l$  – населённый пункт для размещения предприятия,

$p$  – вид предприятия {high, low}.

Переменные используемые в модели:

$X$  – количество единиц продукции поставляемые для каждого пункта  $l$ ,  $X \geq 0$ .

$Y$  – набор видов предприятия  $p$  для каждого пункта  $l$ .

$Z$  – статус доставки для каждого пункта  $l$ .

$Dem$  – требуемое количество товара для каждого пункта  $l$ .

$Cap$  – производительность для предприятия  $p$ .

$CarD$  – норма выбросов при транспортировке.

$CE$  – значения выбросов при транспортировке.

$DT$  – время доставки.

$DDL$  – предельное время доставки.

$TC$  – общая стоимость (транспортные расходы + переменная стоимость).

$TF$  – итоговая стоимость фиксированных издержек (постоянные затраты + затраты на хранение).

Для решения задачи необходимо ввести ограничения, накладываемые на целевую функцию:

1. Объем поставок должен соответствовать спросу на ранке:

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l X_{ij} == \sum_{i=0}^l Dem_i$$

2. Объем поставок не должен превышать максимальную производительность:

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l X_{ij} \leq \sum_{i=0}^l Cap_i$$

3. Уровень выбросов топливных отходов не может превышать установленных значений:

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l CE_{ij} \leq \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l CarD_{ij}$$

4. Поставки ожидаются в срок и в полном объеме:

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l DT_{ij} * Z_{ij} \leq \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l DDL_{ij}$$

Целевая функция, представляет собой минимизацию издержек компании:

$$Z = \sum_{s=0}^p \sum_{i=0}^l TF_{is} * Y_{is} + \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l TC_{ij} * X_{ij} \rightarrow \min$$

Данная модель позволяет определить оптимальные значения переменных функции, при которых достигаются минимальные издержки компании, учитывая такие факторы, как производительность, уровень выброса топливных отходов, объем и срок поставок.

**3. Исходные данные.** Данные, используемые для вычисления оптимальных значений, представляют собой таблицы Excel, загруженные при помощи Python – библиотеки Pandalas. Такая организация исходных данных позволяет менять их содержание, размерность строк и столбцов без изменения кода модели. Содержание таблиц Excel в проводимом эксперименте:

Максимальная мощность для предприятий		
Регион	Низкая	Высокая
A	500	1000
...		
F	500	1000

Выбросы CO2 при транспортировке					
	A	B	C	D	F
A	0	84,0620948	299,317166	125,522063	181,069151
...					
F	181,069151	149,307907	127,726291	191,409089	0

Время выполнения заказа на поставку					
	A	B	C	D	F
A	3	21	65	29	41
...					
F	41	34	30	43	3

Крайний срок поставки					
	A	B	C	D	F
A	30	30	30	30	30
...					
F	30	30	30	30	30

Требуемый объем поставок	
Регион	Объем
A	2 800 000
...	
F	160 000

Постоянные затраты		
Регион	Низкая	Высокая
A	6500	9500
...		
F	2110	6160

Стоимость перевозки					
	A	B	C	D	F
A	0	12250	1100	16100	8778
...					
F	13650	15400	24500	29400	0

Стоимость хранения		
Регион	Низкая	Высокая
A	43,3333333	63,3333333
...		
F	14,0666667	41,0666667

Переменные затраты					
	A	B	C	D	F
A	12	12	12	12	12
...					
F	5	5	5	5	5

**4. Программное обеспечение для реализации модели.** Модель оптимизации для решения поставленной задачи реализована посредством Python – программного пакета PuLP [6], предоставляющего среду для создания и инициализации самой математической модели, и позволяющего подключать сторонние open source – пакеты для решения оптимизационных задач. Разработанная модель инициализирована классом *LpProblem*, ставящего перед собой цель минимизации описанных функций и ограничений. Для вычисления значений функций и ограничений использован класс *LpSum*.

Листинг 1. Создание модели

```
model = LpProblem("The model of the location of factories", LpMinimize)
```

Листинг 2. Задание целевой функции

```
model += (lpSum([total_fixed.loc[i, s] * y[(i, s)] * 1000 for s in size for i in loc]) +
lpSum([total_costs.loc[i, j] * x[(i, j)] for i in loc for j in loc]))
```

Листинг 3. Ограничения функции

```
for j in loc: model += lpSum([x[(i, j)] for i in loc]) == demand.loc[j, 'Demand']
for i in loc:
    model += lpSum([x[(i, j)] for j in loc]) <= lpSum([cap.loc[i, s] * y[(i, s)] * 1000
    for s in size])
for j in loc:
    model += lpSum([carb_emissions.loc[i, j] * x[(i, j)] for i in loc]) <=
    [5000000000, 5000000000, 5000000000, 5000000000, 5000000000]
model += lpSum([delivery_times.loc[i, j] * z[(i, j)] for i in loc for j in loc]) <=
(del_deadline.loc[i, j] for i in loc for j in loc)
```

**5. Результаты эксперимента.** Задача была решена на конкретных исходных данных представленных в разделе 3. В результате решения, издержки, с заданными ограничениями, составили **109,556,533** условных единиц в месяц. Наиболее выгодное расположение производственных мощностей малой и большой мощности:

Location	Low	High
A	1	1
B	0	0
C	1	1
D	1	0
F	1	1

Объемы поставок для экспорта и потребления на собственных рынках:

Location	A	B	C	D	F	Sum
A	1300000	0	200000	0	0	1500000
B	0	0	0	0	0	0
C	0	0	1500000	0	0	1500000
D	250000	0	0	145000	0	395000
F	1250000	90000	0	0	160000	1500000

В последней графе Sum представлен суммарный выпуск продукции в каждом пункте (A, B, C, D, F).

Итог работы системы демонстрирует оптимальное расположение производственных мощностей и объемы поставок, которые могут быть использованы специалистами в области производственной и транспортной логистики.

**6. Заключение.** В результате решения поставленной задачи были получены следующие результаты:

- Проведен анализ предметной области, в результате которого показано, что отсутствуют эффективные решения поставленной задачи.
- Разработана математическая модель задачи оптимизации цепей поставок на основе метода целочисленного линейного программирования.
- Средствами PuPL разработано программное обеспечение реализующее решение поставленной задачи.
- Проведено экспериментальное исследование предложенной модели, показавшее ее эффективность.

### Литература

1. Roughgarden, T. Algorithms Illuminated Part 4: Algorithms for NP-Hard Problems / T. Roughgarden. – 2020 : Soundlikeyourself Publishing, LLC, 2020. – ISBN 9780999282960.
2. Барышев А. В., Федотова Е. Л. К вопросу использования надстройки Excel «поиск решения» в задачах линейного программирования //Вестник евразийской науки. – 2015. – Т. 7. – №. 3 (28). – С. 88.
3. Алексеев Е. Р. и др. Решение задач оптимизации и линейного программирования с помощью современных программных средств //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2002. – Т. 25. – №. 2. – С. 231-233.
4. Линейное программирование.  
[https://ru.wikipedia.org/wiki/Линейное\\_программирование](https://ru.wikipedia.org/wiki/Линейное_программирование)
5. Горчаков АЮ, Посыпкин МА. Сравнение вариантов многопоточной реализации метода ветвей и границ для многоядерных систем. Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018;14(1):138-48.
6. Optimization with PuLP- PuLP 2.8 documentation. <https://coin-or.github.io/pulp/>

**N.A. Prokhorenkov, T.A. Samoilova**  
Smolensk State University

### DEVELOPMENT OF A SUPPLY CHAIN OPTIMIZATION PROGRAM USING PULP

**Keywords:** *supply chain optimization, mathematical model, integer linear programming, PuPL.*

**Abstract.** *Supply chain optimization is the process of setting up a manufacturing supply chain to operate at maximum productivity by*

*optimizing the use of resources and minimizing supply costs. The goal of this study is to select and develop an effective optimization model that can perform data processing in dynamic environments where data can be constantly added, deleted, or updated. To create a mathematical model of the problem, the integer linear programming method was used. To solve the problem of import substitution, the authors analyzed freely distributed software packages. The result was the selection of the PuPL package, which was used to develop a program for optimizing supply chains in a changing environment. As a result of the experiment, the total minimum costs for satisfying consumer demand were obtained. The research will contribute to the development of new methods and strategies to solve supply chain optimization problems.*

**М.В. Слюсарь**

*Московский институт электронной техники*

УДК 517.968

## **ИНТЕГРАЦИИ ДАННЫХ В ПРОЦЕССАХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ВОЗМОЖНОСТЬ ИХ МОДИФИКАЦИИ**

Ключевые слова: *интеграция данных, Apache Spark, Mapreduce, пошаговая обработка, микропакетная обработка*

*В статье рассмотрены два широко применяемых метода обработки больших данных на основе технологий Apache, выделены основные преимущества каждого, описаны слабые стороны и сделан вывод о тенденции развития новых методов, нацеленной на преодоление недостатков методов, проанализировано возможное решение задачи благодаря изменению алгоритма обработки и включению процедуры предварительной подготовки данных, оценены достоинства и недостатки подобной модификации.*

**1. Введение.** Запросы в среде распределенных вычислений, по своей сути, являются прямыми наследниками запросов реляционных баз данных. Однако стоит учитывать, что распределенные вычисления обладают специфическими особенностями, требующими особого внимания и создающими поле для новых действий.

Так, задача агрегации данных имеет приоритетное значение ввиду того, что составляет базу распределенных вычислений в своей массе. Вместе с ростом объемов передаваемой и обрабатываемой информации,

растет одновременно и объем информации, которую берут на себя вычислительные узлы систем. Передвижение таких потоков данных требует выделения все больших объемов памяти, промежуточного использования физической памяти, распределяются неоднородно между нодами и имеют неоднородное разделение по классам, что ведет к замедлению обработки, либо полному ее торможению и предполагает поиск возможностей оптимизации этого процесса.

В данной статье с аналитической точки зрения освещаются основные принципы обработки информации в среде распределенных вычислений на примерах открытых архитектур компании Apache – Spark и Hadoop (MapReduce и MapReduce Next, YARN) и обсуждаются перспективы возможных стратегий для сокращения времени обработки и агрегации информации. Рассмотрены имеющиеся недостатки обеих архитектур, их достоинства и специфику использования каждой. Рассмотрен теоретически метод предварительной обработки данных на этапе, предворяющем основные вычисления.

## **2. Анализ эффективности технологии Apache Hadoop.**

Технология Apache Hadoop представляет собой модель от компании Google, применяемую для работы с большими данными и одновременно фреймворк для решения распределенных задач на узлах кластера. Модель “map-reduce” предполагает разбиение одного массива на отдельные подмассивы для параллельной обработки данных на узлах, а затем обратный синтез данных. Таким образом, обработка информации фактически вынесена за рамки работы оперативной памяти,

Исполнение на узлах в Apache Hadoop происходит автоматически на всех стадиях – разделение массива информации, распределение между нодами, перемещение между ними, что достаточно удобно при использовании, поскольку не нужно дополнительно обрабатывать массив данных.

Также к плюсам технологии можно отнести ее универсальность в применении в качестве счетчика, индекатора, для вычислений объемов и создания указателей, поисковой системы, сортировщика и кластеризатора, машинного переводчика и многих других и универсальную адаптированность под различные информационные среды. Технология очень популярна в среде программирования, позволяет производить разработку приложений для работы с большими объемами информации, предполагающих дальнейшее увеличение.

Само название MapReduce предполагает, что модель содержит две основные фазы – карта и уменьшение. На этапе построения карты данные преобразуются путем разбиения на пары по признаку ключевых значений, а на этапе уменьшения выходные данные этапа построения карты становятся входными данными и проходят процедуру уменьшения до более емкого набора. Необязательные компонентом

выступает сумматор, выполняющий промежуточные суммирования значений.

Так, этап картопостроения подразумевает фильтрацию и отбор данных для дальнейшего группирования. Процесс уменьшения производит сортировку данных по заданным ключам для консолидации по значениям. На рисунке 1 можно наглядно увидеть процесс работы технологии без сумматора и с сумматором.

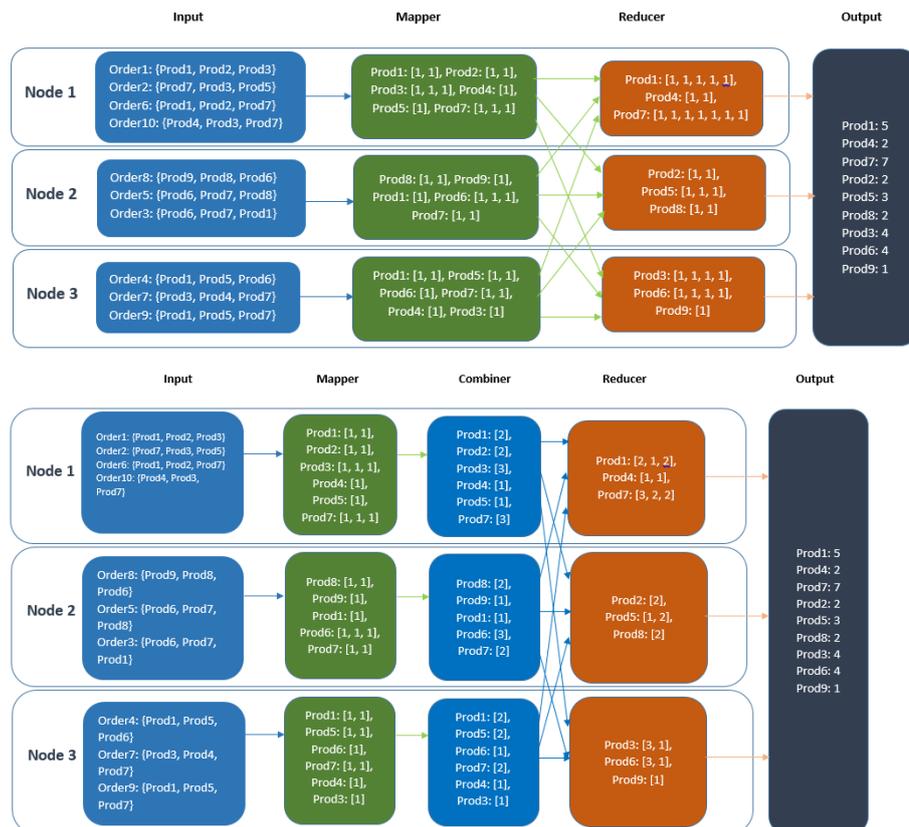


Рис.1, 2. Работа MapReduce без сумматора и с сумматором.

Технология отличается высокой надежностью, однако одним из очевидных недостатков ее является возможное снижение скорости вычислений при слишком больших объемах данных либо необходимость использовать значительные объемы как оперативной, так и внутренней памяти в процессе вычислений.

В последующих воплощениях (MapReduce 2, NEXT, YARN) модель претерпела существенные изменения, получив несколько промежуточных и управляющих блоков обработки. Что позволило более гибко распределять данные в процессе вычисления и организовать их перемещение между узлами, однако это не существенно не отразилось на скорости обработки. Схемы работы классической модели и моделей следующего поколения представлены на рисунках 3,4 и 5.

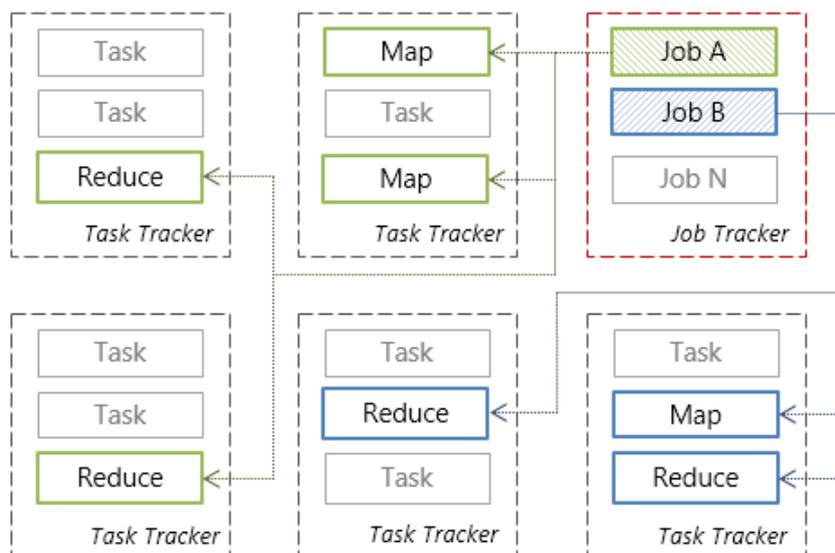


Рис.3. Классическая схема MapReduce

**3. Анализ архитектуры Spark Apache Spark.** Apache Spark по сути является продолжением и наследником технологии MapReduce и создан для того, чтобы ключевые ограничения предыдущей архитектуры, но сохранить ее достоинства. Обработка данных в Spark происходит на уровне оперативной памяти с применением микропакетной обработки.

Во время обработки копируются в оперативную память и возвращаются в хранилище только после завершения задачи, таким образом времени на запись и чтение требуется гораздо меньше, также, Spark повторно использует полученные данные для многочисленных операций.

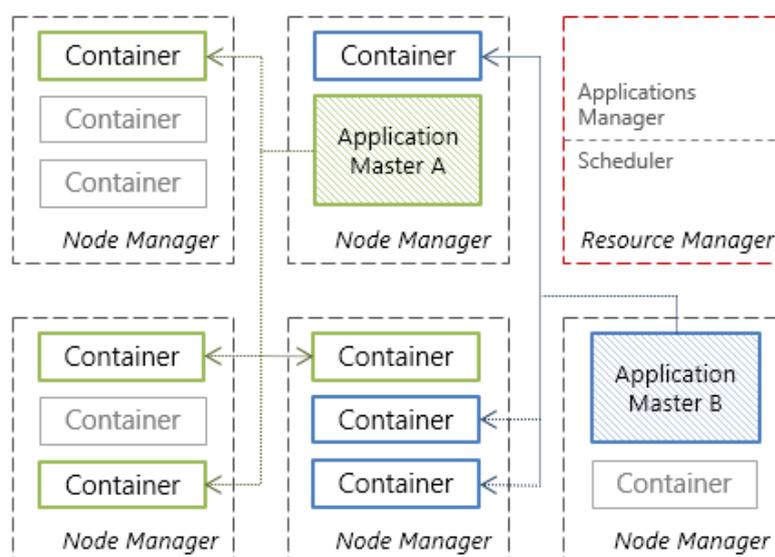


Рис.4. Взаимодействие отдельных компонент Hadoop MapReduce в классическом варианте архитектуры

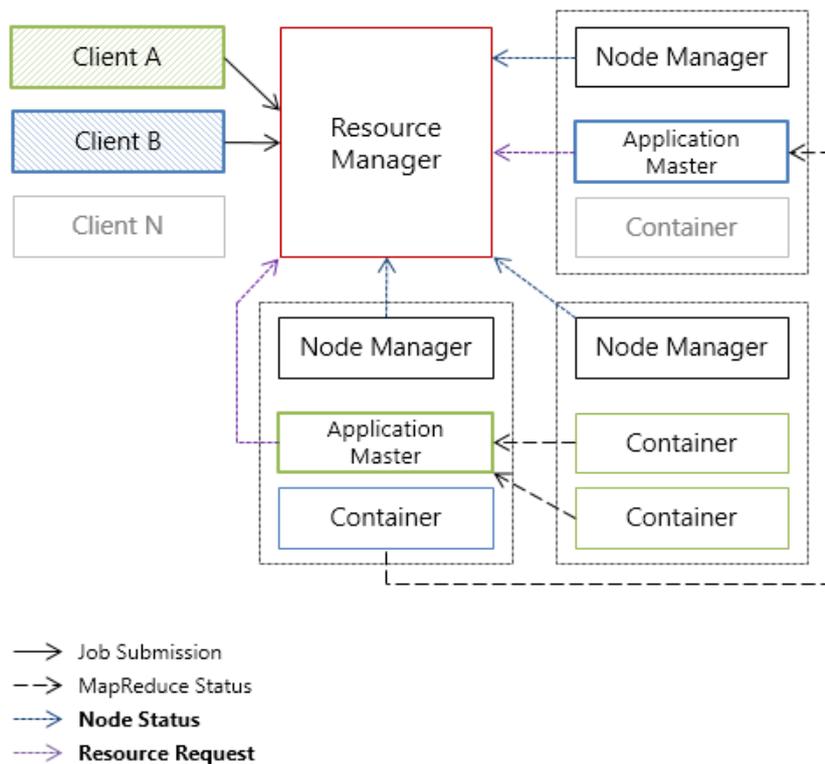


Рис.5 YARN-подобной архитектура

В основе архитектуры лежат две абстракции: ациклический граф и устойчивый распределенный набор данных. В графе в качестве каждой вершины выступает устойчивый набор данных

(RDD), а ребрами являются функции преобразования. При этом данные на вычислительных узлах могут быть не объединены общим классом или меткой, в отличие от Hadoop. Благодаря RDD Apache Spark запоминает, как извлекает определенную информацию из хранилища, и может восстановить данные в случае сбоя основного хранилища.

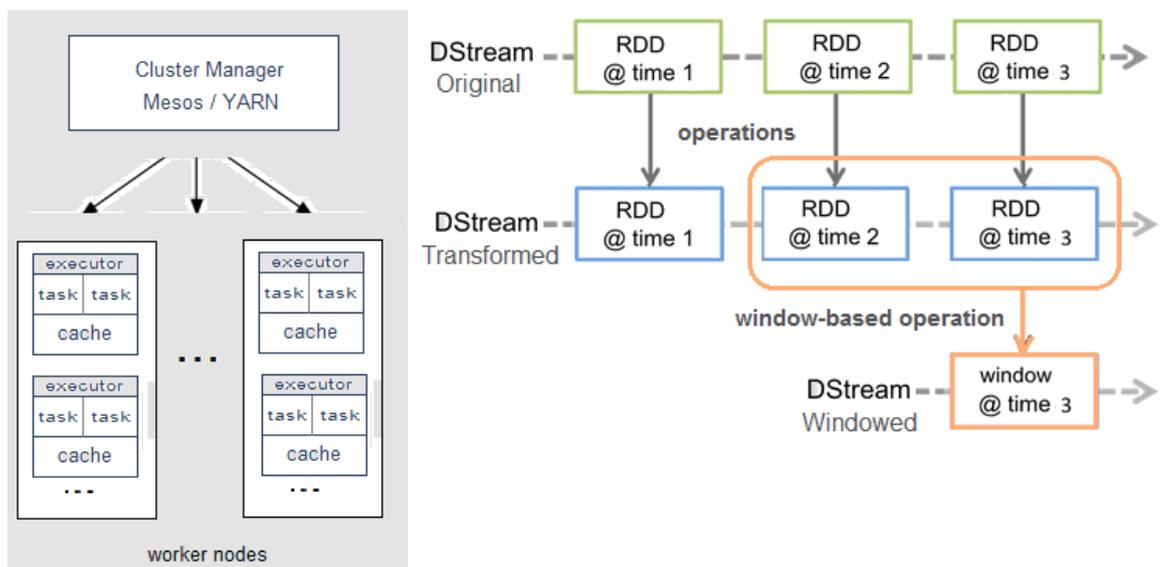


Рис.5. Схема работы Apache Spark

Задачи пользователей распределяются с помощью драйвера, преобразовываясь в наборы. Такой драйвер инициализируется при запуске очередной сессии и сохраняет активность до ее окончания. При этом задействуется определенная часть оперативной памяти, размер которой можно варьировать по желанию. Задач при разбиении может создаваться до нескольких тысяч, при этом драйвер сам отслеживает их передачу на исполнение.

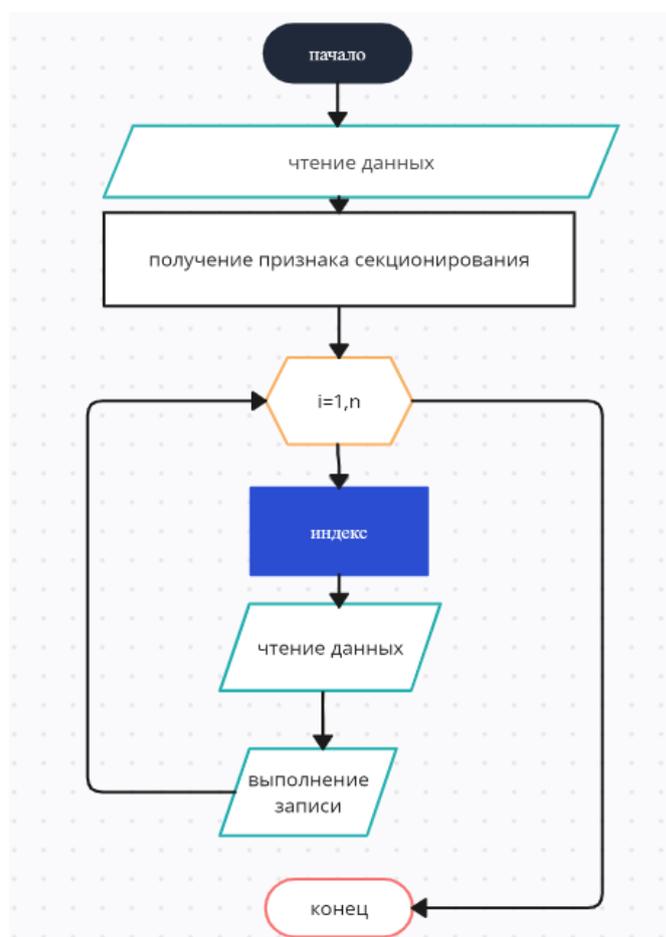


Рис.7 Предварительная реорганизация первичных данных.

В качестве исполнителей выступают рабочие процессы. Аналогично драйверу, их запуск также инициализируется при запуске приложения и активная сессия длится до завершения работы приложения, а для работы выделяется условленный размер оперативной памяти (как правило и в случае с исполнителями и в случае с драйверами это 1Гб). Исполнители имеют индивидуальный набор ядер, что влияет на производительность каждого исполнителя, однако не должно создавать дополнительной нагрузки на процессор.

Основные операции в Apache Spark

- преобразования (transformations) –вычисления, которые выполняются после запроса и при вызове какого-либо действия. При

этом создается план запроса, но сами данные все еще находятся в хранилище и ожидают обработки.

- действия (actions) – функции, запрашивающие вывод. При этом не только создается план запроса, но и оптимизируется оптимизатор Catalyst, а также физический план компилируется в граф распределенной коллекции данных (RDD), который делится на этапы (stages) и задачи (tasks), выполняемые в кластере. Оптимизированный план запроса генерирует высокоэффективный Java-код, который работает с внутренним представлением данных в формате Tungsten.

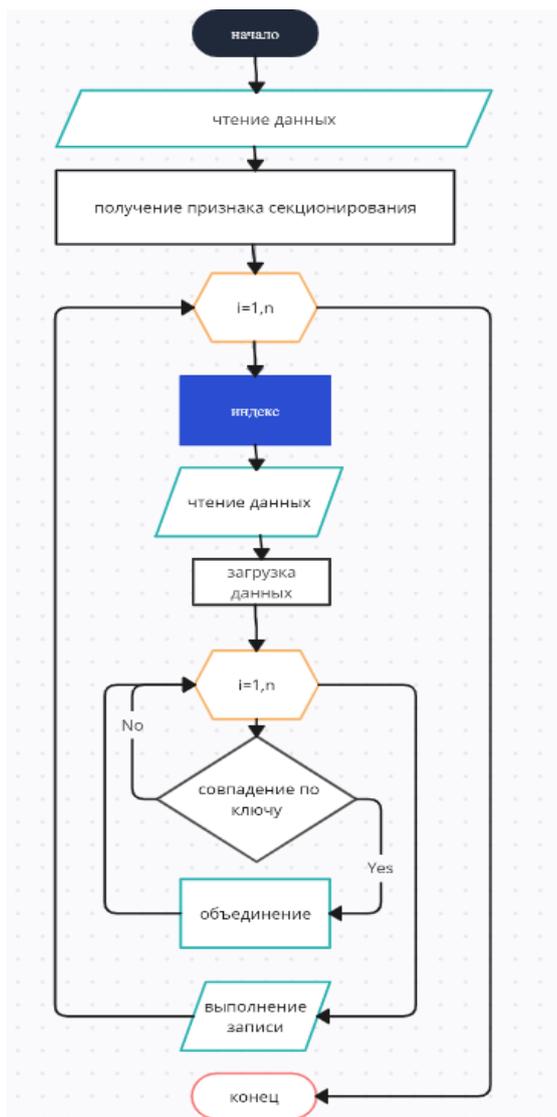


Рис.8 Логическое секционирование данных без физического движения.

Наиболее часто применяемые процессы консолидации данных подразумевают использование значительных объемов оперативной памяти вычислительного узла в процессе перемещения и производства вычислений над данными. В частности, процессы перемещения данных вызваны многочисленными процедурами сопоставления.

#### **4. Предполагаемые методы оптимизации shuffle-операций.**

Основная область для проведения оптимизации выбрана в пространстве операций перемещения данных, их перетасовки в процессе вычислений внутри кластера, поскольку это самая значительная по ресурсным требованиям область работы распределенной системы.

Оптимизировать этот процесс возможно, если предварительно подготовить вводимые данные таким образом, чтобы сократить количество внутренних сортировок в момент вычисления. Это возможно сделать, предварительно перемешав сегментированные данные и создав объединенные сегменты, а результат занеся в таблицы, к которым можно обратиться для чтения. При этом в один сегмент попадают строки таблицы, у которых совпадает значение хэш-функции, вычисленное по определенной колонке.

Также возможно предварительно перераспределить изначальный набор данных построчно считывая и производя запись в файлы, обеспечив синхронный доступ к данным. При этом изначальные файлы не изменяются, а записи в другие файлы происходят по заранее определенному признаку агрегации. Данные при этом не перераспределяются физически. Далее производится процесс секционирования по заданным признакам, также исключая перераспределение данных внутри кластера. В итоге для каждой секции можно выполнять одновременное чтение и загрузку данных изначального набора для их агрегации и получения результата (рис.1, рис.2).

Spark работает с языками Python и R, что обеспечивает ему значительную доступность в среде программирования, поэтому реализацию подобной модели предлагается выполнять на языке Python.

**5. Заключение.** Задача ускорения и оптимизации методов обработки больших данных является актуальной, так как объемы обрабатываемой информации несут тенденцию к увеличению в нарастающем темпе. Технологии Apache являются наиболее доступными и показывают высокую эффективность при обработке данных. Проблемной задачей технологий Apache является оптимизация процесса перераспределения данных в процессе вычисления между внутри кластеров. Новые подходы со стороны компании Apache позволяют частично оптимизировать временные затраты при перемещении данных, особенно, с учетом грамотного применения вычислительных технологий к процедурам обработки данных, однако применение предложенного алгоритма предварительной обработки данных позволит сократить внутрисистемное время обработки данных. Дальнейшая разработка метода возможно в направлении его модификации для различных типов данных и поиска новых алгоритмов сортировки.

## Литература

1. Yoshimi M., Oge Y., Yoshinaga T. Pipelined parallel join and its FPGA-based acceleration. Proc. of the ACM Transactions on Reconfigurable Technology and Systems, 2007, vol. 10, iss. 4, no. 28, pp 1–28. doi:10. 1145/3079759
2. Биллиг, В. А. Параллельные вычисления и многопоточное программирование : учебное пособие / В. А. Биллиг. — 2-е изд. — Москва : ИНТУИТ, 2016. — 310 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/100361> (дата обращения: 06.03.2024).
3. Гвен Шапира. Apache Kafka. Поточковая обработка и анализ данных. 2-е изд. — (Серия «Бестселлеры O'Reilly»). - Санкт-Петербург : Питер, 2023. - 512 с. - ISBN 978-5-4461-2288-2. - URL: <https://www.ibooks.ru/bookshelf/390221/reading> (дата обращения: 06.03.2024).
4. Карау Х. Изучаем Spark: молниеносный анализ данных. / Х. Карау, Э. Конвински, П. Венделл, М. Захария. - Москва : ДМК Пресс, 2015. - 304 с. - ISBN 978-5-97060-323-9. - URL: <https://www.ibooks.ru/bookshelf/355264/reading> (дата обращения: 06.03.2024).
5. Качин К. Введение в надежное и безопасное распределенное программирование / пер. с англ. А. Н. Киселёва. — 2-е изд., эл. / К. Качин, Р. Гуерру, Л. Родригес. - Москва : ДМК Пресс, 2023. - 513 с. - ISBN 978-5-89818-626-5. - URL: <https://www.ibooks.ru/bookshelf/392324/reading> (дата обращения: 06.03.2024).
6. Мартин Р. M29 Чистая архитектура. Искусство разработки программного обеспечения. — СПб.: Питер, 2018. — 352 с.
7. Ульман Дж. Д. Анализ больших наборов данных / пер. с англ. А. А. Слинкина. — 2-е изд., эл. / Ю. Лесковец, А. Раджараман. - Москва : ДМК Пресс, 2023. - 500 с. - ISBN 978-5-89818-304-2. - URL: <https://www.ibooks.ru/bookshelf/392004/reading> (дата обращения: 06.03.2024). -

**M.V. Slyusar**

National Research University of Electronic Technology

## DATA INTEGRATION IN DISTRIBUTED COMPUTING PROCESSES AND POSSIBILITIES FOR THEIR MODIFICATION

**Keywords:** *data integration, Apache Spark, MapReduce, incremental processing, micro-batch processing.*

**Abstract:** *The article examines two widely used methods for processing big data based on Apache technology, highlights the main advantages of each, describes the weaknesses and draws conclusions about the approach of new methods aimed at developing methods for eliminating shortcomings, analyzes possible solution problems by defining a processing algorithm and including procedures for preliminary data preparation, estimated advantages and disadvantages of appropriate modification.*

Е.А. Федюнина, Ю.С. Шевнина

НИУ «МИЭТ»

АО «НИИ «Субмикрон»

УДК 51-74

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИОРИТЕТНОСТИ ВЫПУСКА ДОКУМЕНТАЦИИ ПО ПРОЕКТАМ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕСУРСОВ**

Ключевые слова: *многокритериальная теория полезности, выпуск документов, теорема МАУТ*

*В данной работе рассматривается многокритериальная теория полезности (МАУТ), применяющаяся для решения задачи выпуска первичной документации по проектам в условиях ограниченности ресурсов. Определяются три основных критерия, а также выделяются весовые коэффициенты ЛПР по каждому из них. Строятся функции полезности для решения задачи поиска эквивалента определенности. Производится поиск наилучшей альтернативы среди предложенных путем расчета значений с помощью основной теоремы МАУТ.*

Многокритериальная теория полезности (далее – МАУТ) представляет собой инструмент принятия решений, который позволяет структурировать сложные задачи и выбирать оптимальные (по критериям: сумма затрат на разработку первичной документации, время разработки первичного документа и количество сотрудников, задействованных в разработке документации) варианты в условиях многофакторности и неопределенности, заключающейся в возможной необходимости выпуска дополнительных документов по проектам. При ее применении для разработки и выпуска документов на спецпродукцию выделяются ключевые критерии, определяющие успешное выполнение процесса, такие как сумма затрат, время разработки и количество специалистов, задействованных в конкретном проекте.

Процесс оценки начинается с построения иерархии критериев, где выделяются основные цели и подцели на каждом уровне иерархии с тем, чтобы отразить их важность для успешного завершения проекта. Затем приводятся попарные сравнения критериев для определения относительной важности каждого из них. Эти сравнения отображаются на выбранной шкале оценки, что позволяет определить иерархию значимости каждого критерия в рамках всей задачи определения приоритетности разработки и выпуска документации по проектам в условиях ограниченности ресурсов. После этого оцениваются

альтернативы (возможные варианты решения задачи) с учетом каждого критерия, что позволяет выявить их эффективность в рамках поставленных целей [1]. В конечном итоге, производится агрегация оценок по критериям для каждой альтернативы.

Эти расчеты помогают определить наилучшую альтернативу с учетом критериев, выявленных ранее, что является основой для принятия обоснованных решений в процессе разработки документации на специальную продукцию.

Многокритериальная теория полезности состоит из пяти последовательных этапов.

Этап 1. Выявление списка критериев.

Этап 2. Построение ФП в количестве, равном количеству выявленных критериев (для каждого из критериев строится своя ФП).

Этап 3. Анализ условий, которые смогут определить общую ФП.

Этап 4. Построение многокритериальной ФП.

Этап 5. Оценка выявленных альтернатив и выбор наилучшей из них.

Основная теорема МАУТ выглядит следующим образом:

$$U(C) = \sum_{i=1}^N W_i U_i(C_i) \text{ при } \sum_{i=1}^N W_i = 1 \quad (1)$$

$$1 + kU(C) = \prod_{i=1}^N [1 + k k_i U_i(C_i)] \text{ при } 1 + k = \prod_{i=1}^N [1 + k k_i] \quad (2)$$

где  $U, U_i$  – ФП,  $U(C) \in [0;1]$ ;  $U(C_i) \in [0;1]$ ;  $w_i$  – весовой коэффициент, отражающий важность каждого критерия, при этом  $w_i \in (0;1)$ ;  $k$  – весовой коэффициент, определяющий влияние критериев в совокупности на итоговую полезность альтернативы, при этом  $k > -1$  [2].

По имеющимся значениям коэффициентов  $w_i$ ,  $k$  и ФП  $U_i(x)$ , возможно определить многокритериальную ФП.

Рассмотрим применение МАУТ на базе решения задачи определения приоритетности выпуска первичной документации по проектам в условиях большого количества проектов и ограниченности ресурсов.

Пусть даны следующие значения критериев (выбранные значения в задаче являются абстрактными и приведены для наглядности представления использования метода МАУТ на практике), представленные в таблице 1.

Таблица 1

Граничные значения для параметра  $C_i$  по всем проектам

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
$C_1$ – сумма затрат на разработку первичной документации (в т. ч. заработные платы сотрудников)	400 у.е.	200 у.е.
$C_2$ – время разработки первичных документов	180 мин.	90 мин.
$C_3$ – количество сотрудников, задействованных в разработке	10	5

По полученным данным построена ФП для критерия  $C_1$  «Сумма затрат на разработку первичной документации» (Рис. 1).

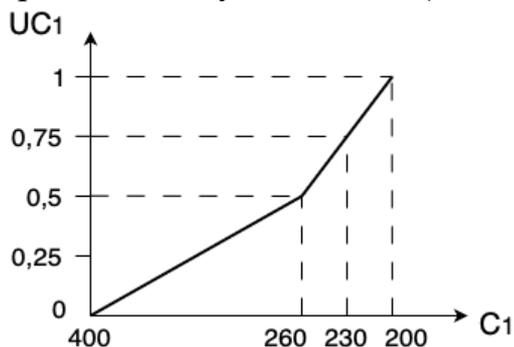


Рис.1. ФП для критерия  $C_1$

По такому же принципу для оставшихся критериев «Время разработки первичного документа» (рисунок 2) и «Количество сотрудников, задействованных в разработке первичного документа по проектам» (рисунок 3) построены ФП.

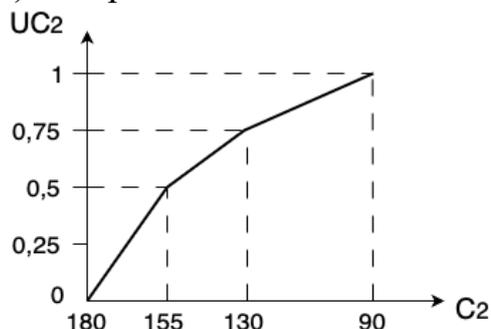


Рис.2. ФП для критерия  $C_2$

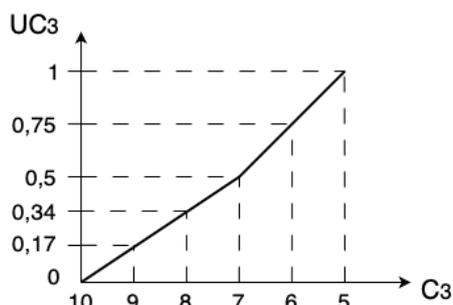


Рис. 3. ФП для критерия  $C_3$

Выбраны значения ФП  $U(200 \text{ у.е.}) = 1$  и  $U(400 \text{ у.е.}) = 0$ . Для решения задачи определения промежуточных точек используются стандартные лотереи (см. рисунок 4). В первой из построенных лотерей ЛПР ищет эквивалент определенности для лотереи, где вероятности равны, т.е. показатель  $p=0,5$  с  $\min$  и  $\max$  показателями затрат на разработку и выпуск первичной документации. ЛПР указывает больше или меньше должно быть значение, относительно заданного. Это значение является эквивалентом определенности. Например, ЛПР определило, что значение 260 у.е. соответствует  $U=0,5$ .

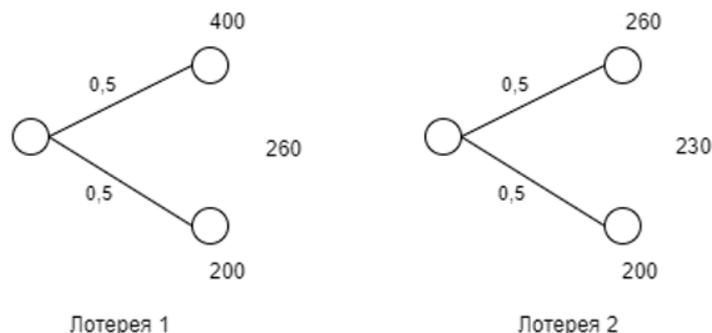


Рис.4. Типовые лотереи при построении ФП по одному виду

Аналогичным образом получены оставшиеся значения функции полезности.

Следующий шаг – нахождение эквивалента определенности, который ищется сначала при всех лучших оценках по оставшимся двум критериям, а затем по их наихудшим значениям. В случае их совпадения наблюдается ситуация независимости по полезности (рисунок 5).

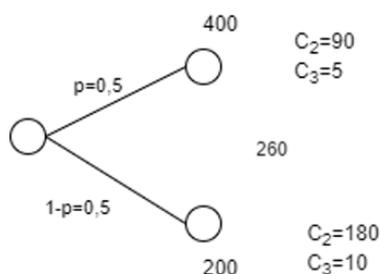


Рис. 5. Типовая лотерея 1

Решение задачи определения предпочтения между альтернативами минимального показателя второго критерия и максимального первого и наоборот сводится к анализу ЛПР приоритетности выпуска документации по проектам в условиях ограниченности ресурсов. Т. е. необходимо произвести сравнительный анализ альтернатив  $[(C_2) \min; (C_1) \max] = (90, 400 \text{ у.е.})$  и  $[(C_2) \max; (C_1) \min] = (180, 200 \text{ у.е.})$ . Пусть это будут две точки А и В на осях абсциссы и ординаты соответственно при условии  $C_3=5$  человек. В случае, когда ЛПР выбирает вариант А, то критерий скорости разработки для ЛПР имеет более высокую значимость. В случае, когда выбран вариант В, отмечается перевес важности критерия стоимости относительно скорости разработки документа.

ЛРП необходимо определить равную важность выбранного варианта и варианта К. Пусть выбранным вариантом будет вариант А. Точкой равной важности будет точка  $C_1^*$  (рисунок 6). Так, ЛПР ищет такую стоимость разработки  $C_1^*$ , при которой варианты  $(180, 200 \text{ у.е.})$  и  $(90, C_1^*)$  будут в равной степени предпочтительны. Эта точка на графике называется точкой безразличия. Затем, таким же образом ищется точка

безразличия, когда  $C_3=10$  человек. В случае получения одинаковых результатов, критерии  $C_1$  и  $C_2$  считаются независимыми по своей значимости от критерия  $C_3$ .

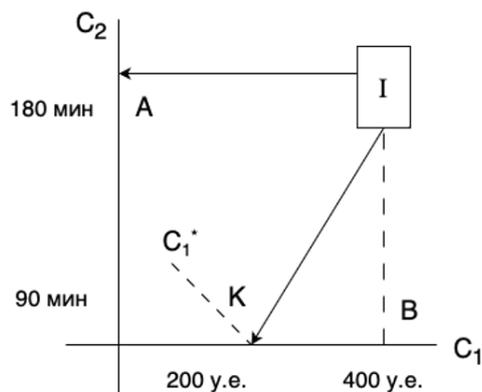


Рис. 6. Проверка условия независимости по предпочтению

В начале процесса принятия решения ЛПР предлагается представить ситуацию, когда значения по критериям – наилучшие (при поиске эквивалента определенности). Позже, наоборот, постановка задачи диаметрально противоположна: необходимо учитывать наихудшие значения по прочим критериям (см. рисунок 7). Если результаты поиска эквивалента определенности в обоих случаях совпадают, делается заключение, что данный критерий не зависит от остальных критериев с точки зрения их важности для принятия решения.

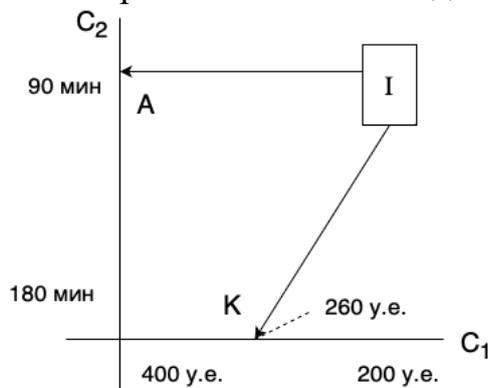


Рис. 7. Определение отношения между весами критерия  $C_1$  и  $C_2$

Пусть имеются четыре альтернативы со следующими оценками:

A (400 у.е.; 130; 6)

B (230 у.е.; 90; 7)

C (260 у.е.; 180; 8)

D (200 у.е.; 155; 9)

Весовые коэффициенты для критериев:  $W_1=0,5$ ;  $W_2=0,35$ ;  $W_3=0,15$ , определены ЛПР на основе имеющегося опыта.

$U(A) = 0,5*0 + 0,35*0,5 + 0,15*0,75 = 0,2875$

$U(B) = 0,5*0,75 + 0,35*1 + 0,15*0,5 = 0,8$

$U(C) = 0,5*0,5 + 0,35*0 + 0,15*0,34 = 0,301$

$$U(D) = 0,5*0+0,35*0,25+0,15*0,17=0,613$$

Исходя из проделанных расчетов, альтернатива В – наилучшая.

MAUT позволяет придать каждому критерию соответствующий вес, отражающий их относительную значимость в контексте принятия решения. С последующей оценкой альтернатив на основе каждого критерия и их агрегацией с учетом весов, метод MAUT помогает выявить наилучшее решение, учитывая множество факторов и предпочтений [3].

Таким образом, использованный метод MAUT применен для определения очередности разработки документации по проектам в условиях ограниченности ресурсов, что позволило систематизировать процесс принятия решений, обеспечивая обоснованный выбор оптимальной альтернативы с учетом всех существенных критериев, что способствует эффективному управлению и принятию решений в рамках разработки документации на специальную продукцию.

### Литература

1. Малышев В.В., Пиявский Б.С., Пиявский С.А. Метод принятия решений в условиях многообразия способов учета неопределенности. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010, № 1, с. 46–61
2. Панов Д.В., Малышев В.В., Пиявский С.А., Ковков Д.В. Сравнительный многокритериальный анализ сложных технических и социальных систем в экономико-управленческом аспекте. // МИР (Модернизация. Инновации. Развитие). 2016, Т. 7, № 2. с. 74–83. doi:10.18184/2079-4665.2016.7.2.74.83
3. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений / П. Фишберн – М: Наука, 1978 г. - 352 с.

**E.A. Fedyunina, Yu.S. Shevnina**

National Research University "MIET" JSC "Research Institute "Submicron"

### **USING MULTI - ATTRIBUTE UTILITY THEORY (MAUT) TO SOLVEING THE PROBLEM OF PRIORITIZING THE RELEASE OF PRIMARY PROJECT DOCUMENTATION IN CONDITIONS OF LIMITED RESOURCES**

**Keywords:** *multi-attribute utility theory, document release, MAUT theorem.*

**Abstract.** *In this article, the multi- attribute utility theory (MAUT) is considered, which is used to solve the problem of issuing primary project documentation in conditions of limited resources. Three main criteria are defined, and the decision-maker weight coefficients for each of them are highlighted. Utility functions are constructed to solve the problem of finding the equivalent of certainty. A search is made for the best alternative among the proposed ones by calculating the values using the main theorem of MAUT*

## **РАЗРАБОТКА ПРЕДИКТИВНОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ СОВОКУПНОСТИ БИНАРНЫХ ДЕРЕВЬЕВ**

Ключевые слова: *предиктивная модель, бинарное дерево, аппроксимация, медиана, обработка данных.*

*В работе приводится описание разработки предиктивной модели раннего выявления потенциальных неисправностей исполнительных механизмов и оборудования в микроэлектронике. Рассмотрены предиктивные модели с одним бинарным деревом, несколькими деревьями с последующим усреднением результатов и последовательным прогнозом с учетом предыдущей ошибки. Представлены результаты работы предиктивных моделей на экспериментальных данных на примере предсказания положения устройства подачи и поворота элемента при выполнении операции герметизации в технологическом процессе микроэлектроники.*

**1. Введение.** В современном мире в условиях всеобщей цифровизации, возрастающих требований к эффективности производственных процессов, постоянной конкуренции все большую важность приобретают задачи прогнозирования поведения объектов и процессов в различных условиях, обработки экспериментальных и теоретических данных, увеличения скорости и точности обработки больших данных [1]. Одним из способов решения данных задач является предиктивное моделирование, основанное на построении, управлении и расчете моделей с применением методов аппроксимации.

Разработка предиктивных моделей в настоящее время имеет огромную актуальность и охватывает множество областей и отраслей. Кроме того, предиктивные модели прогнозируют будущие события на основе имеющихся данных, что позволяет выявлять потенциальные риски или проблемы на ранних этапах. Предоставляемая таким образом аналитическая поддержка на основе данных и фактов повышает обоснованность и эффективность принимаемых решений. Наиболее распространенными типами предиктивных моделей являются:

- Линейная регрессия, логистическая регрессия. К достоинствам которых можно отнести простоту и интерпретируемость, точное прогнозирование количественных параметров. Основным недостатком принято считать обработку только линейно зависимых переменных.

- Деревья принятия решений. Позволяют определять сложные взаимосвязи в данных, не требуют предварительной обработки данных. При этом обладают существенным недостатком, выражающемся в нестабильности к изменениям входных данных.

- Случайный лес. Среди достоинств данного типа предиктивных моделей выделяют устойчивость к переобучению, способность работать с большими объемами данных и высокой размерностью. Но при этом модель является ресурсоемкой и низко интерпретируемой.

- Метод опорных векторов достаточно эффективен в пространствах большой размерности и при работе с раздельными классами. Однако, относится к моделям с низкой интерпретируемостью и требует дополнительной обработки входных данных.

Как следует из описания, каждая из моделей имеет свои достоинства и недостатки. Выбор конкретной модели зависит от целей прогнозирования, доступных данных, времени и ресурсов.

**2. Предиктивная модель для раннего предотвращения отказов исполнительных механизмов и оборудования.** Для решения задачи раннего выявления потенциальных неисправностей исполнительных механизмов и оборудования используются предиктивные модели на основе дерева принятия решений. Структура дерева иерархична и состоит из правил вида «если .., то ...», узлами дерева являются признаки неисправностей и значения целевой функции, а ребра определяют истинность или ложность выполнения признака. Другими словами, дерево признаков потенциальных неисправностей исполнительных механизмов и оборудования представляет собой бинарное дерево, в котором на каждом этапе проверки происходит выбор на основании выполнения исследуемого признака, при этом входные данные разбиваются на две группы. Условием принятия решения является  $H < X$ , где  $H$  - значение целевой функции в случае выполнения признака неисправности,  $X$  - входные данные.

Для построения описанного выше бинарного дерева необходимо группировать входные данные на интервалы, определять среднее значение каждого интервала и осуществлять сравнение со значением целевой функции. При обучении нейронной сети, строящей дерево, использовались функции минимизации ошибок:

$$\begin{aligned}MSE &= \sum (y_{pred} - y_{true})^2, \\MAE &= \sum |y_{pred} - y_{true}|, \\Acc &= \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}\end{aligned}\tag{1}$$

С учетом основного недостатка дерева принятия решения, а именно нестабильности работы при изменяющихся входных данных,

целесообразно использовать данную предиктивную модель для одного вида исполнительных механизмов и оборудования, работающих в схожих условиях.

В качестве эксперимента построено дерево для устройства подачи и поворота элемента при выполнении операции герметизации в технологическом процессе микроэлектроники. Устройство поворачивает захваченный элемент по закону синуса. Разработанная предиктивная модель на основе бинарного дерева позволяет предсказывать следующее положение устройства (рис.1).

Для повышения точности полученной модели предлагается использовать несколько бинарных деревьев, обрабатывающих одни и те же данные. Далее происходит усреднение полученных результатов. Для построения нескольких бинарных деревьев для раннего выявления признаков неисправностей используется алгоритм:

1. Входные данные делятся на  $n$  частей по  $m$  элементов,  $n$  – число бинарных деревьев.

2. Далее на вход нейронной сети подается  $i$ -я часть для построения  $i$ -го дерева.

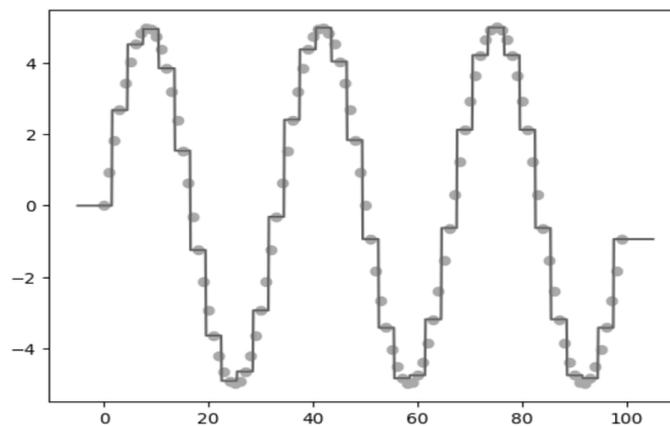


Рис.1. Определение положения устройства с использованием предиктивной модели с одним бинарным деревом

Разработанная предиктивная модель на основе нескольких бинарных деревьев использовалась для предсказания положения устройства подачи и поворота элемента при выполнении операции герметизации в технологическом процессе микроэлектроники (рис. 2). Как видно из графика, усреднение значений приводит к сглаживанию результатов и увеличению точности предсказания.

В случае нескольких бинарных деревьев возможно строить прогноз не только на усредненных данных от каждого дерева, но с учетом ошибки предыдущего прогноза. Для этого предиктивная модель строится на основе последовательной работы деревьев. Тогда работа первого бинарного дерева определяется формулой:

$$err_1 = Y_{true} - y_{pred1} \quad (2)$$

i-е дерево описывается формулой

$$err_i = Y_{true} - y_{predi} = Y_{true} - y_{pred1} - y_{pred2} - \dots - y_{predi} \quad (3)$$

Итоговая формула:

$$y_{pred} = \sum_{i=1}^n y_i \quad (4)$$

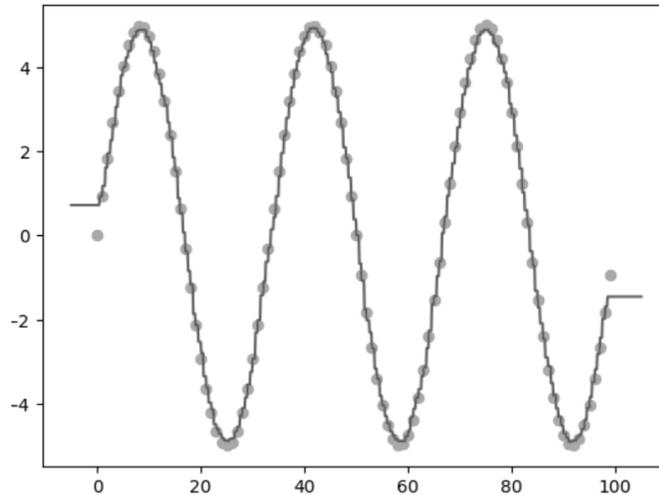


Рис.2. Определение положения устройства с использованием предиктивной модели с несколькими бинарными деревьями

Использование такой предиктивной модели на основе последовательности бинарных деревьев позволяет получить еще более гладкий график прогноза.

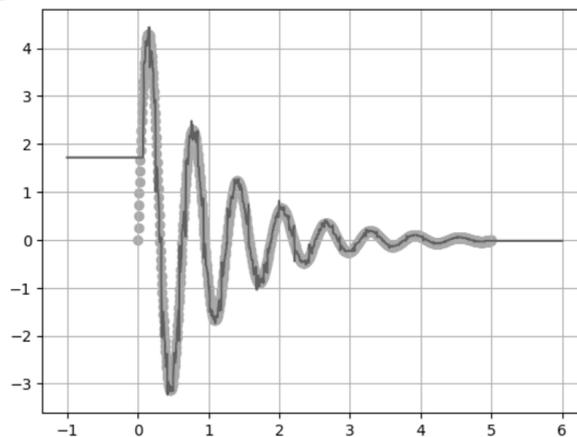


Рис.3. Предиктивная модель на основе последовательности бинарных деревьев

Результаты экспериментов наглядно показывают, что предиктивные модели, построенные на совокупности бинарных деревьев, позволяют делать более точные прогнозы. Однако использование множества деревьев усложняет модель и делает ее требовательной к вычислительным ресурсам.

**3. Заключение.** Использование предиктивных моделей на основе совокупности бинарных деревьев для раннего выявления признаков

неисправностей исполнительных механизмов и оборудования в микроэлектронике позволяет получать точные прогнозы, что в свою очередь приводит к повышению устойчивости технологических процессов и производств. При этом следует определять требуемое число бинарных деревьев в зависимости от цели прогноза, данных и ресурсов.

### Литература

1. Шевнина Ю.С., Гагарина Л.Г., Конюхов Е.В., Харитонов А.Д. Метод кластерного анализа гетерогенных данных с использованием положений нечеткой логики // Известия вузов. Электроника. 2023. № 4. С. 445-452.

**P.M. Hvostik**

National Research University "MIET"

## DEVELOPMENT OF A PREDICTIVE MODEL BASED ON A COLLECTION OF BINARY TREES

**Keywords:** *predictive model, binary tree, approximation, median, data processing.*

**Abstract.** *The paper describes the development of a predictive model for the early detection of potential malfunctions of actuators and equipment in microelectronics. Predictive models with one binary tree, several trees with subsequent averaging of results and sequential forecast taking into account the previous error are considered. The results of the work of predictive models on experimental data are presented using the example of predicting the position of the feeder and element rotation when performing a sealing operation in the microelectronics technological process.*

**В. Ю. Ходченков**

Смоленский государственный университет

УДК 004.022:004.027

## ВЕКТОРНО-МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ – ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И ОБРАБОТКИ

Ключевые слова: *Векторная Модель, SIMD Регистры, Квантовые Вычисления, Эмуляция, Многомерные Матрицы.*

*В статье представлена разработка векторно-матричной модели вычислений, основанной на принципах квантовых вычислений и эмуляции квантовых процессов с использованием классических вычислительных*

*ресурсов. Модель интегрирует в себя принципы квантового параллелизма, используя SIMD регистры для эффективной обработки многомерных матриц и векторов, предоставляя новые возможности для решения сложных вычислительных задач.*

**Введение.** В современном мире, где границы вычислительных возможностей неустанно расширяются, поиск новых подходов к обработке данных и выполнению вычислений становится всё более актуален. Особенно это касается перехода от традиционных компьютерных систем к квантовым аналогам, обладающим потенциалом революционизировать область вычислений благодаря их уникальным свойствам, таким как квантовая суперпозиция и квантовая запутанность.

Развитие квантовых технологий стимулирует интерес к созданию эффективных алгоритмов, способных максимально использовать потенциал квантовых вычислений. Однако, несмотря на значительные достижения в этой области, практическая реализация квантовых компьютеров и их доступность для широкого круга исследователей остаются далекими целями. В этом контексте векторно-матричные модели вычислений, использующие SIMD (Single Instruction, Multiple Data) регистры, представляют собой перспективное направление. Эти модели позволяют эмулировать квантовые вычисления, используя доступные сегодня технологии, и предлагают новый взгляд на решение сложных вычислительных задач.

Алгебра векторов, принимаемых в диапазоне от 0 до 1, играет ключевую роль в решении множества задач, делая разработку вычислительной модели, основанной на этих принципах, весьма актуальной. Привлекательность такого подхода усиливается возможностью параллельной обработки данных, что является одной из основных характеристик квантовых вычислений. Использование SIMD регистров в качестве основы для построения такой модели обеспечивает не только экономию ресурсов и средств, но и повышение эффективности разработки и реализации квантовых систем в целом.

В данной статье мы рассмотрим принципы построения и обработки векторно-матричной модели вычислений, акцентируя внимание на возможностях и перспективах данного подхода. В частности, будет проанализирована методика эмуляции квантовых битов (кубитов) с использованием SIMD регистров, что позволит подробнее ознакомиться с техническими аспектами реализации и потенциальными применениями разрабатываемой модели.

**Обзор литературы.** Развитие векторно-матричных моделей вычислений и их применение в контексте квантовых вычислений занимает значительное место в современных научных исследованиях. Подходы, предложенные Ричардом Фейнманом в 1982 году, легли в

основу теоретической модели квантовых вычислений, демонстрируя возможность симуляции физических процессов с помощью квантовых компьютеров.

Исследователи, такие как Мунерман В. И. и Самойлова Т. А., продемонстрировали алгебраический подход к алгоритмизации задач маршрутизации, подчеркивая важность математического фундамента в разработке вычислительных систем. В работе Васильева А. В. рассматриваются квантовые вычисления с точки зрения программистов, предоставляя базовое понимание квантовой механики и алгоритмов, необходимых для реализации квантовых вычислений.

Значительный вклад в развитие квантовых технологий внес К.А. Валиев, исследуя теоретические основы квантовых компьютеров и их вычислительный потенциал, что способствовало пониманию принципов работы квантовых систем и их возможностей.

Работа Т. Г. Дрейпера посвящена реализации арифметических операций на квантовом компьютере, в частности, сложению, что является критически важным для выполнения более сложных вычислений и алгоритмов на квантовых системах.

Исследования Григорьевой Г.М., Ходченкова В.Ю., и Мунермана В.И. демонстрируют практическую реализацию алгоритмов сложения векторов на квантовом компьютере, подчеркивая важность эмуляции квантовых процессов для разработки и тестирования квантовых алгоритмов без необходимости использования реальных квантовых систем.

Эти исследования подчеркивают важность разработки новых методов и моделей в области квантовых вычислений и векторно-матричных моделей, а также необходимость дальнейших исследований для улучшения понимания и эффективности этих подходов. Наша работа стремится продолжить этот путь, предлагая векторно-матричную модель вычислений, которая интегрирует достижения предшествующих исследований и предлагает новые подходы к реализации и обработке квантовых и классических вычислений.

**Методология.** Разработка векторно-матричной модели вычислений представляет собой многоаспектный подход, объединяющий теоретические основы квантовых вычислений и практическую реализацию этих принципов на классических вычислительных системах. В основе методологии лежит использование SIMD (Single Instruction, Multiple Data) архитектуры для эмуляции квантовых операций, что позволяет достичь значительного ускорения обработки данных за счет параллельной обработки множества данных одной операцией.

Рассмотрим основные принципы:

**1. Эмуляция квантовых состояний и операций:** Использование SIMD регистров для представления квантовых битов (кубитов) и

выполнения над ними квантово-аналогичных операций, таких как суперпозиция и запутывание, адаптированных для классических вычислительных систем.

**2. Математическая Модель:** Разработка математической модели, описывающей взаимодействие и преобразование состояний в рамках эмулированной квантовой системы, включая алгебру многомерных матриц и векторов.

**3. Алгоритмическая Реализация:** Определение алгоритмов для реализации квантовых операций в контексте векторно-матричной модели, включая сложение, умножение и другие операции над многомерными матрицами и векторами.

#### **Методы реализации.**

- **Инициализация и Репрезентация Состояний:** Определение способов инициализации SIMD регистров для точного представления квантовых состояний в классической вычислительной системе.

- **Параллельная Обработка Данных:** Использование возможностей SIMD архитектуры для параллельной обработки данных, что позволяет значительно ускорить выполнение операций по сравнению с последовательной обработкой.

- **Измерение и Анализ Результатов:** Разработка методов измерения и анализа результатов выполнения квантовых операций, адаптированных под условия классических вычислительных систем.

Таким образом, методология создания векторно-матричной модели вычислений подчеркивает потенциал интеграции квантовых принципов в классические вычислительные системы с использованием современных технологий. Этот подход открывает новые перспективы для разработки высокоэффективных вычислительных систем и алгоритмов, способных решать сложные задачи с высокой производительностью и масштабируемостью.

**Реализация и результаты.** Разработка векторно-матричной модели вычислений базируется на интеграции квантовых вычислительных принципов в классические вычислительные системы с использованием SIMD регистров. Этот подход позволяет эмулировать квантовые операции, такие как суперпозиция и квантовое запутывание, обеспечивая при этом значительное ускорение вычислений благодаря параллельной обработке данных.

Основной результат работы заключается в успешной реализации операций сложения и умножения векторов и матриц, что демонстрирует возможность эффективного выполнения квантово-аналогичных операций на классических вычислительных платформах. Это достигается за счет использования специализированных алгоритмов, которые адаптированы для работы с SIMD регистрами и позволяют

максимально использовать их потенциал для параллельной обработки данных.

В ходе исследования было показано, что векторно-матричная модель вычислений способна обеспечить значительное увеличение скорости выполнения вычислительных операций по сравнению с традиционными методами. Это открыло новые возможности для обработки больших объемов данных и решения сложных вычислительных задач, которые ранее были недоступны из-за ограничений производительности.

Дальнейшие перспективы развития модели включают исследование возможностей для реализации более сложных квантовых алгоритмов, таких как алгоритмы поиска и факторизации, а также оптимизацию существующих алгоритмов для повышения их эффективности и производительности. Также представляет интерес разработка новых методов для улучшения точности эмуляции квантовых состояний и операций в классических вычислительных системах.

Результаты данной работы подтверждают, что векторно-матричная модель вычислений представляет собой мощный инструмент для развития вычислительной техники и может стать основой для создания нового поколения вычислительных систем, способных эффективно решать задачи, недоступные для современных компьютеров.

**Заключение.** Разработка векторно-матричной модели вычислений, основанная на применении SIMD регистров, демонстрирует значительный потенциал для решения ряда сложных вычислительных задач. Эта модель, вдохновленная принципами квантовых вычислений, позволяет осуществлять операции над многомерными матрицами с высокой степенью эффективности и параллелизма. Применение квантовых принципов в конструкции данной модели не только обосновано с теоретической точки зрения, но и целесообразно с практической, учитывая текущее состояние и перспективы развития квантовых и классических вычислительных систем.

Данная работа продемонстрировала, что использование базисных состояний кубита и эмуляция квантовых операций с помощью SIMD регистров открывают новые возможности для ускорения обработки данных и выполнения вычислительных операций. Особенно это касается задач, связанных с обработкой больших объемов данных, где традиционные подходы сталкиваются с ограничениями производительности.

Однако несмотря на достигнутые результаты, перед исследователями все еще стоят задачи по дальнейшему развитию и оптимизации предложенной модели. Важным направлением является внедрение дополнительных операций алгебры многомерных матриц, что

позволит расширить область применения модели и увеличить эффективность вычислений.

В заключение, предложенная векторно-матричная модель вычислений, основанная на использовании SIMD регистров и принципов квантовых вычислений, представляет собой перспективный инструмент для разработки новых вычислительных систем. Эта модель открывает путь к созданию эффективных решений для обработки и анализа больших объемов данных, а также к развитию новых подходов в области компьютерной науки и информационных технологий.

**V.Y. Khodchenkov**  
Smolensk State University

## **VECTOR-MATRIX MODEL OF CALCULATIONS – PRINCIPLES OF CONSTRUCTION AND PROCESSING**

**Keywords:** *Vector Model, SIMD Registers, Quantum Computing, Emulation, Multi-Dimensional Matrices.*

**Abstract.** *The article presents the development of a vector-matrix computing model based on the principles of quantum computing and emulation of quantum processes using classical computing resources. The model integrates the principles of quantum parallelism, using SIMD registers to efficiently process multidimensional matrices and vectors, providing new capabilities for solving complex computational problems.*

**С.Ф. Царапкин**  
*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.9

## **УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВОМ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА**

Ключевые слова: *управление, марковские процессы, уравнения Колмогорова, вероятностный подход.*

*В статье приводится описание подхода к управлению производством на основе математического представления производственного процесса как марковского. Рассмотрена вероятность нахождения производства в каждом из возможных состояний с применением дифференциальных уравнений Колмогорова.*

Особое внимание уделяется предельным вероятностям состояний в стационарном режиме производства.

**1. Введение.** Качественное управление производством на всех уровнях позволяет повысить эффективность распределения финансовых, сырьевых и энергетических ресурсов, увеличить процент выхода годных изделий, снизить сроки изготовления продукции [1]. Следовательно, разработка новых подходов к управлению производством является своевременной и актуальной задачей.

**2. Описание производства как марковского процесса.** Известно, что принятие решений основано на контроле и оценке состояния объектов, входящих в контур управления и выявляемых при построении иерархической структура производственного процесса [2, 3].

Производственный процесс является случайным процессом с дискретными состояниями  $S_1, S_2, S_3, \dots$  и непрерывным временем. При этом для любого момента времени  $t_0$  вероятностные характеристики производства зависят только от состояния объектов в данный момент времени  $t_0$  и не зависят от того, когда и как данное состояние наступило. Следовательно, производственный процесс может быть отнесен к марковским процессам. Докажем это. Пусть в момент времени  $t_0$   $i$ -й объект производственного процесса находится в  $S_0$ . Переход объекта в момент времени  $t > t_0$  в  $S_1$  зависит от  $S_0$ , но не зависит от того, в какие моменты времени  $t_1$  ( $t_0 < t_1 < t$ ) наступали другие состояния объекта. Что соответствует определению марковского процесса.

Для анализа производственного процесса как марковского построим граф его дискретных состояний (рис.1). Для удобства рассмотрим два объекта из контура управления, состояние которых может выйти за допустимые значения. При этом корректировка состояния начинается мгновенно и продолжается случайное время.

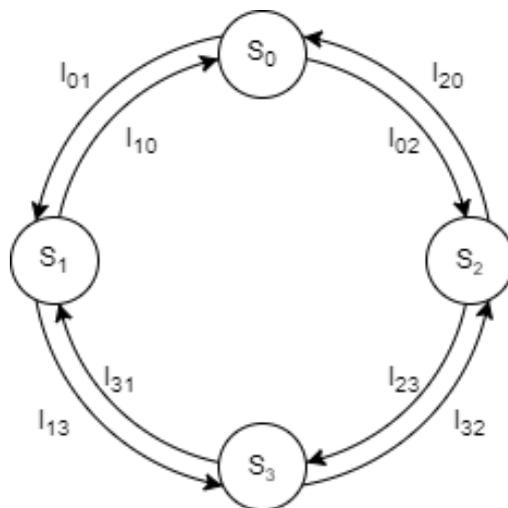


Рис.1. Граф состояний производственного процесса

Рассмотрим возможные состояния производственного процесса.  $S_0$  - оба объекта работают в штатном режиме;  $S_1$  - состояние первого объекта корректируется, второй объект работает в штатном режиме;  $S_2$  - первый объект работает в штатном режиме, состояние второго объекта корректируется;  $S_3$  - состояние обоих объектов корректируется. Следует обратить внимание, что переход из состояния  $S_0$  в  $S_3$  и  $S_1$  в  $S_2$  не исследуется, так как выход состояний объектов за пределы допустимых значений независимы друг от друга и вероятностями одновременного изменения состояния объектов или окончания корректировки состояния объектов можно пренебречь.

**3. Поток событий производственного процесса.** Основной характеристикой потока событий является интенсивность или среднее число событий за единицу времени.

Исходя из данного утверждения получим, что переход из  $S_i$  в  $S_j$  осуществляется вследствие наступления событий с интенсивностью  $I_{ij}$ . Таким образом, выход состояния первого объекта за пределы допустимых значений является событием для перехода производственного процесса из  $S_0$  в  $S_1$ ; окончание корректировки состояния первого объекта - из  $S_1$  в  $S_0$ . Аналогично для второго объекта. При этом в любой момент времени  $t$  сумма вероятностей всех состояний производственного процесса равна единице:

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i(t) = 1 \quad (1)$$

где  $p_i(t)$  - вероятность  $i$ -го состояния производства в момент времени  $t$ ;  $n$  - количество возможных состояний (для данного примера  $n = 4$ ).

