

Министерство науки и высшего образования РФ  
Смоленский государственный университет

---

# **Системы компьютерной математики и их приложения**

*Материалы XXIII Международной научной конференции*

Выпуск 23

Смоленск  
Издательство СмолГУ  
2022

УДК 621.396.218  
ББК 32.97  
С 409

*Печатается по решению  
редакционно-издательского  
совета СмолГУ*

**Редакционная коллегия:** *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *С.А. Гомонов*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *Е.П. Емельченков*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Н.М. Тимофеева*, канд. пед. наук, доц.; *И.В. Тихонов*, д-р физ.-мат. наук, проф.

**Системы компьютерной математики и их приложения:**  
С 409 материалы XXIII Международной научной конференции.  
Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. Вып. 23. 416 с.

ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XXIII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 27–28 мая 2022 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218  
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,  
*продолжающееся издание*

© Авторы, 2022  
© Издательство СмолГУ, 2022

# СЕКЦИЯ 1

## Системы компьютерной математики

**Т.К. Бирюкова, М.М. Гершкович**  
*Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН*

УДК 004.042, 004.045, 004.047, 004.73

### **МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИОРИТЕТА ПЕРЕДАЧИ ЛОГИЧЕСКИХ БЛОКОВ ДАННЫХ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕННОСТИ ИНФОРМАЦИИ ВО ВРЕМЕНИ**

Ключевые слова: *передача данных, информационно-телекоммуникационная система, информационная система, автоматизированная информационная система, телекоммуникационная система, очередь передачи данных, пропускная способность канала связи, ценность информации.*

*В статье предложены способы назначения приоритетов пакетам данных при передаче по каналам связи в случае, если пакеты скапливаются из-за несоответствия интенсивности потока данных пропускной способности канала, в том числе после аварий в канале связи.*

*Введено определение логического блока данных как объединения элементов логически связанной информации, характеризующих информационный объект или событие (атрибутов объекта или события). Указано, что состав логического блока определяется экспертом в зависимости от содержания потока данных и от задач информационной системы. Предложено определять приоритеты логических блоков в зависимости от смыслового содержания блоков, а также с учетом изменения ценности информации во времени.*

#### **1. Введение**

В докладе [1] на конференции СКМП-2021 были рассмотрены особенности обработки потоков информации в многоуровневых территориально-распределенных информационных системах, получающих из различных источников данные о событиях с участием информационных объектов (ИО) с неточно известными параметрами. Информационный объект представляет собой совокупность данных, характеризующих некоторую единую сущность (например, физическое лицо, транспортное средство).

В статье [2] отмечается, что основными показателями, определяющими эффективность функционирования информационно-

телекоммуникационной системы, являются вероятностно-временные характеристики, отражающие быстродействие системы по доставке информации адресату и ее дальнейшей обработке с целью принятия соответствующих решений. В работах [3–5] указаны показатели эффективности информационных систем, среди которых – надежность и своевременность предоставления информации.

В согласовании с основными положениями, приведенными в перечисленных работах, и в продолжение [1] в данной статье рассматриваются способы оптимизации передачи данных по каналам связи. Предложен способ назначения приоритетов передаваемым элементам данных с учетом изменения ценности информации во времени, а также с учетом смысловой значимости информации.

В зависимости от типов задач, решаемых пользователями системы (изучение длительно хранящейся в системе информации либо анализ данных в целях быстрого реагирования), различные блоки информации имеют разную ценность для пользователя. Во многих случаях особенно важными являются самые «свежие» данные («возраст» которых, например, несколько минут), а данные, которые задержались на день, уже не так актуальны. Часто далее уже не имеет большого значения, «возраст» информации равен, например, одной неделе или двум, – она может быть полезна только для статистического анализа и бессмысленна для быстрого реагирования.

Помимо роли «возраста» информации, значимость элементов информации в конкретной системе может определяться и другими факторами: важностью получения данных от конкретного источника, актуальностью по типу информации и др.

В ряде случаев своевременная доставка наиболее ценной информации может оказать прямое влияние на успешность решения задач пользователями системы.

## **2. Метод назначения приоритетов логическим блокам данных при передаче по каналам связи**

В информационных системах, где важна оперативность передачи информации, неизбежно возникает проблема оптимизации доставки данных, которые не были своевременно переданы из-за несоответствия мощности потока сообщений пропускной способности канала связи в некоторые промежутки времени. Если мощность потока того же порядка, что и пропускная способность канала, то периодически возникает ситуация, когда текущая мощность потока превышает пропускную способность. В этом случае канал не справляется с передачей, пакеты данных скапливаются, возникает очередь. Также очередь пакетов, предназначенных для передачи, может возникнуть послеаварий или сбоя в работе оборудования.

В силу перечисленных причин актуальной задачей является определение приоритетных блоков информации при передаче. Целесообразно доставлять быстрее наиболее важные блоки с точки зрения смысловой ценности. Под **смысловой ценностью** здесь понимается ценность для пользователя по времени возникновения, по смысловому содержанию.

Для дальнейшего изложения необходимо ввести определение логического блока данных.

**Логический блок данных** – блок логически связанной информации, которая может служить характеристикой информационного объекта или события.

Что считать логическим блоком – определяется экспертом на основе анализа текущей работы и потребностей пользователей системы и зависит от содержания потока данных и от задач системы. Логический блок, характеризующий информационный объект, с логической точки зрения нет смысла делить на более мелкие фрагменты. Эксперт определяет логические блоки так, что их можно использовать для идентификации информационных объектов, а также для поиска и анализа данных. Например, если система содержит данные о физических лицах, то одним логическим блоком можно считать набор текстовых данных, характеризующих информационный объект – физическое лицо (ФЛ), а отдельным логическим блоком – фотографию ФЛ. Но практически бессмысленно назначить логическим блоком только один текстовый атрибут информационного объекта – физического лица (например, фамилию), по нему невозможно провести идентификацию физических лиц в базе данных, поскольку может быть много людей с одинаковой фамилией.

Каждый логический блок может разбиваться на пакеты данных при передаче по каналам связи. Пока все передаваемые пакеты, составляющие логический блок, не будут получены в точке приема данных и снова собраны в блок, информацией из отдельных пришедших пакетов невозможно оперировать в задачах. Так, для идентификации информационных объектов – физических лиц в состав полей, определяющих ИО, целесообразно включить фамилию, имя, дату рождения, номер паспорта. Пока все эти данные о физическом лице не собраны из получаемых пакетов, нельзя определить идентичность одного ИО другому. Для простоты изложения ценность пакета будем считать равной ценности логического блока, в который он входит. Если более ценные пакеты (т.е. пакеты, входящие в состав более ценных блоков) при передаче будут перемешаны с менее ценными пакетами (то есть пакетами, входящими в состав менее ценных блоков), то сборка более ценных блоков из пришедших пакетов произойдет позднее и пользоваться этими блоками можно будет позже, чем если бы более

ценные пакеты передавались раньше других. Например, если важно скорее получить возможность идентифицировать ФЛ, то нецелесообразно перемешивать пакеты, содержащие текстовые данные о ФЛ, с пакетами, содержащими фотографии, так как фотография имеет большой объем, составляющие ее пакеты дольше будут передаваться по сети, и поэтому фотография может быть собрана из пакетов в логический блок позже, чем текстовый логический блок.

Таким образом, предлагается устанавливать приоритеты передачи логических блоков информации и, соответственно, приоритеты составляющих их пакетов в зависимости от смыслового содержания блоков и «возраста» информации в блоках.

### **3. Заключение**

В статье предложены способы решения проблемы установки приоритетов пакетам данных при передаче по каналам связи в случае, если пакеты скапливаются в условиях, когда пропускная способность канала оказывается меньшей, чем интенсивность потока данных, в том числе после ликвидации неисправностей канала связи или передающего / принимающего оборудования. Введено определение логического блока данных как объединения элементов логически связанной информации, которая является характеристикой информационного объекта или события. Указано, что состав элементов логического блока определяется экспертом в зависимости от содержания потока данных и от задач информационной системы.

Предложено назначать приоритеты логическим блокам данных при передаче в зависимости от их смыслового содержания, а также с учетом изменения ценности информации во времени. Отмечено, что целесообразно раньше передавать пакеты данных, на которые разбиваются логические блоки с более высоким приоритетом, чем с низким (не перемешивая пакеты из блоков с разным приоритетом).

### **Литература**

1. Бирюкова Т.К., Гершкович М.М. Особенности компьютерной обработки данных с неточно известными параметрами в многоуровневых территориально-распределенных информационно-телекоммуникационных системах // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2021): материалы XXII Международной научной конференции (Смоленск, 28–29 мая 2021). Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2021. Вып. 22. С. 27–36.

2. Комплекс программно-математических средств моделирования информационно-телекоммуникационных систем / И.А. Соколов [и др.] // Системы и средства информатики, 2006. Т. 16, № 1. С. 4–31.

3. Зацаринный А.А., Сучков А.П. Информационное взаимодействие в распределенных системах ситуационного управления. М.: Торус Пресс, 2021. 268 с.

4. Зацаринный А.А., Ионенков Ю.С. Оценка эффективности информационно-телекоммуникационных систем. М.: НИПКЦ Восход-А, 2020. 120 с.

5. Зацаринный А.А., Ионенков Ю.С. Метод выбора варианта построения информационно-телекоммуникационной системы //Системы и средства информатики. 2019. Т. 29, № 3. С. 114–126.

**T.K. Biryukova, M.M. Gershkovich**

The Institute of Informatics Problems of the Federal Research Center  
«Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences

## **METHODS FOR DETERMINING THE PRIORITY OF THE TRANSMISSION OF LOGICAL DATA BLOCKS ACCORDING TO THE VARIATIONS IN THE VALUE OF INFORMATION IN TIME**

**Keywords:** *data transfer, information system, telecommunication system, automated information system, data transmission queue, communication channel capacity, value of information.*

**Abstract.** *The article proposes methods for assigning priorities to data packets during transmission over communication channels when the channel capacity is less than the intensity of the data flow, including the case of communication channel failure. Also considered the case of communication channel failure, when data packets accumulate. The logical data block is defined as a combination of elements of logically related information, that characterizes an information object or event (attributes of an object or event). The composition of the logical block has to be determined by the expert depending on the content of the data flow and on the tasks of the information system.*

*It is proposed to determine the priorities of logical blocks depending on the semantic content of the blocks, as taking into account the change in the value of information over time.*

**А.А. Бондарь**

*Российский технологический университет – МИРЭА*

УДК 621.391

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ В ЦЕПИ РЕТРАНСЛЯТОРОВ**

**Ключевые слова:** *системы цифровой связи, помехоустойчивое кодирование, блочное кодирование, код Хемминга, синдром, декодирование стираний, ретрансляция.*

*В работе приводятся результаты исследования двух методов передачи данных через цепь ретрансляторов: с полной перекодировкой или без неё.*

**Введение.** Рассматривается система цифровой связи, состоящая из цепи приёмников-ретрансляторов. Сообщения передаются последовательно по радиоканалу. При передаче от одного ретранслятора к другому сигнал подвергается воздействию помех и шумов, которые могут исказить сообщение.

В случае, если сообщение передаётся по цепи ретрансляторов без контроля ошибок, возникающих при передаче, происходит накопление ошибок в сообщении после каждой ретрансляции.

Решением данной проблемы является гибкое использование алгоритмов помехоустойчивого кодирования (применение разных алгоритмов кодирования в зависимости от условий передачи либо использование одного алгоритма кодирования и различных способов его декодирования), которые будут исправлять ошибки, возникающие в сообщениях, при прохождении данных через каждый ретранслятор. В данной статье рассматриваются корректирующие алгоритмы, принцип действия которых основывается на коде Хемминга.

**Алгоритмы Хемминга и стираний.** Алгоритм кодирования и декодирования Хемминга представляет из себя линейный блочный код, содержащий помимо исходных (информационных) бит добавочные (проверочные), благодаря которым возможно обнаружить позицию одиночной ошибки в закодированном слове и исправить её.

Кодирование осуществляется путём умножения вектора информационных бит на порождающую матрицу либо на порождающий многочлен (если кодирование осуществляется в полиномиальной форме). Декодирование кода Хемминга и исправление ошибок может осуществляться разными алгоритмами. Стандартный алгоритм Хемминга предполагает умножение принятого кодового вектора на проверочную матрицу. Результатом такого перемножения станет вектор синдрома, который при отсутствии ошибок будет нулевым, а при наличии одной ошибки укажет на её позицию в принятом кодовом слове.

В данной статье, помимо стандартного алгоритма декодирования, рассматриваются алгоритмы декодирования стираний и декодирования стираний с выбором [4], которые могут исправлять две и три ошибки в принятом кодовом слове.

Декодирование стираний основывается на правиле, что сумма бит на позициях всех ненулевых коэффициентов проверочного многочлена (полиномиальный аналог проверочной матрицы) по модулю два всегда равна нулю. Поскольку код Хемминга циклический, то при сдвиге на один бит всего кодового слова также получается кодовое слово. Соответственно, путём циклического сдвига можно переместить биты принятого вектора по всем позициям и в итоге вернуться к исходному



вектору. Алгоритм декодирования стираний начинается с того, что выбираются наименее надёжные биты, которые «стираются» (на их позиции не записывается ни нуль, ни единица). Затем в стёртые биты записывается значение, соответствующее правилу суммы бит на позициях ненулевых коэффициентов проверочного полинома. Если на таких позициях стёртых бит нет, то происходит последовательный сдвиг на один бит всего кодового слова до тех пор, пока каждый бит не вернётся на свою начальную позицию. По мере сдвига стёртые биты заполняются значениями: происходит исправление «стираний».

Декодирование стираний с выбором основано на обычном декодировании стираний с той лишь разницей, что обычное стирание способно исправить две ошибки в принятом слове, а стирание с выбором – три. Для этого из трёх стёртых бит выбирается один, которому в первом случае присваивается значение нуля, во втором – единицы. После этого два получившихся предполагаемых слова декодируются обычным стиранием, а затем из них выбирается то, которое наиболее похоже на принятый вектор.

Все рассматриваемые алгоритмы не требуют большого количества вычислительных мощностей, что в случае использования мобильных ретрансляторов является преимуществом перед «тяжёлыми» алгоритмами (алгоритм Чейза или БЧХ).

**Исправление ошибок с перекодировкой и без неё.** При передаче сообщения по цепи ретрансляторов с исправлением ошибок возможны три случая: ошибки, которые алгоритм не может исправить (их будет больше одной), попадают в информационные биты; неисправленные ошибки попадают и в проверочные, и в информационные биты; ошибки попадают полностью в проверочные биты. В первом и втором случаях избавиться от ошибок будет уже невозможно, а в третьем, при отбрасывании проверочных бит и повторном кодировании информационных, ошибка будет устранена.

Отсюда можно предположить, что, применяя полную перекодировку на каждом ретрансляторе, можно избавиться от части ошибок, с которыми не справился применяемый алгоритм. Если же применять только алгоритм по исправлению ошибок, то любые комбинации ошибок, которые он не сможет исправить, приведут к появлению еще большего числа ошибок: либо алгоритм добавит ещё ошибку, либо, при следующих передачах и приёмах, сообщение исказится ещё сильнее.

**Моделирование.** Для проверки выдвинутого предположения было проведено математическое моделирование передачи кодовых сообщений по цепи, состоящей из передатчика, приемника и трёх ретрансляторов (рис. 1).

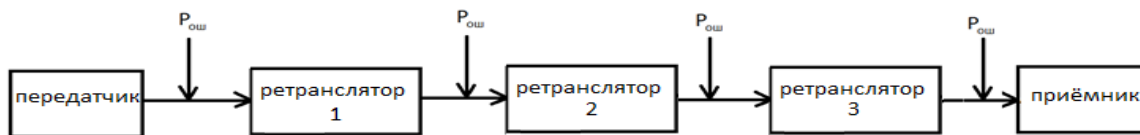


Рис. 1. Схема цепи из трёх ретрансляторов

Число передач сообщения по радиоканалу – 4. При каждой передаче возможно появление битовой ошибки с вероятностью  $P_{ош}$ . Каждый ретранслятор применяет к принятому сообщению алгоритм декодирования, исправляющий ошибки. После применения корректирующего алгоритма вероятность битовой ошибки станет равна  $P_{ош,исп}$  и будет меньше  $P_{ош}$ . Таким образом, при использовании корректирующего декодирования перед каждой новой ретрансляцией уменьшается вероятность появления битовой ошибки и накопление ошибок будет идти медленнее, чем при ретрансляции без декодирования.

В зависимости от моделируемого метода декодирования (с перекодировкой информационных бит или без) передаваемое слово после исправления ошибок либо сразу подается на выход ретранслятора, либо подвергается перекодировке перед дальнейшей передачей.

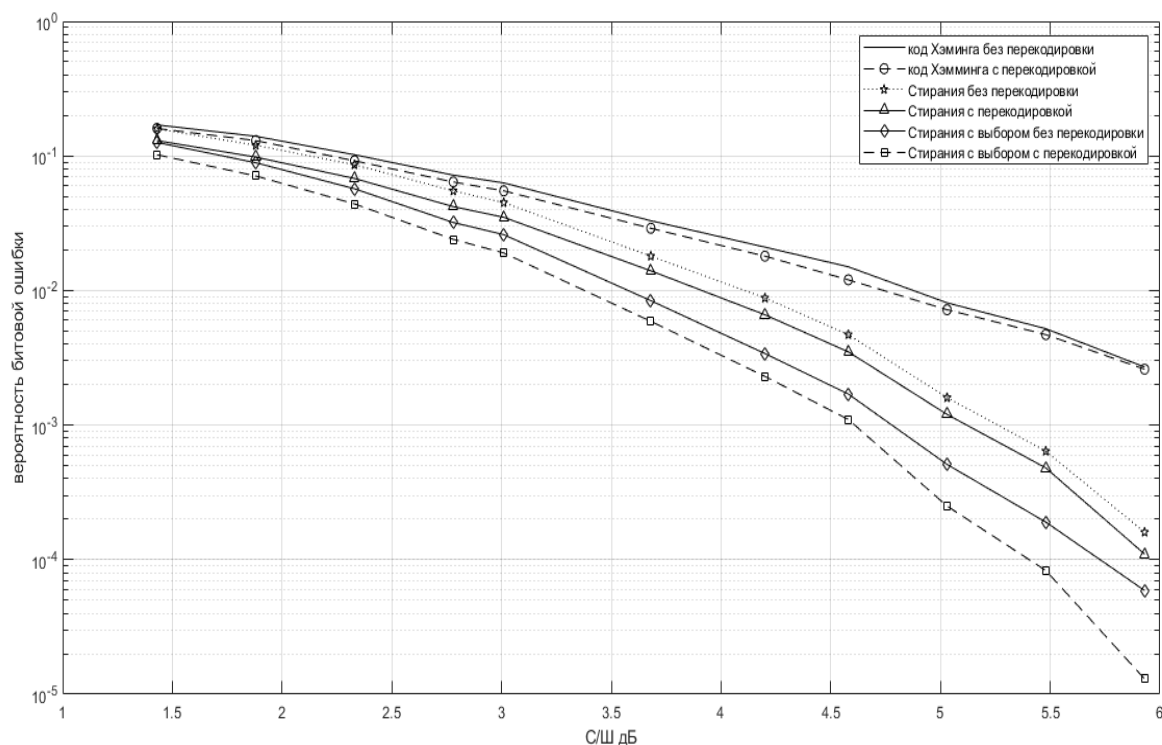


Рис. 2. Кривые помехоустойчивости для трёх алгоритмов декодирования с перекодировкой и без неё

Ниже приведены результаты моделирования работы схемы с рисунка 1 при использовании стандартного алгоритма декодирования Хемминга (исправляет одну ошибку), алгоритма декодирования стираний (исправляет две ошибки) и алгоритма декодирования стираний

с выбором (исправляет три ошибки). Все три алгоритма тестировались с использованием перекодировки и без неё.

**Выводы.** Как видно из диаграммы, при использовании любого из трёх алгоритмов декодирования полная перекодировка сообщения даёт выигрыш в помехоустойчивости на 0.2 дБ по сравнению с передачей без перекодировки, когда к ретранслируемому сообщению применяется только корректирующий алгоритм. Оптимальным является сочетание алгоритма декодирования стираний с выбором и полной перекодировки сообщения. При вероятности битовой ошибки  $5 \times 10^{-3}$  такая комбинация алгоритмов имеет преимущество перед стандартным алгоритмом Хемминга в 2 дБ.

Кроме того, можно предположить, что с увеличением отношения сигнал-шум разница между декодированием Хемминга без перекодировки и с перекодировкой уменьшается. Это можно объяснить тем, что при возрастании отношения сигнал-шум скорее будут возникать одиночные ошибки, которые стандартный алгоритм декодирования Хемминга способен исправить без дополнительных затрат на перекодировку.

### Литература

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: пер. с англ. 2-е изд., исп. М.: Издат. дом «Вильямс», 2003. 1104 с.
2. Кларк Дж., мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987. 392 с.
3. Золотарев В.В., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы: справочник / под ред. чл.-кор. РАН Ю.Б.Зубарева. М.: Горячая линия-Телеком, 2004. 126 с.
4. Бондарь А.А. Исследование алгоритма декодирования стираний с выбором // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, Изд-во СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 11–19.
5. Бондарь А.А. Исследование различных алгоритмов декодирования стираний для повышения помехоустойчивости цифровой системы связи // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, Изд-во СмолГУ, 2021. Вып. 22. С. 37–42.

### A.A. Bondar

Chair of radio electronic systems and complexes, Institute of Radio Engineering and Telecommunication Systems, RTU MIREA

## MODELLING AND RESEARCH OF THE ERROR-CORRECTING ALGORITHMS IN THE CHAIN OF REPEATERS

**Keywords:** *digital communication systems, noise-resistant coding, block coding, Hamming code, syndrome, decoding erasures, retransmission.*

**Abstract.** *The article presents the results of the research into the methods of information transmission through the chain of repeaters, with a full cycle of decoding-coding or without it.*

**В.Р. Кристалинский**  
*Смоленский государственный университет*  
**П.Л. Лютикас**  
*ВА ВПВО ВС РФ*

УДК 519.688

## **ИМИТАЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

Ключевые слова: *система массового обслуживания, дифференциальные уравнения Колмогорова, системы компьютерной математики.*

*В данной работе описывается построение математической и компьютерной модели процесса функционирования сложной технической системы на примере зенитной ракетной батареи и исследование этой модели с помощью системы Wolfram Mathematica.*

Математическое моделирование дискретных систем со стохастическим характером функционирования предполагает использование моделей массового обслуживания, описываемых в терминах аппарата теории вероятностей. Рассмотрим построение такой модели на примере модели функционирования зенитной ракетной батареи в процессе отражения удара средств высокоточного оружия.

Анализ современного состояния моделирования систем противовоздушной обороны (ПВО) показывает, что основное практическое применение получили имитационные математические модели. Теория массового обслуживания (ТМО) занимает одно из ведущих мест в математической теории исследования операций, являющейся мощным инструментом при исследованиях различного профиля, особенно при анализе сложных (больших) систем.

Имитационные методы моделирования нашли широкое применение благодаря возможности учета конкретных условий боевых действий частей и подразделений войсковой ПВО с воздушным противником, а также тактико-технических характеристик зенитных ракетных комплексов (ЗРК) и средств воздушного нападения (СВН), что делает их привлекательными для анализа поведения того или иного фактора, влияющего на эффективность ЗРК.

Цель исследования заключается в разработке компьютерной модели функционирования зенитной ракетной батареи (зрбатр) в процессе отражения удара средств высокоточного оружия (ВТО) в виде системы

дифференциальных уравнений (ДУ) Колмогорова и аналитических выражений для основных показателей живучести элементов ЗРК.

Долгое время считалось, что разработка математических моделей на основе теории «марковских» процессов является достаточно трудоемкой, а сами модели, полученные в виде системы ДУ, – слишком громоздкими для их реализации на ЭВМ. С появлением пакетов современных программ компьютерной математики, в частности системы Wolfram Mathematica, позволяющих находить решения систем ДУ в аналитическом или численном виде, подобные трудности отпадают. Применение теории «марковских» цепей позволяет построить модель збрatr как системы массового обслуживания (СМО) с учетом основных факторов боя, принятых в вероятностной форме, что делает её применение совместно с уже имеющимися моделями чрезвычайно полезным для решения различных оптимизационных задач.

Стремление к использованию для анализа сложных систем хорошо разработанного аппарата ТМО предопределяет гипотезу о пуассоновских входящих потоках заявок и потоках восстановления, циркулирующих внутри анализируемой системы, которая будет называться «марковской», где все будущие вероятностные характеристики зависят от состояния, в котором она находится в настоящий момент времени.

Задачи исследования состояли в определении облика математической модели функционирования збрatr с использованием графа состояний, с помощью которого были определены математические выражения для комплекса показателей и параметров, характеризующих живучесть двух самоходных огневых установок (СОУ) и пусковой заряжающей установки (ПЗУ).

Новизна работы состоит в том, что впервые представлена математическая модель ЗРК в виде системы ста двадцати ДУ, описывающая процесс боя ЗРК с воздушным противником в форме дифференциальной игры.

Для того чтобы описать случайный процесс, протекающий в дискретной системе с непрерывным временем, прежде всего нужно проанализировать причины, вызывающие переход системы из состояния в состояние. Для СМО основным фактором, обуславливающим протекающие в ней процессы, является простейший поток случайных событий. Поэтому математическое описание любой СМО начинается с описания потока событий.

Применение теории «марковских» цепей позволяет построить модель збрatr как СМО с учетом основных её характеристик и характеристик СВН, принятых в вероятностной форме, что делает её применение совместно с уже имеющимися моделями чрезвычайно полезным для решения различных исследовательских задач.

Модель предназначена для оценки влияния на живучесть ЗРК эффективности ее боевого применения и защиты в процессе отражения удара ВТО. Под живучестью понимается способность ЗРК и его составных элементов сохранять и восстанавливать свою боеспособность при воздействии ВТО.

Модель построена как двухпоточная СМО без ожидания в виде «марковской» цепи, что позволило описать основные процессы функционирования ЗРК с помощью системы, состоящей из ста двадцати ДУ. Теоретической основой построения модели является развитый авторами метод динамики средних на основе теории «марковских» цепей.

В процессе разработки модели были приняты следующие основные допущения.

1. Все потоки событий, происходящие в системе, пуассоновские.
2. Вероятность одновременного наступления событий пренебрежимо мала.
3. В потоках событий отсутствует период последствия.
4. Изменение вероятностей состояний непрерывно по времени.
5. Вероятности обнаружения, принятие решения на обстрел и огневого поражения непрерывны по времени и постоянны.
6. Факторы защиты, имитации и маскировки обладают свойством аддитивности.
7. Живучесть ПБУ на порядок выше живучести СОУ и ПЗУ.
8. Восстановление техники начинается после окончания боя.

Зенитная ракетная батарея моделировалась в составе двух СОУ и ПЗУ. При решении задачи определялись вероятности состояний ЗРК, характеризующие его уязвимость к воздействию ВТО. Батарея моделируется как двухканальная СМО потоков заявок двух типов без ожидания, основанная на теории «марковских» цепей.

Модель позволяет исследовать сто двадцать различных состояний ЗРК (табл. 1). Выходные параметры представляют собой вероятности нахождения ЗРК в каждом из ста двадцати исследуемых состояний и комплекс показателей, характеризующих живучесть комплекса в процессе отражения удара ВТО. Выходные параметры определяются как непрерывные функции времени и могут определяться в любой временной точке расчетного периода. Входные параметры характеризуют возможности, эффективность ВТО и ЗРК, а выходными параметрами являются показатели живучести ЗРК. Более подробно описано начальное состояние системы, где функционируют все ее элементы (СОУ1, СОУ2, ПЗУ), остальные состояния описываются по аналогии.

Таблица 1

| №<br>п/п | Наименование состояния  | Условные обозначения            |                          |
|----------|---|---------------------------------|--------------------------|
|          |   | Состояние                       | Вероятность<br>состояния |
| I        | Функционируют все элементы системы<br>(СОУ1, СОУ2, ПЗУ)           | $S0 A, B$<br>( $m, n, k$ )      | $\sum_{i=0}^{14} W_i$    |
| 1.       | То же при отсутствии обстреливаемых целей                         | $P0 A, B$<br>( $m, n, k$ )      | $W0$                     |
| 2.       | То же при обстреле одной цели 1-го типа                           | $P1 A-1, B$<br>( $m, n, k$ )    | $W1$                     |
| 3.       | То же при обстреле одной цели 2-го типа                           | $P2 A, B-1$<br>( $m, n, k$ )    | $W2$                     |
| 4.       | То же при обстреле двух целей 1-го типа                           | $P3 A-2, B$<br>( $m, n, k$ )    | $W3$                     |
| 5.       | То же при обстреле одной цели 1-го типа и<br>одной цели 2-го типа | $P4 A-1, B-1$<br>( $m, n, k$ )  | $W4$                     |
| 6.       | То же при обстреле двух целей 2-го типа                           | $P5 A, B-2$<br>( $m, n, k$ )    | $W5$                     |
| 7.       | То же при обстреле трех целей 1-го типа                           | $P6 A-3, B$<br>( $m, n, k$ )    | $W6$                     |
| 8.       | То же при обстреле двух целей 1-го типа и<br>одной цели 2-го типа | $P7 A-2, B-1$<br>( $m, n, k$ )  | $W7$                     |
| 9.       | То же при обстреле одной цели 1-го типа и<br>двух целей 2-го типа | $P8 A-1, B-2$<br>( $m, n, k$ )  | $W8$                     |
| 10.      | То же при обстреле трех целей 2-го типа                           | $P9 A, B-3$<br>( $m, n, k$ )    | $W9$                     |
| 11.      | То же при обстреле четырех целей 1-го типа                        | $P10 A-4, B$<br>( $m, n, k$ )   | $W10$                    |
| 12.      | То же при обстреле трех целей 1-го типа и<br>одной цели 2-го типа | $P11 A-3, B-1$<br>( $m, n, k$ ) | $W11$                    |
| 13.      | То же при обстреле двух целей 1-го типа и<br>двух целей 2-го типа | $P12 A-2, B-2$<br>( $m, n, k$ ) | $W12$                    |
| 14.      | То же при обстреле одной цели 1-го типа и<br>трех целей 2-го типа | $P13 A-1, B-3$<br>( $m, n, k$ ) | $W13$                    |
| 15.      | То же при обстреле четырех целей 2-го типа                        | $P14 A, B-4$<br>( $m, n, k$ )   | $W14$                    |
| II       | Функционируют две СОУ1 и СОУ2 (без<br>ПЗУ)                        | $S1 A, B$<br>( $m, n, 0$ )      | $\sum_{i=15}^{29} W_i$   |
| III      | Функционируют СОУ1 и ПЗУ (без СОУ2)                               | $S2 A, B$<br>( $m, 0, k$ )      | $\sum_{i=30}^{44} W_i$   |
| IV       | Функционирует СОУ1 (без СОУ2 и ПЗУ)                               | $S3 A, B$<br>( $m, 0, 0$ )      | $\sum_{i=45}^{59} W_i$   |
| V        | Функционирует СОУ2 и ПЗУ (без СОУ1)                               | $S4 A, B$<br>( $0, n, k$ )      | $\sum_{i=60}^{74} W_i$   |

|      |  |                          |                          |
|------|--|--------------------------|--------------------------|
| VI   | Функционирует СОУ2 (без СОУ1 и ПЗУ)                      | $S5 A, B$<br>$(0, n, 0)$ | $\sum_{i=75}^{89} W_i$   |
| VII  | Функционирует ПЗУ (без СОУ1 и СОУ2)                      | $S6 A, B$<br>$(0, 0, k)$ | $\sum_{i=90}^{104} W_i$  |
| VIII | Система полностью не функционирует (без СОУ1, СОУ2, ПЗУ) | $S7 A, B$<br>$(0, 0, 0)$ | $\sum_{i=105}^{119} W_i$ |

В модели используются следующие показатели живучести зенитной ракетной батареи.

1. Вероятность нахождения комплекса в боеспособном состоянии, при котором полностью сохранены его боевые возможности, –  $W_{ЗРК}$  (комплексный показатель).

2. Вероятность нахождения комплекса в состоянии, при котором хотя бы одна СОУ боеспособна, –  $W_{1СОУ}$  (частный показатель).

3. Вероятность нахождения комплекса в состоянии, при котором обе СОУ одновременно находятся в боеспособном состоянии, –  $W_{2СОУ}$  (частный показатель).

4. Вероятность состояния комплекса, при котором ПЗУ сохраняет свою боеспособность, –  $W_{ПЗУ}$  (частный показатель).

Для удобства пользования показатели эффективности ВТО и ЗРК сведены в таблицы. Комплекс параметров, характеризующих эффективность ВТО, представлен в таблице 2. Комплекс показателей огневых возможностей ЗРК приводится в таблице 3. Параметры и показатели, характеризующие эффективность ВТО и ЗРК, являются входными параметрами, подающимися на вход модели.

При выборе параметров и показателей учитывалось, что они удовлетворяют следующим требованиям.

1. Ясный физический смысл.

2. Соответствие функциональному предназначению системы, которую параметр или показатель должен характеризовать.

3. Наличие качественных или количественных данных, обеспечивающих критичность параметров или показателей к тем или иным условиям моделирования.

4. Системность, т. е. вписываться в систему параметров и показателей подсистем, составляющих объект моделирования как единое целое. Параметры и показатели должны входить в состав целевой функции системы.

Таблица 2

| № п/п | Наименование показателя                                   | Условное обозначение |
|-------|---|----------------------|
| 1.    | Поток поражающих стрельб по СОУ1 целями 1-го и 2-го типов | $\lambda_1$          |
| 2.    | Поток поражающих стрельб по СОУ2 целями 1-го и 2-го типов | $\lambda_2$          |
| 3.    | Поток поражающих стрельб по ПЗУ целями 1-го и 2-го типов  | $\lambda_3$          |



|    |  |              |
|----|--|--------------|
| 4. | Вероятность огневого поражения элементов ЗРК | $Q_0$        |
| 5. | Время цикла стрельбы ВТО                     | $t_{ц\ ВТО}$ |

Таблица 3

| № п/п | Наименование показателя                        | Условное обозначение |
|-------|--|----------------------|
| 1.    | Поток поражающих стрельб по целям 1-го типа    | $\alpha_1$           |
| 2.    | Поток поражающих стрельб по целям 2-го типа    | $\alpha_2$           |
| 3.    | Вероятность огневого поражения целей 1-го типа | $Q_1$                |
| 4.    | Вероятность огневого поражения целей 2-го типа | $Q_2$                |
| 5.    | Время цикла стрельбы ЗРК                       | $t_{ц\ зрк}$         |
| 6.    | Поток восстановления СОУ1                      | $\gamma_1$           |
| 7.    | Поток восстановления СОУ2                      | $\gamma_2$           |
| 8.    | Поток восстановления ПЗУ                       | $\gamma_3$           |

Граф состояний боевых действий батареи при отражении удара ВТО изображен на рисунке 1. В таблице 1 приведены обозначения состояний элементов системы ЗРК. Состояния ЗРК обозначены через  $S$ , где  $P$  указывает на порядковый номер состояния,  $W$  – на вероятность состояния, а  $0, i$  – номер группы состояний в таблице 1,  $A, B$  – количество целей соответственно 1-го и 2-го типов, обнаруженных на данный момент времени в этом состоянии, по которым принято решение на обстрел и их огневое поражение.

Варианты и количество ВТО 1-го и 2-го типов, участвующих в ударе, приведены в таблице 4. Стрелками показаны переходы системы из одного состояния в другое под действием потоков событий. Наименования обозначений, показанных на графе состояний, приведены в таблицах 1, 2, 3, 4.

Таблица 4

| Варианты удара | Количество ВТО, участвующих в ударе (1-го типа и 2-го типа) |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|                | 0   | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 3 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| А              | 0   | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 3 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| В              | 0   | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 3 | 1 | 3 | 4 | 4 |

Для наглядности описания происходящих процессов на рисунке 2 более подробно показаны потоки протекающих событий в начальном состоянии системы функционирования элементов ЗРК, когда система полностью исправна. В процессе отражения удара ВТО остальные состояния функционирования системы описываются по аналогии с начальным состоянием с учетом потоков поражающих стрельб ВТО по элементам ЗРК и потоков восстановления комплекса.

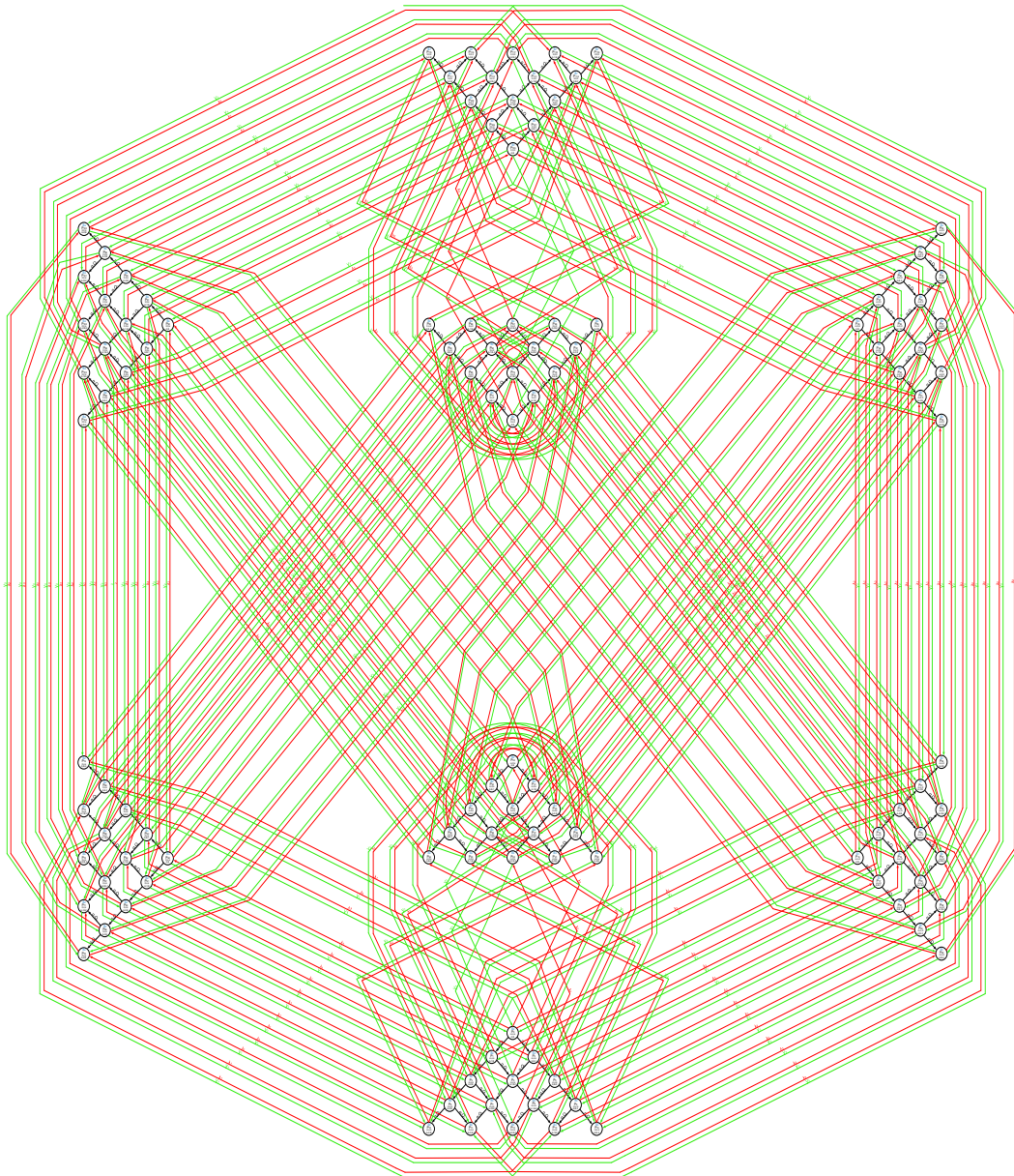


Рис. 1. Граф состояний зенитной ракетной батареи при отражении удара ВТО

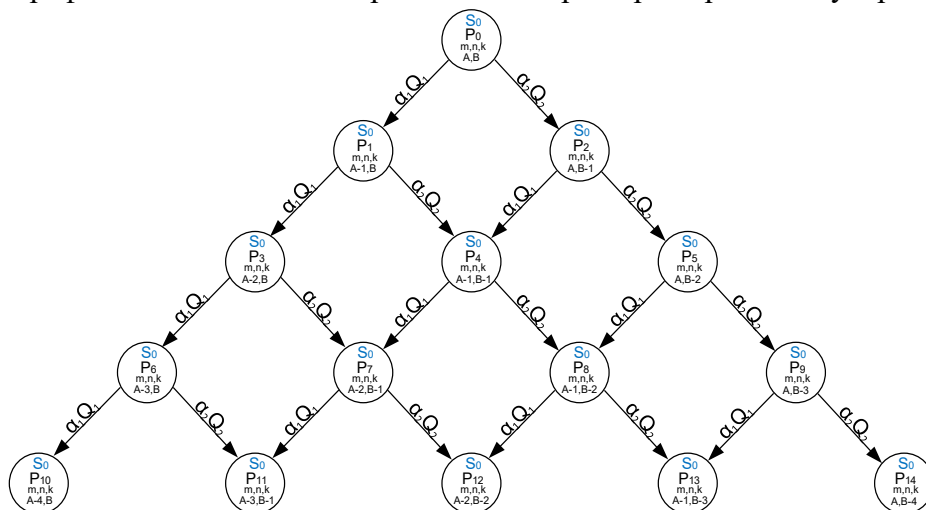


Рис. 2. Граф состояний зенитной ракетной батареи в начальном состоянии функционирования системы

На основе разработанного графа состояний была построена система дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающая динамику боя зенитной ракетной батареи по отражению удара средств ВТО. Для примера составлена система ДУ для начального состояния системы, где функционируют все ее элементы (СОУ1, СОУ2, ПЗУ), остальная система ДУ составляется по аналогии. Пример системы ДУ приведен ниже:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_0}{dt} = P_{15} \cdot \gamma_3 + P_{30} \cdot \gamma_2 + P_{60} \cdot \gamma_1 - P_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - P_0 \cdot \alpha \cdot (Q_1 + Q_2) \\ \frac{dP_1}{dt} = P_{16} \cdot \gamma_3 + P_{31} \cdot \gamma_2 + P_{61} \cdot \gamma_1 - P_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_0 \cdot \alpha \cdot Q_1 - P_1 \cdot \alpha \cdot (Q_1 + Q_2) \\ \frac{dP_2}{dt} = P_{17} \cdot \gamma_3 + P_{32} \cdot \gamma_2 + P_{62} \cdot \gamma_1 - P_2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_0 \cdot \alpha \cdot Q_2 - P_2 \cdot \alpha \cdot (Q_1 + Q_2) \\ \frac{dP_3}{dt} = P_{18} \cdot \gamma_3 + P_{33} \cdot \gamma_2 + P_{63} \cdot \gamma_1 - P_3 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_1 \cdot \alpha \cdot Q_1 - P_3 \cdot \alpha \cdot (Q_1 + Q_2) \\ \frac{dP_4}{dt} = P_{19} \cdot \gamma_3 + P_{34} \cdot \gamma_2 + P_{64} \cdot \gamma_1 - P_4 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_1 \cdot \alpha \cdot Q_2 + P_2 \cdot \alpha \cdot Q_1 - P_4 \cdot \alpha \cdot (Q_1 + Q_2) \\ \frac{dP_5}{dt} = P_{20} \cdot \gamma_3 + P_{35} \cdot \gamma_2 + P_{65} \cdot \gamma_1 - P_5 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_2 \cdot \alpha \cdot Q_2 - P_5 \cdot \alpha \cdot (Q_1 + Q_2) \\ \frac{dP_6}{dt} = P_{21} \cdot \gamma_3 + P_{36} \cdot \gamma_2 + P_{66} \cdot \gamma_1 - P_6 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_3 \cdot \alpha \cdot Q_1 - P_6 \cdot \alpha \cdot (Q_1 + Q_2) \\ \frac{dP_7}{dt} = P_{22} \cdot \gamma_3 + P_{37} \cdot \gamma_2 + P_{67} \cdot \gamma_1 - P_7 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_3 \cdot \alpha \cdot Q_2 + P_4 \cdot \alpha \cdot Q_1 - P_7 \cdot \alpha \cdot (Q_1 + Q_2) \\ \frac{dP_8}{dt} = P_{23} \cdot \gamma_3 + P_{38} \cdot \gamma_2 + P_{68} \cdot \gamma_1 - P_8 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_4 \cdot \alpha \cdot Q_2 + P_5 \cdot \alpha \cdot Q_1 - P_8 \cdot \alpha \cdot (Q_1 + Q_2) \\ \frac{dP_9}{dt} = P_{24} \cdot \gamma_3 + P_{39} \cdot \gamma_2 + P_{69} \cdot \gamma_1 - P_9 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_5 \cdot \alpha \cdot Q_2 - P_9 \cdot \alpha \cdot (Q_1 + Q_2) \\ \frac{dP_{10}}{dt} = P_{25} \cdot \gamma_3 + P_{40} \cdot \gamma_2 + P_{70} \cdot \gamma_1 - P_{10} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_6 \cdot \alpha \cdot Q_1 \\ \frac{dP_{11}}{dt} = P_{26} \cdot \gamma_3 + P_{41} \cdot \gamma_2 + P_{71} \cdot \gamma_1 - P_{11} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_6 \cdot \alpha \cdot Q_2 + P_7 \cdot \alpha \cdot Q_1 \\ \frac{dP_{12}}{dt} = P_{27} \cdot \gamma_3 + P_{42} \cdot \gamma_2 + P_{72} \cdot \gamma_1 - P_{12} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_7 \cdot \alpha \cdot Q_2 + P_8 \cdot \alpha \cdot Q_1 \\ \frac{dP_{13}}{dt} = P_{28} \cdot \gamma_3 + P_{43} \cdot \gamma_2 + P_{73} \cdot \gamma_1 - P_{13} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_8 \cdot \alpha \cdot Q_2 + P_9 \cdot \alpha \cdot Q_1 \\ \frac{dP_{14}}{dt} = P_{29} \cdot \gamma_3 + P_{44} \cdot \gamma_2 + P_{74} \cdot \gamma_1 - P_{14} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_9 \cdot \alpha \cdot Q_2 \end{array} \right.$$

Решение проблемы создания и определения облика комплекса средств защиты ВВТ от атакующих элементов ВТО напрямую зависит

от качества моделирования систем вооружения и боевых действий войск войсковой ПВО, поскольку при этом необходимо применение гибких аналитических моделей, чувствительных к основным факторам современного боя. Использование классических методов моделирования для решения указанной задачи позволяет получить лишь ориентировочные, приблизительные результаты, так как при этом недостаточно полно учитывается случайный характер противоборства средств ПВО и воздушного противника.

Разработанная система ДУ решена с помощью современной программы компьютерной математики «Wolfram Mathematica». При решении задачи были определены численные значения вероятности 120 состояний ЗРК, характеризующие его уязвимость к воздействию ВТО. Следует отметить, что попытка решения той же системы с помощью аналогичной системы Maple не привела к результату. Это свидетельствует о более высокой эффективности системы Wolfram Mathematica для решения данного класса задач. Однако и данная система выдала лишь численное решение.

При решении задачи определялись вероятности состояний збратр, характеризующие её уязвимость к воздействию ВТО. В качестве примера ниже приводится решение системы ДУ для начальных условий модели зенитной ракетной батареи, которая позволяет в вероятностной форме учесть основные факторы, влияющие на эффективность защиты зенитной ракетной батареи от ударов ВТО и других типов СВН. Начальные условия  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ,  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  и  $p_0(0) = 1$ ,  $p_1(0) = \dots = p_{119}(0) = 0$ .

Результаты расчета группы состояний элементов системы ЗРК, когда она полностью не функционирует приведены в таблице 5.

Таблица 5

| Номер вероятности состояния системы                   | Р        |          |          |          |          |            |           |           |          |            |          |          |          |           |            |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|------------|-----------|-----------|----------|------------|----------|----------|----------|-----------|------------|
|   | 105      | 106      | 107      | 108      | 109      | 110        | 111       | 112       | 113      | 114        | 115      | 116      | 117      | 118       | 119        |
| Максимальное численное значение вероятности состояния | 0.113354 | 0.143708 | 0.040278 | 0.125397 | 0.070292 | 0.00985061 | 0.0958351 | 0.0807867 | 0.022585 | 0.00210857 | 0.372162 | 0.417516 | 0.175487 | 0.0327612 | 0.00229022 |

Пример графического решения системы 120 ДУ для указанных начальных условий показан на рисунке 3.

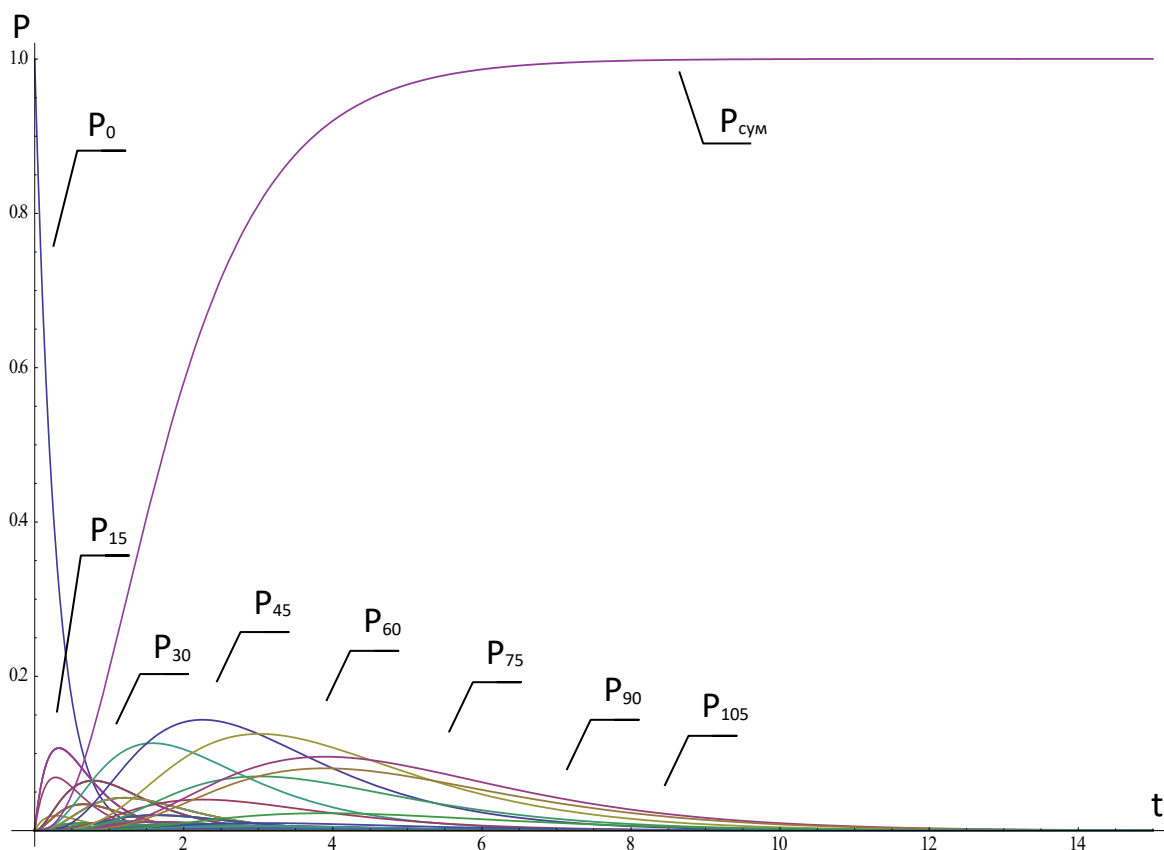


Рис. 3. Вероятности некоторых состояний зенитной ракетной батареи как функции времени

Найденная таким образом взаимосвязь между вероятностями функциональных состояний батареи и показателями эффективности защиты позволяет, кроме того, решать задачи выработки тактико-технических требований к ним, а также оценки их комплексного влияния на эффективность зенитной ракетной батареи в целом.

Анализ полученных зависимостей для некоторых характеристик в примерах «марковских» и «немарковских» СМО позволяет сделать вывод.

1. СМО с пуассоновским входящим потоком событий и с потоком восстановления, подчиняющимся закону Эрланга  $k$ -го порядка, можно отображать графами состояний типа «полумарковского» процесса (ПМП), процессов гибели и размножения и анализировать двумя совершенно различными методами (псевдосостояний и ПМП) с полным совпадением полученных результатов с уже существующими моделями.

2. Рассмотренный алгоритм использования метода ПМП универсален с точки зрения возможности анализировать с его помощью системы с существенно различающимися законами распределения потоков событий, циркулирующих внутри них, например поведения того или иного фактора, влияющего на эффективность ЗРК.

3. Применение теории «марковских» цепей позволяет построить модель зенитного ракетного подразделения как системы массового обслуживания в аналитическом виде с учетом основных факторов боя, принятых в вероятностной форме, с целью обоснования оптимальных значений эффективности ЗРК и его элементов.

4. Разработанный математический аппарат позволяет проводить оценку эффективности и живучести зрбатр в динамике боя с воздушным противником, что позволяет осуществлять решение исследовательских задач в широком диапазоне внутренних и внешних условий.

5. Имитационные математические модели, построенные с помощью данного метода, делают их применение совместно с уже имеющимися моделями чрезвычайно полезным для решения различных оптимизационных задач.

### Литература

1. Шуенкин В.А., Донченко В.С.. Прикладные модели теории массового обслуживания: учебное пособие. Киев: НМК ВО, 1992. 398 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебное пособие. М.: Наука, 1969. 576 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов. 7-е изд., стер. М.: Высш. шк., 1999. 479 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А.. Моделирование систем: учеб. для вузов. 5-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2007. 343 с.
5. Моделирование и проектирование систем: учебное пособие / П.Г. Колядин [и др.]. Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ, 2021. 257 с.

**V.R. Kristalinskii**

Smolensk State University

**P.L. Luticas**

Military Academy of the anti-aircraft defense systems of the Armed Forces  
of the Russian Federation

### **SIMULATION MATHEMATICAL MODEL FUNCTIONING OF A COMPLEX TECHNICAL SYSTEM**

**Keywords:** *queuing system, Kolmogorov differential equations, computer mathematics systems.*

**Abstract.** *This paper describes the construction of a mathematical and computer model of the functioning of a complex technical system using the example of an anti-aircraft missile battery and the study of this model using the Wolfram Mathematica system.*

## РАСПОЗНАВАНИЕ ВИДОВ ЦИФРОВОЙ МОДУЛЯЦИИ РАДИОСИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОСЛОЙНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПО КУМУЛЯНТНЫМ ПРИЗНАКАМ

Ключевые слова: *нейронная сеть, распознавание радиосигналов, кумулянт, цифровая модуляция.*

*В данной работе рассмотрены четыре алгоритма обучения искусственных нейронных сетей для автоматического распознавания видов цифровой модуляции по кумулянтным признакам в условиях низких значений отношения сигнал / шум.*

### 1. Введение

В системах мониторинга радиочастотного спектра важной задачей является автоматическое распознавание видов модуляции радиосигналов. Существующие методы решения этой задачи можно разделить на три основные группы по типу информационных признаков: по форме сигнального созвездия; по распределению разности мгновенных фаз; по структурным и статистическим признакам с использованием кумулянтов высокого порядка [1].

В работе [2] авторами использован набор кумулянтов  $C_{2,0}, C_{4,0}, C_{8,0}$  для распознавания семи видов модуляции (2-PSK, 4-PSK, 8-PSK, 2-FSK, 8-QAM, 16-QAM, 64-QAM) в качестве признаков для дерева логических решений. В результате при отношении сигнала к шуму (ОСШ) 20 дБ среднее значение точности распознавания составляет 93%, при ОСШ 5 дБ результат для 64-QAM слишком низкий (57,8%).

В работе [3] использована нейронная сеть для распознавания видов модуляции радиосигналов, признаками являются кумулянты  $C_{2,0}, C_{1,1}, C_{3,0}, C_{2,1}, C_{1,2}, C_{0,3}, C_{4,0}, C_{3,1}, C_{2,2}, C_{1,3}, C_{0,4}$ . При отношении ОСШ от 10 до 20 дБ вероятность правильного распознавания вида модуляции радиосигналов оказалась равной: 2-ASK – 96,2%, 2-PSK – 96,2%, 2-FSK – 96,6%, 4-ASK – 96%, 4-PSK – 96,9%, 4-FSK – 95,9%, 16-QAM – 93%, 8-QAM – 94,8%.

Из изложенного выше следует, что применение нейронной сети в задаче распознавания приводит к повышению точности решения данной задачи. Эффективное применение кумулянтных признаков и правильный выбор алгоритма нейронной сети для решения задачи распознавания вида цифровой модуляции и является целью настоящей работы.

## 2. Структура многослойной нейронной сети

Основным вычислительным элементом многослойной нейронной сети является искусственный нейрон, который выполняет параметрическое нелинейное преобразование входного вектора в скалярную величину. На рисунке 1 представлена структура двухслойной нейронной сети.

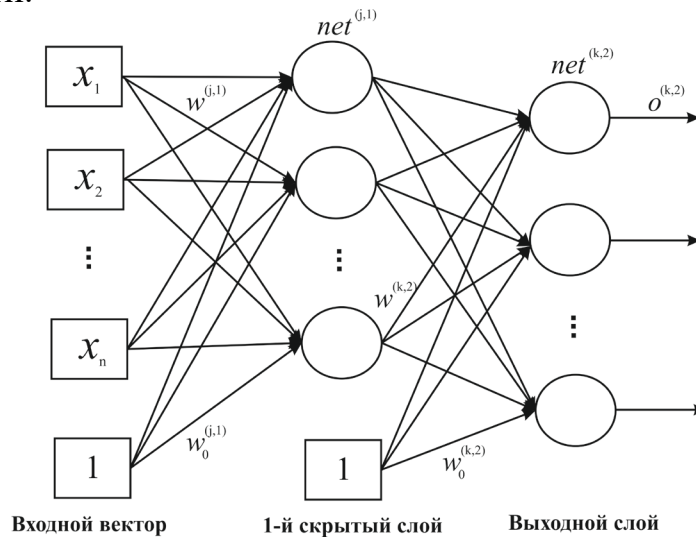


Рис. 1. Структура двухслойной нейронной сети

Нейрон представляет собой вычислительный элемент, описываемый двумя составляющими: сумматор взвешенных компонент входного вектора  $x^T = (1, x_1, x_2, \dots, x_n)$  и нелинейная функция активации  $f(net) = f(w^T x)$ , где  $T$  – знак транспонирования. Для осуществления процедуры обучения нейронной сети формируются пары, состоящие из входных векторов – признаков образов и соответствующих им указаний учителя. Сначала нейронная сеть на основе входного вектора создает собственный выходной образ, а затем сравнивает его с желаемым указанием учителя. Если различий между фактическим и целевым образами нет, то обучение не происходит. В противном случае вводится критерий минимизацией функции квадрата ошибки с помощью настройки весовых коэффициентов нейронной сети  $w^{(j,1)} = (w_0^{(j,1)}, w_1^{(j,1)}, \dots, w_n^{(j,1)})^T$  [2]. Предлагаются следующие методы настройки весовых коэффициентов: метод градиента (SGD), метод Adagrad, метод RMSProp и метод Adam.

– Метод градиента [5] (SGD). При этом изменение весовых коэффициентов имеет вид:

$$\Delta w = -\eta \frac{\partial E_p}{\partial w}, \quad (1)$$



где  $E_p$  – мера ошибки,  $\eta$  – матричный или скалярный шаг алгоритма.

– Метод Adagrad [6–7]. Он представляет собой алгоритм оптимизации на основе градиента, выполняя меньшие обновления для параметров, связанных с часто встречающимися функциями, и более крупные обновления для параметров, связанных с редкими функциями. Формула изменения весовых коэффициентов имеет вид:

$$G_t = G_{t-1} + \left( \frac{\partial E_p}{\partial w} \right)^2, \quad (2)$$

$$\Delta w = -\frac{\eta}{\sqrt{G_t + \varepsilon}} \frac{\partial E_p}{\partial w}, \quad (3)$$

где  $G_t$  – сумма квадратов обновлений, а  $\varepsilon$  – сглаживающий параметр, чтобы избежать деления на 0.

– Метод RMSProp [7]. Формула изменения весовых коэффициентов имеет вид:

$$E[g^2]_t = \gamma E[g^2]_{t-1} + (1-\gamma) g_t^2, \quad (4)$$

$$\Delta w = -\frac{\eta}{\sqrt{E[g^2]_t + \varepsilon}} g_t. \quad (5)$$

Здесь  $E[g^2]_t$  – бегущее среднее в моменте  $t$ .

– Метод Adam [8]. Он вычисляет индивидуальные адаптивные скорости обучения для различных параметров из оценок первого и второго моментов градиентов:

$$\begin{aligned} m_t &= \beta_1 m_{t-1} + (1-\beta_1) g_t, \\ v_t &= \beta_2 v_{t-1} + (1-\beta_2) g_t^2. \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – коэффициент ослабления.

Однако  $m_t$  и  $v_t$  обычно инициализируются нулевыми векторами. Поскольку  $\beta_1$  и  $\beta_2$  близкие к единице, сначала  $m_t$  и  $v_t$  всегда будут близки к нулю. Чтобы решить эту проблему, используются следующие методы для улучшения  $m_t$  и  $v_t$ :

$$\begin{aligned} \hat{m}_t &= \frac{m_t}{1-\beta_1^t}, \\ \hat{v}_t &= \frac{v_t}{1-\beta_2^t}. \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\hat{m}_t$  и  $\hat{v}_t$  – смещение оценки первого и второго моментов.

В итоге правило обновления:

$$\Delta w = -\frac{\eta}{\sqrt{\hat{v}_t + \varepsilon}} \hat{m}_t, \quad (8)$$

### 3. Применение нейронной сети в задаче распознавания видов модуляции

Моделирование нейронной сети проводится в программе Python. Входом нейронной сети является набор значений кумулянтов до 9-го порядка  $C_{2,0}, C_{1,1}, C_{3,0}, C_{2,1}, C_{4,0}, C_{3,1}, C_{2,2}, C_{5,0}, C_{4,1}, C_{3,2}, C_{6,0}, C_{5,1}, C_{4,2}, C_{3,3}, C_{7,0}, C_{6,1}, C_{5,2},$

$C_{4,3}, C_{8,0}, C_{7,1}, C_{6,2}, C_{5,3}, C_{4,4}, C_{9,0}, C_{8,1}, C_{7,2}, C_{6,3}, C_{5,4}$  в диапазоне ОСШ  $-5 \dots +20$  дБ.

При составлении базы данных для обучения нейронной сети были сгенерированы 9000 сигналов (2-PSK, 4-PSK, 8-PSK, 2-FSK, 8-QAM, 16-QAM, 64-QAM, 16-APSK, 32-APSK). Из них 6480 сигналов для обучения, 1620 – для проверки обучения и 900 – для тестирования. Входом является матрица размером  $28 \times 9000$ , а выходом – матрица размером  $9 \times 1000$ . Число эпох равно 500.

Результаты сравнения точности распознавания вида модуляции сигналов нейронной сетью с использованием разных методов настройки весовых коэффициентов при различных значениях ОСШ представлены на рисунках 2, 3 и 4.

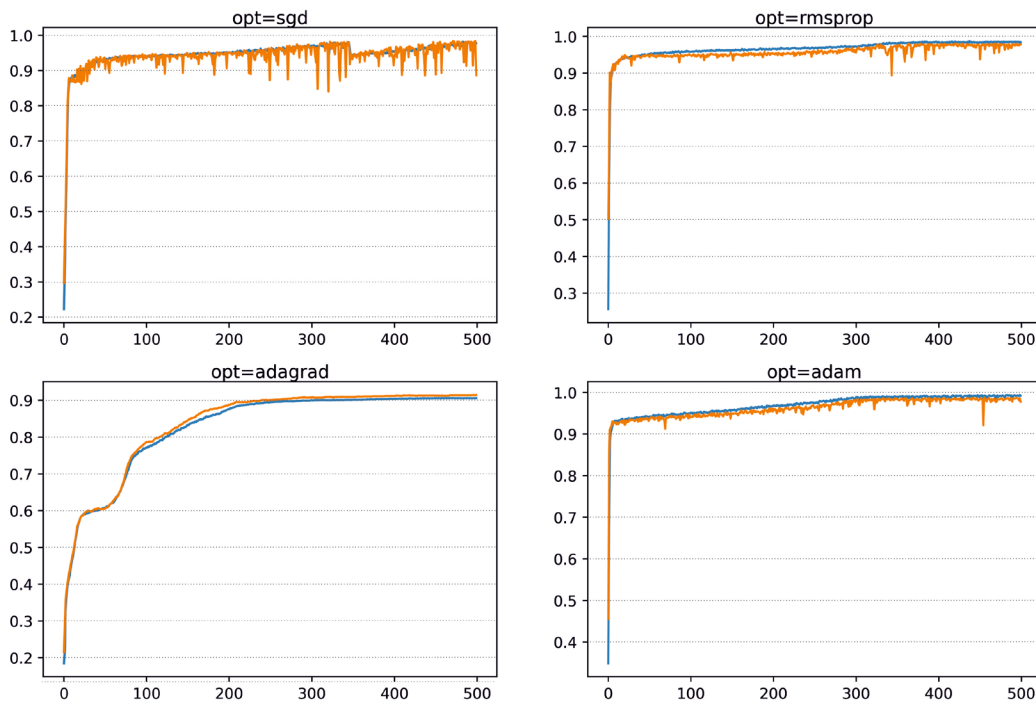


Рис. 2. Вероятность правильного распознавания вида модуляции для обучения (синяя линия) и тестирования (оранжевая линия) при ОСШ от 10 до 20 дБ

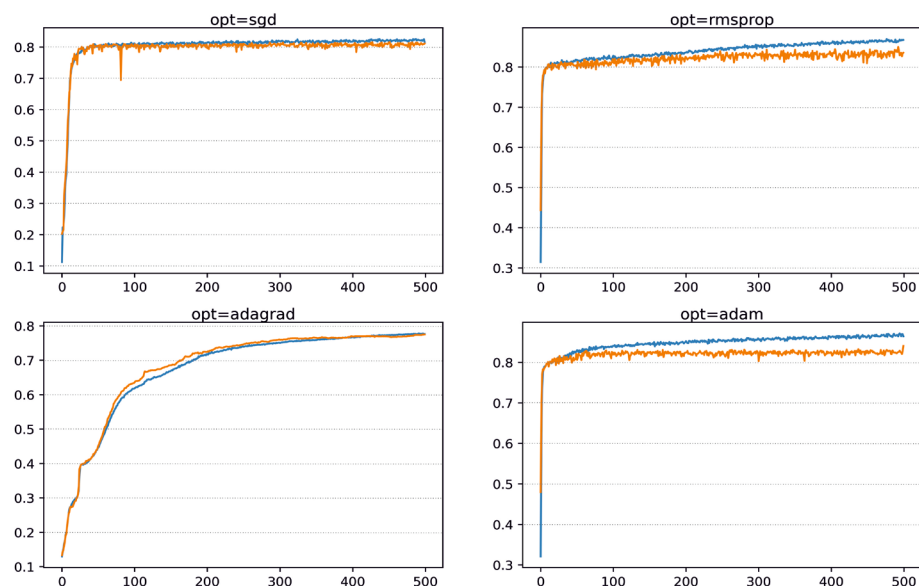


Рис. 3. Вероятность правильного распознавания вида модуляции для обучения (синяя линия) и тестирования (оранжевая линия) при ОСШ от 10 до 20 дБ

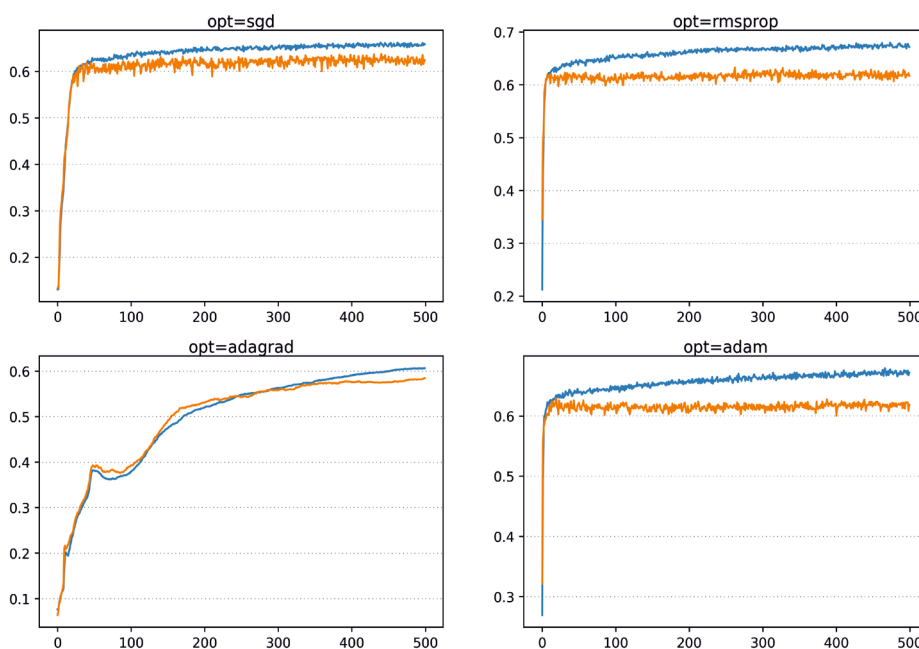


Рис. 4. Вероятность правильного распознавания вида модуляции для обучения (синяя линия) и тестирования (оранжевая линия) при ОСШ от -5 до 5 дБ.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что использование метода Адам в нейронной сети дает наибольшие точность и стабильность распознавания вида модуляции (98% при ОСШ от 10 до 20 дБ, 84% при ОСШ от 0 – 10 дБ и 63% при ОСШ от –5 до 5 дБ). При малом количестве эпох методы Adam и RMSProp быстрее достигают высокой точности распознавания вида модуляции, чем методы Градиента и Adagrad.

## Заключение

В данной работе приведены результаты анализа нейронной сети для распознавания видов цифровой модуляции по кумулянтным признакам с использованием разных методов обновления весовых коэффициентов. Лучший результат показан при использовании метода Adam. Вероятность правильного распознавания модуляций составляет 0,63 при ОСШ  $\geq -5$  дБ. Дальнейшие исследования будут направлены на повышение точности распознавания видов модуляции, а также на исследование нейронной сети распознавания вида модуляции по изображению при низких значениях ОСШ.

## Литература

1. Алгоритм распознавания вида цифровой модуляции сигнала по форме фазового созвездия с использованием самоорганизующихся карт Кохонена / С.С Аджемов [и др.] // ТComm – Телекоммуникации и транспорт. 2011. С. 4–11.
2. Аведьян Э.Д., Дам В.Н. К выбору кумулянтных признаков в задаче распознавания видов цифровой модуляции радиосигналов // Информатизация и связи. 2015. № 4. С. 11–15.
3. Wong M.L.D., Nandi A.K. Automatic digital modulation recognition using artificial neural network and genetic algorithm // Signal Processing. 2004. Vol. 84. P. 351–365.
4. Duchi J., Hazan E., Singer Y. Adaptive Subgradient Methods for Online Learning and Stochastic Optimization // Journal of Machine Learning Research. 2011. 12. P. 2121–2159.
5. Zeiler M.D. (2012). ADADELTA: An Adaptive Learning Rate Method.
6. Johnson M., Schuster M., Le Q.V, Krikun M., Wu Y., Chen Z., Dean J. (2016). Google's Multilingual Neural Machine Translation System: Enabling Zero-Shot Translation. arXiv Preprint arXiv:1611.0455.
7. Bengio Y., Louradour J., Collobert R., Weston J. (2009). Curriculum learning. Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning, 41–48.
8. Reddi Sashank J., Kale Satyen, Kumar Sanjiv. On the Convergence of Adam and Beyond. Proceedings of ICLR 2018.

**A.A. Paramonov, O.V. Tikhonova, M.V. Nguyen**  
MIREA – Russian Technological University

## RECOGNITION OF DIGITAL MODULATIONS OF RADIO SIGNALS USING A MULTILAYER NEURAL NETWORK BASED ON CUMULANT FEATURES

**Keywords:** *neural network, radio signal recognition, cumulant, digital modulation.*

**Abstract.** *This paper presents four learning algorithms for artificial neural networks for automatic recognition of digital modulation types by cumulative features under conditions of low signal-to-noise ratios.*

**А.Г. Суханова**  
*ВА ВПВО ВС РФ*

**Д.А. Солоднева**  
*Смоленский государственный медицинский университет*

УДК 51-7

## **КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ ТРЕВОЖНОСТИ ОТ ЭМОЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ЮНОШЕСКОМ ВОЗРАСТЕ В СИСТЕМЕ MATHCAD**

Ключевые слова: *корреляционно-регрессионный анализ, юношеский возраст, эмоциональный интеллект, тревожность.*

*В данной работе была исследована зависимость показателя тревожности от показателя общего эмоционального интеллекта по методике Д.В. Люсина у респондентов в возрасте от 17 до 20 лет. Исследование осуществлено методом нелинейного регрессионного анализа в системе Mathcad.*

Многие работы [1–3] посвящены исследованию особенностей развития эмоционального интеллекта в юношеском возрасте. В данной работе для решения вышеуказанной проблемы предлагается использование методов корреляционно-регрессионного анализа.

В настоящее время корреляционно-регрессионный анализ широко применяется в различных прикладных направлениях. На сегодняшний день существует большое количество разнообразных компьютерных программ, позволяющих проводить корреляционно-регрессионный анализ данных.

В качестве объясняющего показателя для данного исследования был использован показатель общего эмоционального интеллекта, полученный с использованием методики теста (опросника) эмоционального интеллекта Д.В. Люсина.

Объектом исследования являлись студенты в возрасте от 17 до 20 лет Смоленского государственного медицинского университета Минздрава России. Объем выборки – 167 человек.

### **Метод решения задачи.**

В данной работе показана возможность осуществления нелинейной полиномиальной регрессии (степень полинома – 3) для описания зависимости тревожности от показателя общего эмоционального интеллекта.

Модель нелинейной полиномиальной регрессии (степень полинома – 3) зависимости тревожности от показателя общего эмоционального интеллекта имеет вид (1):

$$y_x = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \varepsilon, \quad (1)$$

где

$y_x$  – показатель тревожности;

$\beta_i, i = 1..3$  – параметры уравнения регрессии;

$x$  – эмоциональный интеллект;

$\varepsilon$  – случайная переменная, характеризующая отклонение от функции регрессии, которая удовлетворяет ряду предпосылок регрессионного анализа [4].

Данная работа была выполнена с использованием программы Mathcad.

Проверка выполнения предпосылки регрессионного анализа, что зависимая переменная  $y_i$  есть нормально распределенная случайная величина, представлена на рисунке 1.

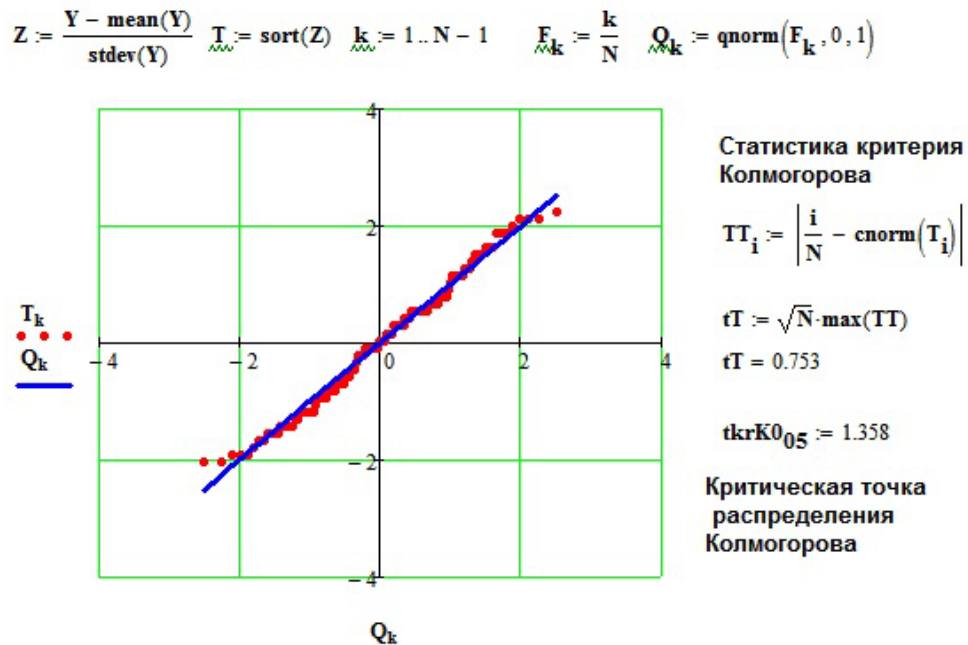


Рис. 1. Проверка на нормальность распределения показателя тревожности

На рисунке 2 представлены исходные и предсказанные по полученному уравнению регрессии данные.

$$\text{Оценка параметров} \quad \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{Y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 18.468 \\ 1.952 \\ -0.037 \\ 1.699 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad \text{Предсказанные значения} \quad \mathbf{y} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}$$

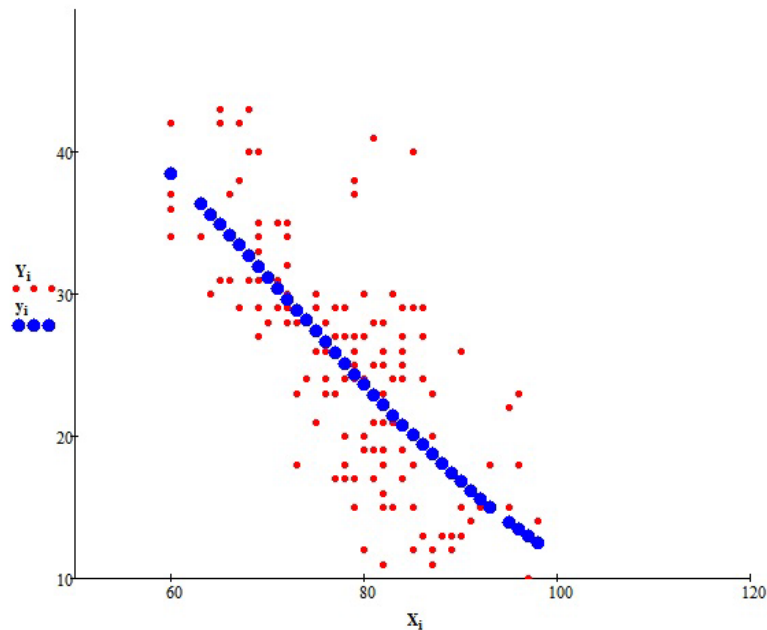


Рис. 2. Исходные данные и предсказанные по полученному уравнению регрессии

На рисунках 3–4 представлен выполненный статистический анализ регрессионной модели и корреляционный анализ.

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &:= \text{rows}(\mathbf{B}) \quad \mathbf{k} = 4 \quad \mathbf{Ysr} := \text{mean}(\mathbf{Y}) \quad \mathbf{Ysr} = 24.628742515 \quad \mathbf{ysr} := \text{mean}(\mathbf{y}) \quad \mathbf{ysr} = 24.6287425128 \\ \mathbf{e}_i &:= \mathbf{Y}_i - \mathbf{y}_i \quad \mathbf{r} := \mathbf{N} - \mathbf{k} \quad \mathbf{r} = 163 \quad \mathbf{Qres} := \sum_i (\mathbf{e}_i)^2 \quad \mathbf{Qres} = 4.827 \times 10^3 \\ \mathbf{d} &:= \frac{\mathbf{Qres}}{\mathbf{r}} \quad \mathbf{d} = 29.611 \quad \mathbf{Qr} := \sum_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{ysr})^2 \quad \mathbf{Qr} = 6.5 \times 10^3 \\ \mathbf{Dr} &:= \frac{\mathbf{Qr}}{\mathbf{k} - 1} \quad \mathbf{Dr} = 2.167 \times 10^3 \quad \mathbf{Q} := \sum_i (\mathbf{Y}_i - \mathbf{Ysr})^2 \quad \mathbf{Q} = 1.133 \times 10^4 \\ \mathbf{so} &:= \text{Stdev}(\mathbf{Y}) \quad \mathbf{so} = 8.26 \quad \mathbf{so}^2 = 68.235 \\ \text{Дисперсионное отношение Фишера} \\ \mathbf{F} &:= \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{so}^2} = 0.434 \quad \mathbf{FD} := \text{if} \left( \mathbf{F} > 1, \mathbf{F}, \frac{1}{\mathbf{F}} \right) \quad \mathbf{FD} = 2.304 \quad \mathbf{n} := \text{round} \left( \frac{\mathbf{N}}{2} \right) \quad \mathbf{n} = 84 \\ \text{Критическая точка} \quad \mathbf{Fk} &:= \mathbf{qF}(0.95, \mathbf{k} - 1, \mathbf{N} - \mathbf{k}) \quad \mathbf{Fk} = 2.66 \\ \text{Функция принятия решения} \\ \mathbf{f} &:= \text{if}(\mathbf{FD} \leq \mathbf{Fk}, \text{"Модель адекватная"}, \text{"Модель неадекватная"}) \quad \mathbf{f} = \text{"Модель адекватная"} \end{aligned}$$

Рис. 3. Статистический анализ регрессионной модели

$$\begin{aligned}
R_{xy} &:= \text{corr}(Y, y) & R &= 0.758 & R^2 &= 0.574 & \frac{Qr}{Q} &= 0.574 \\
F_{\text{кр}} &:= \frac{R^2 \cdot (N - k)}{(1 - R^2) \cdot (k - 1)} & F &= 73.175 & \frac{Dr}{d} &= 73.175 \\
FR &:= \text{if}\left(F > 1, F, \frac{1}{F}\right) & FR &= 73.175 \\
\text{Критическая точка} & & Ft &:= qF(0.95, k - 1, n - k) & Ft &= 2.719 \\
\text{Функция принятия решения} & & f_{\text{кр}} &:= \text{if}(FR < Ft, "Не_значим", "Значим") & f &= "Значим"
\end{aligned}$$

Рис. 4. Проверка гипотезы о значимости коэффициента детерминации

Коэффициент детерминации  $R_{xy}^2 = 0,574$  показывает, что вариация тревожности на 57,4% обусловлена регрессией, или уровнем эмоционального интеллекта.

На рисунке 5 представлена проверка гипотезы о значимости коэффициентов модели. Значимыми являются все полученные коэффициенты уравнения регрессии, как следует из рисунка 5, кроме свободного члена уравнения.

$$\begin{aligned}
m_{\text{кр}} &:= 0.. \text{rows}(C) - 1 & l_{\text{кр}} &:= 0.. \text{rows}(C) - 1 \\
SB_1 &:= \sqrt{C_{1,1} \cdot d} & SB_2 &:= \sqrt{C_{2,2} \cdot d} & SB_3 &:= \sqrt{C_{3,3} \cdot d} & SB_4 &:= \sqrt{C_{4,4} \cdot d} \\
SB^T &= \begin{pmatrix} 111.181 & 4.092 & 0.05 & 1.976 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \\
\alpha &:= 0.05 & tkr &:= qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - k\right) & tkr &= 1.975 \\
T_{\text{кр}} &:= \frac{|B|}{SB} & T^T &= \begin{pmatrix} 0.167 & 4.538 & 374.603 & 9.396 \times 10^4 \end{pmatrix} \\
Kr_1 &:= \text{if}(T_1 < tkr, "Не_значим", "Значим") & Kr_2 &:= \text{if}(T_2 < tkr, "Не_значим", "Значим") \\
Kr_3 &:= \text{if}(T_3 < tkr, "Не_значим", "Значим") & Kr_4 &:= \text{if}(T_4 < tkr, "Не_значим", "Значим") \\
Kr &= \begin{pmatrix} "Не_значим" \\ "Значим" \\ "Значим" \\ "Значим" \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Рис. 5. Проверка гипотезы о значимости коэффициентов модели

Используя полученное уравнение регрессии, можно прогнозировать с заданной степенью надежности возможные значения тревожности у отдельных респондентов, зная их показатели общего эмоционального интеллекта. Полученные результаты могут быть использованы для планирования специальных программ по снижению тревожности у обучающихся.



## Литература

1. Бажин А.С., Фомина Н.И. Особенность развития социального интеллекта студентов вуза // Студент. Аспирант. Исследователь. 2016. - №4 (10). С. 126-136.
2. Беспалова Т.М., Акимова Д.В. К вопросу об актуальности исследования ценностных ориентаций в юношеском возрасте // Педагогика и психология как ресурс развития современного общества: материалы X Международной научно-практической конференции. 2018. С. 219-222.
3. Безбородова Л.А, Безбородова М.А. Эмоциональный интеллект, как важный фактор коммуникативного взаимодействия преподавателя и студентов // Наука и школа, 2019. С. 52-57.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям. 3-е изд., перераб. и доп. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. 551 с.