Рассмотрим производственный процесс в момент времени  $t$  и через малый промежуток времени  $dt$ , за который возможно изменение состояния. Исходя из вышеизложенного, нахождение процесса в состоянии  $S_0$  в момент времени  $t + dt$  возможно в двух случаях:

1. Производственный процесс за время  $dt$  не перешел в новое состояние, а остался в  $S_0$ , в котором находился в момент времени  $t$  с вероятностью  $p_0(t)$ . Очевидно, что для смены состояния производственного процесса необходимо осуществить поток событий с интенсивностью  $(I_{01} + I_{02})$ , при этом вероятность смены состояния равна  $(I_{01} + I_{02})dt$ , а вероятность того, что состояние не изменится -  $(1 - (I_{01} + I_{02})dt)$ . Тогда вероятность нахождения производственного процесса в состоянии  $S_0$  в данном случае  $p_0(t) \cdot (1 - (I_{01} + I_{02})dt)$ .

2. Производственный процесс за время  $dt$  перешел в  $S_0$  из  $S_1$  или  $S_2$ , в которых находился с вероятностями  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  соответственно. Переход производственного процесса из  $S_1$  в  $S_0$  осуществляется при интенсивности потока событий  $I_{10}$  с вероятностью  $I_{10}dt$ . Вероятность нахождения производственного процесса в  $S_0$  равна  $p_1(t)I_{10}dt$ .

Применяя аналогичные рассуждения для перехода процесса из  $S_2$  в  $S_0$  получим:

$$p_0(t + dt) = p_1(t)I_{10}dt + p_2(t)I_{20}dt + p_0(t)(1 - (I_{01} + I_{02})dt) \quad (2)$$

Или в дифференциальных уравнениях первого порядка:

$$p_0' = I_{10}p_1 + I_{20}p_2 - (I_{01} + I_{02})p_0 \quad (3)$$

С учетом переходов между другими состояниями производственного процесса составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_0' = I_{10}p_1 + I_{20}p_2 - (I_{01} + I_{02})p_0, \\ p_1' = I_{01}p_0 + I_{31}p_3 - (I_{10} + I_{13})p_1, \\ p_2' = I_{02}p_0 + I_{32}p_3 - (I_{20} + I_{23})p_2, \\ p_3' = I_{13}p_1 + I_{23}p_2 - (I_{31} + I_{32})p_3. \end{cases} \quad (4)$$

Решение (4) позволит получить все вероятности состояний производственного процесса как функции времени. Однако для решения требуется определить начальные условия  $p_0(0) = 1$ ,  $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0$  и учитывать (1).

Решение задач управления требует детального рассмотрения производственного процесса не только в определенном состоянии, но и установившегося поведения в долгосрочной перспективе (при  $t \rightarrow \infty$ ). Для этого необходимо определить предельные вероятности состояний производства, что позволит судить об его устойчивости, эффективности и качестве управления.

Предельные вероятности состояний производственного процесса являются постоянными величинами, следовательно, их производные равны нулю. Тогда система уравнений (4) имеет вид:

$$\begin{cases} (I_{01} + I_{02})p_0 = I_{10}p_1 + I_{20}p_2, \\ (I_{10} + I_{13})p_1 = I_{01}p_0 + I_{31}p_3, \\ (I_{20} + I_{23})p_2 = I_{02}p_0 + I_{32}p_3, \\ (I_{31} + I_{32})p_3 = I_{13}p_1 + I_{23}p_2. \end{cases} \quad (5)$$

Для системы с конечным числом состояний предлагается использовать следующий алгоритм для составления системы уравнений:

1. Обозначить предельные вероятности состояний как  $p_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , где  $n$  - количество состояний в системе.

2. Составить уравнения баланса вероятностей для каждого состояния. Уравнение для  $i$ -го состояния будет иметь вид:

$$\sum_{j=0}^{n-1} I_{ij} p_i = \sum_{j=0}^{n-1} I_{ji} p_j, \quad i \neq j \quad (6)$$

3. Добавить уравнение (1).

4. Решить полученную систему уравнений для определения значений предельных вероятностей состояний.

Для систем с бесконечным числом состояний применяются аналогичные принципы, но с использованием более сложных математических методов, таких как метод стационарного распределения или метод моментов.

Рассмотрим пример производственного процесса, граф состояний которого аналогичен графу, изображенному на рис.1. Значения интенсивностей потоков событий, обуславливающих переходы между состояниями равны  $I_{01} = 1$ ,  $I_{02} = 2$ ,  $I_{10} = 2$ ,  $I_{13} = 2$ ,  $I_{20} = 3$ ,  $I_{23} = 1$ ,  $I_{31} = 3$ ,  $I_{32} = 2$ .

Составив и решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2, \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3, \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

получим  $p_0 = 0,4$ ,  $p_1 = 0,2$ ,  $p_2 = 0,27$ ,  $p_3 = 0,13$ . Другими словами, в стационарном режиме данный производственный процесс будет работать в штатном режиме 40% времени, в состоянии выхода за допустимые пределы первого объекта – 20%, второго – 27. Время выхода из строя обоих объектов составляет 13%. Анализируя полученные результаты с точки зрения управления производством, можно сделать вывод о необходимости увеличения штатного режима работы процесса за счет дублирования объектов или усиления контроля за их состоянием в допустимых значениях.

**4. Заключение.** Применение вероятностного подхода к управлению производством и описание поведения производственного процесса дифференциальными уравнениями Колмогорова позволяют получить не только распределение вероятностей процессов как функции времени, но распределение времени пребывания производственного процесса в возможных состояниях в стационарном режиме. Полученные результаты позволяют принимать эффективные и качественные решения на всех уровнях управления производством.

## Литература

1. Орлов А.И. О четырех направлениях исследований в области теории и практики управления производственными системами // Научный журнал КубГАУ. 2022. №178. - С. 1-27.
2. Шевнина Ю.С. Метод декомпозиции сложной нелинейной системы на основе процессного подхода // Системы управления и информационные технологии, №3(85), 2021. – С. 24-29.
3. Шевнина Ю.С. Иерархическая модель нелинейной динамической системы // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики, №8, 2021. – С. 135-139.

**S.F. Tsarapkin**

National Research University "MIET"

### PRODUCTION LINE CONTROL BASED ON PROBABILISTIC APPROACH

**Keywords:** *control, Markov processes, Kolmogorov equations, probabilistic approach.*

**Abstract.** *The article describes an approach to production management based on the mathematical representation of the production process as a Markov process. The probability of finding production in each of the possible states using Kolmogorov's differential equations is considered. Particular attention is paid to the limiting probabilities of states in a stationary production mode.*

**Чжо Сое Вин, А.В. Щагин**

*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 621.9

### ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ РЕЗКИ ДЕТАЛЕЙ ИЗ ЛИСТОВОГО МЕТАЛЛА НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА МУРАВЬИНОЙ КОЛОНИИ

**Ключевые слова:** *алгоритм муравьиной колонии, числовое программное управление, траектория резки, проблема коммивояжера.*

*В данной статье представлен новый метод построения автономной, интеллектуальной системы программирования для контроллера устройства резки (например, лазерного станка с числовым программным управлением) на основе алгоритма муравьиной колонии. Числовое программное управление устройством резки должно иметь возможность автономной оптимизации траектории между режущими*

*объектами. Для нахождения наилучшей последовательности операций, обеспечивающей самую короткую траекторию, предлагается использовать алгоритм муравьиной колонии. Самая короткая траектория резки может быть сформулирована как особый случай проблемы коммивояжера. Интеграция алгоритма муравьиной колонии и проблемы коммивояжера может быть включена в коммерческие пакеты компьютерного проектирования и компьютерного производства для оптимизации траектории резки.*

## **Введение**

Программное обеспечение компьютерного проектирования (CAD) и компьютерного производства (CAM) имеют возможность повысить эффективность станков с числовым программным управлением (NC) при программировании. В настоящее время существует несколько пакетов программного обеспечения CAD/CAM для автоматического программирования NC, которые используются для различных процессов резки. Однако как ручное программирование, так и автоматическое программирование через пакеты CAD/CAM часто не используют оптимальные методы для достижения самой короткой траектории. В результате операции обработки могут занимать значительное количество времени для завершения. Для решения этой проблемы, при использовании станков с числовым программным управлением (CNC) для резки объектов, расположенных на плите, необходимо определить соответствующий путь инструмента резки. Общее время процесса резки зависит от этого пути, включая время перемещения (когда инструмент резки CNC перемещается между объектами) и время резки (когда инструмент резки фактически режет объект в материале).

Оптимизация времени перемещения режущего инструмента до минимума приведет к максимальной эффективности производства. Несмотря на то, что было проведено много исследований по минимизации времени резки, не менее важно, чтобы режущее устройство могло автономно оптимизировать траекторию между режущими объектами. Некоторые исследования были сосредоточены на сокращении времени в пути с использованием различных методов. Другой подход состоит в том, чтобы сформулировать траекторию разрезания как частный случай задачи коммивояжера (TSP), хорошо известной задачи комбинаторной оптимизации, подробно рассмотренной в литературе. В TSP продавец ищет кратчайший маршрут среди  $N$  городов, посещая каждый город по одному разу и в конце концов возвращаясь в исходный город. Хотя эта проблема может показаться простой, она остается одной из самых сложных проблем в операционных исследованиях. Решение этой задачи заключается в просмотре всех возможных туров и поиске кратчайшего из них. Однако,

если  $N$  представляет количество городов, количество потенциальных туров становится  $N!$ , что делает чрезвычайно трудным, а иногда и невозможным поиск кратчайшего тура среди большого количества вариантов за полиномиальное время. Следовательно, он подпадает под категорию недетерминированных полиномиальных (NP)-полных задач.

В то время как некоторые исследователи используют линейную оптимизацию для решения TSP, эвристические алгоритмы часто обеспечивают лучшие решения за относительно короткий промежуток времени, хотя и немного отличающиеся от оптимального решения. Различные эвристические алгоритмы, такие как поиск табу, нейронные сети, поиск кукушки, генетический алгоритм, имитация отжига, оптимизация роя частиц, алгоритм оптимизации муравьиной колонии (ACO) или комбинация различных эвристик, были применены для решения TSP.

Структура этой работы следующая: В следующем разделе мы представляем описание проблемы. Алгоритм муравьиной колонии, который является предложенным нами решением проблемы, подробно описан в разделе «Алгоритм муравьиной колонии». Затем мы представляем экспериментальные результаты и обсуждаем преимущества нашего подхода. Наконец, мы делаем выводы и предлагаем потенциальные области улучшения для будущих исследований.

### Алгоритм муравьиной колонии (ACO - Ant colony optimization)

Алгоритм ACO является подразделением более крупной области, называемой роевым интеллектом. Интеллект роя — это моделирование и симуляция поведения социальных насекомых, таких как пчелы, муравьи и так далее. Системная оптимизация и обучение самоорганизации — две из многих причин, по которым исследователей

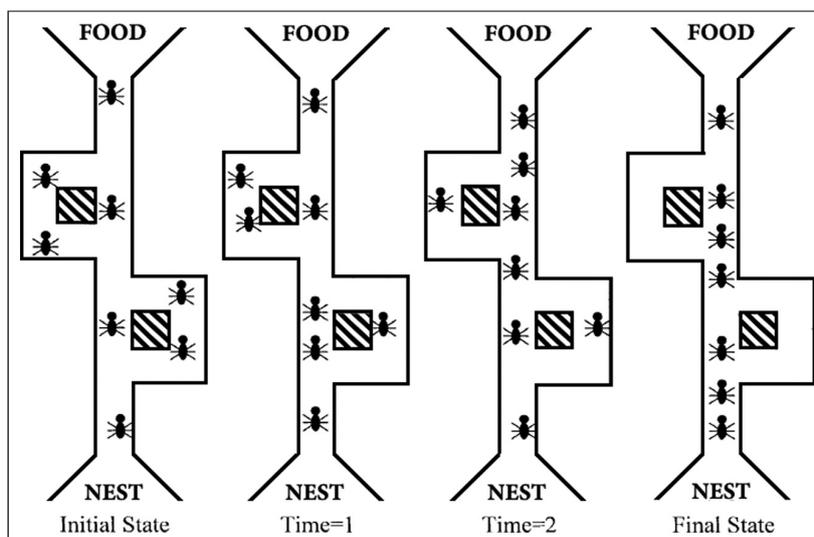


Рис 1. Динамика пробы феромонов в конечном итоге муравьями выбирают кратчайший путь

привлекает моделирование поведения насекомых. АСО имитирует совместное поведение муравьев при поиске пищи, когда муравьи выходят на поиски пищи и приносят ее обратно в гнездо. Как правило, у муравьев нет хорошего зрения или системы связи, и отдельный муравей не может жить дольше. Однако группа или рой муравьев могут совместно выполнять сложные задачи, такие как сбор пищи или разделение труда.

Основная причина, делающая такую группу эффективной, — это феромон, химическое вещество, оставляемое муравьями при движении. Это вещество обеспечивает коммуникативные возможности муравьев. В основном муравьи двигаются хаотично, но когда они встречают феромоновый след, они решают, следовать ему или нет. Они предпочитают следовать за ним и оставляют на следе собственный феромон, укрепляющий путь. Количество феромона на интересующем потенциальном пути регулирует вероятность того, что муравей предпочтет один путь другому. Так, пути, которые более регулярно проходят одни муравьи, становятся более привлекательными для других муравьев, и, следовательно, те пути, которыми они ходят реже, становятся для муравьев менее ожидаемыми.

Со временем феромон на пути испаряется. Во-первых, муравей будет использовать все возможные пути, выделяя феромоны по мере движения. Но те муравьи, которые выбирают более короткий путь, вернутся в гнездо и первыми принесут еду. На более коротком пути больше феромона, потому что он свежий и еще не испарился, поэтому этот путь больше привлекает муравьев. Динамика приведенных выше описаний показана на рисунке 1, на котором показана группа муравьев на нескольких путях между гнездом и источником пищи на разных временных этапах. В начальном состоянии муравьи распределяются случайным образом, но в итоге выбирают кратчайший путь. Такая задача преобразована в TSP и использует относительные алгоритмы для ее решения в соответствии с правилом ограничений последовательной резки. Правило ограничения последовательной резки имеет недостатки при решении реальной задачи оптимизации траектории резки.

### **Описание и формулировка проблемы**

Как показано на рисунке, необходимо вырезать  $M$  деталей без отверстий и общих граней на листе. Лазерная головка начинает движение из левого нижнего угла листа (точка старта  $O$ ), последовательно вырезает контурные формы каждой детали, а затем возвращается в исходную точку  $O$ , тем самым завершая процесс резки всех деталей. В процессе резки лазерная головка находится в состоянии "световой резки", когда она движется по контурным линиям, и в состоянии "не режет", когда она перемещается между контурными линиями (то есть в холостом ходе). Поскольку длина контуров и

скорость лазерной головки постоянны, общая длина резки может быть сокращена только путем уменьшения расстояния холостого хода между контурами. Поэтому целью оптимизации пути резки является нахождение наилучшего пути операций лазера, чтобы расстояние холостого хода было наименьшим в процессе резки.

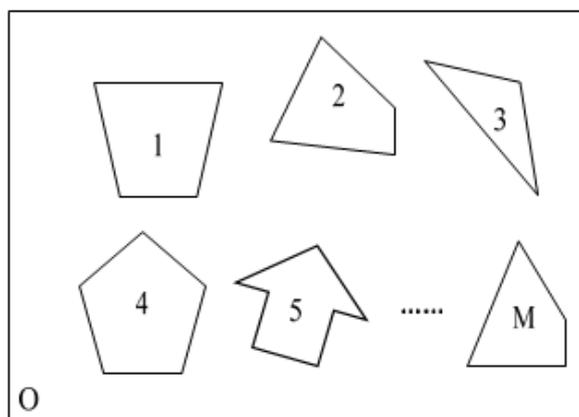


Рис 2. Описание задачи оптимизации траектории резки

### Математическая модель задачи оптимизации

В последних исследованиях были применены правила ограничений последовательной резки деталей. Лазерная головка должна двигаться по контуру одной детали, а затем переходить к следующей детали. При оптимизации и анализе пути резки можно выбрать точку на контурах в качестве точки удара (точка начала и конца резки), и эта точка может заменить контур детали. Таким образом, контуры деталей, подлежащих резке, можно упростить до множества точек на плоскости листа. Проблема оптимизации пути резки сводится к нахождению кратчайшего расстояния между множествами точек, известную как проблема коммивояжера (TSP). Большинство работ сначала определяют точки удара контуров с помощью алгоритма ближайшего соседа, а затем используют различные связанные алгоритмы для решения проблемы TSP. Этот метод позволяет решить проблему оптимизации пути резки. Однако после дальнейшего изучения было обнаружено, что этот метод может оказывать определенное влияние на результаты оптимизации. Как показано на рисунке (а), на листе есть две детали, подлежащие резке. Вершины детали 1 обозначены как  $(P_1^1, P_2^1, P_3^1, P_4^1, P_5^1)$ , а вершины детали 2 обозначены как  $(P_1^2, P_2^2, P_3^2, P_4^2, P_5^2)$ . С помощью алгоритма ближайшего соседа можно определить точки излома:  $P_1^1$  и  $P_1^2$ . Полный путь резания может быть выражен как:  $O \rightarrow P_1^1 \rightarrow [P_2^1 \rightarrow P_3^1 \rightarrow P_4^1 \rightarrow P_5^1 \rightarrow P_1^1] \rightarrow P_1^2 \rightarrow [P_2^2 \rightarrow P_3^2 \rightarrow P_4^2 \rightarrow P_1^2] \rightarrow O$ . Расстояние пустого хода равно  $S_e = OP_1^1 + P_1^1P_1^2 + P_1^2O$ .

Если это не ограничивается правилами серийной резки, лазерной головке может быть разрешено резать другие детали до того, как деталь еще не будет закончена. Траектория резки была показана на рисунке (b):  $O \rightarrow P_1^1 \rightarrow [P_2^1 \rightarrow P_3^1 \rightarrow P_4^1] \rightarrow P_1^2 \rightarrow [P_2^2 \rightarrow P_3^2 \rightarrow P_4^2 \rightarrow P_1^2] \rightarrow P_4^1 \rightarrow [P_5^1 \rightarrow P_1^1] \rightarrow O$ . Расстояние пустого хода равно  $S'_g = OP_1^1 + P_4^1 P_1^2 + P_1^2 P_4^1 + P_1^1 O = 2OP_1^1 + 2P_4^1 P_1^2$ . Очевидно, что последний путь является более коротким.

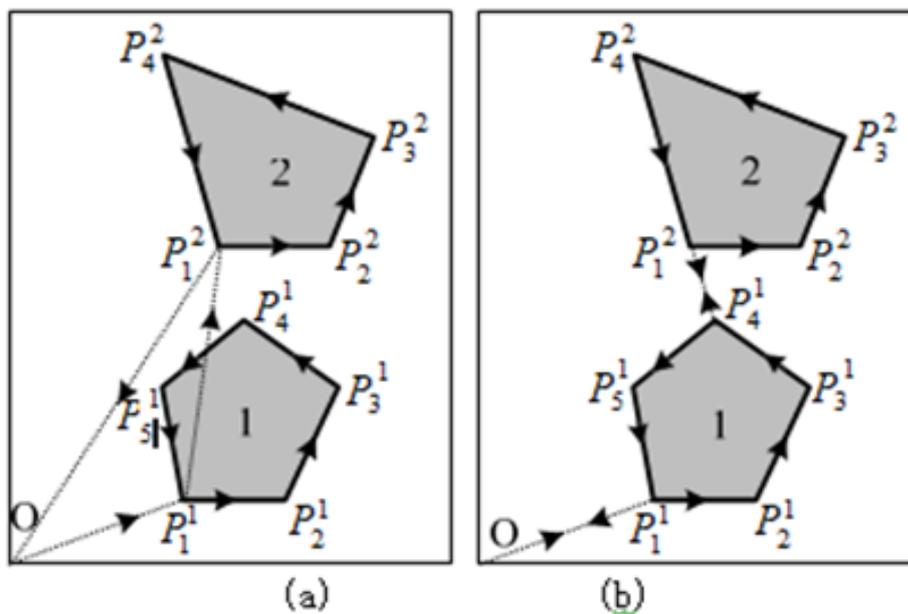


Рис 3. Сравнение двух траекторий резания

Таким образом, под влиянием правил ограничений последовательной резки, традиционный алгоритм иногда не может найти оптимальное решение. Для решения этой проблемы в данной статье предлагаются правила ограничений перекрестной резки. В процессе резки деталей лазерная головка может свободно перемещаться между контурами деталей. Показанный на рисунке (b) путь резки является примером применения правил перекрестной резки. Эти правила позволяют оптимизационному алгоритму находить более лучший путь резки.

В листе нужно разрезать  $M$  частей. Группа линий части 1:  $\{L_{11}, L_{12}, L_{13}, \dots, L_{1m}\}$ . Группа линий части 2:  $\{L_{21}, L_{22}, L_{23}, \dots, L_{2n}\}$ . Группа линий части  $M$ :  $\{L_{m1}, L_{m2}, L_{m3}, \dots, L_{mn}\}$  В соответствии с требованиями резки деталей, независимо от порядка, пока лазерная головка проходит по всем контурным линиям дискретизации деталей, все детали будут обработаны. В этот момент проблема оптимизации траектории резания трансформировалась в вопрос о том, как спланировать порядок резания контурных линий, чтобы путь вхолостую стал кратчайшим. По определенным правилам предполагается, что последовательность порядка резки получается, как показано в таблице 1.

Порядок вырезания контурных линий

Часть	Линия	Точка 1	Точка 2	Точка 1 X- координата	Точка 1 Y- координата	Точка 2 X- координата	Точка 2 Y- координата
1	L <sub>1</sub>	P <sub>11</sub>	P <sub>12</sub>	x <sub>11</sub>	y <sub>11</sub>	x <sub>12</sub>	y <sub>12</sub>
2	L <sub>2</sub>	P <sub>21</sub>	P <sub>22</sub>	x <sub>21</sub>	y <sub>21</sub>	x <sub>22</sub>	y <sub>22</sub>
3	L <sub>3</sub>	P <sub>31</sub>	P <sub>32</sub>	x <sub>31</sub>	y <sub>31</sub>	x <sub>32</sub>	y <sub>32</sub>
4	L <sub>4</sub>	P <sub>41</sub>	P <sub>42</sub>	x <sub>41</sub>	y <sub>41</sub>	x <sub>42</sub>	y <sub>42</sub>
...	...	...	...	...	...	...	...
N	L <sub>N</sub>	P <sub>N1</sub>	P <sub>N2</sub>	x <sub>n1</sub>	y <sub>n1</sub>	x <sub>n2</sub>	y <sub>n2</sub>

Путь резки лазерной головки можно представить в виде:  $O \rightarrow [P_{11} \rightarrow P_{12}] \rightarrow [P_{21} \rightarrow P_{22}] \rightarrow \dots \rightarrow [P_{N1} \rightarrow P_{N2}] \rightarrow O$ . Расстояние пустого хода равно:

$$S_e = OP_{11} + P_{12}P_{21} + P_{22}P_{31} + \dots + P_{N-1,2}P_{N1} + P_{N2}O = OP_{11} + \sum_{i=1}^{N-1} (P_{i,2}P_{i+1,1}) + P_{N2}O.$$

Итак, математическая модель задачи оптимизации траектории резания:

$$\min S_e = \sqrt{x_{11}^2 + y_{11}^2} + \sqrt{x_{N2}^2 + y_{N2}^2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{(x_{i+1,1} - x_{i,2})^2 + (y_{i+1,1} - y_{i,2})^2}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,N; j=1,2)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,N; j=1,2)$$

### Заключение

Используя метод муравьиной колонии для оптимизации, была проиллюстрирована траектория разрезания. Колония муравьев предлагает новый метод создания оптимальной траектории резки. Предлагаемый метод является вкладом в интеллектуальные производственные системы, и его предварительные результаты оптимистичны.

### Литература

1. Чжо Сое Вин. Оптимизация траектории резки в станке с ЧПУ с использованием алгоритма муравьиной колонии. 30-я Всероссийская межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Микроэлектроника И Информатика-2023» С.171

2. Li, M., & Cai, W. Метод оптимизации пути инструмента на основе алгоритма муравьиной колонии для быстрой ЧПУ-обработки. Международный журнал передовых технологий производства, 73(9-12), 1629-1641 (2014).
3. Ma, Y., & Li, B. Оптимизация пути инструмента сложной ЧПУ-обработки на основе алгоритма муравьиной колонии. Журнал физики: серия конференций, 726(1), 01.2017.
4. Nini L, Zhangwei C и Shize C 2010 Компьютерная инженерия и приложения 46 234-6
5. Li, M., Cai, W., & Zhang, X. Оптимизация пути инструмента для быстрой ЧПУ-обработки на основе алгоритма муравьиной колонии. Международный журнал передовых технологий производства, 91(5-8), 2457-2470 (2017).
6. Shao, X., Gao, X., & Zhang, Y. Метод оптимизации пути инструмента для ЧПУ-обработки на основе алгоритма муравьиной колонии. Международный журнал передовых технологий производства, 95(1-4), 1031-1042 (2018).
7. Huixia L, Xiao W и Lan C 2004 Журнал КАД и Графической Гигиены 16 660-5.
8. Deng, X., Chen, L., & Zhang, D. (2020). Исследование оптимизации пути инструмента ЧПУ-обработки на основе алгоритма муравьиной колонии. Материалы конференции "2020 2nd International Conference on Education, E-Learning and Management Technology (EEMT 2020)", 392-395.
9. Huiping S, Jian L и Weigang G 2008 Транзакции Китайского общества сельскохозяйственных машин 39 158-60

**Kyaw Soe Win, Shchagin Anatoly Vasilievich**  
National Research University of Electronic Technology (MIET)

## **RESEARCH THE CUTTING TRAJECTORY OPTIMIZATION OF SHEET METAL PARTS BASED ON THE ANT COLONY ALGORITHM**

**Keywords:** *ant colony algorithm, numerical control, cutting trajectory, traveling salesman problem.*

**Abstract.** *This paper examines the use of the ant colony algorithm to optimize the cut-ting path of sheet metal parts in computer numerical control (CNC) systems. Based on the assumption that this approach can significantly increase the effi-ciency of production processes by minimizing cutting time, the study focuses on analyzing the capabilities of the ant colony algorithm to find the shortest path between cutting objects, which is similar to solving the traveling salesman problem. The experimental results confirm the hypothesis of the high efficiency of the proposed method, showing a significant improvement in cutting path optimization and, as a result, a reduction in the overall production cycle time. Thus, the proposed approach not only demonstrates the potential for improv-ing production processes, but also opens new directions for further research in the field of intelligent production control systems.*

## ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Ключевые слова: *статистическое моделирование, ИИУС, репрезентативность, эргодичность, вакуумная установка.*

*В статье представлены особенности использования статистических методов моделирования объектов и систем при разработке информационно-измерительных и управляющих систем. Показаны способы доказательства репрезентативности и эргодичности выборки для технических систем. Рассмотрена статистическая модель вакуумной установки нанолитографа, позволяющая прогнозировать поведение системы с высокой точностью.*

**1. Введение.** Информационно-измерительные и управляющие системы (ИИУС) – это совокупность технических средств, объединенных общим алгоритмом функционирования, обладающих набором нормированных метрологических характеристик и предназначенных для автоматического (автоматизированного) получения информации непосредственно от объекта, преобразования ее, передачи, измерения, обработки, хранения и представления в форме, доступной для восприятия лицом, принимающим решение, и формирования управляющего воздействия на объект управления [1]. В настоящее время практически в каждой предметной области используются ИИУС: в образовании, при автоматизации процессов контроля и управления на производстве, в медицине, в системах безопасности и т.д.

Для эффективного решения задач контроля и управления в ИИУС используются модели поведения объектов и систем. Кроме того, точные и достаточно подробные модели объектов позволяют гарантировать быструю адаптацию ИИУС к изменяющимся требованиям внешней среды [1, 2]. Следовательно, задача моделирования поведения объектов и систем при разработке ИИУС является своевременной и актуальной.

**2. Статистическое моделирование поведения объектов и систем.** Существует множество методов моделирования поведения объектов и систем: аналитические, статистические, лингвистические, логические,

структурные и т.п. Каждые из них имеют свои достоинства и недостатки. Выбор конкретного метода определяется целями и задачами моделирования. Итоговая модель должна однозначно определять объект или процесс с требуемой точностью, полнотой и достоверностью [3].

Как правило, для решения прогностических задач, эффективного распределения ресурсов, производственного планирования, оценки надежности и качества, обработки экспериментальных данных используются статистические модели. Принципиальным отличием статистических моделей от других, в частности аналитических, является то, что в основе их структуры лежат результаты выборочного исследования, преобразованные в статистические закономерности и распространенные на поведение всей системы в целом с определенной вероятностью. Данная особенность позволяет получать представление о сложной системе без выявления детерминированных связей между изучаемыми объектами, что существенно расширяет возможности представления сложных систем и процессов по сравнению с другими методами моделирования.

Точность статистического моделирования определяется репрезентативностью выборки, ее качественными и количественными характеристиками, эргодичностью. Для повышения точности моделей возможно дополнительное использование методов дискретной математики, позволяющих формализовать процессы принятия решения.

В общем случае статистическая модель представляет собой размытую область в  $n$ -мерном пространстве, границы которой заданы с некоторой вероятностью  $p$  и изменение состояния описывается случайной функцией  $f$ . Состояние области описывается с помощью ряда параметров, на основании которых можно получить  $n$ -мерные статистические закономерности. Для дискретных событий зависимость между случайной величиной  $x$  и вероятностью  $p$  определяется законом распределения  $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i(x_i)$ , для непрерывных – функцией

распределения  $p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ . Однако, при моделировании сложных

систем получение закона распределения является нетривиальной задачей, в следствие чего при разработке ИИУС используют понятия математического ожидания и дисперсии случайной величины.

Доказательство репрезентативности выборки при статистическом моделировании при разработке ИИУС основывается на том, что выборка должна точно отражать характеристики всей технической системы для последующего обобщения результатов. Для этого необходимо:

- использовать случайную выборку, позволяющую избежать искажений и обеспечить объективность результатов за счет включения параметров каждого элемента технической системы;

- проводить стратификацию технической системы с последующей случайной выборкой из каждой страты;

- проводить сравнение статистических параметров выборки с характеристиками всей системы.

Эргодичность выборки означает, что ее статистические свойства адекватно отражают свойства всей технической системы, что особенно важно для данных, имеющих динамический характер. Основными признаками эргодичности выборки при статистическом моделировании при разработке ИИУС являются стационарность (статистические характеристики остаются постоянными со временем) и автокорреляция (степень статистической взаимосвязи между элементами данных одного временного ряда).

**3. Статистическое моделирование вакуумной установки нанолитографа.** Рассмотрим статистическую модель вакуумной установки нанолитографа, используемой при разработке ИИУС. Модель построена на основе накопленных данных, в качестве параметров использовались: давление внутри и снаружи установки, температура окружающей среды, внутренняя температура установки, частота вибрации, время работы, частота изменения давления. На основе анализа данных составлены статистические закономерности [4]. Для повышения точности модели для каждой закономерности определяется весовой коэффициент  $a_i$ , позволяющий определять влияние параметра установки на общее состояние системы.

$$a_i = \frac{N_i}{M} \quad (1)$$

где  $N_i$  – количество совпадений статистической закономерности в экспериментах,  $M$  – количество экспериментов.

Для прогнозирования поведения вакуумной установки строится дерево  $D = (V, E)$  с возможными состояниями, в котором вершинами  $V$  являются закономерности, а ребрами  $E = (u, v) : u, v \in V$  – переходы между состояниями вакуумной установки, вес ребра – значение  $a_i$ . Далее строится аналогичное по структуре дерево  $D' = (V', E')$  признаков наступления данного состояния – нормативные и критические значения исследуемых характеристик и параметров вакуумной установки. Далее с учетом методов дискретной математики происходит сравнение вершин двух деревьев.

$$V \subset V' \Leftrightarrow \forall v \in V : \mu_V(v) \leq \mu_{V'}(v) \quad (2)$$

$$l(V \subset V') = \min_{v \in T} \mu_{V'}(v) : T = \{v \in V ; \mu_V(v) \leq \mu_{V'}(v) ; \mu_V(v) > 0\} \quad (3)$$

В случае выполнения условий (2) и (3) производится маркировка узла дерева возможных состояний. Путь  $G = \sum_{i=1}^{n-1} f(e_i, e_{i+1})$  между маркированными узлами  $v_i$  и  $v_j$ , соединенных ребром  $e_{i,j}$ , и весовой функцией  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  соответствует вероятности наступления состояния при наличии проверяемой закономерности.

Поочередное сравнение статистических закономерностей для параметров вакуумной установки нанолитографа с признаками наступления состояния позволяет уменьшить нелинейность влияния зависимых параметров и повысить точность оценки.

Полученное распределение вероятностей состояний вакуумной установки позволяет сформировать управляющие и контролирующие воздействия и рекомендации по режиму эксплуатации оборудования.

Очевидно, точность прогноза поведения вакуумной установки определяется точностью весового коэффициента статистической закономерности. Среднеквадратичное отклонение весового

коэффициента для  $n$  итераций работы установки  $\sigma = \sqrt{\frac{\Delta(a - a_{cp})^2}{n}}$

уменьшается с увеличением итераций. Исследование материалов отчетов по 20 итерациям работы трех вакуумных установок производственного предприятия позволило установить, что отклонение весового коэффициента от ожидаемого значения менее 0,001 после 7 итерации и далее продолжает уменьшаться (рис.1). Точность прогноза поведения вакуумной установки после 7 итераций составляет 90,1% и далее продолжает расти.

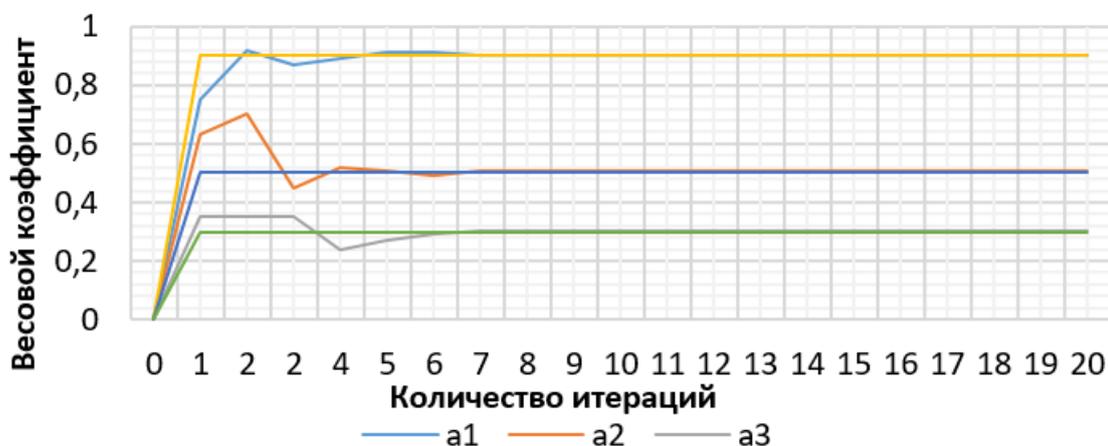


Рис.1. Значение весового коэффициента статистической закономерности

Таким образом, рассмотренная статистическая модель вакуумной установки нанолитографа, используемая при разработке ИИУС

позволяет прогнозировать поведение системы с точностью более 90%, что, в свою очередь, позволяет формировать эффективные управляющие и контролирующие воздействия на оборудование.

**4. Заключение.** Представленные в статье особенности статистического моделирования объектов и систем позволяют получать точные и эффективные модели для ИИУС. Полученные статистические модели применяются в ИИУС для решения прогностических и управленческих задач. В статье приводятся методы доказательства репрезентативности и эргодичности данных, используемых при разработке статистических моделей для ИИУС. Рассмотренный пример показывает способ повышения точности модели с использованием весовых коэффициентов для статистических закономерностей.

### Литература

1. Шевнина Ю.С. Метод оценки состояния нелинейной системы на основе логического анализа данных // Известия вузов. Электроника, Т. 27 №3. 2022, С. 407-415.
2. Шевнина Ю.С., Гагарина Л.Г., Конюхов Е.В., Харитонов А.Д. Метод кластерного анализа гетерогенных данных с использованием положений нечеткой логики // Известия вузов. Электроника. 2023. № 4. С. 445-452.
3. Шевнина Ю.С. Метод декомпозиции сложной нелинейной системы на основе процессного подхода // Системы управления и информационные технологии, №3(85), 2021. – С. 24-29.
4. Шевнина Ю.С. Иерархическая модель нелинейной динамической системы // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики, №8, 2021. – С. 135-139.

**Yu.S. Shevnina, L.G. Gagarina**  
National Research University "MIET"

### **FEATURES OF USING STATISTICAL MODELS IN THE DEVELOPMENT OF INFORMATION, MEASURING AND CONTROL SYSTEMS**

**Keywords:** *statistical modeling, automated control system, representativeness, ergodicity, vacuum installation.*

**Abstract.** *The article presents the features of using statistical methods for modeling objects and systems in the development of information, measuring and control systems. Methods are shown to prove the representativeness and ergodicity of a sample for technical systems. A statistical model of a nanolithograph vacuum installation is considered, which makes it possible to predict the behavior of the system with high accuracy.*

## ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ПРИ СИНТЕЗЕ ЦИФРОВОГО АДАПТИВНОГО РЕГУЛЯТОРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА.

Ключевые слова: адаптивные системы управления, регуляторы дробного порядка, целочисленная аппроксимация, синтез регулятора, обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка, дробная производная.

*В данной работе обоснована актуальность цифровых регуляторов дробного порядка в условиях развития аппарата дробно-дифференциального исчисления в теорию дифференциальных уравнений дробного порядка и дальнейшее уточнение методов решения данных уравнений с их применением в прикладных задачах. Сделан вывод о целесообразности целочисленной аппроксимации при программно-алгоритмической реализации дробной производной и исследованы особенности определений дробной производной.*

**Введение.** Современная теория управления ориентирована на поиск новых методов управления, обеспечивающих требуемые показатели качества системы при условии целесообразности реализации структуры регулятора относительно цели управления. Развитие адаптивного подхода опирается на интеллектуализацию системы [1], новые типы регуляторов и совершенствование применяемого при их синтезе математического описания. Адаптивное управление, являясь способом обеспечения робастности в условиях неопределенности и, в тоже время, совокупностью методов синтеза, решает широкий круг инженерных задач. В свою очередь, введение дробной производной дает возможность расширить детерминированные рамки при решении прикладных задач. В [2] проведено моделирование регулятора дробного порядка ( $PI^{\lambda}D^{\alpha}$ ) для объекта обладающего высокой инерционностью и показано, что регулятор для выбранного объекта не имеет оптимальных параметров, но, с применением  $PI^{\lambda}D^{\alpha}$ -регулятора параметры возможно оптимизировать и получить удовлетворяющие заданным условиям показатели качества. С практической точки зрения, интерес к  $PI^{\lambda}D^{\alpha}$  – регуляторам связан с необходимостью повышения эффективности классических ПИД-регуляторов.

В [3] показано, что  $PI^{\lambda}D^{\alpha}$  имеют сложную структуру и обращено внимание на возможность упрощения регулятора с потерями качества

управления, но удовлетворяющими требованиям. Моделирование показало, что для ряда систем, достаточно применить  $ПД^\alpha$  регулятор - достигается достаточная точность, быстродействие и допустимое перерегулирование.

**К проблемам алгоритмической реализации дробной производной.** Одной из проблем программно-алгоритмической реализации  $ПИ^1 Д^\alpha$  регулятора является дробный порядок производной, поскольку на всем интервале протекания динамического процесса присутствует необходимость запоминания временных отсчетов дискретного сигнала. В [4] предлагаются ограничивающиеся конечным отсчетом способы аппроксимации, а в [5] предложен способ вычисления непрерывной функции  $f(t)$  определения дробной производной Летникова, произведен переход к решетчатой функции  $f[kT]$ .

$$D^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (1)$$

В результате численного интегрирования решетчатой функции  $f[kT]$  с периодом квантования  $T$  по методу прямоугольников, получаем:

$$I^{\frac{1}{2}}f[kT] = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f[iT]}{\sqrt{(k-i)T}} \quad (2)$$

При вводе шага аппроксимации  $h = (k-i)$ , для производной  $\alpha$  и переходу к нормированному  $T$ , запишем:

$$D_{[a,h]}^\alpha f[k] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta a_{[a,h]} f[k]}{h^\alpha} \quad (3)$$

$a$ - нижний предел начала отсчетов  $f[k]$ .

С учетом «старения» информации, значимость отсчетов, близких к пределу  $a$ , со временем теряется, в связи с чем часть этих отсчетов может быть не учтена. Таким образом, появляется определенная погрешность  $\Delta[k]$ , с учетом, что существует некоторое значение  $M$  при котором  $f[n] \leq M$ .

$$\Delta[k] = |D_t^\alpha f[k]| \leq \frac{ML^\alpha}{|\Gamma(1-\alpha)|} \quad (4)$$

где  $\Gamma$ -гамма-функция Эйлера

Обеспечение требуемой точности  $\varepsilon$  происходит исходя из задания интервала памяти  $L$

$$L \leq \left\{ \frac{M}{\varepsilon |\Gamma(1-\alpha)|} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5)$$

В результате такого подхода имеется возможность снизить затраты памяти при требуемой  $\varepsilon$ .

В настоящее время, методы решения дробно - дифференциальных уравнений находятся на стадии активного поиска, в том числе: аналитическое решение уравнения дробной диффузии методом вариационных итераций, методы решения обобщенного уравнения Кортевега де Фриза дробного порядка (6) с помощью бета-дробной производной, приближенно-аналитический метод для решения дифференциальных уравнений в частных производных с дробью по времени, аналитические решения дробно-дифференциальных уравнений с использованием ряда Адомиана.

$$\frac{du}{dt} + 6u \frac{du}{dx} + \frac{d^3u}{dx^3} = 0 \quad (6)$$

Не смотря на высокую актуальность поиска аналитических решений, их применение ограничено особенностями математического аппарата и характеристиками реальных объектов, которые предлагается формализовать с их помощью. Более того, получение точного решения возможно только для небольшого, узкоспециализированного круга задач. Поэтому, на сегодняшний день, наиболее явны перспективы применения и исследования приближенных решений. Анализ источников [5-7] позволяет сделать вывод, что это связано с граничными или начальными условиями, нелокальностью дробной производной. Для целых производных актуально утверждение о зависимости результата дифференцирования от значений функции в малой окрестности точки, тогда как понятие нелокальности дробной производной, заключается в зависимости результата дифференцирования от значений функции во всех точках числовой прямой.

Кроме дробной производной Летникова, на основе которой уточнены методы анализа устойчивости систем с  $PI^{\lambda}D^{\alpha}$  регулятором, исследован алгоритм реализации дробной производной, составлены методики получения дискретной передаточной функции (1) - (5) и освещено большое количество вопросов математического описания систем управления, на практике также применяются и другие

определения дробной производной - особенно, определение дробной производной Капуто.

Адаптивные системы всегда означают оптимальные настройки параметров. С помощью оператора Капуто сформулирована математическая постановка задачи оптимальных дробных регуляторов.

$$\text{minimize } J(x, u, t_f) = \int_a^{t_f} G(t, x(t), u(t)) dt, \quad (7)$$

при условии

$$Q_1 \dot{x}(t) + Q_2 {}^C D_{a^+}^{\alpha} x(t) = \psi(t, x(t)) + X(t, x(t))u(t), \quad (8)$$

$$x(a) = x_a, \quad x(t_f) = x_f \quad (9)$$

где  ${}^C D_{a^+}^{\alpha}$  является производным оператором Капуто,  $Q_1, Q_2 \neq 0, t_f, x_a, x_f$  и  $X(t, x(t)) \neq 0, \forall t \in \{a, t_f\}$ .

Дальнейшие исследования изложенных вопросов позволят уточнить и упростить программно-алгоритмическое описание дробной производной и применить ПИ<sup>λ</sup>Д<sup>α</sup> регуляторы для задач автоматизации технологического оборудования микроэлектроники.

**Выводы.** Адаптивные системы решают широкий круг задач автоматического управления в условиях как параметрической, так и структурной неопределённости. Современная теория управления направлена на создание интеллектуальных регуляторов в структуре информационно-управляющих сред, все более масштабное внедрение вычислительных средств с увеличением их производительности, использование современных протоколов передачи данных для программной реализации алгоритмов адаптации, идентификации и прогноза, применение промышленных логических контроллеров для решения объемных вычислительных операций. В связи с этим, особенно важны исследования проблем алгоритмической реализации новых типов регуляторов и определение перспектив математического решения поставленных задач и подходов к формализации.

Получение точных решений дробно-дифференциальных уравнений возможно в ограниченном круге задач и на сегодняшний день чаще используются приближенные методы.

Исследованные в работе определения дробных производных не все являются эквивалентными, имеют основу для описания принципиально разных процессов и могут найти применение на практике для разного рода технических задач.

## Литература

1. Шагин А.В., Лось А.В. Анализ применения нейросетевых технологий в адаптивных системах управления // Научный журнал «Электронные информационные системы». - 2023. - № 3. - С. 86-95.
2. Бабошкин Г.Д., Ушаков П.А. Моделирование системы управления дробного порядка с высокоинерционным объектом управления на примере системы стабилизации антенно-поворотного устройства // Вестник Концерна «Алмаз-Антей» — 2019. — № 3. — С. 41–51.
3. Жмудь В.А., Заворин А. Дробно-степенные ПИД-регуляторы и пути их упрощения с повышением эффективности управления // Автоматика и программная инженерия. — 2013. — № 1 (3). — С. 30–36.
4. Ефимов А. Н., Рубанов В.Г. Оптимизация процессов первичной обработки информации в АСУ. – К.: «Техника», 1967. 144 с.
5. Chen Y.Q., Petras I. and Xue D. (2009) Fractional Order Control: A Tutorial. In: Proceedings of the 2009 American Control Conference (ACC'09), С.1397-1411.
6. Рубанов В.Г., Кижук А.С., Гольцов Ю.А., Кариков Е.Б. Реализация алгоритма аппроксимации дробного интегродифференцирования со оценкой ошибки // Вестник БГТУ им. Шухова. 2015.-№2.- С.148-151
7. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
8. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272 с.

**A.V. Schagin, A.V. Los**

National Research University of Electronic Technology

### **INTEGER APPROXIMATION OF FRACTIONAL RATIONAL EXPRESSIONS IN THE SYNTHESIS OF A FRACTIONAL ORDER DIGITAL ADAPTIVE REGULATOR**

**Keywords:** *adaptive control systems, fractional order regulators, integer approximation, regulator synthesis, ordinary fractional differential equations, fractional derivative.*

**Abstract.** *The paper reasons the relevance of fractional-order digital regulators in the context of developing the apparatus of fractional differential calculus into the theory of fractional differential equations and further refining methods for solving the equations with their implementing to applied problems. The author stands for the expediency of integer approximation in the software-algorithmic implementation of the fractional derivative and investigates the features of the fractional derivative definitions.*

# РАЗДЕЛ 3

## Математика и её приложения

В.М. Адуков

Южно–Уральский государственный университет

УДК 517.54

### О ТЕОРЕМЕ М.А. ШУБИНА О НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОЖИТЕЛЕЙ В ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА

Ключевые слова: факторизация Винера–Хопфа, устойчивость частных индексов, устойчивость факторизационных множителей, эффективные оценки.

В работе приводится уточнение теоремы М.А. Шубина о непрерывности множителей в факторизации Винера–Хопфа матриц-функций. Получены эффективные оценки радиуса окрестности исходной матрицы-функции, для которой факторизационные множители являются устойчивыми. Попадание в эту окрестность возмущенной матрицы-функции гарантирует для нее нахождение факторизационных множителей с заданной точностью. Оценки получены в явной форме в терминах факторизации Винера–Хопфа исходной матрицы-функции. Эти оценки необходимы для разработки эффективных методов приближенной факторизации матриц-функций.

**1. Постановка задачи.** Задачу факторизации Винера–Хопфа мы будем рассматривать в матричной алгебре Винера  $W^{p \times p}$ , состоящей из матриц-функций  $A(t)$  порядка  $p$ , разлагающихся в абсолютно сходящийся матричный ряд Фурье,  $A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k t^k, |t|=1$ , где  $A_k$  – комплексные матрицы порядка  $p$  и  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|A_k\| < \infty$  для любой матричной нормы  $\|\cdot\|$  на  $\mathbb{C}^{p \times p}$ . Снабдим алгебру  $W^{p \times p}$  нормой  $\|A(t)\|_W = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|A_k\|_1$ , где  $\|\cdot\|_1$  есть максимальная столбцовая норма числовой матрицы.

Введем два подмножества алгебры  $W^{p \times p}$ :

$$W_+^{p \times p} = \left\{ A(t) \in W^{p \times p} : A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k \right\}, \quad W_-^{p \times p} = \left\{ A(t) \in W^{p \times p} : A(t) = \sum_{k=-\infty}^0 A_k t^k \right\}.$$

Это замкнутые подалгебры с единицей банаховой алгебры  $W^{p \times p}$ . Группу обратимых элементов алгебры  $W^{p \times p}$  ( $W_{\pm}^{p \times p}$ ) обозначим  $GW^{p \times p}$  ( $GW_{\pm}^{p \times p}$ ).

Известно (см., например, [1]), что любая матрица-функция  $A(t) \in GW^{p \times p}$  допускает следующее представление, называемое ее *правой факторизацией Винера–Хопфа*:

$$A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t), \quad |t|=1.$$

Здесь  $A_{\pm}(t) \in GW_{\pm}^{p \times p}$ ,  $D(t) = \text{diag}[t^{\rho_1}, \dots, t^{\rho_p}]$ , где  $\rho_1, \dots, \rho_p$  – целые числа, называемые *правыми частными индексами*  $A(t)$ . Частные индексы определяются однозначно матрицей-функцией  $A(t)$ , в отличие от факторизационных множителей  $A_{\pm}(t)$ .

Несмотря на большую востребованность задачи факторизации в прикладных исследованиях, в настоящее время для матричной задачи в общем случае отсутствуют явные формулы для частных индексов и факторизационных множителей. Имеются только некоторые специальные классы матриц-функций, для которых задача факторизации может быть решена явно [2], [3].

В связи с вышесказанным, очень важной является задача разработки приближенных методов факторизации Винера–Хопфа. Однако, здесь имеется существенное препятствие, которое еще не преодолено – матричная задача факторизации является, в общем случае, неустойчивой при малом возмущении исходной матрицы-функции  $A(t)$ .

Сформулируем, что мы понимаем под устойчивостью факторизационной задачи. Ясно, что должны выполняться условия устойчивости частных индексов и устойчивости факторизационных множителей:

Частные индексы  $\rho_1, \dots, \rho_p$  матрицы-функции  $A(t)$  называются *устойчивыми*, если для любого достаточно малого  $\delta > 0$  любая матрица-функция  $\tilde{A}(t)$ , удовлетворяющая неравенству  $\|A(t) - \tilde{A}(t)\|_W < \delta$ , обладает тем же набором правых частных индексов, что и  $A(t)$ .

Факторизационные множители  $A_{\pm}(t)$  называются *устойчивыми* или *непрерывно зависящими от  $A(t)$* , если для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что для любой матрицы-функции  $\tilde{A}(t)$ , удовлетворяющей неравенству  $\|A(t) - \tilde{A}(t)\|_W < \delta$ , среди всех возможных факторизаций  $\tilde{A}(t)$  найдется факторизация  $\tilde{A}(t) = \tilde{A}_-(t)\tilde{D}(t)\tilde{A}_+(t)$ , для которой  $\|A_{\pm}(t) - \tilde{A}_{\pm}(t)\|_W < \varepsilon$ .

Уточнение «среди всех возможных факторизаций найдется факторизация»  $\tilde{A}(t)$  связано с тем, что факторизационные множители  $A_{\pm}(t)$  находятся не единственным образом.

Напомним, что известно об устойчивости задачи. Имеется классический критерий Гохберга–Крейна–Боярского устойчивости

частных индексов [4]: система правых частных индексов  $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_p$  устойчива при малом возмущении матрицы-функции  $A(t)$  тогда и только тогда, когда  $\rho_p - \rho_1 \leq 1$ .

К сожалению, этот критерий не является эффективным, поскольку нет методов вычисления частных индексов. В настоящее время в общем случае не известно даже, когда матрица-функция допускает каноническую факторизацию (т.е. факторизацию с нулевыми частными индексами). Эффективные критерии устойчивости индексов имеются для треугольных матриц-функций второго порядка [3] и для лорановских матричных многочленов [5].

Относительно второго условия устойчивости факторизационной задачи известно следующее. Необходимым условием устойчивости факторов  $A_{\pm}(t)$  является совпадение частных индексов у исходной  $A(t)$  и возмущенной  $\tilde{A}(t)$  матриц-функций [6, теорема 6.14].

Необходимое условие устойчивости факторов  $A_{\pm}(t)$  является и достаточным. Это и есть содержание теоремы М.А. Шубина (см., например, [6, теорема 6.15]).

**Теорема (Шубин).** *Для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для любой матрицы-функции  $\tilde{A}(t)$ , удовлетворяющей неравенству  $\|A(t) - \tilde{A}(t)\|_W < \delta(\varepsilon)$ , и имеющей тот же набор частных индексов, что  $A(t)$ , среди всех возможных факторизаций  $\tilde{A}(t)$  найдется факторизация  $\tilde{A}(t) = \tilde{A}_-(t)D(t)\tilde{A}_+(t)$ , для которой  $\|A_{\pm}(t) - \tilde{A}_{\pm}(t)\|_W < \varepsilon$ .*

Для применения теоремы Шубина в вычислительной практике ее нужно уточнить. В этом и состоит цель данной работы.

**Задача.** *Для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  указать явную оценку для радиуса устойчивости  $\delta(\varepsilon)$  в терминах факторизации Винера–Хопфа исходной матрицы-функции  $A(t)$ .*

## 2. Уточнение теоремы Шубина.

Пусть  $A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t)$  и  $s$  – число различных правых частных индексов,  $\kappa_+ = \|A_+^{-1}(t)\|_W \|A_+(t)\|_W$ ,  $\kappa_- = \|A_-^{-1}(t)\|_W \|A_-(t)\|_W$ .

**Теорема 1.** *Возьмем любое  $\varepsilon_+ > 0$ . Пусть матрица-функция  $\tilde{A}(t) \in W^{p \times p}$  удовлетворяет неравенству*

$$\|A(t) - \tilde{A}(t)\|_W < \frac{q}{s \|A_+^{-1}(t)\|_W \|A_-^{-1}(t)\|_W + \kappa_-},$$

где  $q = q(\varepsilon_+) := \frac{\varepsilon_+}{2\kappa_+^2 (\|A_+(t)\|_W + \varepsilon_+) + \varepsilon_+}$ . Тогда  $\tilde{A}(t) \in GW^{p \times p}$ .

Если  $\tilde{A}(t)$  имеет такие же правые частные индексы, как  $A(t)$ , то факторизацию  $\tilde{A}(t) = \tilde{A}_-(t)D(t)\tilde{A}_+(t)$  можно выбрать таким образом, что выполняется неравенство  $\|A_+(t) - \tilde{A}_+(t)\|_W < \varepsilon_+$ .

**Теорема 2.** Возьмем  $\varepsilon_-$  такое, что  $0 < \varepsilon_- < \varepsilon_0$ , где

$$\varepsilon_0 = \frac{s}{\|A_+(t)\|_W} \left[ \|A(t)\|_W + \frac{\kappa_+ + 1}{(2\kappa_+^2 + 1)(s \|A_+^{-1}(t)\|_W \|A_-^{-1}(t)\|_W + \kappa_-)} \right].$$

Пусть матрица-функция  $\tilde{A}(t) \in W^{p \times p}$  удовлетворяет неравенству

$$\|A(t) - \tilde{A}(t)\|_W \leq \frac{q}{s \|A_+^{-1}(t)\|_W \|A_-^{-1}(t)\|_W + \kappa_-},$$

где  $q = q(\varepsilon_-) := \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_0(2\kappa_+^2 + 1)}$ . Тогда  $\tilde{A}(t) \in GW^{p \times p}$ .

Если  $\tilde{A}(t)$  имеет такие же правые частные индексы, как  $A(t)$ , то факторизацию  $\tilde{A}(t) = \tilde{A}_-(t)D(t)\tilde{A}_+(t)$  можно выбрать таким образом, что выполняется неравенство  $\|A_-(t) - \tilde{A}_-(t)\|_W < \varepsilon_-$ .

## Литература

1. Гохберг И.Ц. Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, Вып. 1. С. 71–124.
2. Адуков В.М. Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц-функций // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, Вып. 1. С. 54–74.
3. Adukov V.M., Mishuris G., Rogosin S. Exact conditions for preservation of the partial indices of a perturbed triangular 2x2 matrix function // Proc. R. Soc. A. 2020. 476: 2237, Article ID 20200099.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. 13:2(80), 3–72.
5. Adukova N.V., Adukov V.M. On effective criterion of stability of partial indices for matrix polynomials // Proc. R. Soc. A. 2020. 476: 2237, Article ID 20200012.
6. Litvinchuk G.S., Spitkovskii I.M. Factorization of measurable matrix functions. Operator Theory, Advances and Applications. Basel: Springer, 1987. 372 p.

**V.M. Adukov**

South Ural State University

## ON THE THEOREM OF M.A. SHUBIN ABOUT THE CONTINUITY OF FACTORS IN THE WIENER–HOPF FACTORIZATION

**Keywords:** *Wiener–Hopf factorization, stability of partial indices, stability of factorization factors, effective estimates.*

**Abstract.** *The work provides a clarification of M.A. Shubin's theorem on the continuity of factors in the Wiener–Hopf factorization of matrix functions. Effective estimates are obtained for the radius of the neighborhood of the original matrix function for which the factorization factors are stable. Getting the perturbed matrix function into this neighborhood guarantees that factorization factors will be found for it with a given accuracy. The estimates are obtained explicitly in terms of the Wiener–Hopf factorization of the original matrix function. These estimates are necessary for the development of effective methods for approximate factorization of matrix functions.*

**М. Алмохамед, И.В. Тихонов**  
*МТУСИ, МГУ имени М.В.Ломоносова*

УДК 517.9

## **ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**

**Ключевые слова:** *абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка, линейная обратная задача, финальное переопределение высокого порядка, характеристическая функция, элементарные и присоединенные решения.*

*Делается дополнение к спектральной теории линейных обратных задач. Изучается однородная обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка. Уравнение содержит неизвестное неоднородное слагаемое. В начальный момент времени заданы стандартные условия Коши. В качестве дополнительного условия взято финальное переопределение со значением производной порядка выше двух от основной неизвестной функции. Мы называем это финальным переопределением высокого порядка. Для поставленной задачи указаны возможные элементарные решения. Кроме того, выявлены нетривиальные присоединенные решения, возникающие при наличии кратного нуля у характеристической функции обратной задачи. Приведены примеры соответствующих обратных задач для уравнений в частных производных. В результате имеем конкретные иллюстрации к нашей теории.*

Настоящая работа посвящена общей теории линейных обратных задач, понимаемых в смысле [1], [2]. Рассматривается абстрактное

дифференциальное уравнение второго порядка. Требуется найти неизвестное неоднородное слагаемое в уравнении при помощи дополнительного условия в финальный момент времени  $t = T > 0$ . Подобные задачи исследовались прежде с финальными условиями (переопределениями) «первого», «второго», а также «третьего» рода (см. [3]–[7]). В недавней работе [8] тематика получила развитие для новой обратной задачи с переопределением «повышенного» типа – когда порядок производной в финальном условии совпадает с порядком дифференциального уравнения  $n = 2$ .

Сейчас мы обсудим усиленный вариант, когда порядок производной в финальном условии *превышает* порядок исходного дифференциального уравнения. Покажем, что здесь наблюдаются интересные математические закономерности.

В банаховом пространстве  $E$  на отрезке  $[0, T] \subset \mathbf{R}$  рассматриваем задачу о нахождении функции  $u: [0, T] \rightarrow E$  и элемента  $g \in E$  из соотношений

$$u''(t) = Au(t) + g, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (2)$$

$$u^{(q)}(T) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $q \in \mathbf{N}$  и  $q \geq 3$  (случай  $q = 0, 1, 2$  изучены в работах [3], [4], [7], [8]). Оператор  $A$  считаем линейным в пространстве  $E$  и заданным на области определения  $D(A) \subset E$ , не обязательно плотной в  $E$ . Другие ограничения на  $A$  нам не понадобятся. Условия (2) суть стандартные условия Коши, а (3) – финальное переопределение высокого порядка. Задача (1)–(3) относится к классу обратных задач (см. [1], [2]). Условия (2), (3) берем однородными, так как нас интересует только единственность решения.

При этом решением обратной задачи (1)–(3) называем пару  $(u(t), g)$ , удовлетворяющую перечисленным соотношениям при ограничениях

$$u \in C^q([0, T], E), \quad u(t) \in D(A) \text{ при } 0 \leq t \leq T, \quad g \in E.$$

Ясно, что задача (1)–(3) всегда имеет тривиальное решение

$$u(t) \equiv 0, \quad g = 0. \quad (4)$$

Ставится вопрос о наличии других, нетривиальных решений, отличных от пары (4).

Ключевую роль в исследовании играет скалярная задача

$$y''(t, \lambda) = \lambda y(t, \lambda) + 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = 0, \quad (6)$$

$$y^{(q)}(T, \lambda) = 0 \quad (7)$$

со спектральным параметром  $\lambda$ . Значение  $q$  – то же, что в условии (3). Через  $y'(t, \lambda)$ ,  $y''(t, \lambda)$ ,  $y^{(q)}(t, \lambda)$  обозначаем соответствующие производные по переменной  $t$ . Требуется найти значения  $\lambda \in \mathbf{C}$ , при которых задача (5)–(7) разрешима в классе  $C^q[0, T]$ . Систему (5)–(7) удобно разбить на задачу Коши (5), (6) и дополнительное финальное условие (7).

Так, при любом  $\lambda \in \mathbf{C}$  решение задачи Коши (5), (6) существует, единственно и имеет вид

$$y(t, \lambda) = \frac{\text{ch}(\sqrt{\lambda} t) - 1}{\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \frac{t^{2j+2}}{(2j+2)!}. \quad (8)$$

Продифференцируем данную функцию  $q$  раз по переменной  $t$ . В зависимости от четности значения  $q$  получим представление

$$y^{(q)}(t, \lambda) = \begin{cases} \lambda^p \text{sh}(\sqrt{\lambda} t) / \sqrt{\lambda}, & q = 2p + 1, \\ \lambda^p \text{ch}(\sqrt{\lambda} t), & q = 2p + 2, \end{cases} \quad (9)$$

с соответствующим  $p \in \mathbf{N}$ . Здесь

$$\lambda^p \frac{\text{sh}(\sqrt{\lambda} t)}{\sqrt{\lambda}} = \lambda^p \frac{t}{1!} + \lambda^{p+1} \frac{t^3}{3!} + \lambda^{p+2} \frac{t^5}{5!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{p+j} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad (10)$$

$$\lambda^p \text{ch}(\sqrt{\lambda} t) = \lambda^p + \lambda^{p+1} \frac{t^2}{2!} + \lambda^{p+2} \frac{t^4}{4!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{p+j} \frac{t^{2j}}{(2j)!} \quad (11)$$

– целые функции переменных  $t \in \mathbf{R}$  и  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Функции (10), (11) относятся к классу *обобщенных экспонент* (см. [9]) и тесно связаны с целыми функциями *типа Миттаг-Леффлера* (см. [10], [11]).

Подстановка выражений (9) в финальное условие (7) приводит к характеристическому уравнению  $L(\lambda) = 0$ . Здесь

$$L(\lambda) = L(\lambda, q, T) \equiv \begin{cases} \lambda^p \text{sh}(\sqrt{\lambda} T) / \sqrt{\lambda}, & q = 2p + 1, \\ \lambda^p \text{ch}(\sqrt{\lambda} T), & q = 2p + 2, \end{cases} \quad (12)$$

с соответствующим  $p \in \mathbf{N}$ . Для характеристической функции (12) определим множество нулей

$$\Lambda \equiv \{ \lambda \in \mathbf{C} : L(\lambda) = 0 \} = \{ \lambda_k \}_{k \in \mathbf{N} \cup \{0\}}, \quad \Lambda = \Lambda(q, T). \quad (13)$$

Множество (13) всегда содержит нуль  $\lambda_0 = 0$  кратности

$$p = [(q-1)/2] \in N. \quad (14)$$

Оставшаяся часть нулей выражается формулами

$$q = 2p + 1 \Rightarrow \lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{T^2}, \quad (15)$$

$$q = 2p + 2 \Rightarrow \lambda_k = -\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4T^2} \quad (16)$$

с нумерацией  $k \in N$  при любом  $p \in N$ . Все нули в (15) и (16) являются простыми.

Итак, число  $\lambda \in C$  является спектральным значением задачи (5)–(7) тогда и только тогда, когда оно оказывается нулем характеристической функции (12) при соответствующем значении  $q \geq 3$ .

Для каждого такого  $\lambda = \lambda_k$  функция  $y(t, \lambda_k)$  вида (8) удовлетворяет всем соотношениям (5)–(7), т. е. является собственной функцией поставленной спектральной задачи. Как ясно из сказанного выше, спектральные значения задачи (5)–(7) при любом  $q \geq 3$  локализованы на луче  $(-\infty, 0] \subset R$ .

Вернемся теперь к обратной задаче (1)–(3). Допустим, что какой-то нуль  $\lambda = \lambda_k$  функции (12) оказался собственным значением линейного оператора  $A$ , т. е.

$$Af_k = \lambda_k f_k \quad (17)$$

с собственным вектором  $f_k \in D(A)$ ,  $f_k \neq 0$ . Тогда пара

$$u(t) = y(t, \lambda_k) f_k, \quad g = f_k \quad (18)$$

служит нетривиальным решением однородной обратной задачи (1)–(3). Такие решения (если они есть) будем называть *элементарными решениями* обратной задачи. Дадим явные выражения элементарных решений (18) с учетом представления (8) для функции  $y(t, \lambda)$ .

Для спектрального значения  $\lambda_k = -k^2 \pi^2 / T^2$ , как в формуле (15), соответствующая пара (18) принимает вид

$$u(t) = y(t, \lambda_k) f_k = \frac{T^2}{k^2 \pi^2} \left( 1 - \cos \frac{k\pi t}{T} \right) f_k, \quad g = f_k. \quad (19)$$

Такие решения возможны в задаче (1)–(3) при любом нечетном  $q \geq 3$  (а также, согласно [4], при  $q = 1$ ).

Для значения  $\lambda_k = -(2k-1)^2 \pi^2 / (4T^2)$ , как в формуле (16), пара (18) принимает вид

$$u(t) = y(t, \lambda_k) f_k = \frac{4T^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \left( 1 - \cos \frac{(2k-1)\pi t}{2T} \right) f_k, \quad g = f_k. \quad (20)$$

Такие решения возможны в задаче (1)–(3) при любом четном  $q \geq 4$  (а также, согласно [8], при  $q = 2$ ; но уже при  $q = 0$  элементарные решения будут другими – см., например, [7]).

Для значения  $\lambda_0 = 0$  имеем

$$u(t) = y(t, 0) f_0 = (t^2/2) f_0, \quad g = f_0. \quad (21)$$

Такие решения в задаче (1)–(3) возможны всегда – независимо от четности или нечетности числа  $q \geq 3$  (при  $q = 0, 1, 2$  подобные решения не возникают).

Проверка формул (19)–(21) осуществляется непосредственной подстановкой в соответствующую задачу (1)–(3). При этом используется соотношение (17) для собственного вектора  $f_k \in D(A)$  с собственным значением  $\lambda_k \in \Lambda(q, T)$ .

Отдельно обсудим значение  $\lambda_0 = 0$ , дающее нуль кратности  $p \geq 1$  (см. (14)) для характеристической функции  $L(\lambda)$  из формулы (12). Если  $q \geq 5$ , то кратность данного нуля больше либо равна двух. Как показано в работе [12] (см. также [13], [14]), наличие кратных нулей у характеристической функции может приводить к появлению дополнительных *присоединенных решений* обратной задачи. В упомянутых работах [12]–[14] исследовались другие примеры, но тот же принцип переносится на нашу ситуацию.

Итак, пусть  $q \geq 5$  и  $p = [(q-1)/2] \geq 2$  (см. (14)), где  $p$  – кратность нуля  $\lambda_0 = 0$  характеристической функции (12). Предположим также, что число  $\lambda_0 = 0$  является кратным собственным значением оператора  $A$  в том смысле, что существуют собственный вектор  $f_0 = f_{0,0}$  и цепочка присоединенных векторов  $f_{0,1}, \dots, f_{0,r}$  длины  $r \geq 1$ , для которых

$$A f_{0,0} = 0, \quad A f_{0,j} = f_{0,j-1}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (22)$$

согласно общему определению [15, с. 117]. При этом  $f_{0,j} \in D(A^{j+1})$  и  $f_{0,j} \neq 0$  для  $j = 0, 1, \dots, r$ . Тогда, взяв любое число  $m \in \mathbb{N}$  из интервала

$$1 \leq m \leq d, \quad d \equiv \min(p-1, r), \quad p \equiv [(q-1)/2], \quad (23)$$

получаем присоединенное решение вида

$$u(t) = \frac{t^{2m+2}}{(2m+2)!} f_{0,0} + \frac{t^{2m}}{(2m)!} f_{0,1} + \dots + \frac{t^2}{2!} f_{0,m}, \quad g = f_{0,m}. \quad (24)$$

Коротко можно записать

$$u(t) = \sum_{j=0}^m \frac{t^{2(m+1-j)}}{(2(m+1-j))!} f_{0,j}, \quad g = f_{0,m}. \quad (25)$$

В такой записи формула (25) применима при всех  $m=0,1,\dots,d$  со значением  $d \in \mathbb{N}$ , взятым из (23). При  $m=0$  получаем прежнее элементарное решение (21), а при остальных  $m=1,\dots,d$  новые присоединенные решения вида (24).

Непосредственно проверяется, что все пары (24) (или (25)) удовлетворяют обратной задаче (1)–(3). В проверке используются соотношения (22), а также то, что  $q > 2m+2$  при любом  $m \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющем неравенству из (23).

Покажем на примерах, как применять наши результаты к обратным задачам с переопределениями высокого порядка.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + g, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = 0, & u'(0) = 0, \\ u^{(7)}(T) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Здесь  $q=7$ . Характеристическая функция задачи (26) по формуле (12) принимает вид

$$L(\lambda) = \lambda^3 \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} T) / \sqrt{\lambda}. \quad (27)$$

Целая функция (27) имеет серию простых нулей  $\lambda_k = -k^2 \pi^2 / T^2$  с нумерацией  $k \in \mathbb{N}$ , а также нуль  $\lambda_0 = 0$  кратности  $p=3$ .

Зафиксируем, например, нуль  $\lambda_k = -k^2 \pi^2 / T^2$  с конкретным  $k \in \mathbb{N}$ . Предположим, что  $\lambda = \lambda_k$  есть собственное значение оператора  $A$  в смысле (17) с собственным вектором  $f_k \neq 0$ . Тогда однородная обратная задача (26) имеет нетривиальное элементарное решение вида (19).

Допустим еще, что число  $\lambda_0 = 0$  есть кратное собственное значение оператора  $A$  в смысле (22) с собственным вектором  $f_0 = f_{0,0} \neq 0$  и присоединенными к нему векторами  $f_{0,j} \neq 0$ ,  $j=1,\dots,r$ , где  $r \geq 2$ . Тогда обратная задача (26) помимо обязательного элементарного решения (21) имеет два присоединенных решения вида

$$u(t) = \frac{t^4}{24} f_{0,0} + \frac{t^2}{2} f_{0,1}, \quad g = f_{0,1}, \quad (28)$$

$$u(t) = \frac{t^6}{720} f_{0,0} + \frac{t^4}{24} f_{0,1} + \frac{t^2}{2} f_{0,2}, \quad g = f_{0,2}. \quad (29)$$

Пары (28) и (29) получены по правилу (24) для  $m = 1$  и  $m = 2$ .

Составим под эти соотношения конкретную задачу для уравнения в частных производных. Укажем сначала дифференциальный оператор с подходящими спектральными свойствами.

**Пример 2.** Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} f''(x) = \mu f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ f'(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = f^{(5)}(l), \end{cases} \quad (30)$$

со спектральным параметром  $\mu \in \mathbb{C}$ .

Задаче (30) отвечает оператор  $A = d^2/dx^2$  в пространстве  $C[0, l]$  на области определения  $D(A) = \{ f \in C^5[0, l] : f'(0) = 0, f^{(3)}(0) = f^{(5)}(l) \}$ .