**A.G. Sukhanova**

Military Academy of the Air Defense Forces Named after Marshal  
of the Soviet Union A.M. Vasilevsky

**D.A. Solodneva**

Smolensk State Medical University

## CORRELATION AND REGRESSION ANALYSIS OF THE DEPENDENCE OF ANXIETY ON EMOTIONAL INTELLIGENCE IN ADOLESCENCE IN THE MATHCAD SYSTEM

**Keywords:** *correlation and regression analysis, adolescence, emotional intelligence, anxiety.*

**Abstract.** *In this paper, the dependence of the anxiety index on the indicator of general emotional intelligence was investigated by the method of D.V. Lyusin of respondents aged 17 to 20 years. The study was carried out by the method of nonlinear regression analysis in the Mathcad system.*

**А.М. Тимотин**

*Смоленское научно-производственное предприятие «Грань»*

УДК 517.968

## ПРИНЦИПЫ ПРИВЯЗКИ (БАЗИРОВАНИЯ) ДЕТАЛЕЙ ПРИ ЗАМЕРЕ НА КИМ В СЛУЧАЕ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ БАЗОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ключевые слова: *координатно-измерительная машина, базирование детали, плохо обусловленные задачи, регуляризация.*

*В работе ставится проблема корректного замера деталей на координатно-измерительных машинах в случае плохо обусловленных базовых элементов. Рассматривается пример детали, контроль которой необходимо провести. Иллюстрируется способ коррекции базовой плоскости для последующего обмера детали на КИМ.*

Возможности современного оборудования предполагают постоянное уменьшение производственных допусков на размеры деталей, и в настоящее время они гораздо меньше, чем были ранее. Одновременно с ужесточением допусков повышается доля трудоёмкости операций контроля в технологическом процессе изготовления деталей и изделий. В машиностроении контроль занимает около 15% общей трудоёмкости продукции, а в капитальных вложениях доля измерительных средств и контрольного оборудования достигает 20% объёма инвестиций [1]. Поэтому точность измерений становится всё более важным фактором в стремлении поддерживать и улучшать качество продукции. При этом новые высокоточные станки требуют высокоскоростных методов измерений и контроля геометрических параметров деталей, соответствующих скоростям обработки на станках с ЧПУ [2]. В настоящее время одним из таких средств контроля служат координатно-измерительные машины (КИМ) (рис. 1). В КИМ используется координатный метод измерения, сводящийся к последовательному нахождению координат ряда точек изделия и последовательному расчету размеров. Главное преимущество указанного метода в универсальности и возможности автоматизации процесса измерения. КИМ значительно упрощает метрологическую подготовку производства новых изделий, так как отпадает необходимость создания значительного количества средств специальной измерительной оснастки [1].

В качестве рабочего инструмента КИМ, как правило, использует контактный датчик, которым производят «ощупывание» детали, геометрические параметры которой нужно определить. Современные КИМ позволяют измерять размеры с точностью до 0,28 мкм [3]. При этом для удобства, помимо декартовой системы координат, можно использовать полярную и цилиндрическую систему координат.

Перед началом измерения необходимо выполнить процедуру привязки (базирования) детали в рабочем пространстве КИМ. В процессе базирования происходит ограничение 6 степеней свободы системы координат по базовым поверхностям, измеряемых на детали. От правильности выполнения базирования зависит не только результат измерения, но и отсутствие столкновений и ошибок при работе машины.



Рис. 1. Координатно-измерительная машина Mitutoyo

На базовые элементы проецируются все последующие измерения, поэтому ошибка при базировании закладывает ошибку практически в каждую оцениваемую характеристику. Для уменьшения погрешности базирования выполняют «черновое» и «чистовое» базирование. «Черновое» базирование выполняется для грубого выравнивания системы координат, «чистовое» – для точного выравнивания системы координат, поэтому элементы измеряются в ЧПУ режиме с большим количеством точек.

Значительное воздействие на результат оценки допусков оказывает отношение длины базового элемента и расстояния оценки (длина оцениваемого элемента, включая расстояние между ними). На этапе оценки, когда элементы измерены, оцениваемый элемент проецируется на базовый. Из-за этого результат оценки несет в себе долю ошибки базирования (погрешность измерения базового элемента). Величина этой доли напрямую зависит от отношения длины базового элемента и расстояния оценки (см. рис. 2).

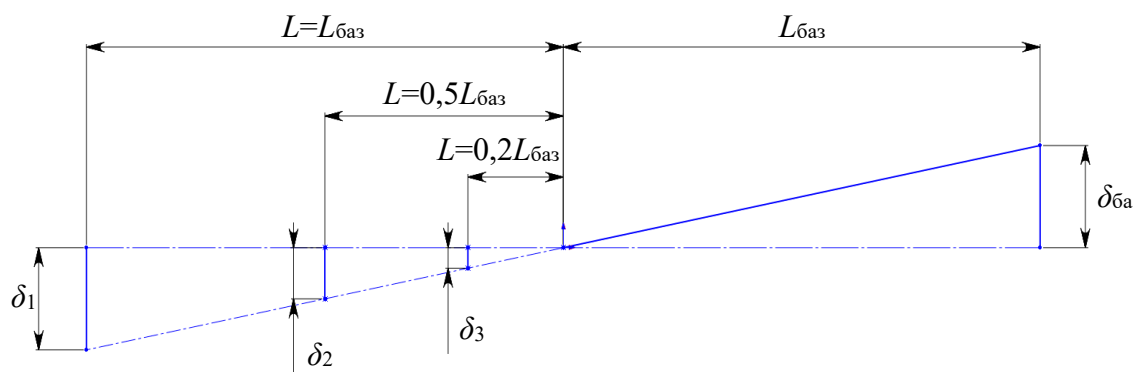


Рис. 2. Зависимость погрешности измерений от погрешности базирования

- Здесь  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  – ошибки измерения на расстоянии  $L$ , равном
- длине базового элемента;
  - половине базового элемента;
  - одной пятой длины базового элемента.

$\delta_{\text{баз}}$  – ошибка базирования.

Например, при ошибке базирования в 3 мкм и длине базового элемента 10 мм на длине 2 мм ошибка составит 0,6 мкм, на длине 5 мм – 1,5 мкм, на длине 10 мм – 3 мкм, а на длине 100 мм – 0,03 мм [4].

На практике при выборе базовых элементов стараются сделать так, чтобы их длина была не меньше длин оцениваемых элементов, но встречаются ситуации, когда данное правило выполнить не удаётся.

На рисунке 3 показана матрица для изготовления детали кронштейн. Матрица имеет технологические отверстия и площадки для её позиционирования. Необходимо оценить точность изготовления рабочей поверхности матрицы по электронной модели, допустимые предельные отклонения от электронной модели  $\pm 0,1$  мм.

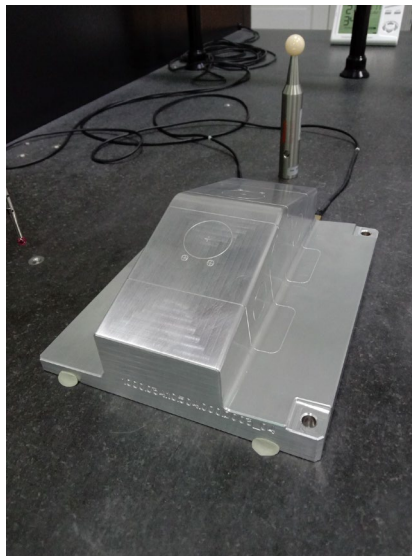


Рис. 3. Матрица для изготовления детали кронштейн.

Базирование детали выполнено по следующим критериям:

- плоскость  $Oxy$  набрана точками на площадках возле отверстий;
- начало координат (начало отсчёта) – центр ближнего отверстия;
- направление оси  $Oy$  ориентировано по центру дальнего отверстия.

При сканировании поверхности по сечениям плоскостями, параллельными плоскости  $Oxz$ , и сравнении отсканированного контура с сечениями 3D-модели видим отклонение фактического контура за пределы допуска (рис. 4). В данном случае отклонение вызвано не проблемой некачественного изготовления матрицы, а проблемой плохой обусловленности базовой плоскости  $Oxy$ , поскольку в поперечном направлении область выбора точек на площадках возле отверстий в разы меньше области сканирования контура детали.

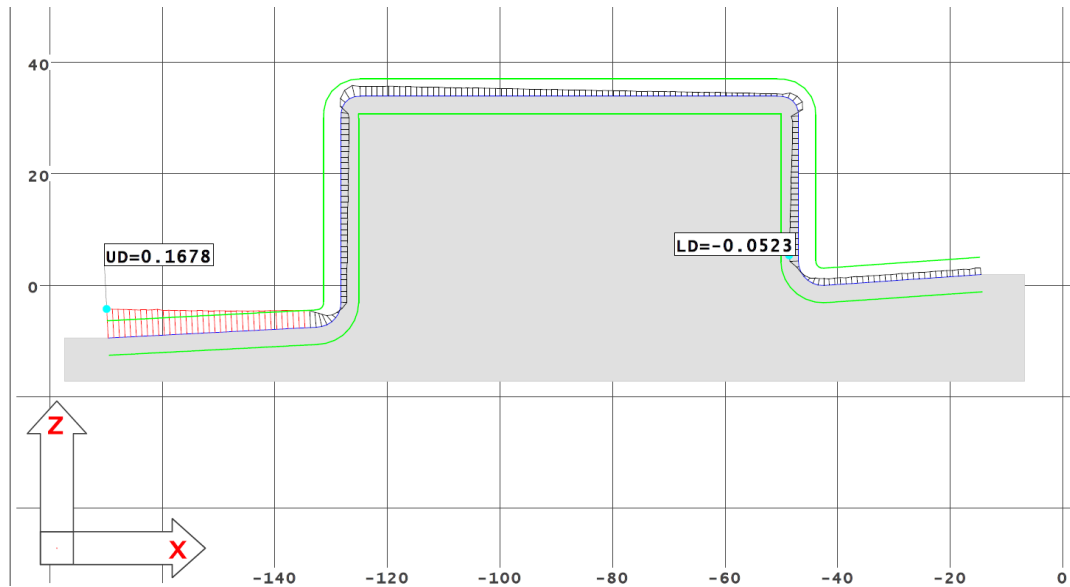


Рис. 4. Сравнение отсканированного контура с 3D-моделью

В математике существует метод решения так называемых некорректно поставленных задач. Основу метода заложил в начале 60-х годов академик А.Н. Тихонов, дав ему название «метод регуляризации» [5].

Суть метода состоит в том, что постановка некорректной задачи дополняется некой априорной информацией количественного или качественного характера. В результате задача становится корректной или условно корректной.

Плохо обусловленные задачи являются частным случаем некорректно поставленных задач, поэтому для них возможно применение метода регуляризации. Это открывает возможность правильной привязки деталей и, соответственно, возможность контроля таких деталей на КИМ, у которых базовые элементы привязки малы по отношению к измеряемым поверхностям.

Традиционно определение параметров математического объекта по результатам его измерений на КИМ осуществляется методом наименьших квадратов путем минимизации функции  $F(a)$ , содержащей отклонения измеренных точек объекта:

$$F(a) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $a = a_0, \dots, a_m$  – искомые параметры математического объекта;

$\delta_i = |P'_i - P_i|$   $i = 1, 2, \dots, n$  – отклонения измеренных точек;

$P_i = (x_i, y_i, z_i)$  – измеренная на объекте точка;

$P'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$  – точка на математическом объекте, соответствующая измеренной.

В плохо обусловленной задаче точка минимума функции  $F(a)$  нечетко выражена, функция в достаточно большой области имеет очень малый градиент. Программа минимизации при попадании в эту область перестает ощущать уменьшение функции и фиксирует минимум в случайной точке. В результате возникают большие ошибки в определении параметров математического объекта.

Улучшить обусловленность задачи можно за счет добавления априорной информации, которой могут быть номинальные значения параметров объектов. Как правило, измерения на КИМ выполняются с целью контроля, поэтому номинальные значения параметров известны и именно их можно использовать для регуляризации задачи, добавив к функции (1) отклонения параметров от их номинальных значений:

$$\Phi(a, w) = F(a) + \sum_{j=1}^m w_j (a_j - a_{j_{nom}}), \quad (2)$$

где  $w_j \geq 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$  – веса параметров (коэффициенты регуляризации);  $a_{j_{nom}}$  – номинальное значение параметров.

В геометрическом контроле с помощью КИМ применяются два основных метода: традиционный метод, основанный на определении параметров геометрических объектов путем аппроксимации измеренных точек с помощью функции (1), и более поздний метод контроля по математической модели. Предлагаемый метод контроля, основанный на методе регуляризации, является обобщением двух существующих. Действительно, функция  $F(a)$  в (2) обеспечивает аппроксимацию точек измерений математическим объектом, а сумма квадратов отклонений параметров объекта от номинальных значений поддерживает его связь с идеальной моделью. Если положить  $w_j = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , то минимизация функции (2) приведет к аппроксимации измеренных точек стандартным геометрическим объектом, то есть будет решена задача (1). При значениях весов  $w_j \rightarrow \infty$  влияние  $F(a)$  становится незначительным, что приводит к построению геометрического объекта с номинальными значениями параметров, относительно которого будут определены отклонения измеренных точек так же, как относительно математической модели.

Использование номинальных значений параметров для регуляризации измерительной задачи имеет и техническое обоснование. При изготовлении матрицы на производственном оборудовании её параметры, такие как диаметры и координаты центров отверстий, были заложены в настройки станка, технологические приспособления, параметры инструмента, в управляющие программы для оборудования с ЧПУ и т.п. Поэтому имеются основания при построении математического объекта потребовать близости его параметров к их

номинальным значениям, которые являлись обязывающими при изготовлении матрицы [6].

Как уже было отмечено выше, плохо обусловленные задачи являются частным случаем некорректно поставленных задач, а значит, для них возможно применение метода регуляризации. А это, в свою очередь, открывает возможность правильной привязки деталей и соответственно возможность контроля таких деталей, у которых базовые элементы привязки малы по отношению к измеряемым поверхностям.

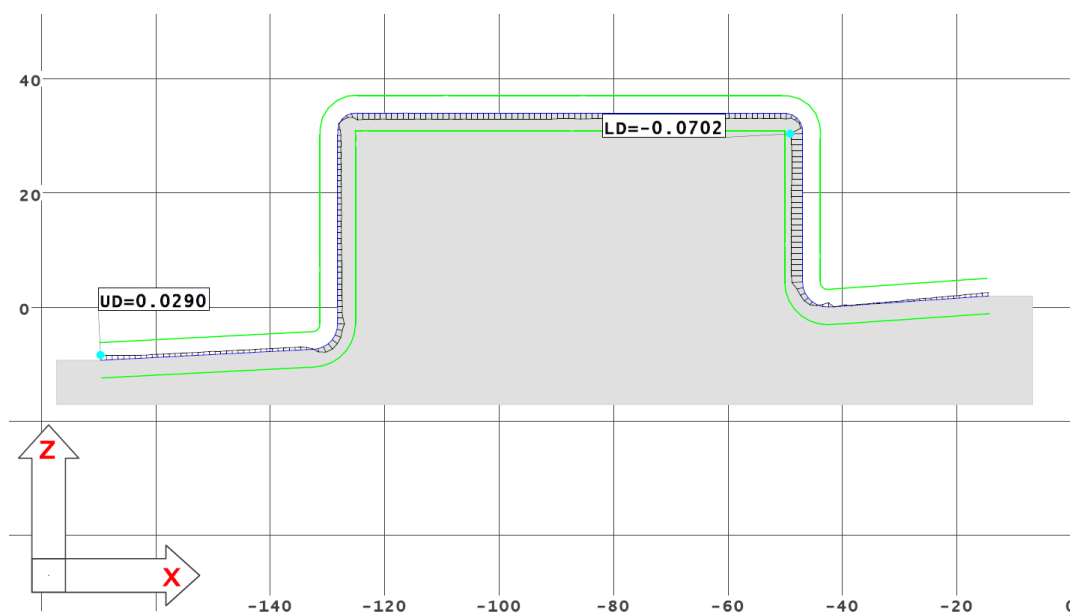


Рис. 5. Сравнение отсканированного контура после коррекции базовой плоскости с 3D-моделью.

Для решения задачи контроля фактического контура изготовленной матрицы необходимо скорректировать базовую плоскость путем добавления какой-то априорной точки для последующего её выравнивания. После чего произвести повторное сканирование сечения матрицы и сравнение полученного контура с сечениями 3D-модели (рис. 5).

Как видно, фактический отсканированный контур целиком поместился в поле допуска. При этом отклонение от параллельности плоскостей, полученной по точкам площадок и откорректированной, составляет 0,0231 мм, что полностью укладывается в допуск на изготовление матрицы.

### Литература

1. Координатные измерительные машины и их применение / А.А. Гапшис [и др.]. М.: Машиностроение, 1988. 323 с., ил.
2. Справочник по метрологии. Наука об измерениях / Нобуо Суга; ред. Роллингс П. - [М.] : Mitutoya, 2018. - 259 с.
3. Сверхвысокоточные КИМ премиум класса ООО «Митутойо РУС». URL:

[https://shop.mitutoyo.ru/web/mitutoyo/ru\\_RU/mitutoyo/LEGEX%20Series%20322%252F574/КИМ%20премиум%20класса%20LEGEX/index.xhtml](https://shop.mitutoyo.ru/web/mitutoyo/ru_RU/mitutoyo/LEGEX%20Series%20322%252F574/КИМ%20премиум%20класса%20LEGEX/index.xhtml)

4. Михайлов Д. Погрешности измерения и рекомендации по их устранению: Координатно-измерительная машина (КИМ) [б.м]: Издательские решения, 2020. 80 с.

5. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501-504.

6. Суслин В.П., Джунковский А.В. Регуляризация плохо обусловленных задач в геометрических измерениях. // Известия МГТУ «МАМИ». 2009. № 2(8).

**А.М. Timotin**

Smolensk research and production enterprise «Gran»

### **PRINCIPLES OF BINDING (BASING) DETAILS WHEN MEASURING ON THE CMMS IN THE CASE OF POORLY CONDITIONED BASIC ELEMENTS**

**Keywords:** *coordinate measuring machine, part basing, ill-conditioned tasks, regularization.*

**Abstract.** *In this paper, the problem of correct measurement of parts on coordinate measuring machines in the case of poorly conditioned basic elements is posed. An example of such a detail is considered, the control of which must be carried out. The method of correction of the base plane for the subsequent measurement of the part on the CMMs is illustrated.*

**О.В. Тихонова, А.А. Бондарь**

*Российский технологический университет – МИРЭА*

УДК 004.942

### **ДИНАМИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ**

**Ключевые слова:** *математическое моделирование, система цифровой связи, алгоритм оценки качества, отношение сигнал / шум, BER.*

*В настоящей статье рассмотрены этапы создания алгоритма оценки качества цифровой системы связи с применением компьютерного моделирования. Показано, что последовательное выполнение этапов разработки приводит к построению алгоритма, корректно работающего в различных условиях.*



## **Введение**

Компьютерная математика расширяет возможности проектирования сложных технических систем. Предварительное математическое моделирование позволяет проводить исследования способов построения системы, оценивать технические решения, сравнивать работу предлагаемой системы в различных условиях. Компьютерное моделирование является громадным шагом вперед, но пренебрежение основными этапами разработок компьютерных моделей может приводить к противоречивым результатам. Проиллюстрируем эти очевидные положения примером.

### **Динамический алгоритм оценки качества системы связи**

Цифровые системы передачи данных постоянно совершенствуются, повышая достоверность получаемой информации. Однако в таких системах невозможно обеспечить абсолютное совпадение передаваемой и получаемой информации: помехи в линии связи полностью устранить не представляется возможным. Одним из методов повышения качества связи является использование помехоустойчивого кодирования информации, позволяющего устранять большую часть ошибок передачи. Алгоритмы помехоустойчивого кодирования значительно различаются по степени сложности и условиям применения. При больших уровнях шумов в канале связи (определяется отношением сигнал / шум – ОСШ) требуются более сложные в реализации и затратные алгоритмы, а при малых шумах (ОСШ велико) можно ограничиться сравнительно простыми алгоритмами, что снижает сложность системы передачи информации в целом.

Основным параметром, определяющим качество системы передаваемой информации (традиционно рассматриваются системы передачи двоичных данных), является число или процент неправильно переданных битов. Этот параметр BER зависит как от способа передачи сигнала (типа модуляции), так и от ОСШ. В литературе хорошо известны зависимости BER от ОСШ в различных системах [1]. Данные зависимости получены как аналитически, так и с применением компьютерного моделирования.

Во многих случаях, однако, алгоритм работы системы связи может гибко модифицироваться для разных значений ОСШ. Таким образом, возникает задача – определить возможные значения ОСШ и выбрать наиболее подходящий режим работы системы в целом. Для этого предлагается оценить вероятность появления ошибочных битов при работе системы в тестовом режиме и решить обратную задачу – на основе оценки BER определить ОСШ. Необходимо корректно провести оценку BER. Сложность этой задачи заключается в том, что при работе в тестовом режиме при передаче заранее известной тестовой последовательности, ее приеме и сравнении с эталоном необходима

полная синхронизация, то есть строгая фиксация начала передачи, что нелегко осуществить.

Авторы разработали динамический алгоритм оценки качества системы связи, не требующий точной синхронизации. Суть алгоритма заключается в следующем.

На передающей стороне генерируется последовательность битов по заранее известному правилу: каждый следующий элемент  $C(k+1)$  последовательности полностью определяется заданным числом  $k$  предыдущих элементов  $C(1) \dots C(k)$ :

$$C(k+1) = a(1) \cdot C(1) + a(2) \cdot C(2) + \dots + a(k) \cdot C(k). \quad (1).$$

Длина сгенерированной последовательности при этом составляет не менее  $10 \cdot k$ . Отметим, что коэффициент  $a(1)$  отличен от нуля, а все арифметические операции рассматриваются по модулю 2. Таким образом, при известном наборе  $\{a(1), \dots, a(k)\}$  правило формирования последовательности  $C$  полностью определено.

Эта последовательность передается по каналу связи, и на приемной стороне принимается последовательность  $D(1), D(2), \dots$  отличающаяся от исходной последовательности  $C$  тем, что начинается с некоторого непервого символа (обусловлено рассинхронизацией моментов начала передачи и приема) и может иметь отличия в некоторых элементах. Отличия возникают из-за погрешностей канала связи. Однако, зная набор  $\{a(1), \dots, a(k)\}$  и первые  $k$  элементов последовательности  $D$  (назовем их начальными значениями последовательности  $D$ ), можно рассчитать последовательность  $D1$ :

$$D1(k+1) = a(1) \cdot D1(1) + a(2) \cdot D1(2) + \dots + a(k) \cdot D1(k), \quad (2).$$

где первые  $k$  символов  $D1$  совпадают с начальными значениями последовательности  $D$ .

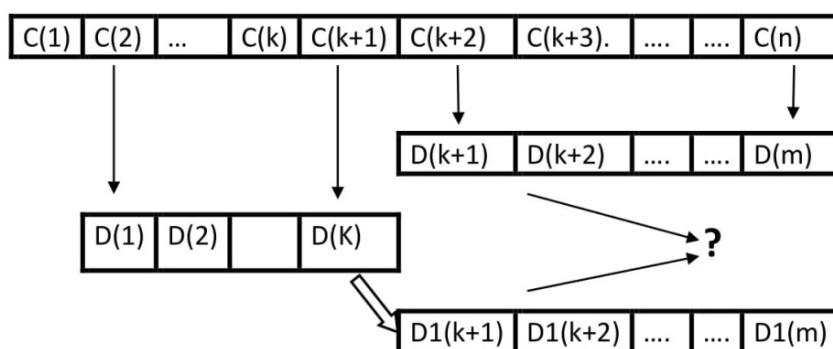


Рис. 1. Способ динамической оценки качества системы связи

Таким образом, на принимаемой стороне возникает возможность сравнения принятой последовательности  $D$  и расчетной

последовательности  $D1$ . Сравнение последовательностей  $D$  и  $D1$  дает информацию о значении BER. На рисунке 1 представлена идея работы динамического алгоритма оценки. Через  $Nmist$  обозначим число отличий в последовательностях  $D$  и  $D1$ .

### Моделирование и анализ работы алгоритма

На этом этапе необходимо перейти к моделированию работы алгоритма, чтобы проверить работоспособность идеи и оценить возможные некорректности в его работе. В пакете MatLab [2] была сделана математическая модель для анализа динамического алгоритма. Схема модели приведена на рисунке 2.

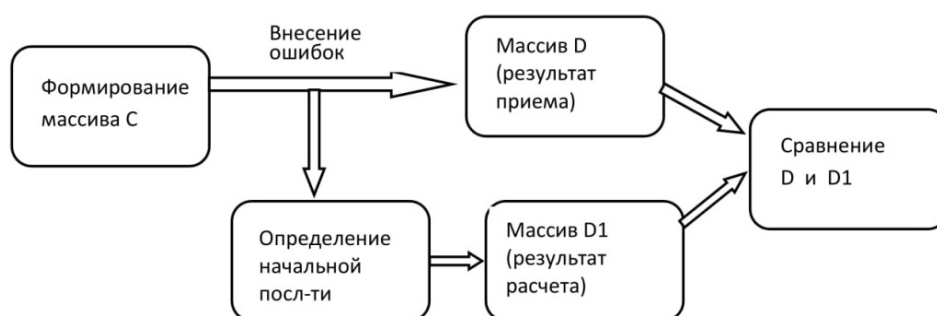


Рис. 2. Схема математической модели

Проведенное статистическое моделирование (при котором варьировалось время смещения начала приема) показало работоспособность алгоритма, и гистограмма распределения ошибок передачи  $Nmist$  полностью совпала с теоретическими расчетами для биномиального распределения (рис. 3 – для наглядности расчеты проведены для вероятности появления ошибок в канале передачи 10%, указаны результаты для различных длин начальных значений  $k$ ).

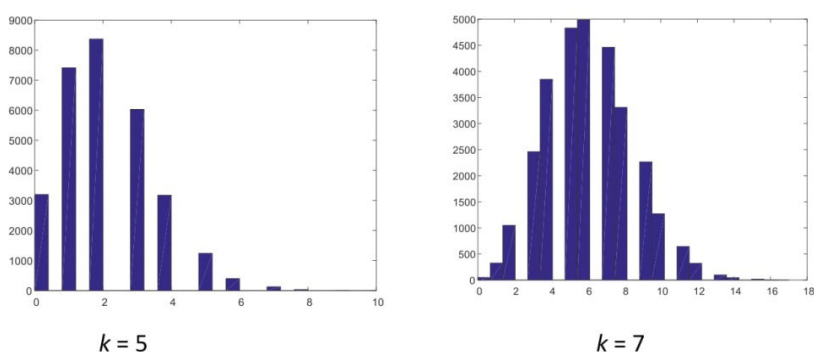


Рис. 3. Результаты работы модели

Моделирование показало, что теоретические и модельные результаты совпадают, что должно говорить о корректности алгоритма. Однако тщательный анализ модели показал один неучтенный нюанс. В модели сначала принимались начальные значения последовательности  $D$ :  $D(1), \dots, D(k)$ , а затем следующие элементы формировались из

последовательности  $C$  с некоторой вероятностью ошибки. В реальности же ошибки могут возникать в системе и при приеме начальных значений. Когда это было реализовано в модели, результаты получились следующие (рис. 4 – для наглядности расчеты проведены для вероятности появления ошибок в канале передачи 10%, указаны результаты для различных длин начальных значений  $k$ ).

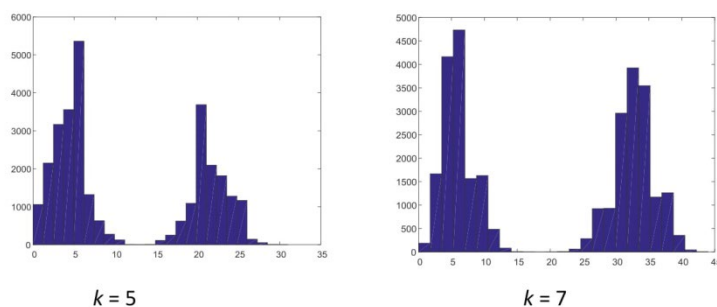


Рис. 4. Результаты работы откорректированной модели

### Корректировка динамического алгоритма анализа

Моделирование работы алгоритма показало, что наличие даже одного неверного бита при приеме начальных значений последовательности приводит к резкому увеличению числа различий принятой последовательности  $D$  и расчетной  $D1$ . Динамический алгоритм потребовалось откорректировать. Самым очевидным казалось при наличии большого числа ошибок  $N_{mist}$  начать рассматривать последовательность  $D$  со сдвигом на один бит и повторить всю процедуру. Однако если известно, что при передаче начальной последовательности длины  $k$  есть хотя бы одиношибочный бит, то с вероятностью  $p=1-1/k$  он будет находиться и в сдвинутой на один символ последовательности. Тогда возможно сдвинуть начальную последовательность на  $k$  символов, то есть начать всю процедуру сначала. Этот способ подходит, если в канале передачи вероятность непоявления ошибки в последовательности из  $k$  символов велика. Данная вероятность пропорциональна вероятности правильной передачи символа в степени  $k$  и уменьшается с ростом  $k$ . Тем самым приходим к выводу о длине начальной последовательности: длина  $k$  должна быть такой, чтобы вероятность передачи начальной последовательности без ошибок была достаточно большой. При этом для диагностирования ситуации наличия ошибки в начальной последовательности необходимо увеличить длину  $k$ . Выбор конкретного значения можно сделать с помощью разработанной модели, если заранее представлять возможный диапазон ОСШ.

В итоге динамический алгоритм оценки качества связи определим следующим образом.

1. Задаемся набором  $C(1), \dots, C(k)$  и по известным  $\{a(1), \dots, a(k)\}$  формируем последовательность  $C$  длины  $10 \cdot k$ . Передаем информацию на приемную сторону.

2. На приемной стороне принимаем последовательность  $D$ , фиксируем начальные значения  $D$ , формируем по ним  $D1$  и вычисляем число расхождений  $Nmist$  между  $D$  и  $D1$ .

3. Если  $Nmist$  больше порога, то повторяем выбор начальных значений, сдвигая  $D$  на  $k$  символов. Такой сдвиг разумно провести два раза.

4. Если во всех трех вариантах  $Nmist$  больше порога, то делается вывод о неудовлетворительной работе системы связи.

5. Если же значение  $Nmist$  меньше порога, то его можно принять за оценку BER (предварительно нормировав), определить ОСШ и по результатам выбрать необходимый режим работы системы связи.

Важное замечание. Конечно, последовательность  $C$  (то есть набор формирующих коэффициентов  $\{a(1), \dots, a(k)\}$ ) можно выбирать произвольно, но правильнее рассматривать последовательности с малыми боковыми лепестками автокорреляционной функции, поэтому предлагается использовать известные  $m$ -последовательности.

### **Заключение**

Математическое моделирование динамического алгоритма позволило выявить его ограничения и доработать логику работы. Результаты моделирования подтвердили правильность алгоритма. Выбор конкретных значений параметров алгоритма можно осуществить с использованием модели.

### **Литература**

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: пер. с англ. 2-е изд. М: Издательский дом «Вильямс». 2003. 1104 с.
2. Дьяконов В.П. Simulink 5/6/7: Самоучитель. М: ДМК-Пресс, 2008. 784 с.

**O.V. Tikhonova, A.A. Bondar**  
*Russian Technological University MIREA*

### **A DYNAMIC WAY TO ASSESS THE QUALITY OF A DIGITAL COMMUNICATION SYSTEM: MODELING AND RESEARCH**

**Keywords:** *mathematical simulation, digital communication system, quality assessment algorithm, signal-to-noise ratio, BER.*

**Abstract.** *This article discusses the stages of creating an algorithm for evaluating the quality of a digital communication system using computer simulation. It is shown that the sequential execution of the development stages leads to the construction of an algorithm that works correctly in various conditions.*

## **ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АППАРАТА НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ БОЛЕЗНЕЙ РАСТЕНИЙ**

Ключевые слова: *распознавание, искусственные нейронные сети, матрицы смежности, нечеткая логика.*

*Потеря урожая из-за болезней растений, в частности плодовых деревьев, является серьезной проблемой для сельских жителей, экономики и продовольственной безопасности, требующей принятия своевременных мер. В последнее время для решения данной проблемы стали с успехом применяться нейросетевые методы глубокого обучения. В статье представлен алгоритм распознавания болезней растений при помощи матриц смежности и аппарата нечеткой логики.*

В связи с увеличивающимся количеством населения на планете необходимо увеличивать урожайность сельскохозяйственных культур и минимизировать потери урожая, вызванные нарушениями условий роста растений, в частности, недостатком или избытком влаги, болезнями, нашествием вредителей. Именно поэтому проблема распознавания болезней растений является актуальной и своевременной.

Существует несколько способов выявления патологий растений. Один из них представляет собой сложный анализ поверхности листьев или коры деревьев, а также их гистологических срезов с помощью электронных микроскопов, которые позволяют получить сильно увеличенное изображение при помощи пучков электронов. Общим подходом для профилактики болезней растений и деревьев в лесном массиве является использование удалённых методов обнаружения, которые исследуют фотоизображения, сделанные мульти- и гиперспектральными камерами [1].

Среди методов машинного обучения и нейронных сетей для работы с изображениями выделяют следующие: метод опорных векторов (SVM), метод k-средних, искусственную нейронную сеть (ANN), вероятностную нейронную сеть (PNN) и сверточную нейронную сеть (CNN).

Недостаток метода SVM заключается в том, что трудно определить оптимальные параметры, когда данные обучения не являются линейно разделимыми. Основным недостатком метода k-средних состоит в том, что он является медленным при обучении (особенно при большом количестве данных), недостаточно надежен при оперировании

зашумленными данными. Кроме того, он очень чувствителен к наличию не относящихся к делу параметров. Применение PNN-метода требует много пространства для хранения данных.

Среди всех типов нейронных сетей для работы с изображениями на практике чаще всего используются глубокие сверточные нейронные сети, то есть искусственные нейронные сети, каждый слой которых формируется из операции свертки, функции активации и пулинга (субдискретизация) [2].

В качестве средств для реализации нейронных сетей используют две группы программных инструментов:

- универсальное программное обеспечение или среды программирования на языках высокого уровня Microsoft Visual Studio, Python, Eclipse и т.д.;

- специализированные пакеты программ для технического моделирования и вычислений MATLAB, LabVIEW и специализированные программные средства с фиксированным количеством модулей – National Instruments Vision Assistant, FaReS-MOD Face Recognition System Modeler и FaRetSys (Face RetrievalSystem, Fabio).

Наиболее распространенным языком, используемым для решения рассматриваемой задачи в указанных средах, является язык высокого уровня Python.

Среди существующих классических методов, применяемых для распознавания изображений листьев растений, предлагается использовать статистический метод и метод сравнения текстур. Сравнению подлежат изображения листа здорового и больного растения. При использовании статистического метода производится сравнение гистограмм больных растений с гистограммой здорового растения. К классическим алгоритмам относятся классификаторы нечеткой логики. Они преобразуют реальные значения данных в степени их принадлежности посредством использования специальной функции принадлежности с помощью определения категорий. Однако использование только аппарата нечеткой логики неэффективно, так как основным недостатком нечеткой логики как классификатора является размерность, а этот классификатор не подходит для задач, имеющих большое количество переменных.

Еще один известный подход к решению задачи основан на сравнении текстур изображений на основе матрицы смежностей (матрицы GLCM для полутоновых изображений и ICISM — для цветных изображений [3]). В этом случае объектом анализа является не матрица изображения, а матрицы смежности R, G, B, RG, RB, GB, на основе которых вычисляются основные параметры: Contrast, Correlation, Energy, Entropy, Homogeneity. Непосредственное использование этих

параметров для целей идентификации вида заболевания не приводит к однозначно правильному результату распознавания.

Исходя из вышесказанного, в частности из недостатков нейросетевых алгоритмов и методов машинного обучения, в качестве основы алгоритма диагностики болезней растений предлагается использовать матрицы смежности GLCM вместе с формальным аппаратом нечеткой логики [4; 5].

Нечеткая логика предполагает вычисление функций принадлежности к эталонным описаниям каждого из 6 наборов R, G, B, RG, RB, GB, бинаризацию результатов и принятие окончательного решения о принадлежности изображения к одному из возможных видов путём мажоритарного голосования.

Диагностика вида заболеваний растений по изображениям листьев основана на использовании параметров матрицы смежности и мажоритарном голосовании и включает несколько этапов, которые представлены на разработанном ниже алгоритме (рис. 1). Исходными данными являются эталонные описания нормализованных изображений листьев.

Этапы выполнения алгоритма.

1. Получение RGB-изображения листьев растений с помощью камеры.
2. Вычисление GLCM-матриц.
3. Вычисление значений показателей Contrast, Correlation, Energy, Homogeneity для всех компонентов изображения: R, G, B, RG, RB, GB (номер компонента j).
4. Вычисление показателей сравнения исходного изображения листа с эталонными описаниями для всех компонентов и всех известных болезней ( $i=1, k=1...4, j=1...6$ ):

$$F_{(i,k,j)} = 1 - \text{abs}(U_{\text{ref}}(i, k, j) - U(i, k)), \text{ где}$$

$$U_{\text{ref}}(i, k, j) - \text{массив эталонных значений,}$$

$$U(i, k) - \text{массив экспериментальных значений.}$$

5. Далее следует первичная бинарная пороговая обработка компонентов:

$$\text{Bin}(F_{(i,k,j)}) = 1, \text{ если } F_{(i,k,j)} \geq P;$$

$$\text{Bin}(F_{(i,k,j)}) = 0, \text{ если } F_{(i,k,j)} \leq P.$$

6. Первое мажоритарное голосование и вторичная бинаризация результатов голосования:

$$\sum \text{Bin}(F_{(i,k,j)}) = \sum_{k=i}^4 DF_{(i,k,j)}$$

$$\text{Bin}_2(F_{(i,j)}) = 1, \text{ если } \sum \text{Bin}(F_{(i,k,j)}) = \max \sum \text{Bin}(F_{(i,k,j)}), \text{ иначе } 0.$$

7. Окончательное мажоритарное голосование и бинаризация:

$$BG_{(i)} = \sum_{j=1}^6 \text{Bin}_2(F_{(i,j)})$$

$$K_{(t)} = 1, \text{ если } BG_{(t)} = \max BG_{(i)}, \text{ иначе } 0.$$



Разработанный алгоритм программно реализуется в инструментальной среде PyCharm на высокоуровневом языке программирования Python. После программной реализации и отладки необходимо провести тестирование. Среда разработки PyCharm позволяет быстро производить рефакторинг кода, а также использовать удобный графический отладчик. Утилита поддерживает все свежие версии Python, а также IronPython, Jython, Cython, PyPywxPython, PyQt, PyGTK и многие другие. В свою очередь, язык программирования Python лучше всего подходит для выполнения таких задач, потому что он довольно понятный по сравнению с другими языками. Более того, у него отличная производительность при обработке данных.

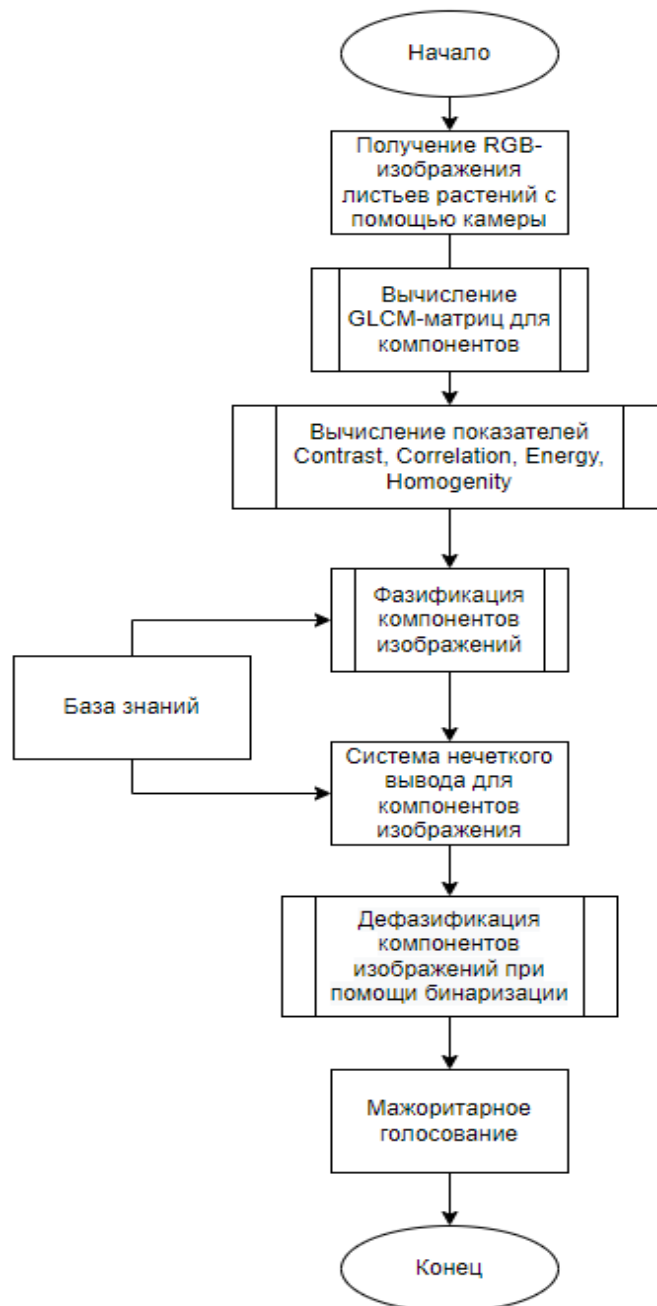


Рис. 1. Схема алгоритма распознавания изображений листьев растений

Таким образом, для диагностики вида заболевания растений по RGB – изображениям листьев при значительном количестве возможных заболеваний надёжные результаты даёт вычисление 24 показателей Contrast, Correlation, Energy, Homogeneity матрицы GLCM для компонентов R, G, B, RG, RB, GB изображений листьев. Данный подход модифицирован путем внедрения нечёткой логики, на этапе дефазификации – бинаризация признаков и мажоритарном голосовании. В перспективе разработанное ПО имеет все шансы на внедрение в автономные беспилотные летательные аппараты для автоматического распознавания поврежденных патологиями площадей, засеянных различными культурными растениями и деревьями. Успешная интеграция разработанного ПО в сельское хозяйство позволит снизить физическую нагрузку фермеров, позволит вовремя диагностировать начинающиеся очаги болезней культурных растений, что положительно скажется на урожайности.

### Литература

1. Гагарина Л.Г. Современные проблемы информатики и вычислительной техники: М.: МИЭТ, 2017. 204 с.: ил.
2. Кадурын А., Архангельская Е., Николенко С. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей. СПб.: Питер, 2018. 480 с.
3. Йорданка Станчева. Атлас болезней сельскохозяйственных культур. Т. 3: Болезни полевых культур. София – Москва: ПЕНСОФТ, 2003.
4. Л.Г. Гагарина, Е.В. Кокорева, Б.Д. Виснадул. Технология разработки программного обеспечения. М.: Форум, Инфра-М, 2007.
5. Шевнина Ю.С., Гагарина Л.Г., Чирков А.В., Миронов Н.С. Особенности организации доступа в автоматизированных информационных системах на основе принципов нелинейной динамики / Ю.С. Шевнина [и др.] // Воронежский государственный технический университет. 2021. Т. 17, № 4. С. 1–7.

**A.V. Chirkov**

Moscow Institute of Electronic Technology

### APPLICATION FEATURES OF FUZZY LOGIC FOR RECOGNITION OF PLANT DISEASES

**Keywords:** *recognition, artificial neural networks, adjacency matrices, fuzzy logic.*

**Abstract.** *Crop loss due to plant diseases, in particular fruit trees, is a serious problem for rural residents, the economy and food security, requiring timely action. Recently, deep learning neural network methods have been successfully used to solve this problem. This article presents an algorithm for recognizing plant diseases using adjacency matrices and fuzzy logic.*

## СЕКЦИЯ 2

### Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

Д.А. Блохин, В.И. Мунерман

Смоленский государственный университет

УДК 519.768

#### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ БАЗ ДАННЫХ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПЕРЕВОДА ИДИОМАТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Ключевые слова: *идиоматические выражения, фразеологизмы, хеш-функция, циклический избыточный код, структура базы данных.*

*В статье рассмотрен метод для более корректного и точного перевода различных видов фразеологических идиом. Метод основывается на использовании базы данных, позволяющей хранить идиоматические выражения и фразеологизмы на английском и русском языках. В базе данных также имеются хеш-суммы выражений обоих языков для быстрого нахождения отношения эквивалентности, помогающего факторизовать множество идиом. Проведен эксперимент с доказательством несостоятельности перевода идиоматических выражений современными компьютерными онлайн-системами, осуществляющими машинный перевод. Показана работа алгоритма по нахождению контрольной суммы, записанной в базе данных. Вышеописанный метод может использоваться для подбора эквивалентных идиом с исходного языка на переводимый, а также осуществляться в совокупности с нейронными системами машинного перевода.*

#### **Введение**

В лингвистическом дискурсе под понятием «идиома» подразумевается только фразеологическое сращивание, значение же термина «фразеологизм» намного шире. В [1] говорится, что фразеологизм (или фразеологическая единица) – это «лексически неделимое, устойчивое в своём составе и структуре, целостное по значению словосочетание, воспроизводимое в виде готовой речевой единицы». Поэтому значения фразеологических единиц не связаны со значениями составляющих их слов и перевод по их прямому значению может дать неправильный результат. Перевод с сохранением основного

смысла оказывается крайне затруднительным не только для машины, но и для профессионального переводчика. При нахождении же эквивалентных фразеологизмов на разных языках задача существенно упрощается: составление определённой базы данных с соответствующими фразеологизмами даст возможность машине корректно осуществить перевод аналогично использованию фразеологического словаря переводчиком.

Обратившись к такому разделу языкознания, как фразеология, можно понять, почему же фразеологизмы так трудно даются машинам. Фразеологические единицы обладают различными свойствами, которые мешают компьютерной системе правильно выполнить перевод. Например (см. [2]), некоторые единицы образуются соединением нескольких компонентов, обычно эквивалентны одному слову (раскинуть умом – подумать, пятое колесо в телеге – лишний), они не создаются в процессе речи (как словосочетания), а используются такими, какими закрепились в языке. При англо-русском переводе подобные обороты получают единый цифровой эквивалент, и любой тип машинного перевода должен учитывать это. Нейронные сети не всегда могут распознать и «прочитать» фразеологизм, а переводы, основанные на словарных соответствиях, зависят от количества записей в словарях.

#### **Современный подход к машинному переводу**

Благодаря доступности, высокой скорости перевода, который осуществляется без использования словаря или профессионального переводчика, компьютерные онлайн-системы сделали машинный перевод одним из самых популярных и востребованных типов перевода. Однако конечный результат всё равно ещё далёк от того, чтобы обходиться без постобработки с помощью человека, – требуется корректировка обнаруженных погрешностей [3].

Несмотря на все преимущества, естественно, существуют и недостатки: нейронный перевод плохо справляется с короткими фразами. Большинство слов многозначны, и пара таких слов без контекста могут «запутать» нейронную сеть. На основе этого было решено провести эксперимент по правильности перевода различных фразеологических единиц с помощью трёх систем машинного перевода, а именно от компаний Google, Яндекс и Microsoft. Все фразеологические единицы разделены на три типа: фразеологические сращения, единства и сочетания [4], по семь примеров в каждом из них.

При анализе корректности машинного перевода мы опирались на [5], однако перевод значения фразеологизма тоже будет считаться за правильный вариант. По результатам (рис. 1) Google и Яндекс ушли намного дальше в переводе фразеологизмов. В результате из 21 варианта Google перевёл 57% правильно, Яндекс – 71%, Microsoft – 52%. Так как многие фразеологизмы сходны по структуре (например, железная хватка

– iron grip), было решено сосчитать правильные переводы без указанных фразеологизмов.

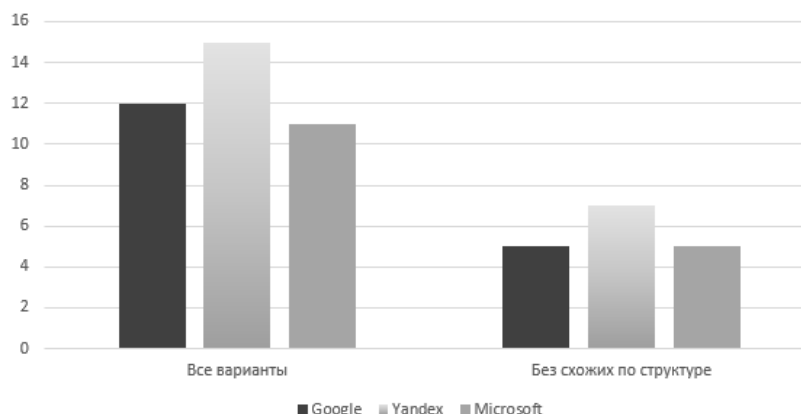


Рис. 1. Верные переводы с русского на английский

Как итог, из 14 вариантов Яндекс перевёл больше остальных – 7 верных вариантов, в то время как остальные системы достигли 5 верных. Стоит отметить, что только переводчик от Microsoft допускал грубейшие ошибки, переводя, например, «лясы» как «lyasy». Даже не близко к правильному значению. К фразеологизмам, которые так и не дались ни одному переводчику даже приблизительно по значению, можно отнести «как пить дать», «точить лясы», «закинуть удочку», «семь пятниц на неделе», «бархатный сезон». Переводчик от Яндекса узнал и дал определение 90% английских фразеологизмов (рис. 2). Google справился с 62% фразеологизмов, Microsoft же не набрал половины – только 42%. Главной ошибкой является перевод, сделанный по прямому значению слова: «бархатный сезон» дословно будет «velvet season», что озадачит любого англоговорящего человека в понимании этого словосочетания. В целом можно уже сказать, что за нейронными сетями будущее машинного перевода, но остаётся открытым вопрос, смогут ли они осилить фразеологизмы.

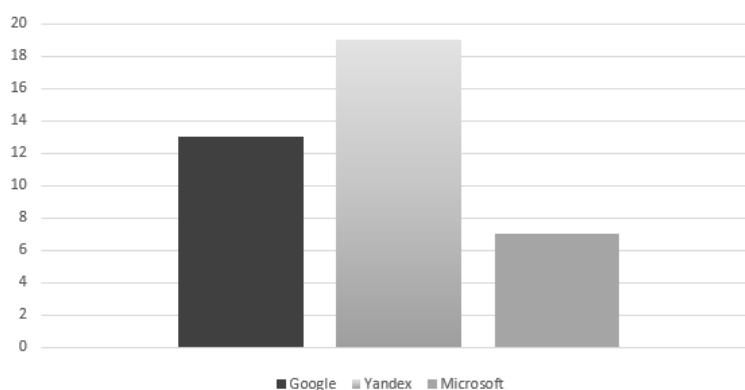


Рис. 2. Верные переводы с английского на русский

Единственное решение на сегодняшний день – создать гибридную систему, использующую нейронный и статистический машинный перевод, который будет оперировать списками всех возможных фразеологических единиц. Яндекс использует данную модель, и её преимущество видно на диаграммах.

### **Реализация перевода с использованием хеш-функции**

Для точного перевода идиоматических выражений требуется база данных, хранящая множества этих эквивалентных фразеологизмов. Чтобы находить их, потребуется анализ текста на конкретное сочетание слов (большинство фразеологизмов имеет строго закреплённый порядок слов, а также устойчивые грамматические формы слов), что позволит определить наличие фразеологизмов в тексте. Однако многие идиомы состоят из более чем четырёх слов, соответственно осуществлять поиск по базе с такими данными было бы нецелесообразно, неэффективно и иррационально. Для решения этой проблемы используется хеш-функция, осуществляющая преобразование массива входных данных произвольной длины в выходную битовую строку установленной длины, выполняемое определённым алгоритмом. Таким алгоритмом является циклический избыточный код, который обладает следующими параметрами: быстрое вычисление и минимальное количество коллизий, то есть  $\forall k \in [0; K) : h(k) < M$ , где  $K$  — количество входных данных,  $h(k)$  — хеш-функция, имеющая не более  $M$  различных значений. Под коллизиями понимается равенство контрольных сумм для различных входных данных.

Путём пробы различных циклических избыточных кодов выявили лучший алгоритм – CRC-32. Алгоритм CRC32 основан на примитивном полиноме  $x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$  [6]. Сам же алгоритм можно реализовать с помощью последовательного итерационного сдвига данных в регистре на один бит. Изначально в регистре находится нулевое значение [7]. Затем осуществляется сдвиг данных на один бит от младших разрядов к старшим и к первым добавляется бит из данных. Следующим шагом проверяется выдвинутый бит из старшего разряда регистра. Если бит равен единице, то выдвинутый бит складывается по модулю два с разрядами регистра 1, 2 и 3 и результат записывается в соответствующие ячейки регистра. Если бит равен нулю, то проверяется, все ли биты прошли через регистр. Если данное условие ложно, то возвращаемся на шаг со сдвигом данных в регистре. Если условие истинно, то в регистре содержится хеш-сумма (контрольная сумма). Эти суммы также хранятся в базе данных, где входными данными были идиоматические выражения.

**Структуризация базы данных.** Для решения недостаточно точного перевода требуется воспользоваться базой данных. Так как

число фразеологизмов ограничено, это вполне осуществимо. Как уже было описано выше, вместе с идиоматическими выражениями в базе данных хранятся и хеш-суммы, с помощью которых можно ускорить поиск нужных фразеологизмов.

Сама база данных (рис. 3) формируется на основании фразеологизмов различных видов, включает в себя идиомы на английском языке (EngIdioms), а также их эквивалентный перевод на русский язык (RusIdioms) вместе с контрольными суммами данных выражений (EngHash, RusHash).

Информация из базы данных поможет создать возможность правильного перевода таких труднопереводимых единиц, ведь ни одна нынешняя компьютерная система, осуществляющая машинный перевод, не в состоянии предложить абсолютно точный перевод идиоматических выражений ввиду их цельного и единого смысла, заложенного в целую фразу, словосочетание.

| EngIdioms                        | EngHash  | RusIdioms                    | RusHash  |
|----------------------------------|----------|------------------------------|----------|
| a big fish in a smaller pond ... | ca17d15e | первый парень на деревне ... | 6475f4f7 |
| a bolt from the blue ...         | 5e07344a | гром среди ясного неба ...   | 44b84717 |
| a child's play ...               | cc6960e7 | пустяковое дело ...          | 6758ac53 |
| a coming man ...                 | 8d490006 | перспективный человек ...    | c6de08d9 |
| a fine line ...                  | e77c55c5 | тонкая грань ...             | 302921dd |
| a load off one's mind ...        | 2ee79d74 | как гора с плеч ...          | 674ce55f |

Рис.3. Образец части информации в базе данных

Использование хеш-сумм позволит быстро найти идиомам из одного языка соответствие в другом. Некоторые фразеологизмы, естественно, могут иметь и не один перевод: например, разговорное выражение «чтоб мне сквозь землю провалиться» на английский язык может переводиться как «may the earth swallow me up (if...)», «may I drop dead (if...)», «may I burn in hell (if...)» или как «may lightning strike me (dead) (if...)» [5]. В результате создания соответствия между одной контрольной суммой и несколькими суммами другого языка, появляется возможность решить проблему перевода идиом, путем предоставления быстрого и точного перевода с несколькими вариантами идиом похожего значения.

Используем данный алгоритм: происходит приём идиомы в базу данных на языке оригинала. Приём осуществляется из текстового файла с записью «[английская идиома] – [русская идиома]», идиома добавляется в соответствующие колонки базы данных SQL. Затем с помощью алгоритма по вычислению контрольной суммы вычисляется хеш-сумма каждой идиомы, что также добавляется в базу данных. С помощью оператора SELECT осуществляем выборку из базы данных, а

именно командой `SELECT * FROMTABLE_IDIOMS`, и начинаем работу с этой таблицей. Команда `SELECTDISCTINCTHASH_ORIG = VVEDEN_HASHFROMTABLE_IDIOM` позволяет осуществить поиск идиомы в базе данных. Под «HASH\_ORIG» подразумеваются значения столбцов «EngHash», «RusHash», а под «VVEDEN\_HASH» – введённая в поисковом запросе хеш-сумма нужной пользователю идиомы.

### **Заключение**

Предложенный в статье метод использования алгоритма CRC-32 позволит быстро сократить идиоматическое выражение в короткое число, которое можно будет поставить в соответствие эквивалентной идиоме на другом языке. Анализ различных компьютерных систем показал, что гибридная модель, совмещающая нейронную сеть и статистический метод, обладает большим преимуществом перед своими аналогами. На данный момент это наиболее эффективный вариант перевода фразеологизмов разного вида, так как нейронные сети не обладают возможностью дать точный перевод подобных выражений.

### **Литература**

1. Телия В.Н. Русская фразеология: семантический, прагматический и лингвокультурологический аспекты. М.: Школа «Языки русской культуры», 1996. 288 с.
2. Ожегов С.И. О структуре фразеологии (в связи с проектом фразеологического словаря русского языка) // Лексикографич. сборник. 1957. Вып. 2. С. 31–53.
3. Шахова Н.Г. Что могут программы машинного перевода? // Мосты. 2004. № 4. С. 53–57.
4. Виноградов В.В. Об основных типах фразеологических единиц в русском языке // Избранные труды. Лексикология и лексикография. М.: Наука, 1977. С. 140–161.
5. Lubensky S. First edition published as Random House Russian-English Dictionary of Idioms by Random House, 1995. Revised edition published by Yale University Press, 2013.
6. Koopman Philip, Chakravarty Tridib. Cyclic Redundancy Code (CRC). Polynomial Selection For Embedded Networks (2004).
7. Ross N.W. A Painless Guide to CRC Error Detection Algorithms // Dr Ross Williams. 1993.

**D.A. Blokhin, V.I. Munerman**  
Smolensk State University

## **DATABASE TECHNOLOGIES APPLICATION TO COMPUTER-ASSISTED TRANSLATION OF IDIOMATIC EXPRESSIONS**

**Keywords:** *idiomatic expressions, phraseological locution, hash function, cyclic redundancy check, database structure.*



**Abstract.** *The article discusses a method for a more accurate and correct translation of different type of idiomatic expressions. The method is based on the use of the database that allows storing idiomatic expressions and phraseological units in English and Russian. The database also has hash sums of expressions from both languages to quickly find the equivalence relation that helps to factor many idioms. An experiment was conducted to prove the failure of the idiomatic expressions translation by modern online computer systems that perform machine translation. The operation of the algorithm for finding the checksum recorded in the database is demonstrated. It is also shown that the above-described method can be used to select equivalent idioms from the source language to the translated one, and also be carried out in conjunction with neural machine translation systems.*

**А.Д. Булименко, Т.А. Самойлова**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.032.26

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПОЗНАВАНИЯ РЕЧЕВЫХ ЭМОЦИЙ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ**

Ключевые слова: *распознавание речевых эмоций, глубокое обучение, синтез речи, Google Speech API, Dostoevsky, Google TTS.*

*В работе предлагается гибридный подход к распознаванию речевых эмоций. Новизна этого подхода заключается в объединении технологий преобразования речи в текст с последующей классификацией полученного текста по эмоциям и синтеза результатов прогноза в речь. В эксперименте используются современные модели глубокого обучения, такие как Google Speech API, GoogleTTS, обученная для русского языка модель Dostoevsky, обеспечивающие распознавание в реальном времени.*

### **Введение**

Распознавание эмоций играет важную роль в естественном взаимодействии человека с машиной. Несмотря на различные методы повышения машинного интеллекта, машины по-прежнему не могут правильно различать человеческие эмоции и выражения. Одна из самых сложных задач в речевой технике – это оценка эмоций говорящего. Компании, занимающиеся речевой аналитикой, обрабатывают и анализируют записанный речевой звук, чтобы извлечь скрытую в нем информацию. Речевая аналитика чаще всего используется контактными центрами клиентов, имеет приложения в таких областях, как

правоохранительные органы и здравоохранение. Она играет решающую роль в секторе образования и для учителей, и для учащихся. Анализ настроений помогает маркетологам в понимании перспектив клиентов, чтобы они могли внести необходимые изменения в свои продукты или услуги. Однако существующие подходы к распознаванию эмоций сосредоточены либо на аудио, либо на классификации текста и обычно в речевой аналитике исследователи рассматривают только акустические характеристики [1]. Совместить обе технологии в режиме реального времени прежними моделями не представлялось возможным. Кроме того, для сильных негативных эмоций, например, таких как гнев, энергия акустических характеристик высока, и в таких случаях очень сложно правильно предсказать эмоции. Поэтому для получения четкой картины эмоционального содержания необходимо классифицировать речь и по ее текстовой составляющей. В статье предложен гибридный подход, основанный на сочетании методов работы со звуковой информацией и методов анализа текстов. Для эксперимента выбраны модели контролируемого глубокого обучения, реализующие распознавание речи и обнаружение эмоций в тексте. Их реализация в задачах распознавания эмоций превосходит традиционные методы опорных векторов или случайный лес [2] по качеству и производительности, обеспечивающей возможность прогнозов в реальном времени. Поэтому в работе для проведения экспериментов выбраны современные модели глубокого обучения – это Google Speech API [3], Google TTS [4] и Dostoevsky [5].

### Структура эксперимента

В предлагаемом подходе рассматриваются модели глубокого обучения, для обработки как звука, так и текста. На рисунке 1 показана структура системы классификации речи, включающая текстовую составляющую.

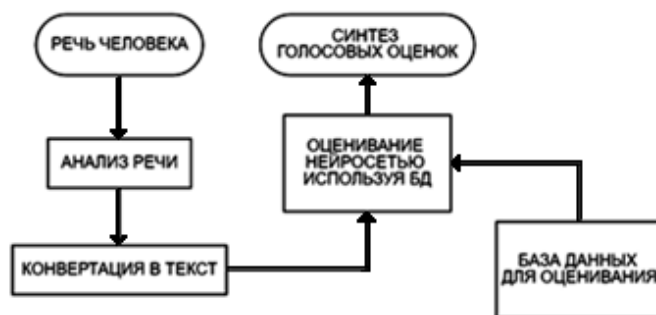


Рис. 1. Система классификации речи

Для оценивания и определения точности моделей их результаты сравнивались со сторонней экспертной человеческой оценкой эмоций в речи, размещенной в базе данных. Эксперимент проводился средствами языка Python 3.9 в среде PyCharm Community.

## Автоматическое распознавание речи

Для проведения экспериментов была выбрана ASR (Automatic Speech Recognition) компании Google. Google Speech API — сервис, работающий на основе нейронных сетей с глубоким обучением, предназначенный для приложений голосового поиска или транскрипции речи. В настоящее время он является явным лидером среди других сервисов ASR с точки зрения качества, точности и поддерживаемых языков. Для распознавания речи Google применяет рекуррентные нейронные сети (Recurrent neural network – RNN) с «длинной кратковременной памятью» (LongShort-TermMemory – LSTM). Данные ячейки памяти предоставляют возможность лучше других нейронных сетей запоминать и обрабатывать информацию. На рисунке 2 изображена схема работы сервиса.



Рис. 2. GoogleSpeechAPI

Система Google Speech API имеет следующие этапы обработки:

- предварительная обработка;
- извлечение признаков;
- классификация;
- языковое моделирование.

Этап предварительной обработки выполняет улучшение звукового сигнала за счет уменьшения шума и фильтрации сигнала. Признаки извлекаются с определенным количеством значений или коэффициентов, которые генерируются на входе. Этот шаг должен быть устойчивым к различным факторам качества, таким как шум или эффект эха. Модель классификации направлена на формирование произнесенного текста, содержащегося во входном сигнале. Она берет извлеченные функции из этапа предварительной обработки и генерирует выходной текст. Языковая модель (LM) является важным модулем, поскольку она фиксирует грамматические правила или семантическую информацию языка.

Реализация ASR в Python проведена посредством библиотеки Speech Recognition API с поддержкой online и offline.

### Классификация эмоций в тексте

Для выявления эмоции в тексте мы использовали удобную для русского языка библиотеку на языке Python – Dostoevsky, которая

показывает достаточно хорошие результаты (модель была обучена на наборе данных RuSentiment, состоящем из более чем 30 000 комментариев сайта «ВКонтакте»). В основе библиотеки – модель глубокого обучения, основанная на сверточной нейронной сети (Convolutional Neural Networks – CNN) (рис. 3).

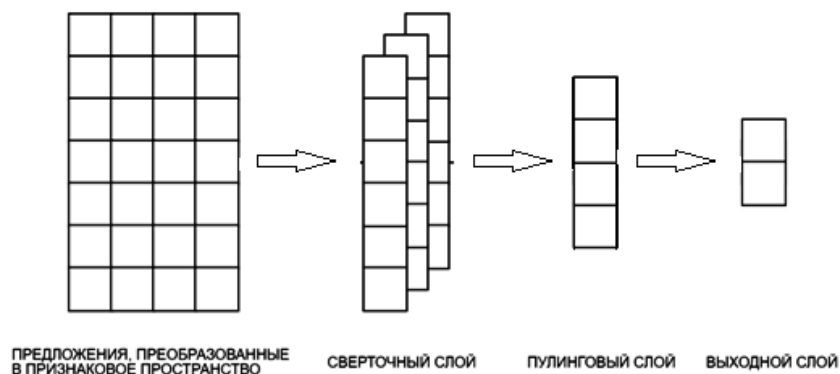


Рис. 3. Архитектура классификации эмоций

Предложения входного текста преобразуются в слова, из которых формируется признаковое пространство. Для создания признакового пространства используется обученная модель Word2Vec – метод обработки естественного языка, представляющий каждое отдельное слово определенным списком чисел, называемым вектором. Векторы тщательно отбираются таким образом, чтобы косинусное сходство между ними указывало на уровень семантического сходства между словами, представленными этими векторами. Затем признаковое пространство обрабатывается сверточным и пулинговым слоями нейронной сети, на выходе получаем распределение вероятностей прогнозируемых классов текста. Библиотека Dostoevsky классифицирует текст на 5 категорий:

- позитивное настроение (Positive);
- нейтральное поведение (Neutral);
- негативное настроение (Negative);
- речевой акт – поздравления, благодарственные и поздравительные посты (Speech);
- пропуск для неопределенных случаев (Skip).

Реализация прогноза класса эмоций в Python выполнена двумя пакетами библиотеки Dostoevsky. Пакет tokenization выполняет преобразование исходных предложений входного текста в слова. Пакет models прогнозирует класс текста.

### **Синтез речи**

Полученные в реальном времени текстовые значения эмоций синтезировались в речь с использованием технологии Google TTS (Text-to-Speech). Это компьютерное моделирование человеческой речи из текстового представления средствами метода глубокого обучения. В

эксперименте была использована обученная на записях реальной речи сверточная нейронная сеть WaveNet. В ее основе – новый мощный метод прогнозирования, который использует синтезатор речи Tacotron2. Архитектура синтеза речи представляется следующей диаграммой (рис. 4).

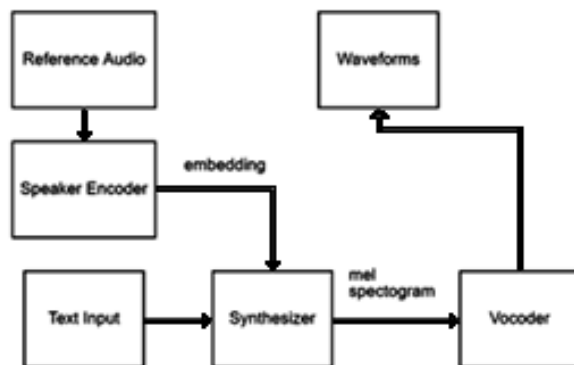


Рис. 4. Архитектура синтеза речи

Speaker Encoder — получает сигнал от целевого динамика и, используя его характеристики, настраивает синтезатор (embedding – встраивание).

Synthesizer — модель синтезатора Tacotron2 преобразует текст в речь, производит мел-спектрограммы из входного текста.

Vocoder WaveNet — это полная сверточная нейронная сеть (CNN) с расширенными извилинами сигналов. Сеть принимает необработанный сигнал в качестве входа и синтезирует выход.

Реализация синтеза речи в Python выполнена библиотекой gTTS, реализующей технологии Google TTS.

Предложенное сочетание метода синтеза речи с методом распознавания эмоций может иметь дальнейшее развитие. Оно позволит определить эмоциональную окраску ответа, наиболее соответствующую эмоциональной окраске принятой речевой информации.

### Оценка полученных результатов

Для оценки качества работы использована выборка из 100 предложений с различной эмоциональной окраской. Приведем несколько предложений этой выборки для примера и дадим им экспертную тональную оценку: позитивную, нейтральную и негативную.

#### Позитивные

1. «Можно сказать, что это в принципе хорошая игра, местами очень понравилось, местами было скучно. С юмором в игре порядок, тоже в плюсы можно записать».

2. «При стремительном взлете карьеры Тома Холланда, я уверен, данный фильм никак не омрачит его своими сборами».

3. «Фильм смотреть не скучно, так как есть неплохие шутки, юмор не раздражает, вполне себе приятный экшен и хореография».

### Негативные

4. «Сегодня был ужасный дождь, но я уже знаю, что это день такой».

5. «Сосед с верхнего этажа мешает спать».

6. «Я ужаснулся, когда моя сестра потерялась год назад в городе».

### Нейтральные

7. «Слышал, что в магазине появился новый фильм, может, купим его?».

8. «Соотношение между этим и тем должно быть поровну, и быть смешанным в одном стакане».

Стандарт для измерения точности модели распознавания речи [6] – частота ошибок слов (Word Error Rate, WER). WER подсчитывает количество неправильных слов, выявленных во время распознавания, а затем делит их на общее число слов в размеченной человеком расшифровке (N) и умножает на 100%:

$$WER = \left( \frac{(I + D + S)}{N} \right) * 100\%$$

Неправильно распознанные слова делятся на три категории:

– вставка (I): слова, неправильно добавленные в расшифровку гипотезы;

– удаление (D): слова, не обнаруженные в расшифровке гипотезы;

– замена (S): слова, отличающиеся между эталоном и гипотезой.

В результате распознавания звуковых файлов выборки получено значение WER = 94%

Качество модели классификации эмоций выполнено путем построения матрицы путаницы (Confusion matrix), поскольку количество классов невелико. Этот подход позволяет довольно наглядно представить результаты работы классификатора. На рисунке 5 показана матрица путаницы, построенная по результатам выполненного эксперимента.

|                  |          |                     |         |          |        |
|------------------|----------|---------------------|---------|----------|--------|
|                  |          | NEGATIVE            | NEUTRAL | POSITIVE | SPEECH |
| ACTUAL SENTIMENT | NEGATIVE | 27                  | 2       | 1        | 0      |
|                  | NEUTRAL  | 0                   | 28      | 1        | 1      |
|                  | POSITIVE | 2                   | 6       | 24       | 0      |
|                  | SPEECH   | 1                   | 1       | 1        | 5      |
|                  |          | NEGATIVE            | NEUTRAL | POSITIVE | SPEECH |
|                  |          | PREDICTED SENTIMENT |         |          |        |

Рис. 5. Матрица путаницы модели классификации эмоций

Столбцы этой матрицы резервируются за экспертными решениями, а строки – за решениями классификатора. Когда мы классифицируем документ из тестовой выборки, мы инкрементируем число, стоящее на пересечении строки класса, который вернул классификатор, и столбца класса из базы данных оценок эксперта. Наиболее предпочтительно, чтобы весь набор истинных меток был равен набору предсказанных меток. В этих случаях матрица будет почти нулевой везде, кроме линии, идущей из верхнего левого угла в нижний правый. Именно такая хорошая классификация и представлена на рисунке. Можно видеть, что модель всего 2 раз путала эмоцию «positive» с эмоцией «negative», эмоцию «positive» с эмоцией «neutral» путала 6 раз.

### **Заключение**

В работе предложен гибридный подход к обнаружению эмоций в высказываниях человеческой речи. В его основе – современные модели глубокого обучения, позволяющие прогнозировать эмоции в режиме реального времени. Для преобразования речи в текст и синтеза речи выбраны модели Google API и Google TTS. Мультиклассовая модель Dostoevsky выполняет собственно классификацию эмоций. Результаты проведенного эксперимента показывают, что предлагаемый подход дает достаточно высокую точность. В процессе эксперимента использована экспертная человеческая оценка тональности речи как эталон. Ее сравнение с полученными прогнозами продемонстрировало хорошие результаты для русского языка. Кроме того, данная работа может быть связана со многими приложениями, такими как центры обработки вызовов и электронное обучение, где речь может заменить традиционные устройства ввода, чтобы сделать взаимодействие человека и машины в этих приложениях более естественным и реалистичным.

### **Литература**

1. Искусственный интеллект научили лучше распознавать эмоции в тексте. URL: <https://aboutdata.ru/2017/04/08/ai-sentiment-recognition/> (дата обращения: 19.02.2022).
2. Анализ настроения текста: концепция, методы, области применения. URL: <http://datareview.info/article/analiz-tonalnosti-teksta-kontseptsiya-metodyi-oblasti-primeneniya/> (дата обращения: 23.02.2022).
3. Использование современных алгоритмов машинного обучения для решения задачи распознавания эмоций. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-sovremennyh-algoritmov-mashinnogo-obucheniya-dlya-zadachi-raspoznavaniya-emotsiy/viewer> (дата обращения 26.02.2022).
4. Анализ тональности. URL: <https://habr.com/ru/company/vk/blog/516214> (дата обращения: 26.02.2022).
5. Обработка текста. URL: [https://nlpub.ru/Обработка\\_текста](https://nlpub.ru/Обработка_текста) (дата обращения: 27.02.2022).

**A.D. Bulimenko., T.A. Samoilo**  
Smolensk State University

## **EXPERIMENTAL RESEARCH OF SPEECH EMOTION RECOGNITION BASED ON DEEP LEARNING MODELS**

**Keywords:** *speech emotion recognition, deep learning, Speech synthesis, Google Speech API, Dostoevsky, Google TTS.*

**Abstract.** *In this article, we propose a hybrid approach to speech emotion recognition. The novelty of this approach consist in the combination of speech-to-text conversion technologies with subsequent classification of the received text by emotions and synthesis of the forecast results into speech. We use modern deep learning models, such as Google Speech API, Google TTS and the Dostoevsky model learned for the Russian language, providing real-time recognition.*

**А. Д. Булименко, Т.А. Самойлова**  
Смоленский государственный университет

УДК 004.67

## **КОЛЛАБОРАТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ РЕКОМЕНДАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В УПРАВЛЕНИИ ЦЕПЯМИ ПОСТАВОК**

**Ключевые слова:** *big data, электронная коммерция, рекомендательные системы, поиск кратчайших путей, алгоритм Флойда – Уоршелла.*

*Рассматривается проблема учета ограничений на цепочки поставок товаров в рекомендательных системах. Цель работы состоит в том, чтобы сместить интересы клиентов в сторону конкретных продуктов с учетом издержек их доставки. Для достижения этой цели предложен метод корректировки прогнозируемых рекомендаций по продуктам, учитывающий кратчайший путь от места хранения до пользователя.*

### **Введение**

В последние годы рекомендательные системы стали необходимы для преодоления проблем, связанных с невероятным ростом объема информации [1; 2]. Они используются в широком спектре контекстов и приложений, главным образом в качестве инструментов



прогнозирования интересов клиентов, и предназначены для того, чтобы рекомендовать клиентам принимать верные решения о покупке продуктов. Системы сосредоточены на том, чтобы помочь клиенту сравнить продукты и решить, какой вариант будет лучшим, а также открыть для него новые товары. Рекомендации оказывают непосредственное влияние на планирование производства, нехватку или избыток запасов, выполнение и затраты на поставки. Кроме того, повышенная видимость отдельных товаров напрямую влияет на пользовательский спрос.

Однако, рекомендации продуктов в классическом подходе [3] не учитывают ограничения цепочки поставок для более выгодной доставки товаров. Это может привести к рекомендациям в отношении продуктов, которые являются дорогостоящими, срок доставки которых слишком длительный, а также к непредотвратимому увеличению нагрузки на цепочку поставок и неэффективным рекомендациям с точки зрения компании. Поэтому, для того чтобы эти системы влияли на спрос в интересах компании, им необходимо учитывать ограничения на доставку. В настоящей работе предлагается принимать во внимание эти ограничения в рекомендациях и сместить спрос в сторону продуктов, которые могут быть доставлены с использованием текущего состояния сети без дополнительных ресурсов и с минимально приемлемой прибылью в контексте электронной коммерции. Для решения данной задачи прогноз неизвестных предпочтений пользователей выполняется методом коллаборативной фильтрации, после чего предлагается корректировка прогноза путем нахождения кратчайшего пути от места хранения до пользователя. Эксперименты, описание которых приведено в статье, подтверждают возможность получения точных рекомендаций с учетом логистических ограничений и позволяют найти эффективное решение поставленных задач за приемлемое время.

**Эксперимент и результаты.** Для создания модели рекомендательной системы и корректировки прогнозов предпочтений пользователей использовался высокоуровневый язык программирования python и его библиотеки: pandas, numpy, scipy, matplotlib, sklearn, networkx. В качестве исходных данных для испытаний были отобраны несколько таблиц с оценкой пользователями товаров, местоположением пользователей и местоположением товара. Количество записей в таблицах оценок пользователей составляло 100 836 – 2 000 000. При этом каждая, как показано в таблице 1, содержит:

- `userId` – уникальный идентификатор пользователя,
- `productId` – уникальный идентификатор товара,
- `rating` – оценку товара пользователем в рамках пятибалльной системы оценивания.

Таблица 1

**Оценки пользователей**

| userId | productId | rating |
|--------|-----------|--------|
| 1      | 1         | 4      |
| 1      | 2         | 4      |
| ...    | ...       | ...    |
| 610    | 2036      | 3      |
| 610    | 3122      | 5      |

Местоположения пользователей и товаров (табл. 2, 3) почти идентичны, состоят из двух полей:

– userId/productId – уникальный идентификатор пользователя/товара.

– City/Storage – местоположение пользователя/товара.

Количество записей в таблице 2 (3) составило 3–100.

Таблица 2

**Местоположение пользователей**

| userId | City      |
|--------|-----------|
| 1      | Город № 3 |
| 2      | Город № 2 |
| 3      | Город №3  |
| ...    | ...       |

Таблица 3

**Местоположение товаров**

| productId | Storage   |
|-----------|-----------|
| 1         | Склад № 2 |
| 2         | Склад № 1 |
| 3         | Склад № 1 |
| ...       | ...       |

Эксперимент моделирования рекомендательной системы включает этапы прогнозирования и корректировки рекомендаций, показанные на рисунке 1.



Рис 1. Модель рекомендательной системы

Процесс начинается с этапа 1 «Прогнозирование рекомендаций», когда в систему вводятся оценки пользователей. Эта информация

используется в качестве входных данных для прогнозирования лучших показателей рекомендаций. Этап 2 «Корректировка рекомендаций» использует полученные на этапе 1 оценки рекомендаций в качестве входных данных и корректирует эти оценки, учитывая местоположение пользователей и товаров. Затем отбираются лучшие рекомендации, полученные с учетом ограничений цепочки поставок.

**Этап 1.** Построение прогнозов в рекомендательной системе выполнено методом коллаборативной фильтрации [4], когда для прогнозирования неизвестных предпочтений (рекомендаций) конкретного пользователя используются известные предпочтения (оценки) группы пользователей. Для коллаборативной фильтрации применена модель факторизации матрицы [5]. В этом случае таблица исходных оценок преобразуется в матрицу покупателей (пользователей) – товаров (user-product), где оценки – значения в её ячейках. Факторизация позволяет выполнить предсказание отсутствующих оценок. В данном эксперименте факторизация выполняется методом сингулярного разложения (Singular Value Decomposition, SVD), когда исходная матрица  $X$  разбивается на произведение ортогональных матриц  $U$  и  $V^T$  и диагональной матрицы  $S$ :

$$X = UV^T S.$$

$X$  – разреженная (состоящая преимущественно из нулей) user-product матрица. Разложив её на компоненты, можно их вновь перемножить и получить «восстановленную» матрицу  $\bar{X}$ . Матрица  $\bar{X}$  и будет являться предсказанием – метод SVD заполняет пропуски в исходной матрице:

$$UV^T S \approx \bar{X}.$$

На рисунке 2 показан фрагмент матрицы предсказанных пользователями оценок товаров.

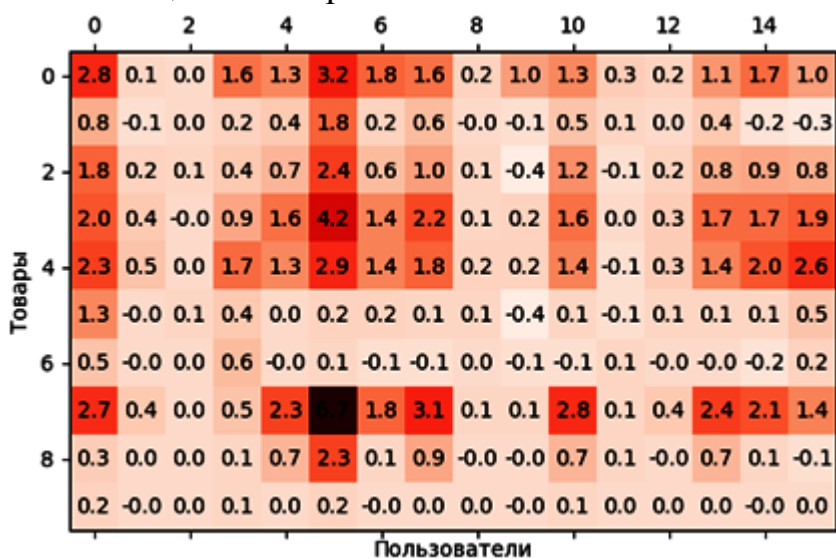


Рис. 2. Фрагмент предсказанных оценок

После получения матрицы предсказанных рейтингов выбираем рекомендации – определенное число (например, 5) лучших товаров у конкретного пользователя, в нашем случае (табл. 3) это первый пользователь.

Таблица 3

| Лучшие товары для рекомендации пользователю |        |
|---|--------|
| productId                                   | rating |
| 16  | 4,7    |
| 69  | 4,7    |
| 74  | 4,3    |
| 71  | 4,0    |
| 167   | 3,7    |

**Этап 2.** Для корректировки прогнозируемых рекомендаций находим в логистической сети кратчайший путь от места хранения до пользователя. Фрагмент графа логистической сети представлен на рисунке 3. Нахождение кратчайшего пути между всеми парами вершин в графе выполнено алгоритмом Флойда – Уоршелла [6]. Алгоритм не перебирает все возможные пути, что приводит к увеличению времени работы и требует много памяти, а реализует восходящее динамическое программирование, когда все подзадачи, которые впоследствии понадобятся для решения исходной задачи, просчитываются заранее, а затем полученные результаты используются.

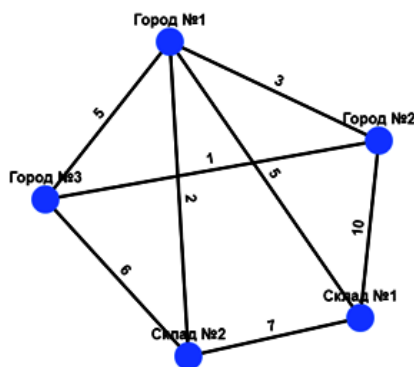


Рис. 3. Фрагмент графа логистической сети

Для корректировки рекомендаций используется частное суммы расстояний лучших товаров и пути от каждого товара до пользователя. В результате корректировки получаем таблицу 4 с измененными рейтингами.

Таблица 4

| Лучшие товары после корректировки |        |
|-----------------------------------|--------|
| productId                         | rating |
| 16                                | 10,7   |
| 74                                | 10,3   |
| 167                               | 9,7    |
| 69                                | 8,7    |
| 71                                | 8,0    |

Для оценки производительности разработанной модели выполнена ее реализация для различных по объему исходных таблиц оценок. График зависимости времени прогнозирования, включая корректировку, от числа записей в таблицах оценок приведен на рисунке 4.

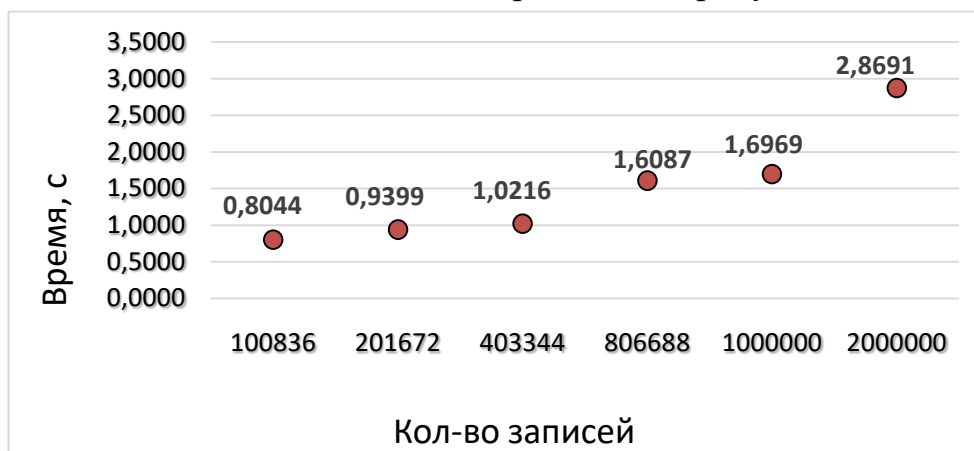


Рис 4. График производительности разработанной модели

По данным эксперимента, общее время прогнозирования не превышает 3 секунд, что является вполне удовлетворительным результатом.

### Заключение

Таким образом, можно утверждать, что возможно улучшение рекомендаций, позволяющее смещать спрос в сторону товаров, более интересных пользователю с учетом их эффективной доставки. Эти результаты достигнуты за счет предложенного нового метода адаптации прогнозов посредством алгоритма поиска кратчайших путей в цепочках поставок. Оригинальность решения состоит в сочетании методов машинной аналитики с традиционными алгоритмами на графах.

### Литература

1. Филиппов С.А., Захаров В.Н. Оценка эффективности метода повышения pertinентности информации в рекомендательных системах поддержки жизнеобеспечения на основе неявных данных // Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2016. Т. 12, № 2. С. 186–193.
2. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Модели и методы параллельной обработки структурированных больших данных // Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2014. № 10. С. 534-547.
3. Bhasker Bharat, Srikumar K. Recommender Systems In E-Commerce: Methodologies And Applications Of Data Mining. New Delhi, 2010.
4. Linden G., Smith B., and York J. Item-to-Item Collaborative Filtering // IEEE Internet Computing, Los Alamitos, California Magazine. 2003. P. 76–80.
5. Koren Yehuda, Bell Robert, Volinsky Chris. MATRIX FACTORIZATION TECHNIQUES FOR RECOMMENDER SYSTEMS. IEEE COMPUTER, 2009.
6. Ахо, Альфред, В., Хопкрофт, Джон, Ульман, Джеффри, Д. Структуры данных и алгоритмы. М.: Издательский дом «Вильямс», 2000. 384 с.

**A.D. Bulimenko, T.A. Samoilo**  
Smolensk State University

## **COLLABORATIVE FILTRATION FOR A RECOMMENDER SYSTEM IN SUPPLY CHAIN MANAGEMENT**

**Keywords:** *Big data, E-commerce, Recommender system, Finding shortest paths, Floyd – Warshall algorithm*

**Abstract.** *The problem of taking into account restrictions on the supply chains of goods in recommender systems is considered. The purpose of the work is to shift the interests of customers towards specific products, taking into account the costs of their delivery. To achieve this goal, it is proposed to apply a method for adjusting predicted recommendations for products, taking into account the shortest path from the storage location to the user.*

**В.Ф. Веселов, Л.Г. Гагарина**  
*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.075.8

## **ЭМУЛЯТОР ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА С АБСОЛЮТНОЙ ТОЧНОСТЬЮ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

**Ключевые слова:** *представление чисел, процессор, память.*

*Статья посвящена вопросам разработки высокопроизводительного вычислительного устройства. Помимо известных пределов роста тактовой частоты процессоров при размерах транзистора меньше 30 нанометров, обнаружилось «бутылочное горлышко» архитектуры фон Неймана – трудности взаимодействия процессора с памятью, что особенно существенно для задач создания искусственного интеллекта. Рассмотрены различные подходы к решению указанных проблем, предложена альтернатива: отказ от представления чисел с плавающей запятой. Показана возможность решения поставленных задач на множестве действительных чисел только с целочисленным их представлением. Разработана арифметика для одного из видов целочисленного представления, предложена программная реализация. Эффективность решения продемонстрирована на примере задачи поиска делителя числа, являющегося произведением двух псевдопростых чисел длиной от 338 десятичных знаков до 2500 десятичных знаков.*

### **Введение**

С момента создания в 1946 году цифрового вычислительного устройства началась непрерывная работа по его совершенствованию,

нацеленная, прежде всего, на повышение быстродействия. С появлением микропроцессоров основным способом повышения быстродействия стало наращивание тактовой частоты, причем естественным образом, так как за счет миниатюризации транзисторов, как основных элементов микропроцессора, значительно повышалась плотность упаковки, а вместе с ней и тактовая частота.

В 1965 году, через шесть лет после изобретения интегральной схемы, американский инженер Гордон Мур на основе выявленной закономерности [1]: появление новых моделей микросхем приводит к тому, что количество транзисторов в них каждый раз возрастает примерно вдвое, – сформулировал известный всем закон Мура. В 1975 году он внёс в закон коррективы об удвоении количества транзисторов каждые два года. Этот закон довольно точно соблюдался тридцать лет.

Другой практически неизменной характеристикой оказалась архитектура вычислительного устройства, получившая название архитектуры фон Неймана [3]. Ее основной принцип – совместное хранение команд и данных в памяти компьютера. Все вычисления, предусмотренные алгоритмом решения задачи, должны быть представлены в виде программы, которая последовательно реализуется процессором. Процессор и память соединены шиной памяти. Совместное использование шины для хранимых программ и хранимых данных является узким местом архитектуры фон Неймана, в частности приводит к ограничению пропускной способности шины, обеспечивающей обмен между процессором и памятью. Пропускная способность канала «процессор-память» и невысокая скорость работы памяти существенно ограничивают быстродействие процессора. Ограничения были сняты системой кэширования или переноса части памяти в состав процессора.

Еще одной смысловой единицей реализации компьютера является способ представления чисел. Любые данные (числа, символы, графические и звуковые образы) в компьютере представлены последовательностями нулей и единиц. Для хранения чисел в памяти компьютера используются два формата: целочисленный формат или формат с фиксированной точкой (естественная форма) и формат с плавающей точкой. Целочисленный формат используется для представления целых (англ. *integer*) положительных и отрицательных чисел, как правило, кратных байту: 1, 2, 4 байта. При этом числа изображаются в виде последовательности нулей и единиц с постоянным для всех чисел положением точки, отделяющей целую часть числа от дробной части. Формат с плавающей точкой (нормализованная форма) используется для представления в компьютере действительных чисел (англ. *real*). Числа с плавающей точкой размещаются, как правило, в 4 или 8 байтах. Нормализованная форма представления чисел

обеспечивает огромный диапазон их записи и является основной в современных ЭВМ.

В настоящее время все правила и принципы, обеспечившие создание компьютера, превратились в тормоз его дальнейшего развития. Закон Мура после достижения топологических размеров порядка 28 нанометров перестал работать: как оказалось, удвоение частоты приводит к восьмикратному увеличению энергии рассеяния. Дальнейший рост частоты нецелесообразен, так как транзисторы просто-напросто перегорят. Кроме того, дальнейшее уменьшение топологических размеров перестало приводить к удешевлению отдельных микросхем.

Вынужденное ограничение роста частоты компенсировалось многоядерностью процессора, но это привело к тому, что сказалась присущая архитектуре фон Неймана непараллельность, а транзисторов стало так много, что каждый из них оказался практически незагруженным. Образно говоря, компьютер превратился в скорый поезд, в котором много вагонов (ядер), он быстро едет, но на каждой остановке стоит до тех пор, пока кондуктор (компилятор) не рассадит всех пассажиров по местам.

Этот недостаток – «бутылочное горлышко» архитектуры фон Неймана – особенно стал заметен при решении задач искусственного интеллекта, требующих обработки больших объемов данных.

Проблемы возникли и с представлением чисел. Все обстоит неплохо, когда решается инженерная задача: ошибки представления чисел, присущие числам с плавающей точкой, несущественны. Дело в том, что входные данные, которые являются результатом измерения, представлены с некоторой точностью, значит, результат вычислений, полученный с аналогичной точностью, вполне приемлем, несмотря на то что содержит ошибку. Однако все меняется при работе с искусственным интеллектом: на больших данных любой бит, а значит как угодно высокая точность, для компьютерного обучения становится критичным. Из-за ошибки представления потеря всего одного бита входной информации может привести либо к неправильному, либо к очень долгому, а значит энергозатратному, обучению нейронной сети.

Так или иначе, все перечисленные проблемы сегодня решаются, о чем, в частности, свидетельствуют следующие факты.

Джон Лерой Густафсон<sup>1</sup>, один из ведущих экспертов NASA Ames Research в области научных вычислений, предложил новый числовой формат Posit, применение которого дает более точные ответы, чем

---

<sup>1</sup>Американский ученый и бизнесмен, известен своими работами в области высокопроизводительных вычислений (HPC), а также изобретением закона Густафсона.



применение стандартных чисел с плавающей точкой; экономит место в памяти и мощность потребления.

Рейнер Хартенштайн<sup>2</sup> – создатель новаторского языка для проектирования аппаратного обеспечения предложил концепцию «антимашин», которая, в отличие от машины фон Неймана, по природе своей обеспечивает параллельную обработку данных. Кроме того, ее можно программировать (реконфигурировать), а не просто загружать различные программы, как в универсальную машину. Реконфигурирование – это перепрограммирование аппаратуры; теоретически оно применимо к массивам, собранным из ядер фон-неймановской архитектуры, но использование «антимашинных» ядер гораздо перспективнее.

Еще один способ преодоления недостатков архитектуры фон Неймана – эксплуатация цифроаналоговой памяти на основе мемристоров. В обычной вычислительной системе, когда с данными  $A$  выполняется операция  $f(A)$ , данные  $A$  необходимо переместить в блок обработки. Это приводит к значительным задержкам и затратам энергии. Физические свойства мемристоров позволяют определить  $f(A)$  в вычислительном блоке памяти, что избавляет от необходимости перемещать данные  $A$  в процессор. Кроме того, функциональные свойства мемристоров подобны свойствам синапсов нейронов головного мозга, поэтому в полнофункциональном вычислительном «чипе на мемристорах» будет содержаться соизмеримое с числом нейронов мозга человека количество встроенных элементов синаптической памяти для поддержки приложений искусственного интеллекта, что на несколько порядков повысит энергоэффективность процессора.

Все вышеперечисленное позволяет с оптимизмом смотреть в будущее в плане развития компьютеров. Уже сегодня ведутся интенсивные работы по созданию квантового компьютера, или вычислительного устройства, которое использует явления квантовой механики (квантовая суперпозиция, квантовая запутанность) для передачи и обработки информации. Такой компьютер, в отличие от традиционного, оперирует не битами, имеющими значение либо 0, либо 1, а кубитами, находящимися в состоянии одновременно и 0, и 1. В результате теоретически появляется возможность обрабатывать все допустимые состояния одновременно, достигая существенного превосходства в скорости выполнения ряда алгоритмов по сравнению с обычными компьютерами.

Еще в 2020 году компания Google официально объявила о

---

<sup>2</sup>Немецкий ученый ведущих университетов Германии и университета Беркли. С 1977 года возглавляет лабораторию *реконфигурируемого компьютеринга* (Reconfigurable Computing), является создателем языка для проектирования аппаратного обеспечения KARL.

достижении квантового превосходства; компания IBM опубликовала дорожную карту развития квантовых вычислений, согласно которой в 2023 году будет создан квантовый компьютер на 1121 кубит. Создание компьютера с 1000 кубитов фирма IBM рассматривает как переломный момент для преодоления препятствий, ограничивающих коммерциализацию квантовых систем, а долгосрочной целью компании является создание квантовой системы на миллион кубитов и глобальной вычислительной системы на ее основе.

### Целочисленный калькулятор

Изначально компьютер создавался как вычислительное устройство. Основным элементом, позволяющим обрабатывать информацию, – реле, радиолампа, транзистор, – имеет два устойчивых состояния, что и определило выбор двоичной системы счисления для представления чисел в компьютере. Для записи целого числа используется математическая формула:

$$N = \sum_{i=0}^n a_i 2^i. \quad (1)$$

Именно коэффициенты  $a_i$ , принимающие значения либо 0, либо 1, позволили создать регистр, на основе которого с помощью булевой алгебры был реализован сумматор. Этими же коэффициентами определяется и быстродействие выполнения вычислительных операций. Суммирование на последовательном сумматоре имеет вычислительную сложность – необходимое количество тактов процессора  $O(n)$ , где  $n$  – это количество двоичных разрядов в представлении числа независимо от того, является разряд нулем или единицей. Из формулы (1) следует ряд ограничений, касающихся представления как чисел, так и данных.

Первое ограничение заключается в том, что невозможно в процессоре представить число, запись которого имеет количество разрядов, большее, чем количество ячеек в регистре. Таким образом, максимальная размерность числа  $N = 2^n$ , где  $n$  – разрядность процессора; в результате появляется потенциальная ошибка – переполнение регистра.

Второе ограничение касается представления действительных чисел, в частности их дробных частей. Формула (1) позволяет записывать числа меньше единицы, если степени двойки отрицательны, но тогда  $2^{-n}$  представляет минимальное число. Результатом является еще одна потенциальная ошибка – потеря точности вычислений.

Проблема записи больших чисел в компьютере решена таким образом, что их при хранении перестали считать числами: в памяти они представлены как набор символов двоичных или десятичных (посредством соответствующей кодировки), но, по сути, все равно двоичных. Причем арифметические операции с большими числами по-прежнему выполняются в регистрах; для получения результата число

необходимо делить на части и для их последовательной обработки передавать из памяти в процессор. В результате проявляется проблема «бутылочного горлышка»: время вычисления суммы двух чисел в сумматоре процессора приобретает квадратичную зависимость от длины числа.

Оказалось, что формула (1) является не единственным возможным представлением числа в компьютере. Ее можно модифицировать:

$$N = \sum_k 2^j, \quad (2)$$

где  $k$  – порядковый номер  $a_i = 1$  в стандартном двоичном представлении числа, а  $j$  – соответствующая степень двойки в этом представлении.

Таким образом, числом будет не соответствующее состояние регистра процессора после заполнения его нолями и единицами, а некоторый массив степеней двойки в двоичном представлении, находящийся в памяти компьютера. В результате значительно увеличится диапазон чисел, которые могут быть однозначно представлены в компьютере. Максимальным числом будет  $N = 2^{2^n}$ , где  $n$  – разрядность регистра процессора.

Следовательно, снимается угроза переполнения, так как числа в памяти теперь не зависят от длины регистра процессора, и становится невозможной потеря точности, так как самое маленькое число всегда единица. Теперь требуемая для решения конкретной задачи точность задает необходимую длину числа, а она практически не ограничена.

В таком случае отпадает необходимость пересылать данные в процессор для суммирования с помощью булевых функций. Новую арифметику можно построить на операциях, связанных с различными типами сортировки. Так сложение будет эквивалентно слиянию массивов; поскольку степени двойки в записи числа являются упорядоченным множеством, сложению будет соответствовать слияние упорядоченных массивов, выполняемое за  $O(n \log(n))$ , где  $n$  – количество элементов массива, которое всегда не больше количества нолей и единиц в двоичном представлении числа. Тогда скорость вычислений можно реализовать программно, а не аппаратно, как это происходит при стандартном представлении чисел в компьютере. Примером такой реализации является слияние биномиальных куч, которое имеет вычислительную сложность  $O(\log(n))$ .

Таким образом, если вычислительный алгоритм предусматривает работу с кучами, а медленные операции преобразования данных (чисел) в кучи будут выполняться только в начале и в конце алгоритма, то может быть достигнута значительная экономия времени.

Операции с данными, находящимися в памяти, легко распараллеливаются. Основной в этом случае станет операция

нормализации записи числа. В массиве, если он является числом, не должно быть двух и более одинаковых элементов. Любые два одинаковых массива, например равных ( $m$ ), должны быть заменены на один со значением ( $m+1$ ). Данная операция может выполняться не только как параллельный, но и как асинхронный процесс. Сама же память при этом может быть энергонезависимой, что обеспечит высокую энергоэффективность вычислений

### **Численный эксперимент**

Принципы альтернативного представления чисел реализованы в виде программы для ЭВМ RU2020617777 «Целочисленный калькулятор (ЦЧ калькулятор)». Программа предназначена и может быть использована для изучения свойств целых чисел и решения задач криптографии.

Для однозначного понимания сути эксперимента перечислим функциональные возможности для чисел, записанных в десятичной системе счисления, длиной до 33 767 десятичных знаков:

- сравнение;
- сложение;
- вычитание;
- умножение;
- деление нацело с остатком с точностью до единицы целых чисел;
- извлечение целочисленного квадратного корня (нахождение максимального целого числа, полный квадрат которого не превосходит заданное);
- возведение заданного числа в целую степень;
- перевод простой дроби в десятичную с наперед заданным (до 33 000) количеством десятичных знаков;
- вычисление числа Фибоначчи;
- вычисление факториала.

С помощью указанной программы достигнуто быстрое вычисление чисел Фибоначчи и факториалов чисел длиной до 33 000 десятичных знаков без использования интернета (offline) на компьютере с 32-разрядным процессором, то есть не дольше, чем на сетевом калькуляторе (online). Следовательно, программа демонстрирует вычислительное преимущество рассматриваемого эмулятора перед обычным компьютером.

Благодаря тому, что программа сохраняет точность вычислений, удалось реализовать алгоритм факторизации длинных чисел. Программа находит максимальный делитель, не превосходящий квадратного корня числа:

- для чисел длиной 338 десятичных знаков за 25 секунд;
- для чисел длиной 617 десятичных знаков за 1 минуту 30 секунд;
- для чисел длиной 2500 десятичных знаков за 29 минут 30 секунд.

Эти результаты демонстрируют вычислительное превосходство вычислительного устройства, реализованного на альтернативном представлении чисел, над существующими компьютерами.

### **Заключение**

Поиски решения задачи повышения быстродействия компьютера сегодня не должны ограничиваться стандартными ответами в рамках традиционной архитектуры компьютера, которая возникла на основе приоритета чисел над данными, что привело к приоритету процессора над памятью.

Сегодня, когда первостепенной становится обработка больших объемов данных, приоритет смещается в сторону памяти. Более того, как 50 лет назад, обостряется соревнование аналоговых и цифровых вычислительных систем. В итоге появились аналого-вычислительные устройства, в результате применения которых измерялись напряжение или ток на соответствующей схеме; причем многие задачи в то время в аналоговом виде решались быстрее, чем на цифровом компьютере. Сейчас, по сути, квантовый компьютер стал устройством, на котором для получения ответа необходимо измерять конечное состояние кубитов, или измерять выходные токи на матрице мемристоров. Но, как и тогда, победа останется на стороне цифровой техники, и примером тому является природа, которая создала мозг как цифровое устройство. И неслучайно недостатки существующих компьютеров проявились только при решении интеллектуальных задач.

### **Литература**

1. Economist. A deeper law than Moore's? Economist blog (Oct. 10, 2011); <http://www.economist.com/blogs/dailychart/2011/10/computing-power> IEEE Spectrum. Special Report on 50 Years of Moore's Law. IEEE Spectrum (Apr. 2015); <http://spectrum.ieee.org/static/special-report-50-years-of-moores-law>.
2. Burks Arthur W., Goldstine Herman H., von Neumann John. Preliminary discussion of the logical design of an electronic computing instrument: <http://www.cs.unc.edu/~adyilie/comp265/vonNeumann.html>.
3. Gustafson J. and Yonemoto I. Beating floating point at its own game: Posit arithmetic // Supercomput. Front. Innov.: Int. J. 2017. Vol. 4, No. 2. P. 71–86.
4. AMD to Acquire Xilinx, Creating the Industry's High Performance Computing Leader. URL: <https://www.amd.com/en/press-releases/2020-10-27-amd-to-acquire-xilinx-creating-the-industry-s-high-performance-computing>.
5. Черня Леонид. Архитектура фон Неймана, реконфигурируемые компьютерные системы и антимашина. URL: <https://www.osp.ru/os/2008/06/5340894>.

**V.F. Veselov, L.G. Gagarina**

National Research University of Electronic Technology

**COMPUTING DEVICE EMULATOR WITH ABSOLUTE PRECISION  
COMPUTING**

**Keywords:** *representation of numbers, processor, memory.*

**Abstract.** *The article is devoted to the development of a high-performance computing device. In addition to the known limits of the increase in the clock frequency of processors with a transistor size of less than 30 nanometers, a “bottleneck” of the von Neumann architecture was discovered - the difficulties in the interaction of the processor with memory, which is especially important for the tasks of creating artificial intelligence. Various approaches to solving these problems are considered, an alternative is proposed: the rejection of the representation of floating-point numbers. The possibility of solving the set problems on the set of real numbers only with their integer representation is shown.*

**С.Г. Веснин**

*ООО «Фирма РЭС»*

**П.Л. Ильин, В.И. Мунерман, Т.А. Самойлова**

*Смоленский государственный университет*

УДК 004.415.2

## **МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ РАДИОТЕРМОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕБ-СЕРВИСОВ**

Ключевые слова: *радиотермометрия, веб, веб-сервис, проектирование.*

*В статье рассматривается архитектура ПАК, реализующего функции для выделения пациентов группы риска рака молочной железы, а также некоторых его компонентов. Описаны требования, выдвигаемые к ПАК, а также методы взаимодействия пользователей с ним. Представлены некоторые подходы к разработке программной части ПАК.*

### **Введение**

Метод микроволновой радиотермометрии (РТМ-метод) основан на измерении интенсивности собственного электромагнитного излучения внутренних тканей пациента в диапазоне сверхвысоких частот [1–5].

Интенсивность этого излучения прямо пропорционально температуре тканей. Поэтому можно говорить, что микроволновая радиотермометрия позволяет измерять внутреннюю температуру тканей и визуализировать ее на экране монитора (рис. 1).

Программно-аппаратный комплекс – это совокупность программных и аппаратных средств, эффективно реализующих пользовательские приложения в заданной предметной области.

Архитектура программно-аппаратного комплекса – совокупность характеристик и параметров, определяющих его функционально-логическую и структурную организацию. Архитектура охватывает общие принципы построения и функционирования, наиболее существенные для пользователей [6; 7].

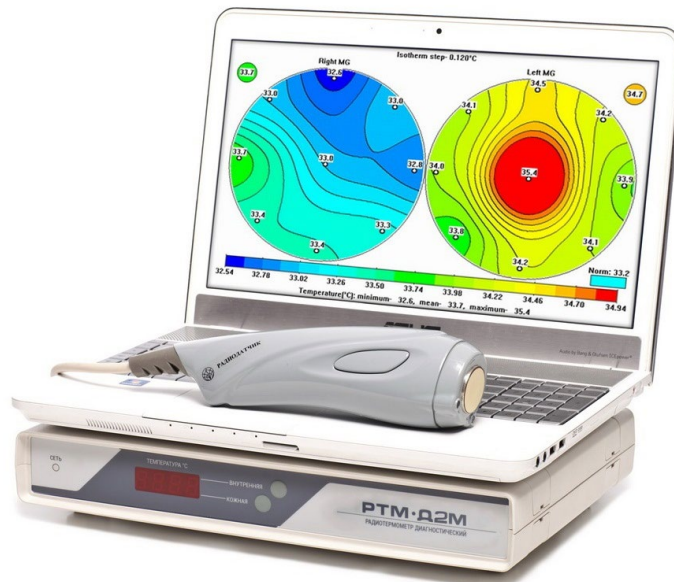


Рис. 1. Пример радиотермометра

В работе кратко рассматривается архитектура ПАК, который реализует функции Системы искусственного интеллекта для выделения пациентов группы риска рака молочной железы (СИИ). Эта архитектура показана на рисунке 2.

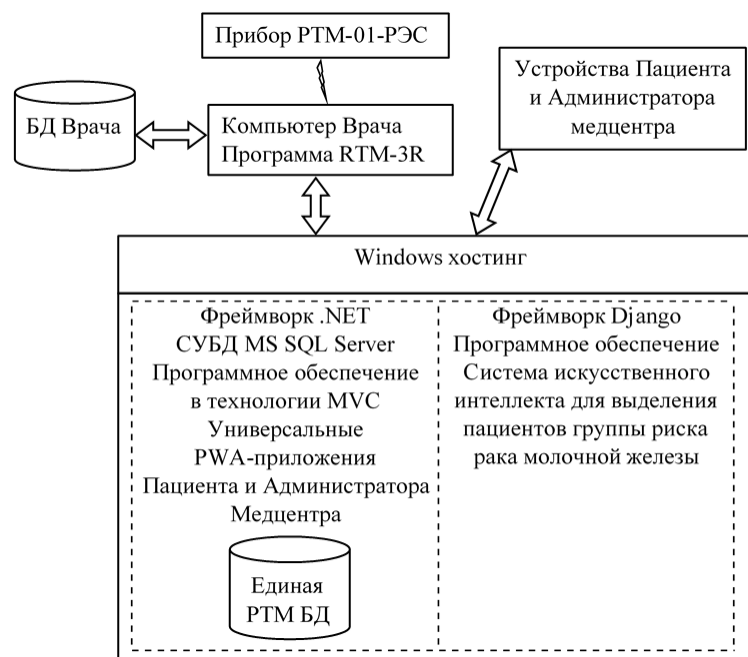


Рис. 2. Программно-аппаратный комплекс для РТМ-диагностики

Данный ПАК представляет собой серверный компьютер с установленной серверной ОС Windows с подключением к Интернету. Поверх серверной ОС должны быть установлены необходимые фреймворки и вспомогательные программы: .NET, MicrosoftSQLServer, Django и все его зависимости.

С ПАК взаимодействуют следующие пользователи:

- пациенты медицинских центров, проводящих РТМ-обследования;
- врачи медицинских центров, а также частные лицензированные специалисты, проводящие РТМ-обследования;
- администраторы соответствующих медицинских центров.

### **Требования к системе**

Система построена на основе архитектуры [8–10], подразумевающей разделение уровней хранения данных, приложений и клиентского интерфейса. Архитектура системы является трёхзвенной и предусматривает централизованное хранение данных в СУБД с возможностью обеспечения управляемого доступа к ним пользователей с использованием приложений, входящих в систему. Система функционирует в вычислительной сети Интернет. Доступ к СУБД осуществляется через сервер приложений. Система поддерживает SQL-запросы. Серверная часть информационной системы должна иметь WEB-сервис, на базе которого построены клиентские приложения (WEB, десктоп и гибридные) [11–14]. Алгоритмы СИИ находятся на отдельном WEB-сервисе, обменивающимся данными с приложениями системы.

Главную роль в системе, исходя из рисунка 2, играет веб-сервис. Он является ключевым узлом обработки данных, поступающих в систему и предоставляемых системой администраторам, врачам и конечным пользователям (пациентам). Архитектура веб-сервиса более подробно показана на рисунке 3.

### **Реализация ПАК**

Из сказанного выше понятно, что выбор аппаратной части системы не вызывает особых проблем. В качестве сервера следует использовать любой; в зависимости от конкретных нужд выбирается объем накопителя, количество процессоров и т.д. Установка необходимого ПО на выбранную серверную машину не подразумевает затруднений. Радиотермометры врачей взаимодействуют с веб-сервисом через специализированную программу путем пересылки данных на сервис и их дальнейшей обработки, что также не вызывает вопросов. Основным интересом представляет архитектурный подход к построению самого веб-сервиса.

Гексагональная архитектура – это шаблон проектирования, позволяющий создавать слабо связанное программное обеспечение, подключаемое в любую систему с помощью портов и адаптеров.



Упрощенная схема такой архитектуры представлена на рисунке 4.

Здесь domain (иногда называется core) – основная, неизменяемая часть приложения. Она содержит примитивные модели данных, базовые интерфейсы и сервисы. Infrastructure – это уровень API приложения. Здесь закладываются методы обращения к данным, бизнес-логика и т.д. Через всю систему проходит идея портов и адаптеров. Порты позволяют работать системе «внутри», соединяя части приложения с различными интерфейсами. Снаружи же посредством адаптеров отдаваемые «вовне» данные приводятся к виду, с которыми работают внешние компоненты.

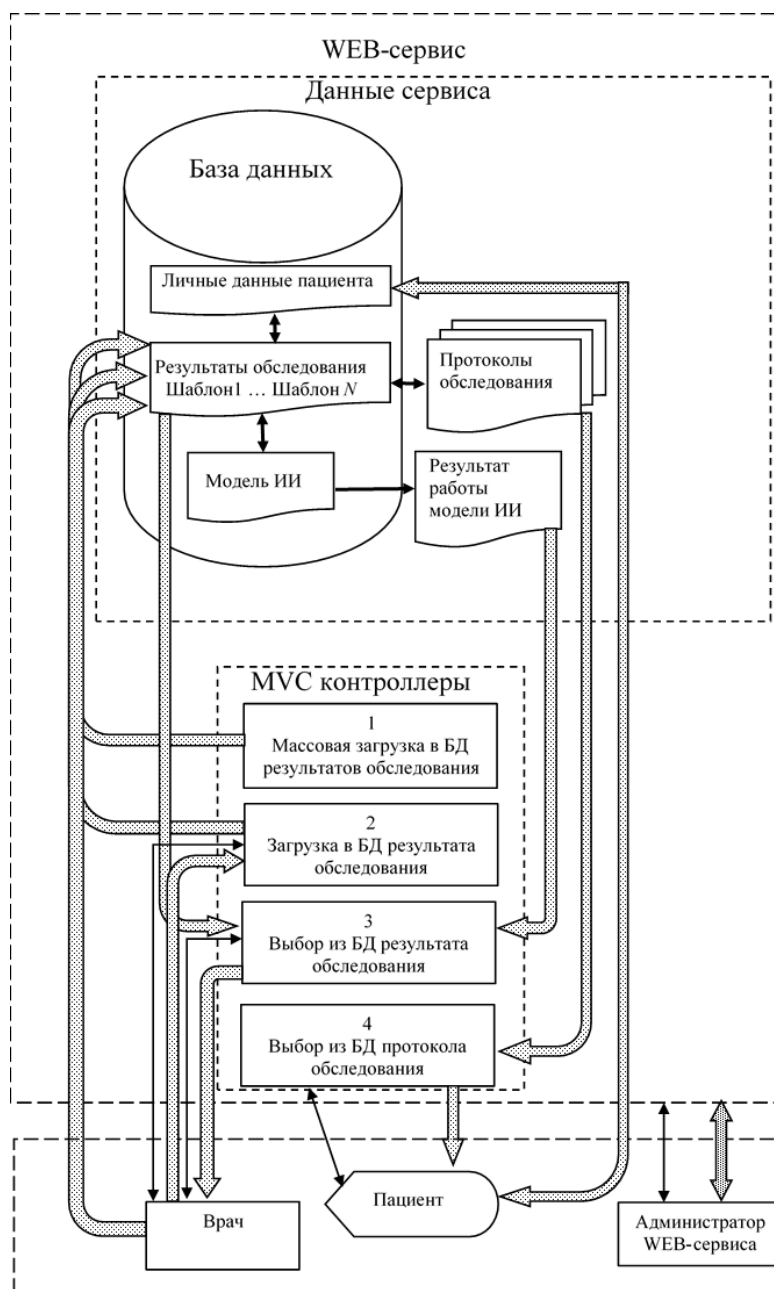


Рис. 3. Архитектура веб-сервиса

Суть подобной архитектуры – в инверсии зависимостей<sup>3</sup> и четком разделении структур приложения, принадлежащих одному слою. Например, внешний API приложения, не подразумевающий взаимодействия с UI этого приложения, должен быть строго отделён от последнего.

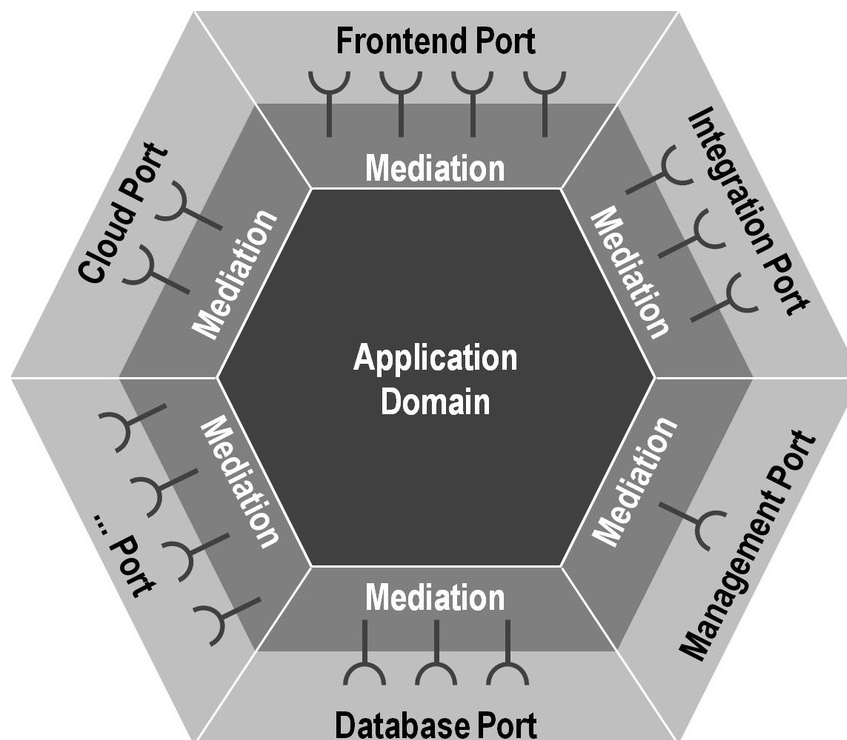


Рис. 4. Схема гексагональной архитектуры приложения

Данный архитектурный подход имеет свои преимущества и недостатки. По словам Мартина Фаулера, преимущество гексагональной архитектуры заключается в использовании сходства между уровнем представления и уровнем источника данных для создания симметричных компонентов, состоящих из ядра, окруженного интерфейсами, но с недостатком, заключающимся в скрывании присущей асимметрии между поставщиком услуг и потребителем услуг, которую лучше представлять в виде слоев [15].

Гексагональная архитектура основывается на соблюдении принципов ООП, обозначенных в SOLID: принцип единой ответственности, принцип открытости-закрытости, принцип подстановки Лисков, принцип разделения интерфейсов и принцип инверсии зависимостей. В погоне за этими заветными принципами зачастую теряются такие важные, как KISS («делай проще, дубина») и YAGNI («тебе это не понадобится»).

<sup>3</sup> Инверсия зависимостей – один из важнейших принципов ООП, гласящий, что модули слоя  $n$  могут зависеть только от модулей слоя  $n-1$ . Очевидно, допускается нарушение этого требования в процессе компиляции приложения.

Примененный к построению веб-сервиса РТМ, данный подход предоставляет преимущества:

- упрощение тестирования кода (формально, без соблюдения принципа инверсии зависимостей написание тестов становится практически невозможным);

- удобство масштабирования методов;

- уменьшение числа конфликтов при слиянии веток в системах контроля версий.

Указанный архитектурный подход имеет и свои недостатки:

- нарушение принципа KISS вследствие наличия большого количества классов и интерфейсов;

- из-за большого числа элементов в модулях возникает проблема именования.

### **Заключение**

В данной работе был представлен ПАК, реализующий функции для выделения пациентов группы риска рака молочной железы. Были описаны требования к ПАК, его архитектура. В качестве ядра системы был выделен веб-сервис, являющийся связующим звеном всех элементов системы. Дано описание подхода к построению такого веб-сервиса, перечислены достоинства и недостатки применения данного подхода.

*Работа выполнена при поддержке «Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере» (проект № 136ГРЦТС10-D5/61904).*

### **Литература**

1. Barrett A.H., Myers Ph. C. Subcutaneous Temperature: A method of Noninvasive Sensing // Science. Nov. 14, 1975. Vol. 190. P. 669–671.

2. Barrett A.H., Myers Ph.C., Sadovsky N.L. Microwave Thermography in the Detection of Breast Cancer // AJR: 134. February 1980. P. 365–368.

3. Gautherie M. Temperature and Blood Flow Patterns in Breast Cancer During Natural Evolution and Following Radiotherapy // Biomedical Thermology. 1982, P. 21 – 64.

4. Троицкий В.С. К теории контактных радиотермометрических измерений внутренней температуры тел. // Известия вузов. Серия Радиофизика. 1981. Т. 24, № 9. С. 1054.

5. Yves Leroy, Bertrand Bocquet and Mammouni. Non-invasive microwave radiometry thermometry // Physiol. Means. 19 (1998). P. 127–148

6. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, №. 4. С. 3–16.

7. Мунерман В. И. Опыт массовой обработки данных в облачных системах (на примере Windows Azure) // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, №. 2. С. 3–8.

8. Самойлова Т.А. Разработка аналитических информационных систем средствами современных баз данных // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2017. Вып. 18. С. 111–114.

9. Мунерман В.И., Самойлова Т.А. Параллельная реализация решения оптимизационных задач средствами баз данных // Системы высокой доступности, 1. 2015. Т. 11. С. 18–22.

10. Мунерман В.И., Самойлова Т.А. Обучение методам разработки информационно-аналитических систем на основе облачных технологий (на примере MICROSOFT AZURE) // Системы высокой доступности. 2016. Т. 12, №. 4. С. 3–11.

11. Ласточкин Г.Г., Самойлова Т.А. Повышение производительности веб-сервисов методом сжатия // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2015. Вып. 16. С.83–85.

12. Самойлова Т.А., Шашеро И.М. Исследование проблем производительности кросс-платформенных сервис-ориентированных приложений // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2015. Вып. 16. С. 97–99.

13. Gottschalk K., Graham S., Kreger H., Snell J. Introduction to WEB services architecture // IBM Systems Journal. 2002. Vol. 41, No. 2. P. 170–177.

14. Zhang C., Yin X. Design and implementation of single-service multifunction WEBservice // International Conference on Computer Science and Service System (CSSS). Nanjing, 2011. P. 3912–3915.

15. Fowler M. Patterns of Enterprise Application Architecture: Pattern Enterprise Architecture. Addison-Wesley, 2012. P. 21.

**S.G. Vesnin**

RES Company LLC

**P.L. Iljin, V.J. Munerman, T.A. Samoylova**

Smolensk State University

## **RECURSIVE COMPUTATION OF THE MULTIDIMENSIONAL MATRIX DETERMINANT**

**Keywords:** *radiothermometry, web, web service, design.*

**Abstract.** In this paper, the architecture of the HSC, which implements functions for isolating patients at risk of breast cancer, as well as some of its components, is discussed. The requirements put forward for the HSC, as well as methods of user interaction with it, are described. Some approaches to the development of the software part of the HSC are presented.

**Л.Г. Гагарина, Ю.С. Шевнина**

*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.9

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМАРТ СТРУКТУРЫ**

Ключевые слова: *смарт структура, цифровой двойник, производственный процесс, прогнозирование поведения.*

*В статье рассматривается методика моделирования цифрового двойника производственного процесса. Основой методики является метод интеллектуального анализа и обработки информации, который предусматривает выделение закономерностей в особенностях, характеристиках и параметрах производственного процесса, формирование из них классификаторов по различным признакам с целью определения и прогнозирования поведения процесса. Предлагаемая методика моделирования цифрового двойника позволяет учитывать скрытые связи между характеристиками производственного процесса и их совокупностями, что увеличивает точность прогноза изменения поведения процесса и, как следствие, повышает эффективность его управления.*

В настоящее время для управления автоматизированными производственными процессами используются интеллектуальные системы, основанные на определении состояния процесса, прогнозировании его изменения и подборе рекомендованного управляющего воздействия [1]. Существенное влияние на работу оборудования оказывают природные и техногенные факторы. Как правило, в современных интеллектуальных управляющих системах эти факторы не учитываются, вследствие чего подбор рекомендаций и решений по управляющим воздействиям не всегда эффективен. Последствия неверного прогноза в подобных системах негативны, что делает задачу определения состояния производственного процесса и прогноза его изменения с учетом всех факторов крайне актуальной.

Одним из решений обозначенной задачи является использование цифрового двойника, который точно повторяет поведение производственного процесса и позволяет воспроизвести реакцию процесса на любое внешнее и управляющее воздействие [2]. Цифровой двойник работает на основе смарт структуры, состоящей из модулей сбора данных с различных датчиков, анализа и обработки полученных данных, предоставления информации о состоянии производственного процесса и рекомендаций по оптимальному режиму работы оборудования и управляющему воздействию (рис. 1).

Модель цифрового двойника основана на оценке состояния процесса. Для повышения точности оценки состояния важно учесть все характеристики процесса, данные о внешней среде, а также их совокупность. Состояние процесса в каждый момент времени определяется значениями его характеристик:

$$E_S = \langle (a_{1i}, v_{1i}), \dots, (a_{ni}, v_{ni}) \rangle, \quad (1)$$

где  $(a_{ij}, v_{ij})$  – упорядоченная пара характеристик и ее значения.

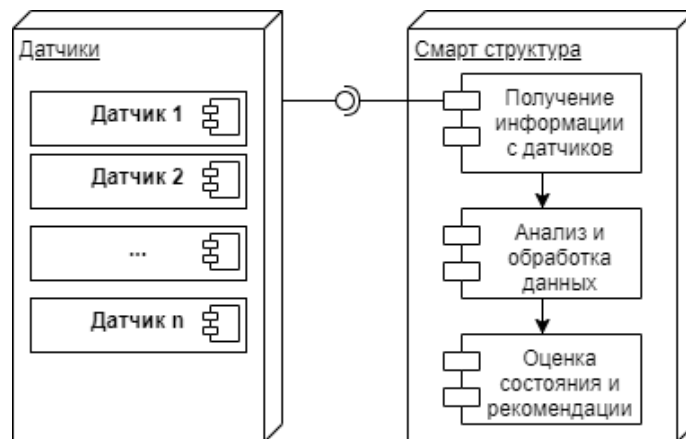


Рис. 1. Структурная схема цифрового двойника производственного процесса

Для анализа и обработки данных о процессе и природных и техногенных факторах, полученных с различных датчиков и устройств, используются методы машинного обучения, в частности логический анализ данных [3]. Использование этого метода в предлагаемой смарт структуре позволяет получить закономерности и классификаторы, учитывающие все характеристики процесса, внешнее и управляющее воздействия и их совокупность. Все это позволяет повысить точность оценки состояния и прогноза его изменения и эффективность рекомендаций по оптимальному режиму работы оборудования и необходимым управляющим воздействиям.

Определение закономерностей и формирование классификаторов состояния процесса основано на последовательном анализе характеристик и внешних воздействий и их совокупностей на соответствие выбранному признаку [4]. Закономерность учитывает те характеристики, которые полностью покрывают классификационный признак. Из закономерностей формируются классификаторы состояний. Как правило, состояние процесса характеризуется неполными и неточными данными. В таких случаях для построения классификаторов следует использовать закономерности с частичным покрытием классификационного признака. При этом нужно заранее определить ограничения и погрешности на покрытие признака.

С учетом ограничений, погрешностей и параметров оптимизационной модели получим закономерности с небольшой степенью и максимальным покрытием. Редукция построенного классификатора состояний процесса производится на основе рекуррентной конъюнкции закономерностей с учетом ограничений и погрешностей покрытий классификационного признака. Закономерности, которые не соответствуют ограничениям и погрешности покрытий, удаляются из классификатора [5]. Закономерности, для которых количество наблюдений,

противоположных признаку состояния, ниже, чем у оставшихся в классификаторе, также удаляются (рис. 2). Таким образом, редукция классификатора заключается в следующем:

- 1) определение значения количества наблюдений, противоположных классификационному признаку состояния, для каждой закономерности в исходном классификаторе;
- 2) сортировка закономерностей в порядке убывания значения количества противоположных наблюдений  $S_k$  для каждого класса;
- 3) удаление закономерностей из классификатора с учетом погрешности и формирование из оставшихся новых классификаторов;
- 4) проверка оптимальности классификатора. Увеличение количества непокрытых наблюдений множества данных свидетельствует о недостаточности закономерностей в классификаторе.

Высокая точность классификации состояний производственного процесса при редукции путем рекуррентной конъюнкции закономерностей обусловлена уменьшением среднего значения показателя наблюдений с низким покрытием классификационного признака и увеличением среднего значения показателя наблюдений с высоким покрытием признака для набора закономерностей каждого класса. Повышение интерпретируемости классификатора состояний происходит за счет редукции, критерием остановки которой является увеличение количества непокрытых наблюдений множества данных [6].



Рис. 2. Редукция классификатора

Для повышения точности оценки состояния процесса предлагается для каждой закономерности из полученных классификаторов определять весовой коэффициент  $a_i$ .

$$a_i = \frac{N_i}{M}, \quad (2)$$

где  $N_i$  – количество совпадений выделенной закономерности в классификаторах,  $M$  – общее количество классификаторов.

Весовой коэффициент принимает значение от 0 до 1. 1 – наиболее значимая закономерность при оценке состояния процесса, 0 – закономерность не имеет значения для определения состояния процесса.

После определения весовых коэффициентов для каждой закономерности строится граф связанности  $D = (V, E)$  для классификаторов состояний, в котором вершинами  $V$  будут являться закономерности, а ребрами  $E = (u, v): u, v \in V$  – связи между ними, вес ребра равен значению весового коэффициента закономерности. Далее строится аналогичный по структуре граф связанности  $D' = (V, E)$  критериев оценки состояния процесса. В качестве критериев оценки состояния выступают нормативные и критические значения исследуемых характеристик и параметров. С учетом положений нечеткой логики происходит сравнение вершин двух графов:

$$V \subset V' \Leftrightarrow \forall v \in V: \mu_V(v) \leq \mu_{V'}(v), \quad (3)$$

$$I(V \subset V') = \min_{v \in T} \mu_{V'}(v): T = \{v \in V; \mu_V(v) \leq \mu_{V'}(v); \mu_V(v) > 0\}. \quad (4)$$

В случае положительного сравнения закономерности и соответствующего ему критерия происходит маркирование узла графа классификаторов состояний. Далее рассчитывается путь между маркированными узлами, который используется при расчете оценки состояния процесса. Если  $e_{i,j}$  – ребро, соединяющее две вершины  $v_i$  и  $v_j$ , и весовая функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда путь  $G$  между маркированными узлами рассчитывается как

$$G = \sum_{i=1}^{n-1} f(e_i, e_{i+1}). \quad (5)$$

Особенность метода заключается в поочередном сравнении закономерностей характеристик процесса и их совокупностей и соответствующих им критериев оценки состояния, что позволяет уменьшить нечеткость сравниваемых множеств [7].

Значение оценки состояния процесса находится в диапазоне от 0 до 1. Данный диапазон может быть разделен на конечное число диапазонов, каждому из которых ставится в соответствие набор рекомендаций по управляющему воздействию и оптимальному режиму эксплуатации оборудования.

Таким образом, методика моделирования цифрового двойника производственного процесса заключается в определении характеристик



процесса и внешней среды, формировании закономерностей и классификаторов состояний процесса, оценке состояния процесса и получении рекомендаций по управляющему воздействию и оптимальному режиму эксплуатации производственного оборудования.

Предложенная методика моделирования цифрового двойника производственного процесса может быть использована в интеллектуальных системах управления. В процессе построения закономерностей и классификаторов для оценки состояния процесса учитываются все возможные его характеристики и внешнее воздействие в виде природных и техногенных факторов, их совокупности и связи между ними. Все это позволило повысить точность оценки состояния процесса, прогноза изменения состояния и, как следствие, эффективность рекомендованных управляющих воздействий.

### Литература

1. Shevnina Ju.S., Gagarina L.G., Chirkow A.V. On the Issue of Modeling Complex Nonlinear Systems // AIP Conference Proceeding: Materials Science and Engineering. Vol. 920. CAMSTech-II 2021. P. 323–328.
2. Лекун Я. Как учится машина. Революция в области нейронных сетей и глубокого обучения. (Библиотека Сбера: Искусственный интеллект). М.: Альпина нон-фикшн, 2021.
3. Шевнина Ю.С. Метод декомпозиции сложной нелинейной системы на основе процессного подхода // Системы управления и информационные технологии. 2021, № 3(85). С. 24–29
4. Шевнина Ю.С. Иерархическая модель нелинейной динамической системы // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. 2021, № 8,. С. 135–139. DOI 10.37882/2223–2966.2021.08.40.
5. Кузьмич Р.И., Масич И.С., Ступина А.А. Модели формирования закономерностей в методе логического анализа данных // Системы управления и информационные технологии. 2017, №1(67). С. 33–37.
6. Furnkranz J., Gamberger D., Lavrac N. Foundations of Rule Learning. Springer-Verlag, 2012.
7. Шевнина Ю.С., Гагарина Л.Г. Подходы к автоматизации процессов центров коллективного проектирования микроэлектроники // Информационные технологии и вычислительные системы. 2021, №4. С. 3–16.

**L.G. Gagarina, Ju.S. Shevnina**

National Research University of Electronic Technology

## MODELING A DIGITAL TWIN OF THE PRODUCTION PROCESS USING SMART STRUCTURE

**Keywords:** *smart structure, digital twin, production process, behavior prediction.*

**Abstract.** *The article discusses the methodology for modeling the digital twin of the production process. The basis of the methodology is the method of intellectual analysis and information processing, which provides for the*

*identification of patterns in the features, characteristics and parameters of the production process, the formation of classifiers from them according to various criteria in order to determine and predict the behavior of the process. The proposed digital twin modeling technique allows taking into account the hidden relationships between the characteristics of the production process and their combinations, which increases the accuracy of predicting changes in the behavior of the process and, as a result, increases the efficiency of its management.*

**А.Ф. Гадальшин**

*Смоленский государственный университет*

УДК 004.051

## **РЕАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ АЛГОРИТМА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕННОСТИ КОНТЕЙНЕРОВ**

*Ключевые слова: алгоритм распределения, задача об упаковке контейнеров, Best Fit Munerman, first fit, best fit, worst fit.*

*В работе представлен экспериментальный анализ алгоритма распределения объектов произвольной природы по контейнерам. Эксперименты проводятся в условиях ограниченности и неограниченности контейнеров, что позволяет проверить алгоритм на оптимальность с точки зрения качества распределения объектов. Также алгоритм рассмотрен при условии разных принципов заполнения контейнеров, таких как заполнение первого попавшегося контейнера, контейнера с наибольшим свободным объемом или контейнера с наименьшим свободным объемом.*

### **1. Постановка задачи**

С каждым годом значение задачи о распределении объектов по контейнерам приобретает все большую значимость ввиду увеличения мирового товарооборота. Число товаров растет, что порождает необходимость создания более эффективных алгоритмов заполнения контейнеров. Исходя из этого, проведем анализ алгоритма распределения объектов произвольной природы по контейнерам с предопределенной вместимостью. Этот алгоритм был предложен Виктором Иосифовичем Мунерманом [2], он является эвристическим жадным алгоритмом, ввиду этого оценить его оптимальность можно только экспериментальным путем. Стоит упомянуть, что в нашем случае главным критерием оптимальности алгоритма будет выступать качество распределения объектов. Под качеством распределения будем понимать

показатель разницы между самым заполненным контейнером и наименее заполненным контейнером.

Эксперименты были осуществлены на рабочей станции с такими характеристиками: процессор Intel® Xeon® E3-1245 v2 и 12 ГБ оперативной памяти.

## 2. Алгоритм Best Fit Munerman

Алгоритм занимается решением задачи оптимального распределения объектов по контейнерам, сущность которых может задаваться предметной областью. Подобная задача является NP – трудной комбинаторной задачей [1]. Принцип работы алгоритма основан на том, что на каждом шаге в контейнер размещаются сразу два объекта, симметричные относительно середины. Индекс этих объектов вычисляется как остаток от деления индекса на количество контейнеров. Задача этого алгоритма – распределить объекты так, чтобы число используемых контейнеров и качество распределения было минимально.

Для формализации этой задачи запишем несколько обозначений:

$I = \{1, \dots, n\}$  – множество объектов «произвольной природы»;

$K = \{1, \dots, m\}$  – множество «контейнеров»;

$w_i$ , где  $i = \{1, \dots, n\}$  – «вес»  $i$  объекта множества  $I$ ;

$W_j$ , где  $j = \{1, \dots, m\}$  – максимальная вместимость соответствующего  $j$  «контейнера».

Тогда пусть нам даны  $n$  объектов «произвольной природы», каждый из которых имеет вес  $w_i$ , и набор из  $m$  хранилищ, каждое из которых способно вместить необходимый объем данных. Значение переменной  $x_{ij} \in \{0, 1\}$   $x_{ij}=1$  означает, что элемент  $j$  размещен в хранилище  $i$  ( $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, n$ ), в противном случае  $x_{ij}=0$ . Кроме того, должно выполняться условие: если  $x_{ij} = x_{kj}$  то  $i=k$ , которое означает, что один объект может располагаться только в одном хранилище. Тогда целевая в общем виде функция имеет вид:

$$\text{Minimize } z = \text{Max}(\sum_{j=1}^n w_j x_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n w_j x_{mj}) - \text{Min}(\sum_{j=1}^n w_j x_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n w_j x_{mj}).$$

## 3. Эксперимент на неограниченных контейнерах

Для начала проведем анализ алгоритма на неограниченных контейнерах с целью проверить оптимальность без каких-либо ограничений на вместительность.

Для эксперимента понадобится два массива: массив коллекций для каждого контейнера, который хранит в себе идентификатор и вес, размерностью  $m$  и упорядоченный по возрастанию массив объектов размерностью  $n$ . Также для проведения эксперимента необходимо максимальное количество контейнеров  $P_{\max}$ .

Перейдем непосредственно к самому эксперименту. На вход передадим значения минимального и максимального веса объекта – 1 и

$12 \cdot 10^6$  соответственно, с помощью которых будет создан массив со случайным набором объектов. Количество объектов  $n$  возьмем равным 12 000 000, а количество контейнеров  $R_{\max}$  – равным 65 537. В этом случае результаты будут следующими:

Таблица 1

**Эксперимент на неограниченных контейнерах**

| Количество контейнеров | $R_{\max}$  | $R_{\min}$  | $R_{\max} - R_{\min}$ | % to AV      |
|------------------------|-------------|-------------|-----------------------|--------------|
| 8                      | 90207059618 | 90207016983 | 42635                 | 000,00004726 |
| 16                     | 45103548647 | 45103496240 | 52407                 | 000,00011619 |
| 32                     | 22551777266 | 22551734949 | 42317                 | 000,00018764 |
| 64                     | 11281904631 | 11269853667 | 12050964              | 000,10687383 |
| 128                    | 5640961084  | 5628913147  | 12047937              | 000,21380783 |
| 256                    | 2826500252  | 2814440320  | 12059932              | 000,42758586 |
| 512                    | 1419244298  | 1407203116  | 12041182              | 000,85203651 |
| 1024                   | 709647977   | 697595857   | 12052120              | 001,71286876 |
| 2048                   | 360841708   | 348776936   | 12064772              | 003,40035373 |
| 4096                   | 180429970   | 168371307   | 12058663              | 006,91434567 |
| 8192                   | 96234837    | 84177560    | 12057277              | 013,36635087 |
| 16384                  | 48137575    | 36081371    | 12056204              | 028,63062190 |
| 32768                  | 24078116    | 12014019    | 12064097              | 066,85166727 |
| 65536                  | 12052115    | 0           | 12052115              | 200,00000000 |

Здесь  $R_{\max}$  – максимальная загрузка контейнера,  $R_{\min}$  – минимальная загрузка контейнера, % to AV – качество распределения по контейнерам.

Временные затраты составили 4 секунды.

Исходя из результатов, можно заметить, что алгоритм показывает достаточно хорошее качество распределения объектов, что говорит о его оптимальности, даже не смотря на увеличение количества контейнеров. Стоит отметить, что последняя строчка результатов эксперимента является не показательной, ввиду того что один или несколько контейнеров остались пустыми из-за нехватки объектов.

#### 4. Эксперименты с учетом ограниченных контейнеров

Вторым этапом анализа алгоритма является оценка его с учетом ограниченных контейнеров. Это весьма целесообразно, так как алгоритм должен будет применяться в реальных условиях, а в реальном мире не существует неограниченных контейнеров. Для того чтобы учесть ограничения необходимо преобразовать целевую функцию в следующий вид:

$$\text{Minimize } z = \text{Max}(W_1 - \sum_{j=1}^n w_j x_{1j}, \dots, W_m - \sum_{j=1}^n w_j x_{mj}) - \text{Min}(W_1 - \sum_{j=1}^n w_j x_{1j}, \dots, W_m - \sum_{j=1}^n w_j x_{mj}).$$

Для проведения экспериментов и анализа алгоритма на оптимальность в условиях ограниченности контейнеров рассмотрим его с применением разных принципов заполнения контейнеров, значимость которых может быть обусловлена реальными прикладными задачами.

Первым из таких принципов является заполнение первого попавшегося контейнера до максимума и переход к следующему. Такой принцип иногда называют first fit [3–4]. Для эксперимента возьмем количество объектов равное 4 000 000, наибольший объект весом 180, наименьший – 101 и количество контейнеров, равное 2048. Ограничение на контейнер установлено в 1 000 000. В этом случае результат будет следующим.

Таблица 2

**Эксперимент с учетом ограниченных контейнеров при использовании принципа first fit**

| Количество контейнеров | Rmax   | Rmin   | Rmax - Rmin | % to AV      |
|------------------------|--------|--------|-------------|--------------|
| 8                      | 999880 | 999880 | 0           | 000,00000000 |
| 16                     | 999880 | 999763 | 117         | 000,01170209 |
| 32                     | 999880 | 999763 | 117         | 000,01170209 |
| 64                     | 999980 | 999734 | 246         | 000,02460352 |
| 128                    | 999988 | 999730 | 258         | 000,02580364 |
| 256                    | 999988 | 999730 | 258         | 000,02580364 |
| 512                    | 999995 | 999728 | 267         | 000,02670370 |
| 1024                   | 999995 | 0      | 999995      | 200,00000000 |
| 2048                   | 999995 | 0      | 999995      | 200,00000000 |

Время работы составило 10.40 секунды.

По результатам можно увидеть, что на протяжении всего эксперимента, за исключением двух последних строчек, качество распределения стабильно оставалось ниже 0.1, что говорит об очень хорошем качестве распределения объектов. Две последние строчки не показательны ввиду присутствия одного или нескольких пустых контейнеров, что приводит к возрастанию качества распределения до 200.

Следующим экспериментом с ограниченными контейнерами будет эксперимент с применением принципа заполнения контейнеров, который называется best fit. Смысл этого принципа заключается в заполнении контейнера с наименьшим свободным объемом при условии, что контейнер имеет необходимый свободный объем. Входные параметры будут следующими: количество объектов – 4 000 000, наименьший и наибольший объект – 101 и 180 соответственно, количество контейнеров – 2048, ограничение на контейнер – 1 000 000. Результаты представлены в таблице.

Таблица 3

**Эксперимент с учетом ограниченных контейнеров при использовании принципа best fit**

| Количество контейнеров | Rmax   | Rmin   | Rmax - Rmin | % to AV      |
|------------------------|--------|--------|-------------|--------------|
| 8                      | 999880 | 999880 | 0           | 000,00000000 |
| 16                     | 999880 | 999805 | 75          | 000,00750118 |

|      |        |        |        |              |
|------|--------|--------|--------|--------------|
| 32   | 999880 | 999762 | 118    | 000,01180211 |
| 64   | 999946 | 999762 | 184    | 000,01840269 |
| 128  | 999946 | 999746 | 200    | 000,02000308 |
| 256  | 999946 | 999730 | 216    | 000,02160350 |
| 512  | 999995 | 999723 | 272    | 000,02720384 |
| 1024 | 999995 | 0      | 999995 | 200,00000000 |
| 2048 | 999995 | 0      | 999995 | 200,00000000 |

Время выполнения составило 28.85 секунды.

Исходя из результатов эксперимента, видим, что алгоритм показывает хорошее качество распределения, меньшее 0.1. Время выполнения составило 29 секунд, что является неплохим показателем быстродействия. Две последние строчки не показательны, как и в других экспериментах.

Последний эксперимент с ограниченными контейнерами будет проведен с применением принципа worst fit. Этот принцип заключается в заполнении контейнера с наибольшим свободным объемом при условии, что контейнер имеет необходимый свободный объем. В качестве входных параметров будут выступать: количество объектов – 4 000 000, наименьший и наибольший объект – 101 и 180 соответственно, количество контейнеров – 2048, ограничение на контейнер 1 000 000.

Таблица 4

Эксперимент с учетом ограниченных контейнеров при использовании принципа worst fit

| Количество контейнеров | Rmax   | Rmin   | Rmax - Rmin | % to AV      |
|------------------------|--------|--------|-------------|--------------|
| 8                      | 999880 | 999880 | 0           | 000,00000000 |
| 16                     | 999904 | 999625 | 279         | 000,02790657 |
| 32                     | 999905 | 999626 | 279         | 000,02790654 |
| 64                     | 999904 | 999625 | 279         | 000,02790657 |
| 128                    | 999900 | 999621 | 279         | 000,02790668 |
| 256                    | 999899 | 999620 | 279         | 000,02790671 |
| 512                    | 999875 | 999596 | 279         | 000,02790738 |
| 1024                   | 547118 | 546838 | 280         | 000,05119036 |
| 2048                   | 273560 | 273280 | 280         | 000,10240655 |

Время выполнения составило 30.96 секунды.

Как видно по результатам проведенного эксперимента, показатель качества распределения только один раз достиг 0.1, в остальных случаях он оставался меньше. Этот результат в совокупности с небольшим временем выполнения говорит об оптимальности алгоритма с применением принципа worst fit.

### Заключение

Алгоритм показал хорошее качество распределения во всех экспериментах. В условиях неограниченности контейнеров максимальный показатель составил 66, и это при большом количестве контейнеров и

объектов. Что касается ограниченных контейнеров, то показатель только один раз превысил 0.1, а в остальных случаях он был меньше. Это говорит о хорошем качестве распределения объектов при указанных условиях.

Временные затраты оставались неплохими: при неограниченных контейнерах они составили всего 4 секунды, для ограниченных контейнеров наибольший показатель составил 30 секунд, что немного для распределения большого объема объектов с примененным принципом заполнения контейнера. Разница между минимально и максимально заполненным контейнером во всех случаях была минимально возможная, что свидетельствует о равномерном распределении по всем контейнерам.

В заключение можно сказать, что алгоритм показал себя оптимальным во всех экспериментах, как с неограниченными, так и с ограниченными контейнерами, даже несмотря на увеличение количества контейнеров.

### Литература

1. Смирнов А.В. О задаче упаковки в контейнеры. // УМН. 1991. Т. 46, вып. 4(280). С. 173–174.
2. Munerman V., Munerman D. Realization of Distributed Data Processing on the Basis of Container Technology // 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EConRus). IEEE, 2019. С. 1740–1744.
3. Yue Minyi (1991). A simple proof of the inequality  $FFD(L) \leq (11/9)OPT(L) + 1$ , for all L, for the FFD bin-packing algorithm, "A simple proof of the inequality  $FFD(L) \leq 11/9 OPT(L) + 1, \forall L$  for the FFD bin-packing algorithm" //Acta Mathematicae Applicatae Sinica T. 7 (4). P. 321–331.
4. Baker B.S. A new proof for the first-fit decreasing bin-packing algorithm // Journal of Algorithms. 1985. Т. 6, №1. P. 49–70.

**A.F. Gadalshin**

Smolensk State University

## IMPLEMENTATION AND ANALYSIS OF THE OBJECT DISTRIBUTION ALGORITHM TAKING INTO ACCOUNT THE LIMITATIONS OF CONTAINERS

**Keywords:** *distribution algorithm, container packing problem, Best Fit Munerman, first fit, best fit, worst fit.*

**Abstract.** *In this paper, an experimental analysis of algorithms for the distribution of objects of arbitrary nature by containers is carried out. The experiments are carried out under conditions of limited and unlimited containers, which will allow us to test the algorithm for optimality in terms of the quality of the distribution of objects. The algorithm is also considered under the condition of different principles of filling containers, such as filling*

*in the first container, in the container with the largest free volume or in the container with the smallest free volume.*

**Е.И. Гончаров**

*Смоленский государственный университет*

УДК 004.021

## **РЕАЛИЗАЦИЯ $(\lambda, \mu)$ -СВЕРНУТОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ СРЕДСТВАМИ $(0, \mu)$ -СВЕРНУТОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ**

Ключевые слова: *алгебра многомерных матриц,  $(\lambda, \mu)$ -свернутое произведение,  $(0, \mu)$ -свернутое произведение, NumPy, CuPy.*

*В статье формулируется и доказывается утверждение, что  $(\lambda, \mu)$ -свернутое произведение может быть выражено через набор  $(0, \mu)$ -свернутых произведений. Это утверждение не только дает новый подход к распараллеливанию центральной операции алгебры многомерных матриц, но и позволяет использовать библиотеки тензорной алгебры для реализации операций алгебры многомерных матриц. В статье показан пример и оценена эффективность использования NumPy, CuPy.*

### **Элементы алгебры многомерных матриц**

Определения многомерной матрицы и  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения, предложенные Н.П. Соколовым [1], неоднократно приводились в работах [2] и [3].

Работая с объектами алгебры многомерных матриц, часто приходится использовать конструкции «по всевозможным наборам скоттовых индексов» или представлять многомерную матрицу  $A$  порядка  $N$  и размерности  $p$  вектором  $A'$  размера  $N^p$ . Для упрощения целесообразно ввести *правило пересчета индексов* – обратимую функцию  $f_N((x_0, \dots, x_{b-1})) = y$ , где  $x_i = 0, \dots, N-1$ ;  $y \in \{0, \dots, N^b - 1\}$ . Примером такой функции может быть  $f_N((x_0, \dots, x_{b-1})) = \overline{(x_0 x_1 \dots x_{b-1} N)_{10}}$ . Например,  $f_7((0,0)) = 0$ ,  $f_2((0,1,0)) = 2$ ,  $f_8((7,7,7)) = 511$  и так далее.

Пусть  $A = \left\| a_{isc} \right\|$  –  $p$ -мерная матрица порядка  $N$ . За  $S_i = (s_{i_0}, \dots, s_{i_{\lambda-1}})$  обозначим зафиксированный набор скоттовых индексов. Всего таких наборов  $N^\lambda$ . С учетом правила пересчета индексов  $f_N(S_i) = y_i$ . Каждому такому набору сопоставим  $(p - \lambda)$ -мерную матрицу

$\widetilde{A}_{y_i}^S = \left\| \left( \widetilde{a}_{y_i}^S \right)_{lc} \right\| = \left\| a_{ly_i^{-1}c} \right\| = \left\| a_{lS_i c} \right\|$ , которая является  $S_i$ -м *скоттовым*



сечением многомерной матрицы  $A$ . Аналогичным образом можно ввести определения для *кэлиевых* и *свободных сечений*.

Многомерную матрицу, обладающую скоттовыми индексами, можно представить в виде группы ее скоттовых сечений:

$D_{f_N}^S(A) = \left\{ \widetilde{A}_{y_i}^S \right\}_{i=0}^{N^\lambda-1}$ . Верно и обратное – по *группе скоттовых сечений*

можно восстановить исходную многомерную матрицу:

$$A = \left( D_{f_N}^S \right)^{-1} \left( \left\{ \widetilde{A}_{y_i}^S \right\}_{i=0}^{N^\lambda-1} \right).$$

**Реализация  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения матриц  $A$  и  $B$  средствами  $(0, \mu)$ -свернутого произведения**

**Лемма 1**

$${}^{(\lambda, \mu)}(A \times B) = \left( D_{f_N}^S \right)^{-1} \left( \left\{ {}^{(0, \mu)}(\widetilde{A}_{y_i}^S \times \widetilde{B}_{y_i}^S) \right\}_{i=0}^{N^\lambda-1} \right) \forall f_N.$$

Доказательство леммы 1.  $\forall i = 0, \dots, N^\lambda - 1$  верно, что

$${}^{(0, \mu)}(\widetilde{A}_{y_i}^S \times \widetilde{B}_{y_i}^S) = \widetilde{C}_{y_i}^S = \left\| \left( \widetilde{c}_{y_i}^S \right)_{lm} \right\|,$$

где  $\widetilde{c}_{y_i}^S = \sum_c \widetilde{a}_{y_i}^S \times \widetilde{b}_{y_i}^S = \sum_c a_{ly_i^{-1}c} \times b_{cy_i^{-1}m} = \sum_c a_{lS,c} \times b_{cS,m} = c_{lSm}$ . Тогда

$$\left( D_{f_N}^S \right)^{-1} \left( \left\{ {}^{(0, \mu)}(\widetilde{A}_{y_i}^S \times \widetilde{B}_{y_i}^S) \right\}_{i=0}^{N^\lambda-1} \right) = \left( D_{f_N}^S \right)^{-1} \left( \left\{ c_{lSm} \right\}_{i=0}^{N^\lambda-1} \right) = \left\| c_{lSm} \right\| = {}^{(\lambda, \mu)}(A \times B). \text{ Что}$$

и требовалось доказать.

**Пример применения леммы 1**

Выполнить  $(2, 1)$  – свернутое произведение матриц  $A$  и  $B$ , где

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} a_{0000} & a_{0001} & a_{0100} & a_{0101} \\ a_{0010} & a_{0011} & a_{0110} & a_{0111} \\ \hline a_{1000} & a_{1001} & a_{1100} & a_{1101} \\ a_{1010} & a_{1011} & a_{1110} & a_{1111} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right\| \text{ и}$$

$$B = \left\| \begin{array}{cc|cc} b_{000} & b_{001} & b_{100} & b_{101} \\ b_{010} & b_{011} & b_{110} & b_{111} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right\|.$$

Так как  $\mu = 1$ , а скоттовые сечения  $A$  и  $B$  имеют размерности 2 и 1 соответственно, то с использованием леммы 1 необходимо выполнять умножения матриц  $2 \times 2$  на столбцы  $2 \times 1$ . Пусть  $f_2((x_0, x_1)) = (\overline{x_0 x_{12}})_{10}$ , тогда

$${}^{2,1}(A \times B) = C = \left( D_{f_N}^S \right)^{-1} \left( \left\{ \widetilde{C}_{y_i}^S \right\}_{i=0}^3 \right),$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_0^S &= {}^{(0,1)}(\widetilde{A}_0^S \times \widetilde{B}_0^S) = \left( \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cc} a_{0000} & a_{0001} \\ a_{1000} & a_{1001} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} b_{000} \\ b_{100} \end{array} \right\| \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{000} \\ c_{100} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{C}_1^S &= {}^{(0,1)}(\widetilde{A}_1^S \times \widetilde{B}_1^S) = \left( \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cc} a_{0010} & a_{0001} \\ a_{1010} & a_{1001} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} b_{001} \\ b_{101} \end{array} \right\| \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{001} \\ c_{101} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{C}_2^S &= {}^{(0,1)}(\widetilde{A}_2^S \times \widetilde{B}_2^S) = \left( \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cc} a_{0100} & a_{0101} \\ a_{1100} & a_{1101} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} b_{010} \\ b_{110} \end{array} \right\| \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{010} \\ c_{110} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{C}_3^S &= {}^{(0,1)}(\widetilde{A}_3^S \times \widetilde{B}_3^S) = \left( \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cc} a_{0000} & a_{0001} \\ a_{1000} & a_{1001} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} b_{000} \\ b_{100} \end{array} \right\| \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{011} \\ c_{111} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Итак,

$${}^{2,1}(A \times B) = C = \left\| \begin{array}{cc|cc} c_{000} & c_{001} & c_{200} & c_{101} \\ c_{010} & c_{011} & c_{110} & c_{111} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & -3 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right\|.$$

### Реализация $(0, \mu)$ -свернутого произведения матриц $A$ и $B$ средствами NumPy (CuPy)

В рамках использования NumPy (CuPy) *многомерная матрица* задается как вектор, после чего к нему применяется метод `numpy.reshape` (`cupy.reshape`), преобразующий ее в многомерную матрицу размерности  $D$  и порядка  $N$ .

`numpy.tensordot(A, B,  $\mu$ )` (`cupy.tensordot(A, B,  $\mu$ )`) реализует  *$(0, \mu)$ -свернутое произведение* многомерных матриц  $A$  и  $B$ . Метода, реализующего  $(\lambda, \mu)$ -свернутое произведение, в NumPy (CuPy) нет. Но с помощью леммы 1 его можно выполнить средствами NumPy(CuPy) как последовательность  $(0, \mu)$ -свернутых произведений.

Для эксперимента производилось  $(0, 4)$ -свернутое произведение 6 и 8-мерных матриц  $A$  и  $B$  соответственно в среде Colab. Вычислительная сложность  $O(N^{10})$ . На оси  $X$  рисунка 1 указаны порядки матрицы. На Оси  $Y$  – время выполнения операции.

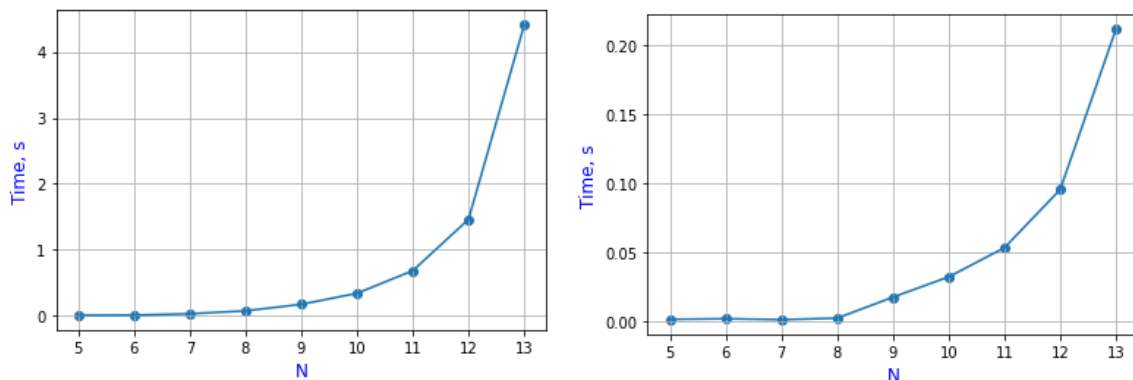


Рис. 1. График зависимости скорости выполнения от  $N$  для NumPy(CuPy)

Численные значения времени вычисления приведены в таблице 1.

Таблица 1

**Время для (0, 4)-свернутого произведения**

| $N$ | Время, с |        |
|-----|----------|--------|
|     | NumPy    | CuPy   |
| 5   | 0,0073   | 0,0014 |
| 6   | 0,0092   | 0,0019 |
| 7   | 0,0296   | 0,0012 |
| 8   | 0,0741   | 0,0023 |
| 9   | 0,1731   | 0,0175 |
| 10  | 0,3398   | 0,0322 |
| 11  | 0,6828   | 0,0532 |
| 12  | 1,4602   | 0,0953 |
| 13  | 4,4093   | 0,2113 |

NumPy(CuPy) включает в себя много полезных функций, оптимизирующих бесконечные пересчеты индексов в многомерных матрицах и имеет достаточный функционал для реализации основных операций алгебры многомерных матриц. NumPy и CuPy в связке позволяют использовать как ресурсы процессора, так и GPU.

### Выводы

Согласно лемме 1, вычисление  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения матриц  $A$  и  $B$  порядка  $N$  эквивалентно выполнению  $N^2$   $(0, \mu)$ -свернутых произведений их соответствующих скоттовых сечений  $(A_{y_i}^S$  и  $B_{y_i}^S)$ . Данная лемма дает как инструкцию по выполнению  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения средствами NumPy(CuPy), так и возможный способ распараллеливания этой операции.

### Литература

1. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев: Наукова думка, 1972.
2. Мунерман В.И. Архитектура программно-аппаратного комплекса для массовой обработки данных на базе многомерно-матричной модели // Системы высокой доступности. 2015. Т. 11, №. 2. С. 13–18.
3. Гончаров Е.И., Ильин П.Л. Сравнение реализаций блочного алгоритма умножения многомерных матриц // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 102–109.

**E.I. Goncharov**

Smolensk State University

**REALIZATION THE  $(\lambda, \mu)$ -CONVOLUTION PRODUCT OF MATRIXES BY MEANS OF THE  $(0, \mu)$ -CONVOLUTION PRODUCT**

**Keywords:** *multidimensional matrix algebra, the  $(\lambda, \mu)$ - convolution product, the  $(0, \mu)$ - convolution product, NumPy, CuPy.*

**Abstract.** *The article formulates and proves the assertion that the  $(\lambda, \mu)$ -convolution product can be expressed in terms the  $(0, \mu)$ -convolution product. This statement provides a new approach to parallelization of the central operation of the algebra of multidimensional matrices and allows to use of tensor algebra libraries to implement operations of the algebra of multidimensional matrices. The article shows an example and evaluates the effectiveness of using NumPy, CuPy.*

**А.В. Городилов, А.И. Кононова**  
*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.5

## **ВВОД ДАННЫХ: ТРАДИЦИЯ ИЛИ РЕАКЦИЯ**

Ключевые слова: *клавиатура, GNU/Linux, Xkb, локализация, раскладки клавиатуры, ввод данных.*

*В статье рассматривается ввод данных при помощи наиболее популярного устройства – клавиатуры: раскладки клавиатуры, применяющиеся в современных операционных системах, возможности настройки ввода в операционной системе GNU/Linux, используемые инструменты, полученные результаты. Рассматриваются тестируемые в настоящее время варианты раскладки и планируемые изменения.*

Наиболее распространённым средством ввода данных является клавиатура: физическая для ПК или виртуальная для мобильных устройств. Соответственно, одним из определяющих условий для удобства ввода данных является удобная раскладка клавиатуры. Но действительно ли наиболее распространённые в настоящее время раскладки являются также и наиболее удобными?

### **1. История**

Клавиатура впервые появилась с изобретением пишущих машинок. В некоторых ранних моделях использовалась раскладка с алфавитным порядком символов, но практически сразу же начался процесс переупорядочивания символов для ускорения набора. Менялось и количество клавиш: от 30 (латинский алфавит, два знака препинания и два модификатора) до 42–46 (кириллица и несколько знаков препинания

либо латиница и несравненно большее число знаков препинания и множество модификаторов).

При разработке раскладки каждой модели пишущей машинки использовались как статистические характеристики языка, на котором планировалось печатать, так и конструктивные особенности самой модели. Так, широко известно, что популярное для латиницы семейство раскладок QWERTY / QWERTZ / AZERTY возникло из-за особенностей механизма ранних пишущих машинок и в настоящее время является, пожалуй, максимально неудобным для набора текстов любого языка на латинице. При этом национальные раскладки различных европейских языков, относящиеся к данному семейству, хотя и схожи между собой, не являются полностью совместимыми.

Наиболее известная в нашей стране раскладка QWERTY используется в США (вместе с физической 104- или 87-клавишной раскладкой ANSI); в Европе распространены национальные варианты (и физическая 105/88-клавишная раскладка ISO, часто имеющая более удобный высокий Enter).

Недостатков QWERTY / QWERTZ / AZERTY лишено разработанное позже семейство раскладок Дворака, включающее как наиболее известный вариант – для десятипальцевой печати, так и два варианта для печати одной рукой – для левой и для правой рук. Варианты раскладок Дворака объединяет общий принцип построения, но они также несовместимы между собой – в частности, «левая» и «правая» раскладки для одной руки не являются точным зеркальным отражением друг друга. Существуют компромиссные варианты, частично построенные по схеме Дворака, а частично совпадающие с QWERTY. Также есть национальные различия.

Раскладка ЙЦУКЕН для кириллицы была разработана в период, когда пишущие машинки уже были достаточно совершенны и создавалась с целью минимизации пути, проходимого руками машинистки, то есть она является удобной для набора текстов на русском языке и в настоящее время. Более того, она подходит как для набора одной рукой, так и для десятипальцевого набора. Национальные различия сводятся в основном к добавлению символов кириллицы, отсутствующих в русском языке, но не к перестановкам одноимённых символов, как в QWERTY / QWERTZ / AZERTY.

Первые версии ЙЦУКЕН включали символы дореволюционного алфавита и некоторое количество знаков препинания – меньшее, чем пишущие машинки для европейских языков, так как для алфавита потребовалось большее число клавиш. При этом более востребованные знаки препинания набирались в нижнем регистре, а цифры – в верхнем. После сокращения алфавита в 1918 году количество букв русского языка

полностью совпадает с количеством клавиш алфавитного блока (как для физической раскладки ISO, так и для ANSI) (рис. 1).



Рис. 1. Клавиатура пишущей машинки Ятрань (СССР)

Этот вариант раскладки ru получил в GNU/Linux название `typewriter` (рис. 2, а).

В настоящее время распространён вариант ЙЦУКЕН, разработанный для Microsoft Windows: в нём буква Ё перенесена вонне алфавитного блока, на одну строку с цифрами; вместо неё в алфавитном блоке располагается точка (хотя наиболее частым знаком препинания в русском языке является запятая).

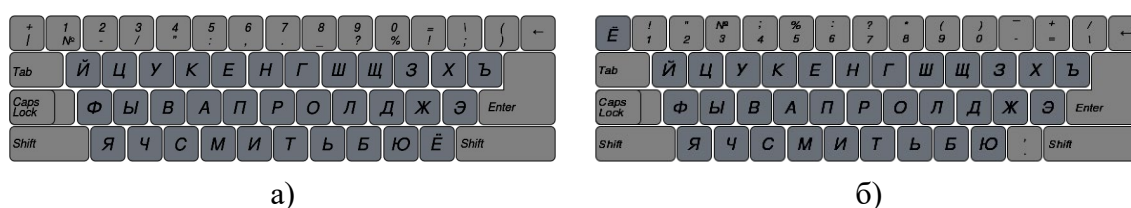


Рис. 2. Варианты `ru-typewriter` (а) и `ru-winkeys` (б) русской раскладки

Кроме того, цифры набираются в нижнем регистре, а знаки препинания – в верхнем. В ранних версиях GNU/Linux этот вариант носил название `winkeys` (рис. 2, б).

Вариант `ru-winkeys` менее удобен, чем `ru-typewriter`. Но из-за популярности операционной системы Microsoft Windows вариант `ru-winkeys` раскладки ЙЦУКЕН также стал популярным и наносится на производимые для РФ клавиатуры. Тем не менее во всех современных операционных системах доступны как множество вариантов русских раскладок (в том числе `ru-typewriter`), так и множество раскладок английского языка и других языков, основанных на латинице или кириллице.

Более того, используемая в GNU/Linux подсистема Xkb позволяет вручную редактировать раскладки и при необходимости создать свою собственную. Все раскладки Xkb описаны в каталоге `/usr/share/X11/xkb/symbols/` (каждая раскладка – отдельный файл, внутри

каждого файла может быть описано несколько вариантов с разными именами и содержанием); в частности, переключатели раскладок описаны в файле /usr/share/X11/xkb/symbols/group. Текущие раскладки и переключатель можно задать в /etc/default/keyboard (переменные XKB\_LAYOUT, XKB\_VARIANT и XKB\_OPTIONS). Существует множество графических инструментов изменения настроек /etc/default/keyboard, аналогичных средствам администрирования операционной системы Microsoft Windows, но проще всего отредактировать этот файл вручную в текстовом редакторе.

## **2. Постановка задачи**

В настоящее время существуют различные раскладки для русского языка, как основанные на ЙЦУКЕН, так и построенные по принципу Дворака; все они удобны для набора и часто включают символы русской типографики. Но, так как большинство текстов на русском языке, особенно технических, включают не только кириллицу, но и латиницу, а также символы различных языков программирования, одной только русской раскладки для набора текста недостаточно.

Чаще всего эта проблема решается включением двух независимых раскладок – латиницы (чаще всего США QWERTY, что само по себе является неудобством) и кириллицы (русской, чаще всего winkeys) с циклическим переключением между ними. Это решение имеет следующие недостатки:

- необходимо изучать две разные, никак не связанные между собой раскладки (в частности, общие для всех языков знаки препинания, как правило, располагаются в разных местах);

- необходимо постоянно помнить, какая из двух раскладок сейчас используется.

Таким образом, недостаточно создать удобную раскладку русского языка: необходимо разработать две взаимосвязанные между собой раскладки – для ввода латиницы и кириллицы соответственно, причём желательно с одинаковым расположением небуквенных символов; а также избавиться от необходимости запоминать, включена ли в данный момент латиница или кириллица.

## **3. Фонетическая латиница**

Задача реализации взаимосвязанных раскладок кириллицы и латиницы успешно решается использованием фонетических раскладок. В настоящее время под фонетической обычно понимается такая раскладка русского языка, где каждой букве латиницы раскладки QWERTY ставится в соответствие некоторая буква кириллицы. К сожалению, полученная таким образом раскладка (ЯВЕРТЫ) наследует все недостатки QWERTY; кроме того, так как в русской раскладке должно быть 33 буквы, а QWERTY включает только 26 букв базовой латиницы, точное соответствие невозможно.