Данный оператор имеет собственные значения

$$\mu_0 = 0 \quad \text{и} \quad \mu_m = -\frac{m^2 \pi^2}{l^2} \quad \text{при} \quad m \in \mathbb{N} \quad (31)$$

с соответствующими собственными функциями

$$f_0(x) = 1, \quad f_m(x) = \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (32)$$

При  $m \in \mathbb{N}$  значения  $\mu_m$  из формулы (31) являются простыми. Особое значение  $\mu_0 = 0$  является кратным кратности три. Для собственной функции  $f_0(x) = f_{0,0}(x) = 1$  в качестве присоединенных функций можно взять

$$f_{0,1}(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f_{0,2}(x) = \frac{x^4}{24}. \quad (33)$$

Функции (33) удовлетворяют на  $[0, l]$  краевым условиям из (30), а также равенствам  $Af_{0,1} = f_{0,0}$ ,  $Af_{0,2} = f_{0,1}$ .

Теперь можно перейти к примеру конкретной обратной задачи.

**Пример 3.** Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) + g(x), & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_{xxx}^{(3)}(0, t) = u_{xxxxx}^{(5)}(l, t), \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_{uuuuu}^{(7)}(x, T) = 0, \end{cases} \quad (34)$$

с неизвестными функциями  $u(x,t)$  и  $g(x)$ . Для упрощения восприятия количество производных высокого порядка отмечено в верхнем индексе функции  $u(x,t)$ .

Указанная система (34) служит аналогом обратной задачи (26) с оператором  $A = d^2/dx^2$ , отвечающим спектральной задаче (30). Соответственно (см. пример 1) основные нули  $\lambda_k$  характеристической функции (27) определяются формулой (15) вместе с добавочным нулем  $\lambda_0 = 0$  кратности три.

Согласно предыдущему примеру 2 такое же число  $\mu_0 = 0$  есть кратное собственное значение оператора  $A = d^2/dx^2$  с собственной функцией  $f_0(x) = f_{0,0}(x) = 1$  и присоединенными функциями вида (33). Совмещая общие шаблоны (21), (28), (29) с этими конкретными выражениями, получаем элементарное решение

$$u(x,t) = t^2/2, \quad g(x) = 1 \quad (35)$$

и два присоединенных решения

$$u(x,t) = \frac{t^4}{24} + \frac{x^2 t^2}{4}, \quad g(x) = \frac{x^2}{2}, \quad (36)$$

$$u(x,t) = \frac{t^6}{720} + \frac{x^2 t^4}{48} + \frac{x^4 t^2}{48}, \quad g(x) = \frac{x^4}{24}. \quad (37)$$

Пары (35)–(37) удовлетворяют всем соотношениям в системе (34) при любом выборе  $l > 0$  и  $T > 0$ . Тем самым, единственность решения в указанной обратной задаче всегда нарушается.

Возможны и другие элементарные решения задачи (34) в случае, когда отношение  $T/l$  рационально. Действительно, пусть  $T/l = k/m$  при некоторых  $k, m \in \mathbb{N}$ . Тогда  $k/T = m/l$  и  $\lambda_k = \mu_m$  для соответствующих чисел  $\lambda_k$  и  $\mu_m$  (см. (15) и (31)).

Другими словами, нуль  $\lambda_k$  характеристической функции (27) совпадает с собственным значением  $\mu_m$  оператора  $A = d^2/dx^2$ . Совмещая шаблон (19) с функцией  $f_k(x) = \cos(k\pi x/T) = \cos(m\pi x/l)$  (ср. с (32)), получаем элементарное решение

$$u(x,t) = \frac{T^2}{k^2 \pi^2} \left( 1 - \cos \frac{k\pi t}{T} \right) \cos \frac{k\pi x}{T}, \quad g(x) = \cos \frac{k\pi x}{T}. \quad (38)$$

Точнее, решений вида (38) будет бесконечно много, так как существует бесконечно много различных дробей  $k/m$ , выражающих рациональное

число  $T/l$ . Все эти решения удовлетворяют системе (34). При проверке краевого условия  $u_{xxx}^{(3)}(0,t) = u_{xxxx}^{(5)}(l,t)$  используется то, что  $k/T = m/l$ .

Как видим, спектр в обратной задаче (34) весьма богат. Оговоримся, moreover, что при иррациональном отношении  $T/l$  элементарные решения вида (38) уже не возникают.

Изложенный материал дает основу для последующего изучения обратных задач с переопределениями высокого порядка. Вопрос о возможных приложениях данной теории пока остается открытым.

### Литература

1. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. N.Y., Basel: Marcel Dekker, 2000. xiv+710 p.
3. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 637–644.
4. Алмохамед М. Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2019. № 3. С. 50–58.
5. Алмохамед М., Тихонов И. В. Об обратной задаче для эволюционного уравнения второго порядка с финальным переопределением третьего рода // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2021. С. 35–37.
6. Тихонов И. В., Алмохамед М. Обратная задача с переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 7. С. 890–911.
7. Almohamed M., Tikhonov I. V. Specific cases of one general inverse problem for abstract differential equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. № 2. P. 502–509.
8. Алмохамед М. Об одной специальной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: Герценовские чтения – 2024. СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2024 (в печати).
9. Тихонов И. В., Алмохамед М. Обобщенные экспоненты и их применение в теории дифференциальных уравнений // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 21. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. С. 345–353.
10. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
11. Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
12. Алмохамед М., Тихонов И. В. Примеры присоединенных решений в линейных обратных задачах // Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7. вып. 4. С. 395–411.
13. Алмохамед М., Тихонов И. В. О некоторых спектральных исследованиях, связанных с теорией обратных задач // Современные проблемы теории функций и их приложения. Саратов: Саратовский университет, 2022. С. 20–26.

14. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Алмохамед М. О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики // Современные проблемы теории функций и их приложения. Саратов: Саратовский университет, 2022. С. 294–299.

15. Крейн С. Г. (ред.) (Коллектив авторов). Функциональный анализ, изд. 2-е, перераб. и дополн. (серия «Справочная математическая библиотека»). М.: Наука, 1972. 544 с.

**M. Almohamed, I. V. Tikhonov**  
MTUCI, MSU

## **ELEMENTARY AND GENERALIZED SOLUTIONS OF INVERSE PROBLEMS WITH HIGHER-ORDER OVERDETERMINATIONS**

**Keywords:** *abstract differential equation of the second order, linear inverse problem, final higher-order overdetermination, characteristic function, elementary and generalized solutions.*

**Abstract.** *An addition to the spectral theory of linear inverse problems is done. A homogeneous inverse problem for an abstract second-order differential equation is considered. The equation includes an unknown inhomogeneous term. At the initial moment of time, the standard Cauchy conditions are given. As additional condition, a final overdetermination is taken. It contains the derivative of the main unknown function and the order of the derivative is greater than two. We will name that condition a final higher-order overdetermination. For the inverse problem non-trivial elementary solutions are found. Possible generalized solutions are found, too. Examples of corresponding inverse problems for partial differential equations are considered. These provide concrete illustrations for our general theory.*

**М.Б. БАНАРУ, Г.А. БАНАРУ**  
Смоленский государственный университет

УДК 514.76

## **О ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ 6-МЕРНОГО ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВА МНОГООБРАЗИЯ**

Ключевые слова: *приближенно келерово многообразие, почти контактная метрическая структура, гиперповерхность, структурные уравнения Кармана.*

*Представлены структурные уравнения Кармана почти контактной метрической структуры, индуцированной на*

*ориентируемой гиперповерхности 6-мерного приближенно келерова многообразия.*

## 1.

Еще с середины прошлого века известно, что шестимерная сфера  $S^6$  допускает приближенно келерову структуру, причем  $S^6$  – исторически первый пример отличного от келерова почти эрмитова многообразия [1]. Вот почему различные аспекты геометрии приближенно келерова многообразия  $S^6$  привлекали (и привлекают) внимание различных специалистов в области эрмитовой геометрии. Например, авторами статей о приближенно келеровой шестимерной сфере являются как всеми признанные классики эрмитовой геометрии А. Грей, Е. Калаби, К. Секигава, В.Ф. Кириченко, так и многие другие геометры. Более того, по нашему мнению, для специалистов в области эрмитовой геометрии стало негласным правилом получать какие-либо результаты, связанные с приближенно келеровой  $S^6$ . Авторы настоящей заметки специализируются преимущественно в области геометрии 6-мерных многообразий с интегрируемой почти эрмитовой структурой (а приближенно келерова структура не является интегрируемой). Однако им также удалось получить несколько результатов, связанных с 6-мерной сферой с так называемой канонической приближенно келеровой структурой [2], [3], [4].

В последние годы внимание исследователей привлекает и другое 6-мерное многообразие, допускающее приближенно келерову структуру – произведение двух трехмерных сфер  $S^3 \times S^3$ . За последние десять лет по этой тематике вышло множество интересных работ, среди которых мы особо выделим статьи [5], [6], [7], [8]. Отметим, что произведение трехмерных сфер  $S^3 \times S^3$  (как и некоторые другие 6-мерные приближенно келеровы многообразия, отличные от сферы  $S^6$ ) не связано с так называемыми 3-векторными произведениями в алгебры Кэли [9]. В своей самой первой значительной работе замечательный отечественный геометр В.Ф. Кириченко установил [10], что только на 6-мерной сфере приближенно келерова структура порождается 3-векторными произведениями в алгебре октав. В связи с этим многочисленные результаты авторов настоящей заметки, связанные с 6-мерными подмногообразиями алгебры Кэли с почти эрмитовой структурой, индуцированной вышеупомянутыми 3-векторными произведениями, не могут быть применены ни к приближенно келерову многообразию  $S^3 \times S^3$ , ни к другим 6-мерным приближенно келеровым многообразиям, отличным от  $S^6$ .

В данной работе мы представляем структурные уравнения Картана для почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности 6-мерного приближенно келерова многообразия. Эти

структурные уравнения являются детализацией тех уравнений, которые были выведены около тридцати лет назад Л.В. Степановой для самого общего случая, а именно для почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности произвольного почти эрмитова многообразия [11]. Они могут послужить отправным пунктом на пути исследования почти контактных метрических гиперповерхностей 6-мерных приближенно келеровых многообразий, отличных от  $S^6$ , с помощью метода внешних форм Эли Картана, усовершенствованного выдающимися отечественными геометрами Г.Ф. Лаптевым, А.М. Васильевым и В.Ф. Кириченко.

## 2.

Как известно, почти контактной метрической структурой на многообразии нечетной размерности  $N^{2n-1}$  называется четверка тензорных полей  $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ , если для этой четверки выполняются следующие условия [12]:

$$\begin{aligned} \eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{N}(N^{2n-1}). \end{aligned}$$

Здесь  $\xi$  – структурный вектор,  $\eta$  – структурная форма,  $\Phi$  – поле тензора типа  $(1, 1)$ ,  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  – риманова метрика; через  $\mathfrak{N}(N^{2n-1})$  обозначен модуль  $C^\infty$ -гладких векторных полей на многообразии  $N^{2n-1}$ .

Также известно [12], что заданную на четномерном многообразии  $M^{2n}$  пару  $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  называют почти эрмитовой структурой, если  $J$  – почти комплексная структура, а  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  – риманова метрика. При этом  $J$  и  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  должны удовлетворять такому соотношению

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}).$$

Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется почти эрмитовым. Со всякой почти эрмитовой структурой  $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  на многообразии  $M^{2n}$  связано поле 2-формы, которая определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n})$$

и называется фундаментальной (иногда – келеровой) формой структуры. Почти эрмитово многообразие называется приближенно келеровым (nearly Kählerian, НК-многообразием, иногда  $W_1$ -многообразием [13]), если

$$\nabla_X (F)(X, Y) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}).$$

Рассмотрим произвольное 6-мерное почти эрмитово многообразие  $(M^6, \{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\})$ . Выберем и зафиксируем на нем точку  $p$ . Пусть  $T_p(M^6)$  – пространство, касательное к этому многообразию в выбранной точке,  $\{J_p, g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  – почти эрмитова структура, порожденная исходной

структурой  $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ . Конструкция реперов, адаптированных почти эрмитовой структуре (А-реперов), в так называемой естественной комплексификации касательного пространства выглядит так:

$$(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}).$$

Здесь  $\varepsilon_a$  – собственные векторы оператора почти комплексной структуры, которые соответствуют собственному значению оператора  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\varepsilon_{\hat{a}}$  – собственные векторы, которые соответствуют собственному значению  $-i$ . Индекс  $a$  в данном случае принимает значения от 1 до 3;  $\hat{a} = a + 3$  [4].

### 3.

Наш основной результат содержит

**Теорема.** *Первая группа записанных в А-репере структурных уравнений почти контактной метрической структуры, индуцированной на ориентируемой гиперповерхности 6-мерного приближенно келерова многообразия, имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \wedge \omega_\gamma + \\ &+ i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega + (-\sqrt{2} \tilde{B}^{3\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}^{\alpha\beta 3} + i\sigma^{\alpha\beta}) \omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \\ &- i\sigma_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega + (-\sqrt{2} \tilde{B}_{3\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{\alpha\beta 3} - i\sigma_{\alpha\beta}) \omega^\beta \wedge \omega; \\ d\omega &= \sqrt{2} B_{3\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sqrt{2} B^{3\alpha\beta} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta - \\ &- 2i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + (\tilde{B}_{3\beta 3} + i\sigma_{3\beta}) \omega \wedge \omega^\beta + (\tilde{B}^{3\beta 3} - i\sigma_3^\beta) \omega \wedge \omega_\beta. \end{aligned}$$

Функции  $\{B^{abc}\}, \{B_{abc}\}$  являются компонентами тензоров Кириченко,  $\{\tilde{B}^{abc}\}, \{\tilde{B}_{abc}\}$  – компонентами модифицированных тензоров Кириченко;  $\sigma$  – вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности в 6-мерное приближенно келерово многообразие;  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ ;  $a, b, c = 1, 2, 3$ .

Отметим, что эти структурные уравнения являются обобщением уравнений для случая почти контактных метрических структур на гиперповерхностях 6-мерной сферы с канонической приближенно келеровой структурой [2], [3], [4], а также для некоторых других специальных случаев (например, для случая гиперповерхностей с малым типовым числом [14], [15], [16]). Разумеется, полученные уравнения являются обобщением и для уравнений почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности 6-мерного келерова многообразия, поскольку класс келеровых многообразий входит в состав любого из 16 классов почти эрмитовых многообразий [13].

## Литература

1. Gray A. Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. V.10. N2. P.353-366.
2. Abu-Saleem A., Banaru M. On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2014. V.8. N1. P.35-46.
3. Banaru M., Banaru G. A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III. Mathematics, Informatics, Physics. 2015. T.8. №2. P.21-28.
4. Abu-Saleem A., Banaru M.B., Banaru G.A. A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2017. Т.85. №3. С.107-114.
5. Antić M. A class of slant surfaces of the nearly Kähler  $S^3 \times S^3$  // Hacettepe J. Math. Stat. 2018.V. 47. N2. P. 251- 260.
6. Djorić Mil., Djorić Mir., Moruz M. Geodesic lines on nearly Kähler  $S^3 \times S^3$  // J. Math. Anal. Geom. 2018. V. 46. P.1099-1108.
7. Dioos B., Vrancken L., Wang X. Lagrangian submanifolds in the homogeneous nearly Kähler  $S^3 \times S^3$  // Ann. Glob. Anal. Geom. 2018. V.53. N1. P.39-66.
8. Daurtseva N.A., Smolentsev N. K., On almost complex structures on six dimensional products of spheres // J. Math. Sci., New York. 2020. V.245. №5. P. 568-600.
9. Gray A. Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. V.21. N4. P.614-620.
10. Кириченко В.Ф. Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Вестник Московского университета. Сер.1. Математика. Механика. 1973. №3. С.70-75.
11. Степанова Л.В. Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий // Дисс. ... к.ф.-м.н. Москва. МПГУ им. В.И. Ленина. 1995.
12. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Одесса: Печатный дом, 2013. 458с.
13. Gray A., Hervella L.M., The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. V.123. N4. P.35-58.
14. Banaru M. On nearly-cosymplectic hypersurfaces in nearly-Kählerian manifolds // Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica. 2002. V.47. N3. P.3-11.
15. Банару М.Б. О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближенно келеровых многообразий // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т.8. №2. С.357-364.
16. Банару М.Б. Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. №3. С. 60-62.

**M.B. Banaru, G.A. Banaru**  
Smolensk State University

### ON ALMOST CONTACT METRIC STRUCTURE ON A HYPERSURFACE OF A 6-DIMENSIONAL NEARLY KÄHLERIAN MANIFOLD

**Keywords:** *nearly Kählerian manifold, almost contact metric structure, hypersurface, Cartan structural equations.*

**Abstract.** *The Cartan structural equations of almost contact metric structure induced on an oriented hypersurface in a 6-dimensional nearly Kählerian manifold are presented.*

## ОБОБЩЕННЫЕ ЯДРА И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРА

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, обобщенные ядра нелинейных системных операторов, спектральные характеристики нелинейных системных операторов, обобщенное преобразование Лапласа.*

*Методы анализа на основе системных операторов с обобщенными ядрами в настоящее время особую популярность, так как известные методы анализа нелинейных систем не могут применяться, когда нелинейность становится существенной. Метод нелинейных системных операторов позволяет исследовать системы с инерционными нелинейностями. В качестве нелинейных систем будут рассматриваться динамические системы, определяемые нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра. В работе строятся нелинейные системные операторы как любого конечного порядка (называемые полиномиальными системными операторами), так системные операторы бесконечного порядка, вычисляются их спектральные характеристики как обобщенное преобразование Лапласа соответствующих ядер этих операторов.*

**1. Постановка задачи.** В данной работе будут рассматриваться примеры нелинейных системных операторов с обобщенными ядрами, порождённые следующими интегро-дифференциальными уравнениями (ИДУ) Вольтерра:

$$1. \int_0^t K(t-s)x(s)ds + x'(t) + ax^2(t) = f(t);$$

$$2. \int_0^t K(t-s)x(s)ds + x'(t) + ax + bx^2(t) = f(t);$$

$$3. \int_0^t K(t-s)x(s)ds + x'(t) + ax + b \sin x = f(t);$$

$$4. \int_0^t K(t-s)x(s)ds + x'(t) + ax^3 + bx^2 + cx + d = f(t);$$

$$5. \int_0^t \int_0^t K_1(t-s_1)K_2(t-s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + x'(t) + ax + bx^2 + cx^n = f(t),$$

где  $n > 2$ .

Целями работы являются следующие:

1. Построение нелинейных системных операторов, порождённых интегро-дифференциальными уравнениями 1)-5);

2. Нахождение обобщенных ядер для нелинейного системного оператора

$A$ , определяемого следующим образом:

$$Ax = \sum_{m=1}^{\infty} S_m (a_m * x^{\otimes m}),$$

где  $S_m$  – оператор сокращения переменных порядка  $m$ ,  $a_m$  –  $m$ -мерная обобщенная функция, называемая обобщенным ядром  $m$ -ого порядка оператора  $A$ ,  $x^{\otimes m}$  – тензорная степень обобщенно функции  $x$ ,  $*$  –  $m$ -мерная свертка обобщенных функции;

3. Вычисление обобщенного преобразования Лапласа [1, 2] обобщенных ядер нелинейного системного оператора  $A$ , называемых обобщенными спектральными характеристиками оператора  $A$  для интегро-дифференциальных уравнений 1)-5).

**2. Основная часть.** Уравнение 1) определяет полиномиальный системный оператор [2] второго порядка

$$Ax = a_1 * x + S_2 (a_2 * x^{\otimes 2}),$$

с обобщенными ядрами

$$a_1 = K + \delta', \quad a_2 = a(\delta \otimes \delta),$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $\delta'$  – обобщенная производная дельта-функции Дирака,

Применяя к обобщенным ядрам  $a_1$  и  $a_2$  обобщенное преобразование Лапласа [3], получим  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{a}_2$  – спектральные характеристики первого и второго порядка оператора  $A$ .

Так как обобщенное преобразование Лапласа линейно [1], и обладает следующим свойством [1]: обобщенное преобразование Лапласа тензорного произведения обобщенных функций равно тензорному произведению этих обобщенных функций, то получим следующие равенства:

$$\tilde{a}_1(\lambda) = \tilde{K}(\lambda) + \tilde{\delta}'(\lambda) = \tilde{K}(\lambda) + \lambda,$$

$$\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) = a(\tilde{\delta} \otimes \tilde{\delta})(\lambda_1, \lambda_2) = a\tilde{\delta}(\lambda_1)\tilde{\delta}(\lambda_2) = a.$$

Уравнение 2) определяет квадратичный системный оператор

$$Ax = a_1 * x + S_2 (a_2 * x^{\otimes 2}),$$

с обобщенными ядрами

$$a_1 = K + \delta' + a\delta, \quad a_2 = b\delta^{\otimes 2} = b(\delta \otimes \delta).$$

Применяя к ядрам  $a_1$  и  $a_2$  обобщенное преобразование Лапласа, получим  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{a}_2$  – спектральные характеристики первого и второго порядка рассматриваемого системного оператора  $A$ :

$$\tilde{a}_1(\lambda) = \tilde{K}(\lambda) + \tilde{\delta}'(\lambda) = \tilde{K}(\lambda) + \lambda,$$

$$\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) = a(\tilde{\delta} \otimes \tilde{\delta})(\lambda_1, \lambda_2) = a\tilde{\delta}(\lambda_1)\tilde{\delta}(\lambda_2) = a.$$

Интегро-дифференциальное уравнение 3) определяет обобщенный системный оператор бесконечного порядка

$$Ax = a_1 * x + \sum_{m=2}^{+\infty} S_m (a_m * x^{\otimes 2}),$$

с обобщенными ядрами

$$a_1 = K + \delta' + a\delta + b\delta,$$

$$a_m = 0 \text{ для всех четных } m, \text{ т.е.}$$

$$a_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

$$a_{2k+1} = (-1)^{k+1} \frac{b}{(2k+1)!} \delta^{\otimes (2k+1)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $\delta'$  – обобщенная производная дельта-функции Дирака, и кроме того, учитывается разложение функции  $\sin(x)$  в ряд Тейлора.

Применяя к этим обобщенным ядрам  $a_1$  и  $a_2$  обобщенное преобразование Лапласа, получим [1] последовательность  $(\tilde{a}_m)$  спектральных характеристик системного оператора  $A$ :

$$\tilde{a}_1(\lambda) = \tilde{K}(\lambda) + \tilde{\delta}'(\lambda) + a\tilde{\delta}(\lambda) + b\tilde{\delta}(\lambda) = \tilde{K}(\lambda) + \lambda + a + b,$$

$$\tilde{a}_m(\lambda) = 0, \text{ если } m = 2k \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\tilde{a}_m(\lambda) = (-1)^{k+1} \frac{b}{(2k+1)!}, \text{ если } m = 2k+1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Уравнение 4) определяет следующий полиномиальный системный оператор третьего порядка:

$$Ax = a_1 * x + S_2 (a_2 * x^{\otimes 2}) + S_3 (a_3 * x^{\otimes 3}),$$

называемый *кубическим* системным оператором с обобщенными ядрами первого, второго и третьего порядков  $a_1, a_2, a_3$ . Имеем

$$a_1 = K + \delta' + c\delta, \quad a_2 = b\delta^{\otimes 2} = b(\delta \otimes \delta), \quad a_3 = c\delta^{\otimes 3} = c(\delta \otimes \delta \otimes \delta).$$

Применяя к ядрам  $a_1, a_2$  и  $a_3$  обобщенное преобразование Лапласа, и используя его свойства, получим  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$  и  $\tilde{a}_3$  – спектральные

характеристики первого, второго и третьего порядков рассматриваемого системного оператора  $A$ :

$$\tilde{a}_1(\lambda) = \tilde{K}(\lambda) + \tilde{\delta}'(\lambda) + c\tilde{\delta}(\lambda) = \tilde{K}(\lambda) + \lambda + c,$$

$$\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) = b(\tilde{\delta} \otimes \tilde{\delta})(\lambda_1, \lambda_2) = b\tilde{\delta}(\lambda_1)\tilde{\delta}(\lambda_2) = b,$$

$$\tilde{a}_3(\lambda_1, \lambda_2) = a(\tilde{\delta} \otimes \tilde{\delta} \otimes \tilde{\delta})(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = a\tilde{\delta}(\lambda_1)\tilde{\delta}(\lambda_2)\tilde{\delta}(\lambda_3) = a.$$

Интегро-дифференциальное уравнение 5) определяет обобщенный системный оператор порядка  $n$ :

$$Ax = a_1 * x + S_2(a_2 * x^{\otimes 2}) + \dots + S_n(a_n * x^{\otimes n}),$$

с обобщенными ядрами

$$a_1 = \delta' + a\delta, \quad a_2 = K_1 \otimes K_2 + a\delta^{\otimes 2},$$

$$\tilde{a}_m(\lambda) = 0, \text{ если } 2 < m < n, \quad a_n = c\delta^{\otimes n}.$$

Применяя к обобщенным ядрам  $a_1, a_2, \dots, a_n$  обобщенное преобразование Лапласа, получим соответствующие спектральные характеристики [3] рассматриваемого нелинейного системного оператора:

$$\tilde{a}_1(\lambda) = \tilde{\delta}'(\lambda) + a\tilde{\delta}(\lambda) = \lambda + a,$$

$$\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{K}_1(\lambda_1)\tilde{K}_2(\lambda_2) + b\tilde{\delta}(\lambda_1)\tilde{\delta}(\lambda_2) = \tilde{K}_1(\lambda_1)\tilde{K}_2(\lambda_2) + b,$$

$$\tilde{a}_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0, \text{ если } 2 < m < n,$$

$$\tilde{a}_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = c\tilde{\delta}(\lambda_1)\tilde{\delta}(\lambda_2) \cdot \dots \cdot \tilde{\delta}(\lambda_n) = c.$$

Используя вычисленные спектральные характеристики системных операторов для ИДУ Вольтерра 1)-5) найдены спектральные характеристики для соответствующим им квазиобратных операторов, применяя известные [4] для случая дифференциальных уравнений второго порядка соотношения между спектральными характеристиками исходного и квазиобратного к нему операторов.

### Литература

1. Вувуникян Ю.М., Эволюционные операторы с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками: монография. Гродно: Изд-во ГрГУ, 2007.– 224 с.
2. Вувуникян Ю.М., Шпак Д.С. Полиномиальные эволюционные операторы: монография. Гродно: Изд-во ГрГУ, 2015.– 288 с.
3. Вувуникян, Ю.М. Преобразование Лапласа обобщенных функций и спектральные характеристики нелинейных эволюционных операторов / Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тезисы докладов Междунар. науч. конф., Минск, 13-19 сентября 2006 г. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2006. С. 36.

4. Вувуникян Ю.М., Шпак Д.С. Операторные компоненты квазиобратных эволюционных операторов для дифференциальных уравнений второго порядка / Известия Смоленского государственного университета. 2012. № 2 (18). С. 440–451.

**Y.M. Vuvunikian**  
Grodno State University

## **GENERALIZED KERNELS AND SPECTRAL CHARACTERISTICS OF NONLINEAR SYSTEM OPERATORS GENERATED BY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS VOLTERRA**

**Keywords:** *integro-differential equation Volterra, generalized kernels of nonlinear system operators, spectral characteristics of nonlinear system operators, generalized Laplace transform.*

**Abstract.** *Analysis methods based on system operators with generalized kernels are currently particularly popular, since known methods for analyzing nonlinear systems cannot be used when nonlinearity becomes significant. The method of nonlinear system operators allows one to study systems with inertial nonlinearities. Dynamic systems defined by nonlinear Volterra integro-differential equations will be considered as nonlinear systems. In this work, nonlinear system operators of any finite order (called polynomial system operators) and system operators of infinite order are constructed, and their spectral characteristics are calculated as the generalized Laplace transform of the corresponding kernels of these operators.*

**Т.М. Иванова, А.Б. Костин, А.И. Рубинштейн**  
*Национальный Исследовательский Ядерный Университет МИФИ*

УДК 517.925.4

## **О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ**

**Ключевые слова:** *динамическая система на плоскости, точка покоя, предельный цикл, компьютерное моделирование.*

*В работе рассмотрены условия, при которых некоторая линия уровня функции двух переменных может являться предельным циклом динамической системы. Приведены достаточные условия на функцию  $F(x, y)$ , обеспечивающие существование устойчивой замкнутой траектории  $у$  соответствующей системы. Выделен класс*

динамических систем, имеющих предельные циклы в виде простых гладких контуров на плоскости. Данные кривые могут ограничивать как выпуклую, так и невыпуклую область, содержащую неустойчивую точку покоя системы. Построен ряд иллюстрирующих примеров.

**1. Введение.** Эволюция различных механических, физических, химических, биологических, социальных процессов часто описывается автономными системами ОДУ. Наличие устойчивых предельных циклов у таких систем гарантирует существование устойчивого периодического режима протекания соответствующего процесса.

Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Будем предполагать, что правые части этой системы определены на всей плоскости и удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности задачи Коши, а само решение  $x = x(t, x_0)$ ,  $y = y(t, y_0)$  продолжается на всю полуось  $t \geq 0$ . Предельным циклом системы (1) называется такая замкнутая траектория на фазовой плоскости, в достаточно малой окрестности которой нет других замкнутых траекторий.

Обычно наличие предельного цикла устанавливается на основе качественной теории динамических систем [1]. Так, существование предельного цикла у системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu y(1 - x^2) \end{cases}$$

при малых значениях параметра  $\mu > 0$  исследовано в [2, гл. 14, § 6,7]. Здесь предельный цикл построен методом последовательных приближений и представлен суммой ряда. При этом решение, описывающее предельный цикл, задано весьма сложными неявными соотношениями.

В [1, гл. 11, пример 14] качественными методами доказано наличие предельного цикла  $x^2 + y^2 = 1$  у системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (x + 2)y + x^2 + y^2 - 1, \\ \dot{y} = -x(x + 2). \end{cases}$$

Получить явный вид периодического решения здесь тоже не удастся.

В связи с вышесказанным определенным интерес представляет задача нахождения динамических систем, имеющих своим предельным циклом заданную простую замкнутую кривую.

**2. Теорема о предельном цикле специального вида.** Пусть функция  $F(x, y)$  удовлетворяет следующим условиям.

I.  $F(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ .

II.  $F(x, y)$ ,  $(\nabla F)^2$  являются положительно определенными.

III. Множества  $\Gamma_C = \{(x, y) : F(x, y) = C\}$  и  $K_C = \{(x, y) : F(x, y) \leq C\}$  при любом выборе  $C > 0$  не пусты и ограничены.

IV.  $\Gamma_C$  является простой замкнутой спрямляемой кривой, которая непрерывно изменяется при возрастании  $C$ .

Тогда для любого вещественного параметра  $a \neq 0$  кривая  $F(x, y) = 1$  является двусторонним устойчивым предельным циклом динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = F_x(x, y)(1 - F(x, y)) + aF_y(x, y), \\ \dot{y} = -aF_x(x, y) + F_y(x, y)(1 - F(x, y)). \end{cases} \quad (2)$$

При этом система обладает только тривиальной точкой покоя, которая неустойчива.

Доказательство этого утверждения приведено в [3].

**3. Случай  $F(x, y) = x^2 + y^2$ .** Рассмотрим простейший пример, иллюстрирующий теорему. Функция  $F(x, y) = x^2 + y^2$  удовлетворяет всем условиям I–IV и порождает динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2ay - 2x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -2ax - 2y(x^2 + y^2 - 1), \end{cases} \quad (3)$$

приводящуюся в полярных координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  к виду

$$\begin{cases} \dot{r} = -2r(r^2 - 1), \\ \dot{\varphi} = -2a. \end{cases} \quad (4)$$

Полученная система (4) легко интегрируется. Ее общее решение записывается так

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + Ae^{-4t}}}, \quad \varphi = -2at + \tau, \quad (5)$$

где  $A, \tau$  – произвольные вещественные постоянные. Форма фазовых траекторий определяется соотношением

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + Ae^{\frac{2(\varphi - \tau)}{a}}}}. \quad (6)$$

Общее решение исходной системы (3) выглядит следующим образом

$$x(t) = \frac{\cos(2at - \tau)}{\sqrt{1 + Ae^{-4t}}}, \quad y(t) = -\frac{\sin(2at - \tau)}{\sqrt{1 + Ae^{-4t}}}. \quad (7)$$

Точка  $(0,0)$  является единственной точкой покоя системы (3), она неустойчива и имеет тип центр. На рис. 1 приведен фазовый портрет системы (3) с наложенным полем направлений для случая  $a = 2$ .

Из (6), (7) при  $A = 0$  получаем предельный цикл  $r = 1$  и пару функций  $x(t) = \cos(2at - \tau)$ ,  $y(t) = -\sin(2at - \tau)$ , описывающих движение точек по замкнутой траектории (на рисунке 1 предельный цикл выделен жирной линией).

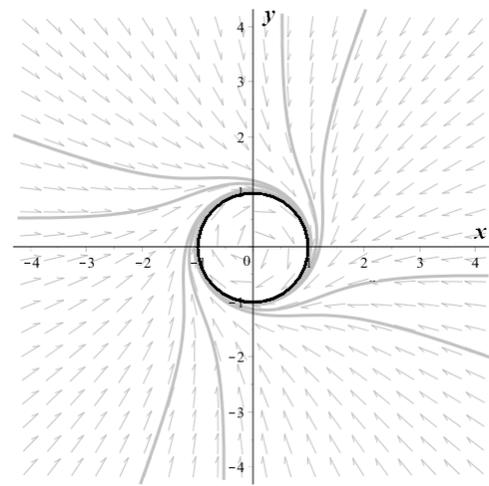
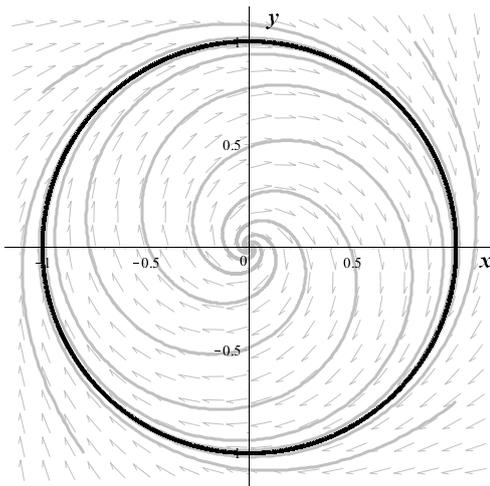


Рис. 1. Фазовый портрет системы (3) для случая  $a = 2$  с наложенным полем направлений  
 Рис. 2. Асимптотическое поведение внешних траекторий системы (3)

Значениям параметра  $A > 0$  отвечают траектории системы, лежащие внутри предельного цикла (рис. 1). Это спирали, раскручивающиеся от точки покоя  $(0,0)$  и наматывающиеся на предельный цикл изнутри при  $t \rightarrow +\infty$ .

В случае  $A < 0$  получаем спирали (рис. 1), уходящие с определенных радиальных асимптот

$$\varphi = -\frac{a}{2} \ln(-A) + \tau, \quad t \rightarrow \frac{1}{4} \ln(-A) + 0$$

и наматывающиеся на предельный цикл снаружи при  $t \rightarrow +\infty$ . Асимптотическое поведение внешних траекторий показано на рис. 2.

**4. Разнообразные формы предельных циклов.** Функции более общего вида, рассматриваемые в этом пункте, удовлетворяют условиям I–IV теоремы и поэтому определяют динамические системы вида (2) с предельными циклами соответствующей формы.

Для произвольного вещественного  $b \neq 0$  рассмотрим функцию  $F(x, y) = x^2 + b^2 y^2$ , которая дает систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2ab^2y - 2x(x^2 + b^2y^2 - 1), \\ \dot{y} = -2ax - 2b^2y(x^2 + b^2y^2 - 1) \end{cases} \quad (8)$$

с предельным циклом в форме эллипса. Решение системы (8) в явном виде получить не удастся. Тем не менее она обладает предельным циклом  $x^2 + b^2y^2 = 1$ , причем пара функций  $x(t) = \cos(2abt - \tau)$ ,  $y(t) = -\frac{1}{b}\sin(2abt - \tau)$ , являющаяся решением этой системы, описывает движение точек по указанному эллипсу.

Тип нулевой точки покоя системы (8) зависит от соотношения параметров. В случае  $|a| < \frac{1}{2}\left|b - \frac{1}{b}\right|$  точка покоя является неустойчивым узлом, а при  $|a| > \frac{1}{2}\left|b - \frac{1}{b}\right|$  – неустойчивым фокусом. В пограничном случае  $|a| = \frac{1}{2}\left|b - \frac{1}{b}\right|$  точка покоя есть вырожденный узел.

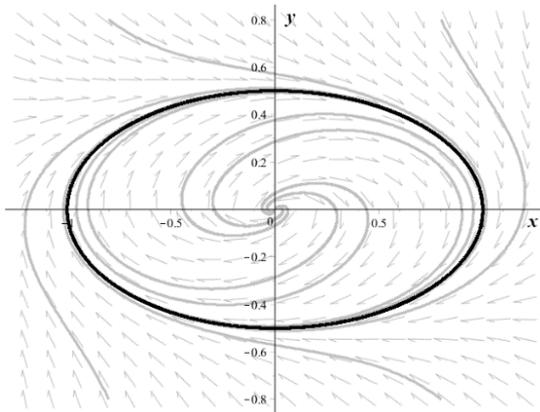


Рис. 3. Фазовый портрет системы (8) для случая  $a=2, b^2=4$  с наложенным полем направлений. Точка покоя – неустойчивый фокус

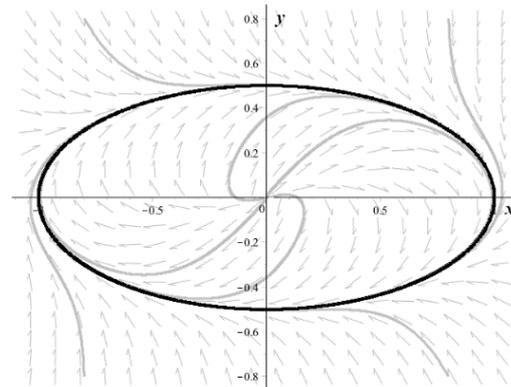


Рис. 4. Фазовый портрет системы (8) для случая  $a=3/5, b^2=4$  с наложенным полем направлений. Точка покоя – неустойчивый узел

Поведение фазовых траекторий в случае неустойчивого фокуса аналогично рассмотренному в предыдущем пункте. Чем больше значение  $|a|$ , тем более «долгим» оказывается выход на предельный цикл. В случае неустойчивого узла происходит более «стремительный» по сравнению со случаем фокуса выход на предельный цикл. Результат моделирования фазового портрета системы (8) при  $a=2, b^2=4$  (неустойчивый фокус) представлен на рисунке 3, а при  $a=3/5, b^2=4$  (неустойчивый узел) – на рисунке 4. Предельный цикл  $x^2 + 4y^2 = 1$  выделен жирной линией.

Если не ограничиваться функциями  $F(x, y)$  второго порядка, то можно получать динамические системы на плоскости с невыпуклыми и

асимметричными предельными циклами. Такие системы, построенные по порождающей функции согласно формулам (2), выглядят довольно громоздко, поэтому ограничимся здесь объявлением самой функции  $F(x, y)$  и результатом компьютерного моделирования фазового портрета соответствующей динамической системы. Следует отметить, что выписать в явном виде хотя бы периодическое решение таких систем не удастся. С другой стороны, согласно пункту 2, уравнение предельного цикла и его форма на фазовой плоскости известны.

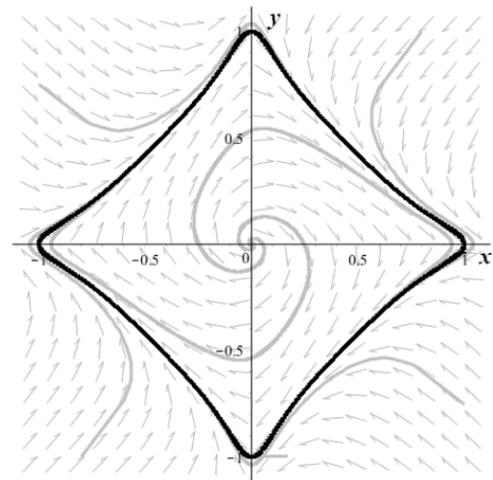
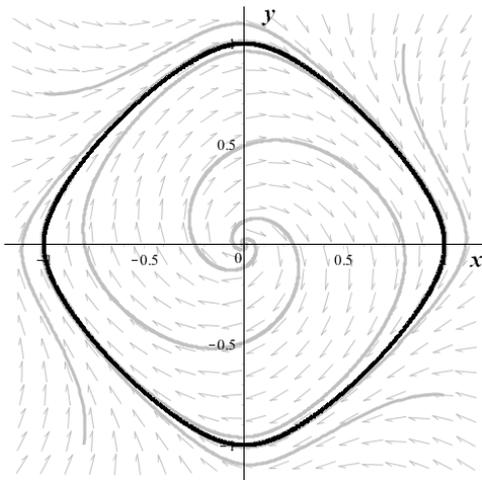


Рис. 5. Фазовый портрет системы (2) для  $F(x, y) = (1 + 2x^2y^2)(x^2 + y^2)$  и  $a = 2$  Рис. 6. Фазовый портрет системы (2) для  $F(x, y) = (1 + 30x^2y^2)(x^2 + y^2)$  и  $a = 2$

На рисунке 5 представлен фазовый портрет динамической системы (2) с функцией  $F(x, y) = (1 + b^2x^2y^2)(x^2 + y^2)$  в случае  $b^2 = 2$ . Жирной линией  $(1 + 2x^2y^2)(x^2 + y^2) = 1$  изображен выпуклый предельный цикл. При достаточно больших значениях параметра  $b^2$  предельный цикл становится невыпуклым. Фазовый портрет с выделенной невыпуклой замкнутой траекторией  $(1 + 30x^2y^2)(x^2 + y^2) = 1$  приведен на рисунке 6. При любых  $a \neq 0$  нулевая точка покоя – неустойчивый фокус. Все рассмотренные выше предельные циклы обладали двумя осями симметрии. Пусть  $a = 2$ .

Для функции  $F(x, y) = 2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} - 1$  получим систему вида (2), замкнутая траектория которой  $2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} = 2$  симметрична только относительно одной оси. Фазовый портрет такой системы дан на рисунке 7. Если же выбрать  $F(x, y) = 2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5$ , то получим динамическую систему с полностью асимметричным предельным

циклом. Соответствующий фазовый портрет с выделенным предельным циклом  $2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5 = 1$  приведен на рисунке 8.

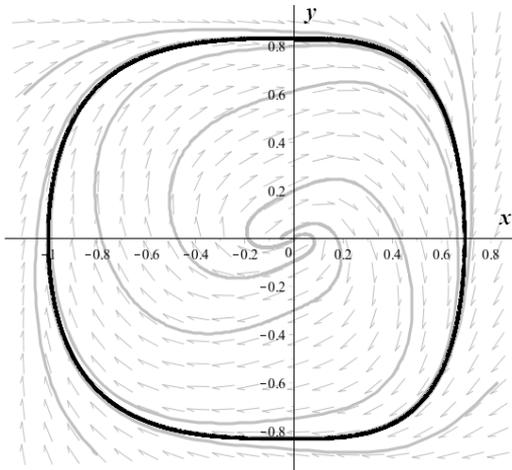


Рис. 7. Фазовый портрет системы (2) для  $F(x, y) = 2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} - 1$  при  $a = 2$

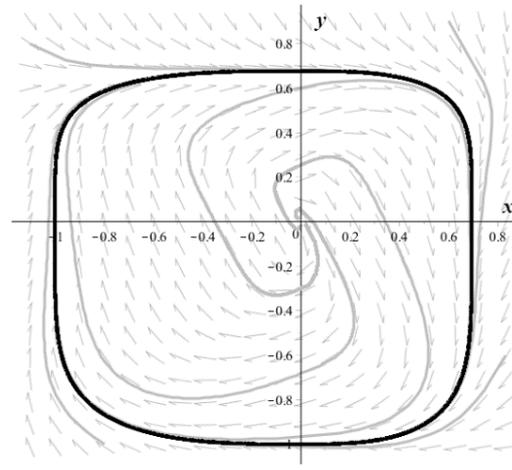


Рис. 8. Фазовый портрет системы (2) для  $F(x, y) = 2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5$  при  $a = 2$

**5. Заключение.** В работе рассмотрены примеры построения динамических систем с предельными циклами заданного вида. Сформулированы достаточные условия на функцию двух переменных, выделенная линия уровня которой может служить двусторонним устойчивым предельным циклом на плоскости для автономной системы, определяемой этой функцией. Показано, что несмотря на имеющиеся ограничения, геометрия предельных циклов довольно разнообразна. При компьютерном моделировании фазовых портретов использовалась система компьютерной математики Maple 2015.

### Литература

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон Н.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка.—М.: Наука, 1966.—565 с.
2. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.—Минск: Наука и техника, 1979.—744 с.
3. Иванова Т.М., Костин А.Б., Рубинштейн А.И., Шерстюков В.Б. О предельных циклах автономных систем // Современная математика. Фундаментальные направления. Т.70, №1. 2024. С.1–22.

**Т.М. Ivanova, A.B. Kostin, A.I. Rubinstein**  
*National Research Nuclear University MEPHI*

### ON LIMIT CYCLES OF A SPECIAL KIND FOR DYNAMICAL SYSTEMS ON THE PLANE

**Keywords:** *dynamical system on the plane, rest point, limit cycle, computer modeling.*

**Abstract.** *The paper considers the conditions for a simple smooth closed curve can be a limit cycle in a dynamical system on the plane. Sufficient conditions for existence of a stable closed trajectory in the corresponding system are given. A class of dynamical systems that have limit cycles in the form of simple smooth curves on the plane is identified. These curves can limit both a convex and non-convex region. A number of illustrative examples are constructed.*

**В.В. Карачик, Б.Х. Турметов**  
*Южно-Уральский государственный университет,  
Международный казахско-турецкий университет  
имени А. Ясави, Казахстан*

УДК 517.956.225

## **ЗАДАЧА ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО С ДВОЙНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ**

Ключевые слова: *нелокальная краевая задача, уравнение Пуассона, ортогональная матрица, инволюция, задача Дирихле, задача Неймана, функция Грина.*

*В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости нового класса нелокальных краевых задач для уравнения Пуассона. Нелокальные условия задаются в виде связи значений искомой функции в различных точках границы. При этом граничный оператор определяется с помощью матриц отображений типа инволюции. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемых задач.*

**1. Введение.** Краевые задачи, заданные в виде связи значений искомой функции в различных точках области или границы называются задачами типа Бицадзе-Самарского или нелокальными задачами. Задача такого типа впервые была исследована в работе [1]. Далее, в работе [2] подробно описано возникновение таких задач при математическом моделировании некоторых процессов в плазме. Сведения о методах решения и приложениях нелокальных краевых задач типа Бицадзе-Самарского к задачам физики и техники изложены в [3]. Отметим, что краевые задачи с преобразованными аргументами при  $n = 2$  были изучены в работе D.Przeworska-Rolewicz [4]. В дальнейшем нелокальные краевые задачи с отображениями такого типа в  $n$ -мерном случае, при  $n \geq 2$  были изучены в работах [5,6]. Настоящая работа является продолжением этих исследований.

Сформулируем постановки нелокальных задач, которые будут рассмотрены в настоящей работе. Пусть  $\Omega = \{x: |x| < 1\}$  – единичный шар в  $R^n, n \geq 2$  и  $\partial\Omega$  – единичная сфера. Пусть также  $S_1, S_2$  – две действительные коммутативные ортогональные матрицы  $n \times n$  такие, что  $S_i^{l_i} = I, l_i \in N, i = 1, 2$ , где  $l_1, l_2 \in N \cup \{0\}$ . Обозначим  $\ell = l_2 l_1$  и рассмотрим последовательность действительных чисел

$$a_0, \dots, a_{l_1-1}, a_{l_1}, \dots, a_{2l_1-1}, \dots, a_{(l_2-1)l_1-1}, \dots, a_{\ell-1},$$

которую обозначаем через  $\mathbf{a}$ . Если записать индекс суммирования  $i$  в форме  $i = (i_2, i_1) \equiv i_2 l_1 + i_1$ , где  $i_k = 0, 1, \dots, l_k - 1$  для  $k = 1, 2$ , тогда компоненты  $\mathbf{a}$  могут быть записаны в виде

$$a_{(0,0)}, \dots, a_{(0,l_1-1)}, a_{(1,0)}, \dots, a_{(1,l_1-1)}, \dots, a_{(l_2-2,l_1-1)}, \dots, a_{(l_2-1,l_1-1)}.$$

Ясно, что если  $0 \leq i < \ell$ , то тогда  $i_1 = \{i / l_1\}, i_2 = [i / l_1]$ , где  $[ \cdot ]$  и  $\{ \cdot \}$  являются целыми и дробными частями числа. Далее будем рассматривать последовательность  $\mathbf{a}$  также как вектор  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{\ell-1})$ .

**Замечание.** Очевидно, что  $|x|^2 = (S_i^T S_i x, x) = (S_i x, S_i x) = |S_i x|^2$ . Поэтому имеем  $x \in \Omega \Rightarrow S_i x \in \Omega$  и  $y \in \partial\Omega \Rightarrow S_i y \in \partial\Omega$ .

Введем нелокальный оператор, образованный вектором  $\mathbf{a}$

$$R_{\mathbf{a}}[u](x) = \sum_{(i_2, i_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(i_2, i_1)} u(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x).$$

Отметим, что в работах [7,8,9] исследовались собственные функции для оператора Лапласа с различными видами инволюций.

Рассмотрим в  $\Omega$  следующие краевые задачи.

**Задача Дирихле.** Найти функцию  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  удовлетворяющую условиям

$$\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$R_{\mathbf{a}}[u]|_{\partial\Omega} = g(x), x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

**Задача Неймана.** Найти функцию  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$  удовлетворяющее уравнению (1.1) и условию

$$R_{\mathbf{a}} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] \Big|_{\partial\Omega} = g(x), x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

**2. Предварительные сведения.** Пусть  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , рассмотрим функцию

$$v(x) = \sum_{(i_2, i_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(i_2, i_1)} u(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x), \quad (4)$$

где  $x \in \Omega$  или  $x \in \partial\Omega$ , а суммирование ведется в порядке возрастания по индексу  $i = (i_2, i_1) \equiv i_2 l_1 + i_1$  в следующем виде

$$(0,0), \dots, (0, l_1 - 1), (1,0), \dots, (1, l_1 - 1), \dots, (l_2 - 2, l_1 - 1), \dots, (l_2 - 1, l_1 - 1).$$

Из равенства (4), учитывая, что  $S_2^{l_2} = S_1^{l_1} = I$ , легко заключить, что функции вида  $v(S_2^{j_2} S_1^{j_1} x)$ , где  $j = 0, \dots, \ell - 1$  можно линейно выразить через функции  $u(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x)$ . Если рассмотреть следующие векторы порядка  $\ell = l_2 l_1$

$$U(x) = \left( u(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x) \right)_{i=0, \dots, \ell-1}^t, \quad V(x) = \left( v(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x) \right)_{i=0, \dots, \ell-1}^t$$

то эта зависимость имеет вид

$$V(x) = A_{(2)} U(x), \quad (5)$$

где  $A_{(2)} = \left( a_{i,j} \right)_{i,j=0, \dots, \ell-1}$  – соответствующая матрица порядка  $\ell \times \ell$ . Нижний индекс у  $A_{(2)}$  означает, что матрица порождается двумя инверсиями  $S_1, S_2$ . Для описания свойств матрицы  $A_{(2)}$  рассмотрим операцию сложения индексов коэффициентов матрицы в следующем смысле

$$i \oplus j = (i_2, i_1) \oplus (j_2, j_1) \equiv ((i_2 + j_2 \bmod l_2), (i_1 + j_1 \bmod l_1)),$$

где  $(i_2, i_1)$  – это представление индекса  $i$ , как указано выше. Ясно, что  $\oplus$  является коммутативной и ассоциативной операцией над  $\{0, \dots, l_2 l_1 - 1\}$ .

Будем считать, что  $(-i_2, -i_1) \equiv \ominus i = (l_2 - i_2, l_1 - i_1)$ . Распространим операции  $\oplus$  и  $\ominus$  на все числа вида  $(i_2, i_1) \in \mathbb{Z}^2$ , полагая  $(i_2, i_1) \equiv (i_2 \bmod l_2, i_1 \bmod l_1)$ . Например, если  $l_1 = 2, l_2 = 3$ , то  $(1, -1) = (1, 1)$  и  $(5, -3) = (2, 1)$ .

**Теорема 1.** [7, теорема 1] *Матрица  $A_{(2)}$  из равенства (5) может быть представлена в форме*

$$A_{(2)} \equiv \left( a_{i,j} \right)_{i,j=0, \dots, \ell-1} = \left( a_{j \oplus i} \right)_{i,j=0, \dots, \ell-1}. \quad (6)$$

**Следствие 1.** *Матрица  $A_{(2)}$  однозначно определяется своей первой строкой  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{\ell-1})$ .*

**Следствие 2.** *Матрица  $A_{(2)}$  имеет структуру матрицы, состоящей из  $l_2 \times l_2$  квадратных блоков, каждый из которых является матрицей размера  $l_1 \times l_1$  и типа  $A_{(1)}$ .*

**Следствие 3.** *Транспонированная матрица  $A_{(2)}^t(\mathbf{a})$  имеет структуру матрицы  $A_{(2)}^t$  и, кроме того,  $A_{(2)}^t(\mathbf{a}) = A_{(2)}(\mathbf{c})$ , где  $\mathbf{c} = (a_{(-j_2, -j_1)})_{(j_2, j_1)=0, \dots, (l_2-1, l_1-1)}$ , а обе компоненты индекса  $-j_2$  и  $-j_1$  берутся по  $\bmod l_2$  и  $\bmod l_1$ , соответственно.*

**Теорема 2.** [7, теорема 2] *Произведение матриц вида (6) снова является матрицей вида (6). Умножение матриц вида (6) коммутативно*

$$A_{(2)}(\mathbf{a}) A_{(2)}(\mathbf{d}) = A_{(2)}(\mathbf{d}) A_{(2)}(\mathbf{a}).$$

На основе теорем 1 и 2 доказываются следующие утверждения.

**Теорема 3.** Собственный вектор матрицы  $A_{(2)}(\mathbf{a})$  с номером  $k = (k_2, k_1) = 0, \dots, \ell - 1$ , где  $k_1 = 0, \dots, l_1 - 1$ ,  $k_2 = 0, \dots, l_2 - 1$  можно представить в виде

$$\mathbf{e}_k = \left( \lambda_k^j \right)_{j=0, \dots, \ell-1}^t \equiv \left( \lambda_{k_2}^{j_2} \lambda_{k_1}^{j_1} \right)_{(j_2, j_1)=0, \dots, (l_2-1, l_1-1)}^t, \quad (7)$$

где  $\lambda_{k_1} = e^{i2\pi \frac{k_1}{l_1}}$  – корень степени  $l_1$  из единицы,  $k_1 = 0, \dots, l_1 - 1$  и  $\lambda_{k_2} = e^{i2\pi \frac{k_2}{l_2}}$  – корень степени  $l_2$  из единицы,  $k_2 = 0, \dots, l_2 - 1$ , а собственное число, соответствующее этому собственному вектору определяется из равенства

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{\ell-1} a_j \lambda_k^j = \sum_{(j_2, j_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(j_2, j_1)} \lambda_{k_2}^{j_2} \lambda_{k_1}^{j_1} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k^t.$$

**Теорема 4.** Пусть  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k^t \neq 0$  при  $k = 0, \dots, \ell - 1$ , где собственные вектора  $\mathbf{e}_k$  находятся из (7). Тогда существует матрица обратная к матрице  $A_{(2)}(\mathbf{a})$  и она имеет вид  $A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a}) = (b_{j \ominus i})_{i, j=0, \dots, \ell-1} = A_{(2)}(\mathbf{b})$ , где

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\ell} \boldsymbol{\mu}_- \overline{\mathbf{M}}, \quad \mathbf{M} = (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{\ell-1}) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\mu}_- = (\mu_k^{-1})_{k=0, \dots, \ell-1}.$$

**3. Задачи Дирихле и Неймана.** Пусть  $G(x, y)$  – функция Грина задачи Дирихле в  $\Omega$ , а  $P(x, y)$  – ядро Пуассона задачи Дирихле в  $\Omega$ .

**Теорема 5.** Пусть числа  $\{a_k : k = 0, \dots, \ell - 1\}$  такие, что  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k^t \neq 0$  при  $k = 0, \dots, \ell - 1$ , где вектор  $\mathbf{e}_k$  находится из (7) и  $f \in C^\lambda(\overline{\Omega})$ ,  $g \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно, принадлежит классу  $C^{\lambda+2}(\overline{\Omega})$  и представляется в виде

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} P(x, y) R_b[g](y) ds_y,$$

где числа  $b_j = \frac{1}{\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\overline{\lambda}_k^j}{\mu_k}$  при  $j = 0, \dots, \ell - 1$  находятся из теоремы 4.

Пусть  $\mathcal{N}_2(x, \xi)$  – функция Грина задачи Неймана для уравнения Пуассона в  $\Omega$  [10].

**Теорема 6.** Если  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k \neq 0$  при  $k = 0, \dots, \ell - 1$  и для функций  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $g \in C(\partial\Omega)$  выполнено условие  $\int_{\partial\Omega} g(\xi) ds_\xi = \int_{\Omega} R_a[f](\xi) d\xi$ .

Тогда решение задачи Неймана (1.3), (1.4) существует и может быть записано в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \mathcal{N}_2(x, \xi) R_b[g](\xi) ds_\xi - \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} \mathcal{N}_2(x, \xi) f(\xi) d\xi + C.$$

**Пример.** Найти решение задачи Неймана

$$\Delta u(x) = x_3, x \in \Omega; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_2, x_3, x_1)|_{\partial\Omega} = x_1, \quad x \in \partial\Omega. \quad (8)$$

В этом случае  $n = 3$ ,  $S_2 x = (x_2, x_3, x_1)'$  ( $l_2 = 3$ ),  $S_1 x = -x$  ( $l_1 = 2$ ) и  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ . Найдем решение задачи Неймана

$$\Delta \tilde{u}(x) = x_2, x \in \Omega, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = x_1, x \in \partial\Omega. \quad (9)$$

Для задачи Неймана (9), согласно [11], вспомогательной задачей Дирихле будет следующая задача

$$\Delta v(x) = (\Lambda + 2)x_2 \equiv 3x_2, x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = x_1, \quad x \in \partial\Omega,$$

где  $\Lambda = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ . Решение этой задачи Дирихле, как нетрудно видеть,

имеет вид  $v(x) = x_1 + (|x|^2 - 1)\frac{3x_2}{10}$  и значит

$$\tilde{u}(x) = \int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t} = \int_0^1 x_1 + (|x|^2 t^2 - 1)\frac{3x_2}{10} dt = x_1 + (|x|^2 - 3)\frac{x_2}{10}.$$

С помощью теоремы 4 находим  $R_b[\tilde{u}] = S_2^2 S_1^0 \tilde{u} = \tilde{u}(x_3, x_1, x_2)$ . Из теоремы 6 следует, что  $u(x) = R_b[\tilde{u}](x)$ , а поэтому находим

$$u(x) = R_b[\tilde{u}](x) = R_b\left[x_1 + (|x|^2 - 3)\frac{x_2}{10}\right] = x_3 + (|x|^2 - 3)\frac{x_1}{10}.$$

Как отмечалось в [11, лемма 3] условие разрешимости задачи Неймана (9), а значит и исходной задачи (8), равносильно выполнению условия  $v(0) = 0$ , которое очевидно верно.

### Литература

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739-740.
2. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925-1935.
3. Skubachevskii, A.L. Nonclassical boundary-value problems I // J. Math. Sci. 2008. Vol. 155. P. 199-334.
4. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Comment. Math. Helv. 1974. No. 17. P. 451-457.
5. Karachik V., Turmetov B. Solvability of one nonlocal dirichlet problem for the poisson equation // Novi Sad J. Math. 2020. Vol. 50. No. 1. P. 67-88.
6. Turmetov B., Karachik V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball // Complex Var. Elliptic Equ. 2023. Vol. 68. No. 7. P. 1204-1218.
7. Turmetov B., Karachik V. Construction of eigenfunctions to one nonlocal second-order differential operator with double involution // Axioms. 2022. Vol. 11. No. 10. 543.
8. Turmetov B., Karachik V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple involution // Symmetry. 2021. Vol. 13. No. 10. 1781.

9. Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.K. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal poisson equation // Turk. J. Math. 2019. Vol. 43. P. 1604-1625.

10. Карачик В.В., Турметов Б.Х. О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона // Матем. тр. 2018. Т. 21. № 1. С. 17-34.

11. Карачик В.В. Достаточные условия разрешимости одного класса задач типа Неймана для полигармонического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61. № 8. С. 1295-1308.

**V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov**

South Ural State University,  
International Kazakh-Turkish University named after Khoya Ahmet  
Yasawi, Kazakhstan

### **BITSADZE-SAMARSKY TYPE PROBLEM WITH DOUBLE INVOLUTION**

**Keywords:** *nonlocal boundary value problem, Poisson's equation, orthogonal matrix, involution, Dirichlet problem, Neumann problem, Green's function.*

**Abstract.** *In this paper, we study the solvability of a new class of nonlocal boundary value problems for the Poisson equation. Non-local conditions are specified in the form of a connection between the values of the desired function at different points of the boundary. In this case, the boundary operator is determined using involution matrices. Theorems on the existence and uniqueness of solutions to the problems under consideration are proved.*

**E.G. Kirjackij**

UDK 517.54

### **ON THE PROPERTIES OF A LINEAR DIFFERENTIAL OPERATOR DEFINED ON A CLASS OF UNIVALENT FUNCTIONS**

**Keywords:** *univalent function, differential operator, convex function, modules.*

*In this paper, a special type of linear differential operator is introduced and studied, which is defined on the class of functions that are univalent and normalized in the unit circle. Some properties of the univalent functions themselves are also considered. Particular attention is paid to the extremal properties of the operator. Accurate estimates have been established for moduli of derivatives and coefficients of power series expansion.*

**1. Formulation of the problem.** To solve the Euler differential equation, estimate the modulus of the operator, estimate the derivatives of univalent functions.

**2.** Let's introduce and study the properties of the linear operator

$$\Psi_n(f) = \frac{(\omega-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{f^{(k+1)}(\omega)}{(k+1)!} (\omega-1)^{k+1} \quad (1)$$

defined on the class  $\tilde{K}_1(E)$  of univalent functions  $f(\omega), f(0)=0, f'(0)=1,$

where  $E$  is the unit circle. In our work we often use functions

$$g_1(\omega; \alpha) = \frac{\omega}{1 - e^{i\alpha}\omega}, \quad g_2(\omega; \alpha) = \frac{\omega}{(1 - e^{i\alpha}\omega)^2},$$

$$g_{2,b}(\omega; \alpha) = \frac{\omega(1+b\omega)}{(1 - e^{i\alpha}\omega)^2}, \quad |e^{i\alpha} + 2b| \leq 1, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi. \quad (2)$$

These functions belong to  $\tilde{K}_1(E)$  class.

**Theorem 1.** In the  $\tilde{K}_1(E)$  class, the  $\Psi_n(f) = 0$  equation is satisfied only by the functions

$$g_1(\omega; 0), \quad g_2(\omega; 0), \quad g_{2,b}(\omega; 0), \quad |1 + 2b| \leq 1. \quad (3)$$

**Proof.** We write the differential equation

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{f^{(k+1)}(\omega)}{(k+1)!} (\omega-1)^{k+1} = 0 \quad (4)$$

Really equation (4) is the classical Euler linear differential equation. We are looking for particular solutions in the form  $f(\omega) = (1-\omega)^{-m}$ . Substituting into equation, we obtain the characteristic equation

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k C_{k+m}^{k+1} = 0,$$

the roots of which be the numbers  $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ . The general solution of the differential equation (4) has the following form:

$$f(\omega) = c_0 + \frac{c_1}{1-\omega} + \dots + \frac{c_{n-1}}{(1-\omega)^{n-1}}. \quad (5)$$

Among the functions (5), only the functions

$$f(\omega) = c_0 + \frac{c_1}{1-\omega} + \frac{c_2}{(1-\omega)^2} \quad (6)$$

can be univalent in  $E$ . Using the criteria for univalence of functions, we will find only functions (3) from functions (6).

### 3. Module estimates

**Theorem 2.** *The following estimates are true*

$$\forall f(\omega) \in \tilde{K}_1(E), \quad n=1,2,3,\dots \quad (7)$$

*The equal sign on the right side of (6) is realized by the function.*

$$g_2(\omega; \pi), \text{ if } w = -r, \text{ where } 0 \leq r < 1.$$

*The equal sign on the left side of (7) is realized only by functions (3).*

**Lemma 1.** *The following estimates are true*

$$\frac{|f^{(m)}(\omega)|}{m!} \leq \frac{m+|\omega|}{(1-|\omega|)^{m+2}}, \quad \forall f(\omega) \in \tilde{K}_1(E), \quad m=0,1,2,\dots \quad (8)$$

*The equal sign in (8) is realized only by the P. Koebe functions*

$$g_2(\omega; \alpha), \quad 0 \leq \alpha < 2\pi. \quad (9)$$

**Proof.** Let us write function  $f(\omega) \in \tilde{K}_1(E)$  in the form

$$f(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \omega^p, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

By L. de Branges [1] theorem we have exact estimates

$$|a_p| \leq p, \quad p = 2,3,4,\dots \quad (10)$$

Next, write the formula

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m a_{m+p} \omega^p. \quad (11)$$

Using estimates (10) and formula (11), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} |f^{(m)}(\omega)| &= \left| \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m a_{m+p} \omega^p \right| \leq \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m |a_{m+p}| |\omega|^p \leq \\ &\leq \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m (m+p) |\omega|^p = \frac{m+|\omega|}{(1-|\omega|)^{m+2}}. \end{aligned}$$

The equal sign in (8) realized only by functions (9), because

$$\frac{g_2^{(m)}(\omega; \alpha)}{m!} = \frac{m + e^{i\alpha} \omega}{(1 - e^{i\alpha} \omega)^{m+2}} e^{i(m-1)\alpha}, \quad m=1,2,3,\dots$$

**Lemma 2.** *Two obvious equalities are true:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k k \left( \frac{1+|\omega|}{1-|\omega|} \right)^k = 2^{n-2} (n-1) \frac{1+|\omega|}{(1-|\omega|)^{n-1}},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left( \frac{1+|\omega|}{1-|\omega|} \right)^k = \frac{2^{n-1}}{(1-|\omega|)^{n-1}}.$$

**Proof** of the Theorem 2. Applying Lemmas 1, 2, we get

$$\begin{aligned}
|\Psi_n(\omega)| &\leq \frac{(1+|\omega|)^{n+1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{|f^{(k+1)}(\omega)|}{(k+1)!} (1+|\omega|)^k \leq \\
&\leq \frac{(1+|\omega|)^{n+1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{k+1+|\omega|}{(1-|\omega|)^{k+3}} (1+|\omega|)^k = \\
&= \frac{(1+|\omega|)^{n+1}}{2^{n-1}(1-|\omega|)^3} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k k \left(\frac{1+|\omega|}{1-|\omega|}\right)^k + \frac{(1+|\omega|)^{n+2}}{2^{n-1}(1-|\omega|)^3} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{1+|\omega|}{1-|\omega|}\right)^k = \\
&= \frac{n+1}{2} \left(\frac{1+|\omega|}{1-|\omega|}\right)^{n+2}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Thanks to (12), we conclude that extremal functions should be sought among the functions of the form (9). We have the following equality.

$$\Psi_n(g_2(\omega; \alpha)) = \frac{(\omega-1)^{n+1} (1-e^{i\alpha})^{n-2} \left( (\omega-1)e^{i\alpha} (n-1) + (1+e^{i\alpha}\omega)(1-e^{i\alpha}) \right)}{2^{n-1} (1-e^{i\alpha}\omega)^{n+2}}.$$

It can be proven that

$$|\Psi_n(g_2(\omega; \alpha))| \leq \frac{(n+1)}{2} \left(\frac{1+|\omega|}{1-|\omega|}\right)^{n+2}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

In particular, we get

$$\Psi_n(g_2(\omega; \pi)) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{2} \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^{n+2}.$$

It follows that the equality sign in (7) is realized by the  $g_2(\omega; \pi)$  function with  $\omega = -r$ ,  $0 \leq r < 1$ . Applying Theorem 1, we convinced that the equality sign on the left-hand side of (7) is realized only by the functions (3).

**4.** Let  $\tilde{K}_1^v(E)$  be the class of convex functions  $f(\omega)$ ,  $f(0)=0$ ,  $f'(0)=1$ , that are univalent in  $E$ . Obviously  $\tilde{K}_1^v(E)$  is a subclass of the class  $\tilde{K}_1(E)$ .

**Lemma 3.** In the class  $\tilde{K}_1^v(E)$  only the function  $g_1(\omega; 0)$  satisfy equation  $\Psi_n(f) = 0$ .

**Lemma 4.** The following estimates are true

$$\frac{|f^{(m)}(\omega)|}{m!} \leq \frac{1}{(1-|\omega|)^{m+1}}, \quad \forall f(\omega) \in \tilde{K}_1^v(E), \quad m=0,1,2,\dots \tag{13}$$

The equal sign in (13) is realized only by the functions

$$g_1(\omega; \alpha), 0 \leq \alpha < 2\pi. \quad (14)$$

**Proof.** For coefficients of a functions from the class  $\tilde{K}_1^v(E)$  estimates are known [2]:

$$|a_p| \leq 1, p = 2, 3, 4, \dots \quad (15)$$

Next, we write the formula

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m a_{m+p} \omega^p. \quad (16)$$

Using estimates (15) and formula (16), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} |f^{(m)}(\omega)| &= \left| \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m a_{m+p} \omega^p \right| \leq \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m |a_{m+p}| |\omega|^p \leq \\ &\leq \sum_{p=0}^{\infty} C_{m+p}^m |\omega|^p = \frac{1}{(1-|\omega|)^{m+1}}. \end{aligned}$$

The equal sign in (13) is realized only by functions (14), because

$$\frac{g_1^{(m)}(\omega; \alpha)}{m!} = \frac{e^{i(m-1)\alpha}}{(1-e^{i\alpha}\omega)^{m+1}}, m = 1, 2, 3, \dots$$

**Theorem 3.** *The following estimates are true*

$$0 \leq |\Psi_n(f)| \leq \left( \frac{1+|\omega|}{1-|\omega|} \right)^{n+1}, \forall f(\omega) \in \tilde{K}_1^v(E), n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

*The equal sign on the right side of (17) is realized by the function*

$$g_1(\omega; \pi), \text{ if } \omega = -r, \text{ where } 0 \leq r < 1.$$

*The equal sign on the left side (17) is realized only by the function  $g_1(\omega; 0)$ .*

**Proof.** Based on Lemma 4, we obtain

$$\begin{aligned} |\Psi_n(f)| &\leq \frac{(1+|\omega|)^{n+1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{|f^{(k+1)}(\omega)|}{(k+1)!} (1+|\omega|)^k \leq \\ &\leq \frac{(1+|\omega|)^{n+1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{1}{(1-|\omega|)^{k+2}} (1+|\omega|)^k = \left( \frac{1+|\omega|}{1-|\omega|} \right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Thanks to (18), we conclude that extremal functions should be sought among functions of the form (14). It can be proven that

$$\Psi_n(g_1(\omega; \alpha)) = \left( \frac{1-e^{i\alpha}}{2} \right)^{n-1} \left( \frac{\omega-1}{1-e^{i\alpha}\omega} \right)^{n+1}.$$

In particular, we get

$$\Psi_n(g_1(\omega; \pi)) = (-1)^{n+1} \left( \frac{1-\omega}{1+\omega} \right)^{n+1}.$$

It follows that equality sign in (17) is realized by the function  $g_1(\omega; \pi)$  if  $\omega = -r$ ,  $0 \leq r < 1$ . Applying Lemma 3, we convinced that the equality sign on the left -hand side of (17) is realized only by the function  $g_1(\omega; 0)$ .

### Literature

1. Aleksandrov I.A. L de Branges proof of I.M. Milin hypothesis and L. Bieberbachs hypothesis //Sibirian Mathematical Journal. 1987. Vol. 28. P. 7–20.
2. Privalov I.I. Introduction to the theory of function of a complex variable. M. Scionse. 1972. P. 430-432.