При этом в серии ЭВМ Электроника БК [1] – клавиатура одного из вариантов исполнения показана на рисунке 4 – использовано обратное

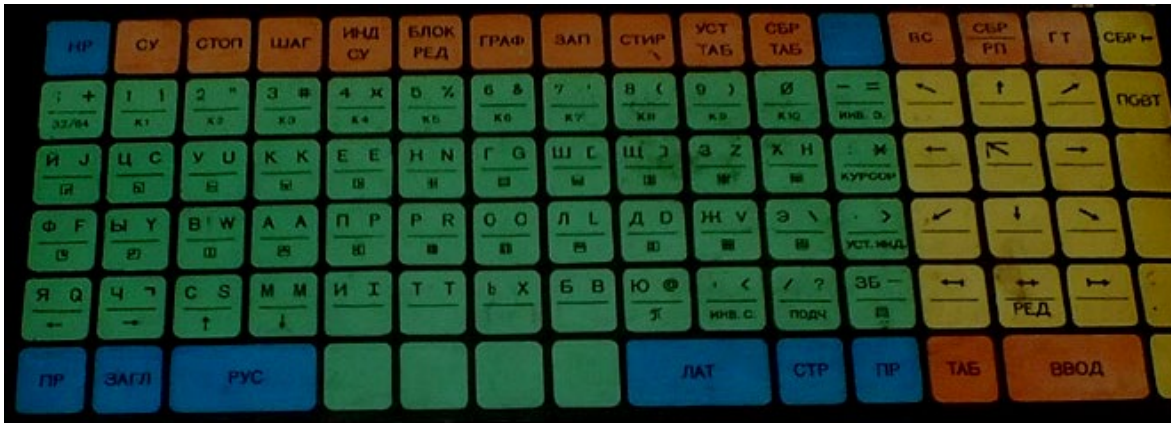


Рис. 4. Клавиатура компьютера Электроника БК-0010 (СССР)

преобразование: каждой русской букве раскладки ЙЦУКЕН сопоставляется латинская; при этом парной латинской буквы не нашлось для русских Ч, Ш, Щ, Ъ, Э, Ю (Ё на клавиатуре БК отсутствует). Применяя этот принцип к рисунку 2, а (добавив Ё к русской основе раскладки), получаем рисунок 5, а).



Рис. 5. Фонетическая раскладка латиницы JCUKEN: оригинальная БК Электроника (а) и компактная (б)

Для сравнения удобства JCUKEN с QWERTY была создана экспериментальная раскладка для Xkb [2] как с расположением букв аналогично БК (рис. 5, а), так и с изменениями, предложенными в статье [3]. Все разработанные раскладки тестировались на клавиатуре со стёртыми от старости буквами латиницы (надписи наносились маркером и наклейками). Как выяснилось:

- при наборе двумя руками раскладка с рисунка 5, а) действительно удобнее QWERTY как для русских текстов с вкраплениями малого количества латиницы, так и для программ на C/C++ целиком на латинице (при этом результаты в целом совпадают с приведёнными в [3]);

- переход от клавиатуры с раскладкой JCUKEN к *другой* клавиатуре с раскладкой QWERTY не более сложен, чем переход к клавиатуре с другими физическими габаритами (при этом перепривыкание JCUKEN→QWERTY на *той же самой* клавиатуре тяжелее, чем QWERTY→JCUKEN);

- при переходе к набору только левой рукой требуется усилие для ввода «выступающих» из общего блока букв H (аш латинское) и V, расположенных соответственно на X (ха русском) и Ж;



– исправления, внесённые в статье [3], скорее затрудняют набор программ на C/C++ и не помогают запомнить новые клавиатурные сокращения;

– при этом одно из наиболее востребованных сокращений QWERTY – Ctrl+Z – попадает на Ctrl+Q, и подтверждение перед закрытием окна запрашивают не все приложения.

По результатам тестирования нескольких версий фонетической раскладки JCUKEN был выбран вариант, изображённый на рисунке 5, б). Для наиболее компактного размещения латиницы буквы Q, H (аш латинское), V были вдвинуты на свободные места: Q на Ч, H (аш латинское) на Ш и V на Щ. Такой вариант не менее удобен, чем рис. 5, а) и к тому же включает частую английскую дигramму GH на соседних клавишах.

#### 4. Нециклическое включение раскладок

Для отображения включённой в данный момент раскладки используются различные индикаторы, но постоянно сверяться с ними неудобно. Более надёжным решением является замена циклического переключателя раскладок на набор нециклических включателей: одна комбинация клавиш включает латиницу (независимо от текущей раскладки), вторая – кириллицу.

Во всех современных операционных системах доступна возможность нециклического включения той или иной раскладки [4], отметим, что она является рекомендуемой [5]. Именно такой метод переключения раскладок использовался в БК (клавиши РУС и ЛАТ на рисунке 4).

Для Xkb включение первой раскладки из списка соответствует символу ISO\_First\_Group, второй – символу ISO\_Last\_Group. Предусмотренные комбинации включателей описаны в файле /usr/share/X11/xkb/symbols/group, но можно также описать новый по образцу стандартных.

В экспериментальной раскладке [2] использовались различные клавиши и комбинации клавиш для включателей, но в итоге наиболее удобными оказались LWin как ISO\_Last\_Group – включатель второй раскладки (русской) и Menu как ISO\_First\_Group – включатель первой (латиницы):

```
partial modifier_keys xkb_symbols "common_all_mod_lwin_rus" {
    key <LWIN> { type[Group1]="ONE_LEVEL", symbols[Group1] = [ ISO_Last_Group ] };
};
partial modifier_keys xkb_symbols "common_all_mod_menu_lat" {
    key <MENU> { type[Group1]="ONE_LEVEL", symbols[Group1] = [ ISO_First_Group ] };
};
};
```

## 5. Знаки препинания и символы языков программирования

Как в русском языке, так и во всех европейских используется как минимум девять общих знаков препинания: дефис (на практике используется ASCII-символ 0x2D – дефисоминус), запятая, точка, вопросительный и восклицательный знаки, двоеточие, точка с запятой и круглые скобки. Некоторые знаки имеют различное начертание и, соответственно, код в разных языках – тире, кавычки (в русском языке используется длинное тире и два вида кавычек – «ёлочки» и „лапки” – ещё пять символов). Для написания программ могут потребоваться символы, отличные от используемых в текстах (на практике все символы раскладки QWERTY – \, |, \$, ", ', @, #, %, ^, &, /, {}, []– используются в тех или иных языках программирования).

Таким образом, для работы необходимо как минимум  $9 + 5 + 15 = 29$  символов, отличных от букв и цифр. Чтобы разместить все их на клавиатуре, тем более единообразно для русской и латинской раскладок, необходимо либо использовать больше клавиш, либо размещать на одной клавише более двух символов.

Большинство раскладок двухуровневые, то есть при помощи одной клавиши можно ввести до двух разных символов: один при нажатии на клавишу без модификатора (первый уровень), второй – с модификатором Shift (второй уровень).

Стандартная конфигурация Xkb позволяет использовать до трёх модификаторов и, соответственно, до восьми уровней; дополняя файлы в каталоге /usr/share/X11/xkb/types/, можно получить и большее число уровней (тем не менее восьми обычно достаточно). На рисунке 6 показаны восемь уровней для клавиш Ю и Ё, соответствующие определениям:

```
key <AB09> {[ comma, less, lessthanequal, U2270, U227A, U2280, U227E, U226E ]}; // ,  
< ≤ ≪ < * ≤ *  
key <AB10> {[ period, greater, greaterthanequal, U2271, U227B, U2281, U227F, U226F  
 ]}; // . > ≥ ≫ > * ≥ *
```

Чёрным цветом показаны уровни 1 (без модификаторов; символы /ю и /ё) и 2 (модификатор Shift; символы </Ю и >/Ё), красным — 3 (модификатор Level3; символы ≤ и ≥) и 4 (модификаторы Level3+Shift; символы ≪ и ≫), зелёным — 5 и 6 (Level5, < > и Level3+Shift, \* \*), жёлтым — уровни 7 и 8 (Level3+Level5, ≲ ≳ и Level3+Level5+Shift, ≪ ≫).

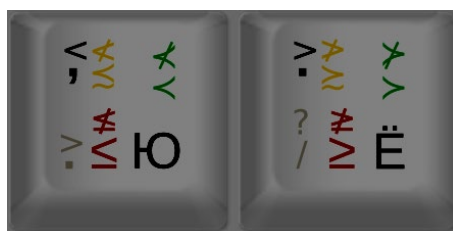


Рис. 6. Символы восьми уровней: чёрным цветом показаны уровни 1 и 2, красным — 3 и 4, зелёным — 5 и 6, жёлтым — 7 и 8

В качестве модификатора Level3 используется клавиша CapsLock либо ScrollLock, Level5 — RWIN (если его нет на клавиатуре — RALT):

```
partial modifier_keys xkb_symbols "common_all_mod_caps_level3" {
    replace key <CAPS> { type[Group1]="ONE_LEVEL", symbols[Group1] = [
ISO_Level3_Shift ] };
    modifier_map Mod5 { ISO_Level3_Shift };
};
partial modifier_keys xkb_symbols "common_all_mod_rwin_level5" {
    replace key <RWIN> { type[Group1]="ONE_LEVEL", symbols[Group1] = [
ISO_Level5_Shift ] };
    modifier_map Mod3 { ISO_Level5_Shift };
};
```

Кроме того, так как символы F1-F12 и Insert нажимаются автором раскладки чаще случайно, чем целенаправленно, было решено убрать символы F1-F12 и Insert на уровень 3, а на уровнях 1–2 расположить знаки препинания, а также необходимые в LaTeX символы ^, \_ и т.п. (рис. 7).

Наиболее востребованные знаки препинания – запятая и точка – размещены непосредственно рядом с буквами: точка около Enter (в ru-winkeys и QWERTY на этом месте стоит обратный слеш), запятая между LShift и Я.

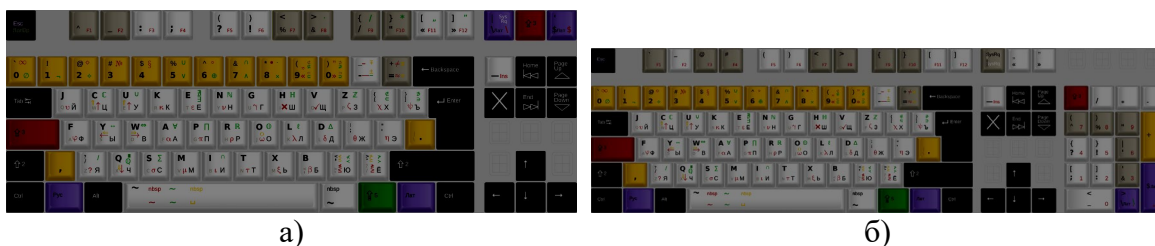


Рис. 7. Итоговое расположение знаков препинания: для 88-клавишной (а) и 105-клавишной (б) клавиатур

Исключены символы CapsLock, PrintScreen, ScrollLock, Break; на соответствующих клавишах размещены более актуальные для автора символы (при этом Alt+SysRq работает – эта комбинация обрабатывается ядром Linux, а не Xkb). В ряд цифр добавлен второй ноль – перед единицей.

Так как символы обратного слеша \ (начало команды в LaTeX, комбинации типа \n, \t в C/C++) и доллара \$ (формула в LaTeX), как правило, требуют одновременного перехода на латиницу, к описанию соответствующих клавиш добавлено также действие смены раскладки:

```
hidden partial keypad_keys xkb_symbols "common_keypad_vert_latexmath" {
    key <KPEN> {
        type[Group1]="EIGHT_LEVEL",
        symbols[Group1] = [ dollar, dollar, KP_Enter, KP_Enter, dollar, dollar,
```

```

dollar, dollar],
actions[Group1]=[ ],
actions[Group2]=[ LockGroup(group=-1) ],
actions[Group3]=[ LockGroup(group=-2) ],
actions[Group4]=[ LockGroup(group=-3) ]
};
};

```

Уровни 1 и 2 для букв различаются в русском и латинском варианте; уровни 4–8 букв и все прочие символы – одинаковы в обоих вариантах.

Анализ полученных результатов приводит к следующим **выводам**:

- подсистема Xkb GNU/Linux позволяет определять раскладку в соответствии с нуждами пользователя;
- возможен отказ от QWERTY и ru-winkeys;
- переопределение возможно для каждой клавиши, а не только для буквы или цифры;
- восемь уровней позволяют разместить символы, отсутствующие как в QWERTY, так и в ru-winkeys;
- возможно описать для клавиши одновременно и выдачу символа, и выполнение некоторого действия, в частности смены раскладки на заданную.

Таким образом, подсистема Xkb GNU/Linux открывает безграничные возможности индивидуальной настройки клавиатуры и позволяет отказаться от навязываемого США стандарта QWERTY (который к тому же признан неудачным многими пользователями в самих США).

### Литература

1. Трушкин В. Советские домашние компьютеры 1980-х: краткая история. Ч. I. URL: <https://www.computer-museum.ru/articles/personalnye-evm/897/>.
2. Кононова А.И. Именная раскладка клавиатуры для xkb. URL: <https://gitlab.com/illinc/xkb-symbols-illinc>, 2021–2022.
3. Фонетическая раскладка клавиатуры JCUKEN. URL: <https://habr.com/ru/post/98745>, 2010.
4. Паскаль И.Х. Keyboard Extension // URL: <http://www.linuxsam.narod.ru/config.html>. 79 с.
5. Баракин А.Д. Заметки на «полях» клавиатуры. URL: <http://xgu.ru/download/sash-kan-notes.pdf>.

**A.V. Gorodilov, A.I. Kononova**

National Research University of Electronic Technology

### KEYBOARD INPUT: TRADITION OR REACTION

**Keywords:** *keyboard, GNU/Linux, Xkb, localization, layouts, data input.*

**Abstract.** *The article discusses data input using the most popular device – the keyboard; keyboard layouts of modern operating systems, input configuration capabilities of the GNU/Linux operating system, used tools and the obtained results. The currently tested layout options and planned changes are being considered.*

**М.И. Забейло, В.В. Борисов**  
Федеральный исследовательский центр  
«Информатика и управление» РАН,  
Филиал Национального исследовательского университета «МЭИ»  
в г. Смоленске

УДК 004.8

## **ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ КАК ОСОБАЯ ОБЛАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЙ И РАЗРАБОТОК**

Ключевые слова: *искусственный интеллект, базовые технологии искусственного интеллекта, проблемно-ориентированные технологии искусственного интеллекта.*

*Представлено уточненное определение искусственного интеллекта как особой области исследований и разработок. Определены особенности базовых и проблемно-ориентированных технологий искусственного интеллекта. Охарактеризована специфика задач, требующих применения проблемно-ориентированных технологий искусственного интеллекта, а также описаны современные тенденции их применения.*

В настоящее время в обиходе используются различные трактовки понятия «искусственный интеллект» (ИИ), среди которых наиболее часто употребляется интерпретация ИИ как, во-первых, метафоры; во-вторых, «устройства»; в-третьих, особой области исследований и разработок [1].

Именно в рамках последнего из указанных подходов ИИ трактуется как «комплекс технологических решений, позволяющий имитировать когнитивные функции человека (включая самообучение и поиск решений без заранее заданного алгоритма) и получать при выполнении конкретных задач результаты, сопоставимые, как минимум, с результатами интеллектуальной деятельности человека» [2–4].

Вместе с тем в данном определении не конкретизированы понятия «когнитивных функций» и «интеллектуальной деятельности» человека.

Кроме того, предполагается, что результаты формируются лишь вследствие «имитации» когнитивных функций человека.

Если же критиковать указанное выше определение ИИ не только по форме, но и по существу, то, прежде всего, следует привести высказывание известного отечественного ученого в сфере ИИ В.К. Финна: «...интеллектуальный процесс есть взаимодействие мыслительного и познавательного процессов, и это – разные процессы. Отсюда заблуждение, что если смоделировать мозг, то можно решить проблему искусственного интеллекта. Мыслительный процесс принимает участие в познавательном процессе, его инициирует, в некотором смысле им руководит, но не сводится к нему» [5].

Эта критика основывается на следующих сформулированных В.К. Финном *признаках идеального искусственного интеллекта*:

- выделение существенного в обозреваемых данных;
- порождение целеполагания, порождение последовательности «цель – план – действие»;
- отбор знаний, релевантных цели рассуждения;
- способность к рассуждению, а именно к получению выводов из отобранных посылок;
- способность к аргументации и принятию решений на ее основе;
- рефлексия, способность реагировать на свои знания, действия и их оценивать;
- способность к распознаванию явлений окружающего мира (ответ на вопрос «что такое?»);
- способность к объяснению (ответ на вопрос «почему?»);
- познавательная деятельность посредством синтеза познавательных процедур, образующих эвристику решения проблем и позволяющих достичь нового знания;
- способность к обучению и использованию памяти;
- рационализация идей и преобразование их в понятия;
- способность к интеграции знаний, объединение этих знаний, с тем чтобы создавать концепции и теории;
- адаптация знаний при получении новых сведений из окружающей среды, коррекция теории [5].

Указанные выше «понятийные» проблемы обусловлены ещё и тем, что такие признаки, как *порождение целеполагания, рефлексия, преобразование идей в понятия, интеграцию знаний для образования теорий, адаптация знаний при получении новых сведений*, можно реализовать только в интерактивном взаимодействии «человек – машина». При этом, конечно же, возможны различные трактовки / способы реализации признаков идеального (естественного) интеллекта.

С учетом вышеизложенного предлагается уточненное определение *искусственного интеллекта как особой области исследований и разработок*, охватывающей моделирование (имитацию и усиление) компьютерными средствами познавательных функций человека (его естественного интеллекта) [1].

Объект такого моделирования – процесс перехода от исходных данных к целевому результату посредством имитации последовательности «шагов», которые человек (используя свой естественный интеллект) выстраивает в процессе поиска решения – искомого целевого результата. Решающая роль в этом отводится двум компонентам компьютерного моделирования:

- поиску собственно последовательности таких «шагов» – цепочки соответствующих рассуждений, описывающей алгоритм формирования целевого решения;

- оценке достаточности основания для принятия полученных результатов (доверия как построенному способу формирования решения, так и собственно полученному с его помощью целевому результату).

Искусственный интеллект – это достаточно молодая область исследований и разработок, только формирующая свою «инфраструктуру»: понятийно-терминологический и научно-методический аппарат. За прошедшие десятилетия ИИ (как область исследований и разработок) оказался успешным прежде всего там, где было необходимо найти решение сложных и одновременно важных для приложений задач, важнейшим «драйвером» решения которых являлось изучение того, как дать компьютерной системе возможности и средства имитировать используемые человеком методы и приемы.

Именно поэтому в арсенале методов и средств ИИ оказались компьютерные «инструменты» представления знаний и формализации рассуждений. И именно идентификация этого класса важных прикладных задач потребовала проведения фундаментальных соответствующих исследований. Данная тенденция сохраняется и сейчас: ИИ развивается от сложных прикладных задач к проблемно-ориентированным фундаментальным исследованиям, которые обеспечивают основу для формирования эффективных технологий ИИ. При этом ИИ-инструментарий также формируется преимущественно «вокруг» этих задач.

Перечень сложных прикладных задач постоянно пополняется (сохраняя уже ставшие для ИИ «классические» классы приложений – анализ данных и поддержка принятия решений, визуальное распознавание и техническое зрение, анализ естественного языка). Причем ИИ развивается «рывками» в конкретных направлениях, отталкиваясь от конкретных исследовательских и технологических «барьеров», пополняя фундаментальный «багаж» оригинальными

математическими моделями, методами, а прикладной – эффективными алгоритмами, программными средствами, системами и технологиями.

К базовым (системообразующим) технологиям ИИ принято относить технологии: компьютерного зрения; распознавания и синтеза речи; обработки и интеллектуального анализа естественных языков; поддержки принятия решений; машинного и глубокого обучения; интеллектуального анализа больших данных и знаний; инженерии знаний (прежде всего на динамических графах знаний); мультимодальной аналитики и рассуждений; планирования и управления целенаправленным поведением в неструктурированных средах; мультиагентного управления.

**Особенности базовых технологий ИИ** заключаются в следующем:

– ориентированы на воспроизведение отдельных базовых когнитивных функций (компьютерное зрение, распознавание и синтез речи, обработка естественного языка, вывод на априорных знаниях конкретной предметной области и пр.);

– направлены на фрагментарную автоматизацию «локальных» задач и процессов (например, структурирование данных, анализ временных рядов параметров и изображений, анализ зрительных сцен, диагностика и прогнозирование процессов и состояний объектов/систем и др.);

– отражают отдельные интеллектуальные свойства реализуемых ими методов / моделей:

- естественно-языковое представление компонентов и взаимосвязей;
- возможность обработки разнокачественной информации, измеряемой и оцениваемой с использованием различных шкал;
- возможность учета неполноты и неопределенности различного типа;
- адаптивность (возможности структурно-параметрической настройки и обучения) к изменениям системных и внешних факторов;
- удобство и гибкость использования;
- интерпретируемость и объяснимость процессов и результатов.

**Особенностями же комплексных проблемно-ориентированных технологий ИИ** является то, что они:

– призваны решать комплексные задачи, являющиеся предметом «синтетической» деятельности специалистов;

– имеют выраженный проблемно-ориентированный характер;

– «инкапсулируются» вокруг конкретных задач / проблем предметной / проблемной области;

– порождаются «наборами» базовых технологий ИИ;

– формируют основу и создают условия для системной цифровой трансформации.



Таким образом, создание *проблемно-ориентированных технологий ИИ*, претендующих на «статус» технологий, так называемого «сильного ИИ», возможно за счет «инкапсуляции» базовых технологий ИИ вокруг решения комплексной прикладной проблемы. Однако это лишь необходимое условие, так как простое объединение базовых технологий ИИ без *проведения поисковых фундаментальных исследований*, «провоцируемых» решаемой проблемой, к желаемому результату не приведет.

*Специфика же современных задач*, являющихся своеобразным вызовом для фундаментальных исследований в сфере ИИ и требующих применения проблемно-ориентированных технологий ИИ, состоит в следующем.

1. *Анализируемые системы приобретают облик киберфизических и социо-киберфизических систем*, в которых информационные, информационно-вычислительные и информационно-управляющие процессы и компоненты тесно интегрируются в основные процессы и системы.

2. *Процессы организации и управления трансформируются под влиянием цифровых технологий*. Различные стадии цифровой трансформации процессов ограничивают применение технологий ИИ. Часто отсутствует информационная инфраструктура для работы с данными и знаниями, позволяющая эффективно использовать методы и технологии ИИ.

3. *Достаточно редко встречаются однородные большие данные*, так как объем таких данных может быть ограничен, например, из-за уникальности ситуаций, а динамика изменения свойств данных не соответствует особенностям жизненного цикла соответствующих им информационных технологий.

4. *Наблюдается разнообразие задач и процессов в зависимости от типов систем* (автоматизированных систем управления; информационных систем, информационно-вычислительных систем, программно-аппаратных комплексов; робототехнических комплексов и систем) *и процессов* (основных, вспомогательных, управления). Как следствие, *тиражируемость решений на основе ИИ ограничена*, а эффективность применения адаптации решений «прямым переносом» требует дополнительного обоснования в каждом конкретном случае.

5. *Взаимосвязанные процессы имеют различную природу* (организационно-управленческие, информационно-аналитические, логистические и др.). Потому эффект от применения методов и технологий ИИ также должен оцениваться многомерными метриками, учитывать достижимость многих целей.

6. *Возрастает роль человеческого фактора* по мере роста сложности, интенсивности и масштабности процессов. Это требует интеллектуальной поддержки принятия решений по схеме *human-in-the-loop*.

7. *Значительный объем формализованных априорных знаний предметной области* (например, в виде причинно-следственных зависимостей, экспертных обобщений) позволяет расширить перечень методов и технологий ИИ с акцентом как на *подходы, основанные на данных*, так и на *знание-ориентированные подходы*.

**Современными тенденциями применения проблемно-ориентированных технологий ИИ** являются:

– использование современных подходов для поиска, разметки и интерпретации данных с учетом их мультимодальности, неоднородности, нестационарности, пропусков, зашумленности малых выборок;

– использование для обучения и адаптации моделей ИИ данных, полученных при имитационном моделировании с использованием цифровых двойников, а также адаптация цифровых двойников при изменении данных;

– гибридизация методов и моделей ИИ, совместно использующих алгоритмы на данных и знаниях в условиях неопределенности и неполноты данных;

– обеспечение ситуационной осведомленности при принятии решений с учетом многокритериальной оптимизации в условиях неопределенности;

– квантификация процессов для валидации и оценки качества систем и методов ИИ.

**К перспективным проблемно-ориентированным технологиям ИИ** относятся следующие.

1. *Технологии «дополненного ИИ»*, то есть технологии интеллектуальной поддержки принятия решений на основе совместного выполнения сложных задач специалистами и методами ИИ в условиях недостатка информации, высокой неопределенности, сложности, интенсивности. Осуществляется конвергенция преимуществ (специалистов и методов ИИ) для достижения наилучших результатов.

2. *Технологии интеллектуальных мультимодальных интерфейсов, мультимодальной аналитики и рассуждений*, имеющих прогнозный и доказательный характер.

3. *Генеративное конструирование киберфизических и социо-киберфизических систем*, то есть создание цифрового описания реальных объектов / системы (и «цифровых следов» – поведения) с учетом неопределенности, а также различных типов взаимодействия.

4. *Композиционные технологии анализа и моделирования*, обеспечивающие построение и адаптацию композиционных гибридных

моделей, на основе совокупности компонентных (аналитических, имитационных, интеллектуальных) моделей для наилучшего решения декомпозированной совокупности задач по достижению общей цели.

5. *Мультиагентное обучение с подкреплением для интеллектуальной поддержки принятия решений.* Эффективное применение этого подхода обусловлено возможностью использования сложных моделей среды с помощью цифровых двойников, а сам процесс взаимодействия агентов определяет рациональную интерпретацию ситуации.

6. *Метрологические когнитивные технологии.* Использование методов машинного и глубокого обучения позволяет дополнять недостающие данные.

7. *Аватар-подобные технологии,* воспроизводящие взаимодействие человека с системой поддержки принятия решений или с персональным ассистентом.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № FSWF-2020-0019).*

### **Литература**

1. Забежайло М.И., Финн В.К., Михеенкова М.А. ИИ: «...Как вы лодку назовете, так она и поплывет» // Сб. трудов XIX Национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2021 (11–16 октября 2021 г.). Ростов-на-Дону, Таганрог, 2021. С. 109–119.

2. Национальная стратегия развития искусственного интеллекта на период до 2030 года. Указ Президента РФ № 490 от 10.10.2019.

3. ГОСТ Р 59277–2020. Системы искусственного интеллекта. Классификация систем искусственного интеллекта.

4. ГОСТ Р 59276–2020. Системы искусственного интеллекта. Способы обеспечения доверия. Общие положения.

5. Финн В.К. Чертова дюжина идеального интеллекта. Беседа первая. URL: <https://stimul.online/articles/science-and-technology/chertova-dyuzhina-idealnogo-intellekta-beseda-pervaya/> (дата обращения 20.03.2022).

**M.I. Zabezhailo, V.V. Borisov**

Federal Research Center «Computer Science and Control» of the RAS,  
Smolensk Branch of the National Research University «Moscow Power  
Engineering Institute»

### **ARTIFICIAL INTELLIGENCE AS A SPECIAL FIELD OF RESEARCH AND DEVELOPMENT**

**Keywords:** *artificial intelligence, basic artificial intelligence technologies, problem-oriented artificial intelligence technologies.*

**Abstract.** *A refined definition of artificial intelligence as a special field of research and development is presented. The features of basic and problem-oriented artificial intelligence technologies are determined. The specifics of the tasks requiring the use of problem-oriented artificial intelligence technologies are characterized, as well as current trends in their application are described.*

**В.Н. Захаров, С.А. Филиппов**  
*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук*

УДК 004.41

## **АНАЛИЗ МЕТОДА ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА НЕЯВНЫХ ДАННЫХ<sup>4</sup>**

Ключевые слова: *коллаборативная фильтрация, интернет-магазин, рекомендательная система, неявные данные.*

*В докладе представлено обзорное описание метода повышения эффективности рекомендательных систем, опирающегося на неявные данные, т.е. на результаты обработки активности пользователей, связанной с процессом принятия решения, а не с его результатом (как в случае обработки явных данных). При этом в основе метода лежит комбинированное использование подходов Item-Item CF и User-User CF, позволяющее предлагать посетителю информационное предложение даже в ситуациях, когда сведения о пользовательской активности отсутствуют или малоинформативны. Возможности предложенного метода были проверены с помощью экспериментального образца программного комплекса, установленного в действующем интернет-магазине. Полученные результаты подтверждают, что даже ограниченное применение метода достаточно серьезно для электронной коммерции улучшает пользовательский опыт и доходы владельца.*

### **Введение**

Одним из современных трендов в развитии сети Интернет является персонализация – способ подачи информации на сайтах, который подстраивается под уникальные потребности конкретных посетителей. В

---

<sup>4</sup> Доклад публикуется по решению Оргкомитета конференции СКМП-2022, поскольку он способствует развитию исследований и разработок в области рекомендательных систем в Смоленском государственном университете.

сфере электронной коммерции основным инструментом персонализации контента служат рекомендательные системы, обеспечивающие автоматическую обработку данных о пользовательской активности и выработку рекомендаций относительно товаров и услуг, которые могут быть интересны конкретным пользователям [1]. Исходными данными для анализа поведения пользователей являются сведения об их активности, которые могут собираться явным или неявным образом. Явным образом получают персональные данные при регистрации, покупках, выставлении пользователем оценок тем или иным объектам на сайтах, в результате голосований и опросов, а также другие данные, связанные с уже принятыми пользователем решениями. К неявным данным относятся такие, как, например, время пребывания посетителей на отдельных страницах, копирование данных со страниц, выделение отдельных характеристик товаров и т.п. Такие данные составляют огромные массивы, которые являются неоднородными и достаточно сложными для интерпретации. Более того, их хранение в реляционных базах данных фактически невозможно [2]. Поэтому, как правило, используются так называемые NoSQL системы управления данными (HBase, Cassandra).

В контексте проблемы персонализации контента (а также прогнозирования, выявления предпочтений и групп схожих ресурсов) встает задача обработки собранных данных и выявления определенных закономерностей, позволяющих сделать выводы о конкретных предпочтениях пользователей. Таким образом, основной целью обработки данных о пользовательской активности является извлечение полезной информации, которая может, в свою очередь, использоваться для решения таких задач, как: кластеризация ресурсов; кластеризация пользователей; построение устойчивых поведенческих профилей пользователей; построение расширенных профилей пользователей, включающих социально-демографические данные (анкеты), описательные статистики и поведенческие профили; сегментация клиентской базы на основе расширенных профилей; персонализация контента; построение карт сходства ресурсов и пользователей.

Существуют различные методы и подходы, используемые на практике при решении перечисленных выше задач. Весь класс этих методов принято называть методами коллаборативной фильтрации.

### **Методы коллаборативной фильтрации**

В основе методов коллаборативной фильтрации (collaborative filtering, CF) лежит предположение о консервативности пользовательских предпочтений (т.е. пользователи, одинаково оценивающие определенные объекты, скорее всего, аналогичным образом будут оценивать и новые объекты со сходными характеристиками) [3]. По существу, рекомендации базируются на

автоматическом сотрудничестве множества пользователей и на выделении (методом фильтрации) тех пользователей, которые демонстрируют схожие предпочтения или шаблоны поведения. Таким образом, методы коллаборативной фильтрации вырабатывают рекомендации, основанные на модели предшествующего поведения пользователя, с учетом поведения пользователей со схожими характеристиками. Наибольшее распространение в сфере электронной коммерции получили рекомендательные системы, использующие следующие методы коллаборативной фильтрации:

– коллаборативная фильтрация посредством анализа предпочтений групп пользователей со схожими интересами (User-User Collaborative Filtering, User-User CF);

– коллаборативная фильтрация посредством анализа взаимосвязей между информационными единицами (Item-Item Collaborative Filtering, Item-Item CF).

### **Предлагаемый метод повышения эффективности рекомендательных систем**

Авторами по итогам проведенных прикладных научных исследований [4] был предложен собственный метод повышения эффективности использования информации в рекомендательных системах, сочетающий сильные стороны обоих рассмотренных выше методов коллаборативной фильтрации и позволяющий более полно использовать доступную информацию о пользователях и информационных единицах, в первую очередь неявные данные о пользователе. Этот метод был экспериментально исследован путем анализа данных о работе действующего интернет-магазина. Каталог товаров магазина содержал более 1 500 наименований товаров, разбитых на 180 классов (44 корневых класса, 136 подклассов). Ежедневно магазин посещали в среднем около 1 500 посетителей и проводили на сайте в среднем 11 минут каждый (на каждого посетителя приходилось в среднем 28 переходов по ссылкам).

Суть предлагаемого метода заключается в совместном использовании при выработке рекомендаций оценок, полученных с использованием как метода Item-Item CF, так и метода User-User CF. Для новых пользователей или пользователей с нерепрезентативной историей посещений предлагается генерировать рекомендации, базируясь на данных о подобию информационных единиц (метод Item-Item CF). Таким образом решается проблема «холодного старта» и повышается качество рекомендаций для малоактивных пользователей, а также пользователей со слабо выраженными предпочтениями. По мере накопления данных о пользовательских предпочтениях и формирования его поведенческого профиля приоритет предлагается отдавать оценкам, полученным с использованием метода User-User CF, исходя из гипотезы

о том, что при наличии качественных поведенческих профилей пользователей данный метод позволяет более точно предсказывать их предпочтения. При этом в случае необходимости рекомендации, полученные с использованием метода User-User CF, могут дополняться предложениями информационных единиц, полученными на основе их рейтинга популярности.

В целях решения задачи формирования рекомендации в условиях недостаточности знаний о пристрастиях пользователей предлагается использовать метод, в основе которого лежит расчет близости пар и последующая группировка (кластеризация) информационных единиц на основе данных пользователей, последовательно просматривающих несколько товаров. При отсутствии данных предлагается использовать обычные классификаторы с учетом цены и параметров объектов, список «Новинки», а также матрицу «С этим товаром покупают» (аксессуары, дополняющие основную покупку). При данном подходе явное участие пользователей интернет-магазина в формировании рейтинга товаров не требуется.

Первым шагом алгоритма является построение матрицы подобия информационных единиц, где и по вертикали, и по горизонтали присутствуют все информационные единицы интернет-магазина. Заполнение матрицы происходит по следующему правилу: если пользователь последовательно просмотрел два товара, то вес подобия в матрице для этих двух товаров увеличивается на 1. Для обработки матрицы в целях выявления групп информационных единиц, которые являются близкими по своим оценкам подобия, из всех известных алгоритмов кластеризации в результате проведенного моделирования был выбран производительный алгоритм Affinity Propagation. Одним из преимуществ данного алгоритма является отсутствие необходимости предварительной оценки оптимального количества кластеров [5]. В качестве референсной информационной единицы может выступать товар, который заинтересовал потенциального покупателя в каталоге интернет-магазина. Предложения же рекомендательной системы в этом случае будут формироваться, используя товары с оценками подобия, наиболее близкими к референсному товару (т.е. входящие в соответствующий кластер подобия). В целом необходимо отметить, что использование метода Item-Item CF, основанного на оценке близости информационных единиц, позволяет получить рекомендации, интуитивно понятные посетителям магазина, не имея данных об их предпочтениях.

По мере накопления данных о пользовательской активности появляется возможность формирования поведенческих профилей и использования метода User-User CF для генерации рекомендаций, более полно соответствующих предпочтениям конкретных пользователей. В

результате проведенного имитационного моделирования было установлено, что наиболее подходящим с учетом существующих для работы ограничений по скорости и объемам обработки данных для выявления групп пользователей со схожими предпочтениями (User-User CF) является метод кластеризации К-средних (K-means). В целом данный статистический метод прост в реализации и является хорошо масштабируемым [6]. Вычислительная сложность алгоритма  $O(nkl)$ , где  $n$  – число объектов,  $k$  – число кластеров,  $l$  – число итераций. Одним из недостатков данного метода является необходимость заранее задавать число кластеров для разбиения. Тем не менее оптимальное для разбиения число кластеров достаточно просто получить посредством минимизации суммы внутрикластерных расстояний. Другим недостатком алгоритма К-средних является прямая зависимость производительности алгоритма от числа итераций. Число итераций может быть уменьшено заданием начальных значений центроидов кластеров, близких к оптимальным (данный подход используется в модифицированном методе К-средних – K-means++).

Первым шагом алгоритма является построение матрицы активности пользователей. В тестовом массиве данных было доступно только количество обращений к конкретной категории товаров. Таким образом, каждая строка матрицы активности представляет собой вектор оценок, соответствующих различным категориям товаров (тематический профиль пользователя). Профиль пользователя характеризует степень его интереса к каждой группе товаров.

Следующим шагом (перед выявлением групп пользователей со схожими характеристиками методами кластеризации) является обработка полученной матрицы активности с целью вычисления попарных расстояний между ее элементами. В качестве метрики расстояния (функция сходства) было использовано расстояние Евклида (геометрическое расстояние в многомерном пространстве), которое является одной из наиболее простых для реализации и часто используемых на практике метрик. Одним из исходных параметров для применения метода К-средних является число кластеров, на которое необходимо разбить исследуемый массив данных. Для определения оптимального числа кластеров было проведено специальное исследование. В качестве критерия использовалась внутрикластерная сумма квадратов расстояний, которую необходимо было минимизировать. В результате исследования тестового набора данных было определено оптимальное для данного тестового массива число кластеров, равное 30. Таким образом, были получены все необходимые параметры для проведения кластеризации данных по матрице активности пользователей. Результат работы алгоритма кластеризации



позволил выделить несколько наиболее крупных кластеров пользователей.

Полученные в результате обработки исходных данных о пользовательской активности кластеры могут быть использованы для формирования предложений рекомендательной системой. Рекомендоваться пользователям будут информационные единицы, имеющие наименьшее значение метрики расстояния по отношению к референсному товару (в качестве референсного рассматривается товар, который заинтересовал посетителя в конкретный момент времени). При необходимости рекомендации могут быть дополнены предложениями информационных единиц, имеющих близкие оценки подобию (метод Item-Item CF). Необходимость дополнения рекомендаций, полученных при использовании метода User-User CF, будет возникать, как правило, для пользователей, не имеющих четко выраженных предпочтений. Проведенные исследования показывают, что в целом предложенный подход к решению задачи выработки рекомендаций с использованием метода User-User CF (на базе использования методов кластерного анализа) позволяет формировать рекомендации, соответствующие ожиданиям пользователей. Так, например, более 70% регулярно посещающих обследуемый интернет-магазин пользователей (по результатам экспериментальных исследований) воспользовались предложениями рекомендательного сервиса (совершили переходы по предлагаемым рекомендательным сервисом ссылкам или добавляли рекомендованные товары в корзину).

Был создан программный комплекс, реализующий предложенные методы, получены свидетельства на три составляющие его подсистемы. Достаточно подробно результаты использования предлагаемых методов в практике работы действующего интернет-магазина представлены в [4]. Там же обоснованы методы оценки эффективности применения разработанных средств и методов.

### **Заключение**

Представлено описание метода повышения эффективности рекомендательных систем для интернет-торговли, основанного на комбинированном использовании методов Item-Item CF и User-User CF с применением неявных данных.

Для новых пользователей или пользователей с непрезентабельной историей посещений предполагается генерировать рекомендации, базируясь на рейтингах информационных единиц (метод Item-Item CF). Таким образом решается проблема «холодного старта» и повышается качество рекомендаций для малоактивных пользователей, а также пользователей со слабо выраженными предпочтениями.

По мере накопления презентабельных данных о пользовательских предпочтениях и формировании его поведенческого профиля

предпочтение предлагается отдавать оценкам, полученным с использованием метода User-User CF. При наличии качественных поведенческих профилей пользователей данный метод позволяет более точно предсказывать их предпочтения. При этом в случае необходимости рекомендации, полученные с использованием метода User-User CF, могут дополняться предложениями информационных единиц, полученными на основе их рейтинга популярности.

Таким образом, предлагаемый метод позволяет более полно использовать доступную информацию о пользователях и информационных единицах, а также нивелировать недостатки обоих методов. Также необходимо отметить, что предложенный авторами метод гарантировано показывает лучшие результаты, чем известные и применяемые наиболее часто методы Item-Item CF и User-User CF. В частности, это можно связать с учетом неявных данных, позволяющих более полно и быстро выявить пользовательские предпочтения, необходимые для формирования рекомендаций, что особенно важно сегодня, когда большая часть посетителей приходит из поисковых систем и затем более никогда не возвращается.

В части дальнейших исследований перспективным представляется использование для обработки и анализа получаемой информации технологии многомерных матриц и матричных вычислений.

### Литература

1. Подходы к повышению пертинентности информационного предложения в медиасервисах на основе обработки больших объемов данных / С.А. Филиппов [и др.] // Ceur Workshop Proceedings. 2015. Vol. 1536: Selected Papers of the XVII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2015). P. 114–118.
2. Организация больших объемов данных в рекомендательных системах поддержки жизнеобеспечения, входящих в состав глобальных платформ электронной коммерции / С.А. Филиппов [и др.] // Ceur Workshop Proceedings. 2015. Vol. 1536: Selected Papers of the XVII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2015). P. 119–124.
3. Su X., Khoshgoftaar T.M. A survey of collaborative filtering techniques // *Advances in Artificial Intelligence*. 2009. Vol. 2009. Article ID 421425. 19 p.
4. Филиппов С.А., Захаров В.Н. Метод повышения пертинентности информации в рекомендательных системах поддержки жизнеобеспечения на основе неявных данных // *Системы и средства информатики*, 2016. Т. 26. № 4. С. 4–18.
5. Frey B. J., Dueck D. Clustering by passing messages between data points // *Science*. 2007. Vol. 315, Iss. 5814. P. 972–976.
6. Coates A., Ng A.Y. Learning Feature Representations with K-means. Stanford University, 2012. [http://www.cs.stanford.edu/~acoates/papers/coatesng\\_nntot2012.pdf](http://www.cs.stanford.edu/~acoates/papers/coatesng_nntot2012.pdf).

**V.N. Zakharov, S.A. Philippov**

Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS)

## METHOD FOR INCREASING THE EFFICIENCY OF RECOMMENDER SYSTEMS BASED ON IMPLICIT DATA ANALYSIS

**Keywords:** *collaborative filtering; online store; recommender system; implicit data.*

**Abstract.** *The article presents a description of a method for improving the efficiency of recommender systems based on implicit data, i.e., on the results of processing user activity associated with the decision-making process, and not with its result (as in the case of processing explicit data). At the same time, the method is based on the combined use of the Item-Item CF and User-User CF approaches, which makes it possible to offer the visitor an information offer even in situations where information about user activity is missing or uninformative. The capabilities of the proposed method were tested using an experimental sample of the software package installed in the existing online store. The results obtained confirm that even a limited application of the method is serious enough for e-commerce to improve the user experience and the income of the owner.*

**А.П. Карпенко**  
МГТУ им. Н.Э. Баумана  
УДК 519.6

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОПУЛЯЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: *метаэвристические алгоритмы, популяционные алгоритмы, алгоритмы, вдохновленные природой.*

*Рассматриваем задачу глобальной непрерывной оптимизации и популяционные (метаэвристические) алгоритмы ее решения. Представляем авторскую формализацию следующих сущностей популяционных алгоритмов: эволюционные операторы; параметры; особь, популяция и субпопуляция; пространства, графы и метрики соседства особей и совокупностей особей; окрестности особей, регионы поиска и следы особей; объединения особей и множества соседей; характеристики сущностей; аттракторы, каналы связей между особями и их наборами. Различаем детерминированные и стохастические, стационарные и динамические (программные, адаптивные и программно-адаптивные) сущности.*

### **Введение**

Задачи глобальной непрерывной оптимизации возникают во многих приложениях, например, в автоматизированном проектировании,

робототехнике, молекулярном докинге и т.д. Популяционные алгоритмы (П-алгоритмы) относятся к классу прямых (не использующих производные целевой функции) стохастических поисковых алгоритмов. Эти алгоритмы в разных публикациях называют поведенческими, интеллектуальными, метаэвристическими, вдохновленными (инспирированными) природой, роевыми, многоагентными. Известно несколько классификаций П-алгоритмов. Вслед за [1] выделяем следующие их классы: эволюционные алгоритмы, включая генетические; алгоритмы, вдохновленные живой природой; алгоритмы, вдохновленные неживой природой; алгоритмы, инспирированные человеческим обществом; прочие алгоритмы.

В настоящее время известно более 100 базовых П-алгоритмов: алгоритмы колонии муравьев, роя медоносных пчел, иммунной системы, бактериальные, светлячковые, сорняковые алгоритмы и многие другие. Каждый из этих алгоритмов имеет большое число модификаций, так что для некоторых П-алгоритмов их число достигает нескольких десятков.

Отличительной особенностью П-алгоритмов является одновременная обработка нескольких вариантов решения рассматриваемой задачи глобальной оптимизации. Так что П-алгоритмы представляют собой альтернативу классическим траекторным поисковым алгоритмам, в которых в области поиска эволюционирует только один кандидат в решение этой задачи.

Широкий обзор П-алгоритмов представлен, например, в [2]. Не вошедшие в эту публикацию китовый алгоритм (Whale Optimization Algorithm, WOA), алгоритм искусственных водорослей (Artificial Algae Algorithm, AAA), слоновий алгоритм поиска (Elephant Search Algorithm, ESA), алгоритм куриной стаи (Chicken Swarm Optimization Algorithm, CSOA), алгоритм ночных бабочек (Moth Flame Optimization, MFO) и некоторые другие алгоритмы описаны в [3]. Различные аспекты анализа и синтеза П-алгоритмов рассмотрены, например, в [4 – 14].

Различаем детерминированные и стохастические сущности, стационарные и динамические (программные, адаптивные и программно-адаптивные) сущности.

### **1. Основные сущности П-алгоритмов (исключая операторы)**

Рассматриваем следующие основные сущности П-алгоритмов: особь, популяция и субпопуляция; пространства, графы и метрики соседства особей и совокупностей особей; окрестности особей, регионы поиска и следы особей; объединения особей и множества соседей; характеристики сущностей; аттракторы, каналы связей между особями и их наборами.

*Свободные параметры.* Из числа свободных параметров П-алгоритма выделяем *метапараметры* – вспомогательные свободные параметры, которые определяют значения *основных* параметров

алгоритма (свободных и прочих). Значения свободного параметра П-алгоритма ЛПП может определять непосредственно или опосредованно (алгоритмически), задавая, например, диапазон его возможных значений и указывая, что конкретное значение этого параметра должно быть на этапе инициализации алгоритма равномерно случайно распределено в указанном интервале. Границы интервала при этом представляют собой метапараметры. С другой стороны, при определении, например, программно-динамических параметров вида  $p = p(t, a, b, c, \dots)$ , где  $p(\cdot)$  – некоторая заданная параметризованная функция номера поколения  $t$ , постоянные  $a, b, c, \dots$  следует рассматривать как метапараметры.

*Особь.* В общем случае особь определяют следующие атрибуты:  $s$  – имя особи;  $V$  – вектор переменных состояния особи, компонентами которого, вообще говоря, являются векторы положения особи  $X \in \mathfrak{R}_X$ , ее скорости  $\Delta X = (X - X^{t-1})$  и, может быть, ускорения  $\Delta X^2 = (\Delta X - \Delta X^{t-1})$ ;  $\varphi(X) \in \mathfrak{R}_\varphi$  – фитнес-функция (одна из характеристик особи); channel- прямой канал связи особи с другими особями популяции; track,  $\Phi$ -track – след особи и ее феромонный след соответственно. Полагаем, что фитнес-функция  $\varphi(X)$  осуществляет

отображение пространства поиска  $\mathfrak{R}_X = \mathfrak{R}^{|X|}$  в пространство  $\mathfrak{R}_\varphi = \mathfrak{R}_+^1$ . В П-алгоритме могут использоваться особи разных *типов*, отличающихся особенностями своей эволюции.

*Популяция, мультипопуляция и субпопуляции особей.* Популяция  $S = \{s_i; i \in [1:|S|]\}$  представляет собой совокупность  $|S|$  особей. Различаем *стационарные и нестационарные популяции*. В стационарной популяции мощность популяции (число особей в ней) поддерживается постоянной в течение всех поколений ее эволюции (в течение всего итерационного процесса). Напротив, в нестационарной популяции число особей по тем или иным правилам меняется в процессе эволюции популяции. Состояние популяции определяет вектор  $V(t) = (V_i(t), i \in [1:|S|])$  текущих состояний всех ее особей.

Отличие *субпопуляции* от (одиночной) популяции заключается в том, что особи субпопуляции в той или иной форме обязательно коммутируют с особями других субпопуляций данной мультипопуляции.

Совокупность субпопуляций составляет *мультипопуляцию*  $S = \{S_j, j \in [1:|S|]\}$ , где  $|S|$  – число субпопуляций в мультипопуляции. Мультипопуляцию можно определить как совокупность некоторого числа коммутирующих субпопуляций, эволюционирующих, по меньшей

мере, на логическом уровне параллельно. Состояние мультипопуляции определяет набор состояний субпопуляций  $\{V_j, j \in [1:|S|]\}$ .

*Пространства соседства особей.* Рассматриваем набор особей  $\Sigma = \{s_i; i \in [1:|\Sigma|]\}$  как обобщение популяции, субпопуляции и любой другой совокупности особей. В П-алгоритмах используют следующие пространства соседства:  $\mathfrak{R}_\varphi$  – целевое пространство  $\mathfrak{R}^1$ ;  $\mathfrak{R}_X$  – декартово пространство поиска  $\mathfrak{R}^{|X|}$ ;  $\mathfrak{R}_A$  – сферическое пространство поиска  $\mathfrak{R}^{|X|}$ ;  $\mathfrak{R}_T$  – топологическое пространство. Элементами этих пространств являются соответственно: значения фитнес-функции  $\varphi(X)$ ; компоненты вектора варьируемых параметров  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{|X|})$  в декартовой системе координат  $0x_1x_2\dots x_{|X|}$ ; компоненты того же вектора  $(r, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{|X|-1})$  в сферической системе координат  $0r\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{|X|-1}$ ; совокупность номеров  $\{i\}$  особей. Таким образом, пространство  $\mathfrak{R}_\varphi$  является одномерным непрерывным, пространства  $\mathfrak{R}_X$ ,  $\mathfrak{R}_A - |X|$ -мерными непрерывными, а пространство  $\mathfrak{R}_T$  – дискретным пространством мощностью  $|\Sigma|$ .

*Графы соседства особей и совокупностей особей.* Граф соседства особей, принадлежащих набору  $\Sigma$ , обозначаем  $NBG(\Sigma, C, P)$ , где  $C$  – вектор характеристик некоторых сущностей П-алгоритма;  $P$  – вектор свободных параметров данной сущности. Чаще всего в вычислительной практике используют полносвязные, линейные, кольцевые, тороидальные и кластерные графы соседства. Для совокупностей особей граф соседства определяется аналогично.

*Метрики соседства особей и совокупностей особей.* Соседства особей в пространстве  $\mathfrak{R} \in \{\mathfrak{R}_\varphi, \mathfrak{R}_X, \mathfrak{R}_A, \mathfrak{R}_T\}$  определяют с помощью метрик соседства вида  $\mu_{\mathfrak{R}}(s_i, s_j)$ ,  $s_i, s_j \in \Sigma$ . По общему правилу различаем стационарные и динамические метрики. В первом случае метрики (но, конечно, не их значения) не изменяются в процессе эволюции набора особей  $\Sigma$ , а во втором случае – изменяются программно, адаптивно или программно-адаптивно. Особей  $s_i, s_j$ ,  $i \neq j$  набора  $\Sigma$  полагаем соседними в пространстве  $\mathfrak{R}$ , если справедливо неравенство  $\mu_{\mathfrak{R}}(s_i, s_j) \leq b$ , где  $b$  – свободный положительный параметр.

В качестве метрики близости особей  $s_i, s_j$  в пространстве  $\mathfrak{R}_\varphi$  используют абсолютное значение разности значений фитнес-функции в точках  $X_i, X_j$ . Метрикой близости в пространстве  $\mathfrak{R}_X$  является,

например, евклидово расстояние между точками  $X_i, X_j$ . Расстояние  $\mu_{\mathfrak{R}_T}(s_i, s_j)$  между особями  $s_i, s_j$  в топологическом пространстве  $\mathfrak{R}_T$  равно минимальному числу ребер между вершинами  $s_i, s_j$  соответствующего графа соседства.

*Окрестность особи.* Окрестностью  $A_i$  особи  $s_i \in S$  в пространстве  $\mathfrak{R}$  ( $\mathfrak{R}$ -окрестностью этой особи) называем область этого пространства, элементы которой в смысле метрики  $\mu_{\mathfrak{R}}(\cdot)$  близки к положению особи  $s_i$ . В П-алгоритмах обычно используют окрестности в пространстве  $\mathfrak{R}_X$ . Окрестности особи в разных алгоритмах могут называться по-разному, например, в муравьином алгоритме (НСИАС)  $\mathfrak{R}_X$ -окрестность названа *зоной видимости*. Окрестности особи определяют  $A$  – имя окрестности;  $R$  – параметр или параметры, имеющие смысл размера окрестности и называемые *радиусами окрестности*. Особь  $s$  называется *центральной особью* окрестности  $A(s, R)$ , а ее положение  $X$  в пространстве поиска – *центром окрестности*. По общим правилам радиусы окрестности могут быть детерминированными или случайными с заданными законами распределения, стационарными или динамическими (программными, адаптивными или программно адаптивными).

*Регион поиска.* Центры окрестностей в пространствах  $\mathfrak{R}_\varphi, \mathfrak{R}_X$  могут не ассоциироваться с текущим значением фитнес-функции или положением той или иной особи. Так, в некоторых П-алгоритмах говорят об регионе  $A_{\mathfrak{R}_X}(X, R)$  одной из точек  $X$  области поиска, например, некоторой точки следа особи. Концепция региона поиска близка концепции окрестности особи с тем отличием, что регион поиска не «привязан» к особи.

*Следы особи.* В П-алгоритмах используют *обыкновенные* и *феромонные* следы (Ф-следы) особей.

Рассматриваем только следы особей в пространстве поиска  $\mathfrak{R}_X$  (хотя можно было бы говорить также о следах в пространстве  $\mathfrak{R}_\varphi$ ). Под *обыкновенным* следом особи понимаем историю ее эволюции в пространстве поиска в течение некоторого числа итераций роевого алгоритма, предшествующих текущей итерации  $t$ , то есть полагаем, что след особи  $s_i \in S$  образует последовательность ее положений и соответствующих значений фитнес-функции  $\{(X_i(\tau), \varphi(X_i(\tau))); \tau \in [t_b : t_e]\}$ , где  $t_b, t_e$  – начало и конец следа соответственно;  $0 \leq t_b < t_e \leq t$ . В ситуации, когда  $t_b = 0, t_e = t$ , получаем *полный след* особи. Если  $t_b > 0$  и/или  $t_e < t$ , имеем *неполный след*.

Если П-алгоритм использует феромонные следы особей, то полагаем, что в каждой точке  $X_i(\tau)$ ,  $\tau \in [t_i^\phi : t]$  пространства поиска  $\mathfrak{R}_X$ , в которой побывала особь  $s_i$ , остается *феромонная метка*, интенсивность которой (количество феромона) на данной итерации  $t$  определяет функция  $\phi_i(t, \tau, t_i^\phi)$ , где  $t_i^\phi$  – номер итерации, на которой оставлена эта метка. Количество феромона в феромонных метках с ростом числа итераций уменьшается (что моделирует испарение феромона). Ф-след особи определяют правила инициализации феромонных меток, а также правила изменения их интенсивности и уничтожения.

*Объединения особей.* Объединение особей определяет запись вида  $U_{\mathfrak{R}}(S, P) \subseteq S$ , где  $\mathfrak{R} \in \{\mathfrak{R}_\varphi, \mathfrak{R}_X, \mathfrak{R}_T\}$ ;  $U$  – имя объединения. Каждая особь популяции  $S$  может входить одновременно в несколько объединений. Объединение особей  $U_{\mathfrak{R}}$  может быть построено как совокупность особей  $\{s_j \in S\}$ , расположенных в некоторой окрестности данной особи  $s_i \in S$ :

$$U_{\mathfrak{R}}(s_i, S, P) = s_i \cup \{s_j \mid X_j \in A_{\mathfrak{R}}(s_i, P)\} \subseteq S. \quad (1)$$

Обычно правила отбора особей в объединение  $U_{\mathfrak{R}}(S, P)$  основаны на близости этих особей в некоторой метрике  $\mu_{\mathfrak{R}}$ . Так, по аналогии с (1), для любого из пространств  $\mathfrak{R} \in \{\mathfrak{R}_\varphi, \mathfrak{R}_X, \mathfrak{R}_T\}$  объединение особей можно определить правилом вида

$$U_{\mathfrak{R}}(s_i, S, d) = s_i \cup \{s_j \mid \mu_{\mathfrak{R}}(s_i, s_j) \leq d\} \subseteq S,$$

где  $s_i$  – некоторая, например, лучшая особь популяции;  $d$  – свободный положительный параметр объединения.

*Множество соседей особи.* Множеством соседей  $NB_i(s_i)$  особи  $s_i \in S$  в пространстве  $\mathfrak{R} \in \{\mathfrak{R}_\varphi, \mathfrak{R}_X, \mathfrak{R}_T\}$  может быть объявлена совокупность особей  $\{s_j\}$ , текущие координаты  $\{X_j\}$  которых принадлежат некоторой окрестности  $A_{\mathfrak{R}}$  этой особи:

$$NB_i(s_i, P) = \{s_j \mid X_j \in A_{\mathfrak{R}}(s_i, P)\} \subseteq S.$$

Множество соседей  $NB(s_i)$  можно образовать с помощью *комбинированных* правил, которые, кроме принадлежности особей некоторой окрестности особи  $s_i$ , используют и другие условия. Например, в светлячковом алгоритме (GSO) светлячок  $s_j \in S$  считается соседом светлячка  $s_i \in S$ , где  $i \neq j$ , при выполнении следующих двух условий: евклидово расстояние между этими светлячками не превышает текущий радиус  $r_i$  окрестности с центром в точке  $X_i$ ; текущий уровень



светимости светлячка  $s_j$  (его характеристика) превышает этот же уровень светлячка  $s_i$ .

*Характеристики сущностей.* С каждой из сущностей П-алгоритма, исключая его параметры, может быть связана одна или несколько величин, значения которых определяют «состояние» сущности и которые могут использоваться для управления эволюцией этой сущности. Вектор характеристик сущности  $\Xi$  определяет запись  $C(\Xi, P)$ .

Чаще всего в П-алгоритмах используют характеристики популяции и субпопуляции с целью управления ими. Различаем детерминированные и стохастические характеристики сущностей. С другой стороны, выделяем стационарные и динамические характеристики. *Стационарными* называем характеристики, которые определяет «стационарный» алгоритм, вычисляющий их значения, то есть алгоритм, который не изменяется в процессе эволюции популяции на протяжении всего поиска. Напротив, к *динамическим* относим характеристики, значения которых вычисляются с помощью «динамического» алгоритма, тем или иным образом изменяющегося в процессе эволюции популяции.

*Аттракторы.* В известных П-алгоритмах используют аттракторы пространств  $\mathfrak{R}_X, \mathfrak{R}_{\Delta X}$ . Первый аттрактор определяет некоторую точку в пространстве поиска  $\mathfrak{R}_X$ , второй – точку в пространстве  $\mathfrak{R}_{\Delta X}$ , то есть задает направление на некоторую точку пространства  $\mathfrak{R}_X$  (координаты которой не определены). В пространстве  $\mathfrak{R}_X$  аттрактор набора особей  $\Sigma$  обозначаем  $O(\Sigma, P)$ . Если особи этого набора перемещаются в направлении (возможно, случайно возмущенном) точки  $O(\Sigma, P)$ , то эта точка называется, собственно, (притягивающим) аттрактором. Аналогично определяем антиаттракторы (отталкивающие аттракторы) и притягивающе-отталкивающие аттракторы пространства  $\mathfrak{R}_X$ . Аттракторы пространства  $\mathfrak{R}_{\Delta X}$  обозначаем  $\Delta O(\Sigma, P)$ , и также выделяем собственно аттракторы, антиаттракторы и притягивающе-отталкивающие аттракторы.

*Каналы связей между особями.* В П-алгоритмах могут быть использованы следующие каналы обмена информацией между особями популяции: *прямой* канал (канал индивидуальных взаимодействий – directinter-individual communication); *следовый* (trail) канал; канал *стигмергии* (stigmergy). Каждый из указанных каналов определяют: область действия канала – размер области пространства поиска или совокупности особей популяции, в пределах которых возможен обмен информацией; способ изменения информации в канале – какие особи и

по каким правилам могут изменять информацию; объем и время хранения информации в канале. С точки зрения области действия канала различаем *индивидуальные* и *групповые* каналы. Индивидуальный канал предполагает получение данных лишь от одной из особей популяции. Групповой канал (*group-oriented*) ориентирован на получение и использование данной особью информации от некоторого числа других особей популяции (от некоторой группы особей).

## **2. Эволюционные операторы П-алгоритмов**

Чаще всего в П-алгоритмах эволюционные операторы используются на каждой их итерации. В общей постановке правила принятия решения об использовании или неиспользовании оператора могут быть детерминированными или стохастическими (хаотическими), стационарными или динамическими (программными, адаптивными, программно-адаптивными). Эволюционные операторы могут применяться к каждой из особей популяции (субпопуляции), но могут использоваться как канонические, так и специфические для данного оператора методы формирования набора «входных» особей операторов. Применение операторов может осуществляться безусловно и условно по детерминированным и стохастическим (хаотическим), стационарным или динамическим (программным, адаптивным, программно-адаптивным) правилам. В общем случае результаты применения операторов могут использоваться безусловно или условно по аналогичным правилам.

*Базовые операции.* К базовым относим следующие операции: операции линейной алгебры; генерация случайных и хаотичных величин; кластеризация совокупностей особей; многоцелевая оптимизация; генерация плана эксперимента; сортировка; миграция особей между совокупностями особей; масштабирование и модификация фитнес-функции; нишевание.

*Инициализация популяции и завершение итерационного процесса.* В процессе инициализации популяции осуществляются или могут осуществляться следующие основные действия: инициализация параметров П-алгоритма, включая инициализацию начальных значений динамических параметров и характеристик сущностей алгоритма; задание (начальной) топологии соседства особей и субпопуляций; инициализация популяции и субпопуляций; инициализация используемых П-алгоритмом объединений особей; инициализация окрестностей особей регионов поиска. Наряду с инициализацией сущностей на этапе инициализации П-алгоритма может осуществляться начальное формирование тех или иных сущностей, например, субпопуляций, объединений особей, их окрестностей и т.д.

Оператор окончания поиска реализует следующие основные действия: проверка выполнимости критерия (или критериев) окончания

поиска; возврат указанных результатов решения задачи оптимизации, если этот критерий (критерии) выполнен; продолжение поиска в противном случае. Оператор обычно применяют к популяции.

*Селекция.* Операторы селекции (селекторы) предназначены для выбора особей из заданного их объединения или объединений с целью использования в операторах мутации, скрещивания, локального поиска и т.д. Особи, из числа которых осуществляется селекция, могут принадлежать текущему и, возможно, прошлым поколениям. Общая форма оператора селекции имеет вид  $\Sigma \rightarrow \Sigma'(t, C, P)$ , где  $\Sigma, \Sigma' \subseteq \Sigma$  – входной и выходной наборы особей. По аналогии с [1] среди селекторов выделяем четыре следующие группы: селекторы, не учитывающие приспособленность и расположение особей в пространстве поиска – случайные селекторы; селекторы, использующие только приспособленность особей; селекторы, основанные на учете расположения особей в пространстве поиска – комбинированные селекторы. Селекторы последних трех групп используют алгоритмы селекции, основанные на близости особей в одном или нескольких пространствах из числа  $\mathcal{R}_\varphi, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_T$  (то есть построены на основе метрик близости особей в этих пространствах).

*Мутация.* В П-алгоритмах может быть использована мутация текущего положения  $X_i$  особи  $s_i \in S$ , ее скорости  $\Delta X_i$  и/или ускорения  $\Delta^2 X_i$ . Для определенности будем говорить о мутации положений особей. Мутация порождает новое решение от одного и только одного родителя (в противном случае операция называется скрещиванием). В самом общем виде оператор мутации (мутатор) определяет выражение  $s' = Mutation\ s(t, C, P)$ , где  $s, s'$  – родительская и результирующая особи (особь потомок);  $Mut(\cdot)$  – функция мутации. Оператор мутации может использоваться не на каждой итерации поиска, но лишь через некоторое число итераций  $\Delta t$ , которое по общим правилам изменяется программно, адаптивно или программно-адаптивно, по детерминированному или стохастическому законам. Мутация может выполняться не через указанное число итераций  $\Delta t$ , но вероятно.

*Скрещивание.* Оператор скрещивания или репродукции (crossing, reproduction) является одним из основных в эволюционных алгоритмах и широко используется в П-алгоритмах. Если вектор состояния  $V$  особей популяции является составным, то есть если  $V = (X, \Delta X)$  или  $V = (X, \Delta X, \Delta^2 X)$ , то имеет смысл скрещивание только соответствующих составляющих этого вектора, например,  $X_{i_1}$  и  $X_{i_2}$ ,  $\Delta X_{i_1}$  и  $\Delta X_{i_2}$ ,  $\Delta^2 X_{i_1}$  и  $\Delta^2 X_{i_2}$ , где  $i_1 \neq i_2$ . Как правило, в П-алгоритмах используют скрещивание векторов  $X$ , определяющих положения

особей в пространстве поиска  $\mathcal{R}_X$ . В общем виде оператор скрещивания можно записать как  $\Sigma' = \text{Crossing } \Sigma(t, C, P)$ , где  $\Sigma$  – совокупности родительских особей;  $\Sigma'$  – набор особей-потомков. Основными являются следующие классы вещественных операторов скрещивания [1]: операторы, которые на основе двух родительских особей продуцируют одну особь-потомка ( $n = 2, m = 1$ ); аналогичные операторы, производящие двух особей-потомков ( $n = 2, m = 2$ ); операторы, порождающие более двух особей-потомков ( $n = 2, m > 2$ ); многородительские операторы ( $n > 2, m \geq 1$ ).

*Локальный поиск.* Алгоритмы локального поиска нередко включают в состав (гибридного) П-алгоритма с целью интенсификации поиска. Как правило, эту гибридизацию выполняют по схеме гибридизации вложением [1]. Основным аргументом в пользу такой гибридизации заключается в следующем: с точки зрения точности локализации искомого экстремума фитнес-функции эффективность любого «чисто» популяционного алгоритма невысока в сравнении с алгоритмами локального поиска, которые специально разработаны для решения именно этой задачи. Алгоритмы локального и глобального поиска не всегда удается разделить однозначно. Мы относим к алгоритмам локального поиска алгоритмы, которые удовлетворяют следующим требованиям: а) поиск осуществляется в некоторых достаточно малых  $\mathcal{R}_X$ -окрестностях рассматриваемых особей; б) не используется «глобальная» информация, например текущее глобальное лучшее положение  $X^{gbest}$  особей популяции. Независимо от исходной задачи оптимизации в П-алгоритмах может использоваться локальный безусловный поиск (LocalUnConditional, LUC) и локальный условный поиск (LocalConditional, LC).

Алгоритм локального поиска определяют следующие величины:  $\hat{\tau}(t, C)$  – число шагов поиска;  $n, m$  – числа точек и предыдущих учитываемых шагов на данном шаге  $\tau$  соответственно;  $\mathcal{R}$  – пространство, в котором осуществляется планирование перемещения особи.

Локальный поиск осуществляют в некоторой  $\mathcal{R}_X$ -подобласти, «связанной» с той или иной точкой  $X$  пространства поиска. Обычно этой точкой является текущее положение рассматриваемой особи  $s \in S$ , но могут использоваться и другие точки. В конечном счете оператор локального поиска реализует перемещение особей в пространстве поиска  $\mathcal{R}_X$ . Однако прежде это перемещение может быть определено в сферической системе координат, то есть в пространстве  $\mathcal{R}_A$ , и лишь затем пересчитано пространство  $\mathcal{R}_X$ .

Во многих случаях в операторах локального поиска находят применение пробные (виртуальные) шаги. В качестве результирующего положения данной особи в этом случае может использоваться лучшее из рассматриваемых ее возможных положений (жадная стратегия выбора). Отказ от этой стратегии может быть обусловлен желанием диверсифицировать поиск.

Выделяем следующие классы неканонических стохастических алгоритмов локального поиска постоянной структуры (структурно стационарные алгоритмы).

а) Одноточечные одношаговые алгоритмы *аттракторного* поиска (описатели  $A$  или  $Ph$ ), в которых поиск реализуют, например, в направлении текущего центра «тяжести» особей, принадлежащих некоторой окрестности данной особи  $s$  (описатель  $A$ ), или в направлении текущего центра тяжести активных феромонных меток этой окрестности (описатель  $Ph$ ).

б) Одноточечные одношаговые алгоритмы *когнитивного* поиска (описатель  $C$ ), где поиск производится в направлении исторически лучшего положения  $X^{hbest}$  данной особи  $s$ .

в) Одноточечные одношаговые алгоритмы случайного поиска по схеме алгоритмов RandomSearch (описатель  $R$ ).

г) Одноточечные одношаговые алгоритмы *социального* поиска (описатель  $S$ ), в которых поиск осуществляется в направлении текущего положения некоторой особи популяции, принадлежащей рассматриваемой  $\mathfrak{R}_X$ -окрестности данной особи  $s \in S$ , например, в направлении точки  $X^{NBbest} \in A(s, R)$ , где  $s^{NBbest}$  – лучшая соседняя особь в указанной окрестности особи  $s$ .

д) Многоточечные алгоритмы

Также в П-алгоритмах находят применение структурно динамические алгоритмы (алгоритмы переменной структуры).

*Глобальный поиск.* Операторы, реализующие глобальный поиск экстремума фитнес-функции, является основными и самыми сложными операторами П-алгоритмов. Как и другие сущности П-алгоритмов, алгоритмы глобального поиска разделяем на стационарные и динамические (программные, адаптивные и программно-адаптивные). Аналогично алгоритмам локального поиска одна итерация П-алгоритма может включать в себя некоторое число  $\hat{t}$  шагов глобального поиска. Каждый из этих шагов, в свою очередь, может содержать  $\hat{\theta}$  микрошагов. Величины  $\hat{t}$ ,  $\hat{\theta}$  являются, вообще говоря, динамическими параметрами П-алгоритма. Может использоваться глобальный безусловный поиск (GlobalUnConditional, GUC) и глобальный условный поиск (GlobalConditional, GC).

В подавляющем большинстве П-алгоритмов используются стохастические или хаотические итерационные формулы глобального поиска.

Выделяем структурно стационарные односоставные операторы явного глобального поиска; аналогичные двухсоставные, трех- и более составные операторы; структурно динамические явные операторы; неявные алгоритмы.

В итерационных формулах алгоритмов глобального поиска выделяем следующие базовые составляющие: аттракторная (attractor, A); когнитивная (cognitive, C); историческая (historical, H); инерционная (inertial, I); феромонная (pheromone, Ph); случайная (random, R); социальная (social, S). Кроме того, в алгоритмах глобального поиска могут использоваться комбинированные составляющие – когнитивно-социальная (cognitive-social, CS) и историко-социальная (historical-social, HS) и другие.

*Управление популяцией и субпопуляциями.* Для формирования нового поколения особей популяции или субпопуляции в П-алгоритмах широко используют различные средства управления наборами особей. Канонические средства такого рода представлены оператором селекции (selection). Кроме того, мы выделяем следующие операторы управления наборами особей, упорядоченные по их англоязычным названиям (но никак не по важности или широте использования): ассоциация (association); кластеризация (clustering); сжатие (compression); создание (creation); исключение особей (exclusion); обновление (renovation); переупорядочение (reordering); замена (replacement); репликация (replication); репродукция (reproduction); «встряска» (shake-up); расщепление (splitting).

По общим правилам рассматриваемые операторы могут применяться безусловно или по тем или иным правилам (детерминированным или стохастическим (хаотическим), стационарным или динамическим (программным, адаптивным, программно-адаптивным)).

*Удовлетворение ограничений.* При решении задач условной оптимизации возникает проблема учета ограничений на значения варьируемых параметров (constraint-satisfaction problems). Выделяем следующие подходы к решению этой проблемы: использование операторов, которые продуцируют только допустимых особей (constraint-preserving operators); канонические методы сведения условной оптимизации к безусловной оптимизации; такие же методы, не использующие редукцию задачи условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации; специальные методы удовлетворения ограничений, разработанные для П-алгоритмов. Отметим, что первый подход с приемлемыми вычислительными затратами удается

реализовать только в случае выпуклого множества  $D$  допустимых значений вектора варьируемых параметров, определяемого линейными ограничивающими функциями.

*Коммуникации особей и их объединений.* Как мы отмечали выше, различаем обмен информацией между особями и объединениями особей с помощью прямого, следового и стигмергичного каналов. Эти каналы могут использоваться П-алгоритмом одновременно и безусловно, как, к примеру, в алгоритме непрерывно взаимодействующей колонии муравьев (СІАС). Если в П-алгоритме применяются одновременно, например, прямой канал и канал стигмергии (гибридный алгоритм непрерывно взаимодействующей муравьиной колонии (НСІАС)), то возникает задача выбора данной особью  $s_i$  того или иного канала. Выбор производится через фиксированное или программно / адаптивно изменяющееся число итераций  $\Delta t$  и только на основе информации, доступной особи  $s_i$ . Решение целесообразно принимать вероятностно на основе функции, называемой в алгоритме НСІАС *функцией выбора (stimulus-response)* и имеющей смысл вероятности выбора канала. Аргументом функции является такая характеристика канала, как его *привлекательность (attractiveness)*, которой в разных П-алгоритмах может быть придан разный смысл.

### **Заключение**

В силу ограниченности объема статьи в ней не нашли места вопросы *параметрической оптимизации* и *параметрического синтеза* П-алгоритмов, а также задача их *структурного синтеза* с использованием методов гибридизации.

### **Литература**

1. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с.
2. Bo Xing, Wen-Jing Gao. Innovative Computational Intelligence: A Rough Guide to 134 Clever Algorithms. Springer, Cham Heidelberg, New York, Dordrecht, London. 451 p.
3. Ashraf Darwish. Bio-inspired computing: Algorithms review, deep analysis, and the scope of applications // Future Computing and Informatics Journal. 2018. Vol. 3, P. 231-246.
4. Курейчик В.М., Родзин С.И. Основы теории эволюционных вычислений. Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2010. 222 с.
5. Родзин С.И., Скобцов Ю.А., Эль-Хатиб С.А. Биоэвристики: теория, алгоритмы и приложения: монография. Чебоксары: ИД «Среда», 2019. 224 с.
6. Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алешина Е.А. Методы глобальной оптимизации: Метаэвристические стратегии и алгоритмы. М.: Вузовская книга, 2013. 244 с.
7. Engelbrecht Andries P. Computational Intelligence. An Introduction: John Wiley & Sons Ltd, England, 2007. 597 p.
8. Evolutionary Computation 1. Basic Algorithms and Operators / ed. by Thomas Back, David B Fogel and Zbigniew Michalewicz. Institute of physics publishing Bristol and Philadelphia. 2000. 339 p.

9. Evolutionary Computation 2. Advanced Algorithms and Operators / ed. by Thomas Back, David B Fogel and Zbigniew Michalewicz. Institute of physics publishing Bristol and Philadelphia, 2000. 270 P.

10. Glover F., Kochenberger G.A. Handbook of metaheuristics. Springer, 2010. 648 p.

11. Krishnaveni A., Shankar R., Duraisamy S. A Survey on Nature-Inspired Computing (NIC): Algorithms and Challenges // Global Journal of Computer Science and Technology: Neural & Artificial Intelligence, 2019. Vol, 19. Iss.

12. Nazmul Siddique, Hojjat Adeli. Nature Inspired Computing: An Overview and Some Future Directions // Cognitive Computation. 2015. Vol. 7. P. 706–714.

13. Sean Luke. Essentials of Metaheuristics (Second Edition). 2013. URL: <http://cs.gmu.edu/~sean/book/metaheuristics/>.

14. Xin-She Yang. Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms. Second Edition. Luniver Press, United Kingdom, 2010. 115 p.

**A.P. Karpenko**

Bauman Moscow State Technical University

## **ELEMENTS OF THE THEORY OF POPULATION ALGORITHMS FOR GLOBAL OPTIMIZATION**

**Keywords:** *metaheuristic algorithms, population algorithms, nature-inspired algorithms.*

**Abstract.** *The problem of global continuous optimization and population (metaheuristic) algorithms for its solution are considered. We present the author's formalization of the following entities of population algorithms: evolutionary operators; parameters; individual, population and subpopulation; spaces, graphs and metrics of the neighborhood of individuals and populations of individuals; neighborhoods of individuals, search regions and traces of individuals; associations of individuals and a set of neighbors; characteristics of entities; attractors, communication channels between individuals and their sets. All entities are divided into deterministic and stochastic, stationary and dynamic (software, adaptive and software-adaptive).*

**Р.А. Матвеев, В.В. Сенчилов**

Смоленский государственный университет

УДК 004.424

## **ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ КРИПТОГРАФИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ ДАННЫХ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ**

**Ключевые слова:** *криптография, шифрование, симметричное шифрование, симметричные алгоритмы, симметричная криптография.*

*В статье рассматриваются некоторые особенности использования криптографических алгоритмов для защиты данных в информационных системах. Описаны алгоритмы шифрования и дешифрования AESc фиксированным размером ключа, и представлены*



*примеры их реализации. В заключении предлагаются рекомендации по обеспечению надежного функционирования механизмов системы защиты информации.*

**Введение.** В настоящее время криптография рассматривается как наука о методах обеспечения конфиденциальности, целостности данных и аутентификации.

Традиционная криптография образует раздел симметричных криптосистем, в которых зашифровывание и расшифровывание проводится с использованием одного и того же секретного ключа.

Современная прикладная криптография представляет собой науку, образованную на стыке математики и информатики. С модификацией до открытого ключа криптография получила широкое распространение и стала применяться частными лицами и коммерческими организациями.

В основе криптографических систем лежат различные виды криптографии [1]. Выделяют четыре основных вида.

1. Симметричное шифрование. Данный метод предотвращает перехват данных и состоит в том, что две стороны (получатель и отправитель) имеют одинаковые ключи доступа.

2. Асимметричное шифрование.

3. Хэширование.

4. Электронная подпись.

AES, или расширенный стандарт шифрования (Advanced Encryption Standard), – алгоритм шифрования данных, созданный Национальным институтом стандартов и технологий США (NIST) в 2002 году [2].

Перейдем к описанию самого алгоритма шифрования AES с размером ключа 128 бит. Предварительно входные данные разбиваются на блоки по 16 байт, если полный размер не кратен 16 байтам, то данные дополняются до размера, кратного 16 байтам. Блоки представляются в виде матрицы 4x4 [3]. Далее происходит процедура расширения ключа и к каждому блоку применяются шаги 2–4 (описаны ниже). Итак, алгоритм состоит из следующих шагов:

1) расширение ключа – KeyExpansion;

2) начальный раунд – сложение блока с основным ключом;

3) 9 раундов шифрования, каждый из которых состоит из преобразований: SubBytes, ShiftRows, MixColumns, AddRoundKey;

4) финальный раунд, состоящий из преобразований: SubBytes, ShiftRows, AddRoundKey.

Рассмотрим подробнее каждое из представленных выше преобразований:

– SubBytes – замена байтов блока по таблице S-box;

– ShiftRows – циклический сдвиг строк блока;

– MixColumns – умножения каждого столбца блока на фиксированную матрицу;

– AddRoundKey – раундовый ключ поэлементно добавляется к блоку с помощью поразрядного XOR;

– KeyExpansion – процедура расширения основного ключа для создания раундовых ключей, которые затем используются в раундах шифрования.

К основным преимуществам данного алгоритма относят:

– рассеивание – изменение любого знака ключа или открытого текста влияет на большое количество знаков шифротекста;

– перемешивание – используемые преобразования затрудняют получение статистических зависимостей между открытым и закрытым текстом;

– не подвержен многим видам криптоаналитических атак;

– байт – ориентированная структура, что дает хорошие перспективы для реализации алгоритма в будущих процессорах;

– высокое быстродействие на различных платформах.

### Реализация защиты данных

Рассмотрим вариант программного представления алгоритмов шифрования и дешифрования. В представленном примере используется реализация алгоритма AES от Майкрософт.

Процедура шифрования алгоритмом Aes.

```
private byte[] Cipher(string plainText)
{
    if (plainText == null)
    {
        throw new ArgumentNullException("plainText");
    }

    if (_key == null || _key.Length <= 0)
    {
        CreateKey();
    }

    if (_salt == null || _salt.Length <= 0)
    {
        CreateSalt();
    }

    byte[] encrypted;

    using (Aes aesAlg = Aes.Create())
    {
        aesAlg.Key = _key;
        aesAlg.IV = _salt;

        ICryptoTransform encryptor = aesAlg.CreateEncryptor(aesAlg.Key, aesAlg.IV);

        using (MemoryStream msEncrypt = new MemoryStream())
        {
            using (CryptoStream csEncrypt = new CryptoStream(msEncrypt, encryptor, CryptoStreamMode.Write))
            {
                using (StreamWriter swEncrypt = new StreamWriter(csEncrypt))
                {
                    swEncrypt.Write(plainText);
                }
                encrypted = msEncrypt.ToArray();
            }
        }
    }

    return encrypted;
}
```

Необходимо отметить, что основой для представленного шифра AES является алгоритм Rijndael [11], который впервые был разработан и реализован бельгийцами Д. Дейменом и В. Райменом. Данный алгоритм обладает большим набором достоинств, среди которых необходимо отметить не только простоту и высокую скорость шифрования, но и универсальность, поэтому такой код хорошо подходит для реализации на многих платформах, например на смарт-картах [4]. В начальном варианте шифр имел переменную длину блоков и несколько вариантов различной длины ключей. Длина ключа и длина блока принимали значения независимо друг от друга и могли быть равны 128, 192 или 256 бит. В разработке AES определена фиксированная длина блока, чаще всего равная 128 бит.

Далее приведем процедуру реализации дешифрования данных алгоритмом AES.

```
private string Decipher(byte[] cipherText)
{
    if (cipherText == null || cipherText.Length <= 0)
    {
        throw new ArgumentNullException("cipherText");
    }

    if (_key == null || _key.Length <= 0)
    {
        CreateKey();
    }

    if (_salt == null || _salt.Length <= 0)
    {
        CreateSalt();
    }

    string plaintext = null;

    using (Aes aesAlg = Aes.Create())
    {
        aesAlg.Key = _key;
        aesAlg.IV = _salt;

        ICryptoTransform decryptor = aesAlg.CreateDecryptor(aesAlg.Key, aesAlg.IV);

        using (MemoryStream msDecrypt = new MemoryStream(cipherText))
        {
            using (CryptoStream csDecrypt = new CryptoStream(msDecrypt, decryptor, CryptoStreamMode.Read))
            {
                using (StreamReader srDecrypt = new StreamReader(csDecrypt))
                {
                    plaintext = srDecrypt.ReadToEnd();
                }
            }
        }
    }

    return plaintext;
}
```

Для современных информационных систем сохранность данных является одной из первостепенных задач. Только за последнее десятилетие распространение конфиденциальной информации из-за

неправомерной деятельности злоумышленников для среднестатистической организации приводило к значительному ущербу от 5 миллионов долларов.

Поэтому при практическом использовании для большей безопасности шифрование данных может быть осуществлено повторно.

```
public byte[] Encrypt(string text)
{
    var bytes = Cipher(text);
    var bytesString = String.Join(",", bytes.Select(x => x.ToString()));
    var bytesNew = Cipher(bytesString);

    return bytesNew;
}
```

Такая дополнительная защита применяется, например, для защиты персональных данных.

При подобной реализации криптографической защиты также необходимо повторное дешифрование.

```
public string Decrypt(byte[] bytes)
{
    var bytesString = Decipher(bytes);
    var bytesOld = bytesString.Split(",").Select(x => Byte.Parse(x)).ToArray();
    var text = Decipher(bytesOld);

    return text;
}
```

Дополнительная обработка данных ожидаемо увеличивает время получения пользователем релевантной информации.