**Э.Г. Кирьяцкий**

## О СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ОПРЕДЕЛЕННОГО В КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

**Ключевые слова:** однолистная функция, дифференциальный оператор, выпуклая функция, модули.

**Аннотация.** *Статья посвящена изучению специального типа линейного дифференциального оператора, который определен в классе функций, однолистных и нормированных в единичном круге. Рассмотрены некоторые свойства самих однолистных функций. Особое внимание уделено экстремальным свойствам оператора. Установлены точные оценки модулей производных и коэффициентов разложения в степенной ряд.*

**Е.В. Кислякова**

Смоленский государственный университет

**М.А. Кисляков**

Филиал НИУ «МЭИ» в г. Смоленске

УДК 621.3.04; 658.56

## КВАЛИМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА И ДИАГНОСТИКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

**Ключевые слова:** математическая модель СМиД, комплексный показатель качества, функции преобразования параметров.

*Рассматривается математическая модель системы мониторинга и диагностики энергетических объектов. Предложен, основанный на методах квалиметрии, подход к оценке состояния изоляционной системы высоковольтного оборудования. Данный метод позволяет дать оценку состояния и прогноз сохранения работоспособности оборудования на основе объединения результатов методов диагностики, чувствительных к различным дефектам и внешним факторам, в единый комплексный показатель качества. Рассмотрен пример применения метода к реальным результатам диагностики, полученным в результате полевых испытаний.*

**Введение.** Автоматизированные системы управления энергетическими объектами (в частности, трансформаторными подстанциями) активно внедряются во всем мире в течение последних десятилетий, демонстрируют свою техническую и экономическую эффективность. Однако замена всех трансформаторных подстанций на цифровые, функционирующие в соответствии с требованиями стандарта МЭК 61850, не представляется возможной. В нашей стране продолжает функционировать большое количество подстанций старого поколения, многие из которых (более 60% по оценке [1]) исчерпали свой ресурс. Для таких трансформаторов рекомендуется проводить как плановые технические осмотры и обслуживание с целью своевременного выявления и купирования дефектов, так и внедрять системы постоянного мониторинга и диагностики (далее – СмиД) [2].

СмиД высоковольтного оборудования включают большое количество параметров контроля, полученных на основе разнообразных методик [3,4]. Каждый из параметров в отдельности содержит ограниченную информацию, являясь чувствительным к определенным факторам и механизмам старения изоляционной системы, что существенно усложняет сопоставление полученных результатов. В то же время для формирования целостной картины о состоянии и остаточном ресурсе оборудования удобным было бы свести все параметры к единому показателю уровня качества, по своей сути числу, отображающему информацию о состоянии изоляции в целом. В квалиметрии в таком случае используется метод комплексной оценки качества.

**Объекты и методы исследования.** Комплексный показатель качества представляет собой не просто интегрированную оценку единичных показателей, но и учитывает степень влияния отдельных свойств посредством коэффициентов весомости [5]. Чтобы обеспечить сопоставимость показателей, имеющих различную размерность и существенное различие по численным значениям, единичные показатели

качества  $P_c$  переводят в безразмерные величины  $q$ , используя функции преобразования  $k$ :

$$q_{ci} = k_i \cdot P_{ci}, (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (1)$$

Средневзвешенный арифметический показатель качества для совокупности единичных показателей  $K_a$  с учетом коэффициентов весомости  $a_i$  рассчитывают по формуле:

$$K_a = \sum_{i=1}^n a_i \cdot q_i. \quad (2)$$

Для оценки состояния изоляционной системы предлагается использовать набор параметров, разделенных на три группы. Группа 1 – параметры, полученные при помощи электрических методов диагностики: электрическое сопротивление ( $R$ ), коэффициент диэлектрической абсорбции ( $DAR$ ), индекс поляризации ( $PI$ ), коэффициент диэлектрического разряда ( $DD$ ), обобщенный индекс поляризации ( $TPI$ ), величина токовой нестабильности ( $\sigma_{mn}$ ). Группа 2 – параметры, характеризующие степень увлажнения: бумажно-масляной изоляции, определенную по времени релаксации ( $W_t$ ) и целлюлозы, рассчитанную по эмпирически установленной зависимости от  $PI$  [6]. Группа 3 – параметры, определенные на основании анализа спектра токов поляризации: коэффициент, отражающий отличие формы изоляционного промежутка от эталонного ( $k_c$ ); величина максимумов в разложении спектра токов поляризации на отдельные составляющие ( $Max1, Max2$ ) [7].

Для каждого из параметров контроля необходимо определить функцию преобразования  $k$ . В квалиметрии для этого необходимо определить значения параметров, соответствующих базовому (эталонному) объекту. В нашем случае целесообразным является выбор не базового значения, а базового состояния с определенным набором параметров.

В диагностике высоковольтного оборудования, основанной на анализе растворенных в масле газов, обычно выделяют семь базовых состояний изоляционной системы по типичному развивающемуся дефекту [8,9]: PD – частичные разряды; T1 – термический дефект ( $T_{max} \leq 300^\circ C$ ); T2 – термический дефект ( $300^\circ C \leq T_{max} \leq 700^\circ C$ ); T3 – термический дефект ( $700^\circ C \leq T_{max}$ ); D1 – низкоэнергетический разряд (искра); D2 – высокоэнергетический разряд (дуга); DT – наличие термического и электрического дефектов одновременно. Каждому из этих состояний присущи определенные значения контролируемых параметров. Наиболее стабильным является состояние T1, соответствующее низкотемпературному старению системы, поэтому данное состояние и выберем в качестве базового (эталонного) (см. таблицу 1).

Таблица 1.

Значения базовых параметров контроля (для состояния T1)

R	DAR	PI	DD	TPI	$\sigma_{тн}$	W $\tau$	W $\rho$	кс	tmax1	tmax2
1,58 ГОМ	1,288	2,1	5,459	48,58	0,19нА	4%	4%	1	64,043	16,459

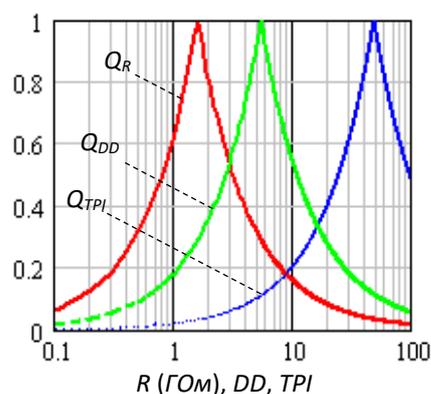
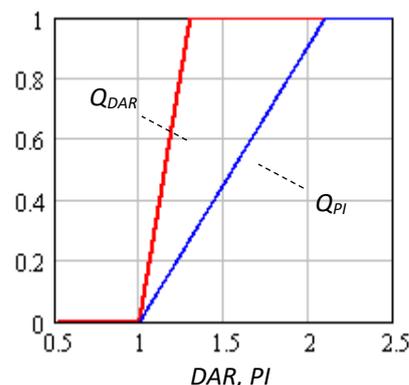
Определим правила перевода параметров контроля в безразмерные показатели  $q$ , значения которых лежат в интервале  $[0; 1]$ . Задать единые правила для перевода значений не представляется возможным как в силу разного физического смысла параметров, так и в силу различных диапазонов значений, которые они могут принимать.

Для параметров контроля  $R$ ,  $TPI$  и  $DD$  единичные показатели качества по параметру контроля  $X$  определим по соотношениям:

$$Q = \begin{cases} X / X_{баз}, & \text{если } X \leq X_{баз} \\ X_{баз} / X, & \text{если } X > X_{баз} \end{cases} \quad (3)$$

Соответствующие функции преобразования представлены на рисунке 1.

$DAR$  и  $PI$  характеризуют быстрые и медленные процессы поляризации, протекающие в диэлектрике. Если  $DAR < 1$  и/или  $PI < 1$ , то сопротивление изоляционного промежутка в течение времени испытаний падает, поэтому следует ограничить минимальные значения параметров контроля на уровне 1. Коэффициенты преобразования для данных параметров представлены выражениями (4), функции преобразования – на рисунке 2.

Рис. 1. Функции преобразования для  $R$ ,  $TPI$ ,  $DD$ Рис.2. Функции преобразования для  $DAR$  и  $PI$ 

$$Q = \begin{cases} 0, & \text{если } X \leq 1 \\ \frac{X - 1}{X_{баз} - 1}, & \text{если } X \in (1; X_{баз}) \\ 1, & \text{если } X \geq X_{баз} \end{cases} \quad (4)$$

Токовая нестабильность  $\sigma_{тн}$  характеризует непостоянство спада тока с течением времени, обусловленное наличием дефектов.

Коэффициенты преобразования для токовой нестабильности можно вычислить следующим образом (5), функция преобразования – на рис. 3.

$$Q = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_{mn} \leq 0,19 \text{ нА} \\ \frac{0,19}{\sigma_{mn}}, & \text{если } \sigma_{mn} > 0,19 \text{ нА} \end{cases} \quad (5)$$

В соответствии с нормативными документами, степень увлажнения изоляции для силовых трансформаторов, вводимых в эксплуатацию, не должна превышать 2%, а для эксплуатируемых – 4 % [6]. Исходя из этих значений, коэффициенты преобразования будем вычислять следующим образом:

$$Q = \begin{cases} 1, & \text{если } W \leq 2\% \\ \frac{4 - W}{2}, & \text{если } W \in (2\%; 4\%) \\ 0, & \text{если } W \geq 4\% \end{cases} \quad (6)$$

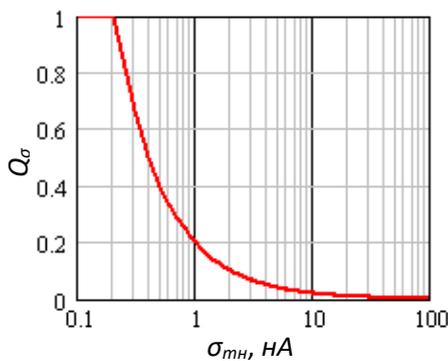


Рис.3. Функция преобразования для  $\sigma_{mn}$

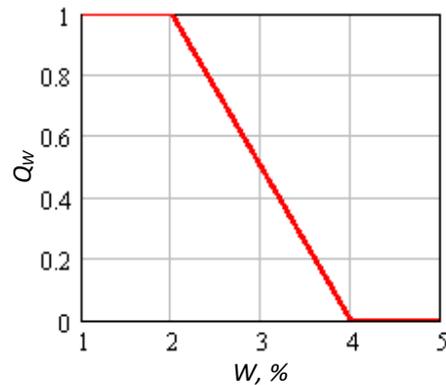


Рис. 4. Функция преобразования степени увлажнения W

Параметры контроля *Max1* и *Max2* являются характеристиками разложения спектра токов поляризации на составляющие, а их отношение определяет четкость границы раздела «бумага-масло» внутри изоляционной системы. Коэффициенты преобразования в этом случае представим в виде:

$$Q = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{Max2}{Max1} \leq 0,25 \\ \frac{0,25}{Max2/Max1}, & \text{если } \frac{Max2}{Max1} > 0,25 \end{cases} \quad (7)$$

Функция преобразования аналогична функции преобразования для токовой нестабильности (рис. 3).

Для нахождения показателя качества объекта по формуле (2) необходимо определить коэффициенты весомости  $a_i$ . Коэффициенты весомости, определенные методом А.П. Феррапонтава [4, 9] сведены в таблицу 2.

Таблица 2.

## Весовые коэффициенты параметров контроля

Параметр контроля	R	DAR	PI	TPI	DD	$\sigma_{тн}$	$W_{PI}$	$W_{\tau}$	$k_c$	$\frac{Max2}{Max1}$
Весовой коэффициент	0,22	0,10	0,11	0,32	0,13	0,12	0,50	0,50	0,50	0,50

Для получения комплексного показателя качества суммирование будем проводить по каждой из групп в отдельности, а затем усреднять полученные результаты.

**Результаты и выводы.** Проведем оценку состояния двух трансформаторов на основе предложенной методики. В таблице 3 представлены значения параметров контроля, определенные на основе полевых испытаний и вычислений.

Таблица 3.

## Значения параметров контроля для двух трансформаторов

Объект	Возраст	R	DAR	PI	DD	TPI	$\sigma_{тн}$
Объект 1	33 года	1,655 ГОМ	1,088	1,204	13,11	14,24	3,078 нА
Объект 2	32 года	1,071 ГОМ	1,019	1,071	22,94	6,347	2,835 нА
Объект	$W_{\tau}$	$W_{PI}$	$k_c$	tmax1	tmax2		
Объект 1	2,756%	2,869%	0,615	140 с	110 с		
Объект 2	3,204%	3,115%	0,449	190 с	90 с		

Используя коэффициенты преобразования (3-7), вычислим безразмерные показатели качества и комплексный показатель качества (таблица 4).

Таблица 4.

## Значения безразмерных показателей качества для двух трансформаторов

Объект	Возраст	R	DAR	PI	DD	TPI	$\sigma_{тн}$
Объект 1	33 года	0,955	0,306	0,185	0,416	0,293	0,062
Объект 2	32 года	0,678	0,066	0,065	0,238	0,131	0,067
Объект	$W_{\tau}$	$W_{PI}$	$k_c$	$\frac{max2}{max1}$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
Объект 1	0,622	0,552	0,615	0,318	0,416	0,587	0,467
Объект 2	0,398	0,443	0,449	0,528	0,246	0,421	0,489

Комплексный показатель качества для объекта 1  $Q_1=0,490$ , для объекта 2  $Q_1=0,385$ . Полученные показатели далеки от 1, что свидетельствует о низком качестве изоляционной системы и наличии дефектов.

Предложенная модель оценки состояния изоляционной системы может быть использована при построении СМиД, т.к. позволяет свести множество разнородных показателей к одному значению, удобному для интерпретации и анализа.

## Литература

1. Макаревич Л.В., Шифрин Л.Н., Алпатов М.Е. Современные тенденции в создании и диагностике силовых трансформаторов больших мощностей // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2008. – №1. – С. 45 – 69.
2. Дарьян Л., Образцов Р., Ильина Е., Сипачев К. Автоматизированная система мониторинга и диагностики оборудования подстанции // Сети России. Электроэнергия. – 2015. - №1 (28). – С. 82-88.
3. Фалев Ю.А., Симагина А.В., Щетинин А.А., Крюков О.В. Автоматизация систем оперативно-диспетчерского управления с трансформаторными подстанциями // Автоматизация и ИТ в энергетике. – 2021. - №7(147). – С. 2-10.
4. Кисляков М.А., Чернов В.А., Чернышев В.А. Многопараметрическая оценка качества трансформаторного масла // Элетротехника. – 2017. – №10. – С. С.92-97.
5. Федюкин В.К. Квалиметрия. Измерение качества промышленной продукции: учебное пособие. – М.: КНОРУС, 2013. – 316 с.
6. РД 34.45-51.300-97. Объем и нормы испытаний электрооборудования. Москва: Энас, 1998.
7. Ambrozevich S. A., Sibatov R. T., Uchaikin D. V., Morozova E. V. Physics Of Semiconductors And Dielectrics To A Method Of Polarization-Depolarization Currents For Diagnosis Of Dielectric Isolation. Russian Physics Journal, Vol. 58, No. 9, 2016, PP. 1284-1290.
8. Duval M. Dissolved Gas Analysis: It Can Save Your Transformer // IEEE Electrical Insulation Magazine, No. 6, 1989. – Vol. 5, S. 22-27
9. E. Bräsel, U. Sasum. Online Transformer Gas Diagnostics on the Basis of IEC 60567/60599 / Paper for Euro Techcon, Warrington, 2009.
10. Ферапонтов А.И. Математическая модель расчета коэффициентов весомостей показателей технической продукции по результатам экспертных оценок Ст К-96, №4, стр.34.

**E.V. Kislyakova, M.A. Kislyakov**

*Smolensk State University, National Research University "MPEI"*

## **QUALIMETRIC APPROACH TO BUILDING A SYSTEM FOR MONITORING AND DIAGNOSTICS OF HIGH-VOLTAGE EQUIPMENT**

**Keywords:** *mathematical model of SM&D, complex quality indicator; parameter conversion functions.*

**Abstract.** *A mathematical model of a system for monitoring and diagnosing energy facilities is considered. An approach to assessing the state of the insulation system of high-voltage equipment is proposed, based on qualimetry methods. This method allows you to assess the condition and predict the continued operability of equipment based on combining the results of diagnostic methods that are sensitive to various defects and external factors into a single comprehensive quality indicator. An example of applying the method to real diagnostic results obtained as a result of field tests is considered.*

**ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ  
МОДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГИЛЬБЕРТА  
ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ**

Ключевые слова: бианалитическая функция, краевая задача типа Гильберта, эффективный алгоритм, единичный круг.

*В статье получен эффективный и конструктивный алгоритм решения модельной краевой задачи типа задачи Гильберта для бианалитических функций в единичном круге. Основой полученного алгоритма служит явный метод решения классической векторно-матричной задачи Гильберта в классах аналитических векторов в случае, когда коэффициентами краевых условий служат матрицы-функции треугольного вида. Показана возможность компьютерной реализации предлагаемого алгоритма.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $L$  – произвольный простой замкнутый контур Ляпунова комплексной плоскости переменного  $z = x + iy$ , ограничивающий конечную односвязную область  $T^+$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ , причем точка  $z = 0$  принадлежит  $T^+$ .

В дальнейшем в основном будем придерживаться терминологии, принятой в [1].

Напомним (см., например, [1-2], что функция  $F^+(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  комплексного переменного  $z = x + iy$  называется бианалитической в области  $T^+$ , если она имеет в этой области непрерывные частные производные по  $x$  и  $y$  до второго порядка включительно и удовлетворяет там обобщенному уравнению Коши-Римана  $\frac{\partial^2 F^+(z)}{\partial \bar{z}^2} = 0$ , где  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  — дифференциальный оператор Коши – Римана.

Также хорошо известно, что всякую бианалитическую в области  $T^+$  функцию  $F^+(z)$  можно представить в виде

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z), \quad (1)$$

где  $\varphi_k^+(z) \in A(T^+)$ ,  $k = 0, 1$ , то есть  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$  — аналитические (голоморфные) в области  $T^+$  функции, называемые соответственно нулевой и первой аналитическими компонентами бианалитической

функции  $F^+(z)$

Рассматривается следующая задача: *требуется найти все бианалитические в  $T^+$  функции  $F^+(z)$ , удовлетворяющие на  $L$  условиям:*

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda_0(t)}F^+(t)\} = q_0(t), \quad (2)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{\lambda_1(t)}\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}}\right\} = q_1(t), \quad (3)$$

где  $\lambda_k(t) = a_k(t) + ib_k(t)$ ,  $q_k(t)$  ( $k = 0, 1$ ) – заданные на  $L$  функции, причем  $\lambda_k(t), q_k(t) \in H^{(2)}(L)$  и  $\lambda_k(t) \neq 0$  ( $k = 0, 1$ ) на  $L$ .

Поставленную выше задачу назовем *модельной задачей типа Гильберта для бианалитических функций*, короче, задачей  $\Gamma_{2,M}$ , а соответствующую однородную задачу ( $q_0 \equiv q_1 \equiv 0$ ) – задачей  $\Gamma_{2,M}^0$ .

**Замечание 1.** Важно отметить, что в силу соотношений

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda_0(t)}F^+(t)\} = \frac{1}{2}\left\{\overline{\lambda_0(t)}F^+(t) + \lambda_0(t)\overline{F^+(t)}\right\},$$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{\lambda_1(t)}\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\overline{\lambda_1(t)}\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} + \lambda_1(t)\frac{\partial \overline{F^+(t)}}{\partial t}\right\},$$

граничные условия (2) и (3) можно записать в следующей эквивалентной комплексной форме:

$$F^+(t) = G_0(t)\overline{F^+(t)} + g_0(t), \quad t \in L, \quad (4)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} = G_1(t)\frac{\partial \overline{F^+(t)}}{\partial t} + g_1(t), \quad t \in L, \quad (5)$$

где приняты следующие обозначения:

$$G_k(t) = -\frac{\lambda_k(t)}{\overline{\lambda_k(t)}}, \quad g_k(t) = \frac{2q_k(t)}{\lambda_k(t)} \quad (k = 0, 1). \quad (6)$$

Главной целью настоящей статьи является разработка эффективного и конструктивного алгоритма решения краевой задачи  $\Gamma_{2,M}$  в случае, когда  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  и  $L = \{t : |t| = 1\}$ .

**2. Об эквивалентности задачи  $\Gamma_{2,M}$  векторно-матричной задаче Гильберта для аналитических функций.** Легко проверить, что в силу представления (1) и того, что  $\frac{\partial \varphi_k^+(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ ,  $z \in T^+$  ( $k = 0, 1$ ), граничные условия (4) и (5), в свою очередь, можно переписать соответственно в виде

$$\begin{aligned}\varphi_0^+(t) + \bar{t}\varphi_1^+(t) &= G_0(t)\left(\overline{\varphi_0^+(t)} + t\overline{\varphi_1^+(t)}\right) + g_0(t), \quad t \in L, \\ \varphi_1^+(t) &= G_1(t)\overline{\varphi_1^+(t)} + g_1(t), \quad t \in L.\end{aligned}\tag{7}$$

В свою очередь, введя в рассмотрение аналитический вектор вида

$$\Phi^+(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0^+(z) \\ \varphi_1^+(z) \end{pmatrix},\tag{8}$$

а  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z) \in A(T^+)$ , систему равенств (7) можно записать в следующей векторно-матричной форме

$$A(t)\Phi^+(t) = B(t)\overline{\Phi^+(t)} + C(t), \quad t \in L,\tag{9}$$

где приняты следующие обозначения:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} G_0(t) & tG_0(t) \\ 0 & G_1(t) \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} g_0(t) \\ g_1(t) \end{pmatrix}.\tag{10}$$

Теперь, умножив слева обе части равенства (9) на матрицу  $A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , обратную  $A(t)$ , получаем

$$\Phi^+(t) = G(t)\overline{\Phi^+(t)} + g(t), \quad t \in L,\tag{11}$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} G_0(t) & tG_0(t) - \bar{t}G_1(t) \\ 0 & G_1(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_0(t) - \bar{t}g_1(t) \\ g_1(t) \end{pmatrix}.\tag{12}$$

Итак, краевая задача  $\Gamma_{2,M}$  для бианалитических функций эквивалентна векторно-матричной задаче Гильберта (11) относительно кусочно аналитического вектора вида (8) (см., например, [3]).

Учитывая структуру матрицы  $G(t)$ , задаваемой формулой (12), нетрудно заметить, что для построения эффективных алгоритмов решения векторно-матричной задачи Гильберта (11) целесообразно рассматривать отдельно следующие два случая:

- 1)  $tG_0(t) \equiv \bar{t}G_1(t)$ ,  $t \in L$ ;
- 2)  $tG_0(t) \not\equiv \bar{t}G_1(t)$ ,  $t \in L$ .

Действительно, в случае  $tG_0(t) \equiv \bar{t}G_1(t)$ ,  $t \in L$ , матрица  $G(t)$ , задаваемая формулой (12), принимает вид  $G(t) = \begin{pmatrix} G_0(t) & 0 \\ 0 & G_1(t) \end{pmatrix}$ , а значит,

решение векторно-матричной задачи Гилберта (11) сводится к решению следующих двух *независимых друг от друга* скалярных задач Гильберта:

$$\varphi_0^+(t) = G_0(t)\overline{\varphi_0^+(t)} + g_0(t) - \bar{t}g_1(t), \quad t \in L,\tag{13}$$

$$\varphi_1^+(t) = G_1(t)\overline{\varphi_1^+(t)} + g_1(t), \quad t \in L. \quad (14)$$

Если же  $tG_0(t) \neq \bar{t}G_1(t)$ ,  $t \in L$ , то решение векторно-матричной задачи Гильберта (11) сводится к последовательному решению следующих двух скалярных задач Гильберта:

$$\varphi_1^+(t) = G_1(t)\overline{\varphi_1^+(t)} + g_1(t), \quad t \in L. \quad (15)$$

и

$$\varphi_0^+(t) = G_0(t)\overline{\varphi_0^+(t)} + Q_0(t), \quad t \in L, \quad (16)$$

где

$$Q_0(t) = g_0(t) - \bar{t}g_1(t) + [tG_0(t) - \bar{t}G_1(t)]\overline{\varphi_1^+(t)}. \quad (15)$$

Из проведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующих двух утверждений.

**Теорема 1.** Если  $tG_0(t) \equiv \bar{t}G_1(t)$ ,  $t \in L$ , то решение задачи  $\Gamma_{2,M}$  для бианалитических функций сводится к решению двух независимых друг от друга скалярных задач Гильберта (13) и (14) относительно аналитических функций  $\varphi_0^+(z)$  и  $\varphi_1^+(z)$  соответственно.

**Теорема 2.** Если  $tG_0(t) \neq \bar{t}G_1(t)$ ,  $t \in L$ , то решение задачи  $\Gamma_{2,M}$  для бианалитических функций сводится к последовательному решению двух скалярных задач Гильберта (15) и (16) относительно аналитических функций  $\varphi_0^+(z)$  и  $\varphi_1^+(z)$  соответственно, при этом в краевое условие задачи Гильберта (16) входит граничное значение  $\varphi_1^+(t)$  решения задачи Гильберта (15).

**3. Об одном эффективном алгоритме решения краевой задачи  $\Gamma_{2,M}$  в единичном круге в случае  $tG_0(t) \equiv \bar{t}G_1(t)$ ,  $t \in L$ .** Пусть  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  и  $L = \{t : |t| = 1\}$ . Тогда в силу теоремы 1 решение задачи  $\Gamma_{2,M}$  сводится к решению двух скалярных краевых задач Гильберта (13) и (14) в классах аналитических функций комплексного переменного. Будем решать задачи Гильберта (13) и (14) в единичном круге методом Н.И. Мусхелишвили (см., например, [4]), то есть сведением задач Гильберта (13) и (14) к соответствующим скалярным задачам Римана для аналитических функций. Такой подход позволяет применить для решения задачи  $\Gamma_{2,M}$  в случае  $tG_0(t) \equiv \bar{t}G_1(t)$ ,  $t \in L$  следующий конструктивный алгоритм.

*Шаг 1.* Вводим в рассмотрение вспомогательные аналитические в области  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$  функции:

$$\varphi_k^-(z) = \overline{\varphi_k^+ \left( \frac{1}{z} \right)}, \quad z \in T^-, \quad k = 0, 1, \quad (16)$$

и переходим к следующему шагу.

*Шаг 2.* С учетом того, что на  $L = \{t : |t| = 1\}$  выполняется соотношение  $\bar{t} = \frac{1}{t}$ , для граничных значений функций (16) будут иметь место равенства:

$$\varphi_k^-(t) = \overline{\varphi_k^+(t)}, \quad t \in L, \quad k = 0, 1. \quad (17)$$

В силу (17) граничные условия (13) и (14) соответственно примут вид:

$$\varphi_0^+(t) = G_0(t)\varphi_0^-(t) + Q_0(t), \quad t \in L, \quad (18)$$

$$\varphi_1^+(t) = G_1(t)\varphi_1^-(t) + g_1(t), \quad t \in L. \quad (19)$$

где  $Q_0(t) = g_0(t) - \bar{t}g_1(t)$ .

Но равенства (18) и (19) представляют собой граничные условия классических краевых задач Римана относительно ограниченных на бесконечности кусочно аналитических функций  $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$  и  $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$  соответственно.

Далее, переходим к следующему шагу.

*Шаг 3.* Пусть  $\chi_0 = \text{Ind}G_0(t)$  и  $\chi_1 = \text{Ind}G_1(t)$  индексы краевых задач Римана (18) и (19). Далее возможны следующие четыре случая:

- 1)  $\chi_0 \geq -1$  и  $\chi_1 \geq -1$ ;
- 2)  $\chi_0 < -1$  и  $\chi_1 < -1$ ;
- 3)  $\chi_0 < -1$  и  $\chi_1 \geq -1$ ;
- 4)  $\chi_0 \geq -1$  и  $\chi_1 < -1$ .

Ради краткости изложения далее ограничимся построением алгоритма лишь в случае 1), то есть когда  $\chi_0 \geq -1$  и  $\chi_1 \geq -1$ . В этом случае обе задачи Римана (18) и (19) безусловно разрешимы. Поэтому находим их общие решения по формулам (см., например, [4-5]):

$$\varphi_0^\pm(z) = X_0^\pm(z) \left\{ \Psi_0^\pm(z) + P_{\chi_0}(z) \right\}, \quad (20)$$

$$\varphi_1^\pm(z) = X_1^\pm(z) \left\{ \Psi_1^\pm(z) + P_{\chi_1}(z) \right\}, \quad (21)$$

где

$$X_k^+(z) = \exp\{\gamma_k^+(z)\}, \quad X_k^-(z) = z^{-\chi_k} \exp\{\gamma_k^-(z)\},$$

$$\gamma_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\chi_k} G_k(\tau)]}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \gamma_k^+(z), & z \in T^+, \\ \gamma_k^-(z), & z \in T^-, \end{cases}$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_0(\tau)}{X_0^+(\tau) \tau - z} d\tau = \begin{cases} \Psi_0^+(z), & z \in T^+, \\ \Psi_0^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (22)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{X_1^+(\tau) \tau - z} d\tau = \begin{cases} \Psi_1^+(z), & z \in T^+, \\ \Psi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases}$$

$P_{\chi_k}(z) = c_{0k} + c_{1k}z + c_{2k}z^2 + \dots + c_{\chi_k, k}z^{\chi_k}$  ( $k = 0, 1$ ) – многочлены степени не выше  $\chi_k$  с произвольными комплексными коэффициентами, причем здесь нужно положить  $P_{\chi_k}(z) \equiv 0$  при  $\chi_k < 0$ ,  $k = 0, 1$ , а затем переходим к следующему шагу.

*Шаг 4.* Для того чтобы получить решения вспомогательных задач Гильберта (13) и (14), выбираем среди аналитических функций  $\varphi_0^\pm(z)$  и  $\varphi_1^\pm(z)$ , задаваемых соответственно формулами (20) и (21) лишь те, граничные значения которых удовлетворяют условиям (17). Обозначим через  $\tilde{\varphi}_0^+(z)$  и  $\tilde{\varphi}_1^+(z)$  полученные таким образом решения задач Гильберта (13) и (14) соответственно, и переходим к следующему шагу.

*Шаг 5.* По формуле

$$F^+(z) = \tilde{\varphi}_0^+(z) + \bar{z} \tilde{\varphi}_1^+(z) \quad (23)$$

находим решения исходной задачи  $\Gamma_{2,M}$ , и на этом завершается алгоритм.

Важно отметить, что совершенно аналогичный алгоритм можно получить и в случае, когда  $tG_0(t) \neq \bar{t}G_1(t)$ ,  $t \in L$ .

В заключение также отметим, что при решении прикладных задач, которые могут быть сведены к решению краевых задач типа Гильберта  $\Gamma_{2,M}$  с краевыми условиями вида (2)-(3), очевидно, возникает вопрос о компьютерной реализации описанного алгоритма решения указанных задач. В диссертации [6] был рассмотрен подход к приближенному решению указанных задач с использованием системы MathCad. Однако наиболее эффективным является решение краевых задач комплексного анализа с использованием системы Wolfram Mathematica. Возможности этой системы по решению разнообразных задач описаны в целом ряде работ, например, в [7].

Как указано выше, на третьем шаге решения задачи  $\Gamma_{2,M}$  возникает необходимость вычисления индекса Коши непрерывной функции вдоль кривой  $L$ . Приведем программу в системе Wolfram Mathematica, решающую задачу вычисления индекса для примера, приведенного в [6] на с. 104.

$$U[x_, y_] = \text{Sin}[\text{Pi}/2 * (x + y)] - 9 / (8 * (x^2 + y^2 + x) + 1);$$

```

V[x_,y_]=x-y;
U1[t]=U[x,y]/.{x→Cos[t],y→Sin[t]};
V1[t]=V[x,y]/.{x→Cos[t],y→Sin[t]};
1/(2*Pi)*NIntegrate[(U1[t]*D[V1[t],t]-
V1[t]*D[U1[t],t])/((U1[t]^2+(V1[t])^2),{t,0,2*Pi}]

```

-1.

На третьем шаге алгоритма также осуществляется вычисление интеграла типа Коши. Эта операция также допускает реализацию средствами системы Wolfram Mathematica

Сначала строим контур и его графическое изображение (см. Рис. 1)

```

x[t_]=Cos[t]+Sqrt[3] Sin[t]+4;
y[t_]=Cos[t]-Sqrt[3] Sin[t]+4;
x1[t_]=Sqrt[x[t]];
y1[t_]=Sqrt[y[t]];
ParametricPlot[{x1[t],y1[t]},{t,-π, π}]

```

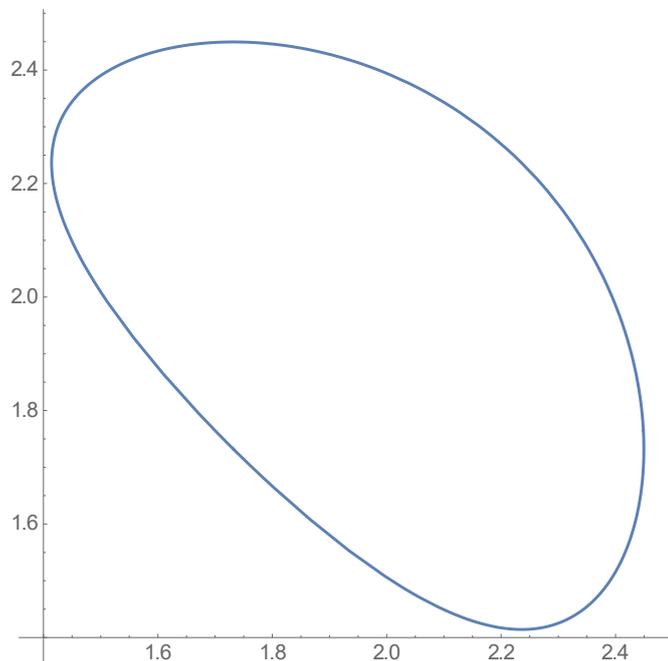


Рис. 1.

Затем вычисляем значения интеграла типа Коши

$$\int_L \frac{|\sin \tau|}{\tau - z} d\tau$$

$$z[t_]=x1[t]+I y1[t];$$

$$\text{NIntegrate}[(\text{Abs}[\text{Sin}[z[t]]]z'[t])/(z[t]-2), \{t, 0, 2\pi\}]$$

$$0.0173027 - 1.27057 I$$

В приведенном примере вычисляется значение функции, определяемой интегралом типа Коши в точке  $z=2$ .

Таким образом, система Wolfram Mathematica позволяет эффективно решать задачи, к которым сводится решение краевых задач комплексного анализа. При необходимости использования более привычного интерфейса для пользователя можно построить на основе этих документов программу на языке C#.

### Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 85, ВИНТИ, М., 1991.
3. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. Кристалинский В.Р. Приближенные методы решения краевых задач типа Гильберта и типа Римана для бианалитических функций: специальность 01.01.01 "Вещественный, комплексный и функциональный анализ": диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Смоленск, 2001. – 114 с.
7. Кристалинский В.Р., Р. Е. Кристалинский. Об использовании системы Wolfram Mathematica в статистическом анализе данных // Дистанционные образовательные технологии: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции (с международным участием). Ялта: ООО «Издательство Типография «Ариал», 2019. – С. 58-61.

**V.R. Kristalinskii, K.M. Rasulov, D.E. Feramuzov**  
Smolensk State University

### **ON ALGORITHM OF THE SOLUTION OF MODEL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HILBERT TAPE FOR BIANALYTIC FUNCTIONS IN UNIT DISK**

**Keywords:** *bianalytic function, boundary value problem of Hilbert type, constructive algorithm, unit disk.*

**Abstract.** *The article provides an effective and constructive algorithm for solving a model boundary value problem such as the Hilbert problem for bianalytical functions in a unit circle. The basis of the obtained algorithm is an explicit method for solving the classical Hilbert vector-matrix problem in classes of analytical vectors in the case when the coefficients of the boundary conditions are triangular matrix functions. The possibility of computer implementation of the proposed algorithm is shown.*

**Т.И. Михалёва, К.М. Расулов**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

## **О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГАЗЕМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ**

Ключевые слова: *квазигармоническая функция, краевая задача типа Газемана, дифференциальное уравнение Эйлера, круговая область.*

*В статье рассматривается краевая задача типа Газемана для квазигармонических функций третьего рода в произвольных односвязных областях с гладкими границами. Доказано, что решение рассматриваемой задачи в круговых областях сводится к последовательному решению классической задачи Газемана в классах аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера третьего порядка. Кроме того, установлено, что решения исследуемой краевой задачи в круговых областях неустойчивы по отношению к малым изменениям носителя краевых условий.*

**1. Постановка задачи.** Обозначим через  $T^+$  – конечную односвязную область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченную гладким замкнутым контуром  $L$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ . Для определенности будем считать, что точка  $z = 0$  принадлежит  $T^+$ .

В работе [1] была поставлена и частично исследована следующая краевая задача: *требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно квазигармонические функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) с линией скачков  $L$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  краевому условию*

$$W^+[\alpha(t)] = W^-(t)G(t) + g(t), \quad (1)$$

где  $G(t)$ ,  $g(t)$  – заданные на  $L$  комплексные функции, причем  $G(t) \neq 0$  на  $L$ , а  $\alpha(t)$  – функция сдвига контура  $L$ , сохраняющая его ориентацию.

Следуя [1], сформулированную выше задачу будем называть задачей типа Газемана для квазигармонических функций рода  $n$  или, короче, задачей  $H_n$  а соответствующую ей однородную задачу ( $g(t) \equiv 0$ ) – задачей  $H_n^0$ .

Основной целью настоящей статьи является построение конструктивного алгоритма решения краевой задачи  $H_n$  в случае, когда  $n = 3$  и область  $T^+$  представляет собой произвольную круговую область вида  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ ,  $r > 0$ .

## 2. О решении задачи $H_3$ в произвольных круговых областях.

Пусть  $L_r = \{t : |t| = r\}$  – граница круга  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ ,  $r > 0$ . Как известно (см., например, [1-2]), всякая исчезающая на бесконечности кусочно квазигармоническая функция  $W(z)$  третьего рода с линией скачков  $L_r$  представляется в виде

$$W(z) = \begin{cases} \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - \frac{12\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 \varphi^+(z), \\ \frac{d^3 \varphi^-(z)}{dz^3} - \frac{12\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \frac{d\varphi^-(z)}{dz} - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 \varphi^-(z) \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varphi^+(z)$ ,  $\varphi^-(z)$  – пока неизвестные аналитические соответственно в  $T_r^+$  и  $T^-$  функции, причем  $\varphi^-(z)$  исчезает на бесконечности (обычно  $\varphi^+(z)$ ,  $\varphi^-(z)$  называются аналитическими компонентами кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ ).

Поскольку мы ищем решения задачи  $H_3$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_3(T^\pm) \cap H^{(3)}(L)$ , то функции  $\varphi^\pm(z) \in A(T^\pm) \cap H^{(3)}(L)$  (см. [1-2]).

Так как в точках окружности  $L_r$  выполняется тождество  $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ , краевое условие (1) при  $n = 3$  с учетом (2) можно переписать как:

$$\begin{aligned} & [\alpha(t)]^3 \frac{d^3 \varphi^+[\alpha(t)]}{dt^3} - [\alpha(t)]^2 \frac{12r^2}{1+r^2} \frac{d^2 \varphi^+[\alpha(t)]}{dt^2} + [\alpha(t)] \frac{60r^4}{(1+r^2)^2} \frac{d\varphi^+[\alpha(t)]}{dt} - \\ & - \frac{120r^6}{(1+r^2)^3} \varphi^+[\alpha(t)] = G_1(t) \left( t^3 \frac{d^3 \varphi^-(t)}{dt^3} - t^2 \frac{12r^2}{1+r^2} \frac{d^2 \varphi^-(t)}{dt^2} + t \frac{60r^4}{(1+r^2)^2} \frac{d\varphi^-(t)}{dt} - \frac{120r^6}{(1+r^2)^3} \varphi^-(t) \right) + \\ & + g_1(t), t \in L_r, \end{aligned} \quad (3)$$

где приняты обозначения:

$$G_1(t) = \frac{[\alpha(t)]^3 G(t)}{t^3}, \quad g_1(t) = [\alpha(t)]^3 g(t). \quad (4)$$

Далее, введя в рассмотрение вспомогательную кусочно аналитическую функцию  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  с линией скачков  $L_r$ , где

$$\Phi^\pm(z) = z^3 \frac{d^3 \varphi^\pm(z)}{dz^3} - z^2 \frac{12r^2}{1+r^2} \frac{d^2 \varphi^\pm(z)}{dz^2} + z \frac{60r^4}{(1+r^2)^2} \frac{d\varphi^\pm(z)}{dz} - \frac{120r^6}{(1+r^2)^3} \varphi^\pm(z), z \in T_r^\pm \quad (5)$$

(здесь  $\varphi^\pm(z)$  – аналитические компоненты искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ ), перепишем (3) в виде

$$\Phi^\pm[\alpha(t)] = G_1(t)\Phi^-(t) + g_1(t), t \in L_r, \quad (6)$$

где  $\Phi^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L_r} \Phi^\pm(z)$ .

Заметим, что равенство (6) есть краевое условие *классической краевой задачи Газемана* относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  (см., например, [3, с. 117]).

Пусть  $\chi = \text{Ind}G_1(t) = \text{Ind}G(t)$  – индекс вспомогательной краевой задачи Газемана (6).

Как известно (см., например, [4, с. 303]), если индекс  $\chi \geq 0$ , то задача Газемана (6) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать следующими формулами:

$$\Phi^+(z) = \frac{X^+(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\psi[\beta(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad z \in T_r^+, \quad (7)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{X^-(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - z} d\tau + X^-(z) \cdot P_{\chi-1}(z), \quad z \in T_r^-, \quad (8)$$

где  $X(z) = \{X^+(z), X^-(z)\}$  – так называемая *каноническая функция задачи Газемана*,  $P_{\chi-1}(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{\chi-1} z^{\chi-1}$  – произвольный многочлен степени не выше  $\chi - 1$  с комплексными коэффициентами, а  $\psi(t)$  – решение интегрального уравнения Фредгольма вида

$$(K\psi)(t) \equiv \psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] \psi(\tau) d\tau = \frac{g_1(t)}{X^+[\alpha(t)]} + P_{\chi-1}(z). \quad (9)$$

Если же  $\chi < 0$ , то для разрешимости задачи Газемана (6) необходимо и достаточно выполнение  $-\chi$  условий вида

$$\int_L \left[ \frac{g_1(\tau)}{X^+[\alpha(\tau)]} + \int_L R(\tau, \tau_1) \frac{g_1(\tau_1)}{X^+[\alpha(\tau_1)]} d\tau_1 \right] \tau^{k-1} dt = 0, \quad (10)$$

$$k = 1, 2, \dots, -\chi,$$

где  $R(\tau, \tau_1)$  – резольвента ядра интегрального уравнения Фредгольма (9), причем (при выполнении условий (10)) задача Газемана (6) имеет единственное решение, которое также задается формулами (7)-(9), в которых нужно положить  $P_{\chi-1}(z) \equiv 0$ .

Предположим, что задача Газемана (6) разрешима и уже найдено ее решение  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ . Тогда силу (5) для полного решения искомой задачи  $H_3$ , нам остается найти *аналитические компоненты*  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ , решив следующие два линейных дифференциальных уравнения Эйлера:

$$z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - z^2 \frac{12r^2}{1+r^2} \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + z \frac{60r^4}{(1+r^2)^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{120r^6}{(1+r^2)^3} \varphi^+(z) = \Phi^+(z), z \in T_r^+ \quad (11)$$

$$z^3 \frac{d^3 \varphi^-(z)}{dz^3} - z^2 \frac{12r^2}{1+r^2} \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} + z \frac{60r^4}{(1+r^2)^2} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} - \frac{120r^6}{(1+r^2)^3} \varphi^-(z) = \Phi^-(z), z \in T_r^- \quad (12)$$

В случае разрешимости дифференциальных уравнений Эйлера (11) и (12) в классах функций  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$  и  $A(T_r^-) \cap H^{(3)}(L_r)$  соответственно, находим их общие решения  $\tilde{\varphi}^+(z)$  и  $\tilde{\varphi}^-(z)$ . А затем, подставляя в правую часть (2) вместо  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  найденные функции  $\tilde{\varphi}^+(z)$  и  $\tilde{\varphi}^-(z)$  соответственно, получаем общее решение  $\tilde{W}(z)$  искомой задачи  $H_3$  по следующей формуле:

$$\tilde{W}(z) = \begin{cases} \tilde{W}^+(z) = \frac{d^3 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^3} - \frac{12\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d^2 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 \tilde{\varphi}^+(z), \\ \tilde{W}^-(z) = \frac{d^3 \tilde{\varphi}^-(z)}{dz^3} - \frac{12\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d^2 \tilde{\varphi}^-(z)}{dz^2} + 60 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \frac{d\tilde{\varphi}^-(z)}{dz} - 120 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 \tilde{\varphi}^-(z) \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Решение краевой задачи типа Газемана  $H_3$  для квазигармонических функций третьего рода в круговых областях сводится к последовательному решению классической краевой задачи Газемана (6) относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера (11) и (12) в классах аналитических функций. Для разрешимости задачи  $H_3$  необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы задача Газемана (6) и дифференциальные уравнения (11) и (12) в классах  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$  и  $A(T_r^-) \cap H^{(3)}(L_r)$  соответственно.*

**3. О зависимости числа линейно независимых решений однородной задачи  $H_3^0$  от величины радиуса круговой области.** Поскольку общее решение *однородной задачи  $H_3^0$*  ( $g(t) \equiv 0$ ) в круговых областях также задается формулой (13), где  $\tilde{\varphi}^+(z)$  и  $\tilde{\varphi}^-(z)$  – решения дифференциальных уравнений Эйлера вида (11) и (12) соответственно, у которых правыми частями служат функции  $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ , являющиеся решениями *однородной задачи Газемана* вида

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G_1(t)\Phi^-(t), \quad t \in L_r, \quad (14)$$

то для доказательства зависимости числа линейно независимых решений однородной задачи  $H_3^0$  от величины радиуса круговой области  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , достаточно установить *существенную зависимость* числа  $l$  линейно независимых решений однородного дифференциального уравнения Эйлера вида

$$z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - z^2 \frac{12r^2}{1+r^2} \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + z \frac{60r^4}{(1+r^2)^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{120r^6}{(1+r^2)^3} \varphi^+(z) = 0, z \in T_r^+ \quad (15)$$

от величины радиуса  $r$  круговой области  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ .

Для этого, сначала проверим, при каких значениях переменной  $r$ , однородное дифференциальное уравнение (15) имеет решения, принадлежащие классу  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ .

С помощью замены вида  $z = e^s, \tilde{\varphi} = e^s$  приведем уравнение Эйлера (15) к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами (см., например, [5, с. 136]):

$$\frac{d^3 \tilde{\varphi}(z)}{dz^3} - \left( \frac{3+15r^2}{1+r^2} \right) \frac{d^2 \tilde{\varphi}(z)}{dz^2} + \left( \frac{2+16r^2+74r^4}{(1+r^2)^2} \right) \frac{d\tilde{\varphi}(z)}{dz} - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 \tilde{\varphi}(z) = 0, z \in T_r. \quad (16)$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (16)

$$\mu^3 - 3 \left( \frac{1+5r^2}{1+r^2} \right) \mu^2 + 2 \left( \frac{1+8r^2+37r^4}{(1+r^2)^2} \right) \mu - 120 \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^3 = 0. \quad (17)$$

Далее, используя формулы Кордано (см., например, 6, с. 235]) и систему компьютерной математики Wolfram Mathematica, относительно корней  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  алгебраического уравнения (17) удастся получить следующие результаты:

1) если  $r = 1$ , то уравнение (17) имеет три целочисленных корня  $\mu_1 = 5, \mu_2 = 1, \mu_3 = 3$ ;

2) если  $r = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ , то уравнение (17) имеет два целочисленных корня  $\mu_1 = 2, \mu_2 = 4$ ;

3) если  $r = \sqrt{4 \pm \sqrt{15}}$ , то уравнение (17) будет иметь лишь один целочисленный корень  $\mu_3 = 3$ .

Следовательно, получаем, что общее решение  $\varphi_0^+(z)$  однородного дифференциального уравнения Эйлера (17) в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , принадлежащее классу  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ , можно задавать следующим образом:

$$\varphi_0^+(z) = \begin{cases} 0, \text{ если } r \neq 1, r \neq \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}), r = \sqrt{4 \pm \sqrt{15}}, \\ b_1 z + b_2 z^3 + b_3 z^5, \text{ если } r = 1, \\ b_4 z^2 + b_5 z^4, \text{ если } r = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}), \\ b_6 z^3, \text{ если } r = \sqrt{4 \pm \sqrt{15}} \end{cases} \quad (18)$$

где  $b_k = v_k + i\tau_k$ , ( $k=1, \dots, 6$ )  $b, b_k$  ( $k=1, 2$ ) – произвольные комплексные постоянные.

Таким образом, из формулы (18) видно, что число  $l$  линейно независимых (над полем  $C$ ) решений однородного дифференциального уравнения (17), принадлежащих классу  $A(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ , существенно зависит от величины радиуса  $r$  круговой области  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , причем максимального значения  $l=3$  оно достигает при  $r=1$ .

Приведенные выше рассуждения показывают, что справедливо следующее важное утверждение.

**Теорема 2.** *Решения краевой задачи типа Газемана  $H_3$  для квазигармонических функций в круговых областях неустойчивы по отношению к малым изменениям носителя  $L_r = \{t: |t|=r\}$  краевого условия задачи.*

### Литература

1. Михалёва Т.И., Расулов К.М. Об одном методе решения краевой задачи типа Газемана в классах квазигармонических функций в круговых областях // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2022. Вып. 23. С. 261-269.
2. Михалёва Т.И., Расулов К.М. О неустойчивости решений задачи типа Газемана для квазигармонических функций в круговых областях // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2023. Вып. 24. С. 286-291.
3. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
4. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: СГПУ, 1998. 343 с.
5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 431 с.

**T.I. Mikhalyova, K.M. Rasulov**

Smolensk State University

**ON THE SOLUTION OF THE HASEMAN TYPE BOUNDARY  
VALUE PROBLEM FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS OF THE  
THIRD ORDER IN CIRCULAR DOMAINS**

**Keywords:** *quasiharmonic function, boundary value problem of Haseman type, Euler differential equation, circular domain.*

**Abstract.** *This paper considers a Haseman type boundary value problem for quasiharmonic functions of the third order in arbitrary simply connected domains with smooth boundaries. This paper proves that a solution of the considered boundary value problem is reduced to solution of usual Haseman problem in the classes of analytic functions and two linear Euler differential equations. It is established that solutions of the considered problem are unstable about small changes in the carrier of the boundary conditions.*

**Т.Р. Нагорная, К.М. Расулов**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 517.968.23

## **ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ**

**Ключевые слова:** *краевая задача Пуанкаре, обобщенная краевая задача Гильберта, дифференциальное уравнение, односвязная область, интегральное уравнение.*

*В статье рассматривается краевая задача Пуанкаре для одного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка, порождающего класс обобщенных гармонических функций, в односвязных областях с гладкими границами. При определенных ограничениях на коэффициенты краевого условия рассматриваемой задачи, получен эффективный алгоритм ее решения, который позволяет свести решение исследуемой задачи к последовательному решению хорошо изученной интегро-дифференциальной краевой задачи Гильберта и дифференциальной краевой задачи Гильберта в классах аналитических функций комплексного переменного.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $L$  – простая замкнутая кривая Ляпунова, лежащая внутри единичного круга  $U_1^+ = \{z : |z| < 1\}$ , заданная параметрическим уравнением вида  $z = t(s) = x(s) + iy(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , где  $s$  – длина дуги [1], а  $T^+$  – конечная часть комплексной плоскости переменного  $z = x + iy$ , ограниченная кривой  $L$ .

В работе авторов [2] (см. также [3-4]) впервые была дана постановка следующей краевой задачи  $GP_n$

требуется найти все обобщенные гармонические функции  $W(z)$  порядка  $n$  ( $n \geq 1$ ) в области  $T^+$ , принадлежащие классу  $G_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию

$$a(t) \frac{\partial W(t)}{\partial x} + b(t) \frac{\partial W(t)}{\partial y} + c(t)W(t) = q(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

где  $a(t), b(t), c(t)$  и  $q(t)$  – заданные на кривой  $L$  комплекснозначные функции из класса  $H(L)$  (т.е. удовлетворяющие на  $L$  условию Гельдера).

Следуя [5, с. 80], сформулированную выше задачу будем называть краевой задачей Пуанкаре для обобщенных гармонических функций порядка  $n$ , или, короче, задачей  $GP_n$ .

В работах авторов [3-5] были построены явные решения задачи  $GP_1$  в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ , при определенных предположениях относительно коэффициентов  $a(t), b(t), c(t)$  краевого условия (1).

Настоящая статья посвящена построению метода решения задачи  $GP_1$  для обобщенных гармонических функций в произвольных односвязных областях, границами которых служат кривые Ляпунова, а коэффициенты краевого условия задаются следующими выражениями:

$$a(t) = \bar{t} + it; b(t) = i\bar{t} + t; c(t) \equiv 0. \quad (2)$$

## 2. Алгоритм решения задачи Пуанкаре $GP_1$ в случае, когда, $a(t), b(t), c(t) \in H(L)$ при выполнении условий (2).

Как известно (см., например, [2]), при  $n = 1$  всякую обобщенную гармоническую функцию  $W(z) \in G_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$  можно записать так

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1-z\bar{z}}\varphi^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1-z\bar{z}}f^+(z)}, \quad z \in T^+, \quad (3)$$

где  $\varphi^+(z), f^+(z)$  – аналитические в области  $T^+$  функции, которые принадлежат классу  $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ .

Тогда, учитывая соотношения  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ , краевое условие (1) (при выполнении условий (2)) можно переписать в следующем виде

$$2it \frac{\partial W(t)}{\partial t} + 2\bar{t} \frac{\partial W(t)}{\partial \bar{t}} = q(t), \quad t \in L, \quad (4)$$

В силу представления (3), краевое условие (4) примет вид:

$$\begin{aligned}
& 2it \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{4it\bar{t}}{1-t\bar{t}} \cdot \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{4it\bar{t}^2 + 4\bar{t}}{(1-t\bar{t})^2} \varphi^+(t) + \\
& + 2\bar{t} \frac{\overline{d^2 f^+(t)}}{dt^2} + \frac{4t\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{\overline{df^+(t)}}{dt} + \frac{4t^2\bar{t} + 4it}{(1-t\bar{t})^2} \overline{f^+(t)} = q(t).
\end{aligned} \tag{5}$$

Теперь, переходя к комплексно-сопряженным значениям, из (5) будем иметь:

$$\begin{aligned}
& -2it \frac{\overline{d^2 \varphi^+(t)}}{dt^2} - \frac{4it\bar{t}}{1-t\bar{t}} \cdot \frac{\overline{d\varphi^+(t)}}{dt} - \frac{4it^2\bar{t} - 4t}{(1-t\bar{t})^2} \overline{\varphi^+(t)} + \\
& + 2t \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + \frac{4t\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{df^+(t)}{dt} + \frac{4\bar{t}^2 t - 4it}{(1-t\bar{t})^2} f^+(t) = \overline{q(t)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Почленно складывая равенства (5) и (6), а затем разделив обе части полученного равенства на 2, получаем

$$\operatorname{Re} \left\{ 2it \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{4it\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{4it\bar{t}^2 + 4\bar{t}}{(1-t\bar{t})^2} \varphi^+(t) \right\} = Q_1(t), \quad t \in L, \tag{7}$$

где

$$Q_1(t) = -\operatorname{Re} \left\{ 2\bar{t} \frac{\overline{d^2 f^+(t)}}{dt^2} + \frac{4t\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{\overline{df^+(t)}}{dt} + \frac{4t^2\bar{t} + 4it}{(1-t\bar{t})^2} \overline{f^+(t)} \right\} + \operatorname{Re} q(t). \tag{8}$$

Предположим, что функция  $Q_1(t)$  известная функция. Тогда равенство (7) – граничное условие дифференциальной задачи Гильберта относительно аналитической функции  $\varphi^+(z)$  (см., например, [7, с. 357]).

Заметим, что число  $\chi = \operatorname{Ind}(2it) = 1$  – индекс дифференциальной задачи Гильберта (7). Решая задачу (7), например, методом, изложенным в [7], найдем неизвестную аналитическую функцию  $\varphi^+(z)$ .

В свою очередь, почленно вычитая из равенства (5) равенство (6), а затем разделив обе части полученного равенства на  $2i$ , будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} \left\{ 2it \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{4it\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{4it\bar{t}^2 + 4\bar{t}}{(1-t\bar{t})^2} \varphi^+(t) + \right. \\
& \left. + 2\bar{t} \frac{\overline{d^2 f^+(t)}}{dt^2} + \frac{4t\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{\overline{df^+(t)}}{dt} + \frac{4t^2\bar{t} + 4it}{(1-t\bar{t})^2} \overline{f^+(t)} \right\} = \operatorname{Im} q(t), \quad t \in L.
\end{aligned} \tag{9}$$

Далее, подставляя в левую часть равенства (9) вместо  $\varphi^+(t)$ ,  $\frac{d\varphi^+(t)}{dt}$ ,  $\frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2}$  граничные значения уже найденной аналитической функции  $\varphi^+(z)$  и ее производных, получаем равенство, которое является граничным условием хорошо известной интегро-дифференциальной задачи Гильберта относительно аналитической функции  $f^+(z)$  (см., например, [6-8]).

Теперь, решая полученную указанным выше способом интегро-дифференциальную задачу Гильберта относительно аналитической

функции  $f^+(z)$ , например, методом, изложенным в монографии [7, с. 357], находим (в случае ее разрешимости) аналитическую функцию  $f^+(z)$ .

Далее, подставляя в правую часть краевого условия (7) вместо  $f^+(t)$ ,  $\frac{df^+(t)}{dt}$  и  $\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}$  граничные значения решения интегро-дифференциальной задачи Гильберта относительно функции  $f^+(z)$ , а затем решая дифференциальную задачу Гильберта (7) (в случае ее разрешимости), получаем аналитическую функцию  $\varphi^+(z)$ .

Наконец, подставляя значения найденных аналитических функций  $\varphi^+(z)$  и  $f^+(z)$  в правую часть формулы (3), получаем решение искомой задачи  $GP_1$ .

Из приведенных выше рассуждений следует справедливость следующего утверждения.

**Теорема 1.** Пусть имеет место равенства (2). Тогда решение краевой задачи  $GP_1$  сводится к последовательному решению интегро-дифференциальной задачи Гильберта относительно аналитической функции  $f^+(z)$  и дифференциальной задачи Гильберта относительно аналитической функции  $\varphi^+(z)$ . Для разрешимости краевой задачи  $GP_1$  необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы и интегро-дифференциальная задача Гильберта относительно аналитической функции  $f^+(z)$ , и дифференциальная задача Гильберта относительно аналитической функции  $\varphi^+(z)$ .

## Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
2. Нагорная Т.Р., Расулов К.М. О краевой задаче Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях // Научно-технический вестник Поволжья. 2022, №7. С. 32–35.
3. Нагорная Т.Р., Расулов К.М. Алгоритм явного решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций второго порядка в круговых областях // Научно-технический вестник Поволжья. 2022, №11. – С. 24-27.
4. Расулов К.М., Нагорная Т.Р. О решении в явном виде краевой задачи Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 326–335.
5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М: Наука, 1976. – 295 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М: Наука, 1977. – 640 с.
7. Рогожин В.С. Новое интегральное представление кусочно-аналитической функции и его приложение // ДАН СССР. 1960. Т. 135, № 4. С. 791-793.
8. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

**T.R. Nagornaya, K.M. Rasulov**  
Smolensk State University

**ON ONE CASE OF AN EFFECTIVE SOLUTION OF THE  
POINCARÉ BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GENERALIZED  
HARMONIC FUNCTIONS IN SIMPLY CONNECTED DOMAINS**

**Keywords:** *Poincaré boundary value problem, generalized Hilbert boundary value problem, differential equation, simply connected domain, integral equation.*

**Abstract.** *The paper is devoted to the Poincaré boundary value problem for a second-order elliptic differential equation generating a class of generalized harmonic functions in simply connected domains with smooth boundaries. Under certain restrictions on the coefficients of the boundary condition of the problem under consideration, an effective algorithm for solving it is obtained, which allows us to reduce the solution of the problem to a sequential solution of the well-studied integro-differential Hilbert boundary value problem and the differential Hilbert boundary value problem in classes of analytic functions of a complex variable.*

**П.Г. Поцейко**

*Гродненский государственный университет  
имени Янки Купалы (г. Гродно, Республика Беларусь)*

УДК 517.5

**СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВАЛЛЕ ПУССЕНА КАК МЕТОД  
СУММИРОВАНИЯ РЯДА ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЁВА**

**Ключевые слова:** *сингулярный интеграл Валле Пуссена, ряд Фурье – Чебышёва, методы суммирования, равномерные оценки, асимптотические оценки, точные константы.*

*Вводится сингулярный интеграл Валле Пуссена на отрезке  $[-1, 1]$ , ассоциированный с системой полиномов Чебышёва первого рода, и устанавливается его интегральное представление через частичные суммы рядов Фурье – Чебышёва. Доказывается теорема о равномерной сходимости последовательности сингулярных интегралов Валле Пуссена для непрерывных на отрезке  $[-1, 1]$  функций в терминах модуля непрерывности. Получено асимптотическое выражение точных верхних граней уклонений сингулярных интегралов Валле Пуссена на классах  $H^{(\alpha)}[-1, 1]$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , функций, удовлетворяющих на отрезке  $[-$*

1, 1] условию Липшица степени  $\alpha$ . Эти асимптотические оценки существенным образом зависят от положения точки  $x$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Исследуются приближения функции  $|x|$  на отрезке  $[-1, 1]$  сингулярным интегралом Валле Пуссена. Найдено интегральное представление поточечных и равномерных приближений, асимптотическая оценка равномерных приближений.

**Введение.** В 1908 году Шарль Жан де Ла Валле Пуссен [1] для аппроксимации  $2\pi$ -периодических функций ввел новый метод суммирования тригонометрических рядов Фурье, представляющий собой интеграл вида

$$I_n = \frac{1}{h_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos^{2n} \frac{u-t}{2} du, \quad h_n = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} u du, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Интеграл (1) является тригонометрическим полиномом степени не выше  $n$  и впоследствии был назван *сингулярным интегралом Валле Пуссена*.

В работе (1) также были установлены некоторые аппроксимационные свойства нового метода. В частности, найдено, что

$$I_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (2)$$

где элементы треугольной матрицы коэффициентов

$$\rho_k^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

коэффициенты Фурье тригонометрического ряда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku du, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku du.$$

Сингулярный интеграл Валле Пуссена нашел широкое применение в теории приближений [2–7]. В монографии Д. Джексона [8] при помощи сингулярного интеграла Валле Пуссена доказывается теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных периодических функций. В работах [9–10] исследованы аппроксимационные свойства сингулярных интегралов Валле Пуссена в хаусдорфовой метрике. Задачи, связанные с сингулярным интегралом Валле Пуссена актуальны и в наше время [11]. Вместе с тем о его аналогах на отрезке  $[-1, 1]$  автору неизвестно.

Функции  $f(x)$ , суммируемой с весом  $(1-x^2)^{-1/2}$  на отрезке  $[-1, 1]$ , поставим в соответствие ее ряд Фурье – Чебышёва

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n T_n(x), \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (4)$$

Ряды Фурье – Чебышёва обладают рядом замечательных свойств и нашли широкое применение в различных областях математики и физики [12–15]. Их аппроксимационные свойства достаточно хорошо изучены [16–22]. Методы суммирования рядов Фурье – Чебышёва также нашли применение в полиномиальной аппроксимации на отрезке  $[-1, 1]$  [23–25].

Представляет интерес построение сингулярного интеграла Валле Пуссена, ассоциированного с системой полиномов Чебышёва первого рода  $T_k(x) = \cos k \arccos x$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и являющегося методом суммирования ряда Фурье – Чебышёва с треугольной матрицей коэффициентов (3). Целью работы является изучение аппроксимационных свойств нового метода полиномиальной аппроксимации.

**2. Сингулярный интеграл Валле Пуссена на отрезке.** По аналогии с (2) введем сумму

$$V_n(f, x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} c_k T_k(x), \quad T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad (5)$$

где  $\rho_k^{(n)}$  из (3),  $c_k, k = 1, 2, \dots, n$ , – коэффициенты ряда Фурье – Чебышёва (4). Получим для нее удобное выражение.

**Теорема 1.** *Оператор (5) представляет собой алгебраический полином степени не выше  $n$ , зависящий от функции  $f$ , точный для единицы, и для него имеет место интегральное представление*

$$V_n(f, x) = \frac{1}{h_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \tau) \cos^{2n} \frac{\tau - \theta}{2} d\tau, \quad x = \cos \theta, x \in [-1, 1], \quad (6)$$

величина  $h_n$  определена в (1).

**Доказательство.** Первые два утверждения теоремы легко следуют из представления (5) и свойств коэффициентов Фурье – Чебышёва. Докажем интегральное представление (6). Подставив в выражение (5) вместо коэффициентов Фурье – Чебышёва их интегральные представления, получим

$$V_n(f, x) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos k\tau \cos k\theta \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

где положено  $x = \cos \theta, t = \cos \tau$ .

Следовательно,

$$V_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 f(t) \left[ 2 + 2 \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos k(\tau - \theta) + 2 \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos k(\tau + \theta) \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Применив известное тождество [26, с. 277], получим

$$V_n(f, x) = \frac{1}{h_n} \int_{-1}^1 f(t) \left[ \cos^{2n} \frac{\tau - \theta}{2} + \cos^{2n} \frac{\tau + \theta}{2} \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x = \cos \theta,$$

где величина  $h_n$  определена в (1).

В последнем интеграле перейдем к интегрированию по переменному  $\tau, t = \cos \tau$ . Тогда

$$V_n(f, x) = \frac{1}{h_n} \int_0^\pi f(\cos \tau) \left[ \cos^{2n} \frac{\tau - \theta}{2} + \cos^{2n} \frac{\tau + \theta}{2} \right] d\tau, \quad x = \cos \theta.$$

Теперь для того, чтобы прийти к интегральному представлению (6) достаточно разбить интеграл справа на два интеграла соответственно слагаемым в квадратной скобке и затем во втором из них выполнить замену переменного по формуле  $\tau \mapsto -\tau$ . Теорема 1 доказана.

Интеграл (6) естественно назвать *сингулярным интегралом Валле Пуссена на отрезке, ассоциированным с системой полиномов Чебышёва первого рода*.

**2. Равномерная сходимость сингулярных интегралов Валле Пуссена для непрерывных на отрезке функций.** Рассмотрим последовательность сингулярных интегралов Валле Пуссена (6), то есть  $\{V_n(f, x)\}_{n=0}^{+\infty}$ .

**Теорема 2.** Для всякой функции  $f \in C[-1, 1]$  справедливо неравенство

$$|f(x) - V_n(f, x)| \leq 3 \left( \omega_f \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{n}} \right) + \omega_f \left( \frac{|x|}{n} \right) \right), \quad x \in [-1, 1], \quad (7)$$

где  $\omega_f$  – модуль непрерывности функции  $f$  на отрезке  $[-1, 1]$ .

**Доказательство.** Учитывая точность оператора  $V_n(\cdot, \cdot)$  для единицы, запишем

$$f(x) - V_n(f, x) = \frac{1}{h_n} \int_{-\pi}^\pi [f(\cos \theta) - f(\cos \tau)] \cos^{2n} \frac{\tau - \theta}{2} d\tau, \quad x = \cos \theta. \quad (8)$$

Отсюда ввиду  $2\pi$ -периодичности подынтегральной функции находим, что

$$f(x) - V_n(f, x) = \frac{1}{h_n} \int_{-\pi}^\pi [f(\cos \theta) - f(\cos(\tau + \theta))] \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau, \quad x = \cos \theta.$$

Несложными преобразованиями интеграл справа приводится к виду

$$f(x) - V_n(f, x) = \frac{1}{h_n} [I_n(+\theta) + I_n(-\theta)], \quad (9)$$

где

$$I_n(\pm\theta) = \int_0^\pi [f(\cos \theta) - f(\cos(\tau \pm \theta))] \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau.$$

Для дальнейших рассуждений воспользуемся методом, предложенным А. Ф. Тиманом [27, с. 269]. Заметив, что

$$|f(\cos \theta) - f(\cos(\tau \pm \theta))| \leq \omega_f(|\cos \theta - \cos(\tau \pm \theta)|) =$$

$$= \omega_f(|\sin \theta \sin \tau \pm 2 \cos \theta \sin^2 \frac{\tau}{2}|) \leq \omega_f(|\sin \theta \sin \tau|) + 2\omega_f(|\cos \theta \sin^2 \frac{\tau}{2}|),$$

находим

$$|I_n(\pm\theta)| \leq \int_0^\pi \omega_f(|\sin \theta \sin \tau|) \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau + 2 \int_0^\pi \omega_f(|\cos \theta \sin^2 \frac{\tau}{2}|) \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau.$$

Используя свойства модуля непрерывности, из последней оценки получим

$$|I_n(\pm\theta)| \leq \omega_f\left(\frac{|\sin \theta|}{\sqrt{n}}\right) \int_0^\pi (\sqrt{n} \sin \tau + 1) \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau + \\ + 2 \left(\frac{|\cos \theta|}{n}\right) \int_0^\pi \omega_f\left(n \sin^2 \frac{\tau}{2} + 1\right) \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau.$$

Отсюда заключаем, что

$$|I_n(\pm\theta)| \leq \omega_f\left(\frac{|\sin \theta|}{\sqrt{n}}\right) (J_1 + J_2) + 2\omega_f\left(\frac{|\cos \theta|}{n}\right) (J_3 + J_2), \quad (10)$$

где

$$J_1 = \sqrt{n} \int_0^\pi \sin \tau \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau, \quad J_2 = \int_0^\pi \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau, \quad J_3 = n \int_0^\pi \sin^2 \frac{\tau}{2} \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau.$$

Для каждого из трёх интегралов по отдельности соответствующими вычислениями находим, что

$$J_1 = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}, \quad J_2 = \frac{h_n}{2}, \quad J_3 = \frac{n}{2}(h_n - h_{n+1}) = \frac{nh_n}{2(2n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из оценки (10) с учетом вычисленных интегралов, получим

$$|I_n(\pm\theta)| \leq \omega_f\left(\frac{|\sin \theta|}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{2\sqrt{n}}{n+1} + \frac{h_n}{2}\right) + h_n \omega_f\left(\frac{|\cos \theta|}{n}\right) \left(\frac{n}{2n+2} + 1\right), \quad x = \cos \theta.$$

Из представления (9) и последней оценки будем иметь

$$|f(x) - V_n(f, x)| \leq \omega_f\left(\frac{|\sin \theta|}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{4\sqrt{n}}{h_n(n+1)} + 1\right) + \omega_f\left(\frac{|\cos \theta|}{n}\right) \left(\frac{n}{n+1} + 2\right), \quad x = \cos \theta.$$

Поскольку (см., напр., [1])

$$h_n = 2\sqrt{\frac{\pi}{n}}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

то

$$|f(x) - V_n(f, x)| \leq 3 \left( \omega_f \left( \frac{|\sin \theta|}{\sqrt{n}} \right) + \omega_f \left( \frac{|\cos \theta|}{n} \right) \right), \quad x = \cos \theta.$$

Из последнего неравенства следует оценка (7). Теорема 2 доказана.

**Замечание 1.** Теорема 2 является алгебраическим аналогом соответствующих результатов, установленных в [4, 7] для периодического случая. Существенным отличием оценки в теореме 2 от указанных результатов является тот факт, что она зависит от положения точки  $x$  на отрезке  $[-1, 1]$ , на концах отрезка скорость убывания выше. Оценки такого типа являются традиционными для аппроксимаций алгебраическими полиномами на отрезке.

**3. Приближения на классах  $H^{(\alpha)}[-1, 1]$  сингулярным интегралом Валле Пуссена.** Рассмотрим класс  $H^{(\alpha)}[-1, 1]$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , функций, удовлетворяющих на отрезке  $[-1, 1]$  условию Липшица степени  $\alpha$  с константой равной единице, то есть условию вида

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^\alpha, \quad x_1, x_2 \in [-1, 1].$$

Изучим асимптотическое поведение верхней грани

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x) = \sup_{f \in H^{(\alpha)}[-1, 1]} |f(x) - V_n(f, x)|,$$

отклонений сингулярного интеграла Валле Пуссена (6) от функции  $f \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$ .