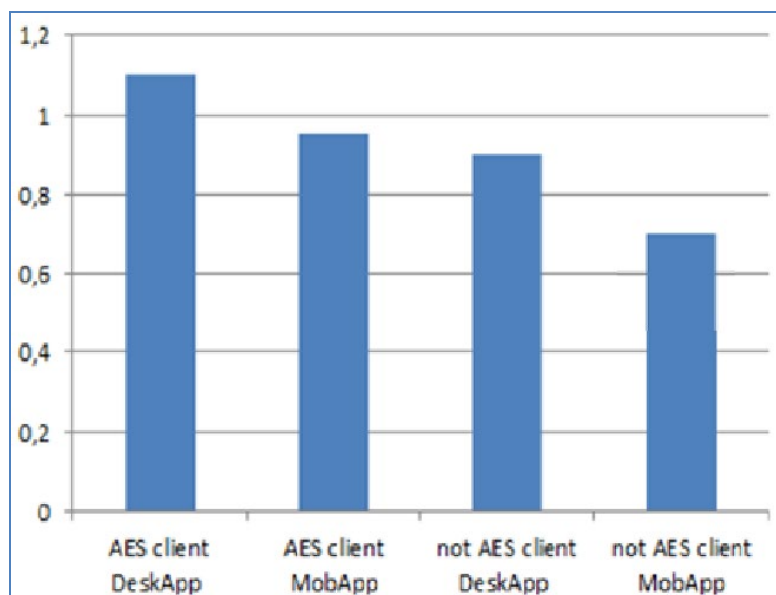


Рис. 1

На рисунке 1 показано среднее время обработки запроса до и после внедрения шифрования в систему. Представленная статистическая информация собрана системой для анализа данных на сервере. Как оказалось, обработка запроса к системе после использования шифрования не привела к значительному увеличению времени ожидания для пользователей при работе как с мобильным, так и с десктопным клиентом [5].

Для осуществления практического тестирования системы до и после внедрения шифрования были выбраны две группы независимых пользователей в количестве 25–30 человек. Обе группы были репрезентативными.

В результате опытного взаимодействия с приложением были получены данные, свидетельствующие о корректности разработанных операций и внедренных алгоритмов шифрования и дешифрования в тестируемую систему. Большая часть пользователей практически не отметила увеличения времени обработки запросов модифицированной программы.

### **Заключение**

Попытки неправомерного доступа к закрытой информации приводят к пониманию необходимости дополнительной защиты данных даже в информационных системах для широкого круга пользователей. Причем применение шифрования должно осуществляться в течение жизненного цикла всех программ автоматизированной обработки данных. Перманентное увеличение производительности архитектуры вычислительных машин приводит к снижению устойчивости криптографических алгоритмов для взлома. Поэтому примененные в предыдущих версиях информационной системы приемы шифрования должны быть модифицированы или полностью изменены в соответствии с используемыми платформами. Обеспечение надежной работы механизмов системы защиты информации неразрывно связано с решением нестандартных задач и поэтому может осуществляться лишь квалифицированными специалистами в сфере математики и информационных технологий – криптографами и криптоаналитиками [6], которые могут определить надежность программных средств и алгоритмов, реализующих необходимую защиту данных на всех этапах ее обработки.

### **Литература**

1. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Интеллектуальные информационные системы. М.: Финансы и статистика, 2016. 424 с.
2. Tsyganov, I. Cryptographic methods of information protection // Languages in professional communication: сборник материалов международной научно-практической конференции преподавателей, аспирантов и студентов (Екатеринбург,

28 мая 2020 года) / отв. ред. Л.И. Корнеева. Екатеринбург: Издательский Дом «Ажур», 2020. С. 728–732.

3. Коцюк Ю.А. Криптографические методы защиты информации и психологический комфорт пользователей информационных систем // Информационные технологии и средства обучения. 2007. Т. 3, № 2. С. 16.

4. Сенчилов В.В., Тимофеева Н.М., Киселева О.М., Быков А.А. Подходы к проектированию дистанционных курсов по обучению математике детей с ограниченными возможностями здоровья // Мир науки. 2017. Т. 5, № 4. С. 7.

5. Сенчилов В.В., Григорьева Г.М., Ходченков В.Ю. О результатах внедрения в медицинскую практику методов интеллектуального анализа данных // Образование в цифровую эпоху: сборник статей по материалам Международной научно-практической конференции преподавателей, студентов, аспирантов, докторантов и заинтересованных лиц. Н. Новгород: Изд-во Мининский университет, 2019. С.183–186.

6. Авдошин С.М., Савельева А.А. Криптографические методы защиты информационных систем // Известия АИН им. А.М. Прохорова. Бизнес-информатика. 2006. Т. 17. С.91–99.

**R.A. Matveev, V.V. Senchilov**  
Smolensk State University

## **ON THE PECULIARITIES OF APPLICATION OF CRYPTOGRAPHIC DATA PROTECTION IN INFORMATION SYSTEMS**

**Keywords:** *cryptography, encryption, data encryption, symmetric encryption, symmetric algorithms, symmetric cryptography.*

**Abstract.** *The article discusses some features of the use of cryptographic algorithms for data protection in information systems. AES encryption and decryption algorithms with a fixed key size are considered and examples of their implementation are presented. In conclusion, recommendations are offered to ensure the reliable functioning of the mechanisms of the information security system.*

**С.А. Морозов, В.И. Мунерман, В.А. Симаков**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

## **СРАВНЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ АЛГОРИТМА ПОИСКА ВСЕВОЗМОЖНЫХ МАРШРУТОВ В ГРАФЕ**

**Ключевые слова:** *алгебра многомерных матриц, реляционная алгебра, поиск маршрутов в графе, скорость выполнения алгоритма.*

В данной работе приводится анализ и сравнение скорости выполнения реализаций алгоритма поиска всевозможных маршрутов, основанный на применении  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения многомерных матриц. Кроме этого, приводится сравнение с реализацией средствами SQL реляционной модели, а именно с применением операций *SELECT ... GROUP BY*, *SELECT ... FROM JOIN (...)* вследствие их изоморфизма с операциями свертки и  $(\lambda, \mu)$  – свернутого произведения алгебры многомерных матриц.

**1. Введение.** В статье проводится сравнение реализаций алгоритма поиска всех возможных маршрутов в графе различными средствами. Необходимо выявить сильные и слабые стороны каждого варианта реализации, чтобы понять, какой метод будет наиболее оптимальным для решения поставленной задачи поиска всех возможных маршрутов в графе. Будем рассматривать следующие способы выполнения алгоритма:

- 1) однопоточный метод, основанный на динамических массивах типа «вектор»). Для реализации многомерности будет использована система «вектор из векторов»;
- 2) многопоточный вариант метода 1;
- 3) однопоточный метод, основанный на применении всевозможных высокоуровневых ускорениях выполнения итераций средствами языка C++;
- 4) многопоточный вариант метода 3;
- 5) метод с вычислениями, проводимыми на GPU;
- 6) метод, основанный на реализации алгоритма средствами реляционной алгебры.

Последний метод имеет место, так как операции свертки и  $(\lambda, \mu)$  – свернутого произведения алгебры многомерных матриц находятся во взаимно однозначном соответствии с операциями *SELECT ... GROUP BY*, *SELECT ... FROM JOIN (...)* SQL реляционной модели [1].

**2. Анализ реализаций, основанных на алгебре многомерных матриц.** Для сравнения различных подходов по времени выполнения алгоритма, будем использовать одну и ту же матрицу смежности, представленную в таблице 1. Элементы данной матрицы  $A = \|a_{i,j}\|$  принадлежат множеству, состоящему из 0 и 1, то есть  $a_{i,j} \in \{0,1\}$ . Случай, когда  $a_{i,j} = 1$ , означает, что из вершины  $i$  в  $j$  вершину идет направленное ребро.

Таблица 1

Матрица смежности исходного графа

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Визуализация графа, описанного матрицей смежности (таблица 1), представлена на рисунке 1.

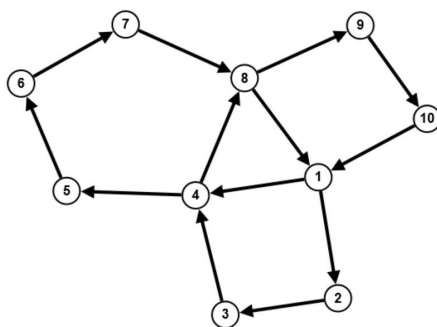


Рис. 1. Графическое представление графа

Все эксперименты проводились на ПК, имеющем следующие характеристики:

- ОС: Windows 11 Professional;
- процессор: AMD Ryzen 9 3900X, обладающий 12 ядрами и 24 потоками с тактовой частотой 4.6 ГГц;
- RAM: 32 гб с частотой 3200 МГц.

Результаты времени выполнения методов 1–5 приведены на рисунке 2.

| Метод 1 | Метод 2 | Метод 3 | Метод 4 | Метод 5 |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 0       | 0,008   | 0       | 0       | 0,158   |
| 0       | 0,009   | 0       | 0       | 0,004   |
| 0,001   | 0,01    | 0       | 0       | 0,03    |
| 0,013   | 0,014   | 0,001   | 0       | 0,296   |
| 0,135   | 0,034   | 0,003   | 0,001   | 2,91    |
| 1,455   | 0,229   | 0,036   | 0,008   | 28,943  |
| 15,858  | 2,528   | 0,342   | 0,086   | 290,271 |

Рис. 2. Время выполнения методов 1–5

В таблице, представленной на рисунке 2, первая строка обозначает время инициации, а последующие – время полной обработки трёхмерной, четырёхмерной и т.д. матрицы сначала в тактах процессора, а потом приведённые в секундах.

Визуализация полученных данных изображена на рисунке 3.



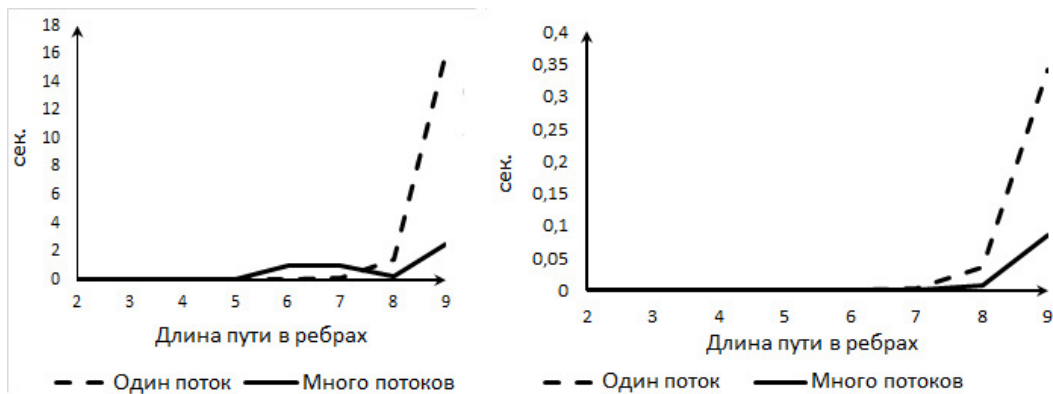


Рис. 3. а) результат выполнения методов 1–2; б) результат методов 3–4

Однопоточный метод реализации собственной библиотеки (метод 1), основанный на векторах, также не отличается высокой скоростью обработки графа, совершая полное вычисление за почти 16 секунд. Многопоточная реализация данного метода позволяет улучшить результат в 7 раз, то есть на обработку исходного графа будет затрачено 2,5 секунды. Положительной стороной методов 1 – 2 является масштабируемость, следовательно, в любой момент можно подставить другую матрицу смежности и программа успешно выполнится без изменений в коде.

Реализации алгоритма 3 – 4, основанные на применении большого количества способов высококросовного ускорения кода средств языка C++, показали наилучший результат. Для полной обработки графа в 10 вершин, в однопоточном режиме понадобилось 381 миллисекунда в однопоточном режиме и 86 миллисекунд в многопоточном режиме, что является неплохим результатом, а для меньшего числа вершин скорость и вовсе была близкой к 0. При этом во время эксперимента возник ряд проблем:

- обычного стека для хранения многомерной матрицы не хватает уже для 5 вершин. Приходится динамически выделять память в куче;
- при динамическом выделении памяти, если число вершин больше 13, то не хватало памяти уже в куче, поэтому для больших графов придётся пользоваться разбиением графа на несколько частей, что плохо отразится на времени выполнения;
- отсутствие масштабируемости. Для того, чтобы изменить граф, необходимо полностью пересобирать программу, а если нужно поменять число вершин, то и вовсе переделывать. В этом плане векторная библиотека позволяла изменять граф и число вершин без вмешательства в код;
- результат не является окончательным, так как можно добиться ещё большей скорости выполнения при переходе к более низкоуровневым методам оптимизации.

После того, как был выявлен наилучший способ компьютерной реализации, наступает вторая часть эксперимента, в которой проверим

скорость выполнения алгоритма для графа с большим числом рёбер. Введём 2 графа А2 и А3. Их графические представления на рисунках 4 и 5 соответственно.

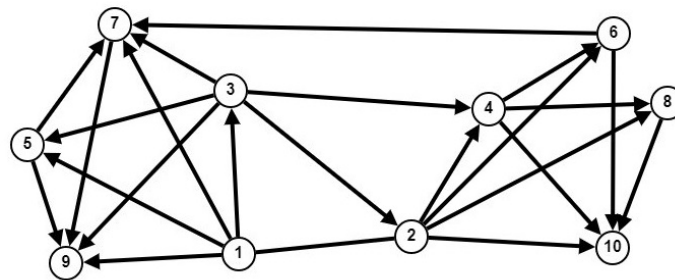


Рис. 4. Граф А2

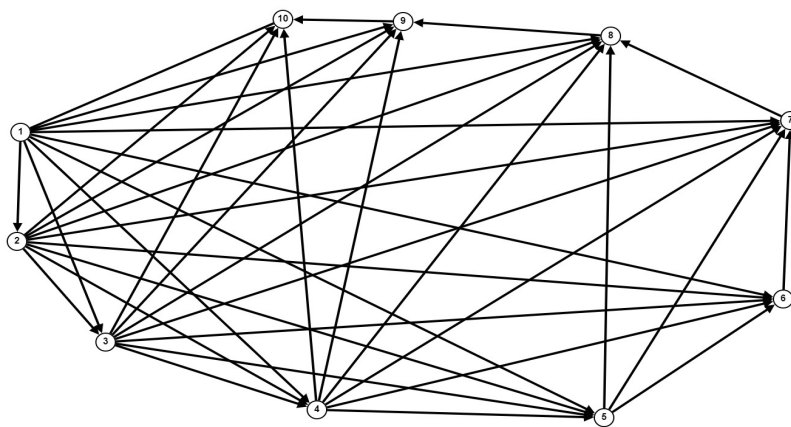


Рис. 5. Граф А3

Данные графы являются модификациями графа из первого эксперимента с единственным условием сохранения ориентированности. После обработки данных графов имеем следующие результаты (рис. 6):

|                     |                      | Граф А2             |                      | Граф А3             |                      |
|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| Однопоточный способ | Многopotочный способ | Однопоточный способ | Многopotочный способ | Однопоточный способ | Многopotочный способ |
| 0                   | 0                    | 0                   | 0                    | 0                   | 0                    |
| 0                   | 0                    | 0                   | 0                    | 0                   | 0                    |
| 0                   | 0                    | 0                   | 0                    | 0                   | 0                    |
| 0                   | 0                    | 0                   | 0                    | 0                   | 0                    |
| 1                   | 0                    | 1                   | 0                    | 1                   | 0                    |
| 3                   | 1                    | 3                   | 1                    | 3                   | 1                    |
| 36                  | 8                    | 37                  | 7                    | 34                  | 9                    |
| 342                 | 86                   | 346                 | 80                   | 350                 | 93                   |
| В секундах          |                      |                     |                      |                     |                      |
| 0                   | 0                    | 0                   | 0                    | 0                   | 0                    |
| 0                   | 0                    | 0                   | 0                    | 0                   | 0                    |
| 0                   | 0                    | 0                   | 0                    | 0                   | 0                    |
| 0                   | 0                    | 0                   | 0                    | 0                   | 0                    |
| 0,001               | 0                    | 0,001               | 0                    | 0,001               | 0                    |
| 0,003               | 0,001                | 0,003               | 0,001                | 0,003               | 0,001                |
| 0,036               | 0,008                | 0,037               | 0,007                | 0,034               | 0,009                |
| 0,342               | 0,086                | 0,346               | 0,08                 | 0,35                | 0,093                |

Рис. 6. Результаты второго эксперимента

По результатам второго эксперимента можно сформулировать утверждение, что для графа с фиксированным числом вершин скорость

обработки представленным алгоритмом не зависит от количества ребер, а различаться будет только в силу погрешности времени пересылок данных в оперативной памяти.

**3. Анализ реализации, основанной на реляционной алгебре.** Проверка времени выполнения алгоритма проводилась в двух СУБД, а именно Postgresql и Microsoft SQL Server. При одинаковом количестве вершин, но различной структуре графа время выполнения может различаться, поэтому при проведении данного эксперимента на каждом этапе замеры проводились с пятикратным повторением, а затем высчитывалось среднее значение времени работы алгоритма. Результаты приведены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2

| Postgresql        |            |    |     |     |     |         |
|-------------------|------------|----|-----|-----|-----|---------|
| Количество вершин | Повторения |    |     |     |     | Среднее |
|                   | I          | II | III | IV  | V   |         |
| 11                | 0          | 0  | 0   | 0   | 0   | 0       |
| 12                | 0          | 0  | 1   | 0   | 2   | 0,6     |
| 13                | 6          | 4  | 13  | 6   | 18  | 9,4     |
| 14                | 24         | 14 | 24  | 12  | 21  | 19      |
| 15                | 105        | 86 | 27  | 143 | 122 | 96,6    |

Таблица 3

| Microsoft SQL Server |            |    |     |    |    |         |
|----------------------|------------|----|-----|----|----|---------|
| Количество вершин    | Повторения |    |     |    |    | Среднее |
|                      | I          | II | III | IV | V  |         |
| 11                   | 0          | 0  | 0   | 0  | 0  | 0       |
| 12                   | 0          | 0  | 0   | 0  | 2  | 0,4     |
| 13                   | 3          | 2  | 6   | 3  | 8  | 4,4     |
| 14                   | 13         | 7  | 12  | 7  | 11 | 10      |
| 15                   | 47         | 44 | 12  | 66 | 55 | 44,8    |

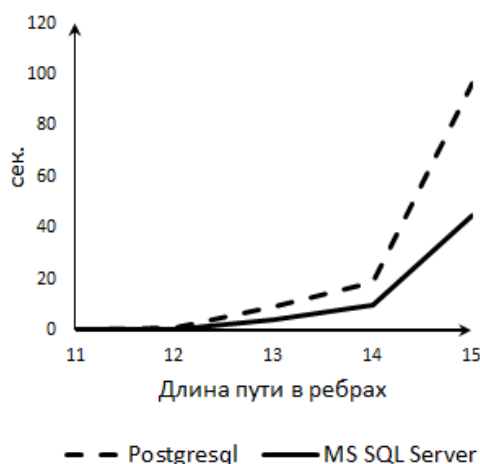


Рис. 7. Сравнение результатов по данным таблиц

Из сравнения полученных результатов можно сделать вывод, что выполнение алгоритма в Microsoft SQL Server происходит быстрее, чем в системе управления Postgresql. Из графика (рис. 7) видно, что с увеличением количества вершин в графе разница между средним временем работы алгоритма значительно увеличивается.

В ходе проведения предыдущего эксперимента было замечено, что время выполнения алгоритма не зависит от количества вершин в исходном графе. Следующий эксперимент проводился на графах, состоящих из 14 вершин, кроме времени поиска всех возможных маршрутов, также учитывались значения количества ребер и циклов в исходном графе. После 23 повторений данные были отсортированы по времени и занесены в таблицу 4. Из полученных данных можно сделать вывод что выполнение алгоритма зависит от количества циклов в исходном графе.

Таблица 4

**Проверка зависимости времени от вида графа**

| Количество ребер | Количество циклов | Время  |
|------------------|-------------------|--------|
| 68               | 33565             | 1.618  |
| 59               | 40346             | 1.724  |
| 67               | 68455             | 2.049  |
| 63               | 74151             | 2.335  |
| 63               | 85132             | 2.662  |
| 66               | 199684            | 3.455  |
| 67               | 332409            | 3.571  |
| 67               | 375687            | 3.845  |
| 69               | 470768            | 4.262  |
| 67               | 622126            | 4.505  |
| 70               | 664372            | 5.041  |
| 66               | 677650            | 5.181  |
| 67               | 766645            | 5.273  |
| 68               | 781590            | 5.586  |
| 69               | 773501            | 5.608  |
| 68               | 905977            | 5.614  |
| 69               | 1251820           | 6.943  |
| 69               | 1363938           | 7.079  |
| 72               | 1426104           | 8.079  |
| 71               | 1949978           | 9.547  |
| 70               | 2280802           | 11.409 |
| 71               | 2595024           | 12.586 |
| 73               | 2605822           | 13.255 |

При аппроксимации полученных данных методом наименьших квадратов наименьшая невязка была у линейной функции, то есть можно

сделать вывод, что зависимость количества циклов в исходном графе и времени выполнения алгоритма близко к линейному.

**4. Вывод.** В данной статье мы провели сравнение реализаций алгоритма поиска всех возможных маршрутов в графе средствами алгебры многомерных матриц и реляционной алгебры, а также выявили слабые и сильные стороны каждого способа: метод, основанный на реляционной алгебре, обладает более высокой скоростью выполнения, но сильно зависит от количества ребер в графе; метод, основанный на алгебре многомерных матриц, при самой быстрой реализации все равно проигрывает в скорости выполнения, но при этом обладает фиксированной скоростью выполнения для любого числа ребер при фиксированном числе вершин.

### Литература

1. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Алгебраический подход к формализации параллелизма данных // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12, № 1. С. 72–79.
2. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Параллельный алгоритм умножения многомерных матриц // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 11, № 2. С. 384–390.
3. Мунерман В.И., Мунерман Д.В. Соответствие операций в многомерно-матричной и реляционной моделях данных // Системы компьютерной математики и их приложения. 2019. Вып. 20. Ч. 1. С. 209–214.
4. Диев О.Е., Мунерман В.И. Параллельная обработка распределённых баз данных в СУБД Postgresql // Системы компьютерной математики и их приложения. 2017. Вып. 18. С. 68–70.

**S.A. Morozov, V.I. Munerman, V.A. Simakov**  
Smolensk State University

### COMPARISON OF IMPLEMENTATIONS OF THE ALGORITHM FOR FINDING ALL POSSIBLE ROUTES IN THE GRAPH

**Keywords:** *algebra of multidimensional matrices, relational algebra, search for routes in a graph, algorithm execution speed.*

**Abstract.** *The paper presents implementations of the algorithm for finding all possible routes based on the application  $(\lambda, \mu)$ -is a collapsed product of multidimensional matrices. In addition, a comparison is made with the SQL implementation of the relational model, namely with the use of `SELECT ... GROUP BY`, `SELECT ... FROM JOIN (...)` operations as a consequence of their isomorphism with convolution operations and  $(\lambda, \mu)$ – the collapsed product of the algebra of multidimensional matrices.*

## ТРЕБОВАНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ДАННЫХ И МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Ключевые слова: алгебра многомерных матриц; реляционная алгебра, программно-аппаратный комплекс, параллельная обработка данных.

*В статье рассмотрены требования к математическим методам, которые реализуют три этапа проектирования баз данных: концептуального, логического и физического проектирования. Показано, что для того, чтобы эти методы могли быть использованы для создания эффективных программно-аппаратных систем, необходимо, чтобы они обладали следующим набором свойств. Обеспечивали соответствие моделей данных и моделей вычислений как на уровне данных, так и на уровне операций их преобразования. Алгоритмы операций манипулирования данными должны иметь формальные описания, то есть модели должны быть процедурными. Структуры данных должны обеспечивать возможность применения параллелизма данных, а алгебраические операции преобразования данных – обеспечивать возможности реализации этого параллелизма. Все методы должны обеспечивать необходимые формализмы для решения задач оптимизации запросов. На всех этапах проектирования должна быть использована объектно-ориентированная парадигма, обеспечивающая концептуальное единство этих этапов. В статье предложен подход на основе трех математических моделей: реляционной, файловой и многомерно-матричной, в который все перечисленные требования удовлетворяются.*

**Введение.** Известно, что проектирование БД – многоступенчатый процесс, состоящий из последовательного построения моделей данных различных уровней.

Первый уровень – концептуальное (инфологическое) проектирование – заключается в построении семантической или концептуальной модели предметной области, то есть информационной модели наиболее высокого уровня абстракции. Такая модель есть образ предметной области и прообраз проектируемой для нее базы данных.

Второй уровень – логическое (дatalogическое) проектирование – состоит в создании схемы базы данных на основе конкретной модели данных, например, реляционной модели данных. В реляционной модели данных даталогическая модель реализована набором схем отношений, с

указанием первичных ключей, идентифицирующих кортежи каждого отношения, и внешних ключей, задающих связи между отношениями [1–3]. Выбор модели данных во многом определяется концептуальной моделью.

Третий уровень – физическое проектирование – реализует создание схемы базы данных средствами конкретной СУБД, реализующей выбранную модель данных. Специфика конкретной СУБД при физическом проектировании определяет набор решений, связанных с моделью вычислений и физической средой хранения данных, а именно: выбор методов доступа к данным, управления внешней памятью, распределения всей БД или отдельных таблиц по файлам и устройствам.

Вместе с тем ни одна модель данных не может быть ориентирована на все возможные архитектуры вычислительных комплексов, которые в современных условиях доступны для использования разработчикам БД. Кроме того, промышленные СУБД ориентированы на конкретные вычислительные машины и системы (платформы). При этом не учитывается тот факт, что гибкость современных платформ позволяет моделировать на их основе различные архитектуры вычислительных комплексов. Попытка учесть такую возможность, несомненно, привела бы к неоправданному усложнению программного обеспечения СУБД. Поэтому целесообразно предоставить прикладному программисту формальный аппарат в виде дополнительных моделей данных. Они должны обеспечить связь между моделью данных, выбранной для формализации решаемой задачи, СУБД, выбранной для реализации алгоритмов, решающих задачу, и архитектурой вычислительного комплекса, который наилучшим образом обеспечивает решение задачи. В результате происходит объединение вычислительных средств, прикладных программ и программного обеспечения СУБД, которые должны обеспечить решение конкретной задачи в единый программно-аппаратный комплекс.

В статье рассмотрены требования, которым должны удовлетворять теоретико-множественная, или файловая, и многомерно матричная модели данных [4–6], выбранные в качестве связующих моделей.

**Соответствие моделей данных и вычислений.** Неформально требование соответствия двух моделей означает наличие у них свойств, позволяющих использовать одну модель МОД вместо другой. В статье предлагается использовать два типа соответствия моделей данных и вычислений, основанные на теории алгебраических систем [7].

Первый тип состоит в том, что:

- каждому набору данных (прообразу), представленному в одной модели (например, отношению в реляционной, файлу в теоретико-множественной), ставится в соответствие один и только один набор

данных (образ), представленный в другой модели (например, многомерная матрица);

- каждой операции в одной модели ставится в соответствие одна и только одна операция или композиция операций в другой модели, и результату операции над прообразами соответствует результат операции над образами.

В математике, в частности в теории абстрактных алгебраических систем, такое соответствие называется изоморфизмом.

Второй тип соответствия состоит в том, что:

- каждому набору данных (прообразу), представленному в одной модели, ставится в соответствие единственный набор данных (образ), представленный в другой модели (например логическая многомерная матрица), то есть нескольким прообразами может соответствовать один и тот же образ;

- каждой операции в одной модели ставится в соответствие одна и только одна операция или композиция операций в другой модели, и результату операции над прообразами соответствует результат операции над образами.

Такое соответствие называется гомоморфизмом.

**Процедурность.** Модель должна обеспечивать алгебраическую процедурную формулировку запроса, которая задает правила его реализации. То есть запрос, представленный на языке модели, может быть вычислен на основе выполнения элементарных алгебраических операций, определенных в модели, с учетом приоритетности, возможного наличия скобок и некоторых дополнительных правил, определяющих порядок их выполнения. К требованию процедурности рассматриваемых в работе моделей добавляются два дополнительных требования.

Первое требование состоит в том, что и сами элементарные алгебраические операции, которые реализуют выполнение запроса, должны иметь формализованные описания, позволяющие проектировать процедуры, реализующие их алгоритмы, таким образом, чтобы они наилучшим образом выполнялись в используемой модели вычислений. В распространенных в настоящее время моделях данных эти не имеют формализованных описаний. Поэтому качество их реализации определяется мастерством программистов, которые разрабатывают СУБД.

Второе требование заключается в предоставлении прикладному программисту возможности применения способов организации и распределения данных, не реализованных в конкретной СУБД, и разработки на основе имеющегося языка манипулирования данными процедур запросов, эффективно использующих выбранные организацию данных и модель вычислений.



Применение моделей данных, соответствующих этим требованиям, позволит:

- программистам, разрабатывающим СУБД, – расширить круг архитектур вычислительных комплексов, на которых станет возможным применение этих СУБД;
- прикладным программистам – возможность привязывать различные СУБД к выбранной для решения прикладной задачи архитектуре вычислительного комплекса.

**Параллелизм алгебраических операций.** Формализация операций должна обеспечивать возможность распараллеливания операций совместной обработки двух или более агрегатов данных: матриц, файлов, отношений. Например, формальное определение операций в теоретико-множественной модели позволяет использовать методы распараллеливания, присущие системам, управляемым данными (dataflow), а в многомерно матричной модели – системам на основе векторных (матричных) процессоров. Кроме того, модель должна обеспечивать возможность распараллеливания обмена между оперативной памятью и внешней запоминающей средой (традиционными внешними носителями информации или хранилищами данных).

**Оптимизация запросов.** Модель должна обеспечивать возможность оптимизации реализующих запросы процессов совместной обработки нескольких агрегатов данных. Это означает, что в терминах модели процесс, реализующий запрос, должен иметь формальное представление в виде алгебраического выражения, которое можно либо автоматически синтезировать с заданными характеристиками, либо преобразовывать для улучшения его характеристик. Спецификацией для построения выражения может служить неформальное описание запроса, например, это может быть набор, содержащий описания входных, данных, правил преобразований атрибутов (формул для вычисления значений) и результата. Формальное описание запроса на языке любой модели данных, например SQL-модели, также может служить спецификацией для синтеза выражения или его оптимизации в процессе трансляции на язык связующей модели. Следовательно, связующая модель должна содержать средства, с помощью которых возможно реализовать синтез нового оптимального процесса и оптимизацию имеющегося процесса посредством эквивалентных преобразований, оптимизировать имеющийся процесс. Поскольку методы оптимизации процесса, как правило, имеют высокую вычислительную сложность, в большинстве случаев оперативная оптимизация может быть затруднительной. Поэтому целесообразно оптимизировать многократно выполняющиеся процессы. Вместе с тем параллельная реализация некоторых методов оптимизации позволяет надеяться на возможность

оперативной оптимизации процессов. Проблема оптимизации запросов имеет давнюю историю [1–3; 8], но ее эффективное решение возможно только при использовании методов, учитывающих особенности как модели данных, так и модели вычислений [9; 10].

**Объектно-ориентированная парадигма.** Это требование означает, что формальные модели данных и вычислений должны обеспечивать возможность применения современных объектно-ориентированных методов проектирования и программирования. Вместе с тем принятый сегодня подход к описанию объектных моделей данных имеет сугубо интуитивный характер [1-3, 11], ведущий свою родословную от первых работ в этой области [12]. Это выражается в том, что отсутствует строгое определение объекта, которое заменяется неформальным описанием его свойств и свойств систем баз данных, построенных на основе объектно-ориентированного подхода. Поэтому даже активные сторонники и основоположники объектного подхода к построению систем баз данных указывают на его недостаток, состоящий в отсутствии строго определения объекта, то есть «объект – это все, что угодно» [3]. Для эффективного использования объектно-ориентированного подхода объектные модели данных и вычислений должны быть построены на основе предложенного в [13] строгого определения абстрактного типа данных (объекта, класса) как универсальной многоосновной алгебраической системы.

**Заключение.** Таким образом можно утверждать, что набор перечисленных в статье требований:

- обеспечение соответствия моделей данных и моделей вычислений как на уровне данных, так и на уровне операций их преобразования;
- процедурность операций манипулирования данными;
- использование параллелизма данных и возможность его реализации;
- наличие необходимых формализмов для решения задач оптимизации запросов;
- использование на всех этапах проектирования объектно-ориентированной парадигмы, – обеспечивает концептуальное единство всех этапов проектирования систем обработки данных.

### Литература

1. Кузнецов С.Д. Основы баз данных. М.: Изд-во «Интернет-университет информационных технологий – ИНТУИТ.ру», 2005. 488 с.: ил. <http://citforum.ru/database/osbd/contents.shtml>.
2. Гарсия-Молина Г., Ульман Д., Уидом Д. Системы баз данных. Полный курс: пер. с англ. М.: Вильямс, 2004. 1088 с., с ил.
3. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных. Восьмое издание. М.: Вильямс, 2008. – 1328 с. с ил.

4. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2012. Т. 8, №. 3. С. 19–22.
5. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, №. 4. С. 3–16.
6. Munerman V., Munerman D. An Axiomatic Approach to the Data Models Formalization for Mass Data Processing // 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). IEEE, 2020. P. 1996–2000.
7. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
8. Hall P.A.V. Optimization of a Single Relational Expression in a Relational Data Base System IBM J. R&D. 1976. May 20, № 3.
9. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Синтез и оптимизация запросов в системах массовой обработки данных // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16. С. 77–82.
10. Мунерман В. И., Мунерман Д. В. Оптимизация процессов и операций массовой обработки данных // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 172–178.
11. Багуи С. Объектно-ориентированные базы данных: достижения и проблемы // Открытые системы. 2004, № 3.
12. Liskov B., Zilles S. Programming with abstract data types // ACM SIGPLAN Notices. 1974. Vol. 9, Is. 4. P. 50–59.
13. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наукова думка, 1989. 376 с.

**V.I. Munerman, D.V. Munerman**  
Smolensk State University

## **ABOUT THE CORRESPONDENCE OF DATA MODELS AND CALCULATION MODELS**

***Keywords:** multidimensional matrix algebra; relational algebra, software and hardware complex, parallel data processing.*

***Abstract.** The article considers the requirements for mathematical methods that implement three stages of database design: conceptual, logical and physical design. It is shown that in order for these methods to be used to create efficient software and hardware systems, it is necessary that they have the following set of properties. They ensured the correspondence of data models and calculation models both at the data level and at the level of their transformation operations. Algorithms for data manipulation operations must have formal descriptions, that is, models must be procedural. Data structures must provide the possibility of applying data parallelism, and algebraic data transformation operations must provide the possibility of implementing this parallelism. All methods must provide the necessary formalisms for solving*

*query optimization problems. At all design stages, an object-oriented paradigm should be used to ensure the conceptual unity of these stages. The article proposes an approach based on three mathematical models: relational, file and multidimensional-matrix, in which all of the above requirements are satisfied.*

**К.С. Николаев**

*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.891.2

## **ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ И АЛГОРИТМА ПОЛУЧЕНИЯ ПОИСКОВОГО ОБРАЗА ДЛЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

Ключевые слова: *Модель поискового образа, алгоритм получения поискового образа, интеллектуальные рекомендательные системы, LSTM.*

*В данной работе приводится вариант постановки задачи исследования и разработки модели и алгоритма получения поискового образа для интеллектуальных рекомендательных систем. Кроме того, в статье разобран первый этап решения данной задачи.*

**1. Постановка задачи.** Задачу поиска рекомендации следует интерпретировать следующим образом. Пусть имеется набор входных параметров (характеристик)  $X = (x_1, \dots, x_{n_x})$ . В свою очередь  $x_i = (k_i^x, v_i^x)$  ( $k_i^x \neq k_j^x$ ) является парой значений, в которой  $k_i^x \in K^x$  – ключ (категориальная величина), а  $v_i^x \in V^x$  – значение (числовая величина).

Тогда по входным параметрам  $X$  требуется определить (рекомендовать) конечное множество  $C \subset \dot{Y}$ , состоящее из наперед заданного количества ( $c \neq 0$ ) релевантных объектов  $Y \in \dot{Y}$ , определяющихся схожим образом с  $X$ , то есть  $Y_i = (y_1, \dots, y_{n_y})$ , где  $i = (1, \dots, c)$ ;  $y_j = (k_j^y, v_j^y)$  ( $k_j^y \neq k_{j\mu}^y$ );  $k_j^y \in K^y$ ;  $v_j^y \in V^y$ .

Решение описанной задачи выполняется в 2 этапа (рассматривается только первый):

1) рекомендация параметров: на основе  $X$  вывести множество  $Y^\theta$ , состоящее из элементов вида  $y = (k^y, v^y)$ , то есть получение образа;

2) рекомендация объектов: по  $Y^\theta$  получить множество  $C$ , то есть поиск объектов, схожих с полученным образом.

## 2. Рекомендация параметров. Получение поискового образа.

Задачей первого этапа является получение множества  $Y^\theta$ , называемого поисковым образом, из набора входных характеристик  $X = (x_1, \dots, x_{n_x})$ . Предполагается, что существует такое множество  $Z$ , элементы которого имеют вид  $(\dot{X}, \dot{Y})$ , это значит, что каждому объекту из  $\dot{X}$  должен соответствовать объект из  $\dot{Y}$ .  $\dot{X}$  и  $\dot{Y}$  должны быть не пустые, иначе задача поиска рекомендаций не имеет смысла.

Исходя из специфики изучаемой задачи характер, количество и связь между параметрами входных и выходных объектов заранее неизвестна или вообще не могут быть объяснены. Данные условия дают понимание о невозможности (или по крайней мере высокой сложности) создания полностью детерминированной модели обработки таких объектов. Вследствие этого для получения образа рекомендации стоит применять методы и модели искусственного интеллекта и машинного обучения. В качестве используемой модели предлагается применение искусственной нейронной сети с длинной цепью элементов краткосрочной памяти (*Long short-term memory*; LSTM).

Для создания модели такой сети первоочередно необходимо установить вид входных и выходных данных. Входные данные представляют из себя коллекцию объектов вида  $x = (k^x, v^x)$ . Выходные данные представляются схожим образом, а именно:  $y = (k^y, v^y)$ . В обоих представлениях  $k$  представляет собой категориальную величину;  $v$  – числовую или категориальную величину (по большей части, будут рассмотрены случаи, когда  $v$  – числовая величина; категориальный вариант будет рассмотрен далее как особый случай).

Такой вид определяет следующий алгоритм работы, при подаче на входе ключа и значения из множества входных параметров на выходе будет получена аналогичная пара из множества выходных параметров.

Рассмотренные виды данных предполагают особое расположение самих данных при обучении модели сети. Предлагается следующее расположение:

- выбрать все объекты из  $\dot{X}$  и  $\dot{Y}$ ;
- каждому  $x_i \in \dot{X}$  поочередно (конкретный порядок не имеет значения) поставить в соответствие  $y_j \in \dot{Y}$  следующим образом:

$$(k_i^x, v_i^x) \sim (k_1^y, v_1^y)$$

$$(k_i^x, v_i^x) \sim (k_2^y, v_2^y)$$

...

$$(k_i^x, v_i^x) \sim (k_{n_i}^y, v_{n_i}^y),$$

где  $n_i$  – количество параметров  $y \in \dot{Y}$ ;  $i = 1..size(\dot{X})$ .

Модель LSTM вводит промежуточный тип хранения через ячейку памяти. Ячейка памяти – это составная единица, построенная из более

простых узлов в определенном шаблоне связи, с новым включением мультипликативных узлов, представленных на диаграммах символом  $\Pi$  (рис. 1). Все элементы ячейки LSTM перечислены и описаны ниже.

В работе принято следующее обозначение (пример):  $s$  – вектор, содержащий значение  $s_c$  в каждой ячейке  $c$  в слое сети. То есть  $s$  используется для индексации отдельных ячеек.

- Входной узел: этот блок, обозначенный  $g_c$ , представляет собой узел, который принимает активацию стандартным способом из входного слоя  $x^{(t)}$  на текущем временном шаге и (вдоль повторяющихся ребер) из скрытого слоя на предыдущем временном шаге  $h^{(t-1)}$ . Как правило, суммированный взвешенный ввод проходит через функцию активации  $\tanh$  или  $\sinh$ . Иначе говоря, такой блок будет забирать очередную «пачку» из входных значений и «замешивать» туда то, что нейронная сеть посчитает «важным» из прошлых значений.

- Входные фильтры (gates): отличительная черта подхода LSTM. Фильтр – это сигмоидальная единица, которая, как входной узел, принимает активацию из текущей точки данных  $x^{(t)}$ , а также из скрытого слоя на предыдущем временном шаге. Их значение используется для умножения значения другого узла. Это «фильтр» в том смысле, что если его значение равно нулю, то поток от другого узла прерывается. Иначе, если значение равно единице, весь поток пропускается. Значение входного фильтра  $i_c$  умножается на значение входного узла.

- Внутреннее состояние: в основе каждой ячейки памяти находится узел  $s_c$  с линейной активацией, который именуется как «внутреннее состояние» ячейки. Внутреннее состояние  $s_c$  имеет самосвязанное рекуррентное ребро с фиксированным удельным весом. Поскольку это ребро охватывает соседние временные шаги с постоянным весом, ошибка может течь по временным шагам, не исчезая или не увеличиваясь. Такое ребро часто называют «каруселью» постоянных ошибок. В векторной записи обновление внутреннего состояния выглядит так:  $s^{(t)} = g^{(t)} \odot i^{(t)} + s^{(t-1)}$ , где  $\odot$  – поточечное умножение.

- Фильтр забывания: метод, с помощью которого сеть может научиться очищать содержимое внутреннего состояния. Это особенно полезно в постоянно работающих сетях. С фильтром забывания уравнение для расчета внутреннего состояния на прямом проходе имеет вид:  $s^{(t)} = g^{(t)} \odot i^{(t)} + f^{(t)} \odot s^{(t-1)}$ .

- Выходной фильтр: значение  $v_c$ , которое в конечном итоге создается ячейкой памяти, представляет собой значение внутреннего

состояния  $s_c$ , умноженное на значение выходного фильтра  $o_c$ . Обычно внутреннее состояние сначала проходит через функцию активации  $\tanh$ , так как это дает выходу каждой ячейки тот же динамический диапазон, что и обычный скрытый модуль  $\tanh$ . Однако, согласно другим исследованиям нейронных сетей, выпрямленные линейные блоки, которые имеют больший динамический диапазон, легче обучать.

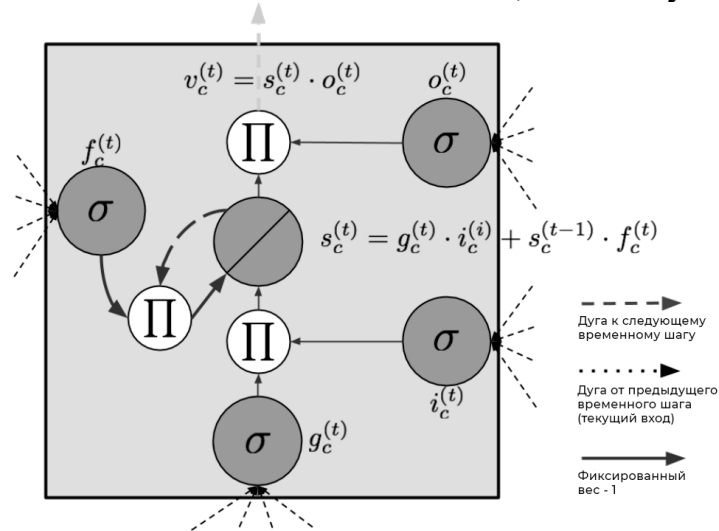


Рис. 1. Ячейка LSTM с фильтром забывания

Таким образом, вычисление в модели LSTM происходит в соответствии со следующими вычислениями, которые выполняются на каждом временном шаге. Эти уравнения – полный алгоритм LSTM с фильтром забывания:

$$\begin{aligned}
 g^{(t)} &= \varphi(W^{gx}x^{(t)} + W^{gh}h^{(t-1)} + b_g) \\
 i^{(t)} &= \sigma(W^{ix}x^{(t)} + W^{ih}h^{(t-1)} + b_i) \\
 f^{(t)} &= \sigma(W^{fx}x^{(t)} + W^{fh}h^{(t-1)} + b_f) \\
 o^{(t)} &= \sigma(W^{ox}x^{(t)} + W^{oh}h^{(t-1)} + b_o) \\
 s^{(t)} &= g^{(t)} \odot i^{(t)} + f^{(t)} \odot s^{(t-1)} \\
 h^{(t)} &= \varphi(s^{(t)}) \odot o^{(t)}.
 \end{aligned}$$

Сети LSTM являются разновидностью рекуррентных сетей, что предполагает рассмотрение входных данных как временной ряд. Однако реальная привязка ко времени необязательна. В большинстве своем она имеет смысл, когда важен порядок следования получаемых после обработки сети данных. В данном случае такого требования не ставится.

Благодаря такому подходу построения нейронной сети:

- во время обучения будут созданы ассоциации ключей из  $\dot{X}$  и  $\dot{Y}$ ;
- за счет забывания, слабые ассоциативные связи будут отброшены;
- в значительной степени упрощен процесс дообучения.

После обучения сети при ее использовании исходя из входных данных будет получено  $Y_s^\theta$ . Если выполняется условие отсутствия дубликатов ключей параметров ( $\forall k \in Y_s^\theta \exists k' : k_i = k_j = k', i \neq j$ ), то полученное  $Y_s^\theta$  можно принять за  $Y^\theta$  и переходить ко второму решению.

Тем не менее может возникнуть ситуация, когда выходные параметры имеют одинаковые ключи.

- В случае, если значения параметра по этому ключу числовые, для таких объектов следует применить агрегирующие функции (например группировку) таким образом, чтобы  $Y_s^\theta$  не имело совпадающих ключей параметров. Примером других функций могут служить вычисление среднего, максимум или минимум или любая другая зависящая от ключа и/или входных данных, заданная, согласно специфике конкретной предметной области.

- В случае, если значения параметра по этому ключу категориальные, эти значения следует:

- запомнить вместе и повторяющимся ключом;
- исключить из  $Y_s^\theta$  все параметры с этим ключом;
- добавить в  $Y_s^\theta$  значение вида  $(k, (v_1, v_2, \dots, v_n))$ , где  $k$  – повторяющийся ключ;  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  – множество категориальных значений повторяющегося ключа.

Таким образом, из  $X$  будет получено  $Y_s^\theta$ , а впоследствии  $Y^\theta$ , удовлетворяющее условиям поставленной задачи, что является выходом первого этапа решения.

## Литература

1. Recommender systems: an overview, research trends, and future directions / Singh P.K. [et al.] // International Journal of Business and Systems Research. 2021. Vol. 15, No. 1. P. 14–52.
2. Lipton Z.C., Berkowitz J., Elkan C. A critical review of recurrent neural networks for sequence learning // arXiv preprint arXiv:1506.00019. 2015.

**K.S. Nikolaev**

National Research University of Electronic Technology.

## RESEARCH AND DEVELOPMENT OF A MODEL AND OBTAINING ALGORITHM FOR A SEARCH SAMPLE FOR INTELLIGENT RECOMMENDER SYSTEMS

**Keywords:** *Search Sample Model, Search Sample Obtaining Algorithm, Intelligent Recommender Systems, LSTM.*



**Abstract.** *This paper presents a variant of the problem statement of research and development of a model and obtaining algorithm for a search sample for intelligent recommender systems. In addition, the article analyzes the first stage of solving this problem.*

**И.Н. Сеницын, В.И. Сеницын, Э.Р. Корепанов, Т.Д. Конашенкова**  
*Федеральный исследовательский центр  
«Информатика и управление» Российской академии наук*

УДК 621

## **ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПО БЕЙЕСОВОМУ КРИТЕРИЮ МЕТОДОМ ВЕЙВЛЕТ КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ**

*Ключевые слова: бейесов критерий; вейвлет каноническое разложение; вейвлет разложение; вейвлеты Хаара; инструментальное программное обеспечение; каноническое разложение; оптимальная система; стохастическая система; стохастический процесс.*

*Рассматривается опыт разработки методического обеспечения и инструментального программного обеспечения в части синтеза оптимального оператора линейной нестационарной стохастической системы по бейесовому критерию. В основу методического обеспечения положены вейвлет разложения Хаара.*

**1. Постановка задачи.** В работах [1–5] рассмотрены вопросы синтеза оптимального оператора линейной нестационарной стохастической системы по критерию минимума средней квадратической ошибки и сложно-статистическому критерию методом вейвлет канонических разложений (ВЛКР).

В работе [6] дано решение задачи синтеза оптимального оператора по бейесовому критерию (БК) методом ВЛКР для линейной нестационарной стохастической системы. Был рассмотрен случай линейной зависимости одномерного входного стохастического процесса (СтП) от случайных параметров и аддитивной нормально распределенной помехи. Одномерный выходной СтП представлял собой результат известного преобразования входного СтП и был задан в виде линейной комбинации случайных параметров.

В настоящей работе выходной СтП представляет собой сумму линейной комбинации случайных параметров и нормально

распределенной помехи. Подробно рассмотрен алгоритм построения вейвлет БК оптимального линейного оператора для этого случая. Этот алгоритм положен в основу инструментального программного обеспечения (ИПО) «БК-Синтез-ВЛ.1». Приведен иллюстративный пример.

**2. Синтез вейвлет БК оптимальной системы в случае линейной зависимости процессов от случайных параметров и аддитивной нормально распределенной помехи.** Пусть на вход системы поступает одномерный действительный СтП  $Z(\tau)$ , представляющий собой сумму линейной комбинации заданных случайных параметров  $U_r$  ( $r = \overline{1, N}$ ) и нормально распределенной случайной помехи  $X(\tau)$ :

$$Z(\tau) = \sum_{r=1}^N U_r \xi_r(\tau) + X(\tau). \quad (1)$$

На выходе системы требуется получить СтП  $W(t)$ , который является заданным преобразованием входного СтП  $Z(\tau)$ , наблюдаемого в интервале времени  $[t-T, t]$ , и содержит аддитивную нормально распределенную случайную помеху  $Y(t)$ :

$$W(t) = \sum_{r=1}^N U_r \zeta_r(t) + Y(t). \quad (2)$$

Здесь  $\xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau), \zeta_1(\tau), \dots, \zeta_N(\tau)$  – известные структурные функции;  $U_1, \dots, U_N$  – заданные случайные величины, не зависящие от случайных помех  $X(\tau)$  и  $Y(\tau)$ . Будем считать, что случайные функции  $X(\tau)$  и  $Y(\tau)$  имеют нулевые математические ожидания, составной вектор  $[X(\tau) \ Y(\tau)]^T$  нормально распределен.

Требуется найти систему с оператором  $A$ , которая каждому входному СтП  $Z(\tau)$ , наблюдаемому в интервале времени  $[t-T, t]$ , ставит в соответствие распределение СтП  $W^*(t) = AZ$  так, чтобы действительный выходной СтП  $W^*(t)$  возможно более точно воспроизводил бы требуемый выходной СтП  $W(t)$ . Рассмотрим решение этой задачи по байесовому критерию оптимальности:

$$M[l(W, W^*)] = \min, \quad (3)$$

где  $l(W, W^*)$  – некоторая известная функция потерь. СтП  $W^*(t)$  называют БК оптимальной оценкой СтП  $W(t)$ .

В [7] показано, что для решения этой задачи достаточно найти такой оператор системы  $A$ , который обеспечивает минимум условного математического ожидания функции потерь относительно наблюдаемого СтП  $Z(\tau)$ ,  $\tau \in [t-T, t]$ :

$$M[l(W, W^*) | Z] = \min. \quad (4)$$

В [7] эта задача решена методом канонических разложений (КР). Каноническое разложение вектора  $[X(\tau) \ Y(\tau)]^T$  представляет собой линейную комбинацию некоррелированных случайных величин (СВ)  $V_v$  с коэффициентами в виде детерминированных функций (координатных функций):

$$X(\tau) = \sum_v V_v x_v(\tau), \quad (5)$$

$$Y(\tau) = \sum_v V_v y_v(\tau). \quad (6)$$

Согласно [7],

$$V_v = \int_{t-T}^t a_v(\tau) X(\tau) d\tau + \int_{t-T}^t a_v(\tau) Y(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Тогда координатные функции вычисляются по формулам:

$$x_v(\tau) = \frac{1}{D_v} \int_{t-T}^t a_v(\theta) K_x(\tau, \theta) d\theta + \frac{1}{D_v} \int_{t-T}^t a_v(\theta) K_{xy}(\tau, \theta) d\theta, \quad (8)$$

$$y_v(\tau) = \frac{1}{D_v} \int_{t-T}^t a_v(\theta) K_{xy}(\theta, \tau) d\theta + \frac{1}{D_v} \int_{t-T}^t a_v(\theta) K_y(\theta, \tau) d\theta. \quad (9)$$

Здесь  $D_v = D[V_v]$ ,  $K_x(\tau, \theta) = M[X(\tau) \cdot X(\theta)]$ ,  $K_{xy}(\tau, \theta) = M[X(\tau) \cdot Y(\theta)]$ ,  $K_y(\tau, \theta) = M[Y(\tau) \cdot Y(\theta)]$ ;  $a_v(\tau)$  – заданная система детерминированных функций.

Рассмотрим СВ

$$Z_v = \int_{t-T}^t a_v(\tau) Z(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Из (1) следует, что

$$Z_v = \sum_{r=1}^N \alpha_{vr} U_r + V_v, \quad (11)$$

где введены обозначения

$$\alpha_{vr} = \int_{t-T}^t a_v(\tau) \xi_r(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Далее найдем сумму СВ  $Z_v$ , умноженных на координатные функции  $x_v(\tau)$ , и получим КР входного СтП  $Z(\tau)$  ( $\tau \in [t-T, t]$ ):

$$Z(\tau) = \sum_v Z_v x_v(\tau). \quad (13)$$

Эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между СтП  $Z(\tau)$  ( $\tau \in [t-T, t]$ ) и совокупностью СВ  $Z_v$ .

Для нахождения условного математического ожидания функции потерь относительно СтП  $Z(\tau)$  ( $\tau \in [t-T, t]$ ) вида (4) надо найти условную плотность вероятности требуемого выходного СтП  $W(t)$  относительно входного СтП  $Z(\tau)$ . Согласно (2), СтП  $W(t)$  зависит от заданных

случайных параметров  $U_r$  ( $r = \overline{1, N}$ ) и случайной помехи  $Y(t)$ . Из (6) и (11) следует, что

$$Y(t) = \sum_v V_v y_v(t) = \sum_v \left( Z_v - \sum_{r=1}^N \alpha_{vr} U_r \right) y_v(t) = \sum_v Z_v y_v(t) - \sum_{r=1}^N U_r \sum_v \alpha_{vr} y_v(t). \quad (14)$$

Отсюда

$$W(t) = \sum_{r=1}^N U_r \zeta_r(t) + \sum_v Z_v y_v(t) - \sum_{r=1}^N U_r \sum_v \alpha_{vr} y_v(t). \quad (15)$$

Последняя формула показывает, что СтП  $W(t)$  зависит от случайных параметров  $U_r$  ( $r = \overline{1, N}$ ) и совокупности СВ  $Z_v$ .

Для удобства введем векторную СВ  $U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_N]^T$ . Условный закон распределения векторной СВ  $U$  относительно СтП  $Z(\tau)$  тождественно совпадает с условным законом распределения СВ  $U$  относительно СВ  $Z_v$ . Найдем условную плотность вероятности  $f_1(u | z_1, z_2, \dots)$ :

$$f_1(u | z_1, z_2, \dots) = \frac{f(u) f_2(z_1, z_2, \dots | u)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) f_2(z_1, z_2, \dots | u) du}, \quad (16)$$

где  $f(u)$  – заданная безусловная (априорная) плотность вероятности случайного вектора  $U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_N]^T$ ,  $f_2(z_1, z_2, \dots | u)$  – условная плотность вероятности СВ  $Z_v$  относительно  $U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_N]^T$ .

По условию задачи случайный вектор  $[X(\tau) \ Y(\tau)]^T$  распределен нормально. СВ  $V_v$  представляют собой результат линейного преобразования вектора  $[X(\tau) \ Y(\tau)]^T$ , поэтому они распределены нормально и, следовательно, не только не коррелированы, но и независимы. Совместная плотность вероятности СВ  $V_v$  с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями  $D_v$  выражается формулой

$$f_V(v_1, v_2, \dots) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^L D_1 \cdot D_2 \cdot \dots}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_v \frac{v_v^2}{D_v} \right\}. \quad (17)$$

Если в формуле (11) заменить СВ  $U_1, \dots, U_N$  их возможными значениями  $u_1, \dots, u_N$ , то СВ  $Z_v$  будут линейными функциями случайных величин  $V_v$ , совместная плотность вероятности которых известна. Выразим СВ  $V_v$  через СВ  $Z_v$  и подставим в (17):

$$f_2(z_1, z_2, \dots | u) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^L D_1 \cdot D_2 \cdot \dots}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_v \frac{1}{D_v} \left( z_v - \sum_{r=1}^N \alpha_{vr} u_r \right)^2 \right\}. \quad (18)$$

Для удобства введем обозначение

$$\alpha_v(u) = \sum_{r=1}^N \alpha_{vr} u_r. \quad (19)$$

После подстановки (18) в (16) и упрощения полученного выражения получим формулу для вычисления апостериорной плотности вероятности  $f_1(u | z_1, z_2, \dots)$  случайного вектора  $U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_N]^T$  входного СтП  $Z(\tau)$  ( $\tau \in [t-T, t]$ ), которая определяется после наблюдения, когда становится известна реализация  $z(\tau)$  стохастического процесса  $Z(\tau)$ :

$$f_1(u | z_1, z_2, \dots) = \chi(z) f(u) \exp \left\{ \sum_v \frac{z_v \alpha_v(u)}{D_v} - \frac{1}{2} \sum_v \frac{\alpha_v^2(u)}{D_v} \right\}, \quad (20)$$

где

$$\chi(z) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp \left\{ \sum_v \frac{z_v \alpha_v(u)}{D_v} - \frac{1}{2} \sum_v \frac{\alpha_v^2(u)}{D_v} \right\} du \right]^{-1}. \quad (21)$$

Зная плотность вероятности  $f_1(u | z_1, z_2, \dots)$ , можно вычислить апостериорное математическое ожидание функции потерь  $l(W, W^*)$ . Эту величину часто называют условным риском и обозначают  $\rho(Z, W^*)$ :

$$\rho(Z, W^*) = M [l(W, W^*) | Z] = \chi(z) \int_{-\infty}^{+\infty} l(W, W^*) f(u) \exp \left\{ \sum_v \frac{z_v \alpha_v(u)}{D_v} - \frac{1}{2} \sum_v \frac{\alpha_v^2(u)}{D_v} \right\} du. \quad (22)$$

Для решения задачи необходимо определить оптимальный выходной СтП  $W^*(t)$  при каждом данном значении  $t$  из условия минимума интеграла в (22). Рассмотрим этот интеграл как функцию величины  $P = W^*(t)$  при фиксированных значениях параметров

$$\eta_0 = \eta_0(z_1, z_2, \dots) = \sum_v z_v y_v(t), \eta_r = \eta_r(z_1, z_2, \dots) = \sum_v \frac{\alpha_{vr} z_v}{D_v} \quad (r = \overline{1, N}) \text{ и времени } t:$$

$$I(P, \eta_1, \dots, \eta_N, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} l \left( \sum_{r=1}^N u_r (\zeta_r(t) - b_{r0}) + \eta_0, P \right) f(u_1, \dots, u_N) \cdot \exp \left\{ \sum_{r=1}^N \eta_r u_r - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^N b_{pq} u_p u_q \right\} du_1 \dots du_N, \quad (23)$$

где

$$b_{p0} = \sum_v \alpha_{vp} y_v(t), b_{pq} = \sum_v \frac{1}{D_v} \alpha_{vp} \alpha_{vq} \quad (q, p = \overline{1, N}). \quad (24)$$

Значение параметра  $P = P_0(t, \eta_1, \dots, \eta_N)$ , при котором интеграл (23) достигает наименьшего значения, определяет оптимальный оператор по байесовому критерию качества (4). Заменяя в выражениях для  $\eta_r$  ( $r = \overline{0, N}$ ) и  $P_0(t, \eta_0, \dots, \eta_N)$  переменные  $\eta_0, \dots, \eta_N$  и  $z_1, z_2, \dots$ , соответственно, случайными величинами  $H_0, \dots, H_N$  и  $Z_1, Z_2, \dots$ , получаем вид оператора оптимальной системы:

$$W^*(t) = AZ = P_0(t, H_0, \dots, H_N),$$

$$H_0 = \sum_v Z_v y_v(t), H_r = H_r(Z_1, Z_2, \dots) = \sum_v \frac{\alpha_{vr} Z_v}{D_v} (r = \overline{1, N}). \quad (25)$$

Для оценки качества оптимального оператора необходимо вычислить средний риск [7]:

$$R(A) = M[\rho(Z, W^*)] = M[l(W, W^*)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} l(W, W^*) f_2(z_1, z_2, \dots | u) f(u) dz_1 dz_2 \dots du. \quad (26)$$

Материал, изложенный в разделе 2, является вспомогательным для вывода основных результатов, полученных в разделах 3 и 4.

**3. Метод вейвлет канонических разложений.** Построим оператор оптимальной линейной системы методом вейвлет канонических разложений (ВЛКР) [8; 9] на основе ортонормированного базиса вейвлетов Хаара:

$$\{\varphi_{00}(\bar{\tau}), \psi_{jk}(\bar{\tau})\}, \quad (27)$$

где  $\varphi_{00}(\bar{\tau}) = \varphi(\bar{\tau}) = \begin{cases} 1, \bar{\tau} \in [0, 1), \\ 0, \bar{\tau} \notin [0, 1) \end{cases}$  – масштабирующая функция,

$$\psi_{00}(\bar{\tau}) = \psi(\bar{\tau}) = \begin{cases} 1, \bar{\tau} \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, \bar{\tau} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ 0, \bar{\tau} \notin [0, 1) \end{cases} \text{ – материнский вейвлет,}$$

$\psi_{jk}(\bar{\tau}) = \sqrt{2^j} \psi(2^j \bar{\tau} - k)$  – вейвлеты уровня  $j$  для  $j = 1, 2, \dots, J; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1; J$  – максимальный уровень разрешения, который выбирается с учетом того, что точность аппроксимации любой функции  $f(\bar{\tau}) \in L^2[0, 1]$  конечной линейной комбинацией вейвлетов Хаара равна  $2^{-\frac{j}{2}}$  [10].

Далее для удобства представим одномерный вейвлет базис (27) в виде:

$$g_1(\bar{\tau}) = \varphi_{00}(\bar{\tau}), g_2(\bar{\tau}) = \psi_{00}(\bar{\tau}),$$

$$g_\nu(\bar{\tau}) = \psi_{jk}(\bar{\tau}), j = 1, 2, \dots, J; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1; \nu = 2^j + k + 1; \nu = \overline{3, L}. \quad (28)$$

Для построения ВЛКР случайного вектора  $[X(\tau) \ Y(\tau)]^T$  для  $\tau \in [t-T, t]$  на основе базиса Хаара необходимо перейти к переменной  $\bar{\tau} \in [0, 1], \bar{\tau} = \frac{\tau - (t-T)}{T}$ . Пусть  $K_X(\tau_1, \tau_2) \in L^2([t-T, t] \times [t-T, t]),$   
 $K_{XY}(\tau_1, \tau_2) \in L^2([t-T, t] \times [t-T, t]), \quad K_Y(\tau_1, \tau_2) \in L^2([t-T, t] \times [t-T, t]).$  Тогда  
 $K_X(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \in L^2([0, 1] \times [0, 1]), \quad K_{XY}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \in L^2([0, 1] \times [0, 1]),$

$K_Y(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \in L^2([0,1] \times [0,1])$ . Для представления заданных ковариационных функций в виде двумерного вейвлет разложения (ВЛР) надо задать двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (27) в случае, когда масштабирование по обеим переменным происходит одинаково:

$$\begin{aligned}\Phi^A(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) &= \varphi_{00}(\bar{\tau}_1)\varphi_{00}(\bar{\tau}_2), \quad \Psi^H(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = \varphi_{00}(\bar{\tau}_1)\psi_{00}(\bar{\tau}_2), \\ \Psi^B(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) &= \psi_{00}(\bar{\tau}_1)\varphi_{00}(\bar{\tau}_2), \quad \Psi_{jkn}^D(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = \psi_{jk}(\bar{\tau}_1)\psi_{jn}(\bar{\tau}_2),\end{aligned}\quad (29)$$

где  $j=1, 2, \dots, J; k, n=0, 1, \dots, 2^j-1$ .

Тогда двумерное ВЛР заданных ковариационных функций имеет вид:

$$K_X(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = a^x \Phi^A(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) + h^x \Psi^H(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) + b^x \Psi^B(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} d_{jkn}^x \Psi_{jkn}^D(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2), \quad (30)$$

$$\text{где } a^x = \int_0^1 \int_0^1 K_X(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Phi^A(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2, \quad h^x = \int_0^1 \int_0^1 K_X(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Psi^H(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2,$$

$$b^x = \int_0^1 \int_0^1 K_X(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Psi^B(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2, \quad d_{jkn}^x = \int_0^1 \int_0^1 K_X(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Psi_{jkn}^D(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2;$$

$$\begin{aligned}K_{XY}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) &= \\ &= a^{xy} \Phi^A(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) + h^{xy} \Psi^H(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) + b^{xy} \Psi^B(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} d_{jkn}^{xy} \Psi_{jkn}^D(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2),\end{aligned}\quad (31)$$

$$\text{где } a^{xy} = \int_0^1 \int_0^1 K_{XY}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Phi^A(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2, \quad h^{xy} = \int_0^1 \int_0^1 K_{XY}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Psi^H(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2,$$

$$b^{xy} = \int_0^1 \int_0^1 K_{XY}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Psi^B(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2, \quad d_{jkn}^{xy} = \int_0^1 \int_0^1 K_{XY}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Psi_{jkn}^D(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2;$$

$$K_Y(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = a^y \Phi^A(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) + h^y \Psi^H(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) + b^y \Psi^B(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} d_{jkn}^y \Psi_{jkn}^D(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2), \quad (32)$$

$$\text{где } a^y = \int_0^1 \int_0^1 K_Y(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Phi^A(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2, \quad h^y = \int_0^1 \int_0^1 K_Y(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Psi^H(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2,$$

$$b^y = \int_0^1 \int_0^1 K_Y(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Psi^B(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2, \quad d_{jkn}^y = \int_0^1 \int_0^1 K_Y(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \Psi_{jkn}^D(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2.$$

При переходе к переменной  $\bar{\tau} \in [0,1], \bar{\tau} = \frac{\tau - (t-T)}{T}$  для  $\tau = \tau(\bar{\tau}) = T\bar{\tau} + (t-T)$  выражение (1) примет вид:

$$Z(\tau) = Z(\tau(\bar{\tau})) = Z(\bar{\tau}) = \sum_{r=1}^N U_r \xi_r(\bar{\tau}) + X(\bar{\tau}). \quad (33)$$

После перехода к переменной  $\bar{\tau}$

$$V_v = T \cdot \bar{V}_v; \quad \bar{V}_v = \int_0^1 a_v(\bar{\tau}) X(\bar{\tau}) d\bar{\tau} + \int_0^1 a_v(\bar{\tau}) Y(\bar{\tau}) d\bar{\tau}, \quad D_v = T^2 \bar{D}_v, \quad \bar{D}_v = D[\bar{V}_v]. \quad (34)$$

Согласно [8; 9], функции  $a_\nu(\bar{\tau})$  выразим через базисные вейвлет функции вида (28):

$$a_1(\bar{\tau}) = g_1(\bar{\tau}), a_\nu(\bar{\tau}) = \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} c_{\nu\lambda} g_\lambda(\bar{\tau}) + g_\nu(\bar{\tau}) (\nu = \overline{2, L}). \quad (35)$$

Далее введем обозначения:

$$\bar{x}_\nu(\bar{\tau}) = \frac{1}{D_\nu} \int_0^1 a_\nu(\bar{\theta}) K_X(\bar{\tau}, \bar{\theta}) d\bar{\theta} + \frac{1}{D_\nu} \int_0^1 a_\nu(\bar{\theta}) K_{XY}(\bar{\tau}, \bar{\theta}) d\bar{\theta}, \quad (36)$$

$$\bar{y}_\nu(\bar{\tau}) = \frac{1}{D_\nu} \int_0^1 a_\nu^x(\bar{\theta}) K_{XY}(\bar{\theta}, \bar{\tau}) d\bar{\theta} + \frac{1}{D_\nu} \int_0^1 a_\nu^y(\bar{\theta}) K_Y(\bar{\tau}, \bar{\theta}) d\bar{\theta}. \quad (37)$$

Отсюда

$$x_\nu(\tau) = x_\nu(\tau(\bar{\tau})) = \frac{1}{T} \bar{x}_\nu(\bar{\tau}), \quad y_\nu(\tau) = y_\nu(\tau(\bar{\tau})) = \frac{1}{T} \bar{y}_\nu(\bar{\tau}) \quad (38)$$

$$X(\tau(\bar{\tau})) = \sum_{\nu=1}^L V_\nu x_\nu(\tau(\bar{\tau})) = \sum_{\nu=1}^L T \bar{V}_\nu \frac{1}{T} \bar{x}_\nu(\bar{\tau}) = \sum_{\nu=1}^L \bar{V}_\nu \bar{x}_\nu(\bar{\tau}), \quad (39)$$

$$Y(\tau(\bar{\tau})) = \sum_{\nu=1}^L V_\nu y_\nu(\tau(\bar{\tau})) = \sum_{\nu=1}^L T \bar{V}_\nu \frac{1}{T} \bar{y}_\nu(\bar{\tau}) = \sum_{\nu=1}^L \bar{V}_\nu \bar{y}_\nu(\bar{\tau}). \quad (40)$$

Здесь СВ  $\bar{V}_\nu$  имеют нулевые математические ожидания и дисперсии  $\bar{D}_\nu$ , координатные функции  $\bar{x}_\nu(\bar{\tau})$ ,  $\bar{y}_\nu(\bar{\tau})$  определяются последовательно формулами [8; 9]:

$$\bar{x}_1(\bar{\tau}) = \frac{1}{D_1} h_1^x(\bar{\tau}); \bar{x}_\nu(\bar{\tau}) = \frac{1}{D_\nu} \left( \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} d_{\nu\lambda} h_\lambda^x(\bar{\tau}) + h_\nu^x(\bar{\tau}) \right); \quad (41)$$

$$\bar{y}_1(\bar{\tau}) = \frac{1}{D_1} h_1^y(\bar{\tau}); \bar{y}_\nu(\bar{\tau}) = \frac{1}{D_\nu} \left( \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} d_{\nu\lambda} h_\lambda^y(\bar{\tau}) + h_\nu^y(\bar{\tau}) \right); \quad (42)$$

$$d_{\nu\lambda} = c_{\nu\lambda} + \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} d_{\mu\lambda} (\lambda = \overline{1, \nu-2}); d_{\nu, \nu-1} = c_{\nu, \nu-1}; \nu = \overline{2, L}. \quad (43)$$

Здесь

$$c_{\nu 1} = -\frac{k_{\nu 1}}{D_1} (\nu = \overline{2, L}); c_{\nu \mu} = -\frac{1}{D_\mu} \left( k_{\nu \mu} - \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} \bar{D}_\lambda c_{\mu\lambda} c_{\nu\lambda} \right) (\mu = \overline{2, \nu-1}; \nu = \overline{3, L}); \quad (44)$$

$$\bar{D}_1 = k_{11}; \bar{D}_\nu = k_{\nu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \bar{D}_\lambda |c_{\nu\lambda}|^2 (\nu = \overline{2, L}).$$

Параметры  $k_{\nu\mu}$  выражены через коэффициенты двумерного ВЛР ковариационных функций  $K_X(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ ,  $K_{XY}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ ,  $K_Y(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ :

$$k_{11} = a^x + 2a^{xy} + a^y, k_{12} = h^x + 2h^{xy} + h^y, k_{21} = b^x + 2b^{xy} + b^y, k_{22} = d_{000}^x + 2d_{000}^{xy} + d_{000}^y, \\ k_{\nu\mu} = d_{jkn}^x + 2d_{jkn}^{xy} + d_{jkn}^y (\nu = 2^j + k + 1; \mu = 2^j + n + 1; j = \overline{1, J}; k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1). \quad (45)$$

Остальные  $k_{\nu\mu} = 0$ .

Вспомогательные функции  $h_\nu^x(\bar{\tau})$ ,  $h_\nu^y(\bar{\tau})$  выражены через базисные вейвлет функции (27) и коэффициенты ВЛР двумерного ВЛР ковариационных функций  $K_X(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ ,  $K_{XY}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ ,  $K_Y(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ :



$$\begin{aligned}
h_1^x(\bar{\tau}) &= (a^x + a^{xy})\varphi_{00}(\bar{\tau}) + (b^x + b^{xy})\psi_{00}(\bar{\tau}), \\
h_1^y(\bar{\tau}) &= (a^{xy} + a^y)\varphi_{00}(\bar{\tau}) + (b^{xy} + b^y)\psi_{00}(\bar{\tau}), \\
h_1^x(\bar{\tau}) &= (h^x + h^{xy})\varphi_{00}(\bar{\tau}) + (d_{000}^x + d_{000}^{xy})\psi_{00}(\bar{\tau}), \\
h_1^y(\bar{\tau}) &= (h^{xy} + h^y)\varphi_{00}(\bar{\tau}) + (d_{000}^{xy} + d_{000}^y)\psi_{00}(\bar{\tau}), \\
h_v^x(\bar{\tau}) &= \sum_{k=0}^{2^j-1} (d_{jkn}^x + d_{jkn}^{xy})\psi_{jk}(\bar{\tau}) \quad (v = \overline{3, L}; v = 2^j + n + 1; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \\
h_v^y(\bar{\tau}) &= \sum_{k=0}^{2^j-1} (d_{jkn}^{xy} + d_{jkn}^y)\psi_{jk}(\bar{\tau}) \quad (v = \overline{3, L}; v = 2^j + n + 1; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1).
\end{aligned} \tag{46}$$

После перехода к переменной  $\bar{\tau}$ :

$$Z_v = T\bar{Z}_v, \quad \bar{Z}_v = \sum_{r=1}^N \bar{\alpha}_{vr} U_r + \bar{V}_v, \tag{47}$$

$$\alpha_{vr} = T\bar{\alpha}_{vr}, \quad \bar{\alpha}_{vr} = \int_0^1 a_v(\bar{\tau}) \xi_r(\bar{\tau}) d\bar{\tau}, \tag{48}$$

Будем считать, что функции  $\xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau) \in L^2[t-T, t]$ , тогда  $\xi_1(\bar{\tau}), \dots, \xi_N(\bar{\tau}) \in L^2[0, 1]$  и имеют ВЛР:

$$\begin{aligned}
\xi_r(\bar{\tau}) &= a_r^\xi \varphi_{00}(\bar{\tau}) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{rjk}^\xi \psi_{jk}(\bar{\tau}) \quad (r = 1, \dots, N), \\
a_r^\xi &= \int_0^1 \xi_r(\bar{\tau}) \varphi_{00}(\bar{\tau}) d\bar{\tau}, \quad d_{rjk}^\xi = \int_0^1 \xi_r(\bar{\tau}) \psi_{jk}(\bar{\tau}) d\bar{\tau},
\end{aligned} \tag{49}$$

или в обозначениях (27):

$$\begin{aligned}
\xi_r(\bar{\tau}) &= c_{r1}^\xi g_1(\bar{\tau}) + \sum_{\substack{v=2 \\ (v=2^j+k+1; j=0, J; k=0, 1, \dots, 2^j-1)}}^L c_{rv}^\xi g_v(\bar{\tau}) \quad (r = 1, \dots, N), \\
c_{r1}^\xi &= a_r^\xi, \quad c_{rv}^\xi = d_{rjk}^\xi.
\end{aligned} \tag{50}$$

Отсюда

$$\bar{\alpha}_{1r} = c_{r1}^\xi; \quad \bar{\alpha}_{vr} = \sum_{\lambda=1}^{v-1} c_{v\lambda}^\xi c_{r\lambda}^\xi + c_{rv}^\xi \quad (v = \overline{2, L}). \tag{51}$$

Далее найдем сумму СВ  $Z_v$ , умноженных на координатные функции  $x_v(\tau)$ :

$$\sum_{v=1}^L Z_v x_v(\tau) = \sum_{v=1}^L (T\bar{Z}_v) \left( \frac{1}{T} \bar{x}_v(\bar{\tau}) \right) = \sum_{v=1}^L \bar{Z}_v \bar{x}_v(\bar{\tau}). \tag{52}$$

В итоге получили ВЛКР входного СтП  $Z(\tau)$  ( $\tau \in [t-T, t]$ ) по координатным функциям  $x_v(\bar{\tau})$ :

$$Z(\tau) = Z(\tau(\bar{\tau})) = Z(\bar{\tau}) = \sum_{v=1}^L \bar{Z}_v \bar{x}_v(\bar{\tau}). \tag{53}$$

Тогда

$$\eta_0 = \sum_{v=1}^L z_v y_v(t) = \sum_{v=1}^L (T\bar{z}_v) \left( \frac{1}{T} \bar{y}_v(t) \right) = \sum_{v=1}^L \bar{z}_v \bar{y}_v(t),$$

$$\eta_r = \sum_{v=1}^L \frac{\alpha_{vr} z_v}{D_v} = \sum_{v=1}^L \frac{(T \bar{\alpha}_{vr})(T \bar{z}_v)}{T^2 \bar{D}_v} = \sum_{v=1}^L \frac{\bar{\alpha}_{vr} \bar{z}_v}{\bar{D}_v} (r = \overline{1, N}), \quad (54)$$

$$b_{p0} = \sum_{v=1}^L \alpha_{vp} y_v(t) = \sum_{v=1}^L (T \bar{\alpha}_{vp}) \left( \frac{1}{T} \bar{y}_v(t) \right) = \sum_{v=1}^L \bar{\alpha}_{vp} \bar{y}_v(t),$$

$$b_{pq} = \sum_{v=1}^L \frac{1}{D_v} \alpha_{vp} \alpha_{vq} = \sum_{v=1}^L \frac{1}{T^2 \bar{D}_v} (T \bar{\alpha}_{vp}) (T \bar{\alpha}_{vq}) = \sum_{v=1}^L \frac{1}{\bar{D}_v} \bar{\alpha}_{vp} \bar{\alpha}_{vq} (p, q = \overline{1, N}). \quad (55)$$

В итоге выражение  $P_0(t, \eta_0, \dots, \eta_N)$  зависит от фиксированных значений  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_L$  случайных величин  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_L$ .

Таким образом, имеем следующий базовый алгоритм построения оператора оптимальной линейной системы методом вейвлет канонических разложений на основе ортонормированного базиса вейвлетов Хаара.

#### Алгоритм

1. Задание базисов вейвлетов Хаара вида (27) – (29).
2. Одномерное ВЛР структурных функций  $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)$  в виде (49) или (50), двумерное ВЛР ковариационных функций  $K_X(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ ,  $K_{XY}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ ,  $K_Y(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$  в виде (30) – (32).
3. Задание функций  $a_v(\bar{\tau}) \left( \bar{\tau} = \frac{\tau - (t-T)}{T} \right)$  в виде (35).
4. Вычисление дисперсий  $D_v = T \bar{D}_v$  независимых СВ  $V_v = T \bar{V}_v$  вейвлет канонического разложения вектора  $[X(\tau) \ Y(\tau)]^T$  по формулам (44).
5. Вычисление  $\bar{\alpha}_{vr}$  по формулам (51) и  $\alpha_{vr} = T \bar{\alpha}_{vr}$ .
6. Вычисление  $b_{pq}$  по формулам (55).
7. Определение параметра  $P = P_0(t, \eta_0, \dots, \eta_N)$ , при котором интеграл (23) достигает наименьшего значения.
8. Построение БК оптимальной оценки  $W^*(t) = AZ = P_0(t, H_0, \dots, H_N)$  по формуле (25).

**4. Синтез оптимальной линейной системы по критерию минимума вероятности выхода ошибки из заданного интервала для нормально распределенных случайных параметров.** Для критерия минимума вероятности выхода ошибки из заданного интервала  $(-w(t), w(t))$  функция потерь имеет вид:

$$l(W, W^*) = \begin{cases} 1 & \text{при } |W^* - W| \geq w(t), \\ 0 & \text{при } |W^* - W| < w(t). \end{cases} \quad (56)$$

В этом случае условный риск  $\rho(Z, W^*)$  равен вероятности выхода ошибки системы из заданного интервала:

$$\rho(Z, W^*) = M[l(W, W^*) | Z] = P(|W^* - W| \geq w(t)) = 1 - P(|W^* - W| < w(t)). \quad (57)$$

Часто в практических задачах случайные параметры  $U_r (r = \overline{1, N})$  в (1) и (2) имеют нормальное распределение с нулевыми математическими ожиданиями, поэтому в качестве примера, рассмотрим этот частный случай. Тогда априорная плотность вероятности  $f(u) = f(u_1, \dots, u_N)$  случайного вектора  $U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_N]^T$  имеет вид:

$$f(u_1, \dots, u_N) = \left[ (2\pi)^N |K| \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^N c_{pq} u_p u_q \right\}, \quad (58)$$

где  $K$  – ковариационная матрица случайного вектора  $U$ ,  $c_{pq} (p, q = \overline{1, N})$  – элементы матрицы  $K^{-1}$ .

Для синтеза оптимальной линейной системы по критерию минимума вероятности выхода ошибки из заданного интервала необходимо найти минимум интеграла:

$$I(P, \eta_1, \dots, \eta_N, t) = \left[ (2\pi)^N |K| \right]^{-\frac{1}{2}} \iint_{\left| \sum_{r=1}^N u_r (\zeta_r(t) - b_{r0}) + \eta_0 - P \right| \geq w(t)} \exp \left\{ \sum_{r=1}^N \eta_r u_r - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^N (c_{pq} + b_{pq}) u_p u_q \right\} du_1 \dots du_N. \quad (59)$$

В [7] показано, что величина  $P_0(t, \eta_0, \dots, \eta_N)$ , при которой интеграл (59) принимает наименьшее значение, имеет вид:

$$P_0 = \sum_{r=1}^N \lambda_r(t) (\zeta_r(t) - b_{r0}) + \eta_0. \quad (60)$$

Для определения параметров  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)$  необходимо решить систему уравнений:

$$\sum_{p=1}^N \lambda_p(t) (c_{pq} + b_{pq}) = \eta_q(t) (q = \overline{1, N}). \quad (61)$$

В результате оценка выходного СтП системы имеет вид:

$$W^*(t) = \sum_{r=1}^N \Lambda_r(t) (\zeta_r(t) - b_{r0}) + H_0, \quad (62)$$

где параметры  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)$  заменены соответствующими случайными величинами  $\Lambda_1(t), \Lambda_2(t), \dots, \Lambda_N(t)$ .

Средний риск в этом случае равен:

$$\begin{aligned}
R(A) &= \left[ (2\pi)^{N+L} \cdot D_1 \cdot \dots \cdot D_L \cdot |K| \right]^{-\frac{1}{2}} \iint \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{v=1}^L \frac{z_v^2}{D_v} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{v=1}^L \sum_{r=1}^N \frac{\alpha_{vr}}{D_v} z_v u_r - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^N (c_{pq} + b_{pq}) u_p u_q \right\} du_1 \dots du_N dz_1 \dots dz_L = \\
&= 1 - \left[ (2\pi)^{N+L} \cdot D_1 \cdot \dots \cdot D_L \cdot |K| \right]^{-\frac{1}{2}} \iint \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{v=1}^L \frac{z_v^2}{D_v} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{v=1}^L \sum_{r=1}^N \frac{\alpha_{vr}}{D_v} z_v u_r - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^N (c_{pq} + b_{pq}) u_p u_q \right\} du_1 \dots du_N dz_1 \dots dz_L.
\end{aligned} \tag{63}$$

**5. Инструментальное программное обеспечение «БК-Синтез-ВЛ.1».** На основе методических результатов разделов 3,4 разработано ИПО «БК-Синтез-ВЛ.1» в среде MATLAB, которое реализует алгоритм синтеза оптимальной линейной системы по критерию минимума вероятности выхода ошибки из заданного интервала для нормально распределенных случайных параметров с нулевыми математическими ожиданиями и осуществляет:

1) ввод исходных данных в виде набора подпрограмм-функций, задающих структурные функции  $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t), \zeta_1(t), \dots, \zeta_N(t)$ , ковариационные функции  $K_X(t_1, t_2)$ ,  $K_{XY}(t_1, t_2)$ ,  $K_Y(t_1, t_2)$ ;

2) ввод числовых исходных данных: ковариационной матрицы  $K$  случайного вектора  $U = [U_1 \ U_2 \dots \ U_N]^T$ , промежутка наблюдения СтП  $Z(t)$  в виде отрезка  $[T_0, T_K]$ ; максимального уровня вейвлет разложения  $J$ ;

3) одномерное вейвлет разложение структурных функций  $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)$  по вейвлет базису Хаара с применением стандартной функции `wavedec`;

4) двумерное вейвлет разложение ковариационных функций  $K_X(t_1, t_2)$ ,  $K_{XY}(t_1, t_2)$ ,  $K_Y(t_1, t_2)$  по двумерному базису Хаара с применением стандартной функции `wavedec2`;

5) автоматическое составление и решение системы линейных алгебраических уравнений (61) для нахождения значений функций  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)$  в момент времени  $T_K$ ;

6) вычисление оценки выходного СтП системы по формуле (62);

7) вывод результатов в числовом и графическом видах.

Исходные данные для ИПО задаются в числовом виде:

– начальный момент времени наблюдения сигнала  $T_0 = T_0$ ;

– конечный момент времени наблюдения сигнала  $T_K = T_K$ ;

– максимальный уровень вейвлет разложения  $J$ ;

– количество базисных вейвлет функций  $N = 2 \cdot 2^J$ ;  
 – ковариационная матрица  $K$  случайного вектора  $U = [U_1 \ U_2 \dots \ U_N]^T$ .

Подпрограммы-функции имеют синтаксис вызова: covx = fcovx(t1, t2); covxu = fcovxu(t1, t2); covy = fcovy(t1, t2); ksii = fksii(t) (i = 1, ..., N).

Все вычисления осуществляются в подпрограмме-функции BKSynthesWL1, которая имеет синтаксис вызова:

$$[Wot, deltaW] = BKSynthesWL1(J, N, T0, TK, K).$$

Выходные данные выдаются в матричном виде:

a) WOt – вектор значений БК оптимальной оценки сигнала  $W(t)$  в точках  $t_j = T_0 + (j-1) \cdot \frac{T_K - T_0}{N}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ );

b) deltaW – вектор значений модуля ошибки оценки сигнала  $W(t)$  в точках  $t_j = T_0 + (j-1) \cdot \frac{T_K - T_0}{N}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ).

При вычислениях используется подпрограмма-функция KRWL1 для построения ВЛКР одномерного процесса  $Z(\tau)$  и подпрограмма-функция KRWL2 для построения ВЛКР двумерного процесса  $[X(\tau) \ Y(\tau)]^T$  на основе двумерного вейвлет разложения ковариационных функций  $K_X(t_1, t_2)$ ,  $K_{XY}(t_1, t_2)$ ,  $K_Y(t_1, t_2)$  по вейвлетам Хаара [8; 9].

**6. Пример.** Найти оптимальную систему для воспроизведения полезного сигнала

$$W(t) = U_1 \sin(\omega t + \theta) + U_2 + Y(t) \quad (64)$$

по результатам наблюдения

$$Z(\tau) = U_1 \sin(\omega \tau + \theta) + U_2 + X(\tau). \quad (65)$$

Наблюдение производится в течение интервала времени длительностью  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , предшествующему моменту времени  $t$ :  $\tau \in [t - T, t]$ . Случайные параметры  $U_1, U_2$  не зависят от случайных помех  $X(\tau)$  и  $Y(\tau)$ . Случайная помеха  $X(\tau)$  имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию  $K_X(\tau_1, \tau_2) = D_X \cos \omega_X (\tau_2 - \tau_1)$ . Случайная помеха  $Y(\tau)$  имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию  $K_Y(\tau_1, \tau_2) = D_Y \cos \omega_Y (\tau_2 - \tau_1)$ . Рассмотрим несколько вариантов:

– вариант 1:  $X(\tau) \neq 0$ ,  $Y(\tau) = 0$ ;

– вариант 2:  $X(\tau) = 0$ ,  $Y(\tau) \neq 0$ ;

– вариант 3: случайные помехи  $X(\tau)$  и  $Y(\tau)$  независимы, и  $K_{XY}(\tau_1, \tau_2) = 0$ ;

– вариант 4: помеха  $Y(\tau)$  – поляризованная, и  $Y(t) = k \cdot X(t)$ .

Случайные параметры  $U_1, U_2$  имеют нормальное распределение с нулевыми математическими ожиданиями:

$$f(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^2 c_{pq} u_p u_q\right\}, \quad (66)$$

где  $c_{pq}$  – элементы матрицы  $K^{-1}$ , обратной к ковариационной матрице  $K$  случайного вектора  $U = [U_1 \ U_2]^T$ .

При вычислительных экспериментах использовались исходные данные:

- 1)  $t \in [2\pi; 2\pi + 9], \omega_x = 1, \omega_y = 1, \theta = \pi / 4, D_x = 1, D_y = 1, k = 3$ ;
- 2) ковариационная матрица случайного вектора  $U = [U_1 \ U_2]^T$ :

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- 3) согласно (64), (65) структурные функции имеют вид:

$$\xi_1(\tau) = \sin(\omega\tau + \theta), \xi_2(\tau) = 1; \zeta_1(t) = \sin(\omega t + \theta), \zeta_2(t) = 1.$$

Вычисления осуществлялись для ортонормированного базиса Хаара для  $J = 2, L = 8$ .

Таблица 1

**Значения сигнала, оценки сигнала, модуля ошибки для варианта 1**

| t                    | $2\pi$ | $2\pi + 1$ | $2\pi + 2$ | $2\pi + 4$ | $2\pi + 6$ | $2\pi + 8$ | $2\pi + 9$ |
|----------------------|--------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| сигнал $W$           | 2,2141 | 1,7160     | -0,9733    | -0,1395    | -0,4917    | 1,1385     | 0,5099     |
| оценка сигнала $W^*$ | 2,1109 | 1,7421     | -0,9393    | -0,1249    | -0,4674    | 1,1466     | 0,5416     |
| $ W^* - W $          | 0,1039 | 0,0261     | 0,0340     | 0,0146     | 0,0243     | 0,0082     | 0,0317     |

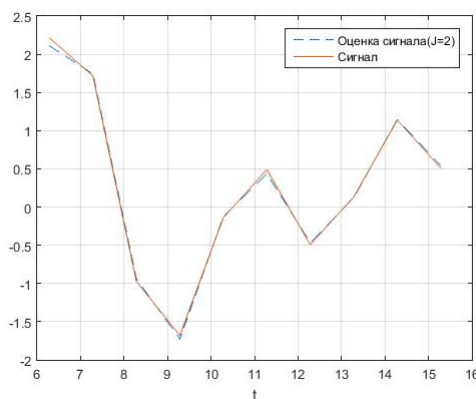


Рис. 1. Графики сигнала и оценки сигнала для варианта 1

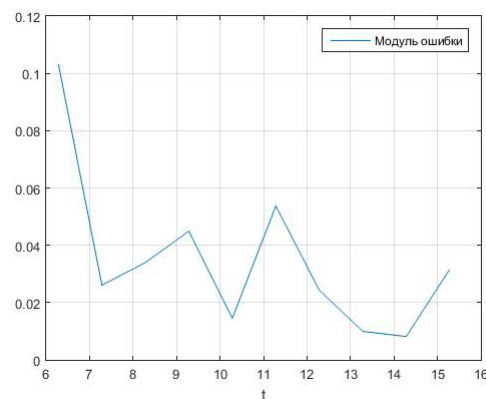


Рис. 2. График модуля ошибки воспроизведения сигнала для варианта 1

На рисунках 1, 2 изображены графики сигнала и оценки сигнала и график модуля ошибки для варианта 1. В таблице 1 приведены значения сигнала, оценки сигнала, модуля ошибки воспроизведения сигнала для варианта 1. Для варианта 1 модуль ошибки воспроизведения сигнала не превосходит 0,1039.

Таблица 2

Значения сигнала, оценки сигнала, модуля ошибки для варианта 2

| t                    | $2\pi$  | $2\pi+1$ | $2\pi+2$ | $2\pi+4$ | $2\pi+6$ | $2\pi+8$ | $2\pi+9$ |
|----------------------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| сигнал $W$           | -0,9002 | 1,1623   | 1,2324   | 1,9976   | -1,1828  | 1,1383   | -1,9402  |
| оценка сигнала $W^*$ | -0,7063 | 0,9612   | 1,3954   | 2,0293   | -1,2335  | 1,1803   | -1,7062  |
| $ W^* - W $          | 0,1939  | 0,2011   | 0,1631   | 0,0318   | 0,0507   | 0,0420   | 0,2340   |

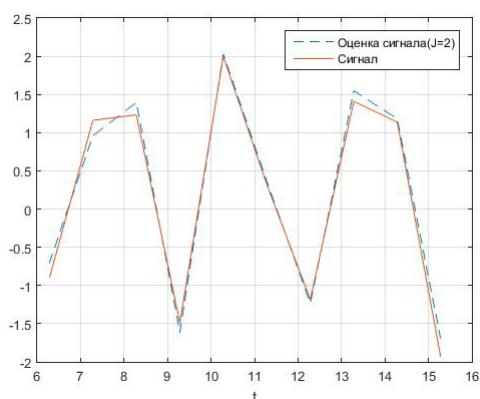


Рис. 3. Графики сигнала и оценки сигнала для варианта 2

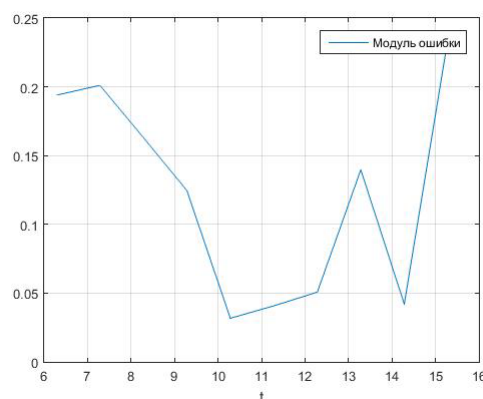


Рис. 4. График модуля ошибки воспроизведения сигнала для варианта 2

На рисунках 3, 4 изображены графики сигнала и оценки сигнала и график модуля ошибки для варианта 2. В таблице 2 приведены значения сигнала, оценки сигнала, модуля ошибки воспроизведения сигнала для варианта 2. Для варианта 2 модуль ошибки воспроизведения сигнала не превосходит 0,2340.

На рисунках 5, 6 изображены графики сигнала и оценки сигнала и график модуля ошибки для варианта 3. В таблице 3 приведены значения сигнала, оценки сигнала, модуля ошибки воспроизведения сигнала для варианта 3. Для варианта 3 модуль ошибки воспроизведения сигнала не превосходит 0,1079.

Таблица 3

Значения сигнала, оценки сигнала, модуля ошибки для варианта 3

| t                    | $2\pi$  | $2\pi+1$ | $2\pi+2$ | $2\pi+4$ | $2\pi+6$ | $2\pi+8$ | $2\pi+9$ |
|----------------------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| сигнал $W$           | -0,2938 | -2,9289  | 1,8393   | -0,2848  | -0,9893  | -0,3575  | -0,1487  |
| оценка сигнала $W^*$ | -0,2841 | -2,8413  | 1,9219   | -0,3928  | -1,0558  | -0,4121  | -0,1667  |
| $ W^* - W $          | 0,0097  | 0,0876   | 0,0826   | 0,1079   | 0,0664   | 0,0546   | 0,0180   |

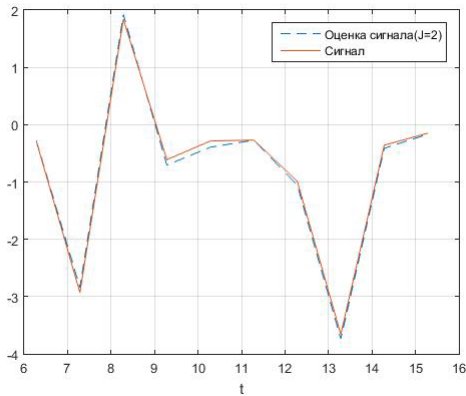


Рис. 5. Графики сигнала и оценки сигнала для варианта 3

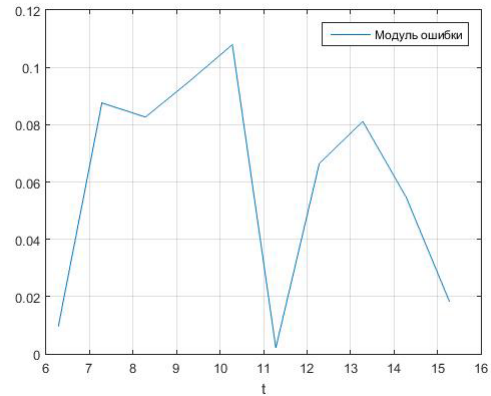


Рис. 6. График модуля ошибки воспроизведения сигнала для варианта 3

На рисунках 7, 8 изображены графики сигнала и оценки сигнала и график модуля ошибки для варианта 4. В таблице 4 приведены значения сигнала, оценки сигнала, модуля ошибки воспроизведения сигнала для варианта 4. Для варианта 4 модуль ошибки воспроизведения сигнала не превосходит 0,4428.

Таблица 4

**Значения сигнала, оценки сигнала, модуля ошибки для варианта 4**

| t                    | $2\pi$ | $2\pi + 1$ | $2\pi + 2$ | $2\pi + 4$ | $2\pi + 6$ | $2\pi + 8$ | $2\pi + 9$ |
|----------------------|--------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| сигнал $W$           | 2,2141 | 1,7160     | -0,9733    | -0,1395    | -0,4917    | 1,1385     | 0,5099     |
| оценка сигнала $W^*$ | 1,7713 | 1,7484     | -0,8138    | -0,0774    | -0,3980    | 1,1636     | 0,6306     |
| $ W^* - W $          | 0,4428 | 0.0324     | 0,1595     | 0,0620     | 0,0937     | 0,0251     | 0,1206     |

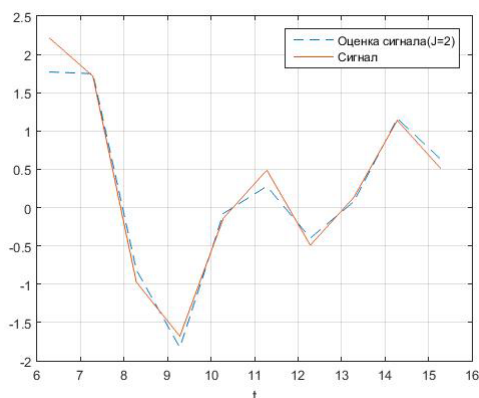


Рис. 7. Графики сигнала и оценки сигнала для варианта 4

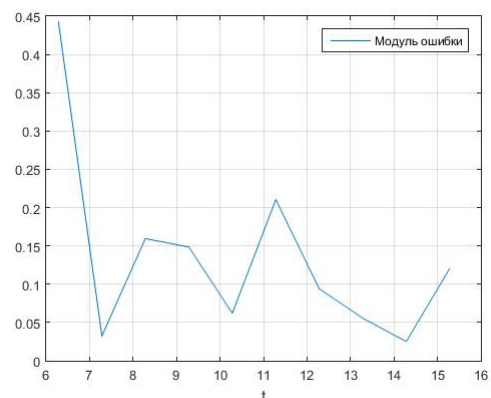


Рис. 8. График модуля ошибки воспроизведения сигнала для варианта 4

**7. Основные выводы.** Разработано методическое и инструментальное программное обеспечение для синтеза оптимального оператора по байесовому критерию методом ВЛКР для линейной нестационарной стохастической системы. В основу положены вейвлеты Хаара и канонические разложения. Особое внимание уделено БК в виде вероятности выхода ошибки за пределы интервала. Приведен



иллюстративный пример, показывающий высокие точностные возможности алгоритма. Результаты допускают обобщение на случай векторных линейных СтС, а также критериев накопления ущерба и максимального правдоподобия.

Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

### Литература

1. Sinitsyn, I., Sinitsyn, V., Korepanov, E., Konashenkova, T. Optimization of Linear Stochastic Systems Based on Canonical Wavelet Expansions // Autom Remote Control. 2020.No. 81. P. 2046–2061. URL: <https://doi.org/10.1134/S0005117920110077>.
2. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XI) // Системы высокой доступности. 2021. Т. 17, № 1. С. 25–40. DOI: <https://doi.org/10.18127/j20729472-202101-02j20729472-202101-03>.
3. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XII) // Системы высокой доступности, 2021. Т. 17, № 2. С. 26–44. DOI: <https://doi.org/10.18127/j20729472-202102-03>.
4. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XIII) // Системы высокой доступности. 2021. Т. 17, № 3. С. 16–35. DOI: <https://doi.org/10.18127/j20729472-202103-04>.
5. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение вейвлет оптимального синтеза нестационарных систем по сложно-статистическому критерию // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2021): материалы XXII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2021. Вып. 22. С. 166–175.
6. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XV) // Системы высокой доступности. 2022. Т. 18, № 1 (в печати).
7. Синицын И.Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009. 768 с.
8. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (IV) // Системы высокой доступности. 2017. Т. 13, № 3. С. 55–59.
9. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (V) // Системы высокой доступности. 2018. Т.14, №1. С. 59–70.
10. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 464 с.

**I.N. Sinitsyn, V.I. Sinitsyn, E.R. Korepanov, T.D. Konashenkova**  
FRC CSC of RAS (Moscow)

**INSTRUMENTAL SOFTWARE FOR THE SYNTHESIS OF AN  
OPTIMAL SYSTEM ACCORDING TO THE BAYESIAN CRITERION  
BY THE METHOD OF WAVELET CANONICAL EXPANSIONS**

**Keywords:** *bayesian criterion; haar wavelet; instrumental software; optimal system; stochastic system; stochastic process, software tool, wavelet canonical expansion, wavelet expansion.*

**Abstract.** *The experience of developing methodological support and instrumental software in the synthesis of the optimal operator of a linear non-stationary stochastic system according to the Bayesian criterion is considered. The methodological support is based on the Haar wavelet decomposition.*

## СЕКЦИЯ 3 Математика и её приложения

**В.М. Адуков**

*Южно-Уральский государственный университет*

УДК 519.688+517.544.8

### О НОРМИРОВКЕ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА ДЛЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНДЕКСАМИ

Ключевые слова: факторизация Винера–Хопфа, частные индексы, нормировка факторизации.

*В работе изучается нормировка факторизации Винера–Хопфа матриц-функций, имеющих различные частные индексы. Ранее этот вопрос был полностью исследован для случаев устойчивой факторизации и факторизации матриц-функций второго порядка. Для того, чтобы обеспечить единственность факторизации, введено понятие  $P$ -нормированной факторизации. Кроме того, данная нормировка дает возможность находить факторизацию Биркгофа. Эта нормировка удобна для получения явных оценок абсолютных погрешностей факторизационных множителей для приближенной факторизации.*

**1. Постановка задачи.** Напомним основные определения теории факторизации в матричной алгебре Винера  $W^{p \times p}(\mathbb{T})$  [1; 2]. Пусть  $A(t)$  – обратимая на единичной окружности  $\mathbb{T}$  матрица-функция порядка  $p$  из  $W^{p \times p}(\mathbb{T})$ .

Правой факторизацией Винера–Хопфа  $A(t)$  называется ее представление в следующем виде:

$$A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (1)$$

Здесь  $A_{\pm}(t)$  принадлежат группам  $GW_{\pm}^{p \times p}(\mathbb{T})$  обратимых элементов подалгебр  $W_{\pm}^{p \times p}(\mathbb{T})$ , состоящих из абсолютно сходящихся матричных рядов Фурье, для которых коэффициенты Фурье с отрицательными / положительными индексами равны нулю. Средний множитель в факторизации есть диагональная матрица  $D(t) = \text{diag}[t^{\rho_1}, \dots, t^{\rho_p}]$ ,

$\rho_1 \leq \dots \leq \rho_p$  – правые частные индексы  $A(t)$ . Справедливо соотношение  $\rho_1 + \dots + \rho_p = \varkappa = \text{ind}_T \det A(t)$ .

Задача факторизации Винера–Хопфа имеет многочисленные применения в задачах математической физики, в теории дифференциальных уравнений и в математическом анализе. В общей теории факторизации имеется пробел, связанный с отсутствием способов ее нормировки, которая гарантировала бы единственность факторизационных множителей. Не единственность этих множителей доставляет определенные трудности при применении факторизации: трудно сравнить две факторизации заданной матрицы-функции, полученные различными конструктивными методами; известная теорема М.А. Шубина (см. [2], теорема 6.15) о непрерывности факторизационных множителей, в силу не единственности факторизации, носит неполный характер. В свою очередь, это не позволяет применить ее при оценке погрешности приближенной факторизации.

В работе [3] данный пробел теории был частично восполнен, вопрос нормировки был изучен для матрицы-функции произвольного порядка с устойчивой системой частных индексов. Кроме того, автором данной работы в статье, принятой к печати в «Уфимский математический журнал», исследована эта проблема для матриц-функций второго порядка. В указанных работах использовалось понятие  $P$ -нормированной факторизации, играющее ключевую роль в задаче нормировки.

Целью предлагаемой работы является перенесение метода  $P$ -нормировки на новый случай матрицы-функции с различной системой частных индексов. Кроме того, на нормировку будет накладываться дополнительное требование так, чтобы нормированная факторизация Винера–Хопфа порождала так называемую факторизацию Биркгофа. Это позволит избежать некоторых технических трудностей при применении нормированной факторизации.

**2.  $P$ -нормировка и единственность факторизации.** Главным инструментом в теории нормировки является теорема Гохберга–Крейна об общем виде факторизационных множителей  $A_{\pm}(t)$  [1, Гл. VIII, теорема 1.2]. Сформулируем ее в виде, удобном для нас.

Пусть  $\rho_1, \dots, \rho_p$  – произвольный набор целых чисел, упорядоченный по возрастанию:  $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_p$ . Будем считать, что в этом наборе имеется  $s$  различных чисел  $\varkappa_1 < \dots < \varkappa_s$  кратностей  $k_1, \dots, k_s$ , соответственно. Обозначим  $\mathcal{Q}(\rho_1, \dots, \rho_p)$  множество всех блочно-треугольных матриц-функций вида

$$Q_-(t) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1s} \\ 0 & Q_{22} & \dots & Q_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q_{ss} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь блок  $Q_{ij}$  имеет размеры  $k_i \times k_j$ , диагональные блоки  $Q_{ii}$  являются постоянными обратимыми матрицами порядка  $k_i$ , а внедиагональные блоки  $Q_{ij}(t)$  – это матричные многочлены по переменной  $t^{-1}$  степени не выше  $\kappa_j - \kappa_i$ . Множество  $\mathcal{Q}_-(\rho_1, \dots, \rho_p)$  является подгруппой группы  $GW_-^{p \times p}(\mathbb{T})$ .

Пусть  $D(t) = \text{diag}[t^{\rho_1}, \dots, t^{\rho_p}]$ . Определим матрицу-функцию

$$Q_+(t) = D^{-1}(t)Q_-(t)D(t).$$

$Q_+(t)$  имеет такой же вид, как (2), только в данном случае  $Q_{ij}(t)$  являются матричными многочленами по переменной  $t$  степени не выше  $\kappa_j - \kappa_i$ , и, таким образом,  $Q_+(t) \in GW_+^{p \times p}(\mathbb{T})$ .

Теорема Гохберга–Крейна об общем виде факторизационных множителей утверждает, что, если (1) – факторизация Винера–Хопфа матрицы-функции  $A(t)$  с частными индексами  $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_p$ , то представление

$$A(t) = G_-(t)D(t)G_+(t), \quad (3)$$

где  $G_-(t) = A_-(t)Q_-(t)$ ,  $G_+(t) = Q_+(t)A_+(t)$ , также является факторизацией Винера–Хопфа  $A(t)$  для любой  $Q_-(t) \in \mathcal{Q}_-(\rho_1, \dots, \rho_p)$ . Более того, любая факторизация  $A(t)$  может быть получена из исходной факторизации (1) подобным образом при соответствующем выборе  $Q_-(t)$ .

**Определение 1.** Переход от исходной факторизации (1) к факторизации (3) с помощью любой матрицы-функции  $Q_-(t) \in \mathcal{Q}_-(\rho_1, \dots, \rho_p)$  будем называть *нормировкой факторизации (1) в бесконечно удаленной точке*.

Таким образом, нормировка факторизации в бесконечно удаленной точке определяется выбором  $Q_-(t) \in \mathcal{Q}_-(\rho_1, \dots, \rho_p)$ . Наша задача – произвести в каком-то смысле канонический выбор  $Q_-(t)$ .

Главное условие, определяющее выбор канонического представителя, будет связано с факторизацией Биркгофа матриц-функций. Эта факторизация была введена Г. Биркгофом [4] в связи с некоторыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений.

*Правой факторизацией Биркгофа*  $A(t)$  называется ее представление в следующем виде:

$$A(t) = D_b(t) V_-(t) V_+(t), t \in \mathbb{T}, \quad (4)$$

где  $V_{\pm}(t) \in GW_{\pm}^{p \times p}(\mathbb{T})$  и  $D_b(t) = \text{diag}[t^{\beta_1}, \dots, t^{\beta_p}]$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_p$  – правые индексы Биркгофа  $A(t)$ . В отличие от частных индексов индексы Биркгофа не определяются однозначно матрицей-функцией  $A(t)$ . Однако среди всевозможных наборов индексов Биркгофа всегда существует набор, полученный некоторой перестановкой правых частных индексов. Этот важный факт впервые обнаружил И.С. Чеботару [5]. Таким образом, одна из факторизаций Биркгофа всегда может быть записана в виде

$$A(t) = P D(t) P^{-1} V_-(t) V_+(t), t \in \mathbb{T}, \quad (5)$$

где  $P$  – некоторая матрица перестановок.

Теперь мы можем определить каноническую нормировку факторизации.

**Определение 2.** Пусть  $P$  – матрица перестановок порядка  $p$ . Факторизация Винера–Хопфа матрицы-функции  $A(t)$ :

$$A(t) = C_-(t) D(t) C_+(t) \quad (6)$$

называется  $P$ -нормированной, если выполняются условия:

1. Матрица-функция  $V_-(t) = P D^{-1}(t) P^{-1} C_-(t) D(t)$  принадлежит алгебре  $W_-^{p \times p}(\mathbb{T})$ ,
2.  $V_-(\infty) = P$ .

Оказывается, что если  $P$ -нормированная факторизация  $A(t)$  существует, то она единственна и порождает факторизацию Биркгофа  $A(t)$ .

**Теорема 1.** Пусть для матрицы-функции  $A(t) \in GW^{p \times p}(\mathbb{T})$  существует  $P$ -нормированная факторизация Винера–Хопфа:

$$A(t) = C_-(t) D(t) C_+(t).$$

Тогда

1.  $P$ -нормированная факторизация Винера–Хопфа порождает факторизацию Биркгофа по формуле

$$A(t) = P D(t) P^{-1} V_-(t) V_+(t),$$

где  $V_-(t) = P D^{-1}(t) P^{-1} C_-(t) D(t)$ ,  $V_+(t) = C_+(t)$ .

2. Данная  $P$ -нормированная факторизация Винера–Хопфа единственна.

Условие (1) определения 2 равносильно утверждению, что  $V_-(t) \in GW_-^{p \times p}(\mathbb{T})$ . Существование вышеуказанной факторизации

Биркгофа проверяется непосредственно. Условие (2) обеспечивает единственность  $P$ -нормированной факторизации.

**Замечание 1.** Условие  $V_-(\infty) = P$ , обеспечивающее единственность  $P$ -нормированной факторизации, можно заменить на  $V_-(\infty) = A_0$ , где  $A_0$  – любая обратимая матрица. Условие  $V_-(\infty) = P$  позволит получить более простой вид факторов  $C_-(t)$ ,  $V_-(t)$  в  $P$ -нормированных факторизациях.

**3. Существование  $P$ -нормировки для матриц-функций с различной системой частных индексов.** В этом разделе мы сформулируем результат, который показывает, что для случая матрицы-функции с различными правыми частными индексами

$$\rho_1 < \dots < \rho_p$$

$P$ -нормированная факторизация всегда существует. Также будет указать вид фактора  $C_-(t)$  для такой факторизации и вид  $V_-(t)$  из соответствующей факторизации Биркгофа. Оказывается, что требование (1) из определения 2  $P$ -нормировки равносильно существованию так называемой  $PLU$ -факторизации обратимой числовой матрицы  $A_-(\infty)$ .

Напомним (см., например, [6]), что если обратимая матрица  $A_0$  может быть представлена в виде произведения  $A_0 = LU$  нижней треугольной матрицы  $L$  на верхнюю треугольную матрицу  $U$ , то говорят, что  $A_0$  допускает  $LU$ -факторизацию. Необходимым и достаточным условием существования  $LU$ -факторизации матрицы  $A_0$  является отличие от нуля всех ведущих (угловых) миноров этой матрицы. Если фиксировать диагональные элементы матрицы  $L$ , то  $LU$ -факторизация будет единственной. Мы будем считать, что все диагональные элементы  $L$  равны 1.

В общем случае перестановкой строк всегда можно добиться, чтобы все ведущие миноры стали ненулевыми. Это означает, что существует (вообще говоря, неединственная) матрица перестановок  $P^{-1}$  такая, что  $P^{-1}A_0$  допускает  $LU$ -факторизацию, то есть  $A_0$  представляется в виде  $A_0 = PLU$ . Это и есть  $PLU$ -факторизация  $A_0$ .

Так как матрица  $A_-(\infty)$  обратима, то для нее всегда существует  $PLU$ -факторизация. Заметим, что если существует факторизация Винера–Хопфа  $A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t)$ , для которой  $A_-(\infty)$  допускает  $PLU$ -факторизацию, то из теоремы об общем виде факторизации следует, что любая факторизация Винера–Хопфа  $A(t)$  обладает этим свойством.

**Теорема 2.** Пусть матрица-функция  $A(t) \in GW^{p \times p}(\mathbb{T})$  имеет различные правые частные индексы  $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_p$ . Обозначим  $\rho_{ji} = \rho_j - \rho_i$  для  $i < j$ . Матрица-функция  $A(t)$  допускает нормированную

факторизацию  $P$ -типа тогда и только тогда, когда для некоторой факторизации  $A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t)$  числовая матрица  $A_-(\infty)$  допускает  $PLU$ -факторизацию.

Если это условие выполнено, то  $P$ -нормированная факторизация Винера–Хопфа и соответствующая ей факторизация Биркгофа имеют вид:

$$A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t), \quad A(t) = PD(t)P^{-1}B_-(t)B_+(t),$$

где

$$C_-(t) = P \begin{pmatrix} 1+t^{-1}c_{11}^-(t) & t^{-\rho_{21}^{-1}}c_{12}^-(t) & \dots & t^{-\rho_{p1}^{-1}}c_{1p}^-(t) \\ c_{21}^-(t) & 1+t^{-1}c_{22}^-(t) & \dots & t^{-\rho_{p2}^{-1}}c_{2p}^-(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p-1,1}^-(t) & c_{p-1,2}^-(t) & \dots & t^{-\rho_{p,p-1}^{-1}}c_{p-1,p}^-(t) \\ c_{p,1}^-(t) & c_{p,2}^-(t) & \dots & 1+t^{-1}c_{pp}^-(t) \end{pmatrix},$$

$$B_-(t) = P \begin{pmatrix} 1+t^{-1}c_{11}^-(t) & t^{-1}c_{12}^-(t) & \dots & t^{-1}c_{1p}^-(t) \\ t^{-\rho_{21}}c_{21}^-(t) & 1+t^{-1}c_{22}^-(t) & \dots & t^{-1}c_{2p}^-(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^{-\rho_{p-1,1}}c_{p-1,1}^-(t) & t^{-\rho_{p-1,2}}c_{p-1,2}^-(t) & \dots & t^{-1}c_{p-1,p}^-(t) \\ t^{-\rho_{p1}}c_{p,1}^-(t) & t^{-\rho_{p2}}c_{p,2}^-(t) & \dots & 1+t^{-1}c_{pp}^-(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $c_{ij}^-(t) \in W_-(\mathbb{T})$ .

### Литература

1. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
2. Litvinchuk G.S., I.M. Spitkovskii I.M. Factorization of measurable matrix functions. Operator Theory, Advances and Applications. Berlin, 1987.
3. Адукова Н.В. Устойчивость факторизационных множителей факторизации Винера–Хопфа матриц-функций // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2022. Т. 14, № 1. С. 5–13.
4. Birkhoff G.D. A theorem on matrices of analytic functions // Math. Ann. No. 74. 1913. P. 122–133.
5. Чеботару И.С. Сведение систем уравнений Винера–Хопфа к системам с нулевыми индексами // Изв. АН МССР. 1967. № 8. С. 54–66.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

V.M. Adukov

South Ural State University

### ON NORMALIZATION OF WINER–HOPF FACTORIZATION FOR MATRIX FUNCTIONS WITH DIFFERENT PARTIAL INDICES

**Keywords:** Wiener–Hopf factorization, partial indices, normalization.



**Abstract.** *In the paper, we study the normalization of the Wiener–Hopf factorization of matrix functions with different partial indices. Previously, this problem was fully investigated for the cases of stable factorization and factorization of second-order matrix functions. In order to ensure the uniqueness of the factorization, the notion of  $P$ -normalized factorization is introduced. In addition, this normalization makes it possible to find the Birkhoff factorization. This normalization is convenient for obtaining explicit estimates of absolute errors of factorization factors for approximate factorization.*

**Н.В. Адукова**

*Южно-Уральский государственный университет*

УДК 517.544.8

## **О ЯВНОМ ПОСТРОЕНИИ КАНОНИЧЕСКОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА ЛОРАНОВСКИХ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ**

Ключевые слова: *каноническая факторизация Винера–Хопфа, явные решения, матричные многочлены.*

*В работе предложен новый явный метод построения канонической факторизации лорановских матричных многочленов. Он основан на ранее полученном эффективном критерии для проверки устойчивости частных индексов матричных многочленов и на методе существенных многочленов, разработанном В.М. Адуковым для явного построения факторизации Винера–Хопфа аналитических матриц-функций. С помощью этого метода можно явно построить и каноническую факторизацию лорановских матричных многочленов. Однако общий метод не учитывает специфики рассматриваемой задачи и приводит к неоправданным затратам машинного времени при его имплементации. Использование предложенного в этой работе нового метода для построения канонической факторизации лорановского матричного многочлена позволяет значительно сократить вычислительные затраты при его реализации.*

**1. Постановка задачи.** Пусть лорановский матричный многочлен  $a(z) = \sum_{k=-m}^n a_k z^k$ ,  $c_k \in \mathbb{C}^{p \times p}$ , обратим на единичной окружности  $\mathbb{T}$ . Известно, что тогда  $a(z)$  допускает левую факторизацию Винера–Хопфа, то есть представление вида

$$a(z) = l_+(z)d_l(z)l_-(z), \quad z \in \mathbb{T},$$

где  $l_{\pm}(z)$  – матричные многочлены от переменной  $z^{\pm 1}$  и все нули скалярного многочлена  $\det l_+(z)$  ( $\det l_-(z)$ ) лежат вне (внутри) единичного круга. Средний множитель  $d_l(z)$  является диагональной матрицей-функцией вида  $d_l(z) = \text{diag}[z^{\lambda_1}, \dots, z^{\lambda_p}]$ . Целые числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  называются *левыми частными индексами*  $a(z)$ . Они считаются упорядоченными по возрастанию:  $(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p)$  и удовлетворяют соотношению  $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = \varkappa = \text{ind}_{\mathbb{T}} \det a(z)$ .

Аналогично определяется *правая факторизация Винера–Хопфа*

$$a(z) = r_-(z)d_r(z)r_+(z),$$

где  $r_{\pm}(z)$  – матричные многочлены от  $z^{\pm 1}$ , обладающие такими же свойствами, как  $l_{\pm}(z)$ ,  $d_r(z) = \text{diag}[z^{\rho_1}, \dots, z^{\rho_p}]$ ,  $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_p$ , – *правые частные индексы*  $a(z)$ . Справедливо соотношение  $\rho_1 + \dots + \rho_p = \varkappa$ . Если все левые (правые) частные индексы равны нулю, то соответствующая факторизация называется *канонической*.

Факторизация матриц-функций (краевая задача Римана для вектора) широко используется в различных задачах математики, механики и математической физики. В частности, задача факторизации применяется при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния [1]. Например, при интегрировании нелинейного уравнения Шредингера возникает необходимость в факторизации некоторого семейства матриц-функций второго порядка, допускающих левую каноническую факторизацию. Для построения приближенного решения данного уравнения используется дискретный аналог нелинейного уравнения Шредингера. Оказалось, что для нахождения приближенного решения этого дискретного уравнения нужно уметь строить каноническую факторизацию лорановского матричного многочлена на единичной окружности  $\mathbb{T}$ . Для того, чтобы избежать накопления ошибок, В.М. Адуковым и Г. Мишурисом было предложено использовать безошибочные вычисления, то есть строить каноническую факторизацию лорановского многочлена над полем гауссовых рациональных чисел  $\mathbb{Q}(i)$  в рациональной арифметике. Точное решение с использованием рациональной арифметики задачи факторизации для матричных многочленов возможно тогда и только тогда, когда определитель матричного многочлена допускает точную факторизацию. Последнее легко проверить символьными методами. Точное построение факторизации в этом случае производится методом существенных многочленов, предложенным в [2]. Этот метод требует

вычисления ранга и нахождения базиса ядра для блочных теплицевых матриц из некоторого семейства, состоящего из  $2\kappa + 1$  матриц, где  $\kappa$  – индекс определителя матричного многочлена. В предыдущей работе автора [3] был описан пакет ExactMPF, позволяющий строить точную факторизацию Винера–Хопфа матричных многочленов над полем гауссовых чисел  $\mathbb{Q}(i)$  с помощью символьных вычислений. Алгоритмы, используемые в этом пакете, основаны на методе работы [2].

Пакет ExactMPF был использован для приближенного решения дискретного нелинейного уравнения Шредингера. Численные эксперименты показали, что пакет действительно может быть успешно применен для интегрирования дискретного нелинейного уравнения Шредингера. С другой стороны, обнаружилось, что в некоторых случаях время построения факторизации становится очень значительным, что, впрочем, не удивительно при использовании символьных методов.

Цель данной работы – разработать теоретические основы для более экономного алгоритма построения явной левой факторизации Винера–Хопфа для лорановских матричных многочленов. Предполагается, что данный алгоритм станет основой для точного решения задачи факторизации символьными методами. Мы будем использовать критерий устойчивой факторизации матричного многочлена из работы [4]. Для проверки этого критерия потребуются вычисление ранга одной блочной теплицевой матрицы, а для построения канонической факторизации нужно найти базис ядра другой блочной теплицевой матрицы. Тем самым самая затратная часть вычислений в рациональной арифметике будет сокращена и общее время построения канонической факторизации должно значительно уменьшиться.

**2. Построение канонической факторизации лорановского матричного многочлена.** Для описанных выше приложений нам понадобится только левая каноническая факторизация Винера–Хопфа

лорановского матричного многочлена  $a(z) = \sum_{k=-m}^n a_k z^k$ ,  $a_k \in \mathbb{C}^{p \times p}$ ,

обратимого на единичной окружности  $\mathbb{T}$ . С технической точки зрения нам будет удобнее рассматривать вместо лорановского многочлена  $a(z)$  матричный многочлен  $A(z) = z^m a(z)$ , который мы будем записывать в виде

$$A(z) = \sum_{k=0}^N A_k z^k, \quad A_k \in \mathbb{C}^{p \times p}.$$

Ясно, что вместо левой канонической факторизации  $a(z)$  теперь следует рассматривать левую факторизацию

$$A(z) = A_+(z) d_l(z) A_-(z), \quad d_l(z) = z^v I_p,$$

матричного многочлена  $A(z)$  с равными частными индексами  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \nu$ . Это один из случаев устойчивой факторизации  $A(z)$ , рассмотренной в [4], когда  $\varkappa = \text{ind}_{\mathbb{T}} \det A(z) = \nu p$ . Будем считать, что  $\varkappa > 0$ , поскольку, в противном случае, факторизация тривиальна:  $A_+(z) = A(z)$ ,  $d_l = I_p$ ,  $A_-(z) = I_p$ .

В следующей теореме мы будем использовать критерий устойчивой факторизации данного типа, полученный в [4] (теорема 3.1), и метод построения факторизации матричного многочлена, предложенный в [2]. Всюду ниже мы сохраняем, по возможности, обозначения из [2].

Опишем те данные, которые нам понадобятся при построении факторизации  $A(z)$ . Пусть  $\Delta(z) = \det A(z)$ , и

$$\Delta(z) = \Delta_-(z) z^{\varkappa} \Delta_+(z)$$

– факторизация Винера–Хопфа на единичной окружности  $\mathbb{T}$  определителя матричного многочлена  $A(z)$ . Здесь  $\Delta_-(z)$  ( $\Delta_+(z)$ ) – скалярный многочлен от  $z^{-1}$  (от  $z$ ) и  $\varkappa = \text{ind}_{\mathbb{T}} \det A(z)$ . Ясно, что  $\deg \Delta_-(z) = \varkappa$ . Нормируем факторизацию  $\Delta(z)$  условием  $\Delta_-(\infty) = 1$ , теперь факторизация определителя строится единственным образом. Пусть

$$\Delta_-(z) = 1 + \Delta_1^- z^{-1} + \dots + \Delta_{\varkappa}^- z^{-\varkappa}. \quad (1)$$

Далее нам понадобится конечный набор лорановских коэффициентов рациональной матрицы-функции  $\Delta_-(z) A(z)$ . Они могут быть найдены в терминах матричных коэффициентов исходного матричного многочлена  $A(z)$  и коэффициентов скалярного многочлена  $\Delta_-(z)$ .

Так как  $\Delta_-(z)$  не обращается в нуль в замкнутой области  $|z| \geq 1$ , то рациональная функция  $\Delta_-(z)^{-1}$  является аналитической в области  $|z| > r$  для некоторого  $r < 1$ . Разложим ее в этой области в ряд Лорана

$$\Delta_-(z)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta_j}{z^j}. \quad (2)$$

Лорановские коэффициенты  $\delta_j \in \mathbb{C}$ , в силу условия  $\Delta(z) \Delta_-(z)^{-1} = 1$  могут быть найдены по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\delta_0 = 1, \delta_1 = -\Delta_1^-, \delta_j = \begin{cases} -\Delta_j^- - \sum_{k=1}^{j-1} \delta_{j-k} \Delta_k^-, & 2 \leq j \leq \varkappa, \\ -\sum_{k=1}^{\varkappa} \delta_{j-k} \Delta_k^-, & \varkappa + 1 \leq j \leq \varkappa + N. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $N$  – степень матричного многочлена  $A(z)$  и  $\Delta_-(z)^{-1} A(z)$  имеет на бесконечности полюс порядка не выше  $N$ . Теперь мы можем найти

матричные лорановские коэффициенты  $c_j \in \mathbb{C}^{p \times p}$  рациональной матрицы-функции

$$\Delta_{-}^{-1}(z)A(z) = \sum_{j=-\infty}^N c_j z^j$$

в области  $|z| > r$ . Легко видеть, что они находятся по формуле

$$c_j = \begin{cases} \sum_{k=0}^N \delta_{k-j} A_k, & j \leq 0, \\ \sum_{k=j}^N \delta_{k-j} A_k, & 0 < j \leq N, \\ 0, & j > N. \end{cases} \quad (4)$$

В дальнейшем нам понадобится лишь конечное число коэффициентов  $c_k$  для  $k = -\varkappa, \dots, 0, \dots, \varkappa$ .

Обозначим  $c_{-\varkappa}^{\varkappa} := \{c_{-\varkappa}, \dots, c_0, \dots, c_{\varkappa}\}$  конечную последовательность, состоящую из комплексных  $p \times p$  матриц. Это и есть исходные данные для нашей задачи. Отметим, что если  $A(z)$  – матричный многочлен над полем гауссовых чисел  $\mathbb{Q}(i)$ , то коэффициенты  $c_j \in \mathbb{Q}^{p \times p}(i)$  могут быть найдены точно символьными методами.

Образуем теперь конечное семейство блочных теплицевых матриц:

$$T_k = \|c_{i-j}\|_{\substack{i=k, k+1, \dots, \varkappa \\ j=0, 1, \dots, \varkappa+k}}, \quad -\varkappa \leq k \leq \varkappa. \quad (5)$$

Здесь матрица  $T_k$  имеет размеры  $(\varkappa - k + 1)p \times (\varkappa + k + 1)p$ .

В теореме 1, основном результате данной работы, используется только матрица  $T_{\nu}$  из этого семейства и матрица  $\tilde{T}_{-\nu+1}$ , полученная из  $T_{-\nu+1}$  удалением первого блочного столбца. Однако доказательство этой теоремы требует понятий индексов и существенных многочленов последовательности  $c_{-\varkappa}^{\varkappa}$  из работы [2]. Поэтому мы коротко разъясним их.

Последовательности  $c_{-\varkappa}^{\varkappa}$  ставится в соответствие набор целых чисел  $\mu_1, \dots, \mu_{2p}$  ( $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{2p}$ ), называемых индексами последовательности  $c_{-\varkappa}^{\varkappa}$ . С одной стороны, индексы последовательности могут быть найдены, анализируя последовательность рангов матриц  $T_k$ ,  $-\varkappa \leq k \leq \varkappa$ , а с другой стороны, они связаны с левыми и правыми частными индексами матричного многочлена  $A(z)$  соотношением:

$$\mu_1 = -\lambda_1, \mu_p = -\lambda_p, \mu_{p+1} = \rho_1, \dots, \mu_{2p} = \rho_p.$$

Это означает, что частные индексы матричного многочлена  $A(z)$  могут быть вычислены в терминах индексов последовательности  $c_{-\varkappa}^{\varkappa}$ .

Кроме того, анализ правых  $\ker_R T_k$  и левых  $\ker_L T_k$  ядер последовательности матриц  $T_k$ ,  $-\varkappa \leq k \leq \varkappa$  позволяет ввести понятия правых  $R_1(z), \dots, R_{2p}(z)$  и левых  $L_1(z), \dots, L_{2p}(z)$  существенных многочленов последовательности  $c_{-\varkappa}^z$ , в терминах которых находятся факторизационные множители матричного многочлена  $A(z)$ . Подробности можно найти в работе [2]. Теперь мы можем приступить к формулировке и доказательству основного результата данной работы.

**Теорема.** Пусть для матричного многочлена  $A(z)$  выполняется условие  $\varkappa = \det A(z) = \nu p$  и  $\nu > 0$ . Для того, чтобы  $A(z)$  допускал левую факторизацию Винера–Хопфа  $A(z) = A_+(z)d_l(z)A_-(z)$  с равными частными индексами  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \nu$  (то есть  $d_l(z) = z^\nu I_p$ ), необходимо и достаточно, чтобы блочная теплицева матрица

$$T_{-\nu} = \begin{pmatrix} c_{-\nu} & c_{-\nu-1} & \dots & c_{-\varkappa} \\ c_{-\nu+1} & c_{-\nu} & \dots & c_{-\varkappa+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\varkappa} & c_{\varkappa-1} & \dots & c_{\nu} \end{pmatrix}$$

размером  $(\varkappa + \nu + 1)p \times (\varkappa - \nu + 1)p$  имела полный ранг, равный  $(\varkappa - \nu + 1)p = (\varkappa + 1)p - \varkappa$ .

Пусть это условие выполняется. Определим теплицеву матрицу

$$\tilde{T}_{-\nu+1} = \begin{pmatrix} c_{-\nu} & c_{-\nu-1} & \dots & c_{-\varkappa} \\ c_{-\nu+1} & c_{-\nu} & \dots & c_{-\varkappa+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\varkappa-1} & c_{\varkappa-2} & \dots & c_{\nu-1} \end{pmatrix}$$

размером  $(\varkappa + \nu)p \times (\varkappa - \nu + 1)p$ . Тогда размерность ее ядра равна  $p$ . Пусть  $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_p$  – базис  $\ker \tilde{T}_{-\nu+1}$  и  $\tilde{R}_1(z), \dots, \tilde{R}_p(z)$  – производящие векторные (столбцовые) многочлены элементов этого базиса. Составим матричный многочлен

$$\mathcal{R}_1(z) = z \begin{pmatrix} \tilde{R}_1(z) & \dots & \tilde{R}_p(z) \end{pmatrix}$$

порядка  $p$ . Тогда  $\mathcal{R}_1(z)$  обратим на единичной окружности  $\mathbb{T}$  и левая факторизация  $A(z)$  строится по формулам:

$$A_-(z) = z \Delta_-(z) \mathcal{R}_1^{-1}(z), \quad A_+(z) = z^{-\nu p - 1} \Delta_-^{-1}(z) A(z) \mathcal{R}_1(z). \quad (6)$$

**Доказательство.** Первое утверждение теоремы – это критерий устойчивости факторизации матричного многочлена  $A(z)$ , полученный в [3] (теорема 3.2) и сформулированный для случая равных левых частных индексов.

Пусть условие полноты ранга матрицы  $T_{-v}$  выполнено, и, следовательно, левые частные индексы  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = v$ . Так как индексы  $\mu_1, \dots, \mu_{2p}$  последовательности матриц  $c_{-\varkappa}^x$  связаны с частными индексами соотношением (см. [2])

$$\mu_1 = -\lambda_1, \mu_p = -\lambda_p, \mu_{p+1} = \rho_1, \dots, \mu_{2p} = \rho_p,$$

то

$$\mu_1 = \dots = \mu_p = -v, \mu_{p+1} = \rho_1, \dots, \mu_{2p} = \rho_p.$$

Если  $\mu_p = \mu_{p+1}$ , то  $\rho_1 = -v$ , то есть должно выполняться равенство  $v = 0$ , что невозможно в силу условия  $v > 0$ . Это означает, что  $-v$  является индексом последовательности  $c_{-\varkappa}^x$  кратности  $p$ . Поэтому ядро матрицы

$$T_{-v+1} = \begin{pmatrix} c_{-v+1} & c_{-v} & \dots & c_{-\varkappa} \\ c_{-v+2} & c_{-v+1} & \dots & c_{-\varkappa+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\varkappa} & c_{\varkappa-1} & \dots & c_{v-1} \end{pmatrix}$$

является  $p$ -мерным и производящие многочлены  $R_1(z), \dots, R_p(z)$  произвольного базиса этого ядра образуют первые  $p$  правых существенных многочленов последовательности  $c_{-\varkappa}^x$ .

В теореме 3.1 работы [2] доказано, что данная последовательность  $c_{-\varkappa}^x$  обладает факторизационными правыми существенными многочленами  $R_1(z), \dots, R_p(z)$ , то есть многочленами, удовлетворяющими условиям  $R_1(0) = \dots = R_p(0) = 0$ . Именно такие многочлены нужны для построения левой факторизации. Поэтому базис  $\ker T_{v+1}$  следует выбирать так, чтобы получить факторизационные существенные многочлены. Ясно, что факторизационные правые существенные многочлены являются производящими элементами базиса ядра матрицы  $\tilde{T}_{v+1}$ , полученной из матрицы  $T_{v+1}$  удалением первого блочного столбца.

Составим теперь из первых  $p$  правых факторизационных существенных многочленов матричный многочлен  $\mathcal{R}_1(z)$ . В теореме 3.2 работы [2] получены формулы для построения факторизации Винера–Хопфа матричного многочлена. В нашем случае они приводят к формулам (6).

### Литература

1. Тахтаджан Л.А., Фадеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 528 с.
2. Адуков В.М. О факторизации аналитических матриц-функций // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 118, N3. С. 324–336.
3. Адукова Н.В. Пакет EхactMPF для построения точной факторизации Винера–Хопфа матричных многочленов в СКМ Maple // Материалы XXII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их

приложения», Смоленск, 28–29 мая 2021. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2021. Вып. 22, С. 20–27.

4. Adukova N.V., Adukov V.M. On effective criterion of stability of partial indices for matrix polynomials // Proc. R.Soc. A 476: Id. 20200012.

**N.V. Adukova**  
South Ural State University

## **ON THE EXPLICIT CONSTRUCTION OF THE CANONICAL WIENER–HOPF FACTORISATION OF LAURENT MATRIX POLYNOMIALS**

**Keywords:** *canonical Wiener–Hopf factorisation, explicit solutions, matrix polynomials.*

**Abstract.** *In this paper, a new explicit method for constructing a canonical factorisation of Laurent matrix polynomials is proposed. It is based on the previously obtained effective criterion of the stability of partial indices for matrix polynomials and on the method of essential polynomials developed by V.M. Adukov for the explicit construction of the Wiener–Hopf factorisation of analytic matrix functions. With this method, the canonical factorisation of Laurent matrix polynomials can be explicitly constructed. However, the general method does not take into account the specifics of the problem under consideration and leads to unjustified expenditures of computer time during its implementation. The use of the new proposed method in this work for constructing the canonical factorisation of the Laurent matrix polynomial allows to significantly reduce the computational costs of its implementation.*

**М.Б. Банару, Г.А. Банару**  
Смоленский государственный университет

УДК 51

## **БАЗЫЛЕВ И АТАНАСЯН**

Ключевые слова: *геометрия, математика, история математики.*

*В статье представлены основные достижения двух выдающихся отечественных геометров и педагогов Вячеслава Тимофеевича Базылева и Левона Сергеевича Атанасяна.*

1. В апреле 2019 года и в ноябре 2021 года в Московском педагогическом государственном университете состоялись представительные международные конференции «Классическая и



современная геометрия», посвященные 100-летиям со дня рождения замечательных отечественных ученых и педагогов Вячеслава Тимофеевича Базылева и Левона Сергеевича Атанасяна. Долгие годы эти выдающиеся математики работали на кафедре геометрии вышеупомянутого вуза (в то время он назывался МГПИ им. В.И. Ленина). Имена этих специалистов знакомы в нашей стране практически каждому, кто имеет отношение к математике – от школьных учителей до академиков.

Два профессора, много лет проработавшие вместе, мало были похожи друг на друга. У них были совсем разные характеры, они по-разному построили свои научные и педагогические карьеры. Но и общего в жизненном пути и в работе Вячеслава Тимофеевича и Левона Сергеевича было очень много. Оба они рано проявили свои неординарные математические способности. Оба в годы Великой Отечественной войны стали офицерами Красной армии и внесли вклад в Великую победу. Оба получили весомые научные результаты в области геометрии – науки, которой верно служили всю свою жизнь. И, конечно, оба внесли колоссальный вклад в математическое образование нашей Родины.

2. Вячеслав Тимофеевич Базылев был одним из ведущих специалистов в области дифференциальной геометрии в нашей стране. Он вместе со своими учениками разработал теорию сетей в многомерной геометрии. Эта теория используется и в настоящее время в самых разных научных исследованиях, которые проводят специалисты, представляющие многие направления современной дифференциальной геометрии, а также ее приложений. Для научных работ профессора Базылева характерно не только глубокое содержание, но и тщательно продуманное изложение, четкость, понятность. В книге [1] составители представили все наиболее значимые статьи Вячеслава Тимофеевича, которые широко используются сейчас и, вне всякого сомнения, будут использоваться и в дальнейшем в научных исследованиях по дифференциальной геометрии. Эти научные работы дают читателю представление об уровне отечественной геометрии (да и математики в целом) в те времена, когда работал профессор В.Т. Базылев. То время, по мнению многих ученых, например по мнению профессора М.П. Бурлакова (оно приведено в книге [1]), можно назвать золотой эпохой математики в нашей стране.

Первая значительная работа В.Т. Базылева – это небольшая статья, опубликованная в 1953 году в самом престижном отечественном научном журнале – Докладах Академии наук СССР. Статья была представлена академиком Иваном Георгиевичем Петровским, тогдашним ректором МГУ им. М.В. Ломоносова. Уже одной этой статьи достаточно для того, чтобы составить мнение о выдающихся

способностях ее автора, о его высочайшей квалификации. Еще одна из самых интересных ранних работ В.Т. Базылева – статья «Некоторые вопросы геометрии тетраэдра» 1959 года. Как и многие другие выдающиеся математики, профессор Базылев проявил себя и в области элементарной геометрии. Известно, что элементарная геометрия (как и вся элементарная математика в целом) имеет не только огромное образовательное значение, но и безграничный научный потенциал. Много лет возглавлявший МПГУ академик Российской академии образования В.Л. Матросов неоднократно говорил о возрастании роли элементарной математики в последнее время. Причины этому – не только в важности этого предмета для изучения разных областей высшей математики, но и в том, что элементарная математика служит естественным общим научным полем для математиков различных направлений, является связующим звеном между школьным курсом математики и многими современными разделами высшей математики.

Однако, по нашему мнению, наибольшее значение имеют работы В.Т. Базылева обзорного характера. Солидного объема, написанные подробно, с историческими справками, содержащие большие введения и обширнейшие списки литературы, эти работы Вячеслава Тимофеевича Базылева наверняка наиболее востребованы широким кругом математиков. В таких работах читатель найдет не только результаты автора с подробными доказательствами, но и результаты других специалистов, занимающихся близкой тематикой. Написание таких обзорных работ требует от автора огромной научной эрудиции, умения анализировать и систематизировать результаты, навыков работы с математической литературой на иностранных языках. Этими качествами профессор Базылев обладал в полной мере. Один из лучших обзоров, принадлежащих В.Т. Базылеву, посвящен его учителю и старшему товарищу знаменитому отечественному геометру Сергею Павловичу Финикову [1]. Отметим, что и профессора С.П. Финикова многое связывало с кафедрой геометрии МГПИ им. В.И. Ленина.

Вячеслав Тимофеевич Базылев – основатель целой научной школы. Он подготовил более 30 кандидатов физико-математических наук. Известно об удивительно чутком, доброжелательном и внимательном отношении профессора Базылева к своим стажерам и аспирантам. Но при этом отношение к ним было и весьма требовательным. Особо отметим, что после смерти профессора Базылева многим его ученикам помогали защитить диссертации его коллеги: профессора Макс Айзикович Акивис, Борис Абрамович Розенфельд, Леонид Евгеньевич Евтушик, Вадим Фёдорович Кириченко. Ученики Вячеслава Тимофеевича Базылева работают в различных вузах Москвы и других городов Российской Федерации, а также во многих странах ближнего и дальнего зарубежья; они продолжают и развивают то направление в

дифференциальной геометрии, которое было создано их научным руководителем. Разумеется, у многих его учеников уже есть свои ученики. Так что научная школа, основанная профессором Базылевым, продолжает активно действовать, развиваться и получать новые серьезные результаты.

**3.** Левон Сергеевич Атанасян известен огромному числу жителей нашей страны и стран ближнего зарубежья прежде всего как автор основного ныне действующего школьного учебника геометрии. Правильнее сказать, основного автора – ведь этот замечательный учебник создал небольшой коллектив, в состав которого входил, например, известный отечественный геометр профессор Эдуард Генрихович Позняк, с которым авторы этой заметки имели честь быть знакомы. Написание такого учебника – колоссальный труд. Обратим внимание на то, что появление этого учебника завершило многолетний кризис в отечественном преподавании геометрии в школе. Как известно, после знаменитой книги Киселева (которая выдержала огромное число изданий, по которой десятилетиями учились школьники в нашей стране) многочисленные попытки создать качественный и долговечный школьный учебник геометрии были не очень удачными. Это касается и усилий лучшего математика Советского Союза академика А.Н. Колмогорова. Его пособия 70-ых годов прошлого века несли в себе очень много нового, содержали необычные подходы к изучению геометрии. Они были содержательными и интересными. Тем не менее они явно уступали книге коллектива, возглавляемого Л.С. Атанасяном, – книге, на десятилетия безоговорочно ставшей основным учебником по геометрии в нашей стране. Невероятная трудоспособность Левона Сергеевича, его выдающиеся математические и методические дарования явились, по нашему мнению, основами успеха этого замечательного учебника.

К числу замечательных качеств, которыми обладал Л.С. Атанасян, следует отнести его удивительный дар руководителя и организатора. Последние годы жизни он возглавлял кафедру геометрии МПГУ, до этого занимал другие ответственные посты. Среди прочего, например, он одно время работал в Париже в ЮНЕСКО. Авторы этой заметки имели некоторое отношение к кафедре, которой заведовал Левон Сергеевич. А за свою довольно долгую жизнь им пришлось работать под руководством самых разных специалистов (в том числе, кстати, под руководством своих бывших студентов). Вспоминая всех своих заведующих кафедрой, отметим, что за редким исключением это люди весьма знающие, компетентные, добросовестные, порядочные. Но несомненно лучший, среди них – именно Левон Сергеевич Атанасян. Умный и ответственный, доброжелательный и отзывчивый, решительный и сдержанный, знающий и умеющий. Руководитель,

который умел ладить и с начальством, и с подчиненными. «Слуга царю, отец солдатам», как лермонтовский полковник из «Бородино».

4. В.Т. Базылев и Л.С. Атанасян внесли огромный вклад в подготовку школьных учителей математики. Мы имеем в виду не только их многолетнюю плодотворную работу в ведущем педагогическом вузе нашей страны. Вячеслав Тимофеевич и Левон Сергеевич являются авторами нескольких учебников, задачников и учебным пособий, по которым готовили будущих учителей математики практически во всех педагогических вузах Советского Союза. Эта учебная литература используется и в настоящее время. Отметим, что учебная литература, авторами которой являются преподаватели кафедры геометрии МПГУ (МГПИ им.В.И. Ленина), отличается высочайшим качеством. Самый яркий тому пример – знаменитый двухтомник по геометрии для педвузов, написанный совместно Л. С. Атанасяном и В.Т. Базылевым.

Кроме того, профессора Базылев и Атанасян были одними из составителей программ по математике (их геометрического раздела), по которым готовили учителей математики и физики в многочисленных педагогических вузах Советского Союза. За годы, прошедшие после их ухода, очень многое изменилось, но основы таких программ остались прежними.

Наверное, стоит упомянуть и о пособии «Геометрия дифференцируемых многообразий» В.Т. Базылева, которое адресовано аспирантам и стажерам (по нему учились и авторы этой заметки). В этом пособии изложены основы современной геометрии, то есть той геометрии, которая стала развиваться с середины XX века. Существует целый ряд подобных книг – от тоненьких брошюр до солидных монографий. Но пособие Вячеслава Тимофеевича занимает в их ряду особое место благодаря своему высочайшему научному уровню, который сочетается с доступностью изложения.

5. В конце нашей заметки мы еще раз обращаем внимание читателей на книги о профессорах Базылеве и Атанасяне [1; 2]. По нашему мнению, эти книги будут полезны и студентам, и аспирантам, и школьным учителям, и многим преподавателям вузов. На наш взгляд, они будут интересны и читателям старших поколений, и совсем молодым. Составители книг – прежде всего, профессора кафедры геометрии МПГУ Надежда Ивановна Гусева и Наталья Серафимовна Денисова, а также А. А. Рылов, Л. А. Игнаточкина, С.Л. Атанасян, Е.В. Лукьянова – заслуживают искреннего и почтительного одобрения. Мы убеждены, что такого же одобрения заслуживают и многие другие люди, которые имеют прямое или косвенное отношение к составлению и изданию этих книг. Книг о замечательных отечественных ученых и педагогах, о прекрасных людях. О Вячеславе Тимофеевиче Базылеве и Левоне Сергеевиче Атанасяне.

## Литература

1. Базылев Вячеслав Тимофеевич. Ученый, учитель и друг. К 100-летию со дня рождения / сост. Н.И. Гусева. М.: Интеллект-Центр, 2019. 624 с.
2. Атанасян Левон Сергеевич: воспоминания к 100-летию со дня рождения / под ред. Н.С. Денисовой. М.: МПГУ. 2021. 128 с.

**M.V. Banaru, G.A. Banaru**  
Smolensk State University

### BAZYLEV AND ATANASIAN

**Keywords:** *geometry, mathematics, history of mathematics.*

**Abstract.** *The main achievements of two outstanding geometers professors V.T. Bazylev and L.S. Atanasian (Soviet Union / Russian Federation) are presented.*

**В.В. Борисов, И.М. Прудников**  
Филиал Национального исследовательского  
университета «МЭИ» в г. Смоленске  
Смоленский государственный медицинский университет

УДК 519.6-519.83-519.86

### ФОРМУЛА ДЛЯ УГЛОВ МИКРОВАСКУЛЯРНОГО УЗЛА

Ключевые слова: *уравнения Муррея, правила бифуркации капиллярных сетей, принцип оптимальности для микрососудистых узлов.*

*Получена формула, связывающая углы отклонений сосудов в узле микрососудистой сети, проведена оптимизация этого уравнения на компьютере, использовав математический пакет MATCAD, а также алгоритмический язык Python. В итоге дана графическая зависимость между собой углов отклонений в микрососудистом узле, построены графики зависимостей. Отмечено важное практическое применение графиков и уравнений. Это, в первую очередь, построение искусственных капиллярных сетей, а также построение разветвленных трубопроводных сетей для оптимальной, в смысле затраты энергии, перекачки нефти, газа и любой жидкости.*

**1. Постановка задачи.** Впервые узел микрососудистой сети математически описал С.Д. Муррей в своей ставшей уже классической, работе [1]. Формулы он получил исходя из принципа наименьшего действия, хорошо известного в механике. Фактически этот принцип

основан на наименьшей затрате энергии крови при ее движении в капиллярной сети. После знаменитой работы С.Д. Муррея появилось огромное количество работ, посвященных анализу уравнений и их физической трактовке (см., например, [2; 3]). Так, в работе [3] были введены кванты крови и показано, что уравнения С.Д. Муррея следуют из закона сохранения импульса кванта крови при его делении на подкванты в узле капиллярной сети. Надо учесть, что сами уравнения С.Д. Муррея были получены для ламинарного движения крови в сосуде диаметром более 100 мкм. В сосудах диаметром менее 100 мкм возникает турбулентность (завихрение), проявляются вязкие свойства крови. Поэтому уравнения С.Д. Муррея требуют модификации, а именно: введения коэффициента вязкости, что и было сделано в работе [3].

Авторы поставили перед собой задачу дальнейшего анализа уравнений С.Д. Муррея, оптимизацию их решения, а также анализ результатов на компьютере с привлечением обширного математического аппарата. Надо отметить, что сами уравнения, записанные ниже, линейно зависимые. Поэтому для их решения надо использовать еще одно уравнение, основанное на другом физическом законе, а именно: на законе сохранения потока жидкости в микрососудистом узле. Сохраняя два уравнения в системе уравнений С.Д. Муррея и добавляя новое, мы получим систему трех независимых уравнений. Дальнейшая задача – это решить полученную систему уравнений и вывести зависимость для углов отклонений сосудов в узле капиллярной сети, что и было сделано. С помощью оптимизационных методов с использованием штрафных функций с различными начальными точками получен массив данных, по которому построено графическое решение уравнения. Из графиков видно, что углы отклонений зависят друг от друга согласно полученной криволинейной зависимости, график которой приведен: задавая один угол, мы получаем другой угол (углы).

**2. Решение задачи.** Пусть  $x$  и  $y$  – углы отклонений (разветвлений) капиллярных сосудов в узле, как это изображено на рисунке 1.

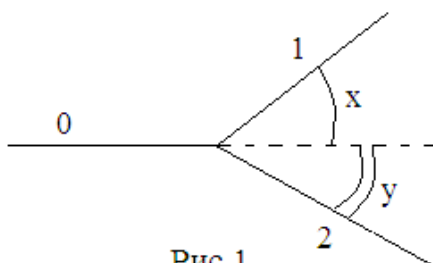


Рис.1

Пусть также  $r_0, r_1, r_2$  – радиусы капиллярных сосудов 0, 1, 2 соответственно. Тогда уравнения Муррея для сосудов 0, 1, 2, изображенных на рисунке 1, записываются в виде

$$\begin{cases} r_0^2 = (\cos x)r_1^2 + (\cos y)r_2^2, \\ r_1^2 = (-\cos(x+y))r_2^2 + (\cos x)r_0^2, \\ r_2^2 = -\cos(x+y)r_1^2 + (\cos y)r_0^2. \end{cases}$$

Покажем, что данная система линейно зависима, если ее рассматривать как систему относительно переменных  $r_0^2, r_1^2, r_2^2$ . Подставим  $r_0^2$  во вторую и третью формулы, приведем подобные. В итоге получим систему

$$\begin{cases} (\sin^2 x)r_1^2 - (\sin x)(\sin y)r_2^2 = 0, \\ -(\sin x)(\sin y)r_1^2 + (\sin^2 y)r_2^2 = 0, \end{cases}$$

которая линейно зависима, так как определитель этой системы равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2 x & -(\sin x)(\sin y) \\ -(\sin x)(\sin y) & \sin^2 y \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому вместо первого уравнения запишем уравнение непрерывности потока [1], из которого следует равенство для кубов:  $r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$ . Это равенство для объемов квантов крови в точке разветвления сосуда. Впервые термин «квант» крови был введен в [3]. Получаем новую систему уравнений

$$\begin{cases} r_0^3 = r_1^3 + r_2^3, \\ r_1^2 = (-\cos(x+y))r_2^2 + (\cos x)r_0^2, \\ r_2^2 = -\cos(x+y)r_1^2 + (\cos y)r_0^2 \end{cases}$$

относительно переменных  $r_0^2, r_1^2, r_2^2$ .

В результате преобразований получаем уравнение относительно углов  $x, y$ .

$$1 - \left( \frac{\cos x - \cos(x+y)\cos y}{\sin^2(x+y)} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{\cos y - \cos(x+y)\cos x}{\sin^2(x+y)} \right)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

следствием которого является уравнение

$$\sin^{\frac{3}{2}}(x+y) = \sin^{\frac{3}{2}}(y) + \sin^{\frac{3}{2}}(x). \quad (1)$$

Уравнение (1) может быть переписано с использованием углов между сосудами. Обозначим углы между сосудами 0-1, 1-2, 0-2 соответственно через  $u, v, w$ . Тогда связь между углами  $u, v, w$  и углами  $x, y$  имеет вид

$$u = \pi - x, w = \pi - y, v = x + y.$$

Так как  $\sin(x) = \sin(\pi - u) = \sin u$ ,  $\sin(y) = \sin(\pi - w) = \sin w$ ,  $x + y = v$ , то уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\sin^{\frac{3}{2}}(v) = \sin^{\frac{3}{2}}(w) + \sin^{\frac{3}{2}}(u).$$

На электронной вычислительной машине было промоделировано решение этого уравнения на языке *Python*. Для различных начальных

значений  $x$  было получено решение  $y(x)$ . Получен большой массив данных, по которому построен график решения (см. рис. 2 и 3).

Построим поверхность

$$z(x, y) = \sin^{\frac{3}{2}}(x + y) - \sin^{\frac{3}{2}}(y) - \sin^{\frac{3}{2}}(x).$$

Найдем ее сечение плоскостью, параллельной  $XOY$  на уровне  $z(x, y) = 0$ .

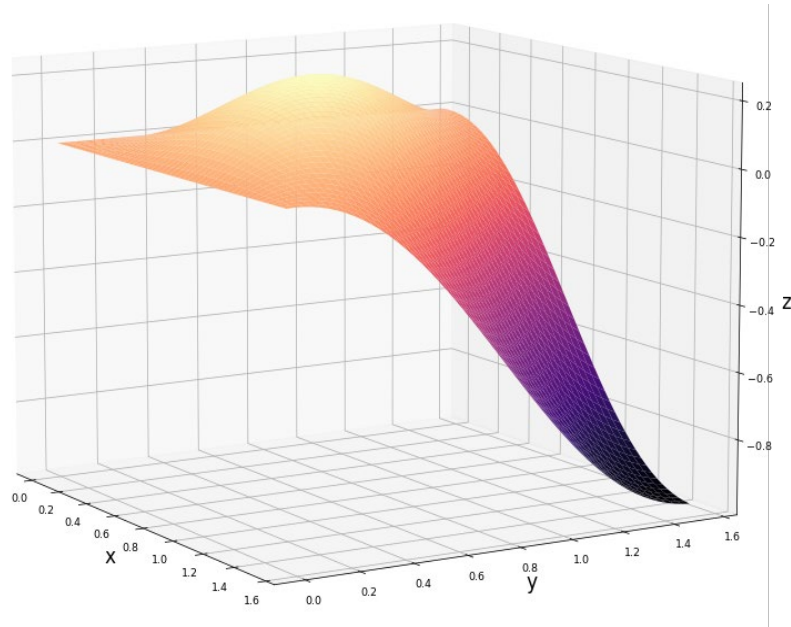


Рис. 2. Поверхность:  $z = z(x, y)$  при  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$



Рис. 3. График зависимости решения уравнения  $y = y(x)$

**3. Обсуждение результатов исследования.** Получение зависимости углов отклонений путем решения линейно независимой системы уравнений, состоящей из двух уравнений Муррея и одного уравнения непрерывности потока крови, является новым результатом в



математической морфологии. Решение полученного уравнения на компьютере важно для практического применения. Это решение дает нам возможность понять, как устроена наша капиллярная сеть для ее 3D модели.

Результаты настоящего исследования могут быть использованы при разработке микромашинных кибернетических платформ и технологий для культивирования саморазвивающихся функционирующих эндотелиальных капиллярных сетей и биофабрикации на их основе тканеподобных образований и органоподобных структурно-функциональных единиц с заданными биологическими и функциональными свойствами. Полученные уравнения важны для оптимального в смысле затраты энергии построения сети трубопроводов для перекачки нефти, газа и любой жидкости. Дальнейшая задача – это экспериментальная проверка уравнения Муррея.

### Литература

1. Murray C.D. The physiological principle of minimum work applied to the angle of branching of arteries // J. of General Physiology. 1926. Vol. 9. № 6. P. 835–841.
2. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. М.: Мир, 1969. 215 с.
3. Глотов В.А. Правила Ру и конфигурации микрососудистых бифуркаций // Биофизика. 1992. Т.37. Вып.2. С. 341–344.

**V.V. Borisov, I.M. Prudnikov**

Branch of the National Research University  
«Moscow Power Engineering Institute» in Smolensk,  
Smolensk State Medical University

### FORMULA FOR ANGLES OF A MICROVASCULAR NODE

**Keywords:** *the Murray equations, the rules for bifurcation of capillary networks, the principle of optimality for microvascular nodes.*

**Abstract.** *The main aim of this paper is to analyze further the equations by S.D.Murray, optimization of their solution in order to obtain an analytical and graphical relationship between the angular deviation of vessels of a microvascular node and analysis of the results on a computer, using the apparatus of penalty functions and MATCAD mathematical packages, as well as the Python algorithmic language. As a result, a graphical relationship between the angles of deviations in the microvascular node is given, and graphs of dependencies are plotted. Also, an important practical application of graphs and equations is noted. This is, first of all, the construction of artificial capillary networks, as well as the construction of branched pipeline networks for optimal, in terms of energy consumption, pumping oil, gas and any liquid.*

## ОПЕРАТОРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ И ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ РЕАКЦИЙ СИСТЕМНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ключевые слова: *импульсные нейронные сети, математическое моделирование импульсных нейронных сетей, системный нелинейный оператор, система импульсных характеристик системного оператора, операторная компонента системного оператора, множество всех композиций натурального числа с двумя частями.*

*Импульсные нейронные сети являются искусственными нейронными сетями третьего поколения. В работе предлагается метод математического моделирования таких сетей с помощью системных нелинейных операторов с обобщенными ядрами, которые свертываются с прямыми степенями входных воздействий. Исследуются прямые произведения выходных синаптических реакций двух таких систем. С помощью вводимого множества всех композиций натурального числа  $n$  с двумя частями доказана общая формула для вычисления прямого произведения реакций. Целью данной работы является разработка эффективного метода вычисления нелинейных импульсных характеристик последовательного и параллельных соединений рассматриваемых динамических систем, определяемых нелинейными системными операторами.*

Импульсные нейронные сети (SNN) [1–4] часто называют искусственными нейронными сетями третьего поколения. Первым поколением нейронных сетей был персептрон, который представлял собой простую модель нейрона и мог обрабатывать только двоичные данные. Нейронная сеть второго поколения включает в себя относительно широкий спектр, в том числе более широко используемую нейронную сеть ВР. Но, по сути, эти нейронные сети кодируются на основе частоты нервных импульсов.

Импульсные нейронные сети (иногда называемые спайковыми нейронными сетями), моделируемые нейроны которых ближе к реальности, также учитывают влияние информации о времени. Идея такова, нейрон в динамической нейронной сети активируется не при каждой итерации распространения (как в типичной многослойной персептронной сети), а только тогда, когда его мембранный потенциал достигает определенного значения. Когда нейрон активируется, он

подает сигнал другим нейронам, повышая или понижая их мембранный потенциал.

В импульсной нейронной сети текущий уровень активации нейрона (моделируемый как некое дифференциальное уравнение) обычно считается текущим состоянием, а входной выброс будет повышать текущее значение на определенный период времени, а затем постепенно снижаться. Появился ряд схем кодирования для интерпретации этих последовательностей выходных импульсов как фактического числа, и эти схемы кодирования учитывают как частоту импульсов, так и время между импульсами.

С помощью исследований в области нейробиологии создается модель нейронной сети на основе времени генерации импульсов. Этот новый тип нейронной сети использует пиковое кодирование. Получив точную синхронизацию импульсов, этот новый тип нейронной сети может получить больше информации и большую вычислительную мощность.

Алан Ллойд Ходжкин и Эндрю Хаксли предложили первую модель импульсной нейронной сети в 1952 году, которая описывала, как генерируются и распространяются потенциалы действия. Однако импульс не передается напрямую между нейронами, для этого требуется обмен химическими веществами, называемыми «нейротрансммитерами», между синаптическими щелями. Сложность и изменчивость этого понятия привели к разнообразию моделей нейронов.

С теоретико-информационной точки зрения найти модель, которая могла бы объяснить импульсы, известные как потенциалы действия, — проблема. Таким образом, фундаментальная проблема состоит в том, чтобы определить, взаимодействуют ли нейроны посредством временного кодирования. Временное кодирование показывает, что один нейрон может заменить сотни сигмовидных узлов скрытого слоя.

Архитектура SNN состоит из спайковых нейронов и взаимосвязанных синапсов, моделируемых регулируемые скалярными весами. Первым шагом в реализации SNN является кодирование аналоговых входных данных в последовательность всплесков с использованием подхода, основанного на скорости, некоторой формы временного кодирования или кодирования населения. Как упоминалось ранее, биологические нейроны в мозге (похожие на смоделированные импульсные нейроны) получают синаптические входы от других нейронов в нейронной сети. Биологические нейронные сети имеют как динамику генерации потенциала действия, так и сетевую динамику. По сравнению с реальными биологическими сетями сетевая динамика искусственных SNN значительно упрощена. В этом случае полезно предположить, что смоделированные спайковые нейроны имеют чисто пороговую динамику (в отличие, например, от рефрактерных периодов,

гистерезиса, динамики резонанса или свойств отскока после торможения). Активность пресинаптических нейронов модулирует мембранный потенциал постсинаптических нейронов, генерируя потенциалы действия или импульсы, когда мембранный потенциал превышает пороговое значение. Ходжкин и Хаксли первыми смоделировали это явление. В частности, они построили модель генерации потенциала действия на основе потенциалзависимых свойств ионных каналов в клеточной мембране аксонов кальмара. После модели НН с большим количеством биологических деталей и высокой вычислительной стоимостью были предложены различные модели нейронов, такие как модель импульсного отклика (SRM), модель нейрона Ижикевича и нейрон с утечкой интегрированного разряда (LIF). Модель LIF очень популярна, потому что она отражает интуитивную природу внешних входов для накопления зарядов через негерметичные клеточные мембраны с четко определенными пороговыми значениями.

Последовательности импульсов в импульсных нейронных сетях распространяются через синаптические соединения. Синапсы могут быть как возбуждающими, повышающими мембранный потенциал нейрона при получении входного сигнала, так и тормозными, снижающими мембранный потенциал нейрона. Результат обучения может изменить силу (вес) адаптивного синапса. Правила обучения SNN являются наиболее сложным компонентом разработки многослойных (глубоких) SNN, потому что недифференцируемость последовательностей шипов ограничивает популярные алгоритмы обратного распространения ошибки.

Глубокие сверточные нейронные сети (DCNN) в основном используются в приложениях, связанных с изображениями, и они состоят из ряда слоев свертки и объединения (подвыборки), за которыми следует классификатор с прямой связью. Этот тип сети показал отличные результаты в распознавании изображений, речи, биоинформатике, обнаружении объектов и сегментации. Разработана архитектура LeNet (ранняя глубокая *сверточная нейронная сеть* (CNN), используемая для классификации изображений). Вопрос в том, как обучить спайковую CNN с этой архитектурой, включив при этом свойства традиционных CNN. В случае компьютерного зрения первый слой свертки интерпретируется как извлечение основных визуальных признаков (иногда подобно выходу детектора ориентированных краев фильтром Габора). Последующие слои извлекают все более сложные функции для целей классификации. Слои объединения выполняют подвыборку и используют математические операции, такие как получение максимума или среднего по квадрату окрестности нейронов в соответствующей карте признаков, уменьшая размер предыдущего слоя.

Репрезентативные свойства ранних слоев в CNN, упомянутые выше, аналогичны свойствам ответа нейронов в первичной зрительной коре (V1), первой области коры в зрительной иерархии мозга приматов. Например, нейроны в области V1 обнаруживают основные визуальные особенности, такие как ориентированные края, на входном изображении. Каждый нейрон V1 является селективным для определенного направления, а это означает, что только нейроны, селективные для этого направления, реагируют максимально при предъявлении стимула с этим направлением. Методы обучения представлению используют нейронные сети, такие как автокодировщики и разреженное кодирование, чтобы научиться обнаруживать визуальные функции, подобные свойствам рецептивного поля в V1. Биологические SNN также изучались в разреженном кодировании, анализе независимых компонентов (ICA) и обучении представлений для автокодировщиков на основе STDP.

Как упоминалось ранее, CNN обычно используют ядра фильтров рецептивного поля, аналогичные V1 на более ранних уровнях, для извлечения признаков из стимулов путем свертки ядра по входным данным (например, изображению). Последующие уровни объединяют ядра предыдущего уровня для изучения все более сложных и абстрактных признаков стимула. Фильтры представления (обученные или созданные вручную) и правила обучения STDP могут использоваться для разработки CNN с пиками. Многие импульсные CNN используют сверточные ядра на первом уровне и достигают высокой производительности классификации. Difference of Gaussian (DOG) — это обычный созданный вручную фильтр, используемый для извлечения признаков на ранних уровнях SNN. Этот выбор биологически мотивирован, чтобы имитировать ввод из первичной зрительной коры млекопитающих. В недавнем исследовании в качестве входного уровня SNN использовался фильтрующий слой DOG, за которым следовал сверточный слой объединения, обученный STDP. Структура сети извлекает визуальные признаки, которые передаются классификатору SVM с точностью 98,4% по MNIST. Для обучения сверточных фильтров в недавних CNN с добавлением импульсов был реализован метод обучения иерархическому представлению импульсов.

CNN без всплесков обучаются с использованием алгоритма обратного распространения ошибки. Совсем недавно обратное распространение также использовалось для обучения импульсных CNN. Используя аппроксимацию, предложенную Пандой и Роем [2], они показывают, как построить многоуровневый сверточный автоэнкодер (AE) с импульсами, используя обратное распространение ошибки.

Сверточный автоэнкодер с импульсами является важным модулем для реализации CNN с глубокими пиками. Их экспериментальная реализация (SpikeCNN) использует два уровня обучения в наборе

данных MNIST (рукописные цифры) и три уровня обучения в наборе данных CIFAR-10 (десять классов крошечных изображений). Они использовали локальное послойное обучение сверточных слоев, в то время как Ли и др. разработали сквозной метод обучения градиентного спуска. Оба метода используют нейронные мембранные потенциалы вместо дифференцируемых функций активации для применения алгоритма обратного распространения. Метод Ли и др. (для расширения CNN) показывает лучшую производительность, чем иерархические сверточные автокодировщики. В этих моделях более высокие мембранные потенциалы были связаны с более высокой вероятностью импульса.

Основной подход к использованию платформы расширения, избегая процесса обучения CNN, заключается в использовании обученных синаптических весов для преобразования уже обученной CNN в архитектуру расширения, аналогично методу преобразования ANN в SNN. Многочисленные исследования показали, что преобразованные импульсные CNN обладают высокой производительностью (близкой к обычным CNN), используя меньше операций и потребляя меньше энергии, что позволяет реализовывать глубокие CNN на оборудовании. Одним из первых успешных методов преобразования CNN в SNN для энерго-эффективного распознавания образов является архитектура, основанная на методе модификации передаточной функции во время обучения. Онлайн-обучение обеспечивает многоуровневое обучение в SNN, но с меньшей точностью. Кроме того, как и ожидалось, точность CNN с шипами выше, чем у импульсных DBN и полносвязных SNN с точки зрения классификации изображений. Это сравнение может дать представление о различных архитектурах SNN и механизмах обучения, чтобы выбрать правильный инструмент для правильной цели будущих исследований.

Методы глубокого обучения недавно продемонстрировали прорыв во многих областях распознавания образов. Хотя они эффективны при извлечении и классификации иерархических признаков, эти типы нейронных сетей являются дорогостоящими в вычислительном отношении и их трудно реализовать на оборудовании портативных устройств. В другой области исследований архитектуры нейронных сетей SNN были описаны как энерго-эффективные модели из-за их разреженной коммуникационной структуры на основе спайков. В недавних исследованиях была предпринята попытка использовать сильные стороны этих двух структур (глубокое обучение и SNN) для разработки многоуровневых архитектур SNN для достижения высокой производительности современных глубоких сетей при одновременном создании биологически вдохновленной и эффективной платформы. Кроме того, в литературе показано, что мозг обнаруживает паттерны

стимуляции посредством многоуровневой связи SNN с использованием последовательностей спайков в адаптивных синапсах.