**Теорема 3.** Для приближений на классах  $H^{(\alpha)}[-1, 1]$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , равномерно относительно  $x \in [-1, 1]$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \left(\frac{1-x^2}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}} + o\left(\left(\frac{1-x^2}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) + \delta_n^{(\alpha)}(x), \quad \alpha \in (0, 1], \quad (12)$$

где

$$\delta_n^{(\alpha)}(x) = O\left(\frac{|x|^\alpha}{n^\alpha}\right), \quad \alpha \in (0, 1]. \quad (13)$$

При этом

$$\delta_n^{(\pm 1)} = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \alpha \in (0, 1]. \quad (14)$$

**Доказательство.** Воспользуемся представлением (8). Имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - V_n(f, x)| &= \frac{1}{h_n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\cos \theta) - f(\cos \tau)| \cos^{2n} \frac{\tau - \theta}{2} d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{h_n} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos \theta - \cos \tau|^\alpha \cos^{2n} \frac{\tau - \theta}{2} d\tau, \quad x = \cos \theta. \end{aligned}$$

Это неравенство обращается в точное равенство для функции  $f_x^*(y) = |x - y|^\alpha$ , принадлежащей классу  $H^{(\alpha)}[-1, 1]$ . Поэтому

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{h_n} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos \theta - \cos \tau|^\alpha \cos^{2n} \frac{\tau - \theta}{2} d\tau, \quad x = \cos \theta.$$

Ввиду  $2\pi$ -периодичности подынтегральной функции, несложными преобразованиями интеграл справа приводится к виду

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{h_n} [I_n(+\theta) + I_n(-\theta)], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

где

$$I_n(\pm\theta) = \int_0^\pi |\cos \theta - \cos(\tau \pm \theta)|^\alpha \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau,$$

Рассмотрим интеграл  $I_n(\pm\theta)$ . Несложными преобразованиями он приводится к виду

$$I_n(\pm\theta) = \int_0^\pi |\sin \theta \sin \tau \pm 2 \cos \theta \sin^2 \frac{\tau}{2}|^\alpha \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau, \quad x = \cos \theta.$$

Используя известное равенство

$$|A \pm B|^\alpha = |A|^\alpha + \gamma |B|^\alpha, \quad -1 \leq \gamma \leq 1,$$

получим

$$I_n(\pm\theta) = |\sin \theta|^\alpha I_n^{(1)} + \gamma \cdot 2^\alpha |\cos \theta|^\alpha I_n^{(2)}, \quad x = \cos \theta, \quad (16)$$

где

$$I_n^{(1)} = \int_0^\pi \sin^\alpha \tau \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau, \quad I_n^{(2)} = \int_0^\pi \sin^{2\alpha} \frac{\tau}{2} \cos^{2n} \frac{\tau}{2} d\tau.$$

Для исследования асимптотического поведения интегралов справа воспользуемся методом Лапласа [28, 29]. Так, первый интеграл представим в виде

$$I_n^{(1)} = \int_0^\pi \sin^\alpha \tau e^{2nS(\tau)} d\tau, \quad S(\tau) = \ln \cos \frac{\tau}{2}.$$

Поскольку  $S'(\tau) = -(1/2) \cdot \operatorname{tg}(\tau/2)$ , то заключаем, что функция  $S(\tau)$  убывает на интервале  $(0, \pi)$ , и значит достигает своего максимального значения при  $\tau = 0$ . Учитывая известное асимптотическое равенство  $\sin \tau \sim \tau, \tau \rightarrow 0$ , а также разложение в ряд Тейлора  $S(\tau) = -\tau^2/8 + o(\tau^2), \tau \rightarrow 0$ , при некотором  $\varepsilon > 0$  и  $n \rightarrow \infty$  получим

$$I_n^{(1)} = \int_0^\varepsilon \tau^\alpha e^{-\frac{n\tau^2}{4}} d\tau (1 + o(1)).$$

Выполнив в интеграле справа замену переменного по формуле  $n\tau^2/4 \mapsto u^2$ , будем иметь

$$I_n^{(1)} = \left( \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^{1+\alpha} \int_0^{\frac{\sqrt{n}}{2}\varepsilon} u^\alpha e^{-u^2} du (1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right),$$

приходим к асимптотическому равенству

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \left( \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^{1+\alpha} (1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Рассуждая в отношении второго интеграла в (16) аналогичным образом, заключаем, что

$$I_n^{(2)} = \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \frac{1}{(\sqrt{n})^{1+2\alpha}} (1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Из соотношения (16) с учетом асимптотических равенств (17) и (18) при  $n \rightarrow \infty$  будем иметь

$$I_n(\pm\theta) = \frac{|\sin\theta|^\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \left( \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^{1+\alpha} + o\left( \frac{|\sin\theta|^\alpha}{(\sqrt{n})^{1+\alpha}} \right) + \mu_n^{(\alpha)}(x), \quad x = \cos\theta,$$

где

$$\mu_n^{(\alpha)}(x) = O\left( \frac{|x|^\alpha}{(\sqrt{n})^{1+2\alpha}} \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Из равенства (15) и последнего асимптотического равенства при  $n \rightarrow \infty$  получим

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{|\sin\theta|^\alpha}{h_n} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \left( \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^{1+\alpha} + o\left( \frac{|\sin\theta|^\alpha}{h_n(\sqrt{n})^{1+\alpha}} \right) + \frac{2\mu_n^{(\alpha)}(x)}{h_n}.$$

Воспользовавшись асимптотическим равенством (11), находим, что

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \left( \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{n}} \right)^\alpha + o\left( \left( \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{n}} \right)^\alpha \right) + \delta_n^{(\alpha)}(x), \quad \alpha \in (0,1], x = \cos\theta,$$

где  $\delta_n^{(\alpha)}(x)$  определена равенством (13).

При этом из последнего выражения сразу же следует асимптотическое равенство (12). Из представления (16) и асимптотического равенства (18) следует соотношение (14). Теорема 3 доказана.

**Замечание 2.** Интересно сравнить асимптотическую оценку точной верхней грани, найденную в теореме 3 с соответствующей оценкой в тригонометрическом случае, полученной И. П. Натансоном [3, 26].

**4. Аппроксимации функции  $|x|$  на отрезке  $[-1, 1]$ .** Изучим приближения функции  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ , сингулярным интегралом Валле Пуссена (6). С этой целью получим его представление, отличное от уже найденных.

**Лемма 1.** Для сингулярного интеграла Валле Пуссена справедливо представление

$$V_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} s_k(f, x), \quad x \in [-1, 1], \quad (19)$$

где множители суммирования

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{(n!)^2 (2k+1)}{(n-k)!(n+k+1)!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$s_k(f, x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k T_k(x), \quad -$$

$n$ -я частичная сумма ряда Фурье – Чебышёва (4).

**Доказательство.** Из выражения для частичных сумм ряда Фурье – Чебышёва следует, что для заданного  $n$  необходимо найти такой набор параметров  $\lambda_k^{(n)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , при котором

$$\begin{aligned} V_n(f, x) &= \lambda_0^{(n)} \frac{c_0}{2} + \lambda_1^{(n)} \left( \frac{c_0}{2} + c_1 T_1(x) \right) + \lambda_2^{(n)} \left( \frac{c_0}{2} + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) \right) + \dots \\ &\quad \dots + \lambda_n^{(n)} \left( \frac{c_0}{2} + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \dots + c_n T_n(x) \right) = \\ &= (\lambda_0^{(n)} + \lambda_1^{(n)} + \dots + \lambda_n^{(n)}) \frac{c_0}{2} + (\lambda_1^{(n)} + \dots + \lambda_n^{(n)}) c_1 T_1(x) + \dots + \lambda_n^{(n)} c_n T_n(x), \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее представление с выражением (5) приходим к системе

$$\begin{cases} \lambda_0^{(n)} + \lambda_1^{(n)} + \dots + \lambda_n^{(n)} = 1, \\ \lambda_1^{(n)} + \dots + \lambda_n^{(n)} = \rho_1^{(n)}, \\ \dots \\ \lambda_n^{(n)} = \rho_n^{(n)}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно неизвестных  $\lambda_k^{(n)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , находим, что

$$\lambda_k^{(n)} = \rho_k^{(n)} - \rho_{k+1}^{(n)} = \frac{(n!)^2 (2k+1)}{(n-k)!(n+k+1)!}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Из последнего выражения следует доказательство леммы 1.

Введем следующие обозначения

$$\varepsilon_{2n}(|x|, x) = |x| - V_{2n}(|\cdot|, x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$\varepsilon_{2n}(|x|) = \left\| |x| - V_{2n}(|\cdot|, x) \right\|_{C[-1, 1]}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$V_{2n}(f, x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} s_{2k}(f, x), \quad x \in [-1, 1].$$

Отметим, что в этом случае интегральная форма сингулярного интеграла Валле Пуссена имеет вид

$$V_{2n}(f, x) = \frac{1}{h_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \tau) \cos^{2n}(\tau - \theta) d\tau, \quad x = \cos \theta, x \in [-1, 1].$$

**Теорема 4.** Для приближений функции  $|x|$  на отрезке  $[-1, 1]$  сингулярным интегралом Валле Пуссена (6) справедливы:

1) интегральное представление

$$\varepsilon_{2n}(|x|, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2\theta + t^4}} D_n(x, t) dt, \quad x \in [-1, 1], x = \cos \theta, \quad (20)$$

где

$$D_n(x, t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \lambda_k^{(n)} t^{2k} \cos((2k+2)\theta - \arg(1+t^2 \xi^2));$$

2) интегральное представление равномерных приближений

$$\varepsilon_{2n}(|x|) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 D_n^*(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

где

$$D_n^*(t) = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} t^{2k}, \quad t \in (0, 1);$$

3) асимптотическая оценка равномерных приближений

$$\varepsilon_{2n}(|x|) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

**Доказательство.** Из точности сингулярного интеграла Валле Пуссена на константах следует, что

$$\varepsilon_{2n}(|x|, x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} \delta_{2k}(|x|, x), \quad x \in [-1, 1], \quad (23)$$

где  $\delta_{2k}(|x|, x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  – приближения функции  $|x|$  на отрезке  $[-1, 1]$  частичными суммами ряда Фурье – Чебышёва.

Известно [30, Т. 1], что для приближений функции  $|x|^s$ ,  $s > 0$ , на отрезке  $[-1, 1]$  частичными суммами ряда Фурье – Чебышёва справедливо интегральное представление

$$\delta_{2k}(|x|^s, x) = \frac{(-1)^k}{2^{s-2} \pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{2k+1-s}}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2\theta + t^4}} \cos \psi_{2k}(x, t) dt,$$

где

$$\psi_{2k}(x, t) = \arg \frac{\xi^{2k+2}}{1 + t^2 \xi^2}, \quad \xi = e^{i\theta}, \quad x = \cos \theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Положив в последнем представлении  $s = 1$ , получим

$$\delta_{2k}(|x|, x) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{(1-t^2)t^{2k}}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2\theta + t^4}} \cos((2k+2)\theta - \arg(1+t^2 \xi^2)) dt.$$

Из (23) и последнего интегрального представления, поменяв порядок суммирования и интегрирования, получим (20).

Из (20) с учетом очевидного неравенства

$$\sqrt{1+2t^2 \cos 2\theta + t^4} \geq 1-t^2, \quad t \in [0, 1], \quad \theta \in \mathbb{R},$$

легко следует оценка

$$|\varepsilon_{2n}(|x|, x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 D_n^*(t) dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $D_n^*(t)$  из (21).

Последняя оценка является точной. Легко проверить, что равенство в ней достигается при  $x = 0$ , что соответствует значению параметра  $\theta = \pi/2$ . Действительно, из (20) находим, что

$$|\varepsilon_{2n}(|x|, 0)| = \frac{2}{\pi} \int_0^1 D_n^*(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Выражение справа совпадает с правой частью последней оценки. Следовательно, справедливо интегральное представление (21).

Докажем асимптотическую оценку (22). С этой целью в интегральном представлении (21) поменяем порядок суммирования и интегрирования и вычислим образовавшийся интеграл. Тогда

$$\varepsilon_{2n}(|x|) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Найдем асимптотическое выражение суммы справа. Нетрудно получить, что

$$\varepsilon_{2n}(|x|) = \frac{2}{\pi(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} (1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Из [26, с. 277] следует, что

$$2 \sum_{k=0}^n \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} + 1.$$

Применив этому равенству формулу Стирлинга, находим, что

$$2 \sum_{k=0}^n \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} = \sqrt{\pi n} + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Из (24) и последнего асимптотического равенства приходим к (22). Теорема 4 доказана.

Автор выражает признательность профессору Ровбе Евгению Алексеевичу за полезные замечания и помощь в работе.

### Литература

1. Vallee Poussin Ch.-J. Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier // *Bulletins de l'Académie Royale des Sciences. Belgique.* 1908. Vol. 3. P. 193–254.

2. Натансон И.П. Некоторые оценки, связанные с сингулярным интегралом Валле-Пуссена // *Доклады АН СССР.* 1944. Т. 45, № 7. С. 290–293.

3. Натансон И.П. О приближенном представлении функций, удовлетворяющих условию Липшица, с помощью интеграла Валле Пуссена // *Доклады АН СССР.* 1946. Т. 54, № 1. С. 11–13.

4. Butzer P.L. On the Singular Integral of de la Vallée Poussin // *Archiv der Mathematik.* 1956. Vol. VII, iss. 4. P. 295–309.

5. Жук В.В. О порядке приближения непрерывной  $2\pi$ -периодической функции линейными методами // *Известия вузов. Математика.* 1969. № 10. С. 40–50.

6. Баскаков В.А. Асимптотика приближения непрерывных и дифференцируемых функций сингулярными интегралами Валле Пуссена // *Математические заметки.* 1977. Т. 21, № 6. С. 769–776.

7. Schurer F., Steutel F.W. On the Degree of Approximation by the Operators of de la Vallée Poussin // *Monatshefte für Mathematik.* 1979. Vol. 87. P. 53–64.

8. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: Гос. изд.-во иностранной литературы, 1948. 256 с.

9. Сендов Б. Линейные методы приближения периодических функций относительно одной метрики хаусдорфовского типа // *Доклады АН СССР.* 1965. Т. 160, № 5. С. 1023–1025.

10. Vesselinov V., Buong F. The best constants for the approximation of functions by certain singular integrals in the Hausdorff metric // *Annuaire de l'Université de Sofia "St. Kliment Ohridski". Faculté de Mathématiques et Mécanique.* 1977. Vol. 68. P. 227–234.

11. Хаиров Р.А., Хаиров Р.А. О некоторых производящих функциях // *Актуальные вопросы математики и смежные вопросы (труды межвузовского семинара).* Махачкала, ФГБОУ ВО "ДГТУ" ; ред. А. М. Нурмагомедов. – Махачкала, 2021. С. 52–55.

12. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1983. 384 с.

13. Васильев Н.И., Клоков Ю.А., Шкёрстена А.Я. Применение полиномов Чебышева в численном анализе. Рига: Зинатне, 1984. 240 с.

14. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. 3-е изд., перераб. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 480 с.

15. Марфицын С.В., Марфицын В.П. Применение полиномов Чебышёва 1-го рода для описания устойчивых состояний металла при постоянных и переменных нагрузках // *Вест. Курганского госуниверситета. Сер. Техн. науки.* 2016. Вып. 1, № 3. С. 96–98.

16. Никольский С.М. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // *Известия АН СССР. Сер. матем.* 1946. Т. 10, № 4. С. 295–322.

17. Тиман А.Ф. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами // *Доклады АН СССР.* 1951. Т. 77, № 6. С. 969–972.

18. Ганзбург И.М. О приближении функций с заданным модулем непрерывности суммами П. Л. Чебышёва // Доклады АН СССР. 1953. Т. 91, № 6. С. 1253–1256.
19. Селиванова С.Г. Асимптотические оценки приближений дифференцируемых непериодических функций суммами Чебышёва // Доклады АН СССР. 1955. Т. 105, № 4. С. 648–651.
20. Тиман А.Ф., Тучинский Л.И. Приближение дифференцируемых функций, заданных на конечном отрезке алгебраическими многочленами // Доклады АН СССР. 1956. Т. 111, № 4. С. 771–773.
21. Бадков В.М. Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 20–62.
22. Райцин Р.А. Асимптотические свойства равномерных приближений функций с алгебраическими особенностями частичными суммами ряда Фурье – Чебышёва // Известия вузов. Математика. 1980. № 3. С. 45–49.
23. Ганзбург И.М. Обобщение некоторых результатов С. М. Никольского и А. Ф. Тимана // Доклады АН СССР. 1957. Т. 116, № 5. С. 727–730.
24. Ганзбург И.М., Тиман А.Ф. Линейные процессы приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами // Известия АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22, № 6. С. 771–810.
25. Русецкий Ю.И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля – Пуассона / Ю. И. Русецкий // Сибирский математический журнал. – 1968. – Т. IX, № 1. – С. 136–144.
26. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.-Л.: Гос. Изд.-во. тех.-теор. лит.-ры, 1949. 684 с.
27. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Гос. Изд.-во физ.-мат. лит.-ры, 1960. 626 с.
28. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.
29. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Гл. ред. Физ.-мат. лит.-ры, 1987. – 544 с.
30. Поцейко, П. Г. Об одном представлении сингулярного интеграла Джексона и аппроксимации функции  $|x|^s$  на отрезке  $[-1, 1]$  // Веснік Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2019. Т. 9, № 2. – С. 22–38.

**P. G. Patseika**

Yanka Kupala State University of Grodno (Belarus)

## **THE SINGULAR INTEGRAL OF VALLEE POUSSIN AS A SUMMATION METHOD OF THE FOURIER–CHEBYSHEV SERIES**

**Keywords:** *singular integral of Vallee Poussin, Fourier–Chebyshev series, summation methods, uniform estimates, asymptotic estimates, exact constants.*

**Abstract.** *The singular Vallee Poussin integral on the segment  $[-1, 1]$  associated with the Chebyshev polynomial system of the first kind is introduced, and its integral representation is established in terms of partial sums of the Fourier–Chebyshev series. The theorem on the uniform*

*convergence of a sequence of singular Vallee Poussin integrals for continuous functions on the interval  $[-1, 1]$  in terms of the modulus of continuity is proved. An asymptotic expression of the exact upper edges of the deviations of the singular Vallee Poussin integrals on the classes  $H^{(\alpha)}[-1, 1]$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , of functions satisfying the Lipschitz condition of degree  $\alpha$  on the segment  $[-1, 1]$  is obtained. These asymptotic estimates depend significantly on the position of point  $x$  on the segment  $[-1, 1]$ . Approximations of the function  $|x|$  on the segment  $[-1, 1]$  by the singular integral of Vallee Poussin are investigated. An integral representation of pointwise and uniform approximations and an asymptotic estimate of uniform approximations are found.*

**Е.Х. Садекова**  
НИЯУ МИФИ

УДК 517.9

### **ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЧЁТНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩЕГОСЯ ОТ НУЛЯ**

Ключевые слова: *чётный тригонометрический полином, равномерное приближение, полином, наименее уклоняющийся от нуля, оценка нормы полинома.*

*Изучаются тригонометрические полиномы порядка не выше  $n$  со специальными свойствами, позволяющими эффективно использовать эти полиномы для намеченных приложений. Специальный тригонометрический полином вводится как решение некоторой задачи, аналогичной классической задаче о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля на паре отрезков  $[-\pi, -\delta]$  и  $[\delta, \pi]$ . Получена точная по порядку оценка нормы указанного полинома.*

Пусть  $n$  – натуральное число,  $0 < \delta < \pi$ . Рассмотрим следующие три экстремальные задачи. Среди всех тригонометрических полиномов  $T(x)$  порядка  $n$ , подчинённых ограничению

$$\max \{ |T(x)| : \delta \leq |x| \leq \pi \} \leq 1, \quad (1)$$

найти тот, для которого величина  $\|T\| := \max_x |T(x)|$  имеет наибольшее

значение, и вычислить это значение, если

(А) на полином  $T(x)$  нет дополнительных условий;

(В)  $\max_x T(x) = -\min_x T(x)$ ;

(С) выполняется условие (В) и полином  $T(x)$  является чётным.

Решения задач (А) и (В) известны. Эти задачи являются тригонометрическими аналогами классической проблемы построения алгебраического полинома степени  $n$  с равным 1 старшим коэффициентом, наименее уклоняющегося от нуля на паре отрезков  $[-1, -\alpha]$ ,  $[\alpha, 1]$  (см. [1, с. 320]). При этом задача (А) соответствует случаю чётного  $n$ , задача (В) – нечётного  $n$ . В задаче (А) нахождение экстремального тригонометрического полинома, который мы обозначим через  $A_n(\delta; x)$ , сводится к замене переменной в соответствующем алгебраическом полиноме чётной степени и приводит к формуле

$$A_n(\delta; x) = T_n \left( \frac{2 \cos x + 1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta} \right),$$

где  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  – полином Чебышёва степени  $n$ .

Решение алгебраической версии задачи (В) найдено Н. И. Ахиезером (см. [2]). Соответствующий алгебраический полином выражается через эллиптические функции. Тригонометрический аналог полинома Н. И. Ахиезера, также в терминах эллиптических функций, был указан А.П. Петуховым [3]. Экстремальный полином в задаче (В) определён с точностью до знака и является нечётным. Обозначим его через  $B_n(\delta; x)$ , предполагая, что знак выбран так, чтобы полином возрастал в окрестности точки  $x = 0$ . По определению полином  $B_n(\delta; x)$  удовлетворяет неравенству

$$|B_n(\delta; x)| \leq 1 \text{ при } \delta \leq |x| \leq \pi,$$

а также обладает при  $\delta \in \left[ \frac{\pi}{2n}; \pi \right)$  следующими свойствами:

1) существует  $n$  таких точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $\delta = x_1 < x_2 < \dots < x_n = \pi$ , для которых верны равенства

$$B_n(\delta; x_k) = (-1)^{k+1};$$

2) существует такая точка  $x_0 \in (0; \delta]$ , что выполнено соотношение

$$B_n(\delta; x_0) = \|B_n(\delta; \cdot)\| := M_n(\delta) \geq 1,$$

причём функция  $M_n(\delta)$  непрерывно и монотонно отображает промежуток  $\left[ \frac{\pi}{2n}; \pi \right)$  на луч  $[1; \infty)$ ;

3)  $B_n(\delta; x)$  возрастает на отрезке  $[0, x_0]$  и убывает на отрезке  $[x_0; x_2]$ ;

$$4) M_n(\delta) = \max_u \left\{ \text{ch} \left\{ n \log \frac{\Theta \left( u + \frac{K}{2n} \right)}{\Theta \left( u - \frac{K}{2n} \right)} \right\} \right\},$$

где  $\Theta(u)$  – тета-функция Якоби с параметром

$$\mathfrak{a} = \frac{K'}{K} = \frac{K(k')}{K(k)}, \quad k' = \sqrt{1-k^2},$$

а  $n$ ,  $k$  и  $\delta$  связаны равенством

$$2n \int_0^{\delta/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \quad (= K).$$

Отметим ещё, что  $B_n(\delta; x) = \sin nx$  при  $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2n}$ .

**Лемма 1.** Пусть  $0 < \delta_0 < \pi$ . Положим

$$\lambda(\delta) = \log \frac{1 + \sin \frac{\delta}{2}}{1 - \sin \frac{\delta}{2}}, \quad \delta \in (0, \delta_0].$$

Тогда при  $n\delta \rightarrow \infty$  справедлива асимптотическая формула

$$M_n(\delta) \sim \frac{1}{4\sqrt{e}} \cdot \frac{e^{n\delta}}{\sqrt{n\delta}} (1 + o(1)).$$

В частности, при  $n\delta \rightarrow \infty$  имеем

$$M_n(\delta) \sim \frac{1}{4\sqrt{e}} \cdot \frac{e^{n\delta}}{\sqrt{n\delta}}, \quad \text{если } \delta = o\left(n^{-1/3}\right), \quad n \rightarrow \infty;$$

$$M_n(\delta) \sim \frac{1}{4\sqrt{e}} \cdot \frac{e^{n\delta + \frac{1}{24}n\delta^3}}{\sqrt{n\delta}}, \quad \text{если } \delta = o\left(n^{-1/5}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

**Постановка задачи.** Пусть символ  $\mathfrak{T}_{n,\delta}$  обозначает множество всех таких тригонометрических полиномов  $T(x)$  порядка  $n$ , что  $|T(x)| \leq 1$  при  $\delta \leq |x| \leq \pi$ , и на интервале  $(-\delta, \delta)$  существуют такие три точки  $x_1 < x_2 < x_3$ , что  $T(x_1) > 1$ ,  $T(x_2) < -1$ ,  $T(x_3) > 1$ . Для  $T \in \mathfrak{T}_{n,\delta}$  положим

$$M(T) = \sup \left\{ \min \left\{ T(x_1), -T(x_2), T(x_3) \right\} \right\},$$

где супремум берётся по всем тройкам точек  $x_1 < x_2 < x_3$  указанного типа из интервала  $(-\delta, \delta)$ . Требуется среди всех полиномов  $T \in \mathfrak{T}_{n,\delta}$  указать тот полином  $T_n(\delta; x)$ , у которого величина  $M(T_n(\delta; \cdot))$  является наибольшей, и найти эту величину

$$M(T_n(\delta; \cdot)) = \sup \left\{ M(T) : T \in \mathfrak{T}_{n,\delta} \right\}. \quad (2)$$

**Теорема 1.** Пусть  $n \geq 2$ ,  $\frac{\pi}{n} < \delta < \pi$ . Тогда существует, причём единственный, полином  $T_n(\delta; x) \in \mathfrak{T}_{n,\delta}$ , такой, что выполняется соотношение (2). Этот полином обладает следующими свойствами:

1)  $T_n(\delta; x)$  – чётный полином;

$$2) M(T_n(\delta; \cdot)) = \|T_n(\delta; \cdot)\| =: M_\delta;$$

3) на отрезке  $[0, \delta]$  он имеет два участка монотонности, а именно, возрастает от своего минимального значения  $T_n(\delta; 0) = -M_\delta$  до своего максимального значения  $M_\delta$ , а затем убывает от  $M_\delta$  до значения  $T_n(\delta; \delta) = 1$ ;

4) на отрезке  $[\delta, \pi]$  полином  $T_n(\delta; x)$  имеет  $n-1$  участков монотонности, на каждом из которых он изменяется от 1 до  $-1$  или от  $-1$  до 1, именно, начиная с точки  $x = \delta$  он убывает от 1 до  $-1$ , затем возрастает от  $-1$  до 1 и т.д., заканчивая точкой  $x = \pi$ , в которой  $T_n(\delta; x) = (-1)^{n+1}$ .

При доказательстве теоремы использован метод, предложенный в работе [4].

**Определение.** Тригонометрический полином  $T_n(\delta; x)$  из теоремы 1 назовём тест-полиномом порядка  $n$  с параметром  $\delta$ . При  $0 < \delta \leq \frac{\pi}{n}$  естественно положить также  $T_n(\delta; x) = -\cos nx$ .

**Следствие.** Решение задачи (С) существует и с точностью до знака совпадает с тест-полиномом  $T_n(\delta; x)$   $\left(\frac{\pi}{n} < \delta \leq \pi\right)$ .

**Лемма 2.** При каждом  $n > 1 + \frac{\pi}{\delta}$  ( $0 < \delta < \pi$ ) имеем

$$\|T_{n-1}(\delta; \cdot)\| < \|T_n(\delta; \cdot)\|.$$

**Теорема 2.** Пусть

$$\lambda(\delta) = \log \frac{1 + \sin \frac{\delta}{2}}{1 - \sin \frac{\delta}{2}}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{10}.$$

Тогда при всех достаточно больших значениях  $n\delta$  верна двусторонняя оценка

$$\frac{1}{9e} \cdot \frac{e^{n\lambda(\delta)}}{n\lambda(\delta)} < \|T_n(\delta; \cdot)\| < \frac{1}{3e} \cdot \frac{e^{n\lambda(\delta)}}{n\lambda(\delta)}.$$

Если, кроме того,  $\delta = o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\frac{1}{9e} \cdot \frac{e^{n\delta}}{n\delta} < \|T_n(\delta; \cdot)\| < \frac{1}{3e} \cdot \frac{e^{n\delta}}{n\delta} \quad (n\delta \rightarrow \infty).$$

**Доказательство.** Приведём доказательство правой части двойного неравенства. Рассмотрим чётный тригонометрический полином  $\overline{B}_n(\delta; x)$ , порождённый  $2\pi$ -периодической парой  $(g, G)$ , где  $g(x) \equiv -1$  при

всех  $x$ , а  $G(x)=1$  при  $\delta \leq |x| \leq \pi$ ,  $G(x)=+\infty$  при  $x \in (-\delta, \delta)$  ( $\pi/n < \delta < \pi$ ), и имеющий точку  $x=0$  точкой альтернанса. Нетрудно видеть, что таким полиномом при чётном  $n = 2m$  является полином

$$\overline{B}_n(\delta; x) := 2B_m(\delta; x)^2 - 1.$$

Очевидно,  $\max \{ \overline{B}_n(\delta; x) \} = 2(\max \{ B_m(\delta; x) \})^2 - 1$ .

При чётном  $n = 2m$  в силу леммы 1 при  $n\delta \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} \|T_n(\delta; \cdot)\| &< 2(\max \{ B_m(\delta; x) \})^2 = 2 \left( \frac{1}{4\sqrt{e}} \cdot \frac{e^{m\lambda(\delta)}}{\sqrt{m\lambda(\delta)}} \right)^2 (1 + o(1)) = \\ &= \frac{1}{4e} \cdot \frac{e^{n\lambda(\delta)}}{n\lambda(\delta)} (1 + o(1)) < \frac{1,1}{4e} \cdot \frac{e^{n\lambda(\delta)}}{n\lambda(\delta)} < \frac{1}{3e} \cdot \frac{e^{n\delta}}{n\delta}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство выполняется при дополнительном условии  $\delta = o(n^{-1/3})$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Если же  $n$  – нечётное,  $n = 2m - 1$ , то в силу леммы 2, с учётом неравенства  $e^{\lambda(\delta)} < 1,3$  при  $0 < \delta < \frac{1}{10}$ , получим

$$\begin{aligned} \|T_n(\delta; \cdot)\| &< \|T_{2m}(\delta; \cdot)\| < 2 \left( \frac{1}{4\sqrt{e}} \cdot \frac{e^{m\lambda(\delta)}}{\sqrt{m\lambda(\delta)}} \right)^2 (1 + o(1)) = \\ &= \frac{e^{\lambda(\delta)}}{4e} \cdot \frac{e^{n\lambda(\delta)}}{\sqrt{n\lambda(\delta)}} (1 + o(1)) < \frac{1,3}{4e} \cdot \frac{e^{n\lambda(\delta)}}{n\lambda(\delta)} < \frac{1}{3e} \cdot \frac{e^{n\delta}}{n\delta}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство снова действует при дополнительном условии  $\delta = o(n^{-1/3})$ .

### Литература

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций, М.: Наука, 1975.
3. Петухов А.П. Об ужасах и приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // Analysis Mathematics. 1985. Т. 11, № 1. С. 55–73.
4. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. Аппроксимация со значочувствительным весом (теоремы существования и единственности) // Изв. РАН. Серия матем. 1998. Т. 62, № 6. С. 59–102.

**Е.Н. Sadekova**

National Research Nuclear University MEPHI

### ON THE PROBLEM FOR AN EVEN TRIGONOMETRIC POLYNOMIAL LEAST LEAVING FROM ZERO

**Keywords:** *even trigonometric polynomial, uniform approximation, polynomial least deviating from zero, estimate of the norm of polynomial.*

**Abstract.** *Trigonometric polynomials of order not higher than  $n$  with special properties are studied that allow these polynomials to be effectively used for intended applications. A special trigonometric polynomial is introduced as a solution to a certain problem similar to the classical problem of polynomials that least deviate from zero on a pair of segments  $[-\pi, -\delta]$  and  $[\delta, \pi]$ . An order-accurate estimate of the norm of this polynomial is obtained.*

**А.В. Светлаков, Г.А. Банару**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 510.643+ 519.713.8

## **О ПРОБЛЕМАХ И ОСОБЕННОСТЯХ АНАЛИЗА СВОЙСТВ ВРЕМЕННОГО АВТОМАТА**

**Ключевые слова:** *временной автомат, граф переходов, граф регионов, временной регион, отношение региональной эквивалентности, локальные часы, дивергентное вычисление, вычисление Зенона.*

*Работа посвящена анализу временных автоматов. Рассмотрено понятие временного автомата, приведено определение его графа переходов. Подробно описаны проблемы, возникающие при анализе свойств автомата по графу переходов – обозначены условия корректности временного автомата. Особое внимание уделено способу преобразования графа переходов в граф регионов, доказана теорема о сохранении свойств автомата на графе регионов. Приведен содержательный пример временного автомата и его графа регионов.*

В темпоральной логике ни структуры Крипке, ни сами формулы не учитывают непрерывную сущность времени [2] и неспособны задать конкретные временные интервалы, а это очень часто бывает важно. Например, водителя вряд ли будет интересовать истинность высказывания «если нажать на педаль тормоза, то когда-нибудь в будущем машина остановится», важна гарантия того, что машина остановится в течение нескольких следующих секунд. Для таких случаев используются временные автоматы.

**Определение.** Временной автомат – это шестерка  $\mathcal{T} = \langle L, l_0, \Sigma, X, Inv, E \rangle$ , где:

- $L$  – конечное множество локаций,  $l_0 \in L$  – начальная локация;
- $\Sigma$  – алфавит, включающий пустой символ  $\varepsilon$ ;
- $X$  – конечное множество локальных часов. Значения локальных часов  $x_i \in [0, +\infty)$ , и они непрерывно возрастают с одной и той же скоростью. С часами нельзя производить никаких операций, за исключением возможности сбрасывания в 0 на переходах;

-  $Inv: L \rightarrow \beta$  – инварианты локаций,  $\beta$  – это множество ограничений на возможные значения часов, они построены как формулы классической логики из бинарных отношений вида  $xRc$  или  $(x - y)Rc$ , где  $c \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$ ,  $x, y \in X$  – часы и  $R \in \{\leq, <\}$ . Если  $Inv(l)$  не определен в локации, то  $Inv(l) = 1$ . Ситуация нарушения инварианта считается невозможной;

-  $E$  – множество переходов автомата:  $E \subseteq L \times \beta \times \Sigma \times 2^X \times L$ , если  $(l, \alpha, a, X, l') \in E$ , то используется запись  $l(\alpha, a, X) \rightarrow l'$ .

Всякий переход в автомате – это переход между двумя локациями  $l$  и  $l'$ , помеченный защитой перехода  $\alpha \in \beta$ , символом  $a \in \Sigma$ , а также множеством часов  $X \in 2^X$ , которые на данном переходе сбрасываются в ноль.

Рассмотрим пример простейшего временного автомата  $\mathcal{T}_1$  с одной локацией. Он представлен на рисунке 1.

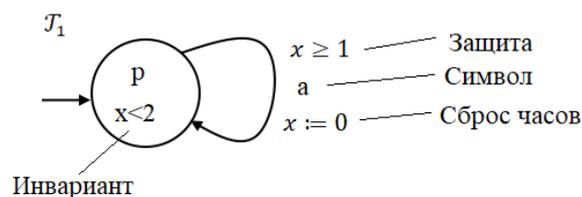


Рис. 1. Временной автомат  $\mathcal{T}_1$

В данном автомате имеется единственный переход. Его вид  $p(x \geq 1, a, \{x\}) \rightarrow p$ . Инвариант ограничивает время нахождения автомата в локации  $p$ , то есть автомат не может находиться в локации 2 и более единиц времени. Автомат может выполнить действие  $a$ , если  $x \geq 1$ , при этом значение часов сбрасывается: запись  $x := 0$  означает  $X = \{x\}$ . В данном автомате переход может быть выполнен только при  $x \in [1; 2)$ . Считается, что переходы осуществляются мгновенно, время на них не затрачивается.

Анализ свойств временного автомата невозможно выполнить по определению – это лишь конечный способ описания поведения автомата

[4]. Интерпретацией временного автомата является последовательность его состояний и переходы между состояниями. В совокупности они составляют вычисление автомата.

Введем функцию  $v: X \rightarrow [0, +\infty)$ , которая называется интерпретацией часов  $v$ . Обозначим через  $v + b$  увеличение значения часов  $x$  с  $v(x)$  до  $v(x) + b$ :  $(v + b)(x) = v(x) + b$ .

**Определение.** Графом переходов временного автомата  $\mathcal{T} = \langle L, l_0, \Sigma, X, Inv, E \rangle$  называется четверка  $T(\mathcal{T}) = \langle Q, q_0, \Sigma, V \rangle$ , где

- $Q = L \times v$  – множество вершин графа, каждая из которых является парой  $\langle l, v \rangle$ ,  $l \in L$ ,  $v$  – интерпретации всех локальных часов автомата, удовлетворяющие инварианту локации:  $v \vdash Inv(l)$ ;

- $q_0 = \langle l_0, v_0 \rangle$  – начальное состояние, причем  $\forall x: v_0(x) = 0$ ;

- $\Sigma$  – алфавит (совпадает с алфавитом временного автомата);

- $V$  – множество дуг (переходов) двух видов: а) переход по времени  $\langle l, v \rangle - b \rightarrow \langle l, v + b \rangle$  – выполняется в случае, если  $Inv(l)$  истинен для  $v + t$  при любом  $t \in [0; b]$ ; б) переход по символу  $\langle l, v \rangle - a \rightarrow \langle l', v' \rangle$  – выполняется в случае истинности защиты на переходе временного автомата, то есть если  $(l, \alpha, a, X, l') \in E$ , то  $v \vdash \alpha$  при  $\alpha \in \beta$ .  $v'$  – новые значения часов:  $v'(x) = 0$ , если происходит сброс часов  $x$ ,  $v'(x) = v(x)$ , если нет, и показания часов удовлетворяют инварианту локации  $l'$ :  $v' \vdash Inv(l')$ .

Это определение конструктивно – согласно нему и строится граф переходов. На рисунке 2 представлен фрагмент графа переходов временного автомата  $\mathcal{T}_1$ :

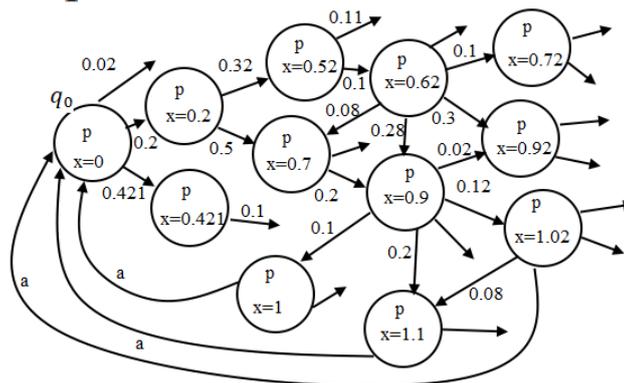


Рис. 2. Фрагмент  $T(\mathcal{T}_1)$

**Определение.** Вычислением автомата называется бесконечная последовательность  $\sigma = q_0 - a_0 \rightarrow q_1 - a_1 \rightarrow q_2 - a_2 \rightarrow \dots$ , в которой  $q_i$  – вершины графа переходов,  $a_i$  – либо символ, либо увеличение времени  $b$ .

Обозначим через  $\Delta(\sigma, i)$  время, прошедшее с момента старта автомата в вершине графа  $q_0$  до того момента, когда автомат окажется в вершине  $q_i$  в вычислении  $\sigma$ , то есть  $\forall \sigma: \Delta(\sigma, 0) = 0$  и  $\Delta(\sigma, i + 1) = \Delta(\sigma, i) + a_i$ , если  $a_i = b$  или  $\Delta(\sigma, i + 1) = \Delta(\sigma, i)$ , если  $a_i \in \Sigma$ .

Для того, чтобы вычисления отражали реальное поведение системы, граф переходов должен удовлетворять физическим свойствам времени. Если во временном автомате присутствуют нереалистичные вычисления, то проверка ряда свойств может стать некорректной, а потому очень важно, чтобы таких вычислений в автомате не было.

Пусть  $q, q', q''$  – вершины графа переходов,  $b, b' \in [0, +\infty)$ , тогда свойства времени можно сформулировать так:

- детерминизм времени: если  $q - b \rightarrow q'$  и  $q - b \rightarrow q''$ , то  $q' = q''$  (нельзя оказаться в разных вершинах по прошествии одного и того же промежутка времени);
- нулевая задержка:  $q - 0 \rightarrow q$  (исключая переходы по символам);
- аддитивность:  $q - b \rightarrow q'$  и  $q' - b' \rightarrow q''$ , то  $q - (b + b') \rightarrow q''$ ;
- непрерывность:  $q - (b + b') \rightarrow q'$ , то  $\exists q'': q - b \rightarrow q''$  и  $q'' - b' \rightarrow q'$  (любой промежуток времени бесконечно делим).

Отметим, что это лишь необходимые условия отсутствия нереалистичных вычислений.

**Определение.** Вычисление  $\sigma$  называется дивергентным, если  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta(\sigma, i) = \infty$ , и конвергентным в противном случае.

Некоторые виды конвергентных вычислений можно построить всегда. В частности для автомата  $\mathcal{T}_1$  вычисление вида  $\sigma = \langle p, x = 0 \rangle - 0.3 \rightarrow \langle p, x = 0.3 \rangle - 0.03 \rightarrow \langle p, x = 0.33 \rangle - 0.003 \rightarrow \langle p, x = 0.333 \rangle \dots$

будет конвергентным. Такие вычисления мы не рассматриваем, хотя формально их можно построить для любого автомата.

Наличие других видов конвергентных вычислений, как правило, зависит от вида временного автомата.

Вычисление  $\sigma$  называется вычислением Зенона, если  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta(\sigma, i) = c < \infty$  и в нем существует бесконечное число переходов по символу. Данное вычисление отражает парадокс Зенона: выполнение бесконечного числа действий за ограниченный промежуток времени.

Проверить наличие вычислений Зенона по определению сложно, однако, его легко увидеть на графе регионов. Этот вопрос мы рассмотрим ниже. Отметим, что всегда возможно избавиться от вычислений Зенона [1].

В произвольно построенном автомате может произойти обрыв вычислений из-за блокировки времени в состояниях. Проследить это на графе переходов довольно сложно, в этом случае стоит построить граф регионов.

Граф переходов описывает поведение временного автомата, однако, анализ свойств и проверка формул по нему также невозможна, поскольку множество вершин этого графа не просто бесконечно, а имеет мощность континуума (из-за континуальности  $v$ ). Даже для простейшего автомата  $\mathcal{T}_1$  невозможно ни представить полностью граф переходов, ни занумеровать все его вершины. Однако существует способ упростить граф переходов до конечного вида без потери его свойств. На этом упрощенном графе можно проверять выполнимость логических формул, наличие вычислений Зенона и блокировок времени.

В первую очередь, не нарушая общности поставленной задачи, потребуем, чтобы в ограничениях  $\beta$  все  $c \in \mathbb{N}_0$ . Для этого поменяем масштаб времени: найдем НОК знаменателей всех  $c \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$  и умножим каждое  $c$  на него. Изменение масштаба времени не изменит свойств временного автомата, так как все свойства можно переформулировать в измененном масштабе времени, умножив все значения часов на найденное значение НОК (если в свойствах вообще есть требования, включающие время).

Будем рассматривать временной автомат с одними локальными часами  $x$ . Для временных автоматов с несколькими локальными часами описанная ниже процедура обобщается естественным образом с незначительными изменениями.

Пусть  $C_x = \max\{c_i\}$ , где  $c_i \in \mathbb{N}_0$  из  $\beta$ .  $C_x$  будем называть потолком часов  $x$ .  $[a]$  – целая часть числа  $a$ ,  $\{a\}$  – дробная часть числа  $a$ . Введем региональное отношение эквивалентности  $\cong$  на множестве действительных значений часов  $v(x)$  следующим образом:

- $v(x) \cong v'(x)$ , если  $v(x) > C_x$  и  $v'(x) > C_x$  – все значения локальных часов эквивалентны, если они превышают потолок;
- $v(x) \cong v'(x)$ , если при  $v(x) \leq C_x$  выполняются равенства  $[v(x)] = [v'(x)]$  и  $\{v(x)\} = \{v'(x)\} = 0$  – все целые значения часов  $x$  составляют отдельные классы;
- $v(x) \cong v'(x)$ , если при  $v(x) \leq C_x$  выполняются условия  $[v(x)] = [v'(x)]$  и  $\{v(x)\} \neq 0$  и  $\{v'(x)\} \neq 0$  – значения часов  $x$ , с одинаковыми целыми частями составляют отдельный класс эквивалентности.

Легко можно доказать, что построенное бинарное отношение  $\cong$  действительно является отношением эквивалентности.

**Определение.** Временным регионом автомата называется каждый класс эквивалентности для отношения  $\cong$  значений локальных часов автомата.

Расширим отношение региональной эквивалентности  $\cong$  на множество вершин графа переходов временного автомата  $T(\mathcal{T})$  так:  $\langle l, v \rangle \cong \langle l', v' \rangle \Leftrightarrow (l = l') \wedge ([v(x)]_{\cong} = [v'(x)]_{\cong})$ . Объединив вершины, принадлежащие одному классу эквивалентности, получим вершины фактор-графа для графа переходов временного автомата по модулю региональной эквивалентности  $\cong$ . Обозначим эти вершины через  $[q]_{\cong}$ . Полученный фактор-граф  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  называется графом регионов временного автомата. Опишем точный способ его построения.

Пусть  $T(\mathcal{T}) = \langle Q, q_0, \Sigma, V \rangle$  – граф переходов автомата, тогда  $\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \langle Q_{\cong}, [q_0]_{\cong}, \Sigma_{\tau}, V_{\cong} \rangle$ , причем построение элементов осуществляется так:

- $Q_{\cong} = \{[q]_{\cong} | q \in Q\}$  – множество вершин графа регионов;
- $[q_0]_{\cong} = \langle l_0, [v_0]_{\cong} \rangle$  и  $v_0(x) = 0$  для часов  $x$  – начальная вершина;
- $\Sigma_{\tau} = \Sigma \cup \{\tau\}$  – алфавит графа регионов с добавочным символом  $\tau \notin \Sigma$ ;

-  $V_{\cong}$  – множество переходов (дуг)  $V_{\cong} \subseteq Q_{\cong} \times \Sigma_{\tau} \times Q_{\cong}$  таких, что:

1) Для символа  $a \in \Sigma$  и любых  $s, s' \in Q_{\cong}$  есть переход  $s - a \rightarrow s' \in V_{\cong}$  тогда и только тогда, когда существуют такие  $q, q' \in Q$ , что  $s \in [q]_{\cong}$ ,  $s' \in [q']_{\cong}$  и  $q - a \rightarrow q' \in V$ ;

2) Для символа  $\tau$  и любых  $s, s' \in Q_{\cong}$  существует переход вида  $s - \tau \rightarrow s' \in V_{\cong}$  тогда и только тогда, когда либо  $s = s'$  и это неограниченный регион, либо  $s \neq s'$ ,  $s = \langle l, [v]_{\cong} \rangle$ ,  $s' = \langle l, [v']_{\cong} \rangle$  и существует  $d \in [0, +\infty)$ , что  $\langle l, v \rangle - d \rightarrow \langle l, v' \rangle$  есть переход в  $T(\mathcal{T})$  и для всех  $d_1 \in [0, +\infty)$  таких, что  $d_1 < d$ , выполняется  $[v + d_1]_{\cong} \in \{[v]_{\cong} \cup [v + d_1]_{\cong}\}$ .

Очевидно, что число вершин графа регионов будет конечным, и оно равно  $(2C_x + 2)|L|$ .

**Теорема.** Если  $[v]_{\cong} = [\mu]_{\cong}$ , то  $\langle l, [v]_{\cong} \rangle \vdash \Phi \equiv \langle l, [\mu]_{\cong} \rangle \vdash \Phi$ , где  $\Phi$  – некоторая формула темпоральной логики (CTL). Проще говоря, если значения локальных часов  $v$  и  $\mu$  принадлежат одному и тому же временному региону по отношению региональной эквивалентности, то две вершины графа регионов  $\langle l, [v]_{\cong} \rangle$  и  $\langle l, [\mu]_{\cong} \rangle$  удовлетворяют одним и тем же CTL-формулам.

**Доказательство.** Проанализировав построение  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  из  $T(\mathcal{T})$  можно заметить, что отношение региональной эквивалентности обладает следующим важным свойством:  $q_i \cong q_j \equiv (\forall (q_i, a, q'_i) \in V)(\exists (q_j, a, q'_j) \in V): q'_i \cong q'_j$ , то есть любые переходы из вершин, эквивалентных относительно  $\cong$ , осуществляются только в вершины, которые также эквивалентны относительно  $\cong$ . Действительно,  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  является фактор-системой переходов  $T(\mathcal{T})$  по модулю отношения региональной эквивалентности, потому что:

- классы эквивалентности  $\cong$  являются вершинами  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ ;
- класс эквивалентности  $\cong$ , включающий  $q_0$ , является начальной вершиной  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ ;
- алфавит  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  совпадает с алфавитом  $T(\mathcal{T})$ , символ  $\tau$  заменяет переход по времени;
- множество переходов  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  определяется для пар классов эквивалентности так, что переход существует, если существует переход между какими-то представителями.

Таким образом, если разбиение на классы подобрано так, что в каждом классе на представителях выполняются одни и те же формулы, то преобразование  $T(\mathcal{T})$  в  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  не влияет на их выполнимость.

Теперь рассмотрим само отношение  $\cong$ . Очевидно, что оно не объединяет в один класс разные локации. Тогда рассмотрим две вершины  $\langle l, [\nu]_{\cong} \rangle$  и  $\langle l, [\mu]_{\cong} \rangle$ , отличающиеся только значениями часов. В силу изменения масштаба времени все ограничения  $\beta$  (как в инвариантах, так и на защитах) могут быть выражены только натуральными числами, а значит, две вершины относительно каких-либо свойств, описанных некоторой формулой, могут быть эквивалентны только при следующих изменениях часов: 1) все значения часов превышают максимальное значение из множества ограничений (потолок), 2) значения часов меняются так, что меняется только дробная часть без изменения целой; 3) часы фиксированы на каждом элементе множества  $\mathbb{N}_0$ . Но именно так и определено  $\cong$  на значениях локальных часов. Таким образом, теорема доказана.

Эта теорема имеет существенное значение, поскольку говорит о том, что если в графе переходов выбрать две вершины из одного класса эквивалентности, то истинностные значения формул на них будут совпадать. Это означает, что можно рассматривать свойства временного автомата на графе регионов, в котором число вершин конечно, а способы исследования его свойств хорошо разработаны.

На рисунке 3 изображен граф регионов автомата  $\mathcal{T}_1$ .

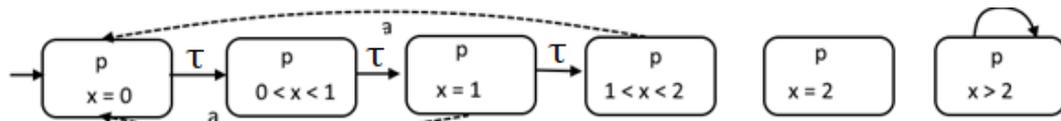


Рис. 3. граф регионов автомата  $\mathcal{T}_1$

Очевидно, что на этом графе нет вычислений Зенона, имеются две вершины с блокировкой времени, однако, они недостижимы. Значит,  $\mathcal{T}_1$  построен корректно.

Приведем более содержательный пример временного автомата  $\mathcal{T}_2$ . Пусть имеется автоматическая система охлаждения, которая зависит от времени суток. Необходимо, чтобы она работала только в дневное время и только тогда, когда на небе есть солнце. Пример такого автомата представлен на рисунке 4.

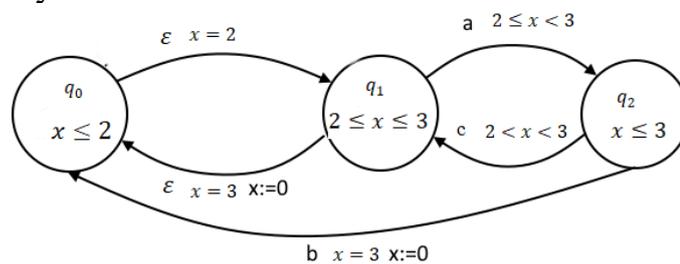


Рис. 4. Система охлаждения  $\mathcal{T}_2$

В начальный момент времени автомат находится в локации  $q_0$ . Как только наступает день ( $x = 2$ ), автомат переходит в ожидающую локацию  $q_1$ , и в течение всего дня находится там ( $2 \leq x \leq 3$ ). Если появилось солнце (сигнал  $a$ ), то автомат переходит в локацию  $q_2$  и включается охлаждение. Если солнце исчезло (сигнал  $c$ ), то автомат снова переходит в  $q_1$  и охлаждение прекращается. В конце дня ( $x = 3$ ) автомат переходит в  $q_0$  со сбросом часов, если он до этого был в  $q_1$ , то не происходит ничего ( $\epsilon$ ), если в  $q_2$ , то выключается охлаждение (сигнал  $b$ ). Переходы по пустым символам  $\epsilon$  между локациями  $q_0$  и  $q_1$  означают, что они совершаются лишь в зависимости от локальных часов без внешних сигналов.

Граф регионов этого автомата изображен на рисунке 5.

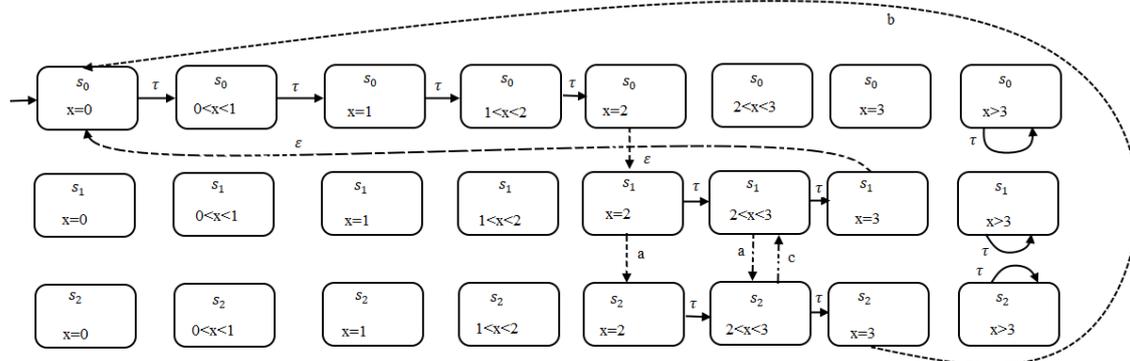


Рис. 5.  $\mathcal{R}(\mathcal{T}_2)$

Хорошо видно, что все вершины с блокировкой времени для него недостижимы, но присутствует конвергентное вычисление Зенона, например,

$$\sigma = \dots \langle q_1, x = 2 \rangle - a \rightarrow \langle q_2, x = 2 \rangle - 0.3 \rightarrow \langle q_2, x = 2.3 \rangle - c \rightarrow \\ \langle q_1, x = 2.3 \rangle - 0.03 \rightarrow \langle q_1, x = 2.33 \rangle - a \rightarrow \langle q_2, x = 2.33 \rangle - 0.003 \rightarrow \dots$$

Автомат построен не совсем корректно, но для анализа свойств, выраженных с помощью CTL, подходит [2]. Например, свойство  $AGEF(s_0 \wedge x = 0)$  выполняется (система обязательно вернется в начальное состояние). Однако для проверки более тонких свойств, которые обычно выражаются формулами TCTL, от вычислений Зенона нужно избавляться, меняя исходный автомат [4].

В заключение отметим, что мы описали наиболее существенные особенности и проблемы анализа свойств временного автомата. Эти проблемы можно решить с помощью построения графа регионов. Однако, существуют и проблемы другого рода. Например, таким способом нельзя проверить выполнимость LTL-формулы (для этого нужно добавлять ограничения на автомат и модифицировать рассмотренный метод) [1, 3]. Кроме того, в самом этом методе существует такая очевидная проблема как «взрыв числа состояний», поэтому часто необходимо объединять временные регионы в так называемые временные зоны (в этом случае уже не удастся сохранить все свойства автомата, но будут сохранены те, которые необходимы для его анализа).

### Литература

1. Карпов Ю.Г. MODEL CHECKING. Верификация параллельных и распределенных программных систем. СПб.: БХВ-Петербург, 2010. 560 с.
2. Карпов Ю.Г. Темпоральные логики для спецификации свойств программных и аппаратных систем // Компьютерные инструменты в образовании. 2009. № 2. С. 45-56.
3. Никищечкин А. П. Дискретная математика и дискретные системы управления : учебное пособие для вузов. 2-е изд., испр. и доп. М : Изд-во Юрайт, 2024. 298 с.
4. Henzinger T.A., Nicollin X., Sifakis J., Yovine S. Symbolic model checking for real-time systems. // Proc. 7th Symp. on Logic in Computer Science, 1992.

**A.V. Svetlakov, G.A. Banaru**

Smolensk State University

### ON PROBLEMS AND PECULIARITIES OF ANALYSING THE PROPERTIES OF A TEMPORAL AUTOMATON

**Keywords:** *temporal automaton, transition graph, region graph, temporal region, regional equivalence relation, local clocks, divergent computation, Zeno computation*

**Abstract.** *The work is devoted to the analysis of temporal automaton. Temporal automaton are considered, the definition of its transition graph is given. The problems arising in analysing the properties of an automaton by the transition graph are described in detail - the conditions of correctness of a temporal automaton are outlined. Particular attention is paid to the method of transforming the transition graph into a region graph, and a theorem on preserving properties of an automaton on the region graph is proved. A meaningful example of a temporal automaton and its region graph is given.*

**Т.Б. Солодченкова**

*Смоленский государственный медицинский университет*

УДК 517.22, 57.036, 615.033.1

## **ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ БИМЕДИЦИНСКОГО СОДЕРЖАНИЯ**

Ключевые слова: *производная, интеграл, степенная функция, показательная функция, скорость, популяция, бактерии, лекарственный препарат.*

*В данной работе показана актуальность для студентов медицинских, биологических, а также физико-математических направлений подготовки (специальностей) изучения дифференциального и интегрального исчисления на примерах задач с биомедицинским содержанием, приводятся тексты и решения некоторых таких типовых задач по отдельным темам указанного раздела математики.*

**Актуальность.** В настоящее время наблюдается слабая подготовка школьников старших классов (не физико-математических) по математике в общеобразовательных школах. Поступив в вузы с медицинским и биологическим профилями обучения, вчерашние школьники испытывают трудности при изучении высшей математики. Однако современный уровень развития, в частности, медицины и биологии требует серьезного знания математики, поскольку медицинские и биологические процессы изучаются с помощью математических моделей. В результате, и с учетом небольшого количества часов, отводимых на изучение математики вузовской программой для таких студентов [1], снижен потенциал подготовки научных кадров в области медицины и биологии.

С другой стороны, студенты, закончившие обучение на физико-математических факультетах вузов других профилей, при вероятном их трудоустройстве в медицинские учреждения в качестве преподавателей или научных сотрудников не владеют спецификой предметной области знаний этих учреждений, что влияет на их компетентность. Это обусловлено сравнительно малым вниманием к изучению биологии и химии в выпускных классах школы, а на физико-математических факультетах при решении задач по физике и упражнениях по математике темы из области биофизики, как правило, не затрагиваются.

Таким образом, назрела необходимость встречных потоков получения межпредметных знаний, которую можно реализовать решением математических задач, в частности, по темам дифференциального и интегрального исчисления.

**Цель работы.** Показать примеры применения дифференциального и интегрального исчисления в тематических задачах.

**Тексты тематических задач и их решения.**

### *Дифференцирование степенных и показательных функций.*

#### *Геометрический и физический смысл производных*

1. В стоматологии штифты имеют вид стержней (надежные металлические штифты - из сплава титана, «бюджетные» – из нержавеющей стали). Длина  $L$  титанового штифта, равная 9,3 мм при температуре  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , увеличилась при температуре  $t$  до значения

$$L(t) = 9,3 + 8,9 \cdot 10^{-6} \cdot t, \text{ мм.}$$

Чему равна скорость изменения его длины? Насколько изменилась длина при нагревании: а) на  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; б) на  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; в) на  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ ? Выразите изменение в %. (Ответ:  $8,9 \cdot 10^{-6}\text{ мм/}^{\circ}\text{C}$ ,  $0,0009\%$ ,  $0,0019\%$ ,  $0,005\%$ . Решение представлено в [2, с. 32]).

2. Средний диаметр кровяной клетки  $d_0 = 7\text{ мкм}$ . Полагая, что клетка шарообразная и может увеличиваться в объёме без изменения формы, оцените увеличение объёма клетки с ростом её радиуса на  $4\%$ . (Ответ: на  $21,54 \cdot 10^{-3}\text{ мкм}^3$ , на  $0,012\%$ . Решение дано в [2, с. 32]).

3. Масса дрожжей в растворе сахара увеличивается каждый час на  $3\%$ . Начальная масса дрожжей  $1\text{ г}$ , а через  $t$  ч она достигла значения  $1,03^t$ . Найдите приближенные значения массы дрожжей спустя: а)  $10\text{ мин}$ ; б)  $20\text{ мин}$  её роста. (Ответ:  $1,005\text{ г}$ ;  $1,01\text{ г}$ )

4. Популяция бактерий  $P$  в зависимости от времени  $t$  (в часах) описывается функцией

$$P(t) = 10^6 + 10^4 \cdot t - 10^3 \cdot t^2.$$

Найдите скорость изменения популяции с течением времени. Вычислите скорость через  $1\text{ ч}$ ,  $5\text{ ч}$ ,  $10\text{ ч}$ . Постройте графики зависимости популяции и её скорости от времени. (Ответ:  $1,009 \cdot 10^6$ ,  $1,025 \cdot 10^6$ ,  $10^6\text{ бакт.}$ ;  $8000$ ,  $0$ ,  $-10000\text{ бакт./час}$ . Решение с применением Excel дано в [2, с. 32]).

5. Численность насекомых в момент времени  $t$  (в днях) насчитывает

$$N(t) = 10^5 - 9 \cdot 10^4 \cdot (1+t)^{-1}.$$

особей. Изобразите график зависимости  $N(t)$  и вычислите начальную численность. Определите скорость роста численности, постройте график её зависимости от времени. Вычислите количество насекомых и скорость их роста через 1 день, 2 недели. (Ответ: 1000 насекомых; 5500 и 9400 насекомых; 9000 и 183 насекомых./день; решение с применением Excel представлено в [2, с. 33]).

6. При попадании в бактериальную среду антибактериальный агент вызывает уменьшение популяции бактерий. Найдите скорость изменения численности популяции в момент времени  $t$ , если после добавления агента популяция насчитывает

$$P(t) = P(0) \cdot 2^{-t/3}$$

бактерий. Какое время потребуется для уменьшения популяции до  $10^3$  особей, если начальная численность  $10^5$  особей? (Ответ: 29,9 мин.)

7. При вливании глюкозы её содержание  $C$  в крови пациента спустя  $t$  часов составляет

$$C(t) = 10 - 8 \cdot e^{-t}.$$

Постройте график функции  $C(t)$  при  $t \geq 0$ . Найдите равновесное содержание глюкозы в крови  $C_{pe} = \lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$ . (Ответ: 10 в принятых единицах.)

8. Реакции организма на два лекарства как функции времени  $t$  (в часах) составляют

$$R_1(t) = t \cdot e^{-t}, \quad R_2(t) = t^2 \cdot e^{-t}.$$

У какого из лекарств выше максимальная реакция? Какое из лекарств медленнее в своём воздействии? (Ответ: у второго; второе).

### ***Локальные максимумы и минимумы, точки перегиба кривой***

1. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. С течением времени  $t$  (в часах) численность популяции возрастает:

$$P(t) = 10^3 + \frac{10^3 \cdot t}{10^2 + t^2}.$$

Найти максимальную величину популяции.

*Решение.* Для нахождения максимума надо исследовать функцию  $P(t)$  на экстремум, т. е. вычислить первую и вторую производные, применяя правила дифференцирования:

$$P'(t) = \frac{(10^2 + t^2) \cdot 10^3 - 10^3 \cdot t \cdot 2t}{(10^2 + t^2)^2} = \frac{10^3 \cdot (10^2 - t^2)}{(10^2 + t^2)^2}.$$

Критические точки:  $t = \pm 10$  ч. Точка  $t = 10$  ч – точка максимума, т. к. вторая производная отрицательная:

$$P''(t) < 0.$$

Поэтому максимальная популяция, достигаемая через 10 ч, равна

$$P(10) = 10^3 + \frac{10^4}{2 \cdot 10^2} = 1050.$$

(Ответ: 1050 бактерий.)

2. Реакция организма на введённое лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса. Зависимость уровня реакции  $R$  от дозы лекарства  $X$  имеет вид:

$$R(X) = (3 + X) \cdot X^2.$$

При каком критическом значении дозы  $X_k$  уровень реакции станет максимальным  $R_{\max}$ ? (Ответ: 2 таблетки или капсулы. Решение с применением Excel представлено в [2, с. 33]).

### ***Частные производные***

1. Реакция  $R$  на инъекцию  $X$  ед. лекарственного препарата описывается функцией

$$R(X, t) = X^2 \cdot (a - X) \cdot t \cdot e^{-t},$$

где время  $t$  выражается в часах с момента инъекции,  $a$  – числовой параметр, зависящий от типа препарата. Найдите скорости изменения реакции в зависимости от дозы  $\partial R / \partial X$  и от времени после инъекции  $\partial R / \partial t$ . Когда при заданной дозе лекарства реакция достигает максимума?

*Решение.* Скорость реакции в зависимости от дозы равна

$$\frac{\partial R}{\partial X} = t \cdot e^{-t} \cdot \frac{\partial (X^2 \cdot (a - X))}{\partial X} = t \cdot e^{-t} \cdot (2a \cdot X - 3 \cdot X^2).$$

Аналогично, в зависимости от времени

$$\frac{\partial R}{\partial t} = X^2 \cdot (a - X) \cdot \frac{\partial (t \cdot e^{-t})}{\partial t} = X^2 \cdot (a - X) \cdot e^{-t} \cdot (1 - t).$$

При заданной дозе  $X$  лекарства реакция  $R$  максимальна, когда

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 0.$$

Этот максимум наступает при  $t = 1$  ч после инъекции. (Ответ: 1 ч.)

2. Для лечения заболевания назначено два препарата одновременно. Реакция  $R$  на  $X$  ед. одного препарата и  $Y$  ед. другого имеет вид:

$$R(X, Y) = X^2 \cdot Y^2 (a - X) \cdot (b - Y).$$

Какое количество  $Y$  второго препарата вызывает максимальную реакцию при фиксированном количестве  $X$  первого? (Ответ:  $2b/3$ .)

### ***Первообразные, определенные и неопределенные интегралы***

1. Популяция насекомых вырастает от начального размера  $10^4$  особей до численности  $P(t)$  (время  $t$  в днях). Скорость роста равна

$$P'(t) = t + t^2.$$

Какова численность популяция спустя: а) 1 день; б) 5 дней; в) 10 дней? (Ответ: а) 10001; б) 10054; в) 10383.)

2. Реакция (в соответствующих единицах) на определенную дозу лекарства спустя  $t$  часов его приема имеет вид функции:

$$R(t) = t \cdot \exp(-t^2).$$

Сумманую реакцию можно определить как величину площади под кривой  $y = R(t)$  между значениями  $t = 0$  и  $t = \infty$ . Найдите величину суммарной реакции. (Ответ:  $\frac{1}{2}$ .)

3. Скорость изменения концентрации препарата с изотопным индикатором равна

$$C'(t) = 2^{-t}.$$

(время  $t$  в часах). Найдите концентрацию в момент  $t$ , если начальная концентрация 1 мкг на литр. (Ответ:  $C(t) = 1 + (1 - 2^{-t}) / \log_e 2$ .)

4. Найдите закон убывания лекарства в организме человека, полагая скорость выведения пропорциональной количеству лекарства в каждый момент времени. Известно, что через 1 час после введения 20 мг лекарства его масса уменьшилась вдвое.

*Решение.* Из условия следует, что дифференциальное уравнение должно иметь вид ОЛДУ 1 порядка с разделяющимися переменными:

$$dm/dt = -k \cdot m.$$

(знак «минус» соответствует убыли лекарства). После разделения переменных, интегрирования и потенцирования:

$$m(t) = C \cdot \exp(-k \cdot t).$$

Постоянную интегрирования находим из начального условия:

$$C = m(0) = 20 \text{ мг}.$$

Коэффициент  $k$  определяем из данных о выведении лекарства за 1 час:

$$m(0)/2 = m(0) \cdot \exp(-k),$$

$$k = \ln 2 = 0,693.$$

(Ответ:  $m(t) = 20 \cdot \exp(-0,693 \cdot t)$ , мг.)

**Вывод.** Применение прикладных задач биомедицинского содержания при изучении математики позволит повысить уровень профильных компетенций студентов.

### Литература

1. Физика, медэлектроника, математика для врача: учебник для вузов / С.К.Кириллов. Смоленск: изд-во СГМА, 2012. 221 с.

2. Алексеева Я.В., Николаева П.В., Солодченкова Т.Б. / Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции студентов и молодых ученых с международным участием «Актуальные проблемы науки XXI века: осенний марафон» // «Смоленский медицинский альманах». № 4. Смоленск: Изд-во СГМУ, 2023. С. 31-35.

**T.B. Solodchenkova**  
Smolensk State Medical University

## **APPLICATION OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS TO SOLVING BIOMEDICAL PROBLEMS**

**Keywords:** *derivative, integral, power function, exponential function, velocity, population, bacteria, medical product.*

**Abstract.** *This paper shows the relevance for students of medical, biological, as well as physical and mathematical fields of study (specialties) of studying differential and integral calculus using examples of problems with biomedical content, provides texts and solutions to some such problems on certain topics of this section of mathematics.*

**И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, Е. Д. Писаренкова**  
*МГУ имени М. В. Ломоносова, МПГУ, г. Москва*

УДК 517.958+517.537

## **ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВИДЕ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ БЕРНУЛЛИ И ЭЙЛЕРА**

**Ключевые слова:** *уравнение теплопроводности, нелокальная задача, аналитические формулы, полиномы Бернулли, полиномы Эйлера.*

*Дается анализ формальных рядов по полиномам Бернулли и Эйлера, выражающих решения двух нелокальных задач для одномерного уравнения теплопроводности. Указаны точные условия сходимости рядов в терминах аналитического продолжения исходных функций. Полностью обоснованы формулы получаемых ответов. Схема рассуждений представляет самостоятельный интерес и допускает перенос на многие другие ситуации. В результате развитой теории становится возможным рассматривать новые примеры из математической физики с условиями, заданными в виде финитных преобразований Фурье и Лапласа.*

Настоящая работа является непосредственным продолжением исследований, начатых в [1], [2], где были указаны возможные применения полиномов Бернулли и Эйлера в теории современных неклассических задач математической физики. Как выяснилось, имеется

способ, позволяющий выражать решения нелокальных задач для эволюционных уравнений через специальные ряды по системам этих полиномов. Сейчас мы разовьем наш подход применительно к конкретным задачам теплопроводности. В качестве ориентира укажем пример

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad \int_0^1 u(x, t) dt = \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

в полосе  $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1]$ . Из соотношений (1) требуется найти неизвестное решение  $u(x, t)$ . Возникает вопрос: можно ли записать ответ в сколь-нибудь удобном и явном виде?

Аналитические методы исследования подобных нелокальных задач теплопроводности были разработаны в [3], [4]. При всей теоретической значимости указанных работ установленные там формулы непросто применять на практике. Сейчас мы обсудим альтернативный способ, предложенный сравнительно недавно в [1], [2] и позволяющий проводить прямые вычисления. Напомним сначала элементы теории.

В линейном топологическом пространстве  $E$  при  $0 \leq t \leq 1$  рассмотрим нелокальную задачу для эволюционного уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^1 u(t) dt = \varphi. \quad (2)$$

Здесь  $A$  – линейный оператор в  $E$  с областью определения  $D(A) \subset E$ . Элемент  $\varphi$  задан в  $D(A^\infty)$ . Надо восстановить функцию  $u : [0, 1] \rightarrow E$ .

В работе [1] предложена формула

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} A^n \varphi. \quad (3)$$

Здесь  $B_n(t)$  – классические *полиномы Бернулли*, подробная информация о которых представлена в [5], [6] (см. также [1]).

Полиномы Бернулли вводят обычно через производящую функцию

$$\frac{\lambda}{\exp \lambda - 1} \exp(\lambda t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad |\lambda| < 2\pi, \quad (4)$$

с параметром  $t \in \mathbf{R}$ . При этом  $\deg B_n(t) = n$  для любого  $n \in \mathbf{N}_0 \equiv \mathbf{N} \cup \{0\}$ .

Среди прочих свойств выделим *свойство Анпеля*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{B_n(t)}{n!} \right) = \frac{B_{n-1}(t)}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (5)$$

и *свойство нулевого среднего*

$$\int_0^1 B_n(t) dt = 0, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (6)$$

Несколько первых полиномов Бернулли имеют вид

$$B_0(t) \equiv 1, \quad B_1(t) = t - \frac{1}{2}, \quad B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}, \quad B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t.$$

Для полинома  $B_0(t) \equiv 1$  действуют свои соотношения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{B_0(t)}{0!} \right) \equiv 0, \quad \int_0^1 B_0(t) dt = 1. \quad (7)$$

Формулы (5)–(7) полностью характеризуют последовательность полиномов Бернулли  $B_n(t)$ . Используя перечисленные свойства, нетрудно проверить, что ряд (3) формально удовлетворяет условиям (2).