Биоинтерпретируемые спайковые системы взаимодействуют с помощью спайковых последовательностей без видимых производных. Это делает невозможным обучение SNN напрямую с использованием оптимизации на основе производных. Поскольку биологические нейроны используют разреженную, случайную связь на основе импульсов, сети спайков могут быть подходящей отправной точкой для моделирования функций мозга.

SNN со специфическими нейронными структурами требуют новых моделей нейронов и методов обучения. Спайковые нейроны общаются через дискретные последовательности спайков, а синапсы различают паттерны стимуляции посредством локальной адаптации. Задача удовлетворения этих требований может быть выполнена с помощью биоинспирированных нейронных симуляций, которые объединяют стимулы и высвобождают дискриминационные паттерны спайков в соответствии с адаптивными фильтрами, связанными с наборами синаптических весов. Важной задачей при разработке SNN является формулировка соответствующих правил обучения для обнаружения пространственно-временных локальных паттернов последовательностей спайков. Производительность, о которой сообщают современные методы, предполагает, что методы глубокого обучения на основе импульсов работают наравне с традиционными DNN. Кроме того, SNN основаны на технологии моделирования функций человеческого мозга, и, как и человеческий мозг в будущем, их производительность будет намного лучше, чем у традиционных.

Для математического моделирования импульсных нейронных сетей мы будем использовать развитую теорию системных операторов [5; 6] с ядрами, которые являются свертками импульсных функций с прямыми степенями входящих импульсных воздействий.

Пусть  $X$  – пространство входных воздействий, то есть пространство бесконечно дифференцируемых функций  $x$ , для которых существует такое число  $a(x)$ , что  $x(t) = 0$  для всех  $t < a(x)$ .

Системным оператором степени  $m$  будем называть оператор  $A$ , определяемый следующим равенством:

$$Ax = \sum_{n=1}^m S_n(a_n * x^n) \quad (x \in X),$$

где  $x^n$  –  $n$ -я прямая степень функции  $x \in X$ ,  $a_n$  – функция на пространстве  $\mathbb{R}^n$ , носитель которой содержится в  $[0; +\infty)^n$ ,  $*$  – операция свертки,  $S_n$  – оператор сокращения переменных степени  $n$ .

Функцию  $a_n$  назовем импульсной характеристикой порядка  $n$ , а семейство  $(a_n)$  – системой импульсных характеристик оператора  $A$ .

Линейный оператор  $A_1$ , определяемый равенством

$$A_1x = a_1 * x,$$

будем называть первой операторной компонентой оператора  $A$ .

Квадратичный оператор  $A_2$ , определяемый равенством

$$A_2(x_1, x_2) = S_2(a_2 * (x_1 \times x_2)) \quad (x_1, x_2 \in X),$$

называется второй операторной компонентой оператора  $A$ .

В общем случае, для любого натурального числа  $n \leq m$  определим оператор  $A_n$ ,

$$A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = S_n(a_2 * (x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n)) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \in X),$$

который будем называть  $n$ -й операторной компонентой оператора  $A$ .

В случае, когда  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ , будем обозначать  $x^n = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ . Тогда имеем:

$$A_n x^n = S_n(a_2 * x^{\otimes n})$$

и, следовательно,

$$Ax = \sum_{n=1}^m A_n x^n \quad (x \in X).$$

Рассмотрим прямое произведение реакций двух системных эволюционных операторов.

Пусть  $A$  и  $B$  – полиномиальные системные операторы степени  $m_1$  и  $m_2$  соответственно:

$$Ax = \sum_{n=1}^{m_1} S_n(a_n * x^{\otimes n}), \quad Bx = \sum_{j=1}^{m_2} S_j(b_j * x^{\otimes j}).$$

И пусть  $u = Ax$ ,  $v = Bx$ .

Рассмотрим прямое произведение  $u \times v$ . В силу билинейности прямого произведения имеем:

$$\begin{aligned} u \times v &= Ax \times Bx = \sum_{n=1}^{m_1} S_n(a_n * x^n) \times \sum_{j=1}^{m_2} S_j(b_j * x^j) = \\ &= \sum_{n=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} S_n(a_n * x^n) \times S_j(b_j * x^j) = \sum_{n=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} S_{n,j}((a_n * x^n) \times (b_j * x^j)), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $S_{n,j}$  – оператор сокращения переменных, действие которого на произвольную функцию  $f$ , имеющей  $n+j$  независимых переменных, определяется следующей формулой:

$$S_{n,j} f(t_1, t_2, \dots, t_n, s_1, s_2, \dots, s_j) = f(t, t, \dots, t, s, s, \dots, s).$$



Рассмотрим теперь выражение  $(a_n * x^{\otimes n}) \times (b_j * x^{\otimes j})$ . Для его преобразования мы доказали следующее равенство:

$$(a_n * x^n) \times (b_j * x^j) = (a_n \times b_j) * x^{n+j}. \quad (2)$$

Применяя равенство (2) к соотношению (1), получаем

$$u \times v = Ax \times Bx = \sum_{n_1, n_2=1}^{m_1, m_2} S_{n_1, n_2} ((a_{n_1} \times b_{n_2}) * x^{n_1+n_2}). \quad (3)$$

Множество всех композиций натурального числа  $n$  с 2 частями будем обозначать  $K_n$ . Рассмотрим также понятие композиции с ограничениями. Пусть  $m = (m_1, m_2)$ . Будем говорить, что композиция  $\alpha = (n_1, n_2) \in K_n$  удовлетворяет ограничению  $m$ , если  $n_k \leq m_k$  ( $k = 1, 2$ ). Множество всех композиций натурального числа  $n$  с 1 частями, удовлетворяющих ограничению  $m$ , будем обозначать  $K_{n,m}$ .

С помощью множества  $K_{n,m}$  равенство можно записать в виде:

$$Ax \times Bx = \sum_{n=2}^{|m|} \sum_{(n_1, n_2) \in K_{n,m}} S_{n_1, n_2} ((a_{n_1} \times b_{n_2}) * x^n).$$

Полученный результат распространяется на прямые произведения  $A_1 x \times A_2 x \times \dots \times A_j x$  реакции системных операторов  $A_1, A_2, \dots, A_j$  на входной импульс  $x(t)$ .

## Литература

1. Maass, Wolfgang. Networks of spiking neurons: The third generation of neural network models. – Neural Networks. 1997. No. 10 (9). P. 1659–1671.
2. Panda P., Roy K. Unsupervised regenerative learning of hierarchical features in spiking deep networks for object recognition // International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). IEEE, 2016. P. 299–306.
3. Anwani N., Rajendran B. NormAD-normalized approximate descent based supervised learning rule for spiking neurons[C] // International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). IEEE. 2015. P. 1–8.
4. Редько В.Г. Эволюция, нейронные сети, интеллект: Модели и концепции эволюционной кибернетики. М.: Ленанд, 2019. 224 с.
5. Вувуникян, Ю.М., Ваньли Чэнь. Последовательное соединение мультиполярных эволюционных операторов с обобщенными импульсными характеристиками // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной научной конференции, Минск, 22–25 ноября 2021 г. : в 2 ч. / сост. В. В. Лепин ; Национальная академия наук Беларуси, Институт математики, Белорусский государственный университет. – Минск: Беларуская навука, 2021. – Ч. 1. – С. 18–19.

6. Вувуникян Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками: монография. Гродно: ГрГУ, 2007. 224 с.

**Y.M. Vuvunikian, Vanli Chen**  
Grodno State University

## **OPERATOR MODELING OF A IMPULSED NEURAL NETWORK AND DIRECT PRODUCTION OF THE REACTIONS OF SYSTEM OPERATORS**

**Keywords:** *impulse neural networks, mathematical modeling of impulse neural networks, systemic nonlinear operator, system of impulse responses of a system operator, operator component of a system operator, set of all compositions of a natural number  $n$  with two parts.*

**Abstract.** *Impulse neural networks are third-generation artificial neural networks. The paper proposes a method for mathematical modeling of such networks using system nonlinear operators with generalized kernels, which are convolved with direct powers of input actions. The direct products of output synaptic reactions of two such systems are investigated. Using the introduced set of all compositions of a natural number  $n$  with two parts, we prove a general formula for calculating the direct product of reactions. The purpose of this work is to develop an effective method for calculating the nonlinear impulse responses of serial and parallel connections of the dynamic systems under consideration, determined by nonlinear system operators.*

**С.А. Гомонов**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.54

## **О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ**

**Ключевые слова:** *полианалитический полином; полианалитическая функция; топологическое пространство; многозначное отображение; предельное множество; полиномиальная линия; алгебраическая функция.*

*В статье рассматриваются некоторые приемы вычисления предельных множеств в точке  $\infty$  полианалитических полиномов, основанные на применении свойств алгебраических функций одного переменного; формулируется критерий наличия конечных элементов в*

предельном множестве в точке  $\infty$  полианалитического полинома от пары комплексных сопряженных переменных.

1. Если  $F$  – какое-нибудь многозначное отображение (м-отображение) (см. [2]; [3]; [7]) из пространства  $\bar{C}^k$  в пространство  $\bar{C}^m$ , причем  $F(\bar{C}^k \setminus C^k) = \emptyset$ , то через  $C(F, M)$  (см. [5]; [9]; [12–16]) договоримся обозначать множество всех таких точек  $l$  из  $\bar{C}^m$ , что для каждой из них и для множества  $M \subset \bar{C}^k$  выполняются условия:

1) существует в  $\bar{C}^k$  последовательность  $(z_n)$  такая, что  $z_n \rightarrow z_0$ , где  $z_0 \in M$ ;

2) существует в  $\bar{C}^m$  последовательность  $(w_n)$ , что (для любого  $n \in N$ )  $w_n \in F(z_n)$  и  $w_n \rightarrow l$ .

О последовательности  $(z_n)$  будем говорить, что она порождает точку  $l$  из  $C(F, M)$  – предельного множества м-отображения  $F$  на совокупности  $M$ .

Замена символа  $\bar{C}$  на символ  $\bar{R}$  в приведенном выше определении дает возможность ввести аналогичное понятие и для м-отображения из пространства  $\bar{R}^k$  в пространство  $\bar{R}^m$ .

Пусть задано м-отображение  $F = F_2^{-1} \circ F_1$ , где  $F_1$  – м-отображение из  $\bar{C}^r$  в  $\bar{C}^m$ , а  $F_2$  – м-отображение из  $\bar{C}^r$  в  $\bar{C}^k$ ,  $M \subset \bar{C}^k$ , тогда обозначим через  $C(F_1, F_2, M)$  множество  $C(F, M) = C(F_2^{-1} \circ F_1, M)$  и назовем его условным предельным множеством м-отображения  $F_1$  относительно м-отображения  $F_2$  на совокупности  $M$  (см. [9]).

В данной статье указываются приемы, основанные на использовании свойств алгебраических функций одного переменного, позволяющие найти в принципе все точки множества  $L = C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , где  $p(z, \bar{z})$  – произвольный полином от пары переменных  $z$  и  $\bar{z}$ , а также, в частности, сформулировать критерий наличия в нем конечных элементов и даже указать характеристические свойства последовательностей, порождающих все конечные элементы из  $L$ .

Договоримся далее употреблять стандартные обозначения (см. [4; 8]): символ  $\mathbf{C}[z, \bar{z}]$  будет обозначать кольцо полиномов от пары переменных  $z$  и  $\bar{z}$ , его элементы будем называть полианалитическими полиномами (короче: п.а. полиномами); символ  $\mathbf{C}(z, \bar{z})$  будет обозначать поле рациональных функций от  $z$  и  $\bar{z}$ . Стандартный смысл будут иметь и такие символы как:  $\mathbf{C}[z]$ ,  $\mathbf{C}(z)$ ,  $R(x, y)$ . Напомним о естественной связи предельных множеств п.а. полиномов с полиномиальными кривыми, то есть с линиями, задаваемыми уравнениями вида  $z = l(t)$ , где

$t \in R$ , а  $l(t)$  – многочлен с комплексными коэффициентами. (см. [1; 10]). В дальнейшем эти кривые будем считать нетривиальными (то есть  $l(t) \neq \text{const}$ ) и, как правило, пополненными точкой  $\infty$ . Чтобы оговорить последнее, будем множеством значений для параметра  $t$  указывать  $\bar{R}$ . Договоримся также называть нетривиальным всякий отличный от константы полином.

2. Исходным в дальнейших рассуждениях станет описываемый в следующей теореме способ понижения порядка полианалитических функций определенного класса в процессе поиска их предельных множеств в точке  $\infty$ . Напомним, что функцию  $f(z)$ , представимую в некоторой области  $D \subset \mathbb{C}$  в виде  $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) \bar{z}^k$ , где все  $f_k(z)$  – аналитические функции в  $D$ , называют полианалитической в этой области, а число  $n$  называют ее порядком;  $f_k(z)$  называют аналитическими компонентами функции  $f(z)$ .

**Теорема 1.** Для любого полианалитического полинома  $p(z, \bar{z})$  с  $m = \deg_{\bar{z}} p(z, \bar{z}) > 1$  существует конечное число следующих многозначных отображений из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}$ :

$$p_j(z, \bar{z}) = c_1^{(j)}(z) \bar{z}^{m-1} + c_2^{(j)}(z) \bar{z}^{m-2} + \dots + c_m^{(j)}(z)$$

и  $A_j(z) = p_j(z) \bar{z} + q_j(z)$  ( $j = 1, \dots, m$ ), где  $p_j(z)$ ,  $q_j(z)$ ,  $c_k^{(j)}(z)$  ( $j, k \in \{1, \dots, m\}$ ) – однозначные голоморфные ветви алгебраических функций одного переменного  $z$  (полностью определяемых аналитическими компонентами полинома  $p(z, \bar{z})$ ), что

$$C(p(z, \bar{z}), \infty) = C(p(z, \bar{z}), \varphi, \mathbb{C} \times \{\infty\}) \cup \left( \bigcup_{j=1}^m C(p_j(z, \bar{z}), \varphi_j, (0, \infty)) \right) \cup \{\infty\},$$

причем  $\varphi_j(z) = (A_j(z), z)$  – многозначные отображения из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}^2$  (для любого  $j = 1, \dots, m$ ).

**Доказательство.** Пусть  $p(z, \bar{z}) = p_m(z) \bar{z}^m + p_{m-1}(z) \bar{z}^{m-1} + \dots + p_0(z)$ , где  $p_j(z) \in \mathbb{C}[z]$  ( $j = 0, \dots, m$ ) и  $p_m(z) = a_k z^k + \dots + a_0 \neq 0$ . Рассмотрим алгебраическую функцию  $w$ , заданную следующим уравнением:

$$w^m + \frac{p_{m-1}(z)}{p_m(z)} w^{m-1} + \dots + \frac{p_1(z)}{p_m(z)} w + \frac{p_0(z)}{p_m(z)} = 0.$$

Ее однозначные голоморфные ветви  $a_1(z), \dots, a_m(z)$  могут быть разложены ([8, с. 234–243]) в окрестности точки  $\infty$  в степенные ряды по дробным степеням  $z$ , чьи показатели будут с фиксированными натуральными знаменателями, причем у каждого из этих степенных рядов будет лишь конечное число слагаемых – степеней  $z$  с положительными

показателями и ненулевыми коэффициентами. В противном случае у алгебраической функции оказалась бы в  $\infty$  существенно особая точка. Важно также, что в данных исследованиях не потребуется знание всех членов этих степенных рядов, но только членов, сходящихся при  $z \rightarrow \infty$  к  $\infty$ , или, если даже и к нулю, то достаточно медленно, так что их произведение на соответствующий множитель  $\bar{z}^j$  ( $j \in N$ ) не дает нулевого предела. В дальнейшем весьма часто придется отбрасывать «лишние» бесконечные отрезки степенных рядов, заведомо не влияющие и на искомое предельное множество и на совокупность последовательностей, порождающих все его конечные точки.

Используем теперь для  $p(z, \bar{z})$  следующее представление:

$$p(z, \bar{z}) = p_m(z) \cdot (\bar{z} - a_1(z)) \cdot (\bar{z} - a_2(z)) \cdot \dots \cdot (\bar{z} - a_m(z)),$$

причем для некоторого упрощения записей перейдем от  $p(z, \bar{z})$  к функции  $\tilde{p}(z, \bar{z}) = a_k z^k (\bar{z} - a_1(z)) (\bar{z} - a_2(z)) \cdot \dots \cdot (\bar{z} - a_m(z))$ , используя следующее свойство:

**Свойство 1.** Если  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$ , то для любой функции  $w(z)$  комплексного переменного  $z$  с неограниченной областью определения имеет место равенство:

$$C(p(z) \cdot w(z), \infty) = C(a_n z^n \cdot w(z), \infty).$$

Существенно, что переход к функции  $\tilde{p}(z, \bar{z}) = a_n z^n \cdot w(z)$  не изменит как предельное множество, так и совокупность порождающих последовательностей (то есть последовательность  $(z_n)$ , порождающая точку из  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , порождает эту же точку в  $C(\tilde{p}(z, \bar{z}), \infty)$  и наоборот).

Запишем теперь полином  $p(z, \bar{z})$  в следующем виде:

$$p(z, \bar{z}) = \left( (p_m(z))^{1/m} \cdot \bar{z} - a_1(z) (p_m(z))^{1/m} \right) \cdot \dots \cdot \left( (p_m(z))^{1/m} \cdot \bar{z} - a_m(z) (p_m(z))^{1/m} \right),$$

где под  $(p_m(z))^{1/m}$  будем понимать любую из однозначных голоморфных ветвей этой алгебраической функции (например, принимающую в одной из точек  $z_0$  со свойством  $p_m(z_0) = 1$  значение 1 и определенную на внешности некоторого круга плоскости  $\mathbb{C}$ , в которой, быть может, осуществлен разрез вдоль некоторого луча). Отметим также, что без нарушения общности можно дополнительно предположить, что  $a_k = 1$ , так как всегда можно воспользоваться следующим свойством.

**Свойство 2.** Если  $w(z)$  – определенная и непрерывная на  $\mathbb{C}$  функция и  $C(w(z), \infty) = \{\infty\}$ , то для любой функции  $\varphi(z)$  выполнится равенство  $C(w(\varphi(z)), \infty) \setminus \{\infty\} = w(C(\varphi(z), \infty) \setminus \{\infty\})$ , в частности,

$C(a \cdot \varphi(z) + b, \infty) = a \cdot C(\varphi(z), \infty) + b$ , где  $a, b$  – любые комплексные числа,  $a \neq 0$ , если, разумеется, считать, что  $a \cdot \infty + b = \infty$ .

По поводу выбора однозначной голоморфной ветви алгебраической функции  $w$ , заданной уравнением  $w^m = p_m(z)$ , стоит отметить, что в дальнейших рассуждениях важно будет только одно: чтобы всюду, где стоит  $(p_m(z))^{1/m}$ , бралось одно и то же значение этой многозначной функции.

Пусть теперь последовательность  $(z_n)$  порождает какую-нибудь конечную точку из  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ . Тогда последовательности

$$(A_j(z_n)) = ((p_m(z_n))^{1/m} \bar{z}_n - a_j(z_n)(p_m(z_n))^{1/m}) \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1)$$

можно будет считать (учитывая возможность перехода любое число раз к бесконечной подпоследовательности последовательности  $(z_n)$ ) удовлетворяющими одному из двух условий:

- 1) все последовательности (1) сходятся к конечным пределам;
- 2) среди последовательностей (1) имеется хотя бы одна, сходящаяся к  $\infty$ , причем в этом случае среди них обязательно найдется последовательность (пусть, для определенности, это  $(A_1(z_n))$ ), сходящаяся к нулю.

В первом случае, так как

$$\lim_{z_n \rightarrow \infty} (A_{j_1}(z_n) - A_{j_2}(z_n)) = \lim_{z_n \rightarrow \infty} ((p_m(z_n))^{1/m} \cdot (a_{j_1}(z_n) - a_{j_2}(z_n))),$$

причем он равен вполне определенному конечному числу, не зависящему от конкретного вида  $(z_n)$ , то есть можно заключить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(z_n, \bar{z}_n) = l(l + a_2) \cdot \dots \cdot (l + a_m),$$

где  $a_k = \lim_{z_n \rightarrow \infty} (A_k(z_n) - A_1(z_n))$  ( $k = 2, \dots, m$ ), а  $l$  – некоторый конечный (в принципе – любой) элемент из множества

$$C((p_m(z))^{1/m} \cdot (\bar{z} - a_1(z)), \infty).$$

Числа  $a_2, \dots, a_m$  будут без труда найдены (особенно после разложения функций  $A_k(z) - A_1(z)$ , где  $k \in \{2, \dots, m\}$ , в степенные ряды по дробным степеням  $z$  и после отбрасывания бесконечных отрезков полученных рядов) как пределы рациональных функций от степени  $z$  с положительным показателем, а значит, будут определены совершенно независимо от конкретного вида последовательности  $(z_n)$ , порождающей конечную точку из  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ . Таким образом, все свелось к исследованию множества

$$C((p_m(z))^{1/m} \cdot (\bar{z} - a_1(z)), \infty)$$

и поиску всех последовательностей, порождающих все его конечные точки.

Во втором случае, обозначив  $B_j(z) = A_j(z) - A_1(z)$  ( $j = 2, \dots, m$ ) и учитывая возможность считать функции  $B_j(z)$  заданными степенными рядами по дробным степеням  $z$  и с конечным числом членов положительной степени, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p(z_n, \bar{z}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A_1(z_n) \cdot (A_1(z_n) + B_2(z_n)) \cdot \dots \cdot (A_1(z_n) + B_m(z_n))) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((A_1(z_n))^m + C_1(z_n) \cdot (A_1(z_n))^{m-1} + \dots + C_m(z_n)), \end{aligned}$$

причем функции  $C_j(z)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) возникают в результате подстановки функций  $B_j(z)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) в некоторые многочлены над  $\mathbf{C}$ . Это позволяет считать функции  $C_j(z)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) рациональными над  $\mathbf{C}$  от некоторой степени символа  $z$  с положительным дробным показателем. Но по условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_1(z_n) = 0$ , следовательно:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p(z_n, \bar{z}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (C_1(z_n) \cdot (A_1(z_n))^{m-1} + \dots + C_m(z_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{C}_1^{(1)}(z_n) \bar{z}_n^{m-1} + \tilde{C}_2^{(1)}(z_n) \bar{z}_n^{m-2} + \dots + \tilde{C}_m^{(1)}(z_n)), \end{aligned}$$

где  $\tilde{C}_j^{(1)}(z)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) – однозначные голоморфные ветви алгебраических функций, которые можно считать заданными в виде степенных рядов от степени символа  $z$  с дробным показателем. Причем эти ряды содержат конечное число членов с положительными показателями степеней  $z$ . Рассмотрим функцию:

$$p_1(z, \bar{z}) = \tilde{C}_1^{(1)}(z) \bar{z}^{m-1} + \tilde{C}_2^{(1)}(z) \bar{z}^{m-2} + \dots + \tilde{C}_m^{(1)}(z).$$

Вводя следующие отображения из  $\bar{\mathbf{C}}$  в  $\bar{\mathbf{C}}^2$ :  $\varphi_j(z_1) = (A_j(z_1), z_1)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) и используя понятие условного предельного множества, получим:

$$C(p(z, \bar{z}), \varphi_1, (0, \infty)) = C(p_1(z, \bar{z}), \varphi_1, (0, \infty)).$$

Если же аналогичные рассуждения провести для всех  $A_j(z)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), то, объединяя оба случая, получим, что

$$C(p(z, \bar{z}), \infty) = C(p(z, \bar{z}), \varphi_1, \mathbf{C} \times \{\infty\}) \cup \left( \bigcup_{j=1}^m C(p_j(z, \bar{z}), \varphi_j, (0, \infty)) \right) \cup \{\infty\},$$

где

$$p_j(z, \bar{z}) = \tilde{C}_1^{(j)}(z) \bar{z}^{m-1} + \tilde{C}_2^{(j)}(z) \bar{z}^{m-2} + \dots + \tilde{C}_m^{(j)}(z) \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

а  $\tilde{C}_k^{(j)}$  – однозначные голоморфные ветви алгебраических функций, заданные степенными рядами от дробной степени символа  $z$ , причем рядами с конечным числом членов с положительными показателями степеней этого символа ( $k = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ). Теорема 1 доказана.

Применяя к  $p_j(z, \bar{z})$  те же рассуждения, что были применены к  $p(z, \bar{z})$  (причем вводя соответствующие алгебраически функции и многозначные отображения, либо удастся добиться уменьшения показателя символа  $\bar{z}$ , либо все ограничится исследованиями, составившими первый случай доказательства теоремы 1), в конечном итоге получим следующую теорему.

**Теорема 2.** Для любого полианалитического полинома  $p(z, \bar{z})$  с  $m = \deg_{\bar{z}} p(z, \bar{z}) > 1$  существуют такие многозначные отображения из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}$ :

$$A_{j_1}(z) = p_{j_1}(z)\bar{z} + q_{j_1}(z), \quad p_{j_1}(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{m-1} C_{j_1}^{(k)}(z)\bar{z}^k,$$

$$A_{j_1, j_2}(z) = p_{j_1, j_2}(z)\bar{z} + q_{j_1, j_2}(z), \quad p_{j_1, j_2}(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{m-2} C_{j_1, j_2}^{(k)}(z)\bar{z}^k,$$

.....

$$A_{j_1, \dots, j_{m-1}}(z) = p_{j_1, \dots, j_{m-1}}(z)\bar{z} + q_{j_1, \dots, j_{m-1}}(z), \quad p_{j_1, \dots, j_{m-1}}(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^1 C_{j_1, \dots, j_{m-1}}^{(k)}(z)\bar{z}^k,$$

где  $C_{j_1}^{(k)}(z), \dots, C_{j_1, \dots, j_{m-1}}^{(k)}(z)$ ,  $p_{j_1}(z), q_{j_1}(z), \dots, p_{j_1, \dots, j_{m-1}}(z), q_{j_1, \dots, j_{m-1}}(z)$  — однозначные голоморфные ветви алгебраических функций одного переменного  $z$ , а  $j_1$  принимает любое значение из набора  $\{1, \dots, m\}$ ;  $j_2$  — из набора  $\{1, \dots, m-1\}$ ; ...;  $j_{m-2}$  — из  $\{1; 2\}$ , что

$$C(p(z, \bar{z}), \infty) = C(p(z, \bar{z}), \varphi_{j_1}, \mathbb{C} \times \{\infty\}) \cup \left( \bigcup_{j_2=1}^m (C(p_{j_1}(z, \bar{z}), \varphi_{j_1, j_2}, \mathbb{C} \times \{0\} \times \{\infty\}) \cup \right.$$

$$\left. \bigcup_{j_3=1}^{m-1} (C(p_{j_1, j_2}(z, \bar{z}), \varphi_{j_1, j_2, j_3}, \mathbb{C} \times \{0\}^2 \times \{\infty\}) \cup \dots \right.$$

$$\left. \bigcup_{j_{m-2}=1}^3 (C(p_{j_1, \dots, j_{m-2}}(z, \bar{z}), \varphi_{j_1, \dots, j_{m-1}}, \mathbb{C} \times \{0\}^{m-1} \times \{\infty\}) \cup \right.$$

$$\left. \bigcup_{j_{m-1}=1}^2 (C(p_{j_1, \dots, j_{m-1}}(z, \bar{z}), \varphi_{j_1, \dots, j_{m-1}}, \mathbb{C} \times \{0\}^{m-1} \times \{\infty\})) \right) \cup \{\infty\},$$

причем  $\varphi_{j_1} = (A_{j_1}(z), z)$ ;  $\varphi_{j_1, j_2} = (A_{j_1, j_2}(z), A_{j_1}(z), z)$ ; ...;  $\varphi_{j_1, \dots, j_{m-1}} = (A_{j_1, \dots, j_{m-1}}(z), \dots, A_{j_1}(z), z)$  — это многозначные отображения из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}^2$ , из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}^3$ , ...,  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}^m$ , соответственно.

Все конечные элементы каждого из множеств

$$C(p_{j_1, \dots, j_s}(z, \bar{z}), \varphi_{j_1, \dots, j_{s+1}}, \mathbb{C} \times \{0\}^s \times \{\infty\}) \quad (s = 1, \dots, m-1)$$



образуют совокупность значений некоторого нетривиального полинома  $P_{j_1, \dots, j_s}(z) \in \mathbb{C}[z]$  при  $z \in C(A_{j_1, \dots, j_s}(z), \varphi_{j_1, \dots, j_s}, \mathbb{C} \times \{0\}^{s-1} \times \{\infty\}) \setminus \{\infty\}$ , и эта совокупность представляет собой объединение конечного числа полиномиальных линий.

**Доказательство.** Первая часть теоремы 2, как уже отмечалось, следует из теоремы 1, вторая же часть является непосредственным следствием из лемм 1–4, в которых будет выяснено строение предельного множества в точке  $\infty$  произвольной функции вида

$$p(z) \cdot \bar{z} + q(z), \quad (3)$$

где  $p(z)$  и  $q(z)$  – однозначные голоморфные ветви некоторых алгебраических функций одного переменного  $z$ , а также будут найдены последовательности, порождающие все конечные точки из  $C(p(z)\bar{z} + q(z), \infty)$ .

Для функций вида (3) могут быть предложены некоторые преобразования, не меняющие предельного множества в точке  $\infty$  и сохраняющие совокупность всех последовательностей, порождающих все конечные точки из  $C(p(z)\bar{z} + q(z), \infty)$ : можно отбросить, начиная с некоторого, все последующие члены рядов, в которые разлагаются  $p(z)$  и  $q(z)$  в окрестности точки  $\infty$ , причем для  $q(z)$  это можно осуществить, начиная с того члена, чей показатель отрицателен, а для  $p(z)$  – с того члена, чей показатель меньше, чем  $-1$ . Очевидно, не нарушая общности, можно считать, что знаменатели дробных степеней символа  $z$  в разложениях  $p(z)$  и  $q(z)$  – одно и то же число, то есть

$$C(p(z)\bar{z} + q(z), \infty) = C\left(\left(p_s z^{\frac{s}{q}} + p_{s-1} z^{\frac{s-1}{q}} + \dots + p_0 + p_{-1} z^{-\frac{1}{q}} + p_{-2} z^{-\frac{2}{q}} + \dots + p_{-q} z^{-1}\right) \cdot \bar{z} + r_f z^{\frac{f}{q}} + r_{f-1} z^{\frac{f-1}{q}} + \dots + r_0, \infty\right).$$

Еще одно упрощение можно предложить на основании следующего свойства.

**Свойство 3.** Для любого  $m$ -отображения  $w(z)$  из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}$ , со свойством  $w(\infty) = \emptyset$ , и произвольного нетривиального многочлена  $p(z)$  из  $\mathbb{C}[z]$

$$C(w(z), \infty) = C(w(p(z)), \infty),$$

в частности, для любых  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ ,  $C(w(z), \infty) = C(w(az + b), \infty)$ .

Сформулированное свойство позволяет заменить в выражении  $p(z)\bar{z} + q(z)$  символ  $z$  на  $z^q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , что приводит к исследованию сугубо однозначных отображений. Более того, применение свойства 1

позволяет перейти к изучению еще более частного вида функций (3), что упростит записи и не изменит совокупности последовательностей, порождающих конечные точки предельного множества:

$$\begin{aligned} & C\left(\left(p_s z^s + \dots + p_{-q} z^{-q}\right) \bar{z}^q + \left(r_f z^f + \dots + r_0\right), \infty\right) = \\ & = C\left(p(z) \cdot \left(\bar{z} + \frac{r(z)}{p(z)}\right), \infty\right) = C\left(p_s z^s \bar{z}^q + \tilde{r}_f z^f + \dots + \tilde{r}_0, \infty\right), \end{aligned}$$

где  $p_s \neq 0$ , а многочлен  $\tilde{r}_f z^f + \dots + \tilde{r}_1 z + \tilde{r}_0$  – целая часть рациональной функции  $(p_s z^s r(z) / p(z))$ ; где  $p(z) = p_s z^s + \dots + p_{-q} z^{-q}$ ;  $r(z) = r_f z^f + \dots + r_0$ .

Укажем теперь некоторые необходимые условия для наличия конечных элементов у предельного множества в точке  $\infty$  функции вида:

$$u(z, \bar{z}) = a_j z^j \bar{z}^q + b_f z^f + \dots + b_1 z + b_0, \quad (4)$$

где  $q \in N$ ,  $j \in Z$ ,  $f \in N \cup \{0\}$ ,  $a_j \neq 0$ .

**Лемма 1.** Для наличия конечных элементов в  $C(u(z, \bar{z}), \infty)$ , где  $u(z, \bar{z})$  – функция вида (4),  $f \in N$ , необходимо выполнение следующих условий:  $q + j = f$  и  $|a_j| = |b_f|$ .

Сформулированная лемма позволяет в дальнейшем рассматривать функции вида (4), удовлетворяющие дополнительному условию  $j \geq -q$ , так как  $j + q = f \geq 0$ .

**Лемма 2.** Пусть  $L = C(u(z, \bar{z}), \infty)$ , где

$$u(z, \bar{z}) = a_j z^j \bar{z}^q + b_f z^f + \dots + b_1 z + b_0, \quad (5)$$

причем  $a_j, b_f, \dots, b_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f \in N \cup \{0\}$ ,  $q \in N$ ,  $j \in Z$ ,  $a_j \neq 0$ ,  $q + j = f$ .

Тогда:

1) при  $j = -q$  множество  $L$  – окружность с центром в точке  $b_0$  и радиусом  $|a_j|$ ; все последовательности  $(z_n) = (\rho_n e^{i\alpha_n})$ , порождающие все точки из  $L$ , характеризуются тем, что для каждой из них последовательность неотрицательных действительных чисел  $(\rho_n)$  сходится к  $+\infty$ , а  $(\alpha_n)$  – произвольная вещественнозначная последовательность, для которой  $(e^{2i\alpha_n q})$  является сходящейся;

при исследовании предельных множеств в точке  $\infty$  п.а. полиномов методом, изложенным в доказательстве теоремы 1 и в первой части теоремы 2, появление этого случая исключено;

2) при  $-q < j < 0$  и  $f = 1$ , если  $|a_j| = |b_f|$ , то  $L$  – объединение не более чем  $q$  прямых плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ ; любая последовательность, порождающая какую-нибудь конечную точку из  $L$ , может быть

получена объединением в одну последовательность членов не более чем  $q$  последовательностей вида

$$(z_n) = \left( \alpha_k \cdot \left( x_n^{(k)} + iy_n^{(k)} \right) \right), \quad \alpha_k \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \quad (k=1, \dots, q)$$

и где  $(x_n^{(k)})$ ,  $(y_n^{(k)})$  – любые вещественнозначные последовательности, из которых  $(y_n^{(k)})$  – сходящаяся к конечному пределу, а  $(x_n^{(k)})$  – к  $\infty$ ;

если же  $j=0$ ,  $f=1$  и  $|a_0|=|b_1| \neq 0$ , то

$$L = C(a_0 \cdot \bar{z} + b_1 \cdot z + b_0, \infty) = \left\{ \sqrt{a_0 b_1} t + b_0 \mid t \in \bar{R} \right\} -$$

прямая плоскости  $\bar{\mathbf{C}}$ ; все последовательности, порождающие все конечные элементы из  $L$ , могут быть заданы формулой

$$(z_n) = (\alpha(x_n + iy_n)),$$

где  $\alpha$  – некоторое ненулевое комплексное число,  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  – вещественнозначные последовательности, причем  $(x_n)$  сходится к  $\infty$ , а  $(y_n)$  – к произвольному конечному числу;

3) при  $-q < j$  и  $f > 1$ , если  $|a_j|=|b_f|$ , то либо  $L = \{\infty\}$ , либо

$$L = \bigcup_{k=1}^q \left( \alpha_k \cdot C \left( yx^{q-d-1} + p_1^{(k)}(x) + ip_2^{(k)}(x), (\infty, 0) \right) + \beta_k \right),$$

где  $d = -j$ ;  $p_1^{(k)}(x), p_2^{(k)}(x) \in R[x]$ ,  $\deg p_1^{(k)}(x) < q - d - 1$ ,  $\deg p_2^{(k)}(x) < q - d - 1$ ;  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbf{C}$ ,  $\alpha_k \neq 0$  ( $k=1, \dots, q$ ), то есть  $L$  содержит конечные элементы (заполняющие не более чем  $q$  прямых плоскостей  $\bar{\mathbf{C}}$ ) тогда и только тогда, когда хотя бы один из многочленов  $p_2^{(k)}(x)$  является константой; все последовательности, порождающие все конечные точки из  $L$ , характеризуются тем, что каждая из них может быть получена объединением в одну последовательность членов не более чем  $q$  последовательностей вида

$$(z_n^{(k)}) = \left( \alpha_k \cdot \left( x_n^{(k)} + i \cdot \frac{t_n^{(k)} - p_1^{(k)}(x_n^{(k)})}{(x_n^{(k)})^{q-d-1}} \right) + \beta_k \right),$$

где  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbf{C}$ ,  $\alpha_k \neq 0$  ( $k=1, \dots, q$ ), а  $(x_n^{(k)})$  и  $(t_n^{(k)})$  – вещественнозначные последовательности, причем  $(x_n^{(k)})$  сходится к  $\infty$ , а  $(t_n^{(k)})$  – к произвольному конечному пределу.

**Доказательство.** Рассмотрим первый случай. Если  $j = -q$ , то

$$f = q + j = 0, \text{ а значит, } u(z, \bar{z}) = a_j \left( \frac{\bar{z}}{z} \right)^q + b_0 \text{ и } L = \left\{ |a_j| e^{it} + b_0 \mid t \in R \right\}.$$

Описание всех последовательностей, порождающих все точки из  $L$ , не требует, очевидно, дополнительных разъяснений.

Рассмотри второй случай. Пусть  $-q < j < 0$ , тогда

$$\begin{aligned} u(z, \bar{z}) &= a_{-|j|} \cdot \frac{\bar{z}^q}{z^{|j|}} + b_{q-|j|} \cdot z^{q-|j|} + \dots + b_1 z + b_0 = \\ &= A \frac{\bar{z}^q}{z^d} + B_{q-d} \cdot z^{q-d} + \dots + B_1 z + B_0, \end{aligned}$$

где  $d = |j|$ , то есть  $j = -d$ , и  $|A| = |B_{q-d}| \neq 0$ .

Согласно свойству 3 для  $\alpha \neq 0$ :  $C(u(z, \bar{z}), \infty) = C(u(\alpha z, \bar{\alpha} \bar{z}), \infty)$ . Нетрудно подобрать  $\alpha$  так, чтобы коэффициенты при  $\bar{z}^q/z^d$  и  $z^{q-d}$  отличались только знаком. Например, роль  $\alpha$  может сыграть любое из чисел  $(-\bar{B}_{q-d}/\bar{A})^{1/2q}$ . Пусть  $\alpha = \alpha_0$  – одно из них, тогда

$$C(u(z, \bar{z}), \infty) = A \cdot \frac{\bar{\alpha}_0^q}{\alpha_0^d} \cdot C\left(\frac{\bar{z}^q}{z^d} - z^{q-d} + C_{q-d-1} z^{q-d-1} z^{q-d-1} + \dots + C_0, \infty\right),$$

где  $C_j = \frac{B_j \cdot \alpha_0^j}{B_{q-d} \cdot \alpha_0^{q-d}} = \frac{B_j}{B_{q-d}} \cdot \alpha_0^{j-q-d}$  ( $j = 0, \dots, q-d-1$ ).

Рассмотри произвольную функцию вида

$$u_1(z, \bar{z}) = \frac{\bar{z}^q}{z^d} - z^{q-d} + C_{q-d-1} z^{q-d-1} + \dots + C_1 z + C_0, \quad (6)$$

где  $q, q-d \in N$ . Так как

$$u_1(z, \bar{z}) = z^{q-d} \left( \frac{\bar{z}^q}{z^q} - 1 + \frac{C_{q-d-1}}{z} + \dots + \frac{C_0}{z^{q-d-1}} \right),$$

то для любой  $(z_n)$ , порождающей конечную точку из  $L$ , выполнится следующее условие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{\bar{z}_n^q}{z_n^q} \right) - 1 \right) = 0.$$

Следовательно, для любой последовательности  $(z_n) = (\rho_n e^{i\alpha_n})$ , порождающей конечный элемент множества  $C(u_1(z, \bar{z}), \infty)$ , последовательность  $(\alpha_n)$  составлена из членов не более чем  $q$  последовательностей  $(\alpha_n^{(j)})$ , каждая из которых удовлетворяет условию:  $e^{2i\alpha_n^{(j)}} \rightarrow \varepsilon_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ), где  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$  – все корни  $q$ -той степени из 1. Таким образом, для описания всех последовательностей  $(z_n) = (\rho_n e^{i\alpha_n})$ , порождающих все конечный элементы из  $C(u_1(z, \bar{z}), \infty)$ , достаточно

отыскать общий вид каждой из последовательностей  $(\rho_n e^{i\alpha_n^{(j)}})$  ( $j = 1, \dots, q$ ).

Вводя отображение  $\varphi(z_1) = (\bar{z}_1/z_1, z_1)$  из  $\bar{C}$  в  $\bar{C}^2$ , определенное для всех  $z_1 \notin \{0; \infty\}$ , получаем, что

$$C(u_1(z, \bar{z}), \infty) = \bigcup_{j=1}^q C(u_1(z, \bar{z}), \varphi, (\varepsilon_j, \infty)). \quad (7)$$

Применяя замену переменных  $z = \beta z^{(1)}$ , где  $\beta$  – некоторое ненулевое комплексное число, можно представить  $C(u_1(z, \bar{z}), \infty)$  как объединение  $q$  предельных множеств некоторых отображений в одной и той же точке  $(1, \infty)$ . Для каждого из множеств объединения (7) в качестве  $\beta$  можно выбрать, например, любое из двух чисел  $\sqrt{\varepsilon_j}$ . Вводя в рассмотрение для каждой из  $q$  ситуаций соответствующую функцию  $u_2^{(j)}(z, \bar{z}) = u_1(\beta_j z, \bar{\beta}_j \bar{z})$ , получаем:

$$C(u_1(z, \bar{z}), \varphi, (\varepsilon_j, \infty)) = C(u_2^{(j)}(z, \bar{z}), \varphi, (1, \infty)).$$

Отметим, что для каждой функции  $u_2^{(j)}(z, \bar{z})$ , коэффициенты, появившиеся после этой подстановки перед  $\bar{z}^q/z^d$  и  $-z^{q-d}$ , будут равны. Отсюда

$$C(u_1(z, \bar{z}), \infty) = \bigcup_{j=1}^q (\gamma_j \cdot C(u_3^{(j)}(z, \bar{z}), \varphi, (1, \infty))),$$

где  $\gamma_j = \beta_j^{q-d}$ ,  $u_3^{(j)}(z, \bar{z}) = \bar{z}^q/z^d - z^{q-d} + C_{q-d-1}^{(j)} z^{q-d-1} + \dots + C_0^{(j)}$ .

Исследуем  $C(u_3^{(j)}(z, \bar{z}), \varphi, (1, \infty))$ , но договоримся в дальнейшем для упрощения записей опускать номер  $j$ , то есть писать  $u_3(z, \bar{z})$  вместо  $u_3^{(j)}(z, \bar{z})$ .

Рассмотрим для  $q > d > 0$  (таково условие) два возможных варианта:  $q = d + 1$ , то есть  $f = 1$  либо  $q > d + 1$  и  $f > 1$ .

Пусть  $q = d + 1$ , тогда

$$\begin{aligned} u(z, \bar{z}) &= \bar{z}^q/z^{q-1} - z + C_0 = z((\bar{z}/z)^q - 1) + C_0 = \\ &= z(\bar{z}/z - 1) \cdot (\bar{z}/z - \varepsilon_2) \cdot \dots \cdot (\bar{z}/z - \varepsilon_q) + C_0, \end{aligned}$$

где  $1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q$  – все корни  $q$ -той степени из 1. Учитывая, что  $z = x + iy$ , получаем:  $u_3(z, \bar{z}) = -2iy(\bar{z}/z - \varepsilon_2) \cdot \dots \cdot (\bar{z}/z - \varepsilon_q) + C_0$ . Отсюда:

$$C(u_3(z, \bar{z}), \varphi, (1, \infty)) = \{-2it(1 - \varepsilon_2) \cdot \dots \cdot (1 - \varepsilon_q) + C_0 \mid t \in \bar{R}\} = \{-2itq + C_0 \mid t \in \bar{R}\},$$

так как  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} ((\alpha - \varepsilon_2) \cdot \dots \cdot (\alpha - \varepsilon_q)) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha^q - 1}{\alpha - 1} = q$ . Вычисление  $C(a_0 \bar{z} + b_1 z + b_0, \infty)$ , используя равенство  $C(p(z, \bar{z}), \infty) = C(p(\alpha z, \bar{\alpha} \bar{z}), \infty)$ ,  $\alpha \neq 0$  (см. свойство 3), легко свести к поиску  $C(\bar{z} + z, \infty)$ , элементы которого линейно связаны с элементами  $C(a_0 \bar{z} + b_1 z + b_0, \infty)$ .

Перейдем к рассмотрению третьего случая. Пусть  $q > d + 1$ , тогда  $u_3(z, \bar{z})$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_3(z, \bar{z}) &= z^{q-d} \left( \left( \frac{\bar{z}}{z} \right)^q - 1 \right) + C_{q-d-1} \cdot z^{q-d-1} + \dots + C_0 = \\ &= z^{q-d-1} \cdot \left( (\bar{z} - z) \left( \frac{\bar{z}}{z} - \varepsilon_2 \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{\bar{z}}{z} - \varepsilon_q \right) + C_{q-d-1} + \dots + \frac{C_0}{z^{q-d-1}} \right). \end{aligned}$$

Так как  $q - d - 1 > 0$ , то последовательность  $(z_n)$ , порождающая конечную точку из искомого предельного множества, обязана удовлетворять условию:

$$t_n = (\bar{z}_n - z_n) \left( \frac{\bar{z}_n}{z_n} - \varepsilon_2 \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{\bar{z}_n}{z_n} - \varepsilon_q \right) + C_{q-d-1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Тогда:

$$\bar{z}_n - z_n = -2iy_n = \frac{t_n - C_{q-d-1}}{\left( \frac{\bar{z}_n}{z_n} - \varepsilon_2 \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{\bar{z}_n}{z_n} - \varepsilon_q \right)}.$$

Следовательно:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = C_{q-d-1} / (2i(1 - \varepsilon_2) \cdot \dots \cdot (1 - \varepsilon_q)) = C_{q-d-1} / 2iq \in R,$$

что является еще одним необходимым условием наличия конечных точек у  $C(u_3(z, \bar{z}), \varphi, (1, \infty))$ .

**Лемма 3.** Для того, чтобы множество  $C(u_3(z, \bar{z}), \varphi, (1, \infty))$ , где

$$u_3(z, \bar{z}) = z^{q-d} \left( \left( \frac{\bar{z}}{z} \right)^q - 1 \right) + C_{q-d-1} z^{q-d-1} + \dots + C_0,$$

$q > d + 1$ ,  $q \in N$ ,  $d \in Z$ , имело конечные элементы, необходимо коэффициенту  $C_{q-d-1}$  быть чисто мнимым числом.

Напомним, что была выяснена необходимость для последовательности  $(y_n)$  сходиться к некоторому конечному пределу  $a$ , а  $(x_n)$  — к бесконечности, если последовательность  $(z_n) = (x_n + iy_n)$  порождает конечную точку из  $C(u_3(z, \bar{z}), \varphi, (1, \infty))$ , при этом  $\bar{z}_n / z_n \rightarrow 1$ .

Обозначая

$$p(\bar{z}/z) = (\bar{z}/z - \varepsilon_2) \cdot \dots \cdot (\bar{z}/z - \varepsilon_q) = (\bar{z}/z)^{q-1} + (\bar{z}/z)^{q-2} + \dots + \bar{z}/z + 1,$$

можем записать очевидное равенство

$$C(u_3(z, \bar{z}), \varphi, (1, \infty)) = q \cdot C \left( z^{q-d-1} \cdot (\bar{z} - z) + \frac{C_{q-d-1}}{p(\bar{z}/z)} z^{q-d-1} + \dots + \frac{C_0}{p(\bar{z}/z)}, \varphi, (1, \infty) \right).$$

Рассмотрим функцию

$$u_4(z, \bar{z}) = z^{q-d-1} \cdot (\bar{z} - z) + \frac{C_{q-d-1}}{p(\bar{z}/z)} z^{q-d-1} + \dots + \frac{C_0}{p(\bar{z}/z)}.$$

Переходя от переменного  $z = x + iy$  к вещественным переменным  $x$  и  $y$ , получаем:

$$C(u_4(z, \bar{z}), \varphi, (1, \infty)) = C(u_4(x + iy, x - iy), (\infty, a)).$$

Для функции  $u_4(z, \bar{z})$  легко получить следующее представление:

$$u_4(z, \bar{z}) = (-2i)(y - a) \cdot z^{q-d-1} + \frac{C_{q-d-1} \cdot 2iy \cdot p_1(\bar{z}/z) + q \cdot C_{q-d-2}}{q \cdot p(\bar{z}/z)} \cdot z^{q-d-2} + \\ + \frac{C_{q-d-3}}{p(\bar{z}/z)} \cdot z^{q-d-3} + \dots + \frac{C_0}{p(\bar{z}/z)},$$

где  $p(\bar{z}/z) = \frac{(\bar{z}/z)^q - 1}{\bar{z}/z - 1}$ .

Введя новое переменное  $y_1 = y - a$  (то есть  $y = y_1 + a$ , а  $z = z_1 + ia$ ), получим следующее равенство:

$$C(u_4(x + iy, x - iy), (\infty, a)) = C(u_4(x + i(y_1 + a), x - i(y_1 + a)), (\infty, 0)).$$

Представив функцию  $u_4(z, \bar{z})$  в следующем виде:

$$u_4(z, \bar{z}) = (-2i) \left( \frac{z}{x} \right)^{q-d-1} \cdot u_5(z, \bar{z}),$$

получаем

$$C(u_4(x + iy, x - iy), (\infty, a)) = (-2i)C(u_5(x + i(y_1 + a), x - i(y_1 + a)), (\infty, 0)).$$

Нетрудно показать, что функцию  $u_5(z, \bar{z})$  можно представить в следующем виде:

$$u_5(z, \bar{z}) = y_1 x^{q-d-1} + (D_{q-d-2}(x) + y_1 \tilde{D}_{q-d-2}(x, y_1)) x^{q-d-2} + \\ + (D_{q-d-3}(x) + y_1 \tilde{D}_{q-d-3}(x, y_1)) x^{q-d-3} + \dots + (D_1(x) + y_1 \tilde{D}_1(x, y_1)) x + \\ + D_0(x) + y_1 \tilde{D}_0(x, y_1) = x u_6(x, y_1),$$

где все функции  $D_j(x)$ ,  $\tilde{D}_j(x, y_1) \in C(x, y_1)$  ( $j = 0, \dots, q - d - 2$ ) обладают тем свойством, что для любых последовательностей  $(x_n)$  и  $(y_n^{(1)})$ , где  $x_n \rightarrow \infty$  и  $y_n \rightarrow t \in R$  (в частности и при  $t = 0$ ),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_j(x_n) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{D}_j(x_n, y_n^{(1)})$$

существуют, конечны и не зависят от конкретных последовательностей  $(x_n)$  и  $(y_n^{(1)})$ . Далее потребуется применение следующего свойства.

**Свойство 4.** Пусть  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$ ,  $\gamma(x, y)$  – произвольные комплекснозначные функции двух вещественных переменных, определенные на множестве, имеющем своей предельной точкой точку

$(\infty, 0) \in \bar{R}^2$ , причем  $C(\beta(x, y), (\infty, 0)) = \{\infty\}$ ,  $a$   
 $C(\alpha(x, y)/\beta(x, y), (\infty, 0)) = \{0\}$ , тогда

$$C(\beta(x, y) \cdot \gamma(x, y), (\infty, 0)) = C((\beta(x, y)) + \alpha(x, y)) \cdot \gamma(x, y), (\infty, 0)).$$

Используя свойство 4, получаем равенство:

$$C(x \cdot u_6(x, y_1), (\infty, 0)) = C((x + \alpha(x, y_1))u_6(x, y_1), (\infty, 0)),$$

где  $\alpha(x, y_1)$  – любая функция, для которой существует и равен нулю  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha(x_n, y_n^{(1)})/x_n)$  для любых последовательностей  $(x_n)$  и  $(y_n^{(1)})$ , удовлетворяющих условиям  $x_n \rightarrow \infty$  и  $y_n^{(1)} \rightarrow 0$ .

Полагая

$$\alpha(x, y_1) = -\tilde{D}_{q-d-2}(x, y_1),$$

получим, что

$$C(u_5(x, y_1), (\infty, 0)) = C(u_5^{(1)}(x, y_1), (\infty, 0)),$$

где

$$u_5^{(1)}(x, y_1) = y_1 \cdot x^{q-d-1} + D_{q-d-2}(x) \cdot x^{q-d-2} + \\ (D_{q-d-2}^{(1)}(x) + y_1 \tilde{D}_{q-d-3}^{(1)}(x, y_1)) \cdot x^{q-d-3} + \dots + (D_1^{(1)}(x) + \tilde{D}_1^{(1)}(x, y_1)) \cdot x + C_1,$$

причем функции  $D_j^{(1)}(x)$ ,  $\tilde{D}_j^{(1)}(x, y_1)$  обладают теми же свойствами, что были отмечены для  $D_j(x)$ ,  $\tilde{D}_j(x, y_1)$ .

Однако и к  $u_5^{(1)}(x, y_1)$  можно применить то же свойство 4, взяв в качестве  $\alpha(x, y_1)$  функцию  $-\tilde{D}_{q-d-3}^{(1)}(x, y_1)/x$ . В результате всех упрощений получим функцию  $u_5^{(2)}(x, y_1)$ , у которой не только при  $x^{q-d-2}$ , но и при  $x^{q-d-3}$  будет стоять коэффициент, не зависящий от  $y_1$ . Осуществляя аналогичные переходы, вынося сомножитель  $x$  за скобки и меняя его на

$$x - \frac{\tilde{D}_{q-d-j-2}^{(j)}(x, y_1)}{x^j}, \quad j = 1, 2, \dots, q-d-3,$$

уничтожим в сумме, задающей исследуемую функцию, все слагаемые, содержащие сомножитель  $y_1$ , кроме  $y_1 x^{q-d-1}$  (причем часть слагаемых каждый раз можно будет заменить их конечными пределами). Таким образом, будет получена функция вида:

$$u_5^{(q-d-3)}(x, y_1) = y_1 x^{q-d-1} + D_{q-d-2}(x) \cdot x^{q-d-2} + D_{q-d-3}^{(1)}(x) \cdot x^{q-d-3} + \dots + \\ + D_1^{(q-d-3)}(x) + C_{q-d-2}.$$

Выделяя и отбрасывая дробные части рациональных функций

$$D_{q-d-2}(x) \cdot x^{q-d-2}, D_{q-d-2}^{(j)}(x) \cdot x^{q-d-j-2} \quad (j = 1, \dots, q-d-3),$$



а затем разделяя вещественные и мнимые части полученных многочленов, перейдем к исследованию предельного множества в точке  $(\infty, 0)$  функции

$$U(x, y_1) = y_1 x^{q-d-1} + P_1(x) + iP_2(x), \quad (8)$$

где  $P_1(x), P_2(x) \in R[x]$ , причем обязательно

$$\deg P_1(x) < q - d - 1 \text{ и } \deg P_2(x) < q - d - 1.$$

Напомним, что, совершая все переходы от исследования предельного множества п.а. полинома в точке  $\infty$  до аналогичного исследования функции  $U(x, y_1)$ , всегда имели простую связь между предельными множествами исследуемых функций и между совокупностями последовательностей, порождающих все конечные точки этих предельных множеств.

Теперь можно сделать вывод: последовательность  $(U(x_n, y_n^{(1)}))$ , где  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $y_n^{(1)} \rightarrow 0$ , может сходиться к конечному пределу тогда и только тогда, когда  $p = P_2(x) \equiv \text{const}$ . В этом случае последовательность  $(y_n^{(1)} \cdot x_n^{q-d-1} + P_1(x_n)) = (t_n)$  должна сходиться к конечному пределу, что и позволяет получить выражение для всех последовательностей, порождающих все конечный точки исследуемого предельного множества:

$$(x_n, y_n^{(1)}) = \left( x_n, \frac{t_n - P_1(x_n)}{x_n^{q-d-1}} \right), \quad (9)$$

где  $(x_n)$  – произвольная последовательность вещественных чисел, сходящаяся к  $\infty$ , а  $(t_n)$  – любая вещественнозначная последовательность, имеющая конечный предел, причем

$$C(U(x, y_1), (\infty, 0)) = \{t + ip \mid t \in \bar{R}\}. \quad (10)$$

Если же  $f - q = j \geq 0$ , то есть функция  $u(z, \bar{z})$  имеет следующий вид:

$$u(z, \bar{z}) = a_j z^j \bar{z}^q + b_{q+j} z^{q+j} + \dots + b_1 z + b_0, \quad a_j \neq 0, \quad (11)$$

то анализ этой ситуации можно осуществить так же, как и для  $-q < j < 0, f > 1$ .

Обоснование невозможности появления первого случая (см. [11, с. 136–142]) при исследовании предельных множеств в точке  $\infty$  п.а. полиномов можно получить, если использовать:

1) алгебраичность любой разности  $A_{j_1}(z) - A_{j_2}(z)$  (см. теорему 1);

2) особенность формулы (9) – при подстановке в любой нетривиальный п.а. полином (от переменных  $z$  и  $\bar{z}$ )  $z = z_n = x_n + i(y_n^{(1)} + a)$ , где  $(x_n)$  и  $(y_n^{(1)})$  – последовательности,

определяемые формулой (9) (даже если вначале подвергнуть  $(z_n)$  невырожденному линейному преобразованию, а затем возвести в степень с натуральным показателем), будет получен некоторый многочлен от символа  $t_n$ ;

3) а также следующую лемму.

**Лемма 4.** Каждое предельное множество

$$C(p(z) \cdot \bar{z} + q(z), \varphi, (0, \dots, 0, \infty)),$$

где  $\varphi = (A_s(z, \bar{z}), A_{s-1}(z, \bar{z}), \dots, A_1(z, \bar{z}), z)$  – отображение из  $\bar{C}$  в  $\bar{C}^{s+1}$ ,  
 $p(z) \cdot \bar{z} + q(z)$ ,  $A_s(z, \bar{z}) = p_s(z)\bar{z} + q_s(z), \dots, A_1(z, \bar{z}) = p_1(z)\bar{z} + q_1(z)$  –  
 отображения вида (3) (причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} (p(z) \cdot \bar{z}) = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_j(z) \cdot \bar{z}) = \infty$ ;  
 $j=1, \dots, s$ ), или не более чем одноэлементно, или совпадает с  
 $C(p(z) \cdot \bar{z} + q(z), \infty)$ , причем каждый общий элемент этих множеств  
 порождается одними и теми же последовательностями.

Доказательство леммы 4 приведено в [11, с. 138–142].

**Следствие 1.** Каждое множество из объединения (7) есть либо  $\{\infty\}$ , либо прямая линия, пополненная точкой  $\infty$  и получающаяся из множества вида (10) некоторым невырожденным линейным преобразованием. Все последовательности, порождающие все конечные точки из  $C(u_1(z, \bar{z}), \infty)$ , характеризуются тем, что каждая из них составлена из членов не более чем  $q$  последовательностей, получаемых невырожденными линейными преобразованиями из последовательностей вида (9).

Доказательство теоремы 2 завершено.

Отметим, что не исключено попарное совпадение всех или некоторых из прямых, чье объединение является предельным множеством в точке  $\infty$  функций вида (5) (при  $j \neq -q$ ). Следующая лемма позволяет определить направляющий вектор любой из этих прямых.

**Лемма 5.** Вместе с каждой конечной точкой  $l_0 \in C(u(z, \bar{z}), \infty)$ , где  $u(z, \bar{z})$  – функция вида (5), причем  $j \neq -q$ , этому предельному множеству принадлежат все точки вида

$$l_0 + q \cdot b_f \cdot (\tau - \bar{\tau} \varepsilon_q^f), \quad (12)$$

где  $\varepsilon_q$  – один из корней  $q$ -той степени из  $-a_j/b_f$ , а  $\tau$  – любое комплексное число.

**Доказательство.** Непосредственные элементарные вычисления позволяют убедиться, что если последовательность  $(z_n)$  порождала точку  $l_0$  из  $C(u(z, \bar{z}), \infty)$ , то совокупность последовательностей вида

$$(z_n(\tau)) = (z_n + \tau / z_n^{q-j-1})$$

порождает совокупность всех чисел вида (12) как элементов из  $C(u(z, \bar{z}), \infty)$ .

3. Непосредственным следствием из теоремы 2 и лемм 2–4 является первая часть ранее доказанной в [10] теоремы 4, причем ее формулировка может быть несколько дополнена.

**Теорема 3.** *Предельное множество в точке  $\infty$  каждого нетривиального полианалитического полинома  $p(z, \bar{z})$  состоит или из одной точки  $\infty$ , или представимо в виде объединения конечного числа нетривиальных полиномиальных линий  $\{z = p_j(t) \mid t \in \bar{R}\}$  ( $j = 1, \dots, r$ ), для каждой из которых выполняется соотношение*

$$\deg_t p_j(t) \leq \min \{ \deg_z p(z, \bar{z}), \deg_{\bar{z}} p(z, \bar{z}) \}.$$

*Конечные элементы содержатся в  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$  тогда и только тогда, когда хотя бы одно из множеств объединения (2) совпадает с предельным множеством в точке  $\infty$  соответствующей функции  $p_{j_1, \dots, j_k}(z, \bar{z})$ , для которой хотя бы один из многочленов  $p_2^{(k)}(x)$  (см. лемму 2) является константой.*

Из теоремы 2 и лемм 2–4 вытекает также следующее утверждение.

**Теорема 4.** *В любой последовательности, порождающей конечную точку из  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , где  $p(z, \bar{z}) \in \mathbf{C}[z, \bar{z}]$  и  $p(z, \bar{z}) \neq \text{const}$ , имеется подпоследовательность одного из следующих видов:*

$$d_j + c_j \left( b_j + a_j \left( x_n + i \frac{t_n - p_j(x)}{x_n^{\delta_j}} \right) \right)^{\lambda_j},$$

*где комплексные числа  $c_j \neq 0$ ,  $a_j \neq 0$ ,  $b_j$ ,  $d_j$ , многочлены  $p_j(x) \in R[x]$  и натуральные числа  $\delta_j, \lambda_j$  полностью определяются коэффициентами п.а. полинома  $p(z, \bar{z})$ ;  $j$  принадлежит некоторому конечному множеству индексов,  $(x_n)$  и  $(t_n)$  – произвольные вещественнозначные последовательности, из которых первая сходится к  $\infty$ , а вторая – к произвольному числу  $t \in R$ .*

Объединение результатов, полученных в данной статье, равно как и в статье [10], с результатами из [1] позволяет дать исчерпывающее описание всего класса фигур плоскости  $\bar{C}$ , которые могут быть предельными множествами полианалитических функций в изолированных особых точках. А именно: имеет место следующее утверждение:

**Теорема 5.** *Предельное множество в точке  $a \in \bar{C}$  полианалитической функции произвольного порядка  $n$*

$$F(z) = f_0(z) + f_1(z)\bar{z} + \dots + f_{n-1}(z)\bar{z}^{n-1},$$

*заданной в некоторой проколотой окрестности точки  $a \in \bar{C}$ , либо состоит из одной точки, либо является объединением конечного числа нетривиальных полиномиальных линий, либо представляет собой образ*

окружности  $\{z \mid |z|=1\}$  при отображении, заданном некоторым нетривиальным полиномом одного переменного  $z$ , либо является тотальным (то есть совпадает с  $\bar{C}$ ).

Обратно, для любой точки  $a \in \bar{C}$  и для любого множества  $\Phi \subset \bar{C}$ , являющегося либо объединением конечного числа нетривиальных полиномиальных линий, либо образом окружности  $\{z \mid |z|=1\}$  при отображении, заданном нетривиальным многочленом одного переменного  $z$ , существует полиномиальная функция  $F(z)$  с аналитическими компонентами – рациональными функциями от  $z$ , для которой  $C(F(z), a) = \Phi$ .

Доказательство теоремы 5 содержится в работе [11, с. 150–153].

Изучение предельных множеств полианалитических функций позволяет предложить (смотрите теорему 5) естественную классификацию их изолированных особых точек (то есть точек, лежащих вне области определения функции, но имеющих проколотые окрестности, входящие в эту область определения). Для этого надо выделить наряду с устранимой особенностью, полюсом и существенной особенностью еще два типа точек. Впервые, но с иной точки зрения, попытка классификации изолированных особых точек полианалитических функций была сделана В.И. Показеевым в [6].

4. В данной (заключительной части) статьи излагаются два конструктивных способа для отыскания предельных множеств в точке  $\infty$  полианалитических полиномов частного вида, так называемых бианалитических полиномов (короче: б.а. полиномов), то есть полиномов вида

$$p(z, \bar{z}) = (a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0) \bar{z} + (b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0), \quad (13)$$

где  $a_j \in C (j = 0, 1, \dots, k)$ ,  $b_j \in C (j = 0, 1, \dots, m)$ ,  $a_k \neq 0$  и  $b_m \neq 0$ ;  $m$  и  $k$  – некоторые целые неотрицательные числа.

Напомним, что строение предельного множества в точке  $\infty$  произвольного нетривиального б.а. полинома было исследовано в работе [1], где установлено, что оно или исчерпывается одной точкой  $\infty$ , или является прямой плоскости  $\bar{C}$ , следует отметить, что первая и вторая части настоящей статьи содержат рассуждения, выстраивающиеся в простой алгоритм поиска предельного множества  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$  произвольного б.а. полинома  $p(z, \bar{z})$ . Более того, так как именно тот класс п.а. функций, к которому относятся и б.а. полиномы, не был сколько-нибудь подробно рассмотрен в первых двух частях данной статьи, то излагаемые далее приемы исследования предельных множеств б.а. полиномов являются неформальным дополнением этих частей, иллюстрацией к ним.

Прежде чем перейти к непосредственному изложению первого алгоритма поиска предельного множества в точке  $\infty$  любого б.а. полинома, имеет смысл еще раз сосредоточить внимание на используемых в этом алгоритме свойствах, придав им наиболее удобную форму для использования в последующих рассуждениях.

**Свойство А.** Для любой комплекснозначной функции  $w(z)$  и любого нетривиального полинома  $p(z)$

$$C(w(z), \infty) = C(w(p(z)), \infty),$$

в частности

$$C(w(z), \infty) = C(w(az + b), \infty),$$

где  $a, b \in \mathbb{C}$  и  $a \neq 0$ .

**Свойство В.** Для любой комплекснозначной функции  $w(z)$  и любого нетривиального полинома  $p(z)$

$$C(p(w(z)), \infty) = p(C(w(z), \infty)),$$

(дополнительно полагая, что  $p(\infty) = \infty$ ), в частности

$$C(aw(z) + b, \infty) = a \cdot C(w(z), \infty) + b,$$

где  $a, b \in \mathbb{C}$  и  $a \neq 0$ .

**Свойство С.** Пусть  $w_1(z)$  и  $w_2(z)$  – произвольные комплекснозначные функции с совпадающими неограниченными областями определения, тогда, если  $C(w_2(z), \infty) = \{a\}$ , где  $a \in \mathbb{C}$ , то

$$C(w_1(z) + w_2(z), \infty) = C(w_1(z), \infty) + a,$$

если же  $a \neq 0$ , то и

$$C(w_1(z) \cdot w_2(z), \infty) = a \cdot C(w_1(z), \infty).$$

Следствием из данного свойства будет следующий факт.

**Свойство Д.** Пусть  $w_1(z)$ ,  $w_2(z)$  и  $w_3(z)$  – произвольные комплекснозначные функции, определенные на одном и том же неограниченном множестве, причем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w_1(z)}{w_2(z)} = 1,$$

тогда

$$C(w_1(z) \cdot w_3(z), \infty) = C(w_2(z) \cdot w_3(z), \infty),$$

в частности, для любого нетривиального полинома  $p(z) = a_k z^k + \dots + a_0$  ( $a_k \neq 0$ ):

$$C(p(z) \cdot w_3(z), \infty) = a_k C(z^k \cdot w_3(z), \infty).$$

**Свойство Е.** Пусть  $w_1(z)$ ,  $w_2(z)$  и  $w_3(z)$  – произвольные комплекснозначные функции, определенные на неограниченном множестве, причем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w_2(z)}{w_1(z)} = 0,$$

тогда

$$C((w_1(z) + w_2(z)) \cdot w_3(z), \infty) = C(w_1(z) \cdot w_3(z), \infty).$$

Аналогичное свойство имеет место и для комплекснозначных функций двух вещественных переменных  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$  и  $C(x, y)$ , имеющих точку  $(a_1, a_2) \in \bar{R}^2$  предельной для совпадающих областей определения этих функций, причем если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a_1 \\ y \rightarrow a_2}} \frac{B(x, y)}{A(x, y)} = 0,$$

то тогда

$$C((A(x, y) + B(x, y)) \cdot C(x, y), (a_1, a_2)) = C(A(x, y) \cdot C(x, y), (a_1, a_2)).$$

Завершит перечень свойств предельных множеств указание некоторых необходимых условий наличия конечных элементов в  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$  для произвольного нетривиального б.а. полинома  $p(z, \bar{z})$ , а также еще один вспомогательный факт, указывающий способ по одному конечному элементу из  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$  находить целую серию конечных элементов этого предельного множества.

**Лемма 6.** Для наличия конечных элементов в  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , где

$$p(z, \bar{z}) = (a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0) \bar{z} + (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) -$$

нетривиальный бианалитический полином  $a_k \neq 0$ , необходимо, чтобы  $k+1=m$  и  $|a_k| = |b_m|$ , если же, кроме того,  $a_k = b_m = 1$ , а  $k \in \mathbb{N}$ , то необходимо, чтобы коэффициент  $b_{m-1}$  был действительным числом.

**Доказательство.** Необходимость выполнения условия  $k+1=m$  совершенно очевидна, иначе  $C(p(z, \bar{z}), \infty) = \{\infty\}$ , если же  $l$  – конечный элемент из  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , порождаемых последовательностью  $(z_n)$ , то для нее обязательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_k \frac{\bar{z}_n}{z_n} + b_m \right) = 0,$$

откуда и следует соотношение  $|a_k| = |b_m|$ . Если же  $a_k = b_m = 1$ , а  $n > 1$ , то для  $(z_n)$ , порождающей конечный элемент из  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , выполнится свойство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{z}_n + z_n + b_k) = 0,$$

откуда немедленно следует, что  $b_k \in \mathbb{R}$ . Лемма 6 является также очевидным следствием леммы 2 и леммы 3.

**Лемма 7.** Вместе с каждой конечной точкой  $l_0 \in C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , где  $p(z, \bar{z})$  – нетривиальный бианалитический полином вида (13), этому предельному множеству принадлежат все точки вида

$$l_0 + b_m \cdot \left( t - \bar{t} \left( -\frac{a_k}{b_m} \right)^m \right), t \in \mathbf{C}. \quad (14)$$

**Доказательство.** Для обоснования леммы достаточно заметить, что по последовательности  $(z_n)$ , порождающей конечную точку  $l_0$  из  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , можно построить серию последовательностей

$$(z_n(t)) = \left( z_n + \frac{t}{z_n^k} \right)$$

(где  $t$  – любое комплексное число), которая, как легко проверить непосредственными вычислениями, порождает все конечные точки предельного множества  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , задаваемые формулой (14) и заполняющие некоторую прямую плоскости  $\bar{C}$ . Очевидно, что лемма 7 – частный случай леммы 5.

Перейдем теперь к поиску предельного множества в точке  $\infty$  произвольного нетривиального б.а. полинома (13), считая, разумеется, что для него выполнены условия  $k+1=m$  и  $|a_k|=|b_m|$  (в противном случае  $C(p(z, \bar{z}), \infty) = \{\infty\}$ ), то есть б.а. полином имеет вид

$$p(z, \bar{z}) = (a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0) \bar{z} + (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) \quad (15)$$

где  $a_j \in \mathbf{C} (j=0, \dots, k)$ ,  $b_j \in \mathbf{C} (j=0, \dots, k+1)$ ,  $a_k \neq 0$ ,  $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ .

1). Применяя к  $p(z, \bar{z})$  свойство А

$$C(p(z, \bar{z}), \infty) = C(p(\alpha z, \bar{\alpha z}), \infty),$$

при  $\alpha = \sqrt{\frac{a_k}{b_{k+1}}}$  (под корнем будем понимать любое из двух его значений), а затем свойство В, получаем:

$$C(p(z, \bar{z}), \infty) = \alpha^{k+1} \cdot b_{k+1} C(p_1(z, \bar{z}), \infty),$$

где

$$p_1(z, \bar{z}) = (z^k + a_{k-1}^{(1)} z^{k-1} + \dots + a_0^{(1)}) \bar{z} + (z^{k+1} + b_k^{(1)} z^k + \dots + b_0^{(1)}).$$

2). Применяя к  $p_1(z, \bar{z})$  свойства D и C, получаем:

$$\begin{aligned} C(p_1(z, \bar{z}), \infty) &= C \left( z^k \cdot \bar{z} + \frac{z^{k+1} + b_k^{(1)} z^k + \dots + b_0^{(1)}}{z^k + a_{k-1}^{(1)} z^{k-1} + \dots + a_0^{(1)}} \cdot z^k, \infty \right) = \\ &= C(z^k \cdot \bar{z} + z^{k+1} + b_k^{(2)} z^k + \dots + b_0^{(2)}, \infty), \end{aligned}$$

где  $z^{k+1} + b_k^{(2)} z^k + \dots + b_0^{(2)}$  – целая часть рациональной функции

$$\frac{z^{k+1} + b_k^{(1)}z^k + \dots + b_0^{(1)}}{z^k + a_{k-1}^{(1)}z^{k-1} + \dots + a_0^{(1)}} \cdot z^k.$$

Если  $k=0$ , то немедленно получаем, что

$$C(a_0\bar{z} + b_1z + b_0, \infty) = \sqrt{\frac{a_0}{b_1}} \cdot b_1 \cdot C(z + \bar{z}, \infty) + b_0 = \{\sqrt{a_0 \cdot b_1} \cdot t + b_0 \mid t \in \bar{R}\},$$

а все последовательности  $(z_n)$ , порождающие все конечные точки из  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , имеют следующий вид:

$$(z_n) = \left( (x_n + iy_n) \cdot \sqrt{\frac{a_0}{b_1}} \right),$$

где  $(x_n)$  и  $(y_n)$  – произвольные вещественнозначные последовательности, обладающие свойствами:  $x_n \rightarrow t/2 \in R$ , а  $y_n \rightarrow \infty$ .

3). Обозначая  $p_2(z, \bar{z}) = z^k \cdot \bar{z} + z^{k+1} + b_k^{(2)}z^k + \dots + b_0^{(2)}$  ( $k \geq 1$ ) и переходя к вещественным переменным  $x$  и  $y$ , получаем:

$$C(p_2(z, \bar{z}), \infty) = C\left(p_2(x + iy, x - iy), \left(-\frac{b_k^{(2)}}{2}, \infty\right)\right),$$

причем (см. лемму б) коэффициент  $b_k^{(2)}$  должен быть действительным числом, в противном случае  $C(p(z, \bar{z}), \infty) = \{\infty\}$ .

4). Сделав замену переменных  $x_1 = x + b_k^{(2)}/2$ , получим:

$$C(p_2(z, \bar{z}), \infty) = C\left(p_2\left(x_1 - \frac{b_k^{(2)}}{2} + iy, x_1 - \frac{b_k^{(2)}}{2} - iy\right), (0, \infty)\right).$$

При этом возникает следующее представление:

$$\begin{aligned} p_2\left(x_1 - \frac{b_k^{(2)}}{2} + iy, x_1 - \frac{b_k^{(2)}}{2} - iy\right) &= 2x_1z^k + b_{k-1}^{(2)}z^{k-1} + \dots + b_0^{(2)} = \\ &= 2x_1(iy)^k + p_{k-1}(x_1)y^{k-1} + \dots + p_1(x_1) \cdot y + p_0(x_1), \end{aligned}$$

где  $p_j(x_1) \in \mathbf{C}[x_1]$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ).

Рассмотрим многочлен

$$\begin{aligned} p_3(x_1, y) &= \frac{p_2\left(x_1 - \frac{b_k^{(2)}}{2} + iy, x_1 - \frac{b_k^{(2)}}{2} - iy\right)}{2i^k} = \\ &= x_1y^k + p_{k-1}^{(0)}(x_1)y^{k-1} + \dots + p_1^{(0)}(x_1)y + p_0^{(0)}(x_1), \end{aligned}$$

где  $p_j^{(0)}(x_1) = \frac{p_j(x_1)}{2i^k}$ , причем  $\deg p_j^{(0)}(x_1) < k$ .

5). Представив в следующем виде каждый многочлен

$$p_j^{(0)}(x_1) = p_j^{(0)}(0) + x_1 \cdot \tilde{p}_j^{(0)}(x_1),$$



где  $\tilde{p}_j^{(0)}(x_1) \in \mathbf{C}[x_1]$  ( $j = 0, \dots, k-1$ ) и применяя свойство E, а также отбрасывая слагаемые, заведомо при  $x_1 \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow \infty$  сходящиеся к нулю, получаем:

$$\begin{aligned} & C(x_1 y^k + (p_{k-1}^{(0)}(0) + x_1 \tilde{p}_{k-1}^{(0)}(x_1))y^{k-1} + (p_{k-2}^{(0)}(0) + x_1 \tilde{p}_{k-2}^{(0)}(x_1))y^{k-2} + \dots + \\ & \quad (p_1^{(0)}(0) + x_1 \tilde{p}_1^{(0)}(x_1))y + p_0^{(0)}(0) + x_1 \tilde{p}_0^{(0)}(x_1), (0, \infty) = \\ = & C\left( (y - \tilde{p}_{k-1}^{(0)}(x_1)) \left( x_1 y^{k-1} + (p_{k-1}^{(0)}(0) + x_1 \tilde{p}_{k-1}^{(0)}(x_1))y^{k-2} + \dots + \frac{p_0^{(0)}(0) + x_1 \tilde{p}_0^{(0)}(x_1)}{y} \right), (0, \infty) \right) = \\ = & C\left( x_1 y^k + p_{k-1}^{(0)}(0)y^{k-1} + p_{k-2}^{(1)}(x_1)y^{k-2} + \dots + p_0^{(1)}(x_1), (0, \infty) \right). \end{aligned}$$

Представляя многочлены  $p_j^{(1)}(x_1)$  в следующем виде:

$$p_j^{(1)}(x_1) = p_j^{(1)}(0) + \tilde{p}_j^{(1)}(x_1)x_1,$$

где  $\tilde{p}_j^{(1)}(x_1) \in \mathbf{C}[x_1]$  ( $j = 0, \dots, k-2$ ) и применяя свойство E с отбрасыванием заведомо сходящихся к нулю членов, имеем:

$$\begin{aligned} & C\left( x_1 y^k + p_{k-1}^{(0)}(0)y^{k-1} + (p_{k-2}^{(1)}(0) + \tilde{p}_{k-2}^{(1)}(x_1)x_1)y^{k-2} + \dots + p_0^{(1)}(0) + \tilde{p}_0^{(1)}(x_1)x_1, (0, \infty) \right) = \\ = & C\left( \left( y - \frac{\tilde{p}_{k-2}^{(1)}(x_1)}{y} \right) \left( x_1 y^{k-1} + p_{k-1}^{(0)}(0)y^{k-2} + (p_{k-2}^{(1)}(0) + \tilde{p}_{k-2}^{(1)}(x_1)x_1)y^{k-3} + \dots + \frac{p_0^{(1)}(0) + \tilde{p}_0^{(1)}(x_1)x_1}{y} \right), (0, \infty) \right) = \\ = & C\left( x_1 y^k + p_{k-1}^{(0)}(0)y^{k-1} + p_{k-2}^{(0)}(0)y^{k-2} + p_{k-3}^{(0)}(x_1)y^{k-3} + \dots + p_0^{(2)}(x_1), (0, \infty) \right). \end{aligned}$$

Представляя многочлены  $p_j^{(2)}(x_1)$  ( $j = 0, \dots, k-3$ ) в соответствующем виде и применяя свойство E, «удалим» из многочлена член  $\tilde{p}_{k-3}^{(2)}(x_1) \cdot x_1 \cdot y^{k-3}$ .

Применяя этот же прием необходимое число раз (всего не более  $k-2$  раза), получим, что

$$C(p_2(z, \bar{z}), \infty) = 2 \cdot i^k \cdot C\left( x_1 y^k + p_{k-1}^{(0)}(0)y^{k-1} + p_{k-2}^{(1)}(0)y^{k-2} + \dots + p_1^{(k-2)}(0)y + p_0^{(k-1)}(0), (0, \infty) \right).$$

б). Разделяя вещественную и мнимую части многочлена  $p(y) = p_{k-1}^{(0)}(0)y^{k-1} + p_{k-2}^{(1)}(0)y^{k-2} + \dots + p_1^{(k-2)}(0)y + p_0^{(k-1)}(0) = P_1(y) + iP_2(y)$ , причем по самому его возникновению  $\deg P_1(y) < k$ , получаем следующую теорему.

**Теорема 6.** Пусть  $p(z, \bar{z})$  - нетривиальный бианалитический полином вида (13). Тогда его  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$  имеет конечные элементы тогда и только тогда, когда  $p_2 = P_2(y) \equiv \text{const}$ , при этом

$$C(p(z, \bar{z}), \infty) = \left\{ 2i^k \cdot \left( \sqrt{\frac{a_k}{b_{k+1}}} \right)^{k+1} \cdot b_{k+1} \cdot (t + ip_2) \mid t \in \bar{R} \right\}.$$



0, если она принадлежит этому множеству. В противном случае  $C(p(z, \bar{z}), \infty) = \{\infty\}$ . Непосредственными вычислениями легко найти эту последовательность  $(z_n(t_0^{(1)}))$ .

4. Последовательность  $(z_n(t_0^{(1)}))$  порождает некоторую конечную точку из  $C(p_2(z, \bar{z}), \infty)$ , так как  $p_2\left(z_n(t_0^{(1)}), \overline{z_n(t_0^{(1)})}\right)$  – рациональная функция от  $n$ , причем степень ее числителя по  $n$  не выше степени ее знаменателя по  $n$ .

Используя лемму 7, легко построить последовательности  $(z_n(t))$ , порождающие все конечные точки из  $C(p_2(z, \bar{z}), \infty)$ , и непосредственными вычислениями найти значение параметра  $t = t_0^{(2)}$ , для которого  $(z_n(t_0^{(2)}))$  порождает точку 0 из  $C(p_2(z, \bar{z}), \infty)$ , если же такого  $t_0^{(2)}$  нет, то  $C(p(z, \bar{z}), \infty) = \{\infty\}$ .

5. Легко видеть, что эта последовательность  $(z_n(t_0^{(2)}))$  порождает некоторую конечную точку из  $C(p_3(z, \bar{z}), \infty)$ , а значит по ней, используя лемму 7, можно построить последовательности, порождающие все конечные точки из  $C(p_3(z, \bar{z}), \infty)$ .

Повторяя аналогичные рассуждения необходимое число раз (не более чем  $k$ ), или удастся выяснить, что  $C(p(z, \bar{z}), \infty) = \{\infty\}$ , или будут найдены все конечные элементы из  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ , равно как и последовательности, порождающие их.

Как результат проведенных рассуждений, можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 7.** *Предельное множество в точке  $\infty$  бианалитического полинома*

$$p(z, \bar{z}) = az^k \bar{z} + b_{k+1} z^{k+1} + \dots + b_0, \quad k \in N,$$

*содержит конечные элементы тогда и только тогда, когда*

$$0 \in C(p_j(z, \bar{z}), \infty),$$

*для каждого  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  и где  $p_j(z, \bar{z})$  – бианалитические полиномы вида (16).*

**Замечание 1.** Очевидно, что в теореме 7 достаточно потребовать, чтобы  $j$  приняло только одно значение  $k$ .

**Замечание 2.** Отметим применимость изложенных выше рассуждений к любому полиномиальному полиному  $p(z, \bar{z})$ , удовлетворяющему условию

$$\min\{\deg_z p(z, \bar{z}), \deg_{\bar{z}} p(z, \bar{z})\} = 1.$$

## Литература

1. Балк М.Б., Полухин А.А. Предельное множество однозначной бианалитической функции в ее изолированной особой точке // Смоленский математический сборник / отв. ред. М.Б. Балк. Смоленск, 1970. Т. 3. С. 3–12.
2. Многозначные отображения / Борисович Ю.Г. [и др.] // Сб. Итоги науки и техники ВИНТИ. Математический анализ. М.: 1982. Т. 19. С. 127–230.
3. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.
4. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.
5. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М.: Мир, 1971. 312 с.
6. Показеев В.И. Нерегулярные полианалитические функции // Известия вузов. Математика. М., 1975. № 6(157). С. 103–113.
7. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. М.: Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.
8. Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. 396 с.
9. Гомонов С.А. О предельных множествах многозначных отображений топологических пространств // Доклады Ан СССР. М., 1989. Т. 306, №1. С. 20–24.
10. Гомонов С.А. О предельных множествах рациональных функций двух сопряженных комплексных переменных в точке  $\infty$  // Полианалитические функции: Сборник научных трудов / отв. ред. М.Б. Балк. Смоленск, 1988. С. 22–36.
11. Гомонов С.А. Предельные множества для некоторых классов полианалитических функций: дис... канд. физ.–мат. наук. Смоленск, 1989. 158 с.
12. Гомонов С.А. Предельные множества многозначных отображений топологических пространств // Известия Смоленского государственного университета. 2013. № 3(23). С. 348–364.
13. Гомонов С.А. Об условиях замкнутости предельных множеств многозначных отображений топологических пространств // Известия Смоленского государственного университета. 2013. № 4(24). С. 375–389.
14. Weston J.D. Some theorems on cluster set // J. London Math. Soc. 1958. Vol. 33, № 4. P. 435–441.
15. Yamashita S. Cluster sets of set-mappings // Ann. Pol. Math. 1977. Vol. 35, №1 P. 75.–98.
16. Joseph J. Multifunctions and inverse cluster sets // Can. Math. Bull. 1980. Vol. 23, № 2. P. 161–171.