В работе [1] для такого ряда (3) указаны возможные условия сходимости. Интересный класс примеров дают нелокальные задачи для одномерного уравнения теплопроводности, где в качестве оператора  $A$  выступает оператор второй производной  $d^2/dx^2$ .

Аналогом абстрактной задачи (2) служат соотношения

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad \int_0^1 u(x, t) dt = \varphi(x) \quad (8)$$

в полосе  $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1]$ . Формула (3) приобретает здесь вид

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} \varphi^{(2n)}(x). \quad (9)$$

Тем самым, отмеченный ранее пример (1) является частным случаем нелокальной задачи (8) для  $\varphi(x) = \sin x/x$ .

Разберем вопрос о точных условиях сходимости ряда (9). Здесь уже не общая (не «абстрактная»), а вполне конкретная ситуация, обладающая своей несомненной спецификой. Целесообразно заменить вещественные переменные  $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1]$  на комплексные переменные  $(z, \zeta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ . Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть функция  $\varphi(x)$  допускает аналитическое продолжение  $\varphi(z)$  на всю комплексную плоскость  $\mathbf{C}$ , причем

$$|\varphi(z)| \leq D \exp(\sigma |z|), \quad z \in \mathbf{C}, \quad (10)$$

с константами  $D > 0$  и  $\sigma \in (0, \sqrt{2\pi})$ . Тогда комплексный ряд

$$u(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(\zeta)}{n!} \varphi^{(2n)}(z), \quad (z, \zeta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}, \quad (11)$$

служащий аналогом ряда (9), сходится абсолютно и равномерно на любом компакте множества  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ . Данный ряд (11) допускает почленное дифференцирование по каждой из переменных  $z$  и  $\zeta$  произвольное конечное число раз.

Условие (10), использованное в теореме 1, означает, что  $\varphi(z)$  есть целая функция экспоненциального типа не выше, чем  $\sigma$ , причем (как сказано далее) само это значение  $\sigma$  выбирается из интервала  $(0, \sqrt{2\pi})$ .

Введенное ограничение  $\sigma < \sqrt{2\pi}$  нужно для согласования возможного роста производных  $\varphi^{(2n)}(z)$  в формуле (11) с радиусом сходимости степенного ряда (4), служащего для определения полиномов  $B_n(t)$ .

Доказательство теоремы 1 опирается на несколько оценок и лемм.

**Лемма 1.** Пусть  $\varphi(z)$  – целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющая оценке (10) с константами  $D > 0$  и  $\sigma > 0$ . Тогда при всех  $m \in \mathbf{N}$  для производных  $\varphi^{(m)}(z)$  справедлива оценка

$$\frac{1}{m!} |\varphi^{(m)}(z)| \leq D \left( \frac{\sigma e}{m} \right)^m \exp(\sigma |z|), \quad z \in \mathbf{C}. \quad (12)$$

Оценка (12) выводится из (10) применением интегральной формулы Коши. Значение возникающего множителя  $(\sigma e/m)^m$  уменьшить нельзя, так как при каждом  $m \in \mathbf{N}$  оно (это значение) достигается на полиноме

$$\varphi_m(z) = D \left( \frac{\sigma e}{m} \right)^m z^m,$$

для которого верна исходная оценка (10) (пример А. Ю. Попова).

Немного огрубим оценку (12). Согласно известному результату Роббинса [7] имеем

$$m! \leq \sqrt{2\pi m} \left( \frac{m}{e} \right)^m \exp\left( \frac{1}{12m} \right), \quad m \in \mathbf{N}. \quad (13)$$

При  $m = 2n$  (что нужно для (11)) сочетание (12) и (13) дает оценку

$$|\varphi^{(2n)}(z)| \leq D_0 \sqrt{n} \sigma^{2n} \exp(\sigma |z|), \quad z \in \mathbf{C}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (14)$$

с константой  $D_0 \equiv 2\sqrt{\pi} \exp(1/12) D$ . Избавимся в (14) от

мешающего множителя  $\sqrt{n}$  за счет небольшого увеличения знаменателя прогрессии. Для наших обоснований удобен такой результат.

**Лемма 2.** Пусть  $\varphi(z)$  – целая функция переменной  $z \in \mathbf{C}$ , удовлетворяющая оценке (10) с константами  $D > 0$  и  $\sigma \in (0, \sqrt{2\pi})$ .

Тогда при любом выборе значения  $q \in (\sigma^2, 2\pi)$  найдется числовой коэффициент  $K = K(D, \sigma, q) > 0$ , такой, что

$$|\varphi^{(2n)}(z)| \leq K(D, \sigma, q) q^n \exp(\sigma |z|), \quad z \in \mathbf{C}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (15)$$

В частности, в круге  $|z| \leq R_1$  радиуса  $R_1 > 0$  имеем

$$|\varphi^{(2n)}(z)| \leq K(D, \sigma, q) q^n \exp(\sigma R_1), \quad n \in \mathbf{N}. \quad (16)$$

Оценка на производные  $\varphi^{(2n)}(z)$  получена. В формулах (15) и (16) важно, что коэффициент  $K = K(D, \sigma, q)$  не зависит от  $n \in \mathbf{N}$ .

Оценим теперь полиномы Бернулли  $B_n(\zeta)$ . Заменяя в формуле (4) переменную  $t \in \mathbf{R}$  на  $\zeta \in \mathbf{C}$  и применив интегральную формулу Коши, имеем для любого  $r \in (0, 2\pi)$  соотношение

$$\frac{B_n(\zeta)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{\exp(\lambda\zeta)}{\lambda^n (\exp \lambda - 1)} d\lambda, \quad n \in N, \quad i^2 = -1.$$

Пусть  $|\zeta| \leq R_2$  с фиксированным  $R_2 > 0$ . Тогда

$$\frac{|B_n(\zeta)|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \max_{|\lambda|=r} \frac{|\exp(\lambda\zeta)|}{|\exp \lambda - 1|} \leq \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{\exp(rR_2)}{a(r)}, \quad n \in N. \quad (17)$$

Здесь  $a(r) \equiv \min_{|\lambda|=r} |\exp \lambda - 1| > 0$ , так как  $r \in (0, 2\pi)$ .

Зафиксируем выбор

$$\sigma \in (0, \sqrt{2\pi}), \quad q \in (\sigma^2, 2\pi), \quad r \in (q, 2\pi), \quad R_1 > 0, \quad R_2 > 0.$$

Соответственно, комбинируя (16) и (17), получим на множестве  $(z, \zeta)$  при ограничениях  $|z| \leq R_1$ ,  $|\zeta| \leq R_2$  итоговую оценку сверху

$$\frac{|B_n(\zeta)|}{n!} |\varphi^{(2n)}(z)| \leq C(D, \sigma, q, r, R_1, R_2) \left(\frac{q}{r}\right)^n, \quad n \in N.$$

Здесь  $C(D, \sigma, q, r, R_1, R_2) = K(D, \sigma, q) \cdot r \cdot (a(r))^{-1} \cdot \exp(\sigma R_1 + r R_2)$  – некая величина, не зависящая от  $n \in N$ . Числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q}{r}\right)^n = \frac{r}{r-q}$$

сходится в силу выбора  $r \in (q, 2\pi)$ .

Но тогда, по теореме Вейерштрасса, исследуемый ряд (11) сходится абсолютно и равномерно на множестве  $|z| \leq R_1$ ,  $|\zeta| \leq R_2$  при любых фиксированных  $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$ . Как следствие, сумма ряда (11) определена для всех  $(z, \zeta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . Стандартные принципы теории аналитических функций (см. [8, гл. V]) показывают, что функция  $u(z, \zeta)$  является целой по  $z \in \mathbb{C}$  и по  $\zeta \in \mathbb{C}$ , причем производные по этим переменным можно вычислять почленным дифференцированием функционального ряда (11). Теорема 1 доказана.

Вернемся теперь к вещественной ситуации в духе формулы (9). Из доказанной теоремы 1 непосредственно следует такой результат.

**Теорема 2.** Пусть функция  $\varphi(x)$  допускает аналитическое продолжение  $\varphi(z)$  на плоскость  $\mathbb{C}$ , причем выполняется прежняя оценка (10) с константами  $D > 0$  и  $\sigma \in (0, \sqrt{2\pi})$ . Тогда функциональный ряд (9) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте плоскости  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  и допускает почленное дифференцирование по каждой из переменных  $x$  и  $t$  произвольное конечное число раз. Как следствие, тот же ряд (9) дает классическое решение нелокальной задачи (8) в полосе  $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1]$ .

Ограничение  $\sigma < \sqrt{2\pi}$  в теореме 2 является существенным. Действительно, возьмем  $\varphi(x) = \exp(\alpha x)$  с показателем  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Аналитическое продолжение  $\varphi(z) = \exp(\alpha z)$  есть целая функция переменной  $z \in \mathbb{C}$  экспоненциального типа  $\sigma = |\alpha| > 0$ . Применив формулу (9) и учитывая формулу (4), получим, что

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} \alpha^{2n} \exp(\alpha x) = \frac{\alpha^2}{\exp(\alpha^2) - 1} \exp(\alpha x + \alpha^2 t). \quad (18)$$

Ряд сходится при  $|\alpha| < \sqrt{2\pi}$ , т. е. для всех значений  $\sigma = |\alpha| > 0$ , указанных в теореме 2. При этом сумма ряда (18) продолжает давать ответ в нелокальной задаче (8) при аналитическом продолжении на всю плоскость  $\alpha \in \mathbb{C}$  за исключением точек вида

$$\alpha_{1,k}^{(\pm)} = \pm(1+i)\sqrt{\pi k}, \quad \alpha_{2,k}^{(\pm)} = \pm(1-i)\sqrt{\pi k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Для показателей  $\alpha$  из формулы (19) наш способ заведомо не применим, и решения соответствующих нелокальных задач следует искать другим методом (см. [9]). Заметим, что

$$|\alpha_{1,1}^{(\pm)}| = |\alpha_{2,1}^{(\pm)}| = \sqrt{2\pi},$$

т. е. при совпадении  $\sigma \equiv |\alpha| = \sqrt{2\pi}$  функциональный ряд в (18) будет расходиться (по крайней мере, для  $\alpha = \alpha_{1,1}^{(\pm)}$  и  $\alpha = \alpha_{2,1}^{(\pm)}$ ), и теорема 2 не допускает перенос на такие случаи.

Вернемся к первоначальному примеру (1). Функция  $\varphi(x) = \sin x/x$  продолжается до целой функции экспоненциального типа  $\sigma = 1 < \sqrt{2\pi}$ . Для того чтобы применить наш подход, используем запись

$$\varphi(x) \equiv \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp(ixs) ds. \quad (20)$$

После подстановки (20) в формулу (9) имеем представление

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} \cdot \int_{-1}^1 (is)^{2n} \exp(ixs) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} (-s^2)^n \right) \exp(ixs) ds.$$

Просуммируем последний ряд при помощи (4) и получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{s^2}{1 - \exp(-s^2)} \exp(ixs - s^2 t) ds. \quad (21)$$

По соображениям четности можем привести (21) к виду

$$u(x, t) = \int_0^1 \frac{s^2}{1 - \exp(-s^2)} \exp(-s^2 t) \cos(xs) ds. \quad (22)$$

Любая из формул (21) или (22) дает один и тот же ответ в нелокальной задаче (1) всюду в полосе  $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1]$ . Проверку можно

осуществить непосредственно. Согласно теории [3] это единственный возможный ответ в классе функций  $u(x, t)$ , удовлетворяющих оценке

$$|u(x, t)| \leq M \exp(\sigma |x|), \quad (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1],$$

с фиксированным показателем  $\sigma < \sqrt{\pi}$  и константой  $M > 0$ , зависящей от функции  $u$ . Здесь, в теореме единственности, возникает именно такое ограничение  $\sigma < \sqrt{\pi}$  (см. [3]), а не  $\sigma < \sqrt{2\pi}$ , как в теореме 2 выше.

Предложенный метод переносится на финитные преобразования Фурье и Лапласа вида

$$\varphi(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \eta(s) \exp(ixs) ds, \quad \varphi(x) = \int_0^{\sigma} \eta(s) \exp(-xs) ds, \quad (23)$$

а также на аналогичные преобразования типа Стильтьеса

$$\varphi(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \exp(ixs) d\mu(s), \quad \varphi(x) = \int_0^{\sigma} \exp(-xs) d\mu(s). \quad (24)$$

Ответ в соответствующей нелокальной задаче (8) с любой из перечисленных функций  $\varphi(x)$  находится способом, изложенным выше. Для сходимости возникающих рядов (9) функции (23) и (24) следует брать с ограничением  $0 < \sigma < \sqrt{2\pi}$ , но, скорее всего, многие из полученных результатов будут допускать аналитическое продолжение и на другие значения  $\sigma \geq \sqrt{2\pi}$ . Отметим, что формулы (23) и (24) охватывают целую серию примеров, часто используемых в анализе.

Аналогичными методами исследуется другая нелокальная задача

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad \frac{u(x, 0) + u(x, 1)}{2} = \varphi(x) \quad (25)$$

в полосе  $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1]$ . Согласно результатам [2] разрешающая формула для задачи (25) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(t)}{n!} \varphi^{(2n)}(x). \quad (26)$$

Здесь  $E_n(t)$  – классические *полиномы Эйлера* (подробнее про них см. [2]; см. также [5], [6]).

Указанные полиномы вводят через производящую функцию

$$\frac{2}{1 + \exp \lambda} \exp(\lambda t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(t)}{n!} \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad |\lambda| < \pi, \quad (27)$$

с параметром  $t \in \mathbf{R}$ . При этом  $\deg E_n(t) = n$  для любого  $n \in N_0 \equiv N \cup \{0\}$ .

Снова выделим *свойство Анпеля*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E_n(t)}{n!} \right) = \frac{E_{n-1}(t)}{(n-1)!}, \quad n \in N, \quad (28)$$

и соответствующее *свойство нулевого среднего*

$$\frac{E_n(0) + E_n(1)}{2} = 0, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (29)$$

Несколько первых полиномов Эйлера имеют вид

$$E_0(t) \equiv 1, \quad E_1(t) = t - \frac{1}{2}, \quad E_2(t) = t^2 - t, \quad E_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{4}.$$

Для полинома  $E_0(t) \equiv 1$  действуют соотношения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E_0(t)}{0!} \right) \equiv 0, \quad \frac{E_0(0) + E_0(1)}{2} = 1. \quad (30)$$

Формулы (28)–(30) полностью характеризуют последовательность полиномов  $E_n(t)$ . Используя отмеченные свойства, нетрудно проверить, что ряд (26) формально удовлетворяет условиям (25). По прежней схеме устанавливаем такие результаты.

**Теорема 3.** Пусть функция  $\varphi(x)$  допускает аналитическое продолжение  $\varphi(z)$  на плоскость  $\mathbf{C}$ , и выполняется экспоненциальная оценка (10) с константами  $D > 0$  и  $\sigma \in (0, \sqrt{\pi})$ . Тогда комплексный ряд

$$u(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(\zeta)}{n!} \varphi^{(2n)}(z), \quad (z, \zeta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}, \quad (31)$$

служащий аналогом ряда (26), сходится абсолютно и равномерно на любом компакте множества  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ . Ряд (31) допускает почленное дифференцирование по каждой из переменных  $z$  и  $\zeta$  произвольное конечное число раз.

**Теорема 4.** Пусть функция  $\varphi(x)$  допускает аналитическое продолжение  $\varphi(z)$  на плоскость  $\mathbf{C}$ , и выполняется экспоненциальная оценка (10) с константами  $D > 0$  и  $\sigma \in (0, \sqrt{\pi})$ . Тогда функциональный ряд (26) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте плоскости  $(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . Указанный ряд (26) допускает почленное дифференцирование по каждой из переменных  $x$  и  $t$  произвольное конечное число раз. Как следствие, ряд (26) дает классическое решение нелокальной задачи (25) в полосе  $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1]$ .

Здесь также возможен класс примеров с функциями  $\varphi(x)$ , взятыми в виде финитных преобразований (23), (24). Для иллюстрации рассмотрим задачу

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad \frac{u(x, 0) + u(x, 1)}{2} = J_0(x) \quad (32)$$

с функцией Бесселя

$$J_0(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\exp(ixs)}{\sqrt{1-s^2}} ds, \quad x \in \mathbf{R} \quad (33)$$

(по поводу так называемого *интеграла Пуассона* из формулы (33) см. [10, с. 65] или [11, с. 34]). При выборе функции  $\varphi(x) = J_0(x)$  условия теорем 3 и 4 выполнены со значением  $\sigma = 1 < \sqrt{\pi}$ . Несложные подсчеты по формулам (26), (27) дают результат

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2} (1 + \exp(-s^2))} \exp(ixs - s^2t) ds. \quad (34)$$

Он также приводится к виду

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2} (1 + \exp(-s^2))} \exp(-s^2t) \cos(xs) ds. \quad (35)$$

Для функции (34) (или, что равносильно, (35)) проверка условий (32) не представляет труда. Переход в нелокальном условии к функции  $J_0(x)$  основан на упомянутом интеграле Пуассона из формулы (33). Отметим, что ответы, подобные (34) или (35), легко моделируются средствами современной компьютерной математики.

### Литература

1. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Эйдельман Ю. С. Применение полиномов Бернулли в неклассических задачах математической физики // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVIII Международной научной конференции, посвященной 70-летию В. И. Мунермана. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. Вып. 18. С. 223-226.
2. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Писаренкова Е. Д. Полиномы Эйлера и их применение в нелокальных задачах математической физики // Системы компьютерной математики и их приложения: межвузовский сборник научных трудов. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2023. Вып. 24. С. 337-344.
3. Попов А. Ю., Тихонов И. В. Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 3. С. 396-405.
4. Попов А. Ю., Тихонов И. В. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Матем. сборник. 2005. Т. 196, № 9. С. 71-102.
5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Пер. с англ. под редакцией В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. М.: Наука, 1979. 832 с.
6. Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark Ch. W. NIST Handbook of Mathematical Functions. N. Y.: Cambridge University Press, 2010. 952 p.
7. Robbins H. A Remark on Stirling's Formula // The American Mathematical Monthly. 1955. Vol. 62, No. 1. P. 26-29.
8. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Изд. 13-е. М.: Наука, 1984. 432 с.
9. Тихонов И. В., Писаренкова Е. Д. О явных аналитических формулах в нелокальной задаче теплопроводности // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 22-й международной Саратовской зимней школы. Саратов: Саратовский университет, 2024. С. 256-262.

10. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. Изд. 2-е, перераб. и дополн. Л.–М.: ОНТИ, 1935. 244 с.

11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть первая / Пер. В. С. Бермана со 2-го англ. изд. М.: ИЛ, 1949. 798 с.

**I.V. Tikhonov, V.B. Sherstyukov, E.D. Pisarenkova**  
MSU, MPSU

**REPRESENTATION OF SOLUTIONS TO NON-LOCAL  
HEAT CONDUCTION PROBLEMS THROUGH SERIES  
BY BERNOULLI AND EULER POLYNOMIALS**

**Keywords:** *heat equation, non-local problem, analytical formulas, Bernoulli polynomials, Euler polynomials.*

**Abstract.** *Two non-local problems for the one-dimensional heat equation are considered. Their solutions can be expressed by formal series with the Bernoulli and Euler polynomials. We analyze these series and point out exact convergence conditions in terms of the analytic continuation for main given functions. As a result, the solving formulas are completely confirmed. The reasoning scheme is of independent interest and transfers to many other situations. Now, it becomes possible to take new examples from mathematical physics with conditions specified in the form of finite Fourier and Laplace transforms.*

## РАЗДЕЛ 4

### Новые информационные технологии в образовании

М. М. Абдуллаева, А.И. Челак  
МГУ имени М.В. Ломоносова

УДК 159.9.072.43

#### БАЛАНС МЕЖДУ РАБОТОЙ И ЛИЧНОЙ ЖИЗНЬЮ В УСЛОВИЯХ ДИСТАНЦИОННОЙ РАБОТЫ У УЧИТЕЛЕЙ СРЕДНИХ ШКОЛ

Ключевые слова: баланс «работа – личная жизнь», учителя средних школ, дистанционная работа, психосемантический подход.

*Статья посвящена изучению баланса между работой и личной жизнью у учителей, осуществляющих свою деятельность в условиях дистанционной работы, которая прочно вошла в жизнь современных специалистов со времен пандемии коронавируса. Учителя средних школ, являющиеся «классическими» представителями социономических профессий, характеризующиеся высокой ответственностью, большой ценой ошибки и серьезными нагрузками на коммуникативную сферу, столкнулись с необходимостью осуществлять преподавание «из дома» при помощи компьютерных технологий. Размывание границ между работой и личной жизнью подчеркивает важность достижения гармонизации жизни работающих людей, способствующей рабочей успешности и личностному благополучию. Для сравнения представлений о «современном учителе» у учителей, работающих очно и дистанционно, был применен аппарат психосемантики. Результаты показали, что учителя, работающие дистанционно, по сравнению с преподавателями, осуществляющими деятельность очно, ощущают большую сбалансированность сфер жизни, что также проявляется в независимости работы и личной жизни, отсутствии значимого негативного переноса рабочей сферы на остальную жизнь. Данный результат связан с негативными установками «очных» учителей по отношению к цифровым технологиям, недостаточным уровнем технической компетентности и неудовлетворенностью от дистанционной коммуникации, что требует разработки программ по обучению участников образовательного процесса внедрению технологий*

*в учебный процесс для создания условий эффективной совместной деятельности.*

**Актуальность** исследования обусловлена общей тенденцией в образовании к возможности выбора и сочетания разных форм осуществления труда – традиционной, очной, «вживую», с непосредственной коммуникацией в системе «учитель – ученик» и «удаленной», осуществляемой при помощи компьютерных технологий работы. Вынужденный переход на «цифровое» преподавание во время пандемии обнаружил множество проблем, связанных с соответствием «домашнего» оборудования требованиям, разным уровнем владения пользователей нужными программами, зависимостью от надежности интернет-связи и т.д. Но, как подчеркивают многие исследователи, специфическим фактором стресса стал новый формат работы из дома, приведший к смещению пространственных границ между работой и личной жизнью и изменившийся баланс рабочего и личного времени (Петракова и др., 2021).

**Целью** данной работы является изучение баланса между работой и личной жизнью у учителей средних школ, осуществляющих свою деятельность в условиях дистанционной работы.

В понятии «баланс между работой и личной жизнью» под работой большинство исследователей рассматривают оплачиваемую трудовую деятельность, но в трактовке «личная жизнь» такого единодушия не наблюдается (Work–Life Balance, 2020). В части исследований ограничиваются преимущественно семейной жизнью (в особенности обязанности по воспитанию и уходу за детьми) (Kelliher et al., 2018), в других – рассматривают всю активность человека вне работы, ссылаясь на то, что в самом конструкте «баланс между работой и личной жизнью» содержится смысловая оппозиция (Штроо, Козьяк, 2015). В настоящее время понятия работы и личной жизни расширяются. И как следствие, это порождает разные подходы к определению «баланса».

На основании эмпирических исследований было разработано множество теоретических моделей, позволяющих определить понятие баланса между работой и личной жизнью, взаимосвязь данных сфер. Согласно одной из самых ранних моделей – теории сегментации, работа и личная жизнь являются независимыми друг от друга сферами (Submitter, Bello, Tanko, 2020). Другая теоретическая модель – компенсационная: отсутствие успешного развития на работе или в личной жизни компенсируется большей реализацией в другой сфере (Разумова, Серпухова, 2022). Интеграционная модель является главным антиподом сегментационной, рассматривает работу и личную жизнь как тесно связанные сферы, в которых выполнение рабочих и нерабочих

функций пересекается так, что разграничить их представляется трудной задачей (Naithani et al., 2009).

В итоге все теории можно свести к двум моделям - дефицитарной модели (depletion perspective), исходящей из того, что ресурсы человека (энергия, время и т.д.) ограничены, поэтому люди постоянно решают вопросы их распределения, т.к. предполагается, что работа и личная жизнь в некотором роде несовместимы, и экспансивной (enrichment perspective) модели, основанной на теории накопления ролей (Rothbard et al., 2021), утверждающая, что ресурсы можно расширять, а взаимосвязь между рабочей и нерабочей областями может быть синергетической.

Интересна связь баланса между работой и личной жизнью с относительно новой формой занятости – удаленной работой. Онлайн-учебные платформы и видеоконференции, могут дать возможность учителям работать из дома или на удаленных рабочих местах. Данный фактор может упростить работу учителям, которые вынуждены заботиться о своих семьях, или помочь распределить своё рабочее время так, чтобы оставались ресурсы для семьи и личной жизни. Однако эти же технологии могут провоцировать увеличение времени работы, что может негативно влиять на баланс между работой и личной жизнью (Зарецкий, 2020). Преподаватели отмечают нарушение баланса между работой и личной жизнью при дистанционной и асинхронной коммуникации с учащимися (Лобова, 2020).

**Программа исследования.** Эмпирическое исследование было организовано для проверки двух предположений: 1) Форма организации труда будет связана с определенными функциональными состояниями и ощущением баланса между работой и личной жизнью у учителей, 2) Степень готовности специалистов к дистанционной работе будет связана с отношением к технике и предпочитаемой формой коммуникационных взаимодействий.

**Выборка.** Две группы учителей средних школ, работающие удаленно в онлайн-школах и осуществляющие профессиональную деятельность очно. Общая выборка составила: 51 учитель средней школы, среди которых 25 работают дистанционно в онлайн-школах и 26 преподавателей, осуществляющих работу очно. Средний возраст «очных» преподавателей составляет 35 лет, «дистанционных» - 24 года; средний стаж работы в школе «очных» учителей – 10 лет, а в группе «дистанционных» - 3 года. Учителям был предложен пакет методик, направленный на диагностику их состояния, отношения к технике; на оценку баланса между работой и личной жизнью, особенностей выбора условий работы и их удовлетворенности от коммуникации.

**Полученные результаты.** Наиболее существенными причинами для выбора «очной» работы учителей средних школ является важность

личной коммуникации в процессе профессиональной деятельности и свобода в выборе дидактического материала. Для данной группы респондентов характерны ответы, в которых выражается их негативное отношение к дистанционному образованию или указывается невозможность в полной мере осуществлять педагогическую деятельность.

Группа учителей, работающих дистанционно, в абсолютном большинстве (100%) отметили фактор удобства работать дома как один из ключевых в выборе формы занятости. Для них также значима возможность самостоятельного планирования рабочего времени и совмещения с другими учебными, рабочими и личными активностями, экономия времени на дорогу при выборе удаленной работы.

Возможно, выбор формы занятости учителей средних школ частично обусловлен удовлетворенностью от коммуникации разного типа, характера эмоционального отношения к технике и технической компетентности. Уровень доверия специалиста к технике связан с утомлением и пресыщением: чем в большей степени специалисты считают рабочую технику надежной, безопасной и подходящей для выполнения рабочих задач, тем ниже проявление неблагоприятных функциональных состояний.

Была установлена связь между балансом между работой и личной жизнью у учителей средних школ с выраженностью состояний сниженной работоспособности – с утомлением, пресыщением и стрессом. Чем выше сбалансированность сфер жизни у учителей средних школ, тем ниже выраженность неблагоприятных функциональных состояний.

В целях изучения психосемантики представлений учителей как отражения их опыта о «цифровизации труда» и «современном учителе» им предлагалось дать 5 свободных ассоциаций на каждое словосочетание. Для анализа полученного списка слов была применена методика П. Вержеса (Vergés, 1992), направленная на анализ структуры представления, в которой выделяются ядро и периферия. Ядро определяет структуру всего понятия, в него входят слова, воспроизводимые группой респондентов в первую очередь и чаще всего, придающие понятию смысл и коренящиеся в культуре. Периферию составляют слова, нацеленные на адаптацию к повседневным задачам (Бовина и др., 2010).

Результаты анализа сложившихся представлений о «современном учителе» и «цифровизации труда», на наш взгляд, отражают основные тенденции, отличающие учителей с разным индивидуальным опытом работы. В ядро понятия «Современный учитель» на выборке «очных» учителей входит: профессионализм, многозадачность, коммуникабельность и неблагоприятные состояния; в ядро же понятия

«Цифровизация труда» у данной группы включены: компьютер, технологии, отчет, использование технологий, современно. Группа «дистанционных» учителей ассоциирует понятие «Современный учитель» с: технологиями, молодостью, контактом с учениками («на одной волне»), современностью, открытостью; а понятие «Цифровизация труда» с такими словами, как: компьютер, удобство, удаленная работа, современно, изменения, простота, экономия, роботы. Также у группы «очных» преподавателей были выделены неблагоприятные характеристики «цифровизации труда» (например, такие ассоциации, как: напряжение, стресс, безработица, отсутствие знаний и рассуждений и т.д.), что может отражать негативные установки у учителей средних школ, работающих очно.

Учителя, работающие дистанционно, по сравнению с преподавателями, осуществляющими деятельность очно, ощущают большую сбалансированность сфер жизни, что также проявляется в независимости работы и личной жизни, отсутствии значимого негативного переноса рабочей сферы на остальную жизнь.

**Выводы.** Группа учителей с большей степенью цифровизацией труда отмечает большую степень сбалансированности сфер жизни по сравнению с учителями, в рабочий процесс которых технологии интегрированы в меньшей степени. Данный результат также связан с негативными установками «очных» учителей относительно феномена цифровизации, недостаточным уровнем технической компетентности и неудовлетворенностью от дистанционной коммуникации, что требует разработки программ по обучению участников образовательного процесса применению технологий в образовательный процесс для создания условий эффективной совместной учебной деятельности.

### Литература

1. Зарецкий Ю. В. (2020) Опыт психологического консультирования учителей, работающих в режимах онлайн и офлайн // Консультативная психология и психотерапия. Т. 28. № 2 (108). С. 137-150.

2. Петракова А. В., Канонир Т. Н., Куликова А. А., Орел Е. А. (2021) Особенности психологического стресса у учителей в условиях дистанционного преподавания во время пандемии COVID-19 // Вопросы образования / Educational Studies Moscow. № 1. С. 93-114. <https://doi.org/10.17323/1814-9545-2021-1-93-114>.

3. Work–Life Balance: Definitions, Causes, and Consequences. In: Handbook Series in Occupational Health Sciences. New York: Springer, 2020. PP. 473-487.

**M.M. Abdullaeva, A.I. Chelak**

*Lomonosov Moscow State University*

**WORK-LIFE BALANCE IN THE CONDITIONS OF DISTANCE  
WORK AMONG SECONDARY SCHOOL TEACHERS**

**Keywords:** *work-life balance, secondary school teachers, distance work, psychosemantic approach.*

**Abstract.** *The article is devoted to the study of work-life balance in teachers who work remotely, which has become a part of modern professionals' life since the coronavirus pandemic. Secondary school teachers, who are "classic" representatives of socio-economic professions characterized by high responsibility, high cost of error, and serious communication stress, are faced with the need to teach "from home" with the help of computer technology. The blurring of the boundaries between work and personal life emphasizes the importance of achieving a harmonization of working people's lives that promotes work success and personal well-being. The apparatus of psychosemantics was applied to compare the perceptions of the "modern teacher" among face-to-face and remote teachers. The results showed that teachers working remotely, in comparison with teachers working face-to-face, feel a greater balance of life spheres, which is also manifested in the independence of work and personal life, the absence of a significant negative transfer of the work sphere to the rest of life. This result is related to the negative attitudes of "face-to-face" teachers towards digital technologies, insufficient level of technical competence and dissatisfaction with distance communication, which requires the development of programs to train the participants of the educational process to implement technology in the learning process to create conditions for effective collaboration.*

**М.В. Акуленок, М.Р. Тихонов, О.С. Шикула**  
*Московский институт электронной техники*

УДК 004:378

**РАЗРАБОТКА МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОГО ПРОЕКТНОГО  
ЗАДАНИЯ «СТРУКТУРА ДАННЫХ» ПРИ ПОДГОТОВКЕ  
МАГИСТРОВ ПО НАПРАВЛЕНИЮ 27.04.02**

Ключевые слова: *проектная работа, структуры данных, формирование компетенций, отраслевые модели, управление качеством.*

*В данной работе рассматривается результат разработки междисциплинарного проектного задания, реализуемого в направлении 27.04.02 «Управление качеством» направленности «Информационное*

*обеспечение систем менеджмента качества» НИУ МИЭТ в дисциплинах «Отраслевые модели систем менеджмента качества» и «Средства автоматизации систем менеджмента качества». Результатом выполненного задания является научная статья студента.*

Магистерское направление 27.04.02 «Управление качеством» направленности «Информационное обеспечение систем менеджмента качества» ориентировано на подготовку высококвалифицированных кадров в сфере управления качеством продукции или предоставления услуг. Данное направление предполагает формирование компетенций, связанных с отраслевыми моделями системы менеджмента качества и применением специализированных инструментов, методов и средств статистического управления процессами. Итоговые работы студентов содержат положения по совершенствованию процессов организации с учетом отраслевой специфики и особенностей ведения деятельности [1].

Одним из требований, предъявляемых к соискателям квалификации магистра данного направления, является наличие публикаций по теме диссертации. При этом формирование знаний и умений, позволяющих студентам публиковать свои наработки и результаты исследования не осуществляется в рамках отдельной дисциплины. Таким образом, важной задачей является разработка задания в рамках дисциплин данного направления, ориентированного на практические навыки формирования научного текста и его оформления для последующей публикации.

Для решения поставленной задачи был проанализирован учебный план на предмет дисциплин, отвечающих следующим требованиям:

- направленность дисциплины на формирование компетенций отраслевой специфики. Такое требование обусловлено необходимостью вовлечения студента в научную деятельность на основе профессиональной среды, близкой к его рабочей сфере;

- возможность применения результатов дисциплины в магистерской диссертации (МД). Данное требование является важным в связи с тем, что магистры направления 27.04.02 «Управление качеством» с первого семестра начинают работу над своей магистерской диссертацией;

- применение в дисциплине актуальных отраслевых и научных документов. Применяемый в таких документах стиль изложения позволяет студентам на конкретных примерах формировать корректное представление о структуре публикаций и применяемых речевых оборотах;

- возможность встраивания задания с проектной спецификой. Разрабатываемое задание ориентировано на самостоятельную работу

студентов и заключается в формировании итогового, измеряемого результата – публикации;

- применение в дисциплине инструментов, методов и средств информационных технологий. Такие технологии позволяют сформировать у студентов структурное и формализованное понимание способов изложения результатов исследовательской деятельности. Помимо этого программные продукты могут быть применены при выполнении действий по анализу полученных в ходе исследования результатов.

Однако учебный план направления 27.04.02 «Управление качеством» направленности «Информационное обеспечение систем менеджмента качества», реализуемый в НИУ МИЭТ не имеет дисциплины, отвечающей всем описанным выше требованиям, что вызвано особенностями предметной области [2]. В связи с этим было принято решение о внедрении междисциплинарного подхода, а именно разработке задания, выполнение которого осуществляется в рамках следующих модулей:

- отраслевые модели систем менеджмента качества (ОМСМК). Данная дисциплина формирует у студентов компетенции, связанные со способностью документировать процессы предприятия с учетом отраслевой специфики. В ней применяются и рассматриваются основные стандарты и нормативные документы отраслевых моделей систем менеджмента качества;

- средства автоматизации систем менеджмента качества (САСМК). При освоении данной дисциплины студенты способны применять современные информационные технологии для решения задач управления качеством. Она позволяет удовлетворить требования к применению информационных технологий в рамках автоматизации систем менеджмента качества [3];

- государственная итоговая аттестация (ГИА). Защита итоговой работы студента, выраженной в магистерской диссертации.

Анализируя формируемые в дисциплинах компетенции, специфику направления, предъявляемые требования, структуру и содержание занятий, сформулирована общая тематика и краткое описание разрабатываемого задания: «формирование статьи по выбранной теме магистерской диссертации, содержащей структуру информации документов выбранного отраслевого процесса, выраженную в схеме, основанной на нотации ARIS Data Model или IDEF1X». Встраивание такого задания ориентировано как на выполнение требований, описанных выше, так и на формирование компетенции соответствующих модулей. Таблица соответствия представлена ниже (таблица 1):

Таблица 1

## Анализ соответствия задания требованиям и модулям

Требования к модулям	Модули направления		
	ОМСМК	САСМК	ГИА
Направленность дисциплины на формирование компетенций отраслевой специфики	Выбирается отраслевой процесс и набор документов	Выявляются особенности отраслевых документов для построения структуры информации	Результаты анализа отраслевой специфики в главе 1 МД
Возможность применения результатов дисциплины в магистерской диссертации	Результаты анализа отраслевых документов выражены в главе 1 МД	Пути возможной автоматизации и специфика информатизации выражены в главе 1, 3 и 4 МД	Результирующая схема документов может быть применена в главе 1 МД
Применение в дисциплине актуальных отраслевых и научных документов	Выбранный процесс анализируется на предмет актуальных положений стандартов	Выбранный процесс анализируется на предмет возможной автоматизации с применением лучших практик	Результаты анализа процесса согласованы с анализом литературы, применяемой в МД
Возможность встраивания задания с проектной спецификой	Структура дисциплины позволяет внедрить проектное задание	Структура дисциплины позволяет внедрить проектное задание	Общая специфика МД связана с проектной деятельностью
Применение в дисциплине инструментов, методов и средств информационных технологий	Анализ возможной автоматизации с учетом требований ГОСТ 12207-79	Построение структуры информации в нотациях ARIS Data Model или IDEF1X с применением ПО	Общая специфика направленности предполагает использование информационных технологий

Последовательность выполнения задания предполагает следующие этапы:

- выбор рассматриваемого процесса. Такой выбор осуществляется в рамках формирования первичной тематики магистерской диссертации и направлен на выполнение требований ГИА;

- выбор набора документов, участвующих в процессе. Документы выбираются на основе специфики процесса и отраслевой направленности организации;
- анализ выбранных документов. Документы анализируются на предмет соответствия применимым отраслевым моделям систем менеджмента качества;
- выявление основных структурных элементов и реквизитов документов. Результатом данного этапа является перечень атрибутов каждого документа, необходимый для формирования структурной схемы информации;
- построение структурной схемы в нотации ARIS Data Model или IDEF1X. Положения нотаций изучаются в рамках дисциплины «Средства автоматизации систем менеджмента качества». Пример схемы представлен на рисунке 1 [4];

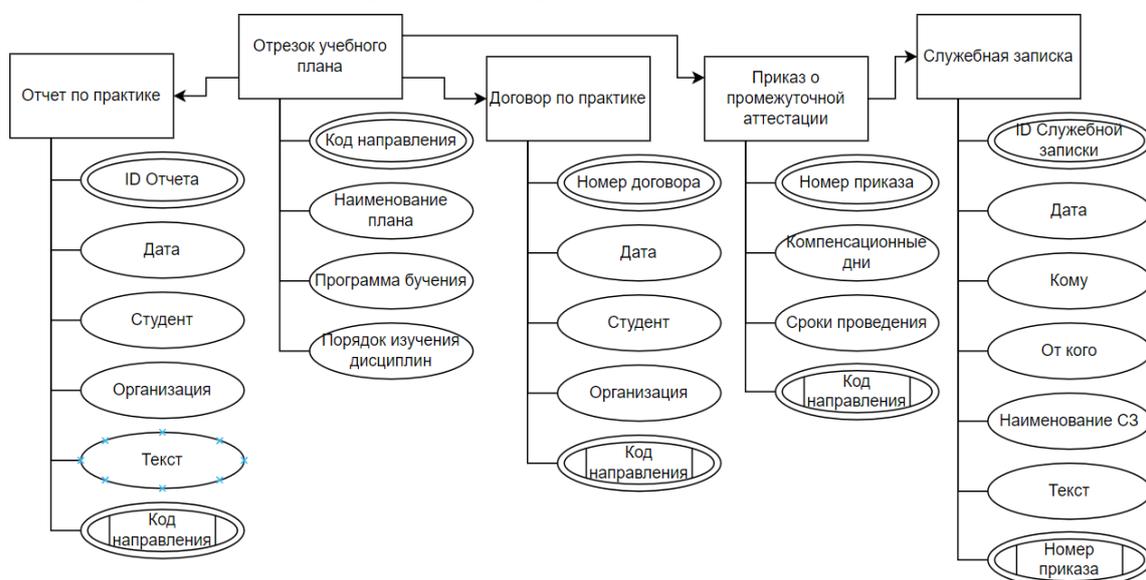


Рис. 1. Пример структуры информации выбранных документов

- формирование текста статьи. Предъявляемые к статье требования соответствуют общим практикам написания студенческих статей.

Непосредственно публикация статьи не включена в список обязательных этапов, т.к. затрагивает вопросы авторского права и не может быть навязана студентам как обязательное требование.

Разработанное задание позволяет студентам направления 27.04.02 «Управление качеством» направленности «Информационное обеспечение систем менеджмента качества» получить практические навыки в написании научных статей, анализе отраслевых особенностей, выявлении структурных элементов документов и применении информационных технологий в исследовательской деятельности. Результаты выполнения задания могут быть внедрены непосредственно в магистерскую диссертацию как часть аналитического раздела.

Сформированная схема структуры информации документов выбранного процесса позволяет получить представление о возможных путях автоматизации, к примеру, при построении системы электронного документооборота.

### Литература

1. Лариошина И.А. Особенности практико-ориентированной подготовки магистров по направлению 27.04.02 «Управление качеством» / И. А. Лариошина, М. Н. Янушевская // Современное образование: повышение конкурентоспособности университетов : Материалы международной научно-методической конференции, в 2 частях, Томск, 28–29 января 2021 года. Том Часть 1. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2021. – С. 80-84.
2. Акуленок М.В., Ларионов Н.М. Развитие профильной подготовки кадров в области качества для наукоемких производств// Инженерное образование.– 2011. – №7. – С.48-53.
3. Фурсов, С. А. Оценка результативности системы менеджмента качества на основании статистических данных с использованием программных средств / С. А. Фурсов, А. В. Киров // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 3. – С. 81-86.
4. Тихонов М. Р. Разработка информационной модели документации учебного процесса практики студентов / М. Р. Тихонов, Д. А. Иванова // Студент и наука: актуальные вопросы современных исследований : сборник статей IV Международной научно-практической конференции, Пенза, 07 декабря 2023 года. – Пенза: Наука и Просвещение (ИП Гуляев Г.Ю.), 2023. – С. 58-61.

**M.V. Akulenok, M.R. Tikhonov, O.S. Shikula**  
*National Research University of Electronic Technology*

### **DEVELOPMENT OF AN INTERDISCIPLINARY PROJECT ASSIGNMENT “DATA STRUCTURE” DURING PREPARATION OF MASTERS IN EDUCATIONAL DIRECTION 27.04.02**

**Keywords:** *project work, data structures, competency development, industry models, quality management.*

**Abstract.** *This paper examines the result of the development of an interdisciplinary project assignment implemented in the direction 04.27.02 “Quality Management” in the direction “Information support of quality management systems” of the National Research University MIET in the disciplines “Industry models of quality management systems” and “automation tools for quality management systems”. The result of the completed assignment is a student’s scientific article.*

**Н.Н. Богданова**

*Смоленский государственный университет*

**А.В. Светлаков**

*Национальный исследовательский университет "Московский институт  
электронной техники"*

УДК 519.283

## **ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ СКМ WOLFRAM MATHEMATICA**

*Ключевые слова: численное дифференцирование, многочлен Лагранжа, разностные производные первого и второго порядка, формулы численного дифференцирования для двух, трех и четырех узлов, система компьютерной математики Wolfram Mathematica.*

*В данной статье на конкретных примерах рассматриваются возможности использования математического пакета Wolfram Mathematica при решении задач численного дифференцирования.*

**1. Введение.** Под численным дифференцированием понимают совокупность методов приближенного вычисления значений производной некоторой функции, которая задана таблично, или алгоритмом вычисления в произвольной точке, или имеет сложное аналитическое выражение. Таким образом, численное дифференцирование применяют в том случае, когда функцию невозможно продифференцировать аналитически или вычисление производной является слишком трудоемким.

Основной подход при построении формул численного дифференцирования — это аппроксимация функции: исходная функция  $f(x)$  заменяется на рассматриваемом отрезке  $[a,b]$  интерполяционным полиномом  $L_n(x)$  и считается, что  $f'(x)$  и  $L'_n(x)$  примерно равны, т.е.  $f'(x) = L'_n(x)$  ( $a < x < b$ ). Реализуем этот подход в случае, когда аппроксимация функции осуществляется с помощью лагранжевой интерполяции.

**2. Решение задач.** Пусть требуется задать таблицу значений функции  $y = e^x \cos 2x - \sin 3x$  на отрезке  $[0; \pi]$ , построить многочлен Лагранжа  $L(x)$  для полученной таблично заданной функции, найти производные функции  $L(x)$  до третьего порядка включительно и сравнить полученные приближенные результаты с точными.

```

(*Зададим данную функцию и отрезок области определения*)
f[x_] = Exp[x] * Cos[2 * x] + Sin[3 * x];
      |показа... |косинус      |синус
a = 0;
b = Pi;
      |число пи
G = Plot[f[x], {x, a, b}];
      |график функции
(*Зададим количество частичных отрезков*)
n = 20;
(*Найдем шаг разбиения*)
h = (b - a) / n;
(*Построим таблицу значений функции*)
X = Table[a + k * h, {k, 0, n}];
      |таблица значений
Y = Table[f[X[[k]]], {k, 1, n + 1}];
      |таблица значений
GP = ListPlot[Table[{X[[j]], Y[[j]]}, {j, 1, n + 1}], PlotStyle -> Red];
      |диаграмм... |таблица значений      |стиль графика |красный
(*Построим многочлен Лагранжа для данной функции*)
L[x_] = Sum[Y[[i]] * Product[(x - X[[j]]) / (X[[i]] - X[[j]]), {j, 1, i - 1}] *
      |сумма      |произведение
      Product[(x - X[[j]]) / (X[[i]] - X[[j]]), {j, i + 1, n}], {i, 1, n}];
      |произведение
GL = Plot[L[x], {x, X[[1]], X[[n + 1]]}, PlotStyle -> Orange];
      |график функции      |стиль графика |оранжевый
(*Зададим порядок наивысшей производной*)
m = 3;
(*Найдем производные данной функции до порядка m включительно*)
DF = Table[D[f[x], {x, k}], {k, 1, m}];
      |табл... |дифференцировать
(*Найдем производные многочлена Лагранжа для данной функции до порядка m включительно*)
DL = Table[D[L[x], {x, k}], {k, 1, m}];
      |табл... |дифференцировать
GDF = Plot[DF, {x, a, b}, PlotLegends -> Automatic, PlotRange -> All];
      |график функции      |легенды графика |автоматиче... |отображае... |все
GDL = Plot[DL, {x, a, b}, PlotLegends -> Automatic, PlotRange -> All];
      |график функции      |легенды графика |автоматиче... |отображае... |все
(*Построим графики исходной функции,
ее табличных значений и многочлена Лагранжа в одной системе координат*)
Print["Графики исходной функции, ее табличных значений и многочлена Лагранжа"]
|печатать
Show[G, GP, GL]
|показать
(*Найдем погрешность приближения данной функции многочленом Лагранжа в пространстве
Чебышева*)
r = NMaximize[{Abs[f[x] - L[x]], a <= x <= b}, x];
      |численная ... |абсолютное значение
Print[
|печатать
"Погрешность приближения данной функции многочленом Лагранжа в пространстве
Чебышева равна: ", r[[1]]
]
(*Построим Графики производных исходной функции и производных многочлена Лагранжа
в одной системе координат*)
Print["Графики производных исходной функции и производных многочлена Лагранжа"]
|печатать

```

Show[GDL, GDF]

[показать]

(\*Найдем погрешность приближения данной функции многочленом Лагранжа в пространстве Чебышева\*)

```
r = NMaximize[{Abs[f[x] - L[x]], a ≤ x ≤ b}, x];
```

[численная ... | абсолютное значение]

Print[

[печатать]

"Погрешность приближения данной функции многочленом Лагранжа в пространстве Чебышева равна: ", r[[1]]

(\*Построим Графики производных исходной функции и производных многочлена Лагранжа в одной системе координат\*)

```
Print["Графики производных исходной функции и производных многочлена Лагранжа"]
```

[печатать]

Show[GDL, GDF]

[показать]

(\*Найдем погрешность приближения производных данной функции производными многочлена Лагранжа в пространстве Чебышева\*)

```
dr = Table[NMaximize[{Abs[DF[i] - DL[i]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]], {i, 1, m}];
```

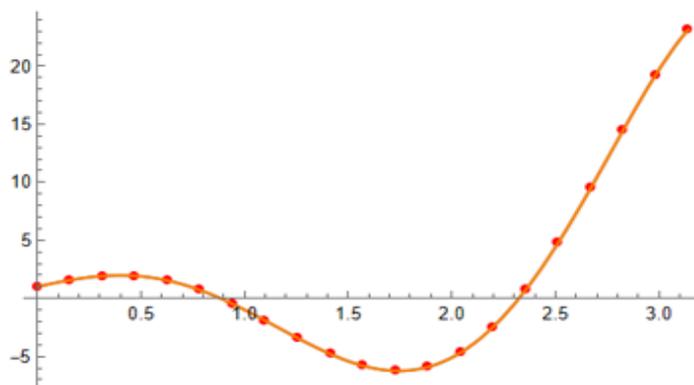
[табл... | численная ... | абсолютное значение]

Print[

[печатать]

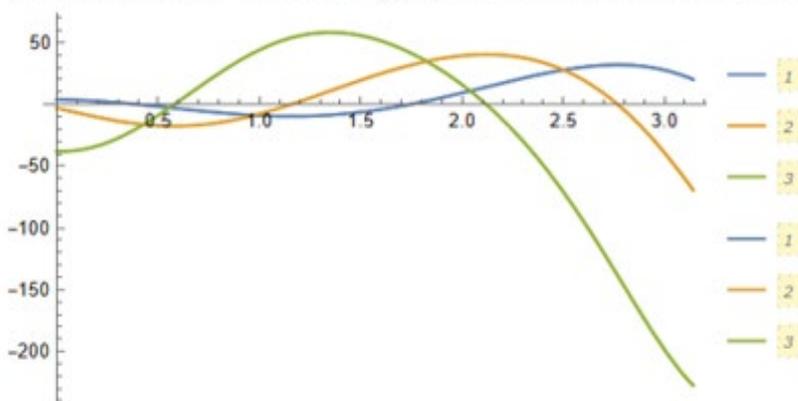
"Погрешность приближения производных данной функции производными многочлена Лагранжа в пространстве Чебышева соответственно равны: ", dr]

Графики исходной функции, ее табличных значений и многочлена Лагранжа



Погрешность приближения данной функции многочленом Лагранжа в пространстве Чебышева равна:  $2.39124 \times 10^{-7}$

Графики производных исходной функции и производных многочлена Лагранжа



Погрешность приближения производных данной функции производными многочлена Лагранжа в пространстве Чебышева соответственно равны:  $\{5.53372 \times 10^{-6}, 0.00010984, 0.0019559\}$

Рис 1. Численное дифференцирование с помощью многочлена Лагранжа

Рассмотрим применение разностных формул для первой и второй производных в узлах, расположенных с постоянным шагом  $h > 0$ .

Пусть бесконечно гладкая функция  $y = f(x)$  задана несколькими своими значениями:

$x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$y$	0,39	0,58	0,76	0,93	1,08	1,22	1,35	1,12	1,01	0,92	0,81

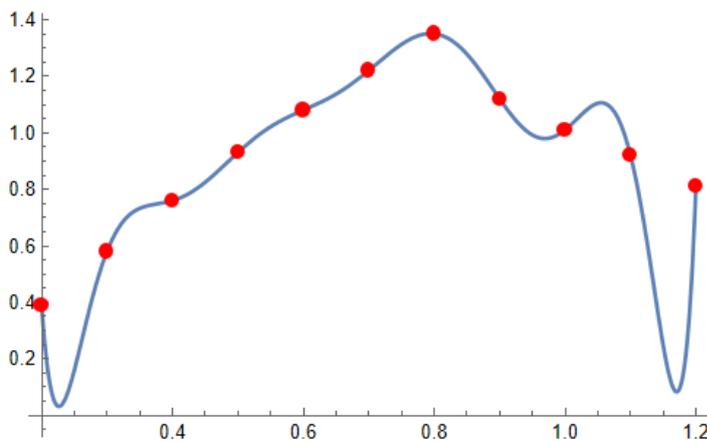
Требуется создать таблицу с приближенными значениями функций  $f'(x)$  и  $f''(x)$ , используя формулы численного дифференцирования: а) для двух узлов; б) для трех узлов; выполнить интерполяцию полученных функций и построить их графики.

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 0.39 & 0.58 & 0.76 & 0.93 & 1.08 & 1.22 & 1.35 & 1.12 & 1.01 & 0.92 & 0.81 \end{pmatrix};$$

(\*Зададим функцию для интерполирования, A - матрица, s - строка y\*)

```
Lagrang[A_, s_] := (
  m = 11;
  L[x_] := 0; "начальное значение";
  For[i = 1, i ≤ m, i++, L[x_] = L[x] + A[[s, i]] *  $\frac{Q[x, m, i]}{Q[A[[1, i], m, i]}$ ;
  ]; "Строим многочлен";

  point = Table[If[j == 1, A[[1, i]], A[[s, i]]], {i, 1, 11}, {j, 1, 2}];
  Q[x_, q_, n_] := If[q == 0, 1, If[q == n, Q[x, q - 1, n] * 1, Q[x, q - 1, n] * (x - A[[1, q]])]];
  Lagrang[A, 2];
  G0 = L[x];
  Print[Plot[L[x], {x, 0.2, 1.2}, Epilog → {PointSize → 0.02, Red, Point[point]}]];
  "№ 1 - два узла";
  B = Table[0, {i, 1, 3}, {j, 1, 11}];
```



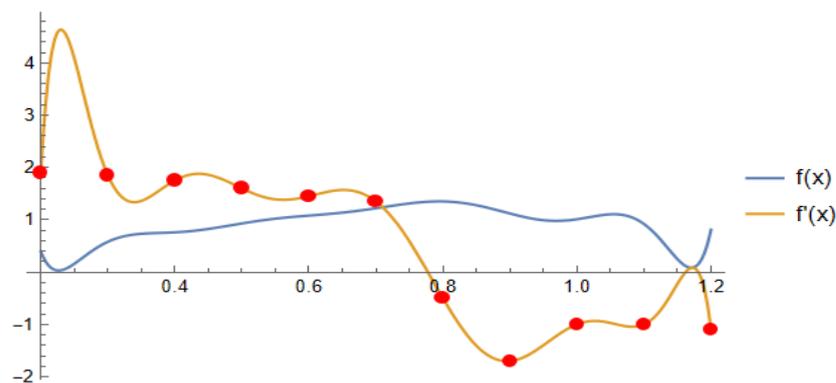
```

h = A[[1, 2]] - A[[1, 1]];
For[i = 1, i ≤ 11, i++, B[[1, i]] = A[[1, i]]]; (*Заполняем первую строку x *)
|цикл ДЛЯ
  (*Два узла:*)
B[[2, 1]] = (A[[2, 2]] - A[[2, 1]]) / (A[[1, 2]] - A[[1, 1]]); (*правая разностная производная*)
B[[2, 11]] = (A[[2, 10]] - A[[2, 11]]) / (- (A[[1, 11]] - A[[1, 10]])); (*левая разностная производная*)
For[i = 2, i ≤ 10, i++, B[[2, i]] = (A[[2, i + 1]] - A[[2, i - 1]]) / (2 * h)];
|цикл ДЛЯ
  (*центральные разностные производные*)
  (*Вторая производная через 2 узла не считается (необходимо 3 узла)*)
For[i = 1, i ≤ 11, i++, B[[3, i]] = "-"];
|цикл ДЛЯ
B // MatrixForm (*1 строка - x, 2 - строка производные*)
|матричная форма

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1. & 1.1 & 1.2 \\ 1.9 & 1.85 & 1.75 & 1.6 & 1.45 & 1.35 & -0.5 & -1.7 & -1. & -1. & -1.1 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Lagrang[B, 2];
Print[Plot[{G0, L[x]}, {x, 0.2, 1.2}, Epilog → {PointSize → 0.02, Red, Point[point]},
|печа... |график функции |эпилог |размер точки |кр... |точка
  PlotLegends → {"f(x)", "f'(x)"}];
|легенды графика

```



```

"№ 2 - три узла";
  (*Три узла:*)
CC = Table[0, {i, 1, 3}, {j, 1, 11}}];
|таблица значений
For[i = 1, i ≤ 11, i++, CC[[1, i]] = A[[1, i]]]; (*Заполняем первую строку x *)
|цикл ДЛЯ
  (*Первая производная*)
CC[[2, 1]] = 1 / (2 * h) * (-3 * A[[2, 1]] + 4 * A[[2, 2]] - A[[2, 3]]);
CC[[2, 11]] = 1 / (2 * h) * (A[[2, 9]] - 4 * A[[2, 10]] + 3 * A[[2, 11]]);
For[i = 2, i ≤ 10, i++, CC[[2, i]] = 1 / (2 * h) * (A[[2, i + 1]] - A[[2, i - 1]])];
|цикл ДЛЯ
  (*Вторая производная*)
CC[[3, 1]] = 1 / h^2 * (A[[2, 1]] - 2 * A[[2, 2]] + A[[2, 3]]);
CC[[3, 11]] = 1 / h^2 * (A[[2, 9]] - 2 * A[[2, 10]] + A[[2, 11]]);

```

```

For[[цикл ДЛЯ i = 2, i <= 10, i++, CC[[3, i]] =  $\frac{1}{h^2} * (A[[2, i - 1]] - 2 * A[[2, i]] + A[[2, i + 1]])$  ];
CC // MatrixForm (+1 строка - x, 2 - строка производные, 3 строка - 2ые производные*)
[матричная форма
( 0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  1.  1.1  1.2 )
( 1.95 1.85 1.75 1.6  1.45 1.35 -0.5 -1.7 -1. -1. -1.2 )
( -1.  -1.  -1.  -2.  -1.  -1.  -36.  12.  2.  -2.  -2. )
Lagrang[CC, 2];
points1 = point;
G1 = L[x];
Lagrang[CC, 3];
points2 = point;
G2 = L[x];
Print[Plot[{G0, G1, G2}, {x, 0.2, 1.2},
[печа... [график функции
Epilog -> {PointSize -> 0.02, Red, {Point[points1], Point[points2]}},
[эпилог [размер точки [кра... [точка [точка
PlotLegends -> {"f(x)", "f'(x)", "f''(x)"}];
[легенды графика

```

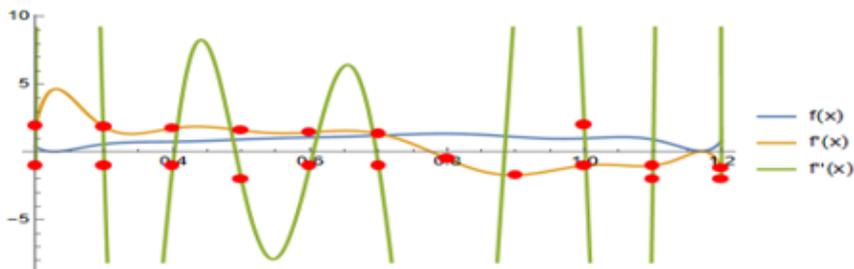


Рис 2. Численное дифференцирование разностными производными

Формулы численного дифференцирования широко используются при разработке вычислительных методов решения многих задач, например, при решении дифференциальных уравнений, поиске решений систем нелинейных уравнений, поиске точек экстремума функций и т.д.

### Литература

1. Банников А.С., Ким И.Г., Латынова Н.В. Численные методы / А.С. Банников. – Ижевск: Издательский центр “Удмуртский университет”, 2018.
2. Иванов В.М. Численные методы / В.М. Иванов. – Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2003.
3. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы / А.А. Амосов. – Санкт-Петербург: Изд-во “Лань”, 2014.

**N.N. Bogdanova**  
Smolensk State University

**A.V. Svetlakov**  
National Research University "Moscow Institute of Electronic Technology"

## NUMERIC DIFFERENTIATION WITH WOLFRAM MATHEMATICA

**Keywords:** *numerical differentiation, Lagrange polynomial, difference derivatives of the first and second order, numerical differentiation formulas for two, three and four nodes, Wolfram Mathematica computer mathematics system.*

**Abstract.** *This article examines the possibilities of using the Wolfram Mathematica mathematical package to solve numerical differentiation problems using specific examples.*

**Л.М. Воинская, О.М. Киселева**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 37.02

## **ОЦЕНКА ВОСТРЕБОВАННОСТИ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО СОЗДАНИЮ ВИРТУАЛЬНЫХ ПОМОЩНИКОВ**

Ключевые слова: *виртуальный помощник, информационно-коммуникационные технологии, мессенджеры, элективный курс.*

*Элективные курсы являются возможностью для приобщения обучающихся к созданию наиболее актуальных онлайн приложений. Поскольку современные программные продукты, в том числе и виртуальные помощники, предназначенные для гаджетов востребованы во всех сферах человеческой деятельности. В данной статье представлены результаты констатирующего эксперимента по оценке востребованности элективного курса по созданию виртуальных помощников.*

Современные информационно-коммуникационные технологии доступны практически всем членам общества. Сложно сегодня найти человека не имеющего доступа к пользованию компьютерной техникой или мобильным телефоном. [1] Это повлекло за собой переход бизнеса, социальных и общественных организаций в электронное пространство. [2] Поэтому сегодня знания умения и навыки по разработке программных продуктов для различных гаджетов особенно востребованы. [3] При этом важны не столько компетенции в использовании конкретного языка программирования или конструктора мобильных приложений, а общие принципы проектирования и создания программных продуктов. [4] Это связано с разнообразием операционных систем на основе которых функционируют гаджеты, тенденцией смены или обновления платформ опубликования продуктов и т.п. [5]

Существование конструкторов для разработки различного вида онлайн приложений позволяет получать требуемые знания, умения и навыки как программирующим, так и ничего не знающим о программировании пользователям. [6] Это позволяет проводить обучение актуальным компетенциям в школе, реализовывая его в виде различных элективных курсов.

Одним из наиболее востребованных видов программного обеспечения для гаджетов сегодня являются чат-боты. Они имеют широкую область применения, которая постоянно увеличивается. [7]

Чат-бот или виртуальный помощник – это программный продукт, имитирующий человеческое общение, в основу которой положен алгоритм, ориентированный на решение поставленных задач посредством ведения диалога [8].

Авторами была проведена оценка востребованности элективного курса по созданию виртуальных помощников у школьников. Базой для проведения констатирующего эксперимента выступила МБОУ средняя школа № 4 г. Рославля. С испытуемым были проведены анкета и последующая беседа. Рассмотрим получившиеся результаты.

1. Встречались ли Вы с чат-ботами при посещении каких-либо сайтов/ мессенджеров/ приложений?

1. Да.
2. Нет.

Анализ ответов на первый вопрос показал, что все 100% опрошенных встречались с чат-ботами.

2. Пользовались ли Вы чат-ботами для решения вопросов?

1. Да, часто.
2. Да, несколько раз.
3. Нет.

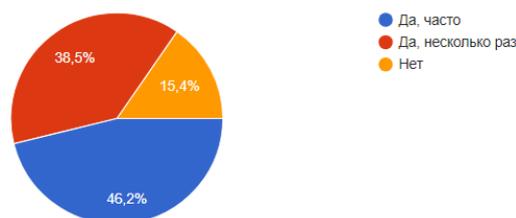


Рис. 1. Ответы на вопрос, о количестве пользователей чат-ботами.

3. Выберите область опубликования виртуального помощника, которыми вы пользовались.

1. На сайте.
2. В социальных сетях (ВК, Одноклассники и тд).
3. В мессенджерах (Telegram, WhatsApp и тд).
4. В мобильных приложениях.
5. Я не пользовался.

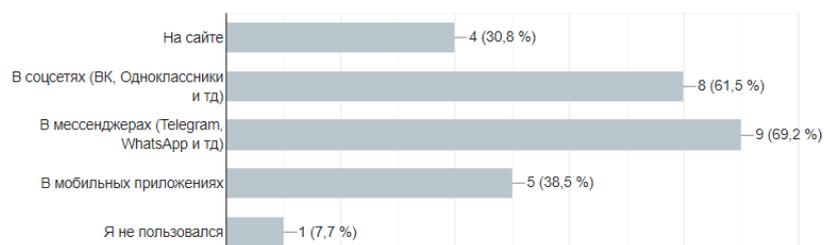


Рис. 2 Области опубликования в которых обучающиеся сталкивались с чат-ботами.

#### 4. Какова была цель общения с чат-ботом?

1. Узнать информацию.
2. Совершить операцию.
3. В развлекательных целях.
4. Проконсультироваться.
5. Другой вариант.

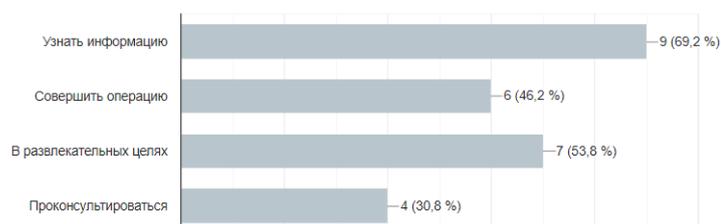


Рис. 3 Результаты ответов на вопрос о цели использования чат-ботов.

#### 5. Помог ли Вам чат-бот решить вопрос, с которым Вы к нему обращались?

1. Да.
2. Скорее да.
3. Скорее нет.
4. Нет.

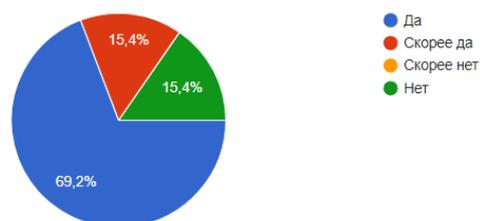


Рис.4. Результаты ответов на вопрос об оценке оказания услуг.

#### 6. С кем бы Вы предпочли общаться в следующий раз для решения проблем?

1. С чат-ботом.
2. С живым менеджером.

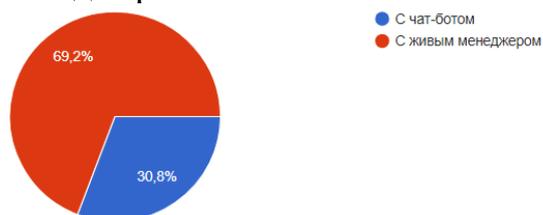


Рис. 5. Результаты ответов на вопрос о выборе в общении.

7. Востребованы ли, на Ваш взгляд, в современном обществе знания, умения и навыки создания виртуальных помощников?

1. Да.
2. Нет.
3. Затрудняюсь ответить.

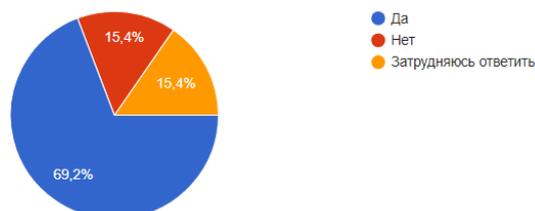


Рис. 6. Результаты ответов на вопросы о востребованности навыков виртуальных помощников.

8. Хотели бы Вы научиться создавать виртуальных помощников?

1. Да.
2. Нет.

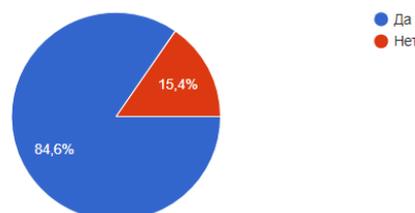


Рис. 7. Результаты ответов на вопрос о желании обучиться созданию чат-ботов.

Анализ ответов на вопросы анкеты и последующей беседы с испытуемыми позволил сделать следующие выводы.

- Все респонденты когда-либо применяли виртуальные помощники.

- Большинство опрошенных (84,7%, рисунок 1) не только встречали чат-боты, но и использовали их для решения бытовых проблем. В ходе беседы одной из наиболее часто используемых областей для применения обучающимися виртуального помощника были названы проблемы с мобильными операторами. При этом эффективность решения проблемы с помощью виртуального собеседника отметили большинство респондентов (рисунок 4).

- По результатам опроса (рисунок 2) наиболее популярными для опубликования чат-ботов являются социальные сети (64,5%) и мессенджеры (69,2%). На наш взгляд, это объясняется тем, что обучающиеся встречали виртуальных помощников наиболее часто именно в них.

- Несмотря на очевидный интерес опрашиваемых к теме разработки и использования чат-ботов респонденты проявили консерватизм в вопросе выбора собеседника при решении вопросов и предпочли общение с человеком (рисунок 5).

• Прямые вопросы о востребованности знаний, умений и навыков по созданию чат-ботов получили в большинстве положительные ответы (рисунки 6, 7). Результаты беседы показали желание обучающихся послушать элективный курс «Разработка виртуальных помощников».

### Литература

1. Киселева О. М., Солдатенкова Я. Г. Проектирование образовательных информационных систем // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи - НТТДМ 2021: Сборник материалов V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Смоленск, 21 мая 2021 года. Том Вып. 5. – Киров: Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2021. – С. 93-98.

2. Тимофеева Н.М., Киселева О.М. О применении программных средств в процессе обучения // Системы компьютерной математики и их приложения. 2005. С. 233.

3. Быков А. А., Киселева О. М. Применение мессенджеров в образовательном процессе // Современные наукоемкие технологии. – 2022. – № 5-1. – С. 127-131.

4. Быков А. А., Тимофеева Н. М. Особенности формирования информационной компетентности студентов строительных специальностей на базе подготовки в классическом университете // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 5-2. – С. 341-344.

5. Быков А. А., Киселева О. М. Особенности цифровизации образовательного процесса // Проблемы и тенденции развития социокультурного пространства России: история и современность: Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции, Брянск, 13–14 мая 2022 года / Под редакцией Т.И. Рябовой. – Брянск: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Брянский государственный инженерно-технологический университет", 2022. – С. 168-172.

6. Тимофеева, Н. М. Оценка качества электронного обучения и возможности его повышения // Современные проблемы науки и образования. – 2022. – № 4. – С. 6.

7. Быков А. А., Киселева О. М. Исследование готовности к применению виртуальных помощников в образовательном процессе // Современные наукоемкие технологии. – 2022. – № 3. – С. 110-114.

8. Козлов С. В., Резванцева А. А. Чат-боты как одна из тенденций развития современного образования // Международный журнал экспериментального образования. – 2022. – № 5. – С. 44-49.

**L.M. Voinskaya, O.M. Kiseleva**  
Smolensk State University

### ASSESSMENT OF THE DEMAND FOR AN ELECTIVE COURSE ON CREATING VIRTUAL ASSISTANTS

**Keywords:** *virtual assistant, information and communication technologies, messengers, elective course.*

**Abstract.** *Elective courses are an opportunity to introduce students to the creation of the most relevant online applications. Because modern software products, including virtual assistants, designed for gadgets are in demand in all spheres of human activity. This article presents the results of an ascertaining experiment to assess the relevance of an elective course on creating virtual assistants.*

**А.В. Елисеенков, С.А. Гомонов**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 519.832.3

## **ПРИМЕНЕНИЕ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ ПРИ РАЗРЕШЕНИИ КОНФЛИКТОВ СОЦИАЛЬНЫХ ГРУПП**

Ключевые слова: *теория игр, смешанные стратегии, компромисс, сотрудничество.*

*В работе предполагается описание возможности применения смешанных стратегий при разрешении конфликтов внутри социальных групп.*

Конфликты внутри социальных групп (команда, коллектив, бригада, звено, отделение, группа и т.д) – обыденное явление, связанное с объективным фактом: в состав социальной группы входят люди с потенциально противоположными взглядами на отношение к жизни, на политические взгляды, на организацию рабочего процесса и многое другое.

Однако для эффективной работы социальной группы необходимо культивировать и поддерживать такие взаимоотношения между ее участниками, чтобы удавалось избегать внутренних разладов, прямо влияющих на результативность работы и, соответственно, на качество продукта.

В основе разрешения большинства конфликтных ситуаций лежат следующие методы:

1. Сотрудничество – тип взаимоотношений людей между собой в процессе деятельности, характеризующийся согласованностью, слаженностью мнений и действий.

2. Компромисс – тип взаимоотношений людей, в основе которых заложены взаимные уступки во взглядах ради общей выгоды.

3. Кооперация – одна из основных форм организации межличностного взаимодействия, характеризующаяся объединением

усилий участников для достижения совместной цели при одновременном разделении между ними функций и/или ролей.

4. Конфронтация — тип взаимоотношений, при котором одной из сторон применяется сила (власть) для принуждения противоположной стороны или давления на неё.

Применение подобных методов разрешения конфликтов на примере игр (в терминах теории игр) были подробно отражены в [1].

Как правило, внутри социальной группы можно выделить следующие типы конфликтов (по отношению к субъекту) с возможными способами их разрешения:

- **Внутриличностный конфликт**

Внутриличностные конфликты возникают у тех сотрудников (работников), чья трудовая деятельность либо обременена чрезмерной нагрузкой, которая не соответствует уровню подготовки сотрудника (работника), или стрессом, который вызван переработкой, либо сотрудник (работник) занят выполнением той работы, которая не вполне соответствует уровню его текущей квалификации.

Например, если деятельный педагог, пользующийся огромной популярностью у учеников за способность хорошо донести материал и понимание их способностей и обучаемости, вынужден тратить существенную часть своего трудового дня на выполнение бюрократической составляющей, нежели на работу с учениками.

Опытный руководитель организации постарается перераспределить работу между своими сотрудниками (работниками) в соответствии с их уровнем квалификации и побеседовать с ними о текущей ситуации, в связи с которой им приходится выполнять ту работу, которая не соответствует их знаниям и умениям. Также хорошим вариантом будет задействование нескольких сотрудников с периодической сменой их деятельности, чтобы их усталость не накапливалась так чрезмерно быстро от однообразия работы, а уровень работоспособности сохранился на оптимальном уровне.

- **Межличностный конфликт**

Этот тип конфликта, как правило, возникает между двумя членами коллектива. Причины могут быть следующими: разные взгляды на решение определенной задачи или разрешение проблемной ситуации в проекте; противоречия во взглядах на ряд вопросов (бытовых, социальных, экономических, политических, духовных, морально-нравственных и т.д.); неприязнь из-за неразрешенных в прошлом проблем.

Данный тип конфликта крайне сложен для разрешения, т.к. руководителю социальной группы необходимо лично ознакомиться с его причинами, и оценить возможную правоту или неправоту сторон.

При разрешении межличностных конфликтов в малых организациях необходимо заранее оценить потенциал сотрудников (рабочих) для того, чтобы при постановке вопроса «кто должен остаться в организации» суметь быстро принять решение. В больших организациях есть возможность просто перевести наиболее конфликтного сотрудника (работника) в другое подразделение.

Если же оба сотрудника важны для организации, то ответственный руководитель должен провести с ними воспитательную беседу о необходимости совместной работы для достижения высоких результатов. Если придется – руководитель обязан «надавить» авторитетом на наиболее конфликтного подчиненного. Стоит напомнить, что существует широко используемый психиатрами и священнослужителями метод трансфера, позволяющий завоевать доверие собеседника и управлять его поведением.

- Конфликт личности и группы

Нечастый тип конфликтной ситуации, связанный с неприятием внутри социальной группы либо конкретно человека, либо его точки зрения на реализацию и/или детали объекта.

Коллектив может ополчиться на человека по ряду причин: нечистоплотность и неопрятность человека, личностные связи с руководством (они, как правило, установлены и используются не вполне правильно с морально-нравственной точки зрения, по крайней мере, так считает коллектив), недобросовестность и конфликтность человека и прочие.

Решение конфликта в данном случае схоже с предыдущим, однако переубедить целый коллектив изменить отношение к сотруднику, неприятному для них, практически невыполнимая задача. Наиболее простым способом будет указать сотруднику на причины неприязни со стороны остальных членов группы и предложить исправить ситуацию при возможности. Если внутри коллектива нет полноценного единства, а есть несколько так называемых «склочников», то ситуация перекалифируется в межличностный конфликт и пути его устранения: компромисс или увольнения менее полезного.

Существует еще одна весьма распространенная конфликтная ситуация личности и коллектива – это непризнание новичка членами команды (коллектива), то есть проблема освоения в непривычном окружении. В таком положении также оказывается ученик, которого переводят из одной школы в другую, где ребенок потенциально не имеет знакомых и друзей, которые помогут ему в адаптации.

Опытный руководитель в такой непростой ситуации может дать подчиненному новичку (или учитель новому ученику) следующие советы:

- 1) Абстрагироваться от внутриколлективных распрей.

2) Не стесняться задавать вопросы (о работе, о быте, о местных кафе, о предпочтениях в еде и т.д.).

3) Очень важно мудро (без крайностей) рассказать о себе.

4) Подчеркни свое дружелюбие, но без заискивания, будьте со всеми на равных.

5) Повремени с предложениями и нововведениями (особенно, если ваша роль в коллективе не руководящая), выскочек никто не любит.

- Межгрупповой конфликт

Наиболее трудноразрешимый тип конфликтов, который возникает внутри крупной организации между мелкими подразделениями.

Причины конфликта могут быть следующими: разница в оценке стоимости труда и нагрузки на отделы; презрительное отношение разных отделов, вызванное спецификой работы (например, бухгалтерия и ИТР, инженеры и архитекторы).

Разрешение данного конфликта возможно с использованием следующих механизмов:

1) Разъяснение требований к работе – четкое формирование того перечня обязанностей, полномочий и объема продукта, который должен быть произведен;

2) Механизм координации – учреждение иерархии внутри организации с механизмами подчинения и соподчинения, дабы иметь возможность обратиться к третьей стороне для разрешения противоречий;

3) Общеорганизационные цели – установление задач в рамках работы всех отделов с последовательным или параллельным принципом организации производственных потоков, чтобы была возможность в случае задержки одного потока переключить подразделения из следующего потока на смежные задачи;

4) Структура системы вознаграждения, стимулирующая взаимодействовать и кооперироваться нескольким отделам для достижения выгоды.

Данная классификация встречается во многих исследованиях конфликтологии, в том числе и в [2]. Разумеется, существуют и другие классификации, однако выбор данной наиболее релевантный, т.к. в этой классификации конфликты рассматриваются с точки зрения воздействия на субъект отношения.

Существует такое мнение, что в любом конфликте виноваты обе стороны. Отчасти с этим можно согласиться, когда речь идет о тех конфликтах, предмет которых имеет объективную сторону, а не только субъективное неприятие одной стороны другой.

Любые конфликты в рабочем коллективе, так или иначе, должны быть устранены, чтобы организация продолжала полноценно функционировать. Этот принцип должен быть понятен руководителю,

так как не все спорные ситуации получится игнорировать. В русском языке есть хорошая пословица: «Худой мир лучше доброй ссоры».

### Литература

1. Мир математики: в 40 т. Т. 8: Хорди Деулофеу. Дилемма заключенного и доминантные стратегии. Теория игр. / Пер. с испр. – М.: Де Агостини, 2014. – 144 с.
2. Гришина Н.В. Психология конфликта : учебное пособие / Н.В. Гришина. – 3-е изд. – Санкт-Петербург : Питер, 2015. – 576 с. (Мастера психологии). – ISBN 978-5-496-01114-3.

**A.V. Eliseenkov, S.A. Gomonov**  
*Smolensk State University*

### THE USE OF MIXED STRATEGIES IN RESOLVING CONFLICTS OF SOCIAL GROUPS

**Keywords:** *game theory, mixed strategies, compromise, cooperation.*

**Abstract.** *The paper assumes a description of the possibility of using mixed strategies in resolving conflicts within social groups.*

**В.В. Казанцев, С.В. Козлов**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.94:372.8

### ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ В ПРОГРАММНОЙ ОБОЛОЧКЕ «ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА КОНТРОЛЯ УЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ОБУЧЕНИЯ»

Ключевые слова: *информационная система, педагогический работник, образовательный процесс, оптимизация, анализ, организация данных, разработка.*

*В статье обсуждаются вопросы применения программных средств автоматизации образовательного процесса. Описывается функционал программного приложения «Информационная система контроля учета параметров обучения». Рассматриваются особенности использования ее преподавателем при изучении характеристик учащихся, работе с данными об учебном процессе и анализе количественных показателей обучения.*

Ещё буквально 10 лет назад мы могли наблюдать и в школах, и в высших учебных заведениях бумажные носители учёта параметров

обучения. Это и журнал успеваемости с оценками и посещёнными занятиями, и отдельные журналы с характеристиками обучающихся, и личные дела всех участников образовательной системы, в которой находились как преподавательский состав, администрация, так и обучающиеся. Каждый раз при просмотре комментариев администрации или других преподавателей, анализе поведения обучающихся и причинах такого поведения, создании в некотором роде картины обучающегося и его успеваемости при глубоком методическом анализе для разработки материалов для персонализированного обучения (а также выявления индивидуальных потребностей и предпочтений обучающихся в контексте образовательного процесса) требовалось рассмотреть обширный объём различных документов. Надо было изучить содержание и актуальность существующих документов, обращаться к участникам педагогического коллектива напрямую для получения дополнительной информации о текущем состоянии определённых параметров обучения обучающихся. Такое исследование в свою очередь требовало тщательного анализа и интерпретации полученных данных, что занимало существенное время, являющееся одним из главных ресурсов для человека и человечества в целом, особенно, когда его можно перераспределить более грамотно на более важные дела при наличии возможности.

На данный момент, в 2024 году, мы можем видеть, что большинство организаций, в том числе бюджетные образовательные организации все больше внедряют в свою систему технологические инструменты автоматизированной работы, которые открывают возможности вести документооборот в электронном виде [1, 2]. Это дает толчок развитию цифровых инструментов и автоматизированных информационных систем, которые в процессе своего развития уже успешно интегрируются образовательными организациями [3, 4].

В настоящее время мы можем наблюдать ярко выраженную тенденцию к интеграции и разработке информационных систем, что особенно заметно по образовательным учреждениям [5, 6]. Информационные системы внедряются с целью реализовать эффективный сбор, анализ необходимых параметров обучения, применение этой информации для оптимизации процесса обучения и в целом рабочего процесса педагогического персонала и администрации. За счёт такой оптимизации организации получают повышение качества обучения, улучшение взаимодействия между преподавателями и обучающимися, преподавательским составом и администрацией, а также, если это касается, например, школы, то и взаимодействия с родителями обучающихся [7]. Исходя из выявленных проблем со сбором и обработкой данных, с анализом информации, коммуникационных трудностях рабочего персонала было принято решение

разработать информационную систему с исчерпывающим функционалом, решающую насущные проблемы рабочего процесса, которую мы рассмотрим далее, а также опишем её преимущества и особенности работы в её программной среде для преподавателей.

Информационная система представляет собой инструмент как для администрации, так и для обучающихся и педагогических работников. Кратко рассмотрим функционал разработанной нами информационной системы. В разработанной нами среде информационной системы представлены 3 роли: обучающийся, преподаватель, администратор (в том числе имеется в виду руководство организации). Все роли занесены в базу данных и могут быть изменены как в самой в базе данных, так и в разработанной информационной системе.

В статье будем рассматриваем возможности каждой роли снизу-вверх, так как каждая последующая роль, если нет исключений, включает функционал предыдущей роли. Роль «обучающегося» предоставляет возможности пользователю, что наделён ей, просматривать: расписание на текущий день, общее расписание, журнал оценок и пропусков по своему профилю, общий список преподавателей. Это базовая по функционалу роль, её получает любой, кто зарегистрировался самостоятельно или был занесён в систему с таким статусом. Пользователь с ролью «преподаватель» может просматривать оценки и пропуски разных учеников, итоговые отчёты. Только такому пользователю доступна возможность редактировать и добавлять оценки и пропуски у обучающихся. Он может реализовывать такую возможность только по своему предмету, также, как и писать комментарии для обучающегося. Пользователям, обладающим одной из первых двух ролей, доступна возможность отправлять электронные заявки в техническую поддержку через соответствующий пункт меню. Администратор не может создавать эти заявки, так как они ему и адресованы, ему соответственно доступно чтение всех таких заявок. Пользователь с ролью «Администратор» может просматривать все таблицы из подключённой к информационной системе базе данных, а также изменять данные в них, добавлять и удалять. Также пользователь, которому присвоена такая роль, может через вкладку «Управление учебными данными» централизованно добавлять, изменять, удалять данные о сотрудниках и обучающихся в разработанной программной среде. Это осуществляется при редактировании отдельных форм, содержащих анкеты о пользователях информационной системы.

Остановимся подробнее на роли «Преподаватель» и рассмотрим подробнее интерфейс программы и особенности работы в программе для этой роли. Окно (Рис. 1), которое увидит пользователь, обладающий такой ролью, после авторизации, будет следующим.

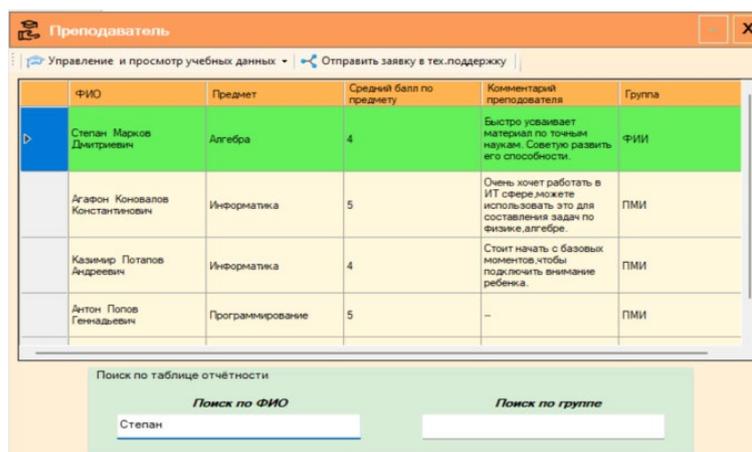


Рис. 1. Интерфейс формы пользователя с правами «Преподаватель»

Основной набор действий в данном случае находится во вкладке «Управление и просмотр учебных данных». На рисунке также отражено содержимое пункта «Отчёты по обучающимся». Данный отчёт представляет собой информацию из нескольких таблиц базы данных, полученную через SQL-запрос. Он предоставляет преподавателю следующую информацию: ФИО ученика, предмет, по которому ставится оценка, средний балл за данный период обучения по предмету, группа обучающегося. Кроме того, также можно посмотреть общий средний балл по всем предметам. По элементу `customDataGridView` можно осуществлять поиск по ФИО или группе для более быстрого нахождения подготовленной информации. Через данную вкладку можно посмотреть расписание на текущий день или на все дни недели. На подчиненной форме с расписанием осуществлён поиск в формируемой через SQL-запрос таблице по группам (Рис. 2).

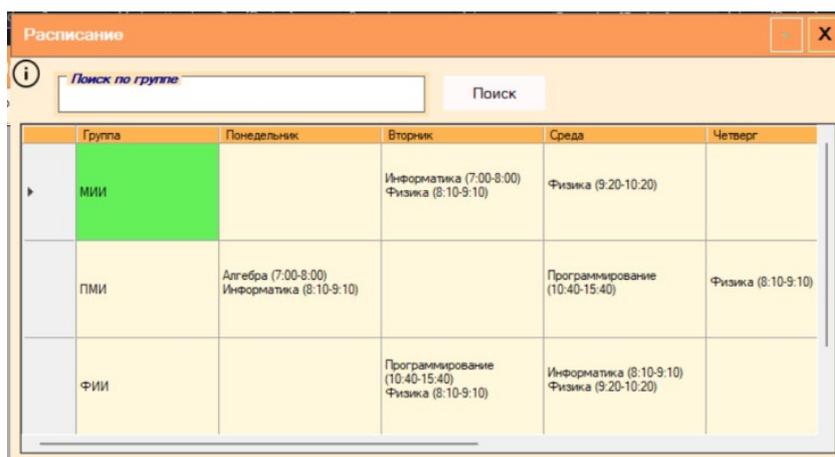
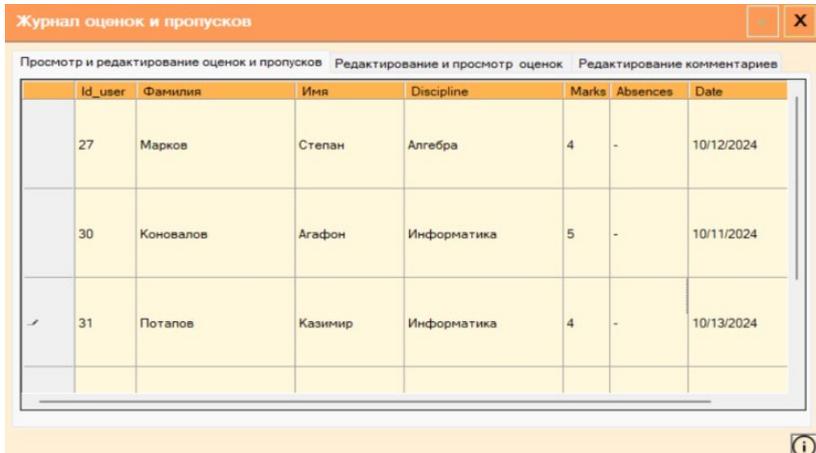


Рис. 2. Интерфейс формы общего расписания

В сгенерированной по запросу таблице будет отображено расписание занятий по дням недели для выбранных групп. В соответствующих ячейках для дней недели будет формироваться вывод

предметов и времени, отведённого на них по документам, которые были занесены в исходные таблицы базы данных информационной системы.

При открытии вкладки «Журнал оценок и пропусков» пользователя, с ролью «Преподаватель», будет выведена следующая форма (Рис. 3):



Id_user	Фамилия	Имя	Discipline	Marks	Absences	Date
27	Марков	Степан	Алгебра	4	-	10/12/2024
30	Коновалов	Агафон	Информатика	5	-	10/11/2024
31	Потапов	Казимир	Информатика	4	-	10/13/2024

Рис. 3. Интерфейс формы «Журнал оценок и пропусков»

В ее первой вкладке пользователь сможет просмотреть сформированную SQL-запросом таблицу, в которой находятся пункты: ID-пользователя, фамилия и имя, дисциплина, оценка, пропуск на занятии, дата выставления оценки или пропуска. В следующей за ней второй вкладке находятся текстовые поля необходимые для заполнения при внесении в базу данных информации об определённых пропусках или отметках. Требуемыми данными для заполнения являются: ID-пользователя, фамилия пользователя, название дисциплины, отметка или пропуск, дата. Дата необходима для редактирования, при этом при заполнении остальной информации в таблицу базы данных автоматически вносится текущая дата. На форме также располагаются две кнопки, через которые соответственно можно или добавить, или отредактировать информацию. Добавлять и изменять данные каждый преподаватель может только по своей дисциплине. На третьей вкладке таблицы выводятся: ID-комментария, ФИО студента, предмет, комментарий, ФИО преподавателя, оставившего комментарий, а также колонки удалить, обновить и внести. В этих колонках расположен соответствующий названию колонок текст в формате linkLabel, по нажатию на который будет выполнено действие, обозначенное текстом. В данной вкладке можно изменить комментарий и предмет, к которому привязана информация по обучающемуся. Как и в предыдущих пунктах, такое изменение возможно каждым преподавателем только по своему набору предметов.

Использование данных с этих форм позволяет с помощью SQL-запросов, оформленных в виде отдельных команд, закрепленных на вкладках программы или за кнопками информационной системы,

производить автоматизацию рутинных задач, таких как учёт оценок, их анализ, вычисление определённых коэффициентов, создание отчётов. В первую очередь это открывает упрощённый доступ к данным и информации. Во-вторых, это дает возможность организовать информацию в нужном виде, что существенно экономит время преподавателя, облегчает его работу и повышает эффективность процесса обучения. В-третьих, предоставляет программный инструмент поддержки индивидуального подхода в обучении. Кроме того, приложение помогает планировать учебный процесс, оно включает автоматизированное составление расписания занятий. Таким образом, информационная система предоставляет пользователям с ролью «Преподаватель», таким как администрация и педагогические работники, различные функциональные возможности автоматизации учебного процесса.

### **Литература**

1. Максимова Н. А. Моделирование информационно-образовательной среды учебного заведения // Концепт. – 2016. № 5. – С. 195-200.
2. Шкуратова А. А., Козлов С. В. Использование программных приложений как средств мониторинга образовательной среды // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сб. материалов IV Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием. – Киров, 2020. – С. 123-128.
3. Киселева О. М. Программные средства поддержки удаленного обучения // Вызовы цифровой экономики: тренды развития в условиях последствий пандемии COVID-19: сб. ст. IV Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной к Году науки и технологий в России. – Брянск, 2021. – С. 143-146.
4. Козлов С.В., Шкуратова А.А. Особенности мониторинга образовательного пространства с использованием новых информационных технологий // Системы компьютерной математики и их приложения. – 2020. – № 21. – С. 393-399.
5. Лебедева Е. А., Козлов С. В. Содержание и особенности разработки учебно-методического проекта по математике "Системы линейных уравнений" в среде программирования С# // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сб. материалов III Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием. – 2019. – С. 161-166.
6. Пешко Ю. С., Киселева О. М. Содержание и особенности демонстрационно-контролирующей программы "Треугольники" // Системы компьютерной математики и их приложения. – 2020. № 21. – С. 399-404.
7. Тимофеева Н. М. Разработка сетевых проектов с использованием возможностей технологии Thinglink for education // Системы компьютерной математики и их приложения. – 2016. – № 17. – С. 256-257.

**V.V. Kazantsev, S.V. Kozlov**  
Smolensk State University

### **FEATURES OF THE TEACHER'S WORK IN THE SOFTWARE SHELL «INFORMATION SYSTEM FOR MONITORING THE RECORDING OF LEARNING PARAMETERS»**

**Keywords:** *information system, teaching staff, educational process, optimization, analysis, data organization, development.*

**Abstract.** *The article discusses the use of software tools for automating the educational process. The functionality of the software application "Information system for monitoring the accounting of training parameters" is described. The features of its use by the teacher in studying the characteristics of students, working with data on the educational process and analyzing the quantitative indicators of training are considered.*

**А.В. Кованцев, С.А. Гомонов**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.032.26

## **О НЕКОТОРЫХ ПЕРСПЕКТИВАХ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЙРОСЕТЕЙ В АРХЕОЛОГИИ**

*Ключевые слова: нейросети, машинное обучение, археология, экспертные системы, задача распознавания, задача классификации.*

*В данной работе рассматриваются примеры эффективного применения нейросетей в исследованиях как зарубежных, так и отечественных археологов. Представленные направления могут быть дополнены или скорректированы в будущем, но их перспективность очевидна ввиду прямого соответствия между задачами, стоящими перед археологом, и их решениями, основанными на применении технологий нейросетей.*

**1. Воссоздание облика, близкого к оригиналу.** В процессе раскопок накапливается масса артефактов, сохранившихся лишь частично, например: фрагменты керамических сосудов, стеклянной посуды, фресок. Первоначально они подвергаются чистке и статистической обработке, затем предпринимается попытка реконструкции цельного предмета из имеющегося массива фрагментов. Массив делится на группы объектов со схожими признаками (цвет, форма и тд.), затем начинается поиск соответствий между отдельными фрагментами одной группы, далее поиск распространяется уже между близкими группами и, наконец, фрагменты каждой из групп поочередно сверяются с фрагментами из всех остальных групп независимо от признаков. Обычно эта процедура производится несколькими специалистами вручную, что требует много времени, сил, а самое главное, опыта. Сложность заключается ещё и в том, что фрагменты

одного предмета могут иметь общее место слома, но при этом быть совершенно разных форм и цветов, а сама граница разлома может незначительно отличаться из-за мелких повреждений, ввиду чего полностью совместить их встык не всегда удастся.

С помощью нейросетей эту процедуру можно оптимизировать. Ярким примером является алгоритм, соединяющий фрагменты фресок, разработанный в Израиле и опубликованный в конце 2018 года [1]. Алгоритм анализирует массив фрагментов, определяет их границы, сверяет границы фрагментов между собой по группе признаков и подбирает наиболее схожие. Так из 26 фрагментов фрески святых Космы и Дамиана удалось получить следующее изображение (рис. 1):



Рис. 1. Фреска святых Космы и Дамиана, Сербия [1].

В России есть опыт применения подобных технологий. В 2023 году сотрудники ИКИ РАН и Кирилло-Белозерского музея-заповедника попытались восстановить фрески Ферапонтова монастыря с помощью нейросети Stable Diffusion. Обучающую выборку представляли фото, полученные в ходе мультиспектральной съёмки росписей собора в 2016 году. В результате получены следующие изображения (рис. 2):



Рис. 2. «Спас Вседержитель» до/после обработки нейросетью. Кадры из видео. (URL: [https://iki.cosmos.ru/sites/default/files/media/video/examples\\_restoration\\_7b-web.mp4](https://iki.cosmos.ru/sites/default/files/media/video/examples_restoration_7b-web.mp4)).

При достаточном объеме и качестве обучающей выборки такого рода алгоритмы могут вполне адекватно собирать объекты из их фрагментов и даже восстанавливать недостающие участки. Конечно, подобные процедуры никогда не вернут недостающие оригинальные

фрагменты артефакта, но (благодаря правильно составленной обучающей выборке) позволят заполнить пробелы чем-то очень похожим на недостающие детали. Это может помочь при обработке накопленного археологического материала или составления плана реставрации. Развитие подобных алгоритмов крайне перспективно для исследований, связанных с археологическим изучением памятников древнерусского зодчества, так как вероятность обнаружения фрагментов фресок в их слоях крайне велика.

**2. Экспертные системы.** В процессе раскопок встречаются вещи, первоначально не поддающихся определению. Для опытного специалиста атрибуция не является невыполнимой задачей, но потребует изучения колоссального объема научной литературы, консультаций с компетентными коллегами и грамотного сопоставления собственных гипотез с фактами.

Примером такой работы является атрибуция крепежных петель от колчана, найденных при раскопках одного из курганов Гнёздовского археологического комплекса. В момент обнаружения назначение артефакта оставалось не установленным, лишь после находки в Венгрии хорошо сохранившихся остатков колчана со схожими петлями аналогия стала очевидной [2]. Атрибуция комплекса артефактов из единого контекста вносит серьезный вклад в общее представление о жизни людей и о событиях, происходивших на территории исследуемого памятника. Для памятников дописьменного периода или памятников без упоминаний в синхронных письменных источниках это особенно актуально. Для нейросетей это классическая задача распознавания, которую в том или ином виде рассматривают как иностранные, так и отечественные специалисты.

Среди иностранных разработок подобного направления выделяется проект ArchAIDE – это мультиплатформенное приложение, позволяющее распознавать фрагменты керамических сосудов с помощью нейросети в полевых условиях. В качестве обучающей выборки использованы оцифрованные европейские археологические каталоги, которые постоянно пополняются новыми данными заинтересованных исследовательских организаций. Приложение распознает различные виды керамики: с орнаментом, без орнамента, с граффити, а значит, это могут быть римские амфоры из Италии, Южной Галлии, Испании, или майолика из Монтелуппо, Барселоны и Валенсии. Приложение уже доступно для скачивания, хотя сама разработка ещё не закончена. Несмотря на удобство и широкий функционал, в России этот проект пока что почти бесполезен, так как его обучающая выборка сформирована на европейских керамических коллекциях, отличных от тех, что хранятся в фондах российских музеев.

Среди отечественных разработок можно отметить совместный проект ИИМК РАН и ЕУСПБ [3] — база данных археологических находок с интегрированной нейросетью, обученной поиску схожих предметов по фотографиям и/или описи археологических находок. Обучающая выборка состоит из массива фотографий артефактов и массива текстовых описей, связанных друг с другом. Помимо фотографий и текста в базу включены сведения о месте обнаружения артефакта с привязкой в геоинформационной системе. Это позволяет пользователю не только искать аналогии среди артефактов, но и учитывать их расположение на карте. Одна из распространенных ошибок при подборе аналогий — это ошибочный подбор визуально схожих друг с другом предметов, но имеющих критически разные размеры в реальности. На текущий момент в базу интегрированы данные лишь некоторых регионов, а сам проект находится в разработке в закрытом доступе.

Создание подобных экспертных систем для каждого региона нашей страны и их последующее объединение в глобальный ресурс может оказаться крайне полезным видом коопераций исследователей, представляющим возможность рассматривать весь накопленный в музеях археологический материал панорамно или наоборот более локально. Такой подход позволит по-новому взглянуть на все социально-экономические процессы древности, уточнить хронологические интервалы отдельных памятников археологии и ввести новые данные в научный оборот.

### Литература

1. Derech N., Tal A., Shimshoni I. Solving archaeological puzzles // Pattern Recognition. 2021. Vol. 119, No. 108065. P 1.
2. Медведев А.Ф. Ручное метательное оружие (Лук и стрелы, самострел). VIII-XIV вв. М.: Наука, 1966. С. 21.
3. Археология и геоинформатика. Шестая международная конференция. Тезисы докладов / Отв. ред. Д.С. Коробов. М.: ИА РАН, 2023. С. 17.

**A.V. Kovantsev, S.A. Gomonov**  
Smolensk State University

### ABOUT APPLICATION PROSPECTS FOR THE USE OF NEURAL NETWORKS IN ARCHAEOLOGY

**Keywords:** *neural networks, machine learning, archaeology, expert systems, recognition task, classification task.*

**Abstract.** *This paper examines examples of successful use of neural networks in archaeological research by both domestic and foreign specialists.*

*The presented directions may be supplemented or adjusted in the future, but in general, their prospects are obvious due to the direct correspondence between the tasks facing the archaeologist and their solutions, based on the use of neural network technologies.*

**С.В. Козлов**

*Смоленский государственный университет*

**А.А. Быков**

*Филиал Национального исследовательского университета «МЭИ» в г.*

*Смоленске*

УДК 004.421:372.8

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ФОРМАЛЬНОГО ИСПОЛНИТЕЛЯ НА ЯЗЫКЕ PYTHON**

Ключевые слова: *компьютерное ЕГЭ, алгоритм, формальный исполнитель, программирование, язык Python, функция, строковый тип данных, троичная запись числа.*

*В статье обсуждаются вопросы применения пользовательских функций при выполнении алгоритмов формальным исполнителем. В качестве примера рассмотрены особенности использования функции перевода в троичную систему счисления при решении задания анализа алгоритма для формального исполнителя компьютерного ЕГЭ по информатике. Особое внимание уделено инструментальным возможностям языка программирования Python при обработке числовых и строковых выражений.*

Формирование навыков алгоритмической деятельности является одной из основополагающих задач школьного курса информатики [1, 2]. В связи с этим для проверки знаний школьников в систему заданий ЕГЭ по информатике включено задание на выполнение алгоритма формальным исполнителем. Задание включает описание системы его команд и программу, которую он должен выполнить. Ответом на вопрос задания является результат работы программы для некоторого значения из анализируемого диапазона числовых данных.

Для решения данной задачи в таких простейших случаях школьнику необходимо записать алгоритм в среде выбранного языка программирования, интерпретировав инструкции в команды инструментального приложения. После чего следует запустить

программу на исполнение и выбрать правильный ответ из полученного набора выходных значений [3]. Отметим, что при записи алгоритма в выбранной среде программирования, например, Python, Pascal, C++, от него не требуется демонстрировать дополнительные знания структур данных и навыки программной реализации классических алгоритмов работы с числовыми и строковыми переменными. Школьник должен знать базовые алгоритмические конструкции, такие как следование, ветвление и цикл, а также уметь оперировать встроенными функциями инструментальной среды [4].

В тоже время в последнее время в ЕГЭ по информатике в компьютерной форме появился ряд заданий, которые в качестве одного из действий содержат фундаментальные преобразования числовых и строковых выражений [5]. При этом, если большинство из них может быть реализовано в компьютерном приложении встроенными инструкциями системы программирования, то одно требует оптимизации программного кода. Для этого можно воспользоваться написанием пользовательских программных методов, которые позволяют реализовать функции и процедуры, повторяющиеся в алгоритмах для разных обрабатываемых данных.

Рассмотрим, как можно воспользоваться инструментальным аппаратом языка программирования Python [6, 7] для написания функций при решении задач составления алгоритмов для формального исполнителя. Приведем пример задания.

Формальный исполнитель алгоритма обрабатывает заданное натуральное число  $N$ . Он формирует по нему новое число  $R$  следующим образом.

1. Натуральное число  $N$  переводится в троичную запись.
2. К этой записи дописываются разряды по следующему правилу:
  - а) если число единиц в троичной записи числа  $N$  четное, то слева дописываются символы 10, а справа – 12;
  - б) если число единиц в троичной записи числа  $N$  нечетное, то его остаток от деления на 3 умножается на 4, переводится в троичную систему счисления и дописывается справа к числу, а слева дописывается символ 1.

Полученная таким образом запись является троичной записью искомого числа  $R$ . Укажите минимальное число  $N$ , после обработки исполнителем которого получается максимальное число, не превосходящее 97. В ответе запишите это число в десятичной системе.

Решение на языке программирования Python с использованием пользовательской функции для перевода может быть представлено следующим образом:

```
def f(n):  
    s = "
```

```

while n > 0:
    c = n % 3
    s = str(c) + s
    n = n // 3
return s
for n in range(1, 100):
    s = f(n)
    if s.count('1') % 2 == 0:
        s = '10' + s + '12'
    else:
        s = '1' + s + f((int(s) % 3) * 4)
    r = int(s, 3)
    if r <= 97:
        print(n, r)

```

Как видно из представленного способа решения в программном коде перевод числа в троичную систему счисления реализован с помощью пользовательской функции  $f(n)$ . Такой прием обусловлен двумя факторами. Во-первых, несмотря на наличие в языке программирования Python встроенных функций  $\text{bin}(n)$  и  $\text{int}(s, n)$ , которые служат для перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную и записи числа в системе счисления по основанию  $n$  в десятичную систему счисления соответственно, функция перевода в троичную систему счисления отсутствует. Во-вторых, применение пользовательской функции  $f(n)$  вытекает из логики представленного алгоритма для формального исполнителя, в котором перевод двух разных числовых значений в троичную систему счисления осуществляется дважды. Это позволяет оптимизировать программный код с помощью его сокращения. У школьника нет необходимости дважды писать одинаковые части, которые отличаются только обрабатываемым числовым значением. В свою очередь это повышает читабельность программы и упрощает ее отладку.

Отметим, что написание программной реализации перевода числа из десятичной записи в указанную систему счисления, в данном случае в троичную, в виде собственной пользовательской функции не должно вызывать у ученика дополнительных затруднений. Этот факт вытекает из того, что данный алгоритм является классическим алгоритмом и относится к базовым при изучении профильного курса школьной информатики [8]. Учащиеся профильной школы изучают его сначала в виде отдельной программы, а затем пробуют с помощью представления его виде функции встраивать составной частью в программный код других более сложных алгоритмов. Аналогичным образом при обучении учеников профильной информатике поступают с определением количества делителей натурального числа  $n$ , с вычислением наибольшего общего делителя двух заданных натуральных чисел  $x$  и  $y$ , а также с поиском наибольшей и наименьшей цифр в десятичной записи

натурального числа  $n$ . Школьники при изучении темы «Функции» учатся записывать в виде них изученные ранее классические алгоритмы обработки числовых и строковых данных.

Также отметим, что в приведенном решении задания на экран выводится набор значений входной переменной  $n$  и соответствующие ему итоговые значения переменной  $r$ . Это сделано для того, чтобы проанализировать полученный набор значений (7 16, 11 38, 13 40, 15 42, 19 46, 21 48), из которого видно, что максимальное число не превосходящее  $97 r = 48$  получается при  $n = 21$ .

Пример использования пользовательских функций языка программирования Python совместно со встроенными функциями инструментальной среды позволяет утверждать, что школьник, применяя их в таких задачах, демонстрирует более глубокое понимание предметной области информатики. Это позволяет ему не только правильно решать подобные задания, но и рационально подходить к записи программного кода, его последующей отладке и итоговому тестированию программного приложения. Таким образом, данный подход в профильной подготовке школьника по информатике закладывает прочные знания для его дальнейшего обучения в вузе [9, 10] и будущие основы его компетентной профессиональной деятельности [11, 12, 13].

### Литература

1. Козлов С. В., Быков А. А. О применении методов математического моделирования при обучении алгоритмизации в вузе // Современные проблемы науки и образования. 2021. № 3. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=30946> (дата обращения: 24.02.2023).
2. Касаткина М. Р., Редько Е. А. От написания алгоритмов к их анализу: развитие линии алгоритмизации в задачах ЕГЭ по информатике // ТОГУ-Старт: фундаментальные и прикладные исследования молодых. Материалы региональной научно-практической конференции. Хабаровск, 2023. С. 460-469.
3. Козлов С. В., Быков А. А. Решение задач составления алгоритма для формального исполнителя средствами языка Python // Системы компьютерной математики и их приложения. 2023. № 24. С. 395-399.
4. Суин И. А., Козлов С. В. Основные направления использования возможностей современных сред программирования в организации учебного процесса // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник научных трудов II Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. 2018. С. 115-120.
5. Гильдин А. Г., Зайдуллина С. Г., Ахтямов Н. Т. Методика выполнения заданий ЕГЭ по информатике на основе знаний об обработке строк на языке Python // Педагогический журнал Башкортостана. 2023. № 2 (100). С. 120-138.
6. Маркелов В. К., Завьялова О. А. Язык программирования Python как альтернативный инструмент для решения заданий ЕГЭ по информатике // Информатика в школе. 2023. № 2 (181). С. 63-72.

7. Цыбикова Т. С. Возможности языка Python при выполнении заданий ЕГЭ по информатике // Информационные системы и технологии в образовании, науке и бизнесе. Материалы всероссийской научно-практической конференции. Научный редактор А.А. Тонхонова. Улан-Удэ, 2022. С. 129-135.

8. Козлов С. В., Быков А. А. Вопросы обучения программированию в профильной школе // Актуальные проблемы теории и практики обучения физико-математическим и техническим дисциплинам в современном образовательном пространстве: сборник статей V Всероссийской (с международным участием) научно-практической конференции. Курск, 2021. С. 263-268.

9. Максимова Н. А. Возможности формирования компетенций XXI века при изучении дисциплины «Цифровые технологии в образовании» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2021. № 4. С. 88-100.

10. Козлов С. В., Быков А. А. Организация обучения в профильной школе в условиях цифровизации системы образования // Аксиологические проблемы педагогики. 2020. № 11. С. 102-110.

11. Козлов С. В. Цифровые трансформации системы школьного образования // Цифровой регион: опыт, компетенции, проекты. Сборник трудов IV Международной научно-практической конференции, приуроченной к Году науки и технологий в России. Брянск, 2021. С. 299-305.

12. Быков А. А., Киселева О. М. Особенности цифровизации образовательного процесса // Проблемы и тенденции развития социокультурного пространства России: история и современность. Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции. Под редакцией Т.И. Рябовой. Брянск, 2022. С. 168-172.

13. Быков А. А., Тимофеева Н. М. Особенности формирования информационной компетентности студентов строительных специальностей на базе подготовки в классическом университете // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 5-2. – С. 341-344.

**S.V. Kozlov**

Smolensk State University

**A.A. Bykov**

Branch of the National Research University «Moscow Power Engineering Institute» in Smolensk

## **USING FUNCTIONS IN DEVELOPING ALGORITHMS FOR A FORMAL PERFORMER IN PYTHON LANGUAGE**

**Keywords:** *computer exam, algorithm, formal performer, programming, Python language, function, string data type, ternary notation of number.*

**Abstract.** *The article discusses the use of user functions when executing algorithms by a formal executor. As an example, the peculiarities of using the function of translation into a ternary number system when deciding the task of analyzing an algorithm for a formal performer of a computer exam in computer science are considered. Particular attention is paid to the instrumental capabilities of the Python programming language when processing numeric and string expressions.*

**А.С. Кузнецова**

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,*

УДК 159.9:331.101.3

## **ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТАРОСТ АКАДЕМИЧЕСКИХ ГРУПП ВУЗОВ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ СОСТОЯНИИ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ**

*Ключевые слова: функциональное состояние, напряженные ситуации, стресс-факторы, стрессовые состояния, психологические ресурсы.*

*Исследование посвящено анализу признаков оптимального функционального состояния (ФС) как целевого ориентира для успешного проведения переговоров в представлениях студентов – старост академических групп вуза. Цель исследования – анализ представлений старост о признаках оптимального ФС в ситуациях проведения переговоров в учебной деятельности. В исследовании приняли участие 38 старост разных факультетов и профилей подготовки. Выявлены представления старост об основных признаках оптимального ФС и проведено сравнение полученных данных с представлениями опытных в проведении переговоров профессионалов. Выявлены специфические особенности образа оптимального целевого ФС старост, характерной особенностью которых является высокий уровень энергетической мобилизации ресурсов и возможность оперативного управления собственным поведением в сочетании с конструктивным и уважительным отношением к другим участникам переговоров.*

**Актуальность проблемы исследования.** Психологические исследования оптимальных функциональных состояний (ФС), соответствующих требованиям ситуации и выполняемой в данной ситуации задачи в последние годы формируют одно из наиболее актуальных и динамично развивающихся направлений исследований психологии напряженных ситуаций [1; 4]. К числу подобных ситуаций можно отнести переговоры, основная специфика которых заключается в необходимости прийти к единому решению при исходно различных представлениях сторон о желаемых результатах переговорного процесса.

Очевидно, что в учебной деятельности ситуации переговоров типичны для разных вариантов согласования общего решения между преподавателями и студентами. Старосты учебных групп как правило

выступают как представители одной из сторон - участников процесса согласований и переговоров.

Исследования оптимальных ФС связаны с ограничениями, вызванными: (1) сложностями в понимании подобных ФС самим человеком: такие состояния, как правило, не осознаются, и их признаки не рефлексированы; (2) недостатком надежных научных данных о специфике синдромов таких ФС; (3) недостатком методических средств для сбора данных о проявлениях позитивных ФС [4]. Вместе с тем, осознанное и целенаправленное формирование оптимального ФС основано на готовности человека так или иначе выстраивать его образ. Таким образом, ключевая проблема заключается в следующем: насколько хорошо человек способен идентифицировать адекватное переговорам целевое ФС и выделять его ключевые признаки?

**Цель исследования** – анализ представлений старост академических групп вуза о признаках оптимального ФС в ситуациях проведения переговоров.

**Организация исследования.** Исследование проведено на выборке старост академических групп разных факультетов вуза. Участники исследования (38 студентов 1-5 курсов) заполняли специально разработанную анкету, состоящую из перечня 37 признаков проявления оптимального для проведения успешных переговоров ФС [3]. Признаки оптимального ФС с принципами структурно-интегративного подхода к анализу ФС как целостной системы средств обеспечения деятельности, проявляющейся на (а) физиологическом, (б) психологическом и (в) поведенческом уровнях [2]. Признаки сгруппированы по 5 кластерам проявления ФС на данных уровнях, включая дифференциацию проявлений ФС на психологическом уровне по подгруппам когнитивных, эмоциональных и рефлексивных признаков.

Каждый из участников исследования проводил ранжирование признаков внутри каждого блока по степени убывания их значимости (минимальное ранговое значение у наиболее важного с точки зрения опрошенных признака). Перед проведением исследования были организованы и проведены ознакомительные лекционно-практические занятия по освоению тематики факторов развития учебного стресса и ФС при проведении переговоров и согласований в процессе учебной деятельности. Следует отметить, что в числе принявших участие в исследовании не было представителей психологических профилей подготовки, и, как следствие, общие знания и представления старост о психологических особенностях переговоров существенно не различались у представителей разных факультетов, и при ранжировании признаков ФС в целом старосты исходили из спонтанно сложившихся и неглубоких представлений о психологических особенностях переговоров.

**Результаты.** По итогам дифференциации стрессогенных ситуаций переговорного характера, в которые могут быть вовлечены старосты, было выделено 3 типа ситуаций коммуникационного взаимодействия с элементами напряженности, типичной для переговорного процесса: (1) с преподавателями и представителями учебной части и деканата; (2) с научным руководителем; (3) со студентами своей группы. Для эффективного достижения итогового результата переговоров, целевое ФС участников переговорного процесса должно соответствовать ситуативным требованиям и специфике содержания коммуникационного взаимодействия. Такое ФС обеспечивает оптимальную «цену» достижения результата и способствует сохранению ресурсов человека. Целенаправленное формирование целевых ФС основано на развернутом характере представлений человека о том, какие функциональные средства (физиологического, психофизиологического и психологического типа) должны быть актуализированы и использованы во время переговоров.

Анализ представлений старост об оптимальном для проведения переговоров целевом ФС, выполненный на основе ранжирования признаков данного ФС, позволил установить следующие факты о наиболее значимых признаках оптимального для проведения переговоров ФС:

1) на физиологическом уровне проявлений ФС наиболее важным старостам представляется ощущение бодрости (средний ранг наиболее важного признака – 2,2;  $\sigma=1,0$ );

2) на психологическом уровне проявлений в кластерах: (а) когнитивных признаков – возможности и готовность анализировать свои действия и поступки (4,4;  $\sigma=2,7$ ), (б) эмоциональных проявлений ФС - переживание уважения по отношению к людям (2,4;  $\sigma=1,4$ ); рефлексивных проявлений – предсказание изменений своего ФС (1,9;  $\sigma=0,7$ );

3) на поведенческом уровне – плавность и мягкость движений (2,5;  $\sigma=1,1$ ).

Результаты ранжирования показывают, что основными ориентирами для формирования оптимального ФС в успешных переговорах в представлениях старост являются: высокий уровень энергетической мобилизации ресурсов, возможность оперативного анализа изменений собственного поведения в сочетании с конструктивным и уважительным отношением к другим участникам переговорных ситуаций, эффективное управление двигательными реакциями с целью поиска наиболее оптимального соотношения расслабления/мобилизации в напряженной ситуации переговоров.

Интересно, что сравнение результатов представлений о ключевых признаках целевого ФС у старост академических групп вуза и у тех

профессионалов, чья работа связана с проведением переговоров (в основном, с заказчиками и контрагентами) дало возможность установить, что общим компонентом является только ощущение бодрости, которое профессионалы также выделяют в качестве основного признака физиологического обеспечения процесса переговоров [3]. Содержательный анализ показывает, что для старост в представления о целевом ФС главное – ориентация на понимание самого себя и задачи управления своим поведением и состоянием. Для профессионалов основным трендом становится более глубокий анализ внешних факторов (прежде всего, понимания целей другой стороны переговоров), а также гармоничное сочетание эмоционального равновесия и рационального анализа ситуации.

По итогам эмпирического исследования можно сформулировать следующие выводы:

1) В представлениях старост академических групп разных факультетов вуза ключевыми признаками целевого для переговорного процесса ФС являются высокий уровень энергетической мобилизации ресурсов и возможность оперативного управления собственным поведением в сочетании с конструктивным и уважительным отношением к другим участникам переговоров.

2) В сравнении с представлениям опытных в проведении переговоров профессионалов, представления старост специфичны ориентацией на понимание себя и отслеживание изменений своего ФС, в то время как представления профессионалов включают понимание целей других участников переговорного процесса как базы для формирования спокойного и рационального отношения к ситуации.

### **Литература**

1. Кузнецова А.С., Титова М.А., Злоказова Т.А. Психологическая саморегуляция функционального состояния и профессиональная успешность // Вестник Московского университета. Серия 14: Психология. 2019. № 1. С. 51-68.

2. Леонова А.Б. Структурно-интегративный подход к анализу функциональных состояний человека // Вестн. Моск. ун-та. Серия 14, Психология. 2007. № 1. С. 87-103.

3. Лобанова А.Н., Кузнецова А.С. Оптимальное функциональное состояние при переговорах: представления студентов-психологов // Психология состояний человека: актуальные теоретические и прикладные проблемы / Под ред. Б.С. Алишева, А.О. Прохорова, А.В. Чернова. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2018. С. 303-305.

4. Прохоров А.О., Чернов А.В. Рефлексивная регуляция психических состояний – М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2019.

**A.S. Kuznetsova**  
Lomonosov Moscow State University

## MENTAL REPRESENTATION OF OPTIMAL HUMAN FUNCTIONAL STATES IN HEADS OF ACADEMIC GROUPS OF UNIVERSITIES DURING EDUCATIONAL PROSESS

**Keywords:** *human functional state, tensed situations, stressors, stress, psychological resources.*

**Abstract.** *The study is focused on the analysis of human functional state' (HTS) manifestations as a target for successful negotiations in the perceptions of students - heads of academic groups of the university. The purpose of the study is to analyze the criteria as the signs of optimal HFS in situations of negotiations in educational activities. In the empirical study 38 heads of academic groups of the university from different faculties took part. The heads of academic groups' mental representations of the main features of an optimal HFS were identified and the obtained data were compared with mental representations of HFS in experienced in negotiations professionals. Specific features of the optimal HFS mental representations have been identified: high level of energetic mobilization of resources and the ability to quickly manage one's own behavior in combination with a constructive and respectful attitude towards other negotiators.*

**Г.Е. Сенькина, К.М. Расулов**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 378, 372.8, 37.02

## ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ СОВРЕМЕННЫХ И ТРАДИЦИОННЫХ ФОРМАТОВ ОБУЧЕНИЯ: РЕЗУЛЬТАТЫ ДИАГНОСТИКИ

**Ключевые слова:** *традиционное обучение, дистанционное обучение, смешанный формат обучения, предпочтения студентов, преимущества и недостатки обучения*

*Статья посвящена результатам исследования преимуществ и недостатков различных форматов обучения: дистанционного, традиционного, смешанного, проведенного на базе физико-математического факультета СмолГУ. Выявлены предпочтения студентов в данном аспекте, а именно: личностные, содержательные и методические, организационные преимущества дистанционного и традиционного форматов обучения. Намечены перспективы исследования и развития данных форматов, в том числе поставлена необходимость изучения механизмов тьюторского сопровождения в дистанционном обучении.*

На современном этапе развития цифровых технологий актуальным остается вопрос формата обучения: дистанционного (онлайн), традиционного (оффлайн), смешанного. Все больше образовательных организаций, включая СПО и ВПО, предпочитают теоретические занятия переводить в дистанционный формат, а практические, лабораторные и семинарские занятия, все виды практик проводить в очном традиционном формате. Как показывает практика, некоторые организации среднего и высшего профессионального образования в качестве формата изучения лекционного материала предлагают различные онлайн курсы, разработанные ведущими лекторами. Как правило, это текстовые материалы, видеолекции, в лучшем случае снабженные тестами по пройденному теоретическому материалу. При этом такой подход представлен как в очном, так и заочном обучении. Таким образом происходит размывание границ очного и заочного обучения, с заметным снижением качества освоения обучающимися теоретического материала. Встает вопрос: возможно ли качественное усвоение теоретического материала в условиях дистанционного обучения, каковы преимущества и недостатки различных форматов обучения?

С целью выявления проблем применения дистанционного формата обучения в современном учебном процессе нами было проведено исследование среди студентов физико-математического факультета Смоленского государственного университета. Факультет выбран не случайно, поскольку мы не ставили задачу выявления уровня технических и технологических компетенций студентов. У обучающихся физико-математического факультета университетов, как правило, не возникает проблем с использованием различных цифровых платформ и технологий. Поэтому акцент делается именно на целесообразности применения тех или иных форм обучения вне зависимости от уровня владения цифровыми технологиями.

Эмпирические данные исследования были получены путем анкетирования студентов и статистической обработки их ответов. Оценивался период обучения студентов за два семестра: весенний семестр проходил в полностью в дистанционном формате обучения; осенний семестр в формате смешанного обучения: две пары в день - оффлайн (как правило, практические занятия), остальные пары - онлайн.

Всего обработке подверглись анкеты 138 студентов.

Ответы на вопросы «Какой формат обучения для вас предпочтительнее: дистанционный, оффлайн или смешанный?» и «Если бы появилась возможность завтра полностью вернуться в традиционный формат обучения, вы бы: обрадовались, расстроились, вам все равно?» представлены на рисунках 1 и 2. 19,8% студентов из числа опрошенных

предпочитают традиционную форму обучения, с этим показателем сравним и процент студентов, которые при возвращении к традиционному формату испытали бы чувство радости - 18 %.



Рис. 1. Распределение ответов на вопрос «Какой формат обучения для вас предпочтительнее: дистанционный, оффлайн или смешанный?».

Из общего числа испытуемых 80,5% студентов в сумме предпочитают дистанционную (39,9%) либо смешанную форму обучения (46,6%). Эти показатели также не противоречат тому, что большинство студентов (57,2 %) расстроились бы при возвращении к классической форме обучения. Оставшимся же (23,2 %) студентам это безразлично.

Таким образом, видим, что большинство студентов не на стороне традиционного обучения.



Рис. 2. Распределение ответов на вопрос «Если бы появилась возможность завтра полностью вернуться в традиционный формат обучения, вы бы: обрадовались, расстроились, вам все равно?»

С помощью опроса мы также попытались выявить достоинства и недостатки традиционного и дистанционного форматов обучения, результаты которого представили в виде таблицы 1.

Таблица 1

*Недостатки и достоинства традиционного и дистанционного обучения в оценке студентов*

Положение (недостаток или достоинство)	Доля ответивших положительно (%)	
	Дистанционный формат	Традиционное обучение
более свободный график обучения	39,9	-

возможность подрабатывать	29	-
возможность не ездить каждый день на занятия	15,9	-
возможность подсмотреть ответы	3,5	-
живой контакт, общение	-	31,2
лучшее понимание материала	-	25,4
оперативная обратная связь	-	9,4
двигательная активность	-	6,4
отсутствие потерь времени на оформление заданий, чат, форум и др.	-	4,7
другое	11,7	29,3

Из данных, приведенных в таблице, нетрудно заметить, что достоинства дистанционного обучения оборачиваются недостатками традиционного, и наоборот. С этой точки зрения объясним также достаточно большой процент студентов (29,3%, в отличие от 11,7% в дистанционном формате), отметивших достоинства традиционного обучения в категории «Другое». Выявляя недостатки в реализации дистанционного обучения, мы получили следующие результаты в категории «Другое» мы получили следующий расклад: (ответы на вопрос «Что вам не понравилось в реализации дистанционного обучения»):

- слишком большой объём заданий – 24,6%;
- сложный теоретический материал – 13,8%;
- излишняя требовательность преподавателей – 11,6%;
- некачественная методика проведения онлайн занятий – 10,1%;
- некачественные материалы – 6,0%;
- отсутствие надлежащего контроля со стороны преподавателей - 5,5%;
- сложные практические задания – 3,5%;
- полное отсутствие материалов и контроля - 2%;
- другое – 22,9%.

Действительно, в условиях традиционного обучения преподаватель соразмеряет объем, сложность теоретических материалов и практических заданий со временем занятия, поскольку испытывает цейтнот при неадекватном подборе материала. Легче осуществляется текущий контроль, отработана методика проведения лекций и

практических занятий. Недоброкачественный учебный материал также легче верифицируется в условиях обычного обучения.

Полученные нами экспериментальные данные свидетельствуют о привлекательности для студентов дистанционного и смешанного формата обучения в прагматическом отношении, что не связано напрямую с качеством обучения, а скорее характеризует личностные предпочтения испытуемых в более свободной жизни, возможности подрабатывать, меньшей ответственности в условиях контроля. Изучение исходников (личных анкет обучающихся) показало, что дистанционный и смешанный формат, как правило, предпочитают студенты, не отличающиеся высокими показателями успеваемости. И наоборот, студенты, заинтересованные в качестве обучения, хороших и отличных оценках успеваемости, отмечают методические преимущества традиционного обучения, связанные с содержанием и методикой обучения.

Есть как минимум два пути решения проблем повышения качества в исследуемых форматах обучения:

1) стремиться сделать традиционное обучение более адаптивным, подстраиваемым под личные запросы и уровень подготовки студентов (удобное расписание, индивидуальные задания, перевод на индивидуальный учебный план и др.);

2) совершенствовать возможности онлайн платформ и мобильных обучающих приложений в методическом плане: рассчитывать/созмерять объем и уровень трудности заданий, улучшать качество материалов как теоретических, так и практических (доступность, дифференцированность, наличие указаний и др.), продумывать эффективные формы онлайн контроля, стремясь к их индивидуализации, критериальной обоснованности, автоматизации.

В частности, в дистанционном обучении есть необходимость придания образовательным платформам возможности автоматизированно генерировать индивидуализированный контент дидактического назначения, и, с другой стороны, возможности осуществлять контроль, диагностику и мониторинг учебного процесса в его динамике. Как в смешанном, так и дистанционном формате возникает также проблема исследования механизмов тьюторского сопровождения процесса обучения, которые пока являются еще мало исследованными как в практическом плане, так и теоретическом.

**G.E. Senkina, K.M. Rasulov**  
Smolensk State University

## **ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF MODERN AND TRADITIONAL TRAINING FORMATS: DIAGNOSTIC RESULTS**

**Keywords:** *traditional learning, distance learning, blended learning format, student preferences, advantages and disadvantages of learning.*

**Abstract.** *The article is devoted to the results of a study of the advantages and disadvantages of various learning formats: distance learning, traditional, mixed, conducted on the basis of the Faculty of Physics and Mathematics of Smolensk State University. The preferences of students in this aspect have been identified, namely: personal, content and methodological, organizational advantages of distance and traditional learning formats. Prospects for the research and development of these formats are outlined, including the need to study the mechanisms of tutor support in distance learning.*

**А.Г. Суханова**

*Военная академия войсковой противовоздушной обороны  
Вооруженных Сил Российской Федерации*

УДК 519.677

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СИСТЕМЕ MATHCAD ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ОБУЧАЮЩИМИСЯ В ВУЗЕ**

Ключевые слова: *компьютерное моделирование, система Mathcad, проверка статистических гипотез.*

*В статье отмечено, что при выполнении научно-исследовательской работы обучающимися в вузе, например, написании курсовой работы по математике широкое применение находит компьютерное моделирование. Рассмотрено на конкретном примере решение задачи проверки статистических гипотез с компьютерным моделированием исходных выборок из нормальных генеральных совокупностей с заданными параметрами. Моделирование выполнено в системе компьютерной математики Mathcad.*

При выполнении научно-исследовательской работы обучающимися, в частности, написании курсовой работы в вузе широкое применение находит компьютерное моделирование, например, необходимых для обработки статистических данных.

При выполнении курсовой работы на тему: "Статистическая проверка статистических гипотез" можно предложить множество разнообразных задач, среди которых выделим группу задач на сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей.

При составлении заданий курсовой работы для преподавателя вызывает некоторое затруднение составление задачи для проверки гипотезы сравнения двух средних нормальных генеральных совокупностей дисперсии которых известны, особенно если в выборках должно быть большое число значений и надо составить несколько вариантов заданий. Такие необходимые выборки хорошо моделируются, например, средствами системы Mathcad. Преподаватель может сам смоделировать такие данные и предложить обучающимся уже составленные полностью варианты задач. Но наибольший интерес при выполнении курсовой работы представляют задачи, в которых обучающимся самим необходимо сначала смоделировать выборки из нормальных генеральных совокупностей, в которых известны генеральные дисперсии (средние квадратические отклонения).

При моделировании необходимых выборок в системе Mathcad обучающимися закрепляются знания, полученные по дисциплине математика при изучении темы "Метод статистического моделирования". Рассмотрим вышесказанное на конкретном примере.

В задании для курсовой работы обучающимся можно предложить следующий блок задач.

Задача 1. Разыграть 100 возможных значений нормальной случайной величины с математическим ожиданием  $a = 15$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma = 2,4$ . Полученные значения считать независимой выборкой из совокупности  $X$ .

Задача 2. Разыграть 85 возможных значений нормальной случайной величины с математическим ожиданием  $a = 12$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma = 1,9$ . Полученные значения считать независимой выборкой из совокупности  $Y$ .

Задача 3. По независимым выборкам, полученным в задачах 1 – 2:

1) Найти выборочные средние.

2) При уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить нулевую гипотезу  $H_0 : M(X) = M(Y)$  о равенстве генеральных средних при конкурирующей гипотезе  $H_1 : M(X) > M(Y)$ .

Для решения данных задач сначала необходимо смоделировать две выборки, отвечающие условию задач 1 – 2.

На рисунке 1 представлен программный модуль моделирования выборки 1 из нормальной генеральной совокупности  $X$  с заданными параметрами.

Разыгрывание нормальной случайной величины с математическим ожиданием  $a$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma$  выполнено по формуле (1)

$$X = a + \sigma \left( \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right) \quad (1)$$

где  $r_i$  – случайные числа – значения случайной величины, имеющей равномерное распределение на промежутке  $[0;1]$  (в системе Mathcad использована функция  $\text{rnd}(1)$ ).

```

ORIGIN := 1
Моделирование выборки 1 (из совокупности X)
m1 := 15      σ1 := 2.4      Заданные параметры распределения
n := 100      i := 0..n
X :=
  s ← 0
  for j ∈ 1..n
    for i ∈ 1..12
      r_i ← rnd(1)
      s ← s + r_i
      X_j ← m1 + σ1·(s - 6)
      s ← 0
  X

```

$X^T =$		1	2	3	4	5	6	7	8
	1	11.37	14.887	17.687	15.844	14.294	17.722	17.853	...

Рис. 1. Программный модуль моделирования выборки из нормальной генеральной совокупности  $X$  с заданными параметрами распределения в системе Mathcad

На рисунке 2 выборка 1 изображена на графике. На рисунке 2 также представлен график эмпирической функции распределения и рассчитаны для выборки 1 выборочное среднее и дисперсия генеральной совокупности  $X$ . Рассчитанные числовые характеристики необходимы для вычисления наблюдаемого значения критерия проверки нулевой гипотезы  $H_0 : M(X) = M(Y)$  о равенстве генеральных средних в задаче 3.

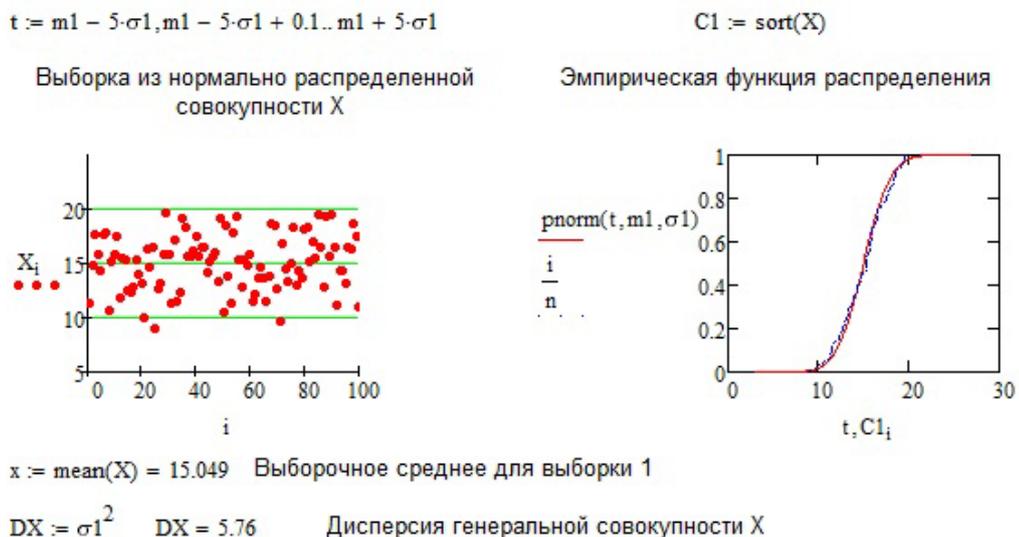


Рис. 2. Моделирование выборки из нормальной генеральной совокупности  $X$  с заданными параметрами в системе Mathcad (окончание документа)

На рисунке 3 представлено моделирование выборки из нормальной генеральной совокупности  $Y$  с заданными параметрами распределения и расчет наблюдаемого значения критерия.

Так как моделировать выборки нужно, считая, что средние квадратические отклонения известны, то в качестве проверки нулевой гипотезы применялась случайная величина (2)

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} - \frac{D(Y)}{m}}}, \quad (2)$$

где  $\bar{x}, \bar{y}$  – выборочные средние,  $D(X), D(Y)$  – генеральные дисперсии из совокупностей  $X$  и  $Y$  соответственно,  $n, m$  – объемы совокупностей  $X$  и  $Y$  соответственно [1, с. 298].

Моделирование выборки 2 (из совокупности  $Y$ )

$m2 := 12$      $\sigma2 := 1.9$     Заданные параметры распределения

$m := 85$      $j := 1..m - 1$

```

Y := | s ← 0
     | for j ∈ 1..n
     |   for i ∈ 1..12
     |     | ri ← md(1)
     |     | s ← s + ri
     |     | Yj ← m2 + σ2·(s - 6)
     |     | s ← 0
     | Y
  
```

$Y^T =$		1	2	3	4	5	6	7	8
	1	11.437	11.695	13.089	10.147	14.507	11.601	11.396	...

$y := \text{mean}(Y) = 11.95$     Выборочное среднее для выборки 2

$DY := \sigma2^2$      $DY = 3.61$     Дисперсия генеральной совокупности  $Y$

$z := \frac{x - y}{\sqrt{\frac{DX}{n} - \frac{DY}{m}}}$      $z = 25.188$     Наблюдаемое значение критерия

$\alpha := 0.05$      $Lz := \frac{(1 - 2\alpha)}{2}$      $Lz = 0.45$     Значение функции Лапласа  $\Phi(z_{кр}) = Lz$

Рис. 3. Моделирование выборки из нормальной генеральной совокупности  $Y$  с заданными параметрами распределения и расчет наблюдаемого значения критерия в системе Mathcad

Наблюдаемое значение критерия  $Z_{набл} = 25,188$ , значение функции Лапласа  $\Phi(z_{кр}) = 0,45$ , как видно, из рисунка 3.

Так как конкурирующая гипотеза  $H_1 : M(X) > M(Y)$ , то критическое значение критерия  $Z$  найдено исходя из формулы (3)

$$\Phi(z_{кр}) = (1 - 2\alpha) / 2, \quad (3)$$

где  $\alpha = 0,05$  – уровень значимости.

По таблице значений функции Лапласа, исходя из ее значения 0,45, найдено критическое значение критерия  $Z - z_{кр} = 1,64$ .

Так как  $z_{набл} > z_{кр}$  – нулевую гипотезу отвергаем, другими словами, выборочные средние различаются значимо.

В рассмотренном примере решение блока задач выполнено практически полностью в системе Mathcad. При выполнении курсовой работы решение подобных задач обучающимся можно также полностью предложить выполнить полностью в Mathcad или выполнить вручную с помощью калькулятора, а затем проверить расчеты по использованным формулам в Mathcad.

Решение подобных задач способствует применению при выполнении курсовой работы, а потом и в профессиональной деятельности методов моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, используя современные образовательные и информационные технологии, что способствует формированию требуемых федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования компетенций.

### Литература

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 479 с.: ил.

### A.G. Sukhanova

Military Academy of Military Air Defense of the Armed Forces of the Russian Federation

### COMPUTER MODELING IN THE MATHCAD SYSTEM WHEN DOING COURSEWORK IN MATHEMATICS BY UNIVERSITY STUDENTS

**Keywords:** *computer modeling, Mathcad system, statistical hypothesis testing.*

**Abstract.** *The article notes that computer modeling is widely used when doing research work by students at a university, for example, writing a term paper in mathematics. The solution of the problem of testing statistical hypotheses with computer modeling of initial samples from normal general populations with specified parameters is considered on a specific example. The simulation was performed in the Mathcad computer mathematics system.*

## **О ПРИМЕНЕНИИ КОМИКСОВ В КУРСЕ «ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ИНФОРМАТИКЕ»**

Ключевые слова: *комикс, креолизованный текст, теория и методика обучения информатике, нулевая креолизация, частичная и полная креолизация.*

*В данной статье рассмотрены примеры практических заданий на работу с готовыми комиксами и на их разработку студентами в рамках дисциплины «Теория и методика обучения информатике». Подобная работа по визуализации и компрессии учебного контента востребована педагогами, выполняет аттрактивную, экспрессивную, мотивирующую и развивающую функции в обучении студентов и положительно влияет на общий уровень методической подготовки будущих учителей информатики.*

В настоящее время комиксы всё чаще применяются в образовательном процессе как вспомогательное дидактическое средство. Примером тому служит серия занимательных учебных комиксов-манга издательства Додека, ДМК Пресс, разработанных для использования при изучении точных наук.

Комикс – это дидактическое поликодовое (креолизованное) средство обучения с доминантой изображения в своем содержании [1].

В зависимости от размера вербальной и невербальной частей выделяют *комиксы с нулевой креолизацией* (практически полное отсутствие текста; только изображение; иначе «немые комиксы»), а также *комиксы с частичной и полной креолизацией* (вербальная часть присутствует в той или иной степени и теряет смысл без изображений).

В зависимости от средств, используемых при разработке, комиксы разделяют на *создаваемые вручную* и *цифровые комиксы*, для создания которых используются специальные программы и сервисы [2, 3, 4].

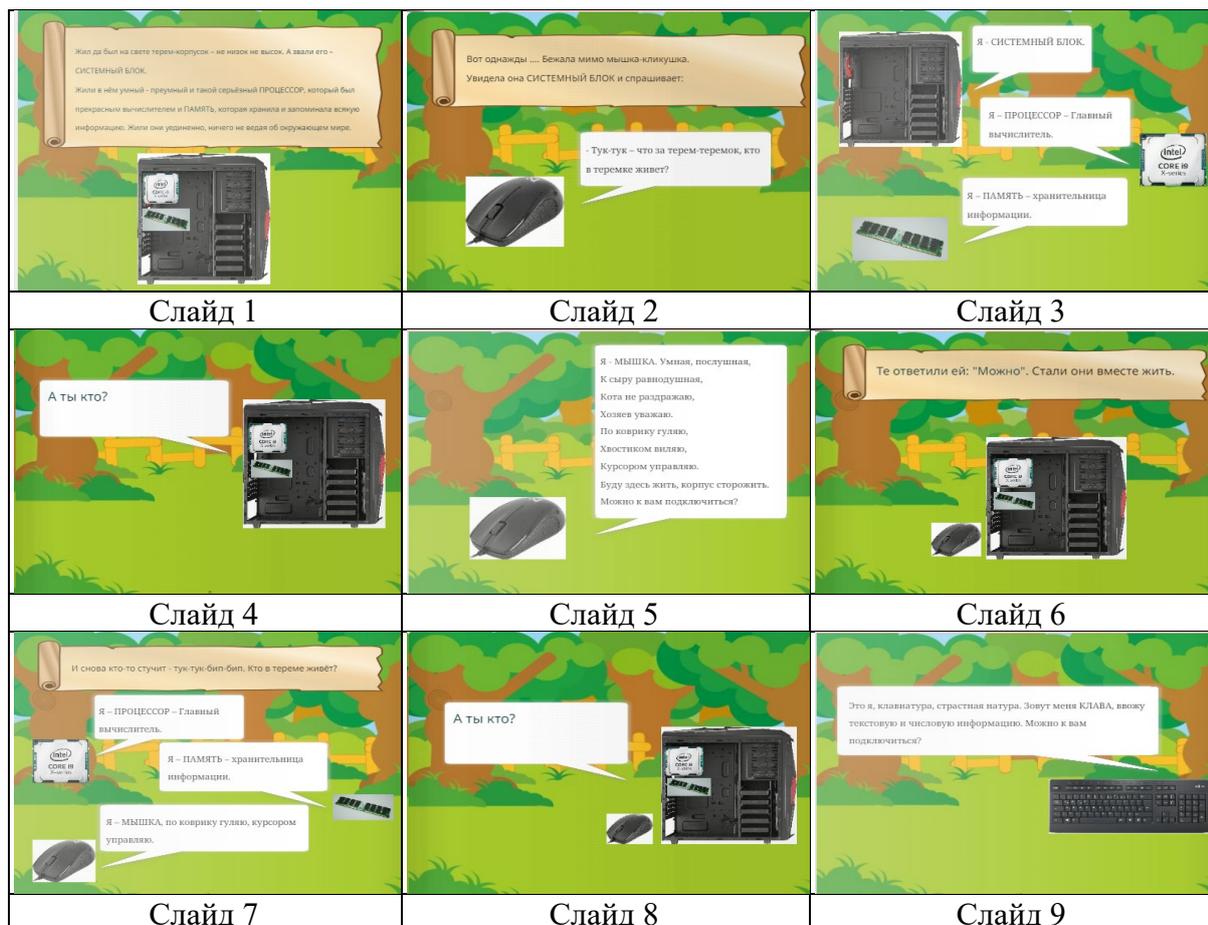
Исследования автора [1, 3] показывают, что педагоги готовы осваивать и активно использовать в своей деятельности технологии визуализации и компрессии учебного материала, в том числе разрабатывать и использовать в учебном процессе собственные авторские комиксы. Поэтому в вузовский курс «Теория и методика обучения информатике» был включен раздел, связанный с разработкой программных средств учебного назначения, а именно задания, связанные с разработкой графических историй (комиксов) средствами цифровых технологий [5, 6, 7].

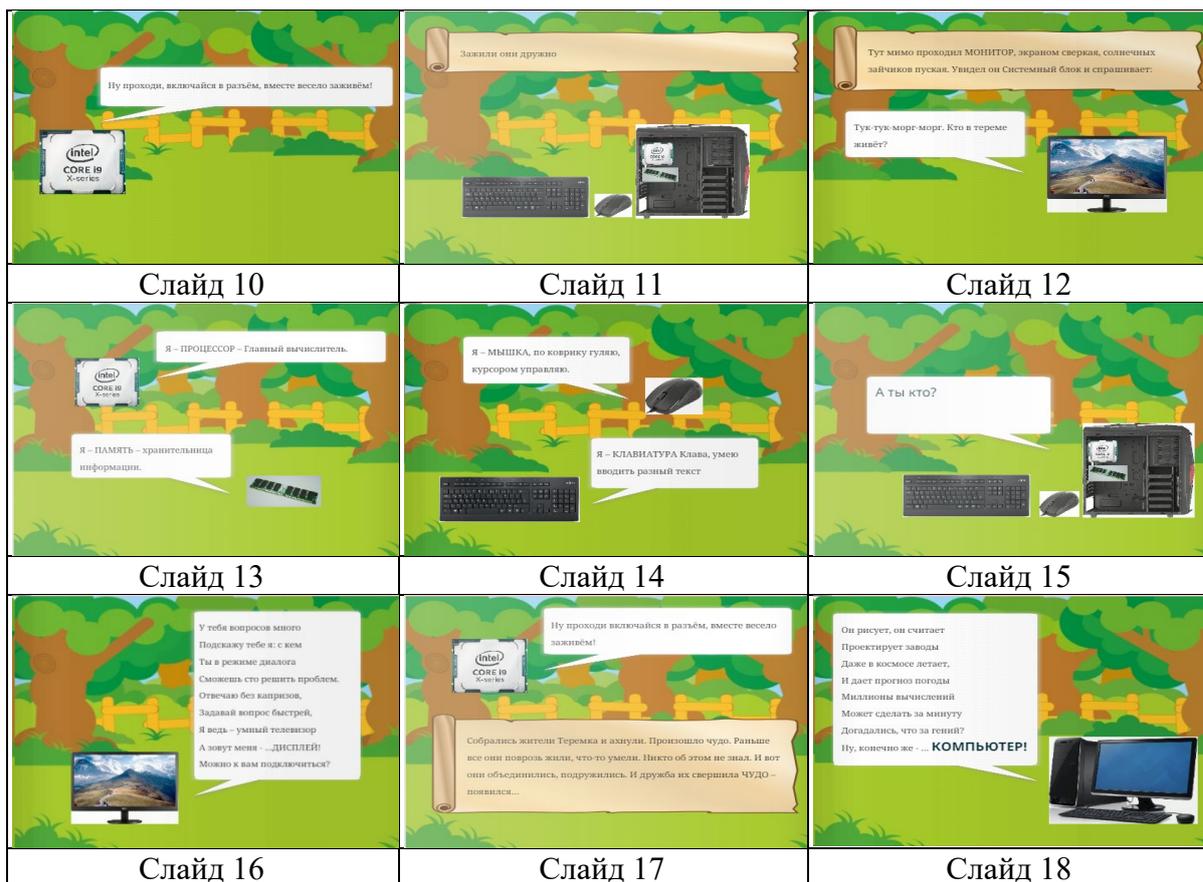
Такая работа заставляет студентов, будущих учителей информатики, математики и/или физики серьезно прорабатывать учебный контент (выделение существенных элементов содержания, установление связей между ними, расстановка смысловых акцентов, структурирование, лаконичное представление содержания), вынуждает обдумывать замысел графической истории и его воплощение (продумывание сюжета, связи предметного содержания с сюжетным замыслом комикса, подбор средств визуализации). Все это кропотливая работа, развивающая в студентах не только лучшее владение учебным материалом, его глубокое понимание, но и воображение, и навыки творческой деятельности.

В таблице 1 представлен комикс с полной креолизацией, выполненный студенткой 4 курса направления подготовки «Педагогическое образование» (профиль «Физика, информатика») Цубановой М.С. в рамках дисциплины «Теория и методика обучения информатике» по теме «Устройство компьютера» для пропедевтического этапа изучения информатики в школе.

Таблица 1

Пример комикса с полной креолизацией

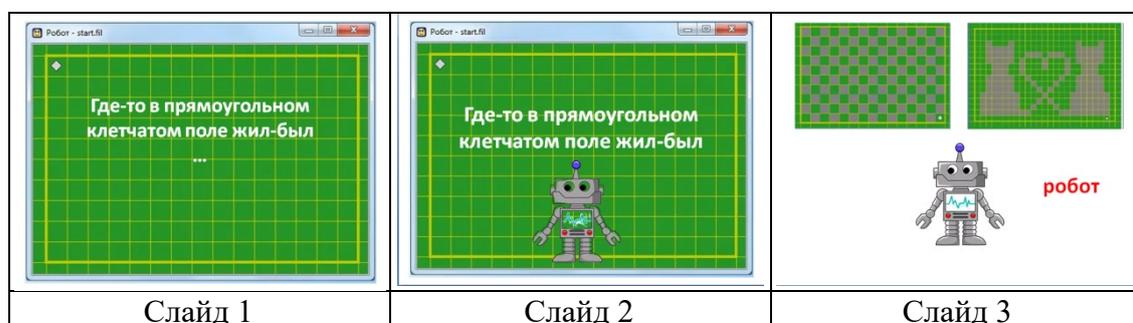


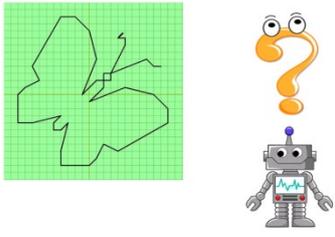
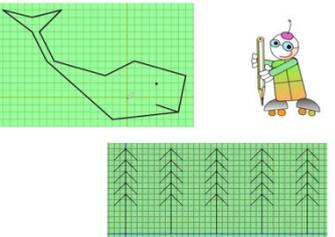
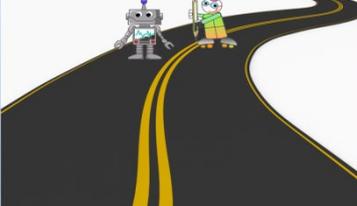
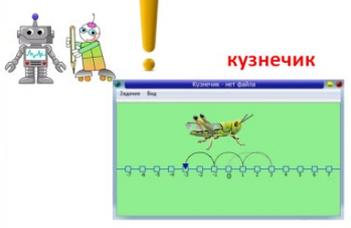
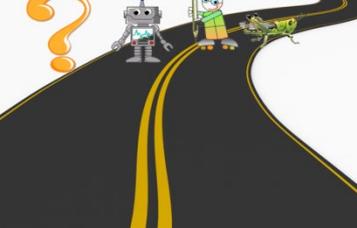
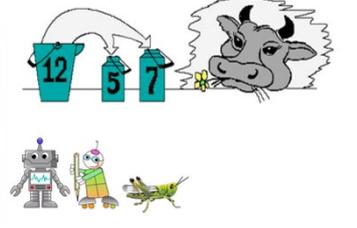
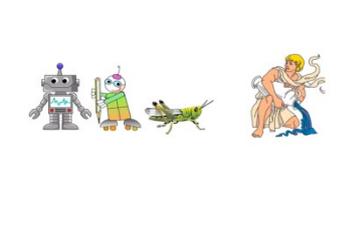


В рамках вовлечения в конкурсную деятельность студенты старших курсов педагогического направления физико-математического факультета СмолГУ уже несколько лет подряд участвуют в олимпиаде по теории и методике обучения информатике на базе Воронежского государственного педагогического университета, которая в 2023 году получила статус Всероссийской. В качестве одного из конкурсных туров там встречается серия заданий на работу с готовыми немymi комиксами, разработанными в сервисах презентационной графики (таблица 2, тема комикса «Простейшие программные исполнители»):

Таблица 2

Пример комикса с нулевой креолизацией



		
Слайд 4	Слайд 5	Слайд 6
		
Слайд 7	Слайд 8	Слайд 9
		
Слайд 10	Слайд 11	Слайд 12
		
Слайд 13	Слайд 14	Слайд 15

Задание, которое получает студент, следующее: «Учитель информатики Растеряшкин приготовил материал к уроку и придумал для детей сказку по некоторой теме. Так получилось, что Растеряшкин забыл дома текст сказки и осталась только презентация к уроку. Урок должен состояться не смотря ни на что! Времени на подготовку совсем нет. А так как Растеряшкин ещё и опаздывает, то ... спасайте урок!

По картинкам на слайдах необходимо придумать сказку. Герои сказки – это жители страны «Информатика», а какие приключения их ожидают, предстоит придумать Вам, не раздумывая.»

Трудность выполнения подобных заданий, придуманных коллегами из ВГПУ, в том, что студент заранее не знает, по какой теме презентация, которую ему придется озвучивать, а кроме этого информация подается порционно (послайдно), а не сразу вся. Таким образом идет проверка владения теорией учебного предмета,

развивается умение быстро сосредотачиваться, сообразительность, оттачиваются навыки действия в нестандартных, экстремальных (непредусмотренных заранее) условиях.

Описанные и подобные им задания, внедренные в учебный процесс дисциплины «Теория и методика обучения информатике» выполняют ряд функций: аттрактивную (привлечение внимания студентов), экспрессивную (воздействие на эмоции и чувства обучающихся), мотивирующую (привлекательны для студентов), развивающую (развивают навыки визуальной грамотности, критического и образно-логического мышления, творческие способности). Все это в итоге положительно влияет на общий уровень методической подготовки будущих учителей информатики.

### Литература

1. Тимофеева Н.М. Методические аспекты применения комиксов в образовательном процессе // Современные наукоемкие технологии. 2024. № 1. С. 145-149.
2. Тимофеева Н.М. Дидактический потенциал комиксов в обучении информатике // Математика и математическое образование: проблемы, технологии, перспективы: материалы 42-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (г. Смоленск, 12-14 октября 2023). Смоленск: Издательство СмолГУ, 2023. С. 407-410.
3. Тимофеева Н.М. Оценка дидактического потенциала комиксов // Современные наукоемкие технологии. 2023. № 7. С. 203-207.
4. Тимофеева Н.М. О структурировании и наглядном представлении информации в виде интеллект-карт средствами онлайн-сервисов // Системы компьютерной математики и их приложения. 2019. Вып. 20. Ч. 2. С. 214-218.
5. Самарина А.Е., Киселева М.П., Тимофеева Н.М. Использование информационных сетевых технологий в проекте изучения культуры родного края. // Учитель и время. 2016. № 11. С. 210-213.
6. Киселева О. М., Солдатенкова Я. Г. Проектирование образовательных информационных систем / Развитие научно-технического творчества детей и молодежи - НТТДМ 2021: сборник материалов V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. - Киров, 2021. С. 93-98.
7. Быков А. А., Киселева О. М. Применение мессенджеров в образовательном процессе // Современные наукоемкие технологии. 2022. № 5-1. С. 127-131.

**N.M. Timofeeva**  
Smolensk State University

### **ABOUT WORKING WITH COMICS IN THE DISCIPLINE "THEORY AND METHODS OF TEACHING COMPUTER SCIENCE"**

**Keywords:** *comics, creolized text, theory and methodology of computer science teaching, zero creolization, partial and complete creolization.*

**Abstract.** *This article discusses examples of practical tasks for working with ready-made comics and for their development by students within the framework of the discipline "Theory and methodology of teaching computer science". Such work on visualization and compression of educational content is in demand by teachers, performs attractive, expressive, motivating and developing functions in teaching students and has a positive effect on the overall level of methodological training of future computer science teachers.*

**Л.К. Шаймарданова**

*Московский университет связи и информатики*

УДК 37.013.32

## **РАЗВИТИЕ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ У СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА: ПРОБЛЕМЫ И ПРАКТИКИ**

Ключевые слова: *логическое мышление, аспекты логики, развитие логического мышления, технический вуз, способы развития.*

*Проводится анализ логического мышления и проблемы, с которыми сталкиваются студенты технических вузов в развитии логического мышления. Предложены некоторые практические подходы для улучшения. Кроме того, указаны конкретные действия для решения данной проблемы в рамках программы изучения высшей математики в вузе.*

Логическое мышление является ключевым элементом критического мышления и успешной учебы, особенно для студентов, обучающихся в технических вузах. Это способность анализировать информацию, делать логически обоснованные выводы и решать проблемы методично и систематически. В данной статье мы обсудим проблемы, с которыми сталкиваются студенты технических вузов в развитии логического мышления, а также предложим некоторые практические подходы для его улучшения.

Одной из основных проблем является недостаточное внимание к фундаментальным аспектам логики в учебных программах технических вузов. Студенты часто изучают математику, физику, информатику и другие технические предметы без должного внимания к формальной логике и критическому мышлению. Это может привести к тому, что студенты не только не усвоят базовые принципы логического мышления, но и не смогут применить их в реальных ситуациях. Также добавим, что еще одной проблемой является отсутствие достаточного количества времени для самостоятельного обучения. Сложность учебной программы требует больших затрат времени на усвоение

материала, что оставляет мало возможностей для развития логического мышления через решение дополнительных задач. Кроме того, недостаточное количество практических занятий по логике и аналитическому мышлению также создает препятствия для полноценного развития этой компетенции у студентов.

Если учесть, что во многих технических вузах учебный процесс сосредоточен на теоретических знаниях, и очень мало внимания уделяется практическим навыкам, то о развитии логического мышления и говорить нечего. Студенты часто сталкиваются с ситуацией, когда им не предоставляются возможности для решения реальных задач, требующих логического анализа и критического мышления.

Еще одной проблемой является недостаток мотивации у студентов к развитию логического мышления. Многие из них могут не видеть непосредственной связи между этим навыком и их будущей профессиональной деятельностью, что может снизить их заинтересованность в его освоении.

Основные аспекты формирования логического мышления у студентов технического вуза включают в себя развитие аналитических навыков, умение проводить логические рассуждения и применять их на практике. Важно обращать внимание на тренировку мозга через решение логических задач, таких как задачи на дедукцию, индукцию и абстрактное мышление. Например, студентам могут предлагаться задачи по определению порядка действий при решении компьютерных алгоритмов или конструировании сложных систем. Кроме того, необходимо акцентировать внимание на развитии критического мышления и способности к систематизации информации для создания базы знаний. Такой подход способствует формированию у студентов навыков работы с информацией, что является ключевым элементом успешного развития логического мышления.

Проблема развития логического мышления у студентов технического вуза часто связана с отсутствием системного подхода к обучению. Важным аспектом является включение логических задач в учебную программу по математике. Это позволяет стимулировать аналитическое мышление и развивать способность к решению сложных проблем. Один из способов развития логического мышления у студентов - это предоставление им возможности решать разнообразные логические задачи и головоломки. Это может быть частью учебного процесса или внеклассной деятельности, которая способствует развитию абстрактного мышления и логического рассуждения. Приведем примеры такого рода задач:

- Задача о доказательстве неравенств: Сформулировать и доказать неравенство для заданных переменных и ограничений.

- Задача о нахождении логических следствий: Из заданных математических утверждений вывести логически следующие.
- Задача о построении логических цепочек: Построить логическую цепочку рассуждений для доказательства или опровержения заданного утверждения.
- Задача о доказательстве равенств и тождеств: Сформулировать и доказать равенства или тождества на основе заданных математических выражений и правил вывода.
- Задача о нахождении контрпримеров: Найти контрпримеры к заданным математическим утверждениям, демонстрирующие их неверность или неполноту.
- Задача о построении математических моделей: Построить математическую модель для описания заданной ситуации или явления, используя логические законы и принципы.
- Задача о выводе следствий из аксиом и постулатов: Из заданных аксиом и постулатов математической теории вывести логически следующие утверждения или теоремы.
- Задача о рассмотрении случаев: Рассмотреть все возможные случаи для заданной ситуации и доказать логические выводы в каждом из них.

Эти задачи помогут студентам развивать навыки логического мышления, анализа и доказательства, что является важной частью учебного процесса в высшей математике и других технических дисциплинах.

Организация дискуссий и дебатов по различным темам помогает студентам развивать навыки анализа, аргументации и критического мышления. Это также способствует развитию способности высказывать и отстаивать свою точку зрения, что является важным аспектом развития логического мышления.

Проектная деятельность предоставляет студентам возможность применять логические принципы к решению реальных проблем и задач. Создание проектов, разработка алгоритмов и анализ систем позволяют студентам применять свои знания и навыки в практических ситуациях, что способствует их развитию как инженеров и логиков.

Примерами для проектной деятельности, которые могут способствовать развитию логического мышления и инженерных навыков у студентов, могут быть следующие:

1. Разработка системы умного дома: Студенты могут создать концепцию и разработать систему управления умным домом, используя различные датчики, микроконтроллеры и программное обеспечение для автоматизации различных процессов в домашней среде.

2. Проектирование и разработка робота для решения конкретной задачи: Студенты могут создать робота, способного выполнять

определенную задачу, такую как сортировка предметов, навигация по лабиринту или автономное управление.

3. Разработка программного обеспечения для управления инфраструктурой города: Этот проект может включать разработку программы для управления транспортными системами, энергоснабжением, управлением отходами или мониторингом качества воздуха.

4. Создание системы умного здоровья: Студенты могут разработать систему мониторинга здоровья, используя носимые устройства, сенсоры и приложения для сбора и анализа данных о физической активности, сердечном ритме и других важных показателях здоровья.

5. Проектирование и разработка игровой программы или приложения: Этот проект может включать создание компьютерной игры, мобильного приложения или виртуальной реальности, где студенты будут задействованы во всех этапах разработки - от концепции до тестирования.

Существует множество способов внедрения в обучение или программы для развития логического мышления у студентов технического вуза. Вот некоторые из них:

1. Курс по формальной логике и критическому мышлению: Введение специализированного курса, который охватывает основы формальной логики, критического мышления, рассуждений и анализа аргументов может быть полезным для студентов технических специальностей.

2. Интерактивные лекции и семинары: Организация интерактивных занятий, включающих в себя обсуждение примеров и решение логических задач, позволяет студентам применять свои навыки на практике и обмениваться идеями с одногруппниками.

3. Практические проекты и лабораторные работы: Включение в учебный план проектов и лабораторных работ, которые требуют анализа, проектирования и решения реальных проблем, способствует развитию логического мышления и применению технических знаний на практике.

4. Обучение решению логических задач: Внедрение специализированных курсов или занятий, направленных на обучение студентов решению разнообразных логических задач и головоломок, помогает им развивать абстрактное мышление и аналитические способности.

5. Использование технологий и онлайн-ресурсов: Интеграция в обучение интерактивных онлайн-курсов, приложений и игр, разработанных специально для развития логического мышления, может обогатить учебный процесс и сделать его более интересным и эффективным для студентов.

Развитие логического мышления у студентов технических вузов является важной задачей, требующей комплексного подхода. Необходимо уделить больше внимания формированию логических навыков в рамках учебных программ, включая практические задания:

1. Решение инженерных проблем: Задание студентам решать реальные инженерные проблемы, которые требуют аналитического и логического мышления. Это может быть, например, разработка проекта по оптимизации энергопотребления, создание нового устройства или разработка программного обеспечения для автоматизации процессов.

2. Лабораторные работы с логическим компонентом: Включение в учебный план лабораторных работ, которые требуют применения логических принципов. Например, анализ данных, разработка алгоритмов, моделирование систем и т.д.

3. Решение логических задач: Дать студентам регулярные логические задачи для самостоятельного решения. Это могут быть головоломки, логические загадки, задачи на логическое следование и т.д.

4. Тимбилдинг и групповые проекты: Организация групповых проектов и тимбилдинговых мероприятий, где студенты должны совместно решать задачи, требующие логического мышления и коммуникации.

5. Соревнования и олимпиады: Проведение соревнований и олимпиад по математике, информатике, физике и другим наукам, где студенты могут продемонстрировать свои логические способности и соревноваться с другими.

Это поможет студентам успешно применять логическое мышление в своей профессиональной деятельности и эффективно решать сложные инженерные задачи. Интеграция таких задач в программу обучения может способствовать не только повышению интереса студентов к математике, но и формированию у них необходимых навыков для успешного решения профессиональных задач в будущей карьере.

В современном мире, где востребованы не только знания, но и умение применять их на практике, важно не только усваивать теоретические материалы, но и развивать практические навыки. Для студентов технических вузов отсутствие практической составляющей в обучении логическому мышлению может стать серьезным препятствием на пути к успешной карьере. Поэтому важно совершенствовать образовательный процесс и внедрять практические занятия для эффективного формирования навыков логического мышления у студентов.

## **Литература**

1. Бобикова Л. К. Формирование профессионально значимых качеств личности инженера у студентов технического вуза: дисс. ... канд. пед. Наук. Елабуга. 2001. 178 с.

2. Давыдов В. В. Проблема развивающего обучения: опыт теорет. и эксперим. психол. исслед.: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению и специальностям психологии. Москва: Академия, 2004. 282 с.

3. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования. Акад. наук СССР. Ин-т философии. Москва: Изд-во Акад. наук СССР, 1958. 147 с.

4. Шаймарданова Л. К. Профессионализм или профессиональная компетентность? (на примере ИТ-специалистов) // Научные исследования и образование. 2016. № 4 (24). С. 290–297.

5. Шаймарданова Л. К. Профессиональные компетенции в контексте обучения специалистов информационных технологий в вузе // Актуальные проблемы экономики в условиях кризиса: сборник научных статей преподавателей кафедры Экономики и финансового права Филиала РГСУ. Москва, 2016. С. 115–120.

**L. K. Shaimardanova**

Moscow University of Communications and Informatics

### **DEVELOPMENT OF LOGICAL THINKING AMONGSTUDENTS OF TECHNICAL UNIVERSITY: PROBLEMS AND PRACTICES**

**Keywords:** *logical thinking, aspects of logic, development of logical thinking, technical university, ways of development.*

**Abstract.** *An analysis of the logical thinking and the problems faced by students of technical universities in a development of the logical thinking is done. Some practical approaches for improvement are suggested. In addition, specific actions are proposed to solve the problem within the framework of the program for studying higher mathematics at the university.*

**Н.А. Шерстнёва**

*Смоленский государственный университет*

УДК 519.677

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ WOLFRAM MATHEMATICA**

Ключевые слова: *математическое моделирование; система компьютерной математики Wolfram Mathematica; решение задач математического анализа в математических пакетах.*

*Статья посвящена решению избранных математических задач в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica. Она продолжает цикл публикаций автора [1, 2, 3, 4, 5], посвящённых решению задач математического анализа средствами математических*

*пакетов. Проиллюстрированы аспекты применения СКМ Wolfram Mathematica при моделировании математических проблем, изучаемых на различных направлениях подготовки физико-математического факультета ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет».*

Современный мир крайне динамичен и вариативен, мы постоянно модернизируем привычные алгоритмы под изменяющиеся условия и объективные реалии. Это касается всех сфер человеческой жизни, в том числе и образовательной траектории в рамках того или иного направления подготовки в высшей школе. Современные стандарты, разработанные для физико-математического профиля в ВУЗе, предполагают построение обучения с опорой на IT-технологии, предусматривают при изучении математических дисциплин не только занятия лекционного и практического типа, но и предполагают внедрение в образовательный процесс лабораторных занятий и вычислительных практик по решению математических задач в различных математических пакетах. Математическое моделирование в СКМ с одной стороны существенно упрощает процесс решения предметной задачи, перекладывая рутинную вычислительную работу на «плечи» компьютера, а с другой позволяет увидеть взаимосвязь чистой науки, теоретической математики с её прикладными возможностями, даёт возможность бакалаврам проследить межпредметную интеграцию и реализовать свои профессиональные компетенции. Такие компьютерные занятия в рамках изучения различных разделов математического анализа подтверждают известное высказывание К.Ф. Гаусса: «Математика – это царица и служанка всех наук».

Мы в своей образовательной деятельности в ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет» практикуем математическое моделирование в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica. Охвачены бакалавры на таких направлениях физико-математической подготовки, как 44.03.05 Педагогическое образование с двумя профилями (профили «Математика и информатика», «Физика и информатика», «Физика и математика») и 01.03.02 Прикладная математика и информатика (профиль «Математическое и информационное моделирование»). Спектр математических проблем включает в себя алгебраические вычисления; решение уравнений, неравенств и их систем; нахождение пределов числовых последовательностей и функций одной и нескольких переменных; вычисление производных и частных производных различных порядков функций; поиск дифференциалов; исследование функций и построение графиков; интегрирование функции одной и нескольких переменных; исследование на сходимость числовых и функциональных рядов; решение обыкновенных дифференциальных

уравнений; рассмотрение задач нелинейного программирования и другие проблемы математического анализа.

Данная статья продолжает цикл работ автора по данной тематике [1, 2, 3, 4, 5]. На этот раз рассмотрим примеры из главы «Функции нескольких переменных»

Пример 1. Вычислить двумя способами криволинейный интеграл  $\oint_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$ , где L – контур  $\Delta ABC$  с вершинами A (1; 1), B (3; 2) и C (2; 5) (обход  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ).

Решение.

x1:=1;

x2:=2;

x3:=3;

y1:=1;

y2:=5;

y3:=2;

Reduce[ $\frac{x - x1}{x3 - x1} == \frac{y - y1}{y3 - y1}$ , {x, y}, Reals]

$$y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$$

Reduce[ $\frac{x - x2}{x3 - x2} == \frac{y - y2}{y3 - y2}$ , {x, y}]

$$y = 11 - 3x$$

Reduce[ $\frac{x - x1}{x2 - x1} == \frac{y - y1}{y2 - y1}$ , {x, y}]

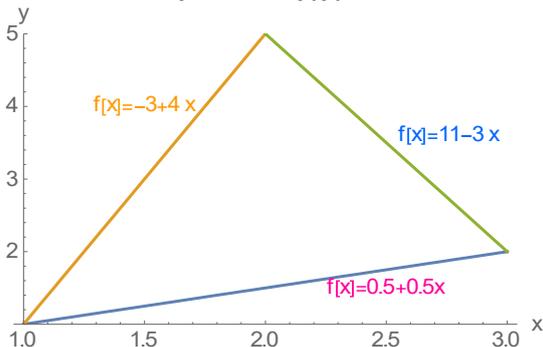
$$y = 4x - 3$$

$$f[x_] = \frac{1}{2} + \frac{x}{2};$$

$$f1[x_] = -3 + 4x;$$

$$f2[x_] = 11 - 3x;$$

Plot[{f[x], f1[x], f2[x]}, {x, 1, 3}, AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotRange -> {1, 5}, Epilog -> {Hue[0.9], Text["f[x] = 0.5 + 0.5x", {2.5, 1.5}], {x, 1, 3}, AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotRange -> {1, 5}, Epilog -> {Hue[0.9], Text["f[x] = 0.5 + 0.5x", {2.5, 1.5}], Hue[0.1], Text["f[x] = -3 + 4x", {1.5, 4}], Hue[0.6], Text["f[x] = 11 - 3x", {2.76, 3.6}]}]0.5x", {2.5, 1.5}}, Hue[0.1], Text["f[x] = -3 + 4x", {1.5, 4}], Hue[0.6], Text["f[x] = 11 - 3x", {2.76, 3.6}]}}



(\*1 способ – формула Остроградского – Грина\*)

$$p[x, y] := (x + y)^2;$$

$$q[x, y] := -(x^2 + y^2);$$

$$(* \int_D \int (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}) dx dy = \int_{D_1} \int () dx dy + \int_{D_2} \int () dx dy *)$$

$$p1 := D[q[x, y], x];$$

$$p2 := D[p[x, y], y];$$

$$p1 - p2$$

$$-2x - 2(x + y)$$

$$\int_1^2 \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x}^{4x-3} (-2x - 2(x + y)) dy dx + \int_2^3 \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x}^{11-3x} (-2x - 2(x + y)) dy dx$$

$$-\frac{140}{3}$$

(\*2 способ – непосредственное вычисление\*)

$$a := \int_1^3 ((x + f[x])^2 - (x^2 + f[x]^2) * f'[x]) dx$$

$$b := \int_2^3 ((x + f2[x])^2 - (x^2 + f2[x]^2) * f2'[x]) dx$$

$$c := \int_1^2 ((x + f1[x])^2 - (x^2 + f1[x]^2) * f1'[x]) dx$$

$$a - b - c$$

$$-\frac{140}{3}$$

Пример 2. Найти точку локального условного экстремума функции  $f = 18x_1 + 19x_2$  при ограничении типа равенства  $g = x_1^2 + x_2^2 - 36$ .

Решение.

$$F = 18 x_1 + 19 x_2;$$

$$g = x_1^2 + x_2^2 - 36;$$

$$\text{GradientG} = \text{Table}[D[g, x_i], \{i, 2\}]$$

[табл... дифференцировать]

$$\{2 x_1, 2 x_2\}$$

(\*Градиент равен нулю в точке (0,0),

которая не удовлетворяет ограничению. В остальных точках градиент линейно независим, поэтому можно воспользоваться классической функцией Лагранжа\*)

$$L = F + \lambda * g;$$

$$\text{Solve}[\{\partial_{x_1} L = 0, \partial_{x_2} L = 0, g = 0\}, \{x_1, x_2, \lambda\}]$$

[решить уравнения]

$$\left\{ \left\{ x_1 \rightarrow -\frac{108}{\sqrt{685}}, x_2 \rightarrow -\frac{114}{\sqrt{685}}, \lambda \rightarrow \frac{\sqrt{685}}{12} \right\}, \left\{ x_1 \rightarrow \frac{108}{\sqrt{685}}, x_2 \rightarrow \frac{114}{\sqrt{685}}, \lambda \rightarrow -\frac{\sqrt{685}}{12} \right\} \right\}$$

$$Dg = \text{Sum}[D[g, x_i] * dx_i, \{i, 2\}];$$

[с... |дифференцировать]

$$\text{Solve}[Dg == 0, \{dx_1, dx_2\}]$$

|решить уравнения

⋯ Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\left\{ \left\{ dx_2 \rightarrow -\frac{dx_1 x_1}{x_2} \right\} \right\}$$

$$DF = \text{Sum}[D[L, x_i, x_j] * dx_i * dx_j, \{i, 2\}, \{j, 2\}];$$

[с... |дифференцировать]

$$dx_2 = -\frac{dx_1 x_1}{x_2};$$

DF

$$2 \lambda dx_1^2 + \frac{2 \lambda dx_1^2 x_1^2}{x_2^2}$$

(\*Проверим точки:  $\left(-\frac{108}{\sqrt{685}}, -\frac{114}{\sqrt{685}}\right)$ ,  $\lambda \rightarrow \frac{\sqrt{685}}{12}$ ;  $\left(\frac{108}{\sqrt{685}}, \frac{114}{\sqrt{685}}\right)$ ,  $\lambda = -\frac{\sqrt{685}}{12}$  \*)

$$\lambda = \frac{\sqrt{685}}{12};$$

$$x_1 = -\frac{108}{\sqrt{685}};$$

$$x_2 = -\frac{114}{\sqrt{685}};$$

DF

$$\frac{685 \sqrt{685} dx_1^2}{2166}$$

(\*Дифференциал второго порядка больше нуля для всех ненулевых решений, значит  $\left(-\frac{108}{\sqrt{685}}, -\frac{114}{\sqrt{685}}\right)$  – точка локального условного минимума\*)

$$\lambda = -\frac{\sqrt{685}}{12};$$

$$x_1 = \frac{108}{\sqrt{685}};$$

$$x_2 = \frac{114}{\sqrt{685}};$$

DF

$$-\frac{685 \sqrt{685} dx_1^2}{2166}$$

(\*Дифференциал второго порядка меньше нуля для всех ненулевых решений, значит  $\left(\frac{108}{\sqrt{685}}, \frac{114}{\sqrt{685}}\right)$  – точка локального условного максимума\*)

Ответ:  $\left(\frac{108}{\sqrt{685}}; \frac{114}{\sqrt{685}}\right)$ .

## Литература

1. Шерстнёва Н.А. Применение системы Wolfram Mathematica в преподавании математического анализа // Сборник материалов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Развитие научно-технического творчества детей и молодёжи». - Вып.3. - С. 144-148.
2. Шерстнёва Н.А. Решение математических задач средствами системы компьютерной математики Wolfram Mathematica // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXI Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. – Вып.21. – С. 422 – 427.
3. Шерстнёва Н.А. Визуализация математического материала посредством систем компьютерной математики // Сборник материалов V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Развитие научно-технического творчества детей и молодёжи». – Киров: Изд-во Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании. - Вып.4 - С. 131-136.
4. О некоторых приложениях системы компьютерной математики Wolfram Mathematica в преподавании математического анализа // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXIII Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. – Вып. 23. – С. 392 – 397.
5. Решение математических задач в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXIV Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2023. – Вып. 24. – С. – 429-433.

**N.A. Sherstneva**  
*Smolensk State University*

## MATHEMATICAL MODELING IN THE WOLFRAM MATHEMATICA COMPUTER MATHEMATICS SYSTEM

**Keywords:** *math modeling; computer mathematics system Wolfram Mathematica; solving problems of mathematical analysis in mathematical packages.*

**Abstract.** *The article is devoted to solving selected mathematical problems in the computer mathematics system Wolfram Mathematica. It continues the series of publications by the author [1, 2, 3, 4, 5], devoted to solving problems of mathematical analysis using mathematical packages. Aspects of the use of the Wolfram Mathematica SCM in modeling mathematical problems studied in various areas of training at the Faculty of Physics and Mathematics of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Smolensk State University" are illustrated.*

## РАЗДЕЛ 5

### Персоналии

**К.М. Расулов, С.А. Гомонов**

*Смоленский государственный университет*

**В.И. Матюхин**

УДК 929.7

### **90 ЛЕТ ПРОФЕССОРУ ЭДУАРДУ ГРИГОРЬЕВИЧУ КИРЬЯЦКОМУ**

*Ключевые слова: комплексная область, разделенные и конечные разности, системы Чебышева, аналитические функции, однолистные и многолистные функции, линейно инвариантные семейства функций.*

*В статье рассказывается о жизненном и творческом пути замечательного математика и педагога Э.Г. Кирьяцкого, 90-летний юбилей которого отмечался на Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 24–25 мая 2024 года в городе Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета.*

*Над Литвою небо сине,  
Меж берез – дожди косые.  
Хоть похоже на Россию,  
Только все же не Россия.*

Почти по А. Городницкому

**1.** Эдуард Григорьевич Кирьяцкий, человек великого подвига служения науке и людям, родился 2 мая 1934 года в городе Могилёве. По ложному доносу его отец, Григорий Александрович Кирьяцкий, был арестован в 1937 году, но, к счастью для семьи, в 1940 году он обрел свободу.

Затем была война. Семья Эдуарда Григорьевича была эвакуирована в деревню Сосновка Куйбышевской области, где Эдуард за один год закончил четыре класса, а его отец и братья отца ушли на фронт. Когда после ранения отец вернулся, семья переехала в Конотоп, где



Эдуард пошёл в пятый класс, причем занятия в школе проходили на украинском языке. А шестой класс Эдуард закончил в городе Барановичи, где уроки велись на белорусском языке.

Переезды из одного города в другой продолжались и далее. В 1946 году отца пригласили в Литву на должность инженера по строительству железных и шоссейных дорог.

С 1952 года Эдуард Григорьевич – студент Вильнюсского университета. С 1956-го он два года преподавал математику в школе рабочей молодежи, а затем десять лет работал в средней школе № 8. Его ученики неизменно завоёвывали первые места на республиканских олимпиадах по математике. В эти же годы Эдуард Григорьевич опубликовал свои первые научные работы по математике (см. статьи [1–4] из приведенного ниже списка).

Обладая замечательными математическими способностями и невероятным трудолюбием, продолжая работать в школе, Эдуард Григорьевич самостоятельно подготовил кандидатскую диссертацию и защитил её в 1968 году в Ростовском государственном университете.

В 1994 году в городе Донецке Эдуард Григорьевич успешно защитил докторскую диссертацию на тему «Многолистные функции и разделённые разности».

В 1995 году в Вильнюсе в издательстве «Техника» вышла монография Эдуарда Григорьевича объемом 393 страницы с аналогичным названием: «Многолистные функции и разделённые разности».

В 1995 году там же была издана ещё одна его монография «Линейно-инвариантные классы аналитических в единичном круге функций» объемом 84 страницы.

Эдуард Григорьевич Кирьяцкий – автор многих учебных пособий: «Операционное исчисление», «Элементы теории поля», «Задачник по теории вероятностей», «О комплексных числах и функциях комплексного переменного», «Вариационное исчисление».

Стаж работы Э.Г. Кирьяцкого: учитель средней школы – 18 лет, преподаватель в университете – 47 лет.

Число опубликованных Эдуардом Григорьевичем научных работ превышает 180, число его сообщений и докладов на международных конференциях – более 100. Феноменальная работоспособность!

2. Вот некоторые факты из жизни и деятельности Эдуарда Григорьевича:

- старший преподаватель – 1969 год;
- доцент – 1979 год;
- профессор Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса – 1996 год;
- член-корреспондент Интернациональной академии наук Евразии;

- основатель научного журнала «Математическое моделирование и комплексный анализ»;
- награждён специальной премией Вильнюсского технического университета за научную деятельность;
- много лет был членом редколлегии межвузовского сборника «Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям» и членом редакционного совета журнала «Известия Смоленского государственного университета», а сейчас – член редакционного совета «Вестник Гродненского государственного университета».

3. Главные увлечения Эдуарда Григорьевича, конечно, математика и обучение ей школьников, студентов и учителей, но есть ещё и другие, не менее важные: музыка, вокал и спорт (футбол, туризм, шахматы).

Некоторыми из них ему удалось заразить своих сыновей: оба они математики, доктора наук, дружат с музыкой и спортом.

*Музыка, вокал.* Эдуард Григорьевич очень любит петь, знает множество русских, украинских и белорусских песен. Он учился по классу скрипки в музыкальном училище, играл на аккордеоне, работал музыкальным руководителем в пионерских лагерях, играл на балалайке в студенческом оркестре Вильнюсского университета, самостоятельно научился играть на гитаре, пел песни участникам туристических походов и научных конференций.

*Туризм.* Побывал с учениками практически на всех реках и озерах Прибалтики; зимой и летом организовывал турпоходы на Урал, на Соловки, на Валдаи, посетил Карпаты, Мещеру, Карелию.

*Футбол.* Эдуард Григорьевич играл за детскую и юношескую футбольные команды, был зачислен в команду мастеров «Спартака», но пришлось выбирать: или учёба в университете, или участие во всесоюзных соревнованиях. Э.Г. Кирьяцкий выбрал первое.

*Шахматы.* Шахматной игре Эдуарда Григорьевича обучил его отец, и с этого момента началась шахматная карьера Эдуарда. Он был чемпионом Литвы среди юношей, чемпионом общества «Жальгирис», чемпионом университета, возглавлял команду юношей Литвы на Всесоюзных соревнованиях, был участником различных международных соревнований и спартакиад прибалтийских республик по шахматам.

*Оглянись на жизнь с начала:  
Что хотел и что осталось,  
Далека ль от сердца старость,  
И куда же ты идешь?*

.....

*Может, проще стали песни  
И поем все реже вместе,*

*Может, мы уже, хоть тресни,  
Засыхаем на корню?*

А. Зазнобкин

Нет, пока есть среди нас такие люди, как Эдуард Григорьевич Кирьяцкий, никакого «засыхания» не будет!

4. Желаем Вам, Эдуард Григорьевич, от имени авторов статьи и от имени всех участников 25-й Международной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» крепости сил, вдохновения в работе, новых успехов и свершений в деле служения математической науке. С 90-летием Вас, дорогой Эдуард Григорьевич!

#### **Список основных научных статей Э.Г. Кирьяцкого**

1. Кирьяцкий Э.Г. О функциях,  $n$ -ая разделенная разность которых не равна нулю //Лит. мат сб., 1961, **1**, № 1–2. С. 109–114.
2. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые свойства функций, разделенная разность которых не равна нулю //Лит. мат сб., 1962, **2**, № 1. С. 55–60.
3. Кирьяцкий Э.Г. О функциях с разделенной разностью, отличной от нуля. //Лит. мат сб., 1963, **3**, № 1. С. 157–168.
4. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые экстремальные задачи в классах. //Лит. мат сб., 1963, **3**, № 2. С. 83–90.
5. Кирьяцкий Э.Г. Об одном инвариантном семействе аналитических в единичном круге функций //Лит. мат сб., 1971, **11**. С. 404–411.
6. Кирьяцкий Э.Г. Об одном операторе в пространстве аналитических в единичном круге функций //Лит. мат сб., 1972, **12**, № 4. С. 129–137.
7. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых классах однолистных функций //Лит. мат сб., 1972, **12**, № 3. С. 75–85.
8. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых операторах, связанных с дробно-линейным преобразованием единичного круга //Лит. мат сб., 1974, **14**, № 2. С. 57–65.
9. Кирьяцкий Э.Г. Об одном семействе функций, связанном с дробно-линейным преобразованием единичного круга //Лит. мат сб., 1976, **16**, № 1. С. 103–110.
10. Кирьяцкий Э.Г. Об одном функциональном уравнении, связанном с разделенными разностями. 1976, **16**. С. 103–110.
11. Кирьяцкий Э.Г. Об одном семействе однолистных функций //Лит. мат сб., 1976, **16**. С. 111–116.
12. Кирьяцкий Э.Г. Об одной экстремальной задаче в евклидовом пространстве //Лит. мат сб., 1977, **17**, № 2. С. 111–117.
13. Кирьяцкий Э.Г. Об одном предельном свойстве функций с отличной от нуля разделенной разностью //Лит. мат сб., 1978, **18**, № 2. С. 47–61.
14. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых свойствах функций с отличной от нуля разделенной разностью //Лит. мат сб., 1979, **19**. С. 97–113.
15. Кирьяцкий Э.Г., Меляускас И.Б. О признаках принадлежности рациональных функций к классу  $K_n(D)$  //Лит. мат сб., 1982, **22**, № 3, с. 82–89.
16. Кирьяцкий Э.Г., Бренер Г. О некоторых экстремальных свойствах средних в  $k$ -мерном евклидовом пространстве //Лит. мат сб., 1983, **23**. С. 30–42.
17. Кирьяцкий Э.Г., Дагене Е. О круге принадлежности одного семейства функций к классу с положительной вещественной частью  $n$ -й производной //Лит. мат сб., 1983, **23**, № 2. С. 79–95.

18. Кирьяцкий Э.Г., Меляускас И. Б. О некоторых классах аналитических функций //Лит. мат сб., 1985, 25, № 3. С. 73–82.
19. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые оценки  $n$ -ой разделенной разности. 1989, **29**, //Лит. мат сб., № 2. С. 491–506.
20. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых функционалах на классе однолистных функций //Лит. мат сб., 1990, **30**. С. 261–267.
21. Кирьяцкий Э.Г., Хавинсон С. Я. О компактности семейств однолистных функций, заданных пересечением двух гиперплоскостей //Лит. мат сб., 1990, 30, № 2. С. 268–274.
21. Кирьяцкий Э.Г, Кирьяцкий Е.Э. Оценки коэффициентов Ньютона однолистных нормированных в единичном круге функций // Вестник Томского университета. Серия Математика. 2003. №280. С. 50–51.
22. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых свойствах симметрического многочлена //Liet. Matem. Rink. 43, spec. Nr. 2003. P. 131–141.
23. Кирьяцкий, Е.Э; Кирьяцкий, Э.Г. О максимальной  $K_n$ -области одного семейства рациональных функций // Математические заметки. 2004, Т. 76, вып. 2. С. 196-204,
24. Кирьяцкий Э.Г, Кирьяцкий Е.Э. Об одном простейшем интерполяционном процессе в классе аналитических функций //Liet. Matem. Rink. 44, spec. Nr. 2004. P. 158–163.
25. Кирьяцкий Э.Г., Кирьяцкий Д.Э. О расположении корней некоторых специальных полиномов //Liet. Matem. Rink. 44, spec. Nr. 2004. P. 150–157.
26. Kirjackis E., Kirjackis J.. On some properties of the  $\omega$ -operator, defined on class of analytic in the half-plane functions //Nonlinear analysis. Modelling and control . 2004, vol. 9, No. 2, 117–128.
27. Kirjackis E, Kirjackis J. Linearly invariant classes of functions analytical in the half-plane // Nonlinear analysis. Modelling and control .2004, vol. 9, No. 4. P. 349–361.
28. Kirjackis E. Linearly invariant classes of functions analytic in a unit circle if zero type //Demonstratio Mathematica, Warszawa. Vol 37, No 4, 2004. P. 823–845.
29. Кирьяцкий Э.Г, Кирьяцкий Д.Э. О коэффициентах функции, являющейся частным решением однородного дифференциального уравнения // Сборник научных трудов. Исследование по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнения. Выпуск 5. Смоленск, 2004, с. 33–46.
30. Кирьяцкий Э.Г., Кирьяцкий Е.Э. Об одном предельном свойстве последовательности, образованной из аналитических в единичном круге функций // Исследование по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Вып. 5. Смоленск, 2004. С. 23–28.
31. Kirjackis E., Kirjackis J. On some extremal problems on linearly invariant classes //Nonlinear analysis. Modelling and control. 2005. Vol. 10, No. 2. P. 161–170
32. Kirjackis E. On a functional equation related to an automorphism of a unit circle //Demonstratio Mathematica, Warszawa, Vol 38, No 1, 2005. P. 119–134.
33. Кирьяцкий Э.Г, Кирьяцкий Е.Э. On the existence of analytic functions with nonvanishing finite differences of several orders in the half-plane //Mathematical modelling and analysis, 2005. P. 427–431.
34. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых чебышевских системах аналитических в единичном круге функций //Liet. Matem. Rink. 45, 2005. P. 229–240.
35. Кирьяцкий Э.Г. Линейные разделенно-разностные уравнения с постоянными коэффициентами // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Вып. 6. Смоленск, 2005. С. 20–25.

36. Кирьяцкий Э.Г. О линейном однородном дифференциальном уравнении чебышевского типа // Исследование по крайевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнения. Выпуск 6. Смоленск, 2005. С. 26–32.
37. Кирьяцкий Э.Г. Теоремы искажения и признаки компактности для семейств функций из класса  $K_n(D)$  // Вестник Томского государственного университета. Актуальные проблемы алгебры и анализа. № 54, 2005. С. 45–52.
38. Кирьяцкий Э.Г., Кирьяцкий Е.Э. О коэффициентах однолистных нормированных в полуплоскости функций // Вестник Томского государственного университета. Актуальные проблемы алгебры и анализа. № 54, 2005, с. 52–61.
39. Кирьяцкий Э.Г., Кирьяцкий Е.Э. О некоторых свойствах голоморфных в полуплоскости функций // Исследования по крайевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Вып. 7. Издательство СмолГУ, 2006. С. 59–69.
40. Кирьяцкий Э.Г. О теоремах искажения в классе  $K_n(D)$  // Исследования по крайевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Вып. 7. Издательство СмолГУ, 2006. С. 70–78.
41. Кирьяцкий Э.Г. Расулов, К. М. Об одном функциональном уравнении  $S$ -го порядка, связанном с автоморфизмом единичного круга // Исследования по крайевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Вып. 8. Смоленский государственный университет, 2007. С. 36–48.
42. Kirjackis, Eduardas [Кирьяцкий, Э]. Sharp estimates of Newton coefficients of univalent functions // Математические заметки. 2008, Т. 84, вып. 5. С. 724–731.
43. Kirjackis, Eduardas [Kir'yatskii, Eduard G]. Distortion theorems in the class  $K_n(D)$  / Kir'yatskii Eduard G. // Demonstratio mathematica. Warszawa: Politechnika Warszawska. Vol. 41, no. 3 (2008). С. 543–549.
44. Kirjackis, Eduardas [Kiryatzkii, Э]. Об одной формуле в классе голоморфных в круге функций и некоторые ее применения // "Вестник ГрДУ імя Янкі Купалы". Гродно, 2008. № 1(64), серия 2. С. 50–54.
45. Kirjackis, Eduardas [Кирьяцкий, Э.Г.]. О некоторых свойствах функций с положительной вещественной частью  $N$ -й производной в единичном круге // Вестник Смоленского государственного университета, 2008, № 2, с. 76–86.
46. Kirjackis Eduardas; Kirjackis Jevgenijus. On some limit properties of functions with nonvanishing divided differences // Mathematical modelling and analysis: the Baltic journal on mathematical applications, numerical analysis and differential equations. Vilnius: Technika. Vol. 14. No. 3(2009). P. 313–321.
47. Kirjackis, Eduardas [Kir'yatskii, E.G.]. A family of univalent polynomials in an angular domain / Kir'yatskii E. G. // Siberian mathematical journal. Vol. 50. No. 3(2009), с. 456–466.
48. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых свойствах функций из класса  $\hat{C}_n(E)$  / Кирьяцкий Э.Г. // Вестник Томского государственного университета. Томск: Томский государственный университет. 2009, № 3(7). С. 14–22.
49. Kirjackis, Eduardas [Кирьяцкий, Э.Г.]. Некоторые свойства функций класса  $\hat{L}_n(E)$  // Известия Смоленского государственного университета. 2009. № 2(6). С. 146–160.
50. Кирьяцкий Э.Г. Оценки вещественных коэффициентов Тейлора в одном классе функций. // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, №1. С. 62–67.
51. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые свойства обобщенной производной Шварца // Вестник Воронежского государственного университета. 2010, № 1. С. 112–116.
52. Кирьяцкий Э.Г. О геометрическом среднем в  $k$ -мерном евклидовом пространстве // Современные проблемы математики и механики. Том VI, математика, вып. 3, Изд-во МГУ, 2011. С. 1–12.

53. Kirjackis, Eduardas [Kir'yatskiĭ, E.G.]. Оценки разделенных разностей высших порядков аналитических в круге функций. // Сибирский математический сборник, 2011. Т. 52, № 6. С. 1271–1287.

54. Kirjackis Eduardas (Кирьяцкий Эдуард). Некоторые свойства функций с отличной от нуля  $n$ -ой разделенной разностью // Сибирский математический журнал. 2012. Том 53, № 3. С. 597–612.

55. Кирьяцкий Э.Г., Кирьяцкий Е.Э. Свойства аналитических в полуплоскости и в круге функций с отличной от нуля разделенной разностью // Сибирский математический сборник. 2013. Т. 54, № 6. С. 589–600.

56. Кирьяцкий Е.Э., Кирьяцкий Э.Г. Некоторые экстремальные свойства взвешенных арифметических средних в евклидовом пространстве // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, Изд-во СмолГУ. Вып. 19. 2018. С. 293–297.

57. Кирьяцкий Е.Э., Кирьяцкий Э.Г. О среднем взвешенном арифметическом в  $k$ -мерном евклидовом пространстве. // Вестник Гродненского госуниверситета имени Янки Купалы. Серия 2, Т. 8, № 3 (2018). С. 16–26.

58. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых свойствах средних расстояний в евклидовом пространстве // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, Изд-во СмолГУ. 2020. Вып. 21. С.300–306.

59. Кирьяцкий Э.Г. Об одном функционале на классе типично вещественных функций // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, Изд-во СмолГУ. 2022. Вып. 23. С. 246–250.

60. Кирьяцкий Э.Г. Решение одной проблемы из теории игр // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, Изд-во СмолГУ. 2023. Вып. 24. С. 261–268.

**K.M. Rasulov, S.A. Gomonov**  
Smolensk State University  
**V.I. Matyukhin**

## **90TH ANNIVERSARY FOR THE PROFESSOR EDUARD GRIGORYEVICH KIRYATSKY**

**Keywords:** *complex domain, divided and finite differences, Chebyshev systems, analytic functions, univalent and multivalent functions, linearly invariant class of functions.*

**Abstract.** *The article tells about the life and creative path of the remarkable mathematician and teacher E.G. Kiryatsky, whose 90th anniversary was celebrated at the International Scientific Conference "Computer Mathematics Systems and their Applications", held on May 24–25, 2024 in Smolensk on the basis of the Faculty of Physics and Mathematics of Smolensk State University.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Абдуллаева Мехирбан Махаметжановна** – доцент, кандидат психологических наук, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: mehirban@rambler.ru

**Агасиев Талех Азер Оглы** – кандидат технических наук, ст. преподаватель МГТУ им. Н.Э. Баумана. E-mail: taaalex@mail.ru

**Адуков Виктор Михайлович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и методики преподавания математики Южно-Уральского государственного университета. E-mail: adukovvm@susu.ru

**Акуленок Марина Викторовна** – кандидат технических наук, доцент, доцент Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: amv@s2q.ru

**Алексеев Евгений Ростиславович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета. E-mail: er.alekseev@yandex.ru

**Алмохамед Муатаз** – ассистент кафедры математического анализа Московского технического университета связи и информатики. E-mail: mssrmtz@gmail.com

**Аунг Мью Наинг** – аспирант систем автоматического управления и контроля национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: angelkokokalay@gmail.com

**Банару Галина Анатольевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com

**Банару Михаил Борисович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com

**Бирюкова Татьяна Константиновна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН). E-mail: yukonta@mail.ru.

**Богданова Надежда Николаевна** – старший преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: nadingioia@yandex.ru

**Борисов Вадим Владимирович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной техники филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: vbor67@mail.ru

**Быков Александр Александрович** – кандидат педагогических наук, заведующий кафедрой физики филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: alex1by@mail.ru

**Вербичева Елена Александровна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета. E-mail: 19194242@mail.ru

**Винокуров Алексей Александрович** – аспирант института Системной и программной инженерии и информационных технологий НИУ МИЭТ. E-mail: cpintex@yandex.ru

**Воинская Лидия Михайловна** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: haska-medvedeva18@yandex.ru

**Волков Александр Сергеевич** – ст. преподаватель Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: alex.volkov9595@inbox.ru

**Востриков Вячеслав Романович** – студент Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: vihric2@gmail.com

**Вувуникян Юрий Микиртычевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. E-mail: vuv64@mail.ru

**Гагарина Лариса Геннадьевна** – доктор технических наук, профессор, директор Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: gagar@bk.ru

**Гайдук Игорь Олегович** – кандидат технических наук, доцент Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ», инженер НПК «Технологический центр». E-mail: igolgai@mail.ru

**Гершкович Максим Михайлович** – старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН). E-mail: makmg@mail.ru

**Головатин Давид Тимурович** – студент магистратуры Кубанского государственного университета. E-mail: golovatind@yandex.ru

**Гомонов Сергей Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: gomonov.serg@yandex.ru

**Гончаров Евгений Игоревич** – аспирант Смоленского государственного университета. E-mail: drbenvey1996@mail.ru

**Городилов Алексей Владиславович** – кандидат технических наук, Институт системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ», ИП Каверин В.И. «Русская мода». E-mail: kaverina@mail.ru

**Дога Кристина Вячеславовна** – студент Кубанского государственного университета. E-mail: doga-tina.123@yandex.ru

**Елисеенков Антон Васильевич** – студент магистратуры Смоленского государственного университета. E-mail: antoha.eliseenkov@gmail.com

**Иванова Татьяна Михайловна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки НИЯУ «МИФИ». E-mail: ivatatiana@gmail.com

**Кавченков Данил Евгеньевич** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: TotSamyiDanya@yandex.ru

**Казанцев Валерий Валерьевич** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: valera.kaz2017@yandex.ru

**Карачик Валерий Валентинович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и методики преподавания математики Южно-Уральского государственного университета. E-mail: karachik@susu.ru

**Карпенко Анатолий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Системы автоматизированного проектирования» МГТУ им. Н.Э. Баумана. E-mail: arkarpenko@mail.ru

**Кирьяцкий Эдуард Григорьевич** – доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: eduard.kiriyatzkii@mail.ru

**Киселева Ольга Михайловна** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: foxy03@yandex.ru

**Кисляков Максим Анатольевич** – ст. преподаватель кафедры электроэнергетических систем филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: kisljakow@mail.ru

**Кислякова Елена Васильевна** – кандидат педагогических наук, доцент, декан физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: elena151082@mail.ru

**Кованцев Александр Валерьевич** – магистрант Смоленского государственного университета. E-mail: gijp25@gmail.com

**Козлов Сергей Валерьевич** – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: svkozlov1981@yandex.ru

**Кокин Виталий Владимирович** – ст. преподаватель Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: kokinvv@gmail.com

**Кононова Александра Игоревна** – доктор физико-математических наук, Институт системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: illinc@bk.ru

**Коромбалёв Дмитрий Евгеньевич** – главный специалист Центра компетенций систем учёта и сбыта алмазно-бриллиантовой продукции ООО «АЛРОСА Информационные технологии», г. Новосибирск. E-mail: kde.storage@gmail.com

**Костин Андрей Борисович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки НИЯУ «МИФИ». E-mail: abkostin@yandex.ru

**Кристалинский Владимир Романович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: kristvr@rambler.ru

**Кузнецова Алла Спартаковна** – кандидат психологических наук, доцент кафедры психологии труда и инженерной психологии факультета психологии МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: kuznetsovamsu@rambler.ru

**Лось Анастасия Валерьевна** – аспирант, ассистент института МПСУ Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: los-av2015@mail.ru

**Лютикас Павел Леонидович** – сотрудник ВА ВПО ВС РФ. E-mail: plytikas@mail.ru

**Макушинская Надежда Владимировна** – инженер-электроник 2-й категории производственно-технологического отдела АО «ПО «Кристалл». г. Смоленск. E-mail: nmakushinskaya@bk.ru

**Матюхин Валентин Иванович** – учитель-эксперт, г. Вильнюс, Литва. E-mail: valentin.matiuchin@mail.ru

**Михайленко Давид Юрьевич** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: david\_2001\_ru@mail.ru

**Михалёва Татьяна Игоревна** – аспирант кафедры математического анализа физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tat.timopheeva@yandex.ru

**Можжухина Арина Валерьевна** – ст. преподаватель Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ», инженер НПК «Технологический центр». E-mail: reania@rambler.ru

**Мунерман Виктор Иосифович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: vimoona@gmail.com

**Мунерман Даниил Викторович** – стажер-исследователь, Смоленский государственный университет. E-mail: danvmoon@gmail.com

**Нагорная Татьяна Романовна** – ст. преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: tani7n@gmail.com

**Никеев Роман Андреевич** – инженер-технолог 2-й категории производственно-технологического отдела АО «ПО «Кристалл», г. Смоленск. E-mail: roman\_nike@inbox.ru

**Петров Евгений Николаевич** – соискатель Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: fiddenmar@gmail.com

**Петрова Ксения Алексеевна** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: petrovaksusa657@gmail.com

**Писаренкова Екатерина Дмитриевна** – студент Института математики и информатики Московского педагогического государственного университета. E-mail: ekaterinapisarenkova@gmail.com

**Портнов Евгений Михайлович** – доктор технических наук, профессор Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: evgen\_uis@mail.ru

**Поцейко Павел Геннадьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы. E-mail: rahamatby@gmail.com

**Прохоренков Никита Алексеевич** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: prokhorenkov4@gmail.com

**Пятышев Дмитрий Анатольевич** – студент Смоленского государственного университета, E-mail: dpatysev02@gmail.com

**Расулов Карим Магомедович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: kahrیمانr@yandex.ru

**Рубинштейн Александр Иосифович** – доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: rv777@mail.ru

**Садекова Екатерина Халиловна** – ст. преподаватель кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки НИЯУ «МИФИ». E-mail: EKSadekova@mephi.ru

**Самойлова Татьяна Аркадьевна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: tatsamoilova24@gmail.com

**Светлаков Алексей Владимирович** – магистрант научно-исследовательского университета «Московский институт электронной техники». E-mail: seferlian@mail.ru

**Сенчилов Владислав Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: senchilov.vv@gmail.com

**Сенькина Гульжан Ержановна** – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информационных и образовательных технологий, руководитель Федерального центра научно-методического сопровождения педагогических работников на базе Смоленского государственного университета. E-mail: gulzhan.senkina@gmail.com

**Синицин Владимир Игоревич** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, руководитель отделения Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН). E-mail: sinitsin\_vi@mail.ru

**Синицын Игорь Николаевич** – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального государственного учреждения "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук " (ФИЦ ИУ РАН). E-mail: sinitsin@dol.ru

**Синявский Юрий Владимирович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Технологические машины и оборудование» филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: sinyavskiyuv@yandex.ru

**Слюсарь Валентин Викторович** – кандидат технических наук, доцент Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: vslyusar@mail.ru

**Слюсарь Мария Владимировна** – аспирант, ассистент Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: slyusarmariia@gmail.com

**Солодченкова Татьяна Болеславовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, математики и медицинской информатики Смоленского государственного медицинского университета. E-mail: tsolodchenkova@mail.ru

**Суханова Анна Геннадьевна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры естественно-научных дисциплин ВА ВПО ВС РФ. E-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru

**Тимотин Андрей Максимович** – инженер по качеству научно-производственного предприятия «Грань». E-mail: antej82@yandex.ru

**Тимофеева Наталья Михайловна** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: nat.timopheeva@yandex.ru

**Тихонов Иван Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики, факультет ВМК, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. E-mail: ivtikh@mail.ru

**Тихонов Мартин Робертович** – кандидат технических наук, доцент Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: kurotenshi91@yandex.ru

**Тихонова Ольга Вадимовна** – доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: o\_tikhonova@inbox.ru

**Туан Фам Тхань** – аспирант кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Института радиотехники и информатики Российского

технологического университета МИРЭА. E-mail: anhsequayve.ru@gmail.com

**Турметов Батирхан Худайбергенович** – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики, Международный казахско-турецкий университет имени А. Ясави, г. Туркестан, Республика Казахстан. E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

**Федюнина Елена Алексеевна** – инженер 2 категории АО «НИИ «Субмикрон», ассистент кафедры Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: fed.lena10091999@mail.ru

**Ферамузов Давид Элифханович** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: feramuzovdavid@yandex.ru

**Хвостик Павел Михайлович** – аспирант Института системной и программной инженерии и информационных технологий НИУ МИЭТ. E-mail: pkhvostik@gmail.com

**Ходченков Валерий Юрьевич** – аспирант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tansdf@mail.ru

**Хтет Сое Паинг** – аспирант систем автоматического управления и контроля национального исследовательского университета «МИЭТ», E-mail: htetsoepaing2@gmail.com

**Царапкин Сергей Федорович** – соискатель Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ», исполнительный директор НМ-ТЕХ, г. Москва. E-mail: evgen\_uis@mail.ru

**Челак Алина Игоревна** – студент МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: chelakalina00@mail.ru

**Чжо Сое Вин** – аспирант НИУ МИЭТ. E-mail: aloveamisss@gmail.com

**Шаймарданова Лилия Кимматовна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа Московского технического университета связи и информатики. E-mail: bob-bob289@mail.ru

**Шевнина Юлия Сергеевна** – кандидат технических наук, доцент, доцент Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: yusm@rambler.ru

**Шерстнёв Сергей Евгеньевич** – главный эксперт Центра компетенций Систем учета и сбыта алмазно-бриллиантовой продукции ООО «АЛРОСА Информационные технологии», г. Новосибирск. E-mail: ssherstnev@outlook.com

**Шерстнева Наталья Александровна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: MathSmolgu@gmail.com

**Шерстюков Владимир Борисович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Московского

государственного университета имени М.В. Ломоносова. E-mail: shervb73@gmail.com

**Шикула Ольга Сергеевна** – старший преподаватель Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: oshik78@mail.ru

**Щагин Анатолий Васильевич** – доктор технических наук, профессор, профессор института МПСУ Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: schagin4@rambler.ru

**Юдахин Юрий Юрьевич** – магистрант Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: yudakhin.yuri@gmail.com

**Юрченко Диана Евгеньевна** – студент магистратуры Кубанского государственного университета. E-mail: di.pst@yandex.ru

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>РАЗДЕЛ 1. Системы компьютерной математики</b>	<b>3</b>
<i>Алексеев Е.Р., Вербичева Е.А., Дога К.В., Головатин Д.Т., Юрченко Д.Е.</i> Jupyter как универсальная среда для обучения и научных исследований	3
<i>Бирюкова Т.К., Гершкович М.М., Сеницин В.И.</i> Методы организации хранилищ данных с учетом смыслового содержания информации	9
<i>Головатин Д.Т., Алексеев Е.Р., Вербичева Е.А., Дога К.В.</i> Инструменты разработки специализированных математических пакетов	15
<i>Коромбалёв Д.Е., Шерстнёв С.Е., Никеевков Р.А., Макушинская Н.В.</i> Разработка программного комплекса сбора и анализа параметров технологических операций для систем компьютерной разметки алмазов DiaMark и Advisor Station	20
<i>Кристалинский В.Р., Лютикас П.Л.</i> О построении интерфейса между документом Wolfram Mathematica и проектом Visual Studio на языке C#	26
<i>Пятышев Д.А., Сенчилов В.В.</i> О некоторых способах организации элементов администрирования в информационных системах	32
<i>Тимошин А.М.</i> Применение координатно-измерительных машин (КИМ) на современном производстве как способ повышения эффективности контроля качества выпускаемой продукции	37
<i>Тихонова О.В.</i> Визуализация методов обработки аудиофайлов	41
<i>Туан Фам Тхань, Тихонова О.В.</i> Математическое моделирование методов уменьшения пик-фактора в системах OFDM	49
<i>Паинг Хтет Сое, Щагин А.В., Хаинг Аунг Мью</i> Исследование динамики и проведение виртуальных симуляций квадрокоптеров в различных сценариях полета	55
<b>РАЗДЕЛ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры</b>	<b>62</b>
<i>Агасиев Т.А., Карпенко А.П.</i> Байесовская оптимизация с прогнозированием наилучших значений гиперпараметров суррогатной модели	62
<i>Борисов В.В., Синявский Ю.В.</i> Нечеткое ситуационное управление автономными комплексными энергетическими системами	67
<i>Винокуров А.А.</i> Разработка математической модели оценки состояния объекта управления при избыточных и недостоверных данных	73
<i>Волков А.С., Портнов Е.М., Царапкин С.Ф., Слюсарь В.В.</i> Метод разработки приложений на удаленном сервере	78
<i>Востриков В.Р., Кононова А.И.</i> Удаленное управление базой данных мультимедийных файлов	85
<i>Гайдук И.О., Можжухина А.В.</i> Графовые нейронные сети и методы обучения с	

подкреплением в задаче размещения элементов БИС	89
<i>Городилов А.В., Кононова А.И.</i> Вьетнамская диакритика и Xkb	95
<i>Кокин В.В., Портнов Е.М., Юдахин Ю.Ю.</i> Метод оценки быстродействия автоматизированных систем управления энергоснабжением	100
<i>Михайленко Д.Ю., Мунерман В.И.</i> Разработка метода доказательства эквивалентности запроса в разных моделях данных	108
<i>Мунерман В.И., Кавченков Д.Е.</i> Подход создания универсальной алгебраической машины для реализации алгебры многомерных матриц	113
<i>Мунерман В.И., Гончаров Е.И.</i> К вопросу о многомерных базах данных	118
<i>Мунерман В.И., Мунерман Д.В., Синицын И.Н.</i> Условно-трехмерные матрицы и их применения	124
<i>Петров Е.Н., Портнов Е.М.</i> Метод классификации элементов библиографических записей с помощью условно-случайных полей	130
<i>Петрова К.А., Самойлова Т.А.</i> Система биометрической аутентификации лиц на основе DeepFace	134
<i>Прохоренков Н.А., Самойлова Т.А.</i> Разработка программы оптимизации цепи поставок средствами PuPL	142
<i>Слюсарь М.В.</i> Интеграции данных в процессах распределенных вычислений и возможность их модификации	149
<i>Федюнина Е.А., Шевнина Ю.С.</i> Использование многокритериальной теории полезности для определения приоритетности выпуска документации по проектам в условиях ограниченности ресурсов	158
<i>Хвостик П.М.</i> Разработка предиктивной модели на основе совокупности бинарных деревьев	164
<i>Ходченков В.Ю.</i> Векторно-матричная модель вычислений – принципы построения и обработки	168
<i>Царапкин С.Ф.</i> Управление производством на основе вероятностного подхода	173
<i>Чжоу Вин Сое, Щагин А.В.</i> Исследование оптимизации траектории резки деталей из листового металла на основе алгоритма муравьиной колонии	178
<i>Шевнина Ю.С., Гагарина Л.Г.</i> Особенности использования статистических моделей при разработке информационно-измерительных и управляющих систем	186
<i>Щагин А.В., Лось А.В.</i> Целочисленная аппроксимация дробно-рациональных выражений при синтезе цифрового адаптивного регулятора дробного порядка	191
<b>РАЗДЕЛ 3. Математика и её приложения</b>	196
<i>Адуков В.М.</i> О теореме М.А. Шубина о непрерывности множителей в	

факторизации Винера–Хопфа	196
<i>Алмохамед М., Тихонов И.В.</i> Элементарные и присоединенные решения обратных задач с переопределениями высокого порядка	200
<i>Банару М.Б., Банару Г.А.</i> Z в MATH – первый ресурс для математиков	209
<i>Вувуникян Ю.М.</i> Обобщенные ядра и спектральные характеристики нелинейных системных операторов, порожденных интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра	214
<i>Иванова Т.М., Костин А.Б., Рубинштейн А.И.</i> О предельных циклах специального вида для динамических систем на плоскости	218
<i>Карачик В.В., Турметов Б.Х.</i> Задача типа Бицадзе–Самарского с двойной инволюцией	225
<i>Кирьяцкий Э.Г.</i> О свойствах линейного дифференциального оператора, определенного в классе однолистных функций	230
<i>Кислякова Е.В., Кисляков М.А.</i> Квалиметрический подход к построению системы мониторинга и диагностики энергетического оборудования	235
<i>Кристалинский В.Р., Расулов К.М., Ферамузов Д.Э.</i> Об одном эффективном алгоритме решения модельной краевой задачи типа Гильберта для бианалитических функций в круге	242
<i>Михалёва Т.И., Расулов К.М.</i> О решении краевой задачи типа Газемана для квазигармонических функций третьего рода в круговых областях	250
<i>Нагорная Т.Р., Расулов К.М.</i> Об одном случае эффективного решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в односвязных областях	256
<i>Поцейко П.Г.</i> Сингулярный интеграл Валле Пуссена как метод суммирования ряда Фурье – Чебышёва	260
<i>Садекова Е.Х.</i> Об одной задаче для чётного тригонометрического полинома, наименее уклоняющегося от нуля	273
<i>Светлаков А.В., Банару Г.А.</i> О проблемах и особенностях анализа свойств временного автомата	278
<i>Солодченкова Т.Б.</i> Применение дифференциального и интегрального исчисления к решению задач биомедицинского содержания	287
<i>Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Писаренкова Е.Д.</i> Представление решений нелокальных задач теплопроводности в виде рядов по полиномам Бернулли и Эйлера	292
<b>РАЗДЕЛ 4. Новые информационные технологии в образовании</b>	302
<i>Абдуллаева М.М., Челак А.И.</i> Баланс между работой и личной жизнью в условиях дистанционной работы у учителей средних школ	302
<i>Акуленок М.В., Тихонов М.Р., Шикуча О.С.</i> Разработка междисциплинарного	

проектного задания «Структура данных» при подготовке магистров по направлению 27.04.02	307
<i>Богданова Н.Н., Светлаков А.В.</i> Численное дифференцирование с помощью СКМ Wolfram Mathematica	313
<i>Воинская Л.М., Киселева О.М.</i> Оценка востребованности элективного курса по созданию виртуальных помощников	319
<i>Елисеенков А.В., Гомонов С.А.</i> Применение смешанных стратегий при разрешении конфликтов социальных групп	324
<i>Казанцев В.В., Козлов С.В.</i> Особенности работы преподавателя в программной оболочке «Информационная система контроля учета параметров обучения»	328
<i>Кованцев А.В., Гомонов С.А.</i> О некоторых перспективах применения нейросетей в археологии	334
<i>Козлов С.В., Быков А.А.</i> Использование функций при составлении алгоритмов для формального исполнителя на языке Python	338
<i>Кузнецова А.С.</i> Представления старост академических групп вузов об оптимальном функциональном состоянии в учебном процессе	343
<i>Сенькина Г.Е., Расулов К.М.</i> Преимущества и недостатки современных и традиционных форматов обучения: результаты диагностики	347
<i>Суханова А.Г.</i> Компьютерное моделирование в системе Mathcad при выполнении курсовой работы по математике обучающимися в вузе	352
<i>Тимофеева Н.М.</i> О применении комиксов в курсе «Теория и методика обучения информатике»	357
<i>Шаймарданова Л.К.</i> Развитие логического мышления у студентов технического вуза: проблемы и практики	362
<i>Шерстнёва Н.А.</i> Математическое моделирование в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica	367
<b>РАЗДЕЛ 5. Персоналии</b>	373
<i>Расулов К.М., Гомонов С.А., Матюхин В.И.</i> 90-лет профессору Эдуарда Григорьевича Кирьяцкого	373
<b>Сведения об авторах</b>	380

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 25

Издательство Смоленского государственного  
университета

Редакторы *О.В. Папко, И.В. Марусова, Е.А. Воропаева*

---

Подписано к печати 25.04.2024. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать ризографическая.  
Усл. п. л. 24,5. Уч.-изд. л. 24,5. Тираж 300 экз.  
Заказ №

---

Отпечатано с готового оригинал-макета  
ИП Суркова Н.Н.  
214000 г. Смоленск, ул. Б. Советская, д. 12/1  
Тел.: 8-951-697-22-23