**S.A. Gomonov**

Smolensk State University

### **ON SOME APPLICATIONS OF ALGEBRAIC FUNCTIONS TO THE STUDY OF CLUSTER SETS OF POLYANALYTIC POLYNOMS**

**Keywords:** *polyanalytic polynomial; polyanalytic function; topological space; set-mapping; cluster set; polynomial line; algebraic function.*

**Abstract.** *The article considers some techniques for calculating cluster sets at the point  $\infty$  of polyanalytic polynomials based on the application of the properties of algebraic functions of one variable; a criterion for the presence of finite elements in the cluster set at the point  $\infty$  of a polyanalytic polynomial in a pair of complex conjugate variables is formed.*

## АФФИННЫЕ ЕЛЬМСЛЕВОВЫ ПЛОСКОСТИ С СЕРЕДИНОЙ

Ключевые слова: *аффинная ельмслевова плоскость; середина.*

В работе вводится понятие «середина» для аффинных ельмслевова плоскостей (АН-плоскостей). Эти понятия являются обобщениями соответствующих понятий для обычных аффинных плоскостей. Перечисляются основные свойства аффинных плоскостей с серединой. Ставится задача о выполнении указанных свойств в АН-плоскостях с серединой.

В начале статьи напомним основные понятия теории аффинных ельмслевова плоскостей (АН-плоскостей).

**Определение 1.** *Инцидентностной структурой с параллельностью* называется система

$$S = \langle P, L; I, \parallel \rangle,$$

где  $\langle P, L; I \rangle$  – инцидентностная структура,  $\parallel$  – отношение эквивалентности на множестве прямых такое, что для любой точки  $p$  и любой прямой  $K$  существует единственная прямая  $M$  такая, что  $p \in M$  и  $M \parallel K$ . Отношение  $\parallel$  называется отношением *параллельности*.

**Определение 2.** *Инцидентностной структурой с параллельностью и смежностью* называется система

$$S = \langle P, L; I, \parallel, \sim \rangle,$$

где  $\langle P, L; I, \parallel \rangle$  – инцидентностная структура с параллельностью,  $\sim$  – отношение эквивалентности на множестве точек  $P$ . Отношение  $\sim$  называется отношением *смежности*.

**Определение 3.** Точка  $p$  называется *смежной* прямой  $K$  ( $p \sim K$ ), если существует точка  $q$  такая, что  $q \in K$  и  $q \sim p$ . Прямая  $M$  называется *смежной* прямой  $K$  ( $M \sim K$ ), если каждая точка прямой  $M$  смежна прямой  $K$  и каждая точка прямой  $K$  смежна прямой  $M$ .

**Определение 4.** Классы эквивалентности  $L / \parallel$  множества  $L$  по отношению  $\parallel$  называются *направлениями*. Направление, содержащее прямую  $K$ , обозначается  $\Pi_K$ . Прямая направления  $\Pi$ , которой инцидентна точка  $r$ , обозначается  $r\Pi$ .

**Определение 5.** Направление  $\Pi$  называется *смежным* направлению  $\Pi'$  ( $\Pi \sim \Pi'$ ), если найдется такая пара прямых  $M$  и  $M'$ , что  $M \in \Pi$ ,  $M' \in \Pi'$  и  $M \sim M'$ .

**Определение 6.** Инцидентностная структура  $S = \langle P, L; I, \parallel, \sim \rangle$  с параллельностью и смежностью называется *аффинной ельмслевова*

плоскостью или, короче, *АН-плоскостью*, если выполняются следующие условия:

(АН1) Для любых двух точек  $p$  и  $q$  существует прямая  $K$  такая, что  $p, q \in K$ .

(АН2) Если  $p \neq q$ , то  $p \sim q$  тогда и только тогда, когда существуют две различные прямые  $K$  и  $M$  такие, что  $p, q \in K, M$ . Если  $p \in K, M$ , то  $K \sim M$  тогда и только тогда, когда существует такая точка  $q$ , что  $p \neq q$  и  $q \in K, M$ .

(АН3) Существует отображение  $\varphi$  структуры  $S = \langle P, L; I, \parallel, \sim \rangle$  на аффинную плоскость  $S^* = \langle P^*, L^*, I^*, \parallel^*, \sim^* \rangle$  такое, что

$$1) \varphi(p) = \varphi(q) \Leftrightarrow p \sim q;$$

$$2) \varphi(L) = \varphi(M) \Leftrightarrow L \sim M;$$

3)  $L \cap M = \emptyset \Rightarrow \varphi(L) \parallel^* \varphi(M)$ , где через  $M \cap L$  обозначено множество точек, инцидентных двум прямым  $M$  и  $L$ .

**Пример 1.** Пусть  $S = \langle P, L; I, \parallel, \sim \rangle$  – конечная инцидентностная структура с параллельностью и смежностью, где

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_{16}\},$$

$$L = \{L_1, L_2, \dots, L_{24}\},$$

отношение инцидентности  $I$  задано матрицей инцидентности (рис. 1).

|    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | □ |   | □ |   |   |   |   |   | □ |    | □  |    |    |    |    |    | □  |    | □  |    |    |    |    |    |
| 2  |   | □ |   | □ |   |   |   |   |   | □  |    | □  |    |    |    |    | □  |    | □  |    |    |    |    |    |
| 3  | □ |   | □ |   |   |   |   |   |   | □  |    | □  |    |    |    |    |    | □  |    | □  |    |    |    |    |
| 4  |   | □ |   | □ |   |   |   |   |   | □  |    | □  |    |    |    |    |    | □  |    | □  |    |    |    |    |
| 5  |   |   |   |   | □ |   | □ |   |   |    |    |    | □  |    | □  |    | □  |    |    | □  |    |    |    |    |
| 6  |   |   |   |   |   | □ |   | □ |   |    |    |    |    | □  |    | □  | □  |    |    | □  |    |    |    |    |
| 7  |   |   |   |   | □ |   | □ |   |   |    |    |    |    | □  |    | □  |    | □  | □  |    |    |    |    |    |
| 8  |   |   |   |   |   | □ |   | □ |   |    |    |    | □  |    | □  |    |    | □  | □  |    |    |    |    |    |
| 9  | □ |   |   | □ |   |   |   |   |   |    |    |    |    | □  | □  |    |    |    |    |    | □  |    | □  |    |
| 10 |   | □ | □ |   |   |   |   |   |   |    |    |    | □  |    |    | □  |    |    |    |    | □  |    | □  |    |
| 11 | □ |   |   | □ |   |   |   |   |   |    |    |    | □  |    |    | □  |    |    |    |    |    | □  |    | □  |
| 12 |   | □ | □ |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    | □  | □  |    |    |    |    |    |    | □  |    | □  |
| 13 |   |   |   |   | □ |   |   | □ | □ |    |    | □  |    |    |    |    |    |    |    |    | □  |    |    | □  |
| 14 |   |   |   |   |   | □ | □ |   |   | □  | □  |    |    |    |    |    |    |    |    |    | □  |    |    | □  |
| 15 |   |   |   |   | □ |   |   | □ |   | □  | □  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | □  | □  |    |
| 16 |   |   |   |   |   | □ | □ |   |   | □  |    |    | □  |    |    |    |    |    |    |    |    | □  | □  |    |

Рис. 1. Матрица инцидентности *АН-плоскости*  $S$

Отношение смежности  $\sim$  определяется разбиением множества  $P$  на классы:

$$\{p_1, p_2, p_3, p_4\}; \{p_5, p_6, p_7, p_8\}; \{p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}\}; \{p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{16}\}.$$

Отношение параллельности  $\parallel$  определяется разбиением множества  $L$  на классы:

$$\{L_1, L_2, L_5, L_6\}; \{L_3, L_4, L_7, L_8\}; \{L_9, L_{10}, L_{13}, L_{14}\}; \\ \{L_{11}, L_{12}, L_{15}, L_{16}\}; \{L_{17}, L_{18}, L_{21}, L_{22}\}; \{L_{19}, L_{20}, L_{23}, L_{24}\}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что структура  $S = \langle P, L; I, \parallel, \sim \rangle$  действительно является аффинной ельмслевой плоскостью.

В  $AN$ -плоскости можно ввести понятие середины пары точек следующим образом.

**Определение 7.** Пусть  $a, b$  – не смежные точки  $AN$ -плоскости. Выберем произвольную точку  $e$ , не смежную прямой  $ab$ . Обозначим прямые:  $M = ae$ ;  $L = be$ ;  $N (a I N \ \& \ N \parallel L)$ ;  $P (b I P \ \& \ P \parallel M)$  и точку  $d (d I N \ \& \ d I P)$  (рис. 2).

Серединой пары точек  $a, b$  назовем точку  $c$  пересечения прямых  $ab$  и  $ed$ . Обозначение:  $c = S_1[a, b]$ .

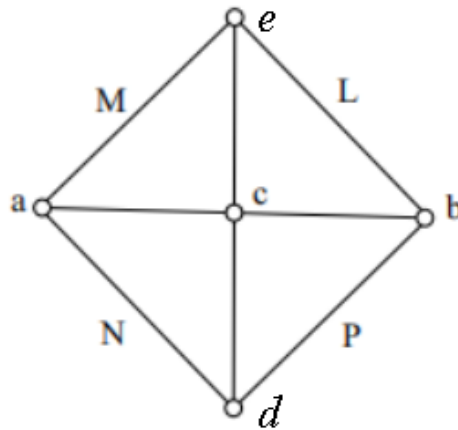


Рис. 2.  $c = S_1[a, b]$

**Определение 8.** Пусть  $a, b$  – не смежные точки  $AN$ -плоскости. Выберем произвольную точку  $e$ , не смежную прямой  $ab$ . На прямой  $ae$  выберем точку  $d$ , не смежную точкам  $a$  и  $b$ . На прямой  $be$  выберем точку  $f$  так, что  $df \parallel ab$ . Через точку  $e$  и точку пересечения прямых  $af$  и  $bd$  проведем прямую, пересекающую  $ab$  в точке  $c$  (рис. 3).

Точку  $c$  назовем серединой пары не смежных точек  $a, b$ . Обозначение:  $c = S_2[a, b]$ .

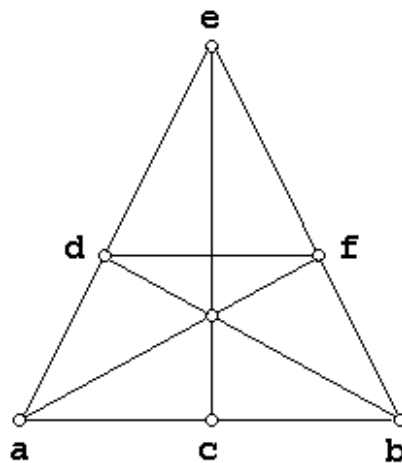


Рис. 3.  $c = S_2[a, b]$

**Определение 9.** Точка  $c$  называется серединой пары точек  $a, b$ , если существует такой перенос  $\tau$  плоскости, что  $\tau(a) = c$  и  $\tau(c) = b$  (рис. 4). Обозначение:  $c = S_3[a, b]$ .

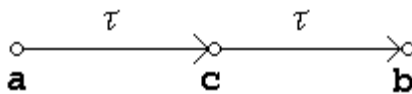


Рис. 4.  $c = S_3[a, b]$

**Определение 10.**  $AH$ -плоскость  $A = \langle P, L; I, \parallel, \sim \rangle$  называется плоскостью с серединой  $S$ , если:

- 1) для любых двух не смежных точек  $a$  и  $b$  существует единственная точка  $c = S[a; b]$ , являющаяся их серединой;
- 2) для любых двух не смежных точек  $a$  и  $c$  существует единственная точка  $b$  такая, что  $c = S[a; b]$ .

Введенные в работе три понятия середины двух точек для  $AH$ -плоскостей являются обобщениями соответствующих понятий для обычных аффинных плоскостей ( $A$ -плоскостей) [1; 2].

Свойства обычных аффинных плоскостей с серединой исследовались в работе [1]. Было доказано:

AS 1. В левоальтернативной аффинной плоскости три определения середины совпадают;

AS 2. Аффинная плоскость с серединой является плоскостью трансляций;

AS 3. В аффинной плоскости с серединой композиция двух симметрий с общей осью  $M$  и различными направлениями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  является сдвигом с осью  $M$ .

Интересно проверить выполнение перечисленных предложений в  $AH$ -плоскостях с серединой.

### Литература

1. Емельченков Е.П., Шатохин Н.Л. Определение середины в аффинной плоскости // Избранные вопросы математики и методики ее преподавания: материалы международной научно-методической конференции. Смоленск: СГПУ, 1998. С. 37–38.
2. Емельченков Е.П., Шатохин Н.Л. К понятию «середины» в аффинных плоскостях. Владикавказский математический журнал. 2010. Т. 12. Вып. 1. С. 10–16. [http://www.vmj.ru/2010\\_1.html](http://www.vmj.ru/2010_1.html).

**Е.П. Emelchenkov**  
Smolensk State University

### AFFINE HJELMSLEV PLANES WITH A CENTER

**Keywords:** *affine Hjelmslev planes; center.*



**Abstract.** *The paper introduces the concept of "center" for affine Hjelmslev planes (AH-planes). These concepts are generalizations of the corresponding concepts for ordinary affine planes. The main properties of affine planes with a center are listed. The task of fulfilling these properties in AH-planes with a center is set.*

**В.В. Карачик**

*Южно-Уральский государственный университет*

УДК 517.956.223+517.575

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ**

Ключевые слова: *Задача Неймана, представления Альманси, полигармоническое уравнение.*

*В данной работе приводится представление решения задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения в единичном шаре через решения задач Дирихле для уравнения Лапласа.*

**1. Введение.** Одним из эффективных методов представления решений краевых задач для эллиптических уравнений является метод, основанный на построении функции Грина для задачи. Функции Грина бигармонических задач Дирихле, Неймана и Робина в двумерном диске построены с помощью гармонических функций Грина задачи Дирихле в [1]. В [2–6] приведен явный вид функции Грина для бигармонического и 3-гармонического уравнения в единичном шаре. Явный вид функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре построен различными способами в работах [7–11]. Фредгольмовость и индекс обобщённой задачи Неймана исследовались в [12]. Как альтернатива методу функции Грина в работе [13], на основании результатов, полученных в [14], приводится представление решения задачи Дирихле для однородного полигармонического уравнения в единичном шаре через решения задач Дирихле для уравнения Лапласа. В настоящей работе эта идея распространяется на задачу Неймана.

**2. Задача Неймана.** Рассмотрим следующую задачу Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре  $S$

$$\Delta^m u(x) = 0, \quad x \in S, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \psi_0(s), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{\partial S} = \psi_{m-1}(s), \quad s \in \partial S. \quad (1)$$

Для построения решения этой задачи необходимы предварительные обозначения. Введем специальные полиномы вида

$$H_s(\lambda) = \frac{1}{(2s)!!} \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2s+2), \quad s \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

и определим факториальную степень в форме  $\lambda^{[m]} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)$ . Кроме этого, введем операцию дифференцирования полинома  $P(\lambda)$  в виде

$$P^{(0)}(\lambda) \equiv P(\lambda), \quad P^{(k)}(\lambda) \equiv (P^{(k-1)}(\lambda))^{(1)} = P^{(k-1)}(\lambda+1) - P^{(k-1)}(\lambda). \quad (3)$$

**Теорема 1.** Пусть гармонические функции  $q_k(x)$  являются решениями следующих задач Дирихле в  $S$

$$\Delta q_k(x) = 0, x \in S; \quad q_k|_{\partial S} = \psi_k(s), s \in \partial S, \quad (4)$$

где  $\psi_k \in C^{2m-1-k+\varepsilon}(\partial S)$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда для существования решения задачи Неймана (1) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{j=0}^{m-1} h_m^{(j+1)} q_j(0) = 0, \quad (5)$$

где  $h_m^{(j)}$  – коэффициенты из представления

$$h_m(\lambda) \equiv \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2m+2) = \sum_{j=0}^{m-1} h_m^{(j)} \lambda^{[j]}.$$

Решение задачи Неймана может быть представлено в виде

$$u(x) = \int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t} + C, \quad (6)$$

где  $C$  – произвольная постоянная,

$$v(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} K_{m-1}^{(j)}(1-\Lambda; |x|^2-1) q_j(x), \quad (7)$$

полином  $K_{m-1}(\lambda; |x|^2-1)$  определяется равенством

$$K_{m-1}(\lambda; |x|^2-1) = \sum_{k=0}^{m-1} (|x|^2-1)^k H_k(\lambda),$$

$H_k(\lambda)$  находятся из (2) и производная от него берется в смысле (3).

**Доказательство.** Сделаем в задаче (1) замену переменных в виде  $v = \Lambda u$ . Тогда поскольку  $\Delta \Lambda u(x) = (\Lambda+2)\Delta u(x)$ , то  $\Delta^m \Lambda u(x) = (\Lambda+2m)\Delta^m u(x) = 0$  и мы получаем следующую граничную задачу для  $v(x)$

$$\Delta^m v(x) = 0, x \in S, \quad v|_{\partial S} = \psi_0(s), \dots, (\Lambda-1)^{[m-1]} v|_{\partial S} = \psi_{m-1}(s), s \in \partial S.$$

По теореме 4 из [13] после формальной замены оператора  $\Lambda$  на оператор  $\Lambda-1$  решение этой задачи можно записать в виде

$$v(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} K_{m-1}^{(j)}(1-\Lambda; |x|^2-1) q_j(x),$$

где гармонические функции  $q_j(x)$  являются решениями задач Дирихле (4). Обозначим

$$v_1(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} K_{m-1}^{(j)}(1-\Lambda; |x|^2 - 1)(q_j(x) - q_j(0)), \quad v_0(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{q_j(0)}{j!} K_{m-1}^{(j)}(1; |x|^2 - 1).$$

Нетрудно видеть, что так как  $\Lambda(q_j(0)) = 0$  и  $K_{m-1}^{(j)}(\lambda; |x|^2 - 1)$  полиномы по  $\lambda$ , то справедливы следующие равенства

$$v(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} K_{m-1}^{(j)}(1-\Lambda; |x|^2 - 1)(q_j(x) - q_j(0)) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} K_{m-1}^{(j)}(1-\Lambda; |x|^2 - 1)q_j(0) = v_1(x) + v_0(x),$$

где  $v_0(x)$  является  $m$ -гармоническим полиномом.

Теперь необходимо разрешить уравнение  $\Lambda u = v$  в  $m$ -гармонических функциях в  $S$ . Функции  $v_i(x)$  являются  $m$ -гармоническими по построению. Отметим, что для произвольной  $m$ -гармонической в  $S$  функции  $p(x)$  равенство  $(\Lambda p)(0) = 0$  верно и поэтому  $v_1(0) = 0$ . Найдем значение  $v_0(0)$ . Нетрудно видеть, что

$$v_0(0) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{q_j(0)}{j!} K_{m-1}^{(j)}(1; -1) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{q_j(0)}{j!} \left( \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k H_k(\lambda) \right)^{(j)}(1). \quad (8)$$

**Лемма.** Пусть в соответствии с (2)

$$H_k(\lambda) = \frac{1}{(2k)!!} \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2k+2), \quad k \in \mathbb{N}; \quad H_0(\lambda) = 1.$$

Тогда для  $j \in \mathbb{N}_0$  верно следующее равенство

$$\left( \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k H_k(\lambda) \right)^{(j)}(1) = (-1)^{m-1} \frac{2m}{j+1} H_m^{(j+1)}(0). \quad (9)$$

**Доказательство.** Докажем (9) методом математической индукции по  $m$ . Для  $m=0$  мы имеем 0 в левой и правой частях равенства (9) и при  $m=1$  мы также имеем равенство  $H_0^{(j)}(1) = \frac{2}{j+1} H_1^{(j+1)}(1)$ , где  $j \in \mathbb{N}_0$ .

Предположим что равенство (9) верно при  $m \geq 1$ , и докажем, что оно справедливо и при  $m = m+1$ . В соответствии с определением производной (3) имеем  $(f(\lambda)g(\lambda))^{(1)} = f^{(1)}(\lambda)g(\lambda+1) + f(\lambda)g^{(1)}(\lambda)$  и поэтому, учитывая, что  $H_{m+1}(\lambda) = H_m(\lambda)(\lambda-2m)/(2m+2)$  можно записать

$$H_{m+1}^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2m+2} \left( H_m^{(1)}(\lambda)(\lambda-2m+1) + H_m(\lambda) \right),$$

откуда

$$H_{m+1}^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{2m+2} \left( H_m^{(2)}(\lambda)(\lambda-2m+2) + 2H_m^{(1)}(\lambda) \right)$$

и поэтому

$$H_{m+1}^{(j+1)}(\lambda) = \frac{1}{2m+2} \left( H_m^{(j+1)}(\lambda)(\lambda-2m+j+1) + (j+1)H_m^{(j)}(\lambda) \right).$$

Таким образом, правая часть (9) при  $m = m+1$  преобразуется к виду

$$(-1)^m \frac{2m+2}{j+1} H_{m+1}^{(j+1)}(0) = \frac{(-1)^m}{j+1} \left( H_m^{(j+1)}(0)(-2m+j+1) + (j+1)H_m^{(j)}(0) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{m-1} \frac{2m}{j+1} H_m^{(j+1)}(0) + (-1)^m (H_m^{(j+1)}(0) + H_m^{(j)}(0)) = \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k H_k^{(j)}(1) + (-1)^m H_m^{(j)}(1) = \sum_{k=0}^m (-1)^k H_k^{(j)}(1),
\end{aligned}$$

который доказывает шаг индукции. Здесь, во второй строчке, было использовано предположение индукции. Лемма доказана.

Если в (8) воспользуемся доказанной леммой, равенством  $H_m(\lambda) = h_m(\lambda) / (2m)!!$  и условием (5), то получим

$$\begin{aligned}
v_0(0) &= (-1)^{m-1} 2m \sum_{j=0}^{m-1} q_j(0) \frac{H_m^{(j+1)}(0)}{(j+1)!} = \\
&= \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!} \sum_{j=0}^{m-1} q_j(0) \frac{h_m^{(j+1)}(0)}{(j+1)!} = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!} \sum_{j=0}^{m-1} q_j(0) h_m^{(j+1)} = 0.
\end{aligned}$$

Обратное тоже верно, т.е.  $v(0) = 0 \Rightarrow v_0(0) = 0 \Rightarrow (5)$ . В [15; 16] доказано, что уравнение  $\Delta u = v$  разрешимо в  $m$ -гармонических функциях тогда и только тогда, когда  $v(0) = 0$ , но это условие выполнено. Решение уравнения  $\Delta u = v$  может быть записано в виде (6)  $u(x) = \int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t} + C$ .

Учитывая гладкость, наложенную на граничные функции  $\psi_k \in C^{2m-1-k+\varepsilon}(\partial S)$ ,  $k=0, \dots, m-1$ , аналогично теореме 4 [13], получаем  $q_k \in C^{2m-1-k}(\partial S)$ , и, значит, поскольку в формуле из теоремы 1

$$u(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} K_{m-1}^{(j)}(1 - \Lambda; |x|^2 - 1) q_j(x)$$

дифференциальный оператор, примененный к функциям  $q_k$ , имеет порядок  $m-1-k$ , то  $v = \Delta u \in C^m(\bar{S})$  и по (6)  $u \in C^m(\bar{S})$ . Тогда,  $m$ -гармоническая функция (6) является решением задачи Неймана (1). Если решение задачи Неймана  $u(x)$  существует, то функция  $v(x)$  из (7) должна удовлетворять равенству  $\Delta u = v$ , которое возможно только, если  $v(0) = 0$ , откуда следует равенство (5). Решение  $u(x)$  единственно с точностью до постоянной. Теорема доказана.

**Пример.** Найдем решение задачи Неймана (1) для 3-гармонического уравнения в единичном шаре ( $m=3$ ). В соответствии с методом построения решения задачи Неймана из теоремы 1, нам необходимо решение  $u(x)$  соответствующей задачи Дирихле. Если воспользоваться примером 2 из [13], то будем иметь

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^1 \left( \left(1 + \frac{1}{2}(|x|^2 t^2 - 1) - \frac{1}{4!!}(|x|^2 t^2 - 1)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2}(|x|^2 t^2 - 1)\Lambda + \frac{1}{4!!}(|x|^2 t^2 - 1)^2 \Lambda^2 \right) q_0(tx) + \left( \frac{1}{2}(|x|^2 t^2 - 1) + \frac{1}{4!!}(|x|^2 t^2 - 1)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{4!!}(|x|^2 t^2 - 1)^2 \Lambda \right) q_1(tx) + \frac{1}{4!!}(|x|^2 t^2 - 1)^2 q_2(tx) \right) \frac{dt}{t} + C.
\end{aligned}$$

## Литература

1. Begehr H. Biharmonic Green functions // *Le Matematiche*. 2006. Vol. LXI. P. 395–405.
2. Ying Wang, Liuqing Ye. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // *Complex Variables Elliptic Equ.* 2013. Vol.58, No. 1. P.7–22.
3. Ying Wang. Tri-harmonic boundary value problems in a sector // *Complex Variables Elliptic Equ.* 2014. V.59, No. 5. P. 732-749.
4. Karachik V.V. Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2019. Vol. 64, No 9. P. 1500–1521.
5. Карачик В.В. Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // *Матем. заметки*. 2020. Т. 107, № 1. С. 87–105.
6. Карачик В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // *Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика*. 2012. Т. 5:4. С. 527–546.
7. Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine  $m$  // *Palermo Rend.* 1905. Vol. 20. P. 97-135.
8. Begerh H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems // *Proceedings of the Steklov Institute of Math.* 2006. 255. P. 13–34.
9. Kal'menov T.S. and Suragan D. On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation // *Differential Equations* 2012. No. 48 (3). P. 441–445.
10. Карачик В.В. Задача Рикье-Неймана для полигармонического уравнения в шаре // *Дифференциальные уравнения*. 2018. Т. 54:5. С. 653–662.
11. Karachik V.V., Turmetov B.K., Torebek B.T. On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications // *Siberian Advances in Mathematics*. 2012. Т. 22:2. С. 115–134.
12. Солдатов А.П. О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана // *Дифференциальные уравнения*. 2020. Т. 56, № 2. С. 217–225.
13. Карачик В. В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // *Математические труды*, 2021. Т. 24:2. С. 46–64.
14. Карачик В. В. Представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре через функцию Грина // *Челябинский физико-математический журнал*, 2020. Т. 5:4-1. С. 391–399.
15. Карачик В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // *Математ. заметки*. 2014. Т. 96. № 2. С. 228–238.
16. Карачик В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // *Математические труды*. 2016. 19(2). С. 86–108.

**V.V. Karachik**

South Ural State University

### **SOLUTION TO THE NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POLYHARMONIC EQUATION IN THE UNIT BALL**

**Keywords:** *Neumann problem, Almansi representations, polyharmonic equation.*

**Abstract.** *In this paper, we present a representation of the solution to the Neumann boundary value problem for the homogeneous polyharmonic*

*equation in the unit ball in terms of solutions to the Dirichlet problem for the Laplace equation.*

Э.Г. Кирьяцкий

УДК 517.546

## ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ НА КЛАССЕ ТИПИЧНО-ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *единичный круг, однолистная функция, типично-вещественная функция, классы, коэффициенты, функционал.*

*Класс типично-вещественных функций представляет интерес для многих известных математиков. Основной их задачей было найти области значений различных функционалов, определенных на этом классе. В данной статье рассматриваются некоторые свойства специального функционала, введенного автором на классе типично-вещественных функций.*

**Введение.** Однозначная и аналитическая в единичном круге  $E$  (то есть в круге  $|z| < 1$ ) функция  $f(z)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ , называется типично-вещественной в круге  $E$ , если она принимает вещественные значения на диаметре  $-1 < z < 1$  круга  $E$ , а в остальных точках круга  $E$  мнимые части  $\text{Im}z$  и  $\text{Im}f(z)$  одного знака (см. [1]). Класс типично-вещественных функций в круге  $E$  обозначим символом  $\tilde{T}_1(E)$ . Из определения класса  $\tilde{T}_1(E)$  легко следует, что все коэффициенты функции  $f(z)$  из класса  $\tilde{T}_1(E)$  являются вещественными числами. Класс  $\tilde{T}_1(E)$  изучался многими математиками. Отметим, в частности, работы [2; 3]. В этих работах рассматривались разного вида функционалы. Основной их задачей было найти области значений этих функционалов, определенных на классе  $\tilde{T}_1(E)$ , а также области значений на других классах.

**Постановка задачи.** Точку  $\zeta$  из замкнутого круга  $\bar{E}$  назовем *обычной* для аналитической в круге  $E$  функции  $f(z)$ , если она определена в точке  $\zeta$  и  $\lim f(z) = f(\zeta)$  для любого пути движения аргумента  $z$  к  $\zeta$  внутри круга  $E$ . Каждой аналитической в круге  $E$  функции  $f(z)$  соответствует множество  $E^+(f)$  обычных точек. Каждой точке  $\zeta$  из замкнутого круга  $\bar{E}$  соответствует множество аналитических в круге  $E$  функций  $f(z)$ , для которых эта точка является обычной. В

дальнейшем мы рассматриваем аналитические в круге  $E$  функции с соответствующими обычными точками из замкнутого круга  $\bar{E}$ . Пусть  $\tilde{K}_1^R(E)$  – класс однолистных в круге  $E$  функций вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad a_1 = 1, \quad (1)$$

где все коэффициенты  $a_k$  являются вещественными числами. Известно [1], что

$$|a_k| \leq k, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

для любой функции  $f(z)$  вида (1) из класса  $\tilde{K}_1^R(E)$ . Справедливо строгое включение

$$\tilde{K}_1^R(E) \subset \tilde{T}_1(E). \quad (2)$$

Несмотря на строгое соотношение (2), установлено (см. [4]), что для коэффициентов функции вида (1) из класса  $\tilde{T}_1(E)$  также справедливы приведенные выше неравенства со знаком равенства для функции Кебе, принадлежащей классу  $\tilde{T}_1(E)$ . Обозначим через  $\tilde{\mathfrak{R}}_{0,1}^R(E)$  класс аналитических в круге  $E$  функций

$$\varphi_{\zeta}(z) = \frac{\zeta}{f(\zeta)} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{k=1}^{\infty} J_k[\zeta; f] z^{k-1}, \quad (3)$$

где  $f(z) \in \tilde{K}_1^R(E)$  и  $\zeta \in E^+(f)$ . Каждая однолистная в круге  $E$  функция  $f(z)$  порождает однопараметрическое семейство функций  $\varphi_{\zeta}(z)$  вида (3).

В данной работе излагаются некоторые свойства введенного автором специального функционала  $J_k[\zeta; f]$ , определенного на классах  $\tilde{K}_1^R(E)$ ,  $\tilde{T}_1(E)$ .

**Теорема 1.** *Имеют место формулы*

$$J_k[0; f] = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k, \quad J_0(0; f) \equiv 1, \quad (4)$$

$$J_k[\zeta; f] = \frac{f(\zeta) - \zeta - a_2 \zeta^2 - \dots - a_{k-1} \zeta^{k-1}}{\zeta^{k-1} f(\zeta)}, \quad \zeta \in E^+(f). \quad (5)$$

**Доказательство.** Если  $\zeta = 0$ , то формулы (4) следуют из равенства  $\varphi_0(z) = f(z)/z$ . Пусть  $\zeta \neq 0$  и  $\zeta \in E^+(f)$ . Нетрудно установить, что при  $k \geq 1$  справедливо равенство

$$(z - \zeta) \left( \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right)^{(k)} = f^{(k)}(z) - k \left( \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right)^{(k-1)}, \quad (6)$$

где производные взяты по  $z$ . Умножив обе части равенства (6) на  $\frac{\zeta}{k!f(\zeta)}$  и полагая затем  $z = 0$ , получим

$$\frac{1}{k!}\varphi_{\zeta}^{(k)}(0) = \frac{1}{f(\zeta)}\frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{\zeta}\varphi_{\zeta}^{(k-1)}(0).$$

Так как

$$J_{k+1}[\zeta; f] = \frac{1}{k!}\varphi_{\zeta}^{(k)}(0), \quad J_k[\zeta; f] = \frac{1}{(k-1)!}\varphi_{\zeta}^{(k-1)}(0), \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

то получим рекуррентную формулу

$$J_{k+1}[\zeta; f] = -\frac{1}{f(\zeta)}a_k + \frac{1}{\zeta}J_k[\zeta; f]. \quad (7)$$

Применяя рекуррентную формулу (7), получаем формулы (5). Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $p = 1, 2, \dots, m$  и  $f_p(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$  — аналитические в круге  $E$  функции. Если  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  — положительные числа со свойством  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$  и  $\zeta \in E$ ,  $\zeta \neq 0$ , то

$$J_k\left[\zeta; \sum_{p=1}^m \lambda_p f_p\right] = \frac{\sum_{p=1}^m \lambda_p f_p(\zeta) J_k[\zeta; f_p]}{\sum_{p=1}^m \lambda_p f_p(\zeta)}. \quad (8)$$

В частности,

$$J_k\left[0; \sum_{p=1}^m \lambda_p f_p\right] = \sum_{p=1}^m \lambda_p \frac{1}{k!} f_p^{(k)}(0), \quad (9)$$

**Доказательство.** Обозначим  $\psi(z) = \sum_{p=1}^m \lambda_p f_p(z)$ . Применяя

теорему 1, имеем:

$$\begin{aligned} \zeta^{k-1}\psi(\zeta)J_k[\zeta; \psi] &= \psi(\zeta) - \frac{\psi^{(1)}(\zeta)}{1!}\zeta - \frac{\psi^{(2)}(0)}{2!}\zeta^2 - \dots - \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \\ &= \sum_{p=1}^m \lambda_p f_p(\zeta) - \sum_{p=1}^m \lambda_p \frac{f_p^{(1)}(0)}{1!}\zeta - \sum_{p=1}^m \lambda_p \frac{f_p^{(2)}(0)}{2!}\zeta^2 - \dots - \sum_{p=1}^m \lambda_p \frac{f_p^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\zeta^{k-1} = \\ &= \sum_{p=1}^m \lambda_p \left( f_p(\zeta) - \frac{f_p^{(1)}(0)}{1!}\zeta - \frac{f_p^{(2)}(0)}{2!}\zeta^2 - \dots - \frac{f_p^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\zeta^{k-1} \right) = \\ &= \sum_{p=1}^m \lambda_p \zeta^{k-1} f_p(\zeta) J_k[\zeta; f_p] = \zeta^{k-1} \sum_{p=1}^m \lambda_p f_p(\zeta) J_k[\zeta; f_p]. \end{aligned}$$



Формула (8) доказана.

Далее, устремляя  $\zeta$  к нулю, получим

$$J_k[0; \psi] = \lim_{\zeta \rightarrow 0} J_k[\zeta; \psi] = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\psi(\zeta) - \frac{\psi^{(1)}(0)}{1!} \zeta - \frac{\psi^{(2)}(0)}{2!} \zeta^2 - \dots - \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \zeta^{k-1}}{\zeta^{k-1} \psi(\zeta)} =$$

$$= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} \zeta^k + \frac{\psi^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \zeta^{k+1} + \dots}{\zeta^{k-1} \left( \zeta + \frac{\psi^{(2)}(0)}{2!} \zeta^2 + \dots \right)} = \left( \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} \right) = \sum_{p=1}^m \lambda_p \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Формула (9) доказана.

Легко убедиться в том, что функции

$$S_t(z) = \frac{z}{1 - 2z + z^2}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (10)$$

принадлежат классу  $\tilde{K}_1^R(E)$ . Согласно соотношению (2) они принадлежат также классу  $\tilde{T}_1(E)$ . Разложение их по степеням  $z$  имеет вид:

$$S_t(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k-1}(t) z^k,$$

где  $u_k(t)$  многочлены Чебышева второго рода [5], определяемые на отрезке  $-1 \leq t \leq 1$  рекуррентной формулой

$$u_k(t) = 2tu_{k-1}(t) - u_{k-2}(t), \quad u_0(t) = 1, \quad u_1(t) = 2t.$$

Значит,

$$\frac{\zeta}{S_t(\zeta)} \frac{S_t(z) - S_t(\zeta)}{z - \zeta} = \frac{1 - \zeta z}{1 - 2tz + z^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} (u_{k-1}(t) - \zeta u_{k-2}(t)) z^{k-1}.$$

Применяя (3) и формулы (4), (5) из теоремы 1, получим

$$J_k[\zeta; S_t] = u_{k-1}(t) \zeta u_{k-2}(t) \quad k = 2, 3, 4, \dots, \quad \forall \zeta \in E. \quad (11)$$

**Замечание 1. Функции**

$$\varphi(z) = \sum_{p=1}^m \lambda_p S_{t_p}(z), \quad -1 \leq t_p \leq 1,$$

принадлежит классу  $\tilde{T}_1(E)$ .

Пользуясь формулами (6) и (7), получим

$$J_k \left[ \zeta; \sum_{p=1}^m \lambda_p S_{t_p} \right] = \frac{\sum_{p=1}^m \lambda_p (u_{k-1}(t_p) - \zeta u_{k-2}(t_p)) S_{t_p}(\zeta)}{\sum_{p=1}^m \lambda_p S_{t_p}(\zeta)}.$$

$$J_k \left[ 0; \sum_{p=1}^m \lambda_p S_{t_p} \right] = \sum_{p=1}^m \lambda_p u_{k-1}(t_p).$$

**Теорема 3.** Для любого  $t$  из отрезка  $-1 \leq t \leq 1$  справедливы неравенства

$$|J_k[\zeta; S_t]| \leq 2k - 1, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Знак равенства для каждого  $k \geq 2$  реализуется только функцией  $S_1(z)$ , если  $\zeta = -1$  и только функцией  $S_{-1}(z)$ , если  $\zeta = 1$ .

**Доказательство.** Известно (см. [6]), что  $|u_{k-1}(t)| \leq k$  для любого  $k \geq 2$ . Поэтому из (11) следуют неравенства

$$|J_k[\zeta; S_t]| \leq |u_k(t)| + |\zeta| |u_{k-1}(t)| \leq 2k - 1, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

**Замечание 2.** Функция  $\psi(z)$  из класса  $\tilde{T}_1(E)$  вида (12) является однолистной в круге  $E$  тогда и только тогда, когда она совпадает с одной из однолистных в круге  $E$  функций  $S_{t_p}(z)$  вида (10).

В заключение следует сказать, что о многих других интересных свойствах введенных нами функционалов  $J_k[\zeta; f]$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , будет рассказано в последующих статьях.

### Литература

1. Голузин Г.М. О типично вещественных функциях // Математический сборник. 1950. Т. 27 (60). С. 201–218.
2. Копанев С.А. Об одном функционале на классе типично вещественных функций // Труды Томского государственного университета. 1968. Т. 200. С. 100–111.
3. Ремизова М.П. Экстремальные задачи в классе типично-вещественных функций // Известия вузов. Математика. 1963. № 1(32). С. 135–144.
4. Хейман В.К. Многолистные функции. М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1958. 179 с.
5. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 43 с.
6. Ашневич И.Я. и Улина Г.В. Об областях значений аналитических функций, представимых интегралом Стильтеса // Вестник Ленинградского университета. 1955. № 11. С. 35–42.

**E. Kirjackij**

### ON A FUNCTIONAL ON THE CLASS TYPICALLY-REAL FUNCTIONS

**Keywords:** unit circle, univalent function, typically a real-valued function classes, the coefficients of the functional.

**Abstract.** This article discusses the properties introduced by the author of the functional on the class of typically-real functions. We study also other classes of functions. Particular attention is paid to the coefficients of Taylor.

**ДВА МОДЕЛЬНЫХ ПРИМЕРА ПРИБЛИЖЕНИЯ  
РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ГЛАДКИМИ  
В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА**

Ключевые слова: *функция знака, функция Дирихле, дополненный график, метрика Хаусдорфа, корень трансцендентного уравнения.*

*Подробно обсуждаются две задачи, возникающие в теории хаусдорфовых аппроксимаций. В зависимости от параметра  $n \in \mathbb{N}$  найдены хаусдорфовы расстояния между разрывной и гладкой функциями:  $\operatorname{sgn} x$  и  $(2/\pi)\arctg nx$ , а также  $D(x)$  и  $(1 + \cos nx)/2$ . Здесь  $\operatorname{sgn} x$  – функция знака,  $D(x)$  – функция Дирихле. Каждое из этих расстояний выражается через корень своего трансцендентного уравнения. Для таких корней получены двусторонние оценки и указаны асимптотические формулы при  $n \rightarrow \infty$ .*

В заметке рассмотрены два примера на приближение разрывных функций гладкими в метрике Хаусдорфа. Напомним ключевые определения (см., например, [1]). Для точек  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  на плоскости с декартовой системой координат определим величину

$$\rho(M_1, M_2) = \max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \},$$

называемую расстоянием в смысле Минковского. Плоскость с расстоянием Минковского есть метрическое пространство, в котором единичный шар – это квадрат со сторонами длины 2, параллельными координатным осям. Пусть  $X, Y$  – замкнутые подмножества плоскости. Расстояние Хаусдорфа между  $X$  и  $Y$  вводится по правилу

$$H(X, Y) = \inf \{ \varepsilon > 0: X \subset U_\varepsilon(Y), Y \subset U_\varepsilon(X) \}.$$

Поясним, что  $\varepsilon$ -окрестность  $U_\varepsilon(A)$  множества  $A$  в заданном метрическом пространстве определяется как

$$U_\varepsilon(A) = \inf \{ M: \rho(M, A) \leq \varepsilon \}$$

через расстояние

$$\rho(M, A) = \inf \{ \rho(M, M'): M' \in A \}$$

от точки  $M$  до множества  $A$ .

Пусть  $f(x)$  – функция действительной переменной (вообще говоря, многозначная). Под *дополненным графиком*  $F(f)$  функции  $f$  будем понимать наименьшее замкнутое множество плоскости, которое содержит

график  $\Gamma_f$  этой функции и является выпуклым относительно оси  $Oy$ . Последнее означает, что вместе с двумя точками  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_1, y_2)$  этому множеству принадлежит вертикальный отрезок  $M_1M_2$ . Хаусдорфовым расстоянием  $H(f, g)$  между двумя ограниченными и, вообще говоря, многозначными функциями  $f, g$  называется хаусдорфово расстояние между их дополненными графиками  $F(f), F(g)$ , то есть

$$H(f, g) = H(F(f), F(g)).$$

Перейдем к рассмотрению конкретных задач.

**Задача 1.** Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  найти хаусдорфово расстояние  $H(f, g_n)$  между многозначной функцией

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

и гладкой функцией  $g_n(x) = (2/\pi) \operatorname{arctg} nx$ .

График функции  $f$  совпадает с дополненным графиком функции знака

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

точнее,  $F(f) = \Gamma_f = F(\operatorname{sgn})$  (см. рис. 1). Ясно также, что  $F(g_n) = \Gamma_{g_n}$ .

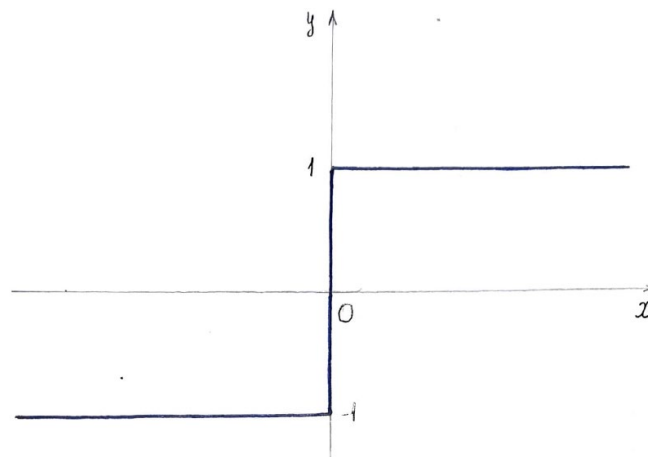


Рис. 1. График многозначной функции  $f(x)$  из задачи 1, совпадающий с дополненным графиком функции знака

**Утверждение 1.** При каждом  $n \in \mathbb{N}$  справедливо равенство

$$H(f, g_n) = H(\operatorname{sgn}, g_n) = x(n),$$

где  $x(n)$  – корень трансцендентного уравнения

$$x = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx. \quad (1)$$

Для корня  $x(n)$  верна двусторонняя оценка

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{1 - \frac{\pi}{4n}} \frac{1}{\sqrt{n}} < x(n) < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbf{N},$$

влекущая асимптотику

$$x(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Зададим параметр  $n \in \mathbf{N}$ . Согласно определению хаусдорфова расстояния  $H(f, g_n)$  сначала ищем точную нижнюю грань множества тех  $\varepsilon > 0$ , для которых  $\Gamma_{g_n} \subset U_\varepsilon(\Gamma_f)$  (см. рис. 2), а затем –

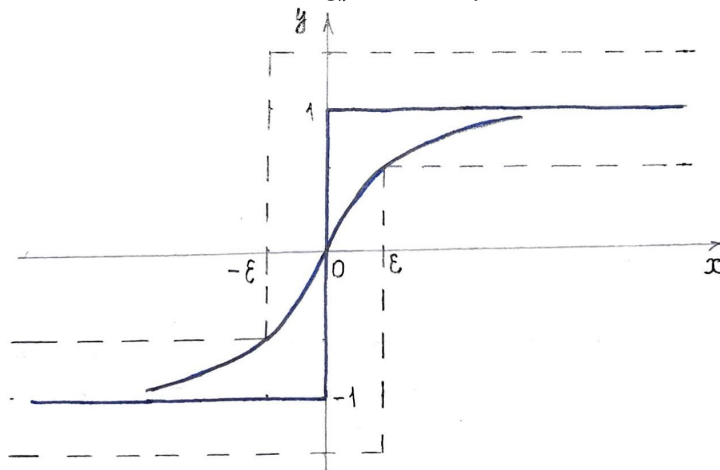


Рис. 2. Иллюстрация к задаче 1:  $\varepsilon$ -окрестность графика функции  $f$  содержит график функции  $g_n$

инфимум по всем  $\varepsilon > 0$ , удовлетворяющим условию  $\Gamma_f \subset U_\varepsilon(\Gamma_{g_n})$  (см. рис.

3). Выясняется, что искомое расстояние есть единственный корень уравнения (1). Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\pi}{2} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{nx}. \quad (2)$$

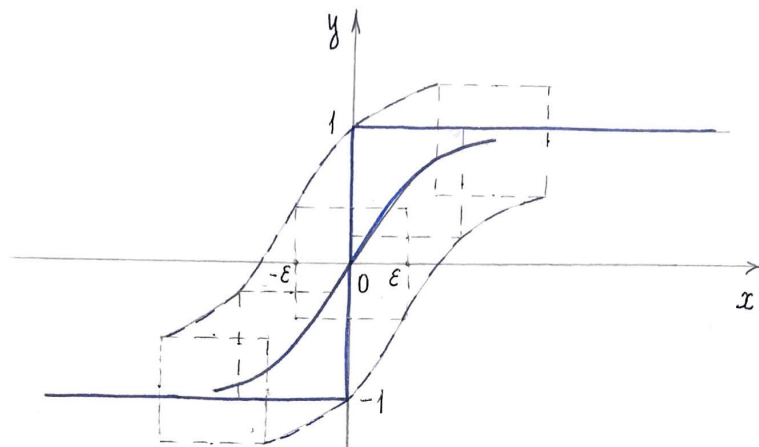


Рис. 3. Иллюстрация к задаче 1:  $\varepsilon$ -окрестность графика функции  $g_n$  содержит график функции  $f$

Несложный анализ (2) показывает, что  $x(1) > x(2) > \dots > x(n) > \dots$ , причем все значения  $x(n) \in (0,1)$ ;  $nx(n) > 1$  для  $n \geq 3$  и  $nx(n) \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Воспользуемся известным двойным неравенством

$$t - \frac{t^3}{3} < \operatorname{arctg} t < t, \quad t \in (0, +\infty). \quad (3)$$

Из (2), (3) для  $x(n)$  имеем

$$\frac{1}{nx(n)} - \frac{1}{3(nx(n))^3} < \frac{\pi}{2} x(n) < \frac{1}{nx(n)}, \quad (4)$$

что сразу дает нужную оценку сверху

$$x(n) < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Для получения оценки снизу сделаем замену  $\eta = (nx(n))^2$ , считая  $\eta > 1$ . Тогда левое неравенство в (4) запишется как

$$\frac{3\pi}{2n} \eta^2 - 3\eta + 1 > 0.$$

Решив его на промежутке  $\eta > 1$ , найдем, что

$$\eta > \frac{n}{\pi} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{2\pi}{3n}} \right),$$

если  $n \geq 3$ . Отсюда при тех же  $n$  имеем

$$x^2(n) > \frac{1}{\pi n} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{2\pi}{3n}} \right) > \frac{2}{\pi n} \left( 1 - \frac{\pi}{4n} \right), \quad \text{и}$$

оценка

$$x(n) > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{1 - \frac{\pi}{4n}} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 3,$$

получена. То, что она верна также при  $n=1$  и  $n=2$ , подтверждает компьютерный расчет:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}} = 0.369\dots < 0.638\dots = x(1),$$

$$\sqrt{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8}} = 0.439\dots < \frac{1}{2} = x(2).$$

Утверждение 1 доказано.

**Задача 2.** Для каждого  $n \in \mathbf{N}$  найти хаусдорфово расстояние  $H(D, h_n)$  между функцией Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

и функцией  $h_n(x) = (1 + \cos nx)/2$ .

Тригонометрический полином  $h_n$  – гладкая однозначная функция. Поэтому  $F(h_n) = \Gamma_{h_n}$ . В то же время для всюду разрывной функции  $D$  имеем

$$F(D) = \{ (x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in [0, 1] \},$$

то есть дополненный график функции Дирихле представляет собой замкнутую горизонтальную полосу шириной 1.

**Утверждение 2.** При каждом  $n \in \mathbf{N}$  справедливо равенство

$$H(D, h_n) = x^*(n),$$

где  $x^*(n)$  – наименьший корень трансцендентного уравнения

$$x = \frac{1}{2}(1 + \cos nx). \quad (5)$$

Для корня  $x^*(n)$  верна двусторонняя оценка

$$\frac{\pi}{n} - \frac{2\sqrt{\pi}}{n\sqrt{n}} < x^*(n) < \frac{\pi}{n} - \frac{2\sqrt{\pi}}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2}, \quad n \in \mathbf{N},$$

влекущая асимптотическую формулу

$$x^*(n) = \frac{\pi}{n} - \frac{2\sqrt{\pi}}{n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Зададим  $n \in \mathbf{N}$ . При любом  $\varepsilon > 0$  в  $\varepsilon$ -окрестности полосы  $F(D)$  лежит график  $\Gamma_{h_n}$  функции  $h_n$ . Выбор же точной нижней грани множества тех  $\varepsilon > 0$ , которые обеспечивают вложение  $F(D) \subset U_\varepsilon(\Gamma_{h_n})$ , иллюстрируется на рисунке 4. Тем самым искомое расстояние дается наименьшим корнем уравнения (5). Этот наименьший

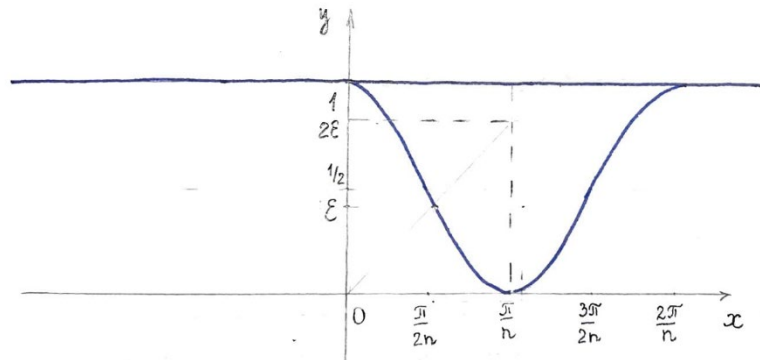


Рис. 4. Иллюстрация к задаче 2: дополненный график функции Дирихле (полоса) содержится в  $\varepsilon$ -окрестности графика функции  $h_n$

корень  $x^*(n) \in (0, \pi/n)$  монотонно убывает по параметру  $n$ , причем  $1 > x^*(1) > x^*(2) > \dots > x^*(n) > \dots > 0$ . (Укажем, что при выборе  $n \geq 7$  уравнение (5) имеет более одного корня.) После замены  $t = (\pi - nx)/2$  новое уравнение примет вид

$$\sin^2 t = \frac{\pi - 2t}{n} \quad (6)$$

с единственным на  $(0, \pi/2)$  корнем  $t^*(n) = (\pi - nx^*(n))/2$ . Оценим  $t^*(n)$ , воспользовавшись известным двойным неравенством

$$t - \frac{t^3}{6} < \sin t < t, \quad t \in (0, +\infty). \quad (7)$$

Правое неравенство в (7) дает

$$\frac{\pi - 2t^*(n)}{n} < (t^*(n))^2,$$

откуда

$$t^*(n) > \frac{\sqrt{1 + \pi n} - 1}{n} > \frac{\sqrt{\pi n} - 1}{n}.$$

Получили нужную оценку сверху

$$x^*(n) = \frac{\pi - 2t^*(n)}{n} < \frac{\pi}{n} - \frac{2\sqrt{\pi}}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Для вывода оценки снизу проверим, что

$$t^*(n) < \sqrt{\frac{\pi}{n}}. \quad (8)$$

На  $[0, \pi/2]$  левая часть (6) возрастает, а правая – убывает. Поэтому (8) есть простое следствие неравенства

$$n \sin^2 \sqrt{\frac{\pi}{n}} > \pi - 2\sqrt{\frac{\pi}{n}}. \quad (9)$$

Убедимся в справедливости (9). Согласно левому неравенству в (7) имеем

$$n \sin^2 \sqrt{\frac{\pi}{n}} > n \left( \sqrt{\frac{\pi}{n}} - \frac{1}{6} \sqrt{\left(\frac{\pi}{n}\right)^3} \right)^2 = \pi \left( 1 - \frac{\pi}{6n} \right)^2,$$

и достаточно доказать, что

$$\pi \left( 1 - \frac{\pi}{6n} \right)^2 > \pi - 2\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Последнее неравенство легко преобразуется к виду

$$2\sqrt{\frac{\pi}{n}} > \frac{\pi^2}{3n} - \frac{\pi^3}{36n^2} \quad (10)$$

и выполнено при любом  $n \in \mathbf{N}$  даже без вычитаемого в правой части. Но тогда (10)  $\Rightarrow$  (9)  $\Rightarrow$  (8). Неравенство (8) эквивалентно оценке снизу

$$x^*(n) > \frac{\pi}{n} - \frac{2\sqrt{\pi}}{n\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbf{N},$$

которая содержательна при  $n \geq 2$ , когда миноранта положительна.

Утверждение 2 доказано.



Подкрепим теоретические выводы по задачам 1 и 2 компьютерным расчетом. Так, например, при  $n = 10$  из утверждения 1 следует оценка

$$\sqrt{\frac{1}{5\pi} \left(1 - \frac{\pi}{40}\right)} < x(10) < \sqrt{\frac{1}{5\pi}}.$$

Дадим ее численный эквивалент

$$0.242\dots < 0.245\dots < 0.252\dots,$$

полученный компьютерными средствами. При том же значении  $n = 10$  из Утверждения 2 извлекаем

$$\frac{\pi}{10} - \frac{\sqrt{\pi}}{5\sqrt{10}} < x^*(10) < \frac{\pi}{10} - \frac{\sqrt{\pi}}{5\sqrt{10}} + \frac{1}{50}.$$

Численная реализация имеет вид

$$0.202\dots < 0.217\dots < 0.222\dots$$

также с весьма неплохим качеством приближения.

Разобранные примеры служат хорошей иллюстрацией к понятию хаусдорфова расстояния между функциями и вписаны в общий контекст соответствующего направления теории аппроксимации (см. [2; 3] и библиографию в них).

### Литература

1. Сендов Б.Х. Хаусдорфовые приближения. София: Изд-во Болгарской АН, 1979.
2. Сендов Б.Х., Попов В.А. Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа // Математический сборник. 1972. Т. 89, № 1. С. 138–147.
3. Садекова Е.Х. Об одной оценке для наилучшего приближения ограниченных функций тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа // Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 352–353.

**A.B. Kostin, E. Kh. Sadekova, V.B. Sherstyukov**  
NRNU MEPhI

## TWO MODEL EXAMPLES OF FUNCTION APPROXIMATION IN THE HAUSDORFF METRIC

**Keywords:** *sign function, Dirichlet function, supplemented function graph, root of the transcendental equation.*

**Abstract.** *Two problems arising in the theory of Hausdorff approximations are discussed in detail. Depending on the parameter  $n \in \mathbf{N}$ , the Hausdorff distances between the discontinuous and smooth functions are found:  $\operatorname{sgn} x$  and  $(2/\pi)\operatorname{arctg} nx$ , as well as  $D(x)$  and  $(1 + \cos nx)/2$ . Here,  $\operatorname{sgn} x$  is the sign function and  $D(x)$  is the Dirichlet function. Each of these distances is expressed in terms of the root of the corresponding transcendental equation. For such roots, two-sided estimates are indicated and asymptotic formulas are given for  $n \rightarrow \infty$ .*

## О ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДРАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Ключевые слова: *конформное отображение; произведение областей; воспроизводящее ядро.*

*В данной работе рассматриваются вопросы применения воспроизводящих ядер различного типа к построению ограниченных интегральных операторов. Строится ограниченный интегральный оператор, отображающий некоторое весовое пространство измеримых функций на соответствующее пространство аналитических функций, в случае, если данные пространства рассматриваются на произведениях областей.*

Пусть  $S = \{z \in C : |z| < 1\}$  – единичный круг на комплексной плоскости  $C$ ,  $T = \{z \in C : |z| = 1\}$  – его граница;  $\Omega$  – некоторая односвязная область на  $C$ ;  $d(w, \partial\Omega)$  – расстояние от точки  $w$  до границы  $\partial\Omega$ ,  $\psi$  – функция Римана, конформно отображающая некоторую область  $\Omega$  на единичный круг  $S$ .

Пусть также  $H(\Omega)$ ,  $h(\Omega)$  – множества всех аналитических и гармонических функций в  $G$  соответственно;  $H^p$  – класс Харди аналитических в  $S$  функций.

Пусть также  $L^p_\beta(\Omega)$  – класс измеримых по Лебегу в области  $\Omega$  функций  $f$  таких, что

$$\int_{\Omega} |f(w)|^p d^\beta(w, \partial\Omega) dm_2(w) < +\infty, 0 < p < +\infty, \beta > -1,$$

где  $dm_2$  – плоская мера Лебега;  $A^p_\beta(\Omega)$  – подпространство пространства  $L^p_\beta(\Omega)$ , состоящее из аналитических в  $\Omega$  функций.

Теорема М. Рисса, играющая существенную роль как в классической, так и в современной теории функций вещественного и комплексного переменного, утверждает: если функция принадлежит классу Лебега  $L^p(T)$ ,  $1 < p < +\infty$ , на действительной оси, то соответствующий сингулярный интеграл с ядром Коши данной функции является функцией класса Харди  $H^p$ . Из теоремы М. Рисса, по сути, ясно: оператор с ядром Коши отображает пространство  $L^p(T)$  на  $H^p$  при всех  $1 < p < +\infty$ . Уже

при  $p = 1$  указанное утверждение неверно, что следует из классической теоремы Колмогорова.

Данная проблема породила целый ряд исследований, связанных с ограниченными интегральными операторами в различных областях; отметим направления, связанные с построением ограниченных проекторов с классическим ядром типа Коши и ядром типа Бергмана

$$\frac{1}{\pi} \frac{\overline{\psi'(\mu)}\psi'(w)}{(1 - \overline{\psi(\mu)}\psi(w))^2}, w, \mu \in \Omega.$$

Среди множества работ в данной области задач можно выделить работы А.А. Соловьева [6], А.М. Шихватова [7], Х. Хеденмальма [9].

Ф.А. Шамоян и его ученики (см., например, [1–5; 8; 11]) также занимались исследованием подобных операторов, построенных на основе ядра Джрбашьяна, имеющего вид

$$\frac{2(\eta + 1)}{\pi} \frac{(1 - |\psi(\mu)|^2)^\eta}{(1 - \overline{\psi(\mu)}\psi(w))^{\eta+2}} |\psi'(\mu)|^2, w, \mu \in \Omega, \eta > -1.$$

В работах автора и Ф.А. Шамояна рассматривались области с границей более общего вида, а именно области, граница которых содержит угловые точки, области с асимптотически конформной границей, области с границей класса Лаврентьева. Проекторы в указанных работах действуют и ограничены в пространствах функций с весом  $d^\beta(w, \partial\Omega)$ ,  $\beta > -1$  при всех допустимых значениях  $0 < p < +\infty$ .

В приведенных выше работах при доказательстве указанных результатов использовались методы, в той или иной мере сводящиеся к непосредственной оценке рассматриваемых интегральных операторов, строящихся на основе интегрального представления функций из соответствующего класса.

В работах автора и Р.Ф. Шамояна рассматривались возможности обобщения данных результатов на различные пространства на произведениях областей (см., например, [10]).

Для формулировки новых результатов введем некоторые обозначения. Пусть  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ ;  $L_{\vec{\beta}}^p(\Omega)$  – множество измеримых в  $\Omega$  функций:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\vec{\beta}}^p(\Omega)} &= \int_{\Omega} |f(w)|^p d^{\vec{\beta}}(w, \partial\Omega) dm_{2n}(w) = \\ &= \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_n} |f(w_1, \dots, w_n)|^p \prod_{j=1}^n d^{\beta_j}(w_j, \partial\Omega_j) dm_2(w_j) < +\infty, \end{aligned}$$

$0 < p < +\infty$ ,  $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $\beta_j > -1$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;  $dm_{2n} = dm_2 \dots dm_2$  – мера Лебега на  $\Omega$ . Пусть  $A_{\vec{\beta}}^p(\Omega) = H(\Omega) \cap L_{\vec{\beta}}^p(\Omega)$ .

Оказывается, справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $\{\Omega_j\}_{j=1}^m, \Omega_j = \Omega$ , – множество односвязных областей на комплексной плоскости, граница которых содержат более одной точки. Пусть также  $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$  – функции, конформно отображающие  $S$  на  $\Omega_j, j = \overline{1, n}$ , причем  $\varphi_j(0) = w_0^j, w_0^j \in G_j, \varphi_j'(0) > 0, \psi_j = \varphi_j^{-1}, j = \overline{1, n}$ . Тогда оператор

$$P_{\vec{\eta}}(f)(\vec{w}) \stackrel{\text{def}}{=} F(\vec{w}) = \prod_{j=1}^n \frac{\eta_j + 1}{\pi} \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_n} f(\mu_1, \dots, \mu_n) \times \\ \times \prod_{j=1}^n \frac{(1 - |\psi_j(\mu_j)|^2)^{\eta_j} |\psi_j'(\mu_j)|^2}{(1 - \overline{\psi_j(\mu_j)} \psi_j(w_j))^{\eta_j + 2}} dm_2(\mu_1) \dots dm_2(\mu_n)$$

непрерывно отображает  $L_{|\beta|+2n-2}^p(G)$  на  $A_{\vec{\beta}}^p(G \times \dots \times G)$ ,  $1 < p < +\infty$ ,

$|\beta| = \sum_{j=1}^n \beta_j, \beta_j > -1, j = \overline{1, n}$ , для всех  $\eta > \eta_0$ ,  $\eta_0 = \eta_0(\vec{\beta}, p)$ . Кроме того,

справедливо неравенство  $\|F\|_{A_{\vec{\beta}}^p(\Omega \times \dots \times \Omega)} \leq c \|f\|_{L_{|\beta|+2n-2}^p(\Omega)}$ .

### Литература

1. Антоненкова О.Е., Часова Н.А. Об интегральных операторах с ядрами Пуассона в пространствах типа Харди в поликруге со смешанной нормой // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 4. С. 14–23.
2. Беднаж В.А. О кратной интерполяции в классах Р. Неванлинны в единичном круге // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2008. № 1(143). С. 3–4.
3. Махина Н.М. Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей // Вестник Омского государственного университета. 2018. Т. 23(3). С. 47–51.
4. Махина Н.М. Некоторые свойства классов ВМОА и интегральные оценки конформно отображающей функции в областях с границей типа Лаврентьева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2019. Т. 51. № 4. С. 487–495.
5. Махина Н.М. Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 16–22.
6. Соловьев А.А. Оценки в  $L^p$  интегральных операторов, связанных с пространствами аналитических и гармонических функций // Сибирский математический журнал. 1985. Т. 26, № 3. С. 168–191.
7. Шихватов А.М. О пространствах аналитических функций в области с угловой точкой // Математические заметки. 1975. Т. 18, № 3. С. 411–420.
8. Bednazh V.A., Rodikova E.G., Shamoian F.A. Multiple Interpolation and Principal

Parts of a Laurent Series for Meromorphic Functions in the Unit Disk with Power Growth of the Nevanlinna Characteristic // Complex Analysis and Operator Theory. 2017. Vol. 11. No. 1. P. 197–215.

9. Hedenmalm H. The dual of Bergman Space on Simply connected domains // J. d'Analyse Mathematique. 2002. Vol. 88. P. 311–335.

10. Shamoyan R.F., Makhina N.M. On continuous linear functionals in SOME weighted functional classes on product domains // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. Vol. 12. P. 651–678.

11. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. The Hardy-Littlewood Theorem and the Operator of Harmonic Conjugate in Some Classes of Simply Connected Domains with Rectifiable Boundary // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2009. Vol. 5. No. 2. P. 192–210.

**N.M. Makhina**

Bryansk State Academician I.G. Petrovski University

## **ABOUT REPRODUCING KERNELS AND THEIR APPLICATIONS**

**Keywords:** *conformal mapping; product of domains; reproducing kernel.*

**Abstract.** *In this paper, we consider the application of reproducing kernels of various types to the construction of bounded integral operators. A bounded integral operator is constructed that maps some weighted space of measurable functions onto the corresponding space of analytic functions, if these spaces are considered on products of domains.*

**Т.И. Михалёва, К.М. Расулов**

*Смоленский государственный университет*

УДК 517.968.23

## **ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГАЗЕМАНА В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ**

**Ключевые слова:** *квазигармоническая функция, краевая задача типа Газемана, дифференциальное уравнение Эйлера, круговая область.*

*В статье рассматривается краевая задача типа Газемана для квазигармонических функций в произвольных односвязных областях с гладкими границами. Устанавливается, что решение рассматриваемой задачи в круговых областях сводится к решению обычной задачи Газемана в классах аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная гладким замкнутым контуром  $L$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ . Для определенности будем считать, что точка  $z = 0$  принадлежит области  $T^+$ .

Напомним [1; 2], что *квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$*  называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , а  $n$  – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1–3], что всякую квазигармоническую функцию рода  $n$  в области  $T^+$  можно представить в виде

$$W^+(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где  $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z) \in A(T^+)$ , т.е.  $\varphi^+(z)$  – аналитическая в области  $T^+$  функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции  $W^+(z)$ .

**Определение 1.** Функцию  $W(z)$  будем называть *кусочно квазигармонической рода  $n$  с линией скачков  $L$* , если она в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях  $T^+$  и  $T^-$  определяется выражениями  $W^+(z)$  и  $W^-(z)$ :

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z), & z \in T^+, \\ W^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (3)$$

где  $W^+(z)$  определяется по формуле (2), а

$$W^-(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k}, \quad \varphi^-(z) \in A(T^-), \quad (4)$$

причем в каждой точке  $t \in L$  существуют пределы:  $\lim_{z \rightarrow t \in L} W^\pm(z)$ .

Всюду в дальнейшем будем говорить, что кусочно квазигармоническая функция  $W(z)$  вида (3) *ограничена (исчезает) на бесконечности*, если аналитическая функция  $\varphi^-(z)$  в представлении (4) *ограничена (исчезает) на бесконечности*.

Наконец, будем говорить, что кусочно квазигармоническая рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) функция  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  с линией скачков  $L$  принадлежит классу  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(m)}(L)$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , то есть аналитическая функция  $\varphi^+(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур  $L$  вместе со своими

производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число), а в представлении (4) функция  $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(m)}(L)$ .

Одной из основных краевых задач со сдвигом контура в классах кусочно квазигармонических функций рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) является следующая **задача  $H_n$** : *требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно квазигармонические функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) с линией скачков  $L$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  краевому условию*

$$W^+[\alpha(t)] = W^-(t)G(t) + g(t), \quad (5)$$

где  $G(t)$ ,  $g(t)$  – заданные на  $L$  комплексные функции, причем  $G(t) \neq 0$  на  $L$ , а  $\alpha(t)$  – функция сдвига контура  $L$ , сохраняющая его ориентацию.

В дальнейшем сформулированную выше задачу  $H_n$  будем называть *задачей типа Газемана для квазигармонических функций рода  $n$* . Соответствующую  $H_n$  однородную задачу ( $g(t) \equiv 0$ ) назовем *задачей  $H_n^0$* .

Сразу заметим, что в силу представлений (2) и (4) краевое условие (5) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\overline{\alpha(t)}}{1 + \alpha(t)\overline{\alpha(t)}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+[\alpha(t)]}{dt^k} = G(t) \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1 + t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k} + g(t), \quad t \in L. \quad (6)$$

Но равенство (6) есть краевое условие хорошо известной (см., например, [4, с. 365]) *обобщенной (дифференциальной) краевой задачи типа задачи Газемана* относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ , то есть задача  $H_n$  служит неформальной моделью *дифференциальной краевой задачи типа задачи Газемана для аналитических функций комплексного переменного*.

Таким образом, по сути, задача  $H_n$  равносильна дифференциальной задаче типа Газемана (6) относительно кусочно аналитической функции  $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ .

До настоящего времени *дифференциальные краевые задачи вида (6)* (см., например, [4; 5]) решаются в основном *методом интегральных уравнений*, то есть решение краевой задачи вида (6) приводится либо к решению определенного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши, либо непосредственно к решению определенного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

В настоящем сообщении устанавливается, что в случае *круговых областей* задача  $H_n$  решается в явном виде, то есть решение задачи  $H_n$  сводится к последовательному решению *обычной* краевой задачи Газемана в классе аналитических функций комплексного переменного и двух

линейных дифференциальных уравнений Эйлера. Ради краткости изложения далее мы ограничиваемся изложением метода решения задачи  $H_n$  в случае, когда  $n = 1$ ,  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  и  $L = \{t : |t| = 1\}$ .

**2. Метод решения задачи  $H_1$  в случае, когда  $L = \{t : |t| = 1\}$ .** Пусть  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  и  $L = \{t : |t| = 1\}$  – граница круга  $T^+$ . В силу (2)-(4) при  $n = 1$  всякая кусочно квазигармоническая функция  $W(z)$  первого рода с линией скачков  $L = \{t : |t| = 1\}$  представляется в виде

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi^+(z), & z \in T^+, \\ W^-(z) = \frac{d\varphi^-(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\varphi^+(z), \varphi^-(z)$  – пока неизвестные аналитические соответственно в  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  и  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$  функции, причем  $\varphi^-(z)$  исчезает на бесконечности.

Поскольку в точках окружности  $L$  выполняется тождество  $\bar{t} = \frac{1}{t}$ , краевое условие (5) при  $n = 1$  с учетом (7) можно переписать так:

$$\alpha(t) \frac{d\varphi^+[\alpha(t)]}{dt^k} - \varphi^+[\alpha(t)] = G_1(t) \left( t \frac{d\varphi^-(t)}{dt^k} - \varphi^-(t) \right) + g_1(t), \quad t \in L, \quad (8)$$

где приняты обозначения:

$$G_1(t) = \frac{\alpha(t)G(t)}{t}, \quad g_1(t) = \alpha(t)g(t). \quad (9)$$

Введем теперь в рассмотрение вспомогательную кусочно аналитическую функцию  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  с линией скачков  $L = \{t : |t| = 1\}$ , где

$$\Phi^\pm(z) = z \frac{d^k \varphi^\pm(z)}{dz^k} - \varphi^\pm(z), \quad z \in T^\pm; \quad (10)$$

здесь  $\varphi^\pm(z)$  – аналитические компоненты искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ .

Наконец, с учетом (10) краевое условие (8) можно записать в виде

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G_1(t)\Phi^+(t) + g_1(t), \quad t \in L, \quad (11)$$

где  $\Phi^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} \Phi^\pm(z)$ .

Заметим, что равенство (11) есть краевое условие *классической краевой задачи Газемана* относительно исчезающей на бесконечности



кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  (см., например, [5, с. 117]).

В дальнейшем *индекс задачи Газемана* (11) (см., например, [5–7]), то есть число  $\chi = \text{Ind}G_1(t) = \text{Ind}G(t)$ , будем также называть *индексом исходной задачи*  $H_1$ .

Хорошо известно (см., например, [6, с. 474] или [7, с. 303]), если индекс  $\chi \geq 0$ , то задача Газемана (11) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать следующими формулами:

$$\Phi^+(z) = \frac{X^+(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\psi[\beta(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad z \in T^+, \quad (12)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{X^-(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - z} d\tau + X^-(z) \cdot P_{\chi-1}(z), \quad z \in T^-, \quad (13)$$

где  $X(z) = \{X^+(z), X^-(z)\}$  – так называемая *каноническая функция задачи Газемана*,  $P_{\chi-1}(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_{\chi-1}z^{\chi-1}$  – произвольный многочлен степени не выше  $\chi - 1$  с комплексными коэффициентами, а  $\psi(t)$  – решение интегрального уравнения Фредгольма вида

$$\psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] \psi(\tau) d\tau = \frac{g_1(t)}{X^+[\alpha(t)]} + P_{\chi-1}(z). \quad (14)$$

Если же  $\chi < 0$ , то для разрешимости задачи Газемана (11) необходимо и достаточно выполнение  $-\chi$  условий вида

$$\int_L \left[ \frac{g_1(\tau)}{X^+[\alpha(\tau)]} + \int_L R(\tau, \tau_1) \frac{g_1(\tau_1)}{X^+[\alpha(\tau_1)]} d\tau_1 \right] \tau^{k-1} dt = 0, \quad (15)$$

$$k = 1, 2, \dots, -\chi,$$

где  $R(\tau, \tau_1)$  – резольвента ядра интегрального уравнения Фредгольма (14), причем (при выполнении условий (15)) задача Газемана (11) будет иметь единственное решение, которое также задается формулами (12)–(13), в которых нужно положить  $P_{\chi-1}(z) \equiv 0$ .

Предположим, что задача Газемана (11) разрешима и уже найдено ее решение  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ . Тогда в силу (10) получаем два дифференциальных уравнения:

$$z \frac{d\varphi^+(z)}{dz^k} - \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T^+, \quad (16)$$

$$z \frac{d\varphi^-(z)}{dz^k} - \varphi^-(z) = \Phi^-(z), \quad z \in T^-. \quad (17)$$

Итак, аналитические компоненты  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  должны

удовлетворять линейным дифференциальным уравнениям Эйлера вида (16) и (17) соответственно.

Далее сначала построим все аналитические в круге  $T^+$  решения дифференциального уравнения вида (16), а затем получим аналитические в области  $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$  решения дифференциального уравнения вида (17).

Для построения общего решения неоднородного дифференциального уравнения вида (16) в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z \frac{d\varphi^+(z)}{dz^k} - \varphi^+(z) = 0, \quad z \in T^+. \quad (18)$$

Равенство (15) есть линейное однородное дифференциальное уравнение Эйлера 1-го порядка (см., например, [8, с. 136]). Легко проверить, что все аналитические в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  решения уравнения Эйлера (18) можно задавать формулой

$$\varphi_0^+(z) = C_1^+ z, \quad (19)$$

где  $C_1^+$  – произвольная комплексная постоянная.

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (16) в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  будем искать методом вариации произвольных постоянных, то есть в виде

$$\varphi_1^+(z) = C_1(z)z, \quad (20)$$

где  $C_1(z)$  – некоторая мероморфная в круге  $T^+$  функция комплексной переменной  $z$ , для которой выражение  $C_1(z)z$  есть аналитическое решение уравнения (16) в этом круге, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающееся на окружность  $L$  вместе со своей производной. Подставив функцию (20) в левую часть уравнения (16), получим

$$zC_1'(z) = \Phi^+(z). \quad (21)$$

Из формулы (21) видно, что для того чтобы функция  $C_1(z)$  была мероморфной в круге  $T^+$ , необходимо и достаточно выполнение следующего условия  $\Phi^+(0) = 0$ , которое в силу (12) равносильно следующему равенству:

$$\int_L \frac{\psi[\beta(\tau)]}{\tau} d\tau = 0, \quad z \in T^+. \quad (22)$$

При выполнении условия (22) с помощью интегрирования из (21) получаем

$$C_1(z) = \int \frac{\Phi^+(z)}{z} dz, \quad (23)$$

где  $\int z^{-1}\Phi^+(z)dz$  – фиксированная первообразная функции  $z^{-1}\Phi^+(z)$  в круге  $T^+$ .

Итак, в силу (20) и (23) частное решение неоднородного дифференциального уравнения (16) в круге  $T^+$  можно задавать в виде

$$\varphi_1^+(z) = z \int z^{-1}\Phi^+(z)dz. \quad (24)$$

Так как решения задачи  $H_1$  ищутся в классе  $\mathcal{Q}_1(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$ , то функция (24) должна быть непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающейся на контур  $L$  вместе со своей производной 1-го порядка включительно. В силу известной теоремы Харди и Литтльвуда (см., например, [9, с. 397]), для этого необходимо и достаточно, чтобы в круге  $T^+$  выполнялись неравенства:

$$\left| \frac{d^k \varphi_1^+(z)}{dz^k} \right| \leq \frac{M_k}{(1-r)^{1-\alpha_k}}, \quad k=1,2, \quad (25)$$

где  $r=|z|$ ;  $M_k, \rho_k$  ( $k=1,2$ ) – некоторые положительные постоянные, причем  $0 < \rho_k \leq 1$ .

Таким образом, при выполнении условий (22) и (25) все аналитические в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  решения линейного дифференциального уравнения (16), принадлежащие классу  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , можно задавать так:

$$\varphi^+(z) = z \left\{ C_1^+ + \int z^{-1}\Phi^+(z)dz \right\}, \quad (26)$$

где  $C_1^+$  – произвольная комплексная постоянная.

Далее методом степенных рядов легко проверить, что нетривиальных аналитических в области  $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$  решений однородное линейное дифференциальное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (17), не имеет.

Будем искать решения неоднородного дифференциального уравнения (17) методом степенных рядов. Для этого предположим, что разложение аналитической функции  $\Phi^-(z)$  в окрестности точки  $z = \infty$  имеет вид:

$$\Phi^-(z) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}. \quad (27)$$

Тогда нетрудно проверить, что решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (17) можно найти по формуле

$$\varphi^-(z) = -b_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(k+1)z^k}. \quad (28)$$

Таким образом, аналитические компоненты  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомым кусочно квазигармонических функций  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  определяются по формулам (26) и (28) соответственно. Тогда (в силу

представления (7)) общее решение искомой задачи типа Газемана  $H_1$  можно задавать так:

$$W(z) = \begin{cases} -2\left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)\varphi^+(z) + \frac{d\varphi^+(z)}{dz}, & z \in T^+, \\ -2\left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)\varphi^-(z) + \frac{d\varphi^-(z)}{dz}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (29)$$

где аналитические функции  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  определяются по формулам (26) и (28) соответственно.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 1.** Если  $L = \{t : |t| = 1\}$ , то решение задачи типа Газемана  $H_1$  сводится к последовательному решению классической задачи Газемана (11) и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера (16) и (17). При этом в случае, когда индекс  $\chi \geq 0$ , для разрешимости задачи  $H_1$  необходимо и достаточно, чтобы функции  $G(t)$  и  $g(t)$  удовлетворяли условиям (22) и (25). В случае же, когда индекс  $\chi < 0$ , для разрешимости задачи  $H_1$  необходимо и достаточно, чтобы функции  $G(t)$  и  $g(t)$ , наряду с условиями (22) и (25), удовлетворяли еще  $-\chi$  условиям вида (15). При выполнении указанных условий общее решение задачи  $H_1$  можно задавать формулой (29).

### Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Расулов К.М. Об одном методе решения краевой задачи типа Римана в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ, 2015. №2/1. С. 159–167.
3. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung  $(1+z\bar{z})^2 W_{\bar{z}\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. 1965. Schriften 23.
4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
7. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: СГПУ, 1998. 343 с.
8. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.
9. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.

**T.I. Mikhalyova, K.M. Rasulov**  
Smolensk State University

**ON A METHOD OF SOLVING OF BOUNDARY VALUE PROBLEM  
OF HASEMAN FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN CIRCULAR  
DOMAINS**

**Keywords:** *quasiharmonic function, boundary value problem of Haseman type, Euler differential equation, cyclic domain.*

**Abstract.** *The paper presents a boundary value problem of Haseman type for quasiharmonic functions in arbitrary simply connected domains with smooth boundaries. It is stated that solution of the problem under consideration in circular domains is reduced to solution of the usual Haseman problem in the classes of analytic functions and two linear Euler differential equations.*

**Т.Р. Нагорная, К.М. Расулов**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

**О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ  
ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА  
В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ**

Ключевые слова: *краевая задача Неймана, дифференциальное уравнение, явное решение, обобщенная гармоническая функция, круговая область.*

*В статье рассматривается краевая задача Неймана для одного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка, регулярные решения которого являются естественными обобщениями гармонических функций двух действительных переменных. Устанавливается, что в случае круговых областей решение рассматриваемой задачи сводится к последовательному решению скалярной задачи сопряжения (задачи Римана) для аналитических функций комплексного переменного и определенного линейного дифференциального уравнения Эйлера, то есть в случае, когда носителем краевого условия служит окружность, рассматриваемая задача допускает решение в явном виде.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – односвязная область, лежащая в единичном круге  $U_1^+ \quad U_1^+ = \{z : |z| < 1\}$  на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , а простая гладкая замкнутая кривая  $L$  служит

границей области  $T^+$ . Рассмотрим в области  $T^+$  дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1-z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n$  – некоторое неотрицательное целое число, а  $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  – неизвестная функция.

Известно (см., например, [1–4]), что всякое регулярное решение уравнения (1) в области  $T^+ \subset U_1^+$  можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n B_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} + \overline{\sum_{k=0}^n B_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k f^+(z)}{dz^k}}, \quad (2)$$

где  $B_k^n = \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z), f^+(z)$  – аналитические (голоморфные) в области  $T^+$  функции.

Так как при  $n=0$  решения уравнения (1) являются гармоническими функциями в области  $T^+$ , в дальнейшем, следуя [1-2], при  $n \geq 1$  регулярные решения дифференциального уравнения (1) в области  $T^+ \subset U_1^+$  будем называть обобщенными гармоническими функциями порядка  $n$  в области  $T^+$ , а функции  $\varphi^+(z)$  и  $f^+(z)$ , входящие в правую часть представления (2), для удобства назовем соответственно первой и второй аналитическими компонентами обобщенной гармонической функции  $W(z)$ . При этом класс всех обобщенных гармонических функций порядка  $n$  в области  $T^+$  будем обозначать символом  $G_n(T^+)$ , а через  $G_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$  обозначим класс обобщенных гармонических функций порядка  $n$  в области  $T^+$ , для которых в представлении (2) аналитические компоненты  $\varphi^+(z), f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , то есть  $\varphi^+(z), f^+(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно.

Рассматривается следующая краевая задача: требуется найти все функции  $W(z)$ , которые принадлежат классу  $G_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$  и удовлетворяют на  $L$  условию

$$\frac{\partial W}{\partial n_-} = h(t), \quad (3)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n_-}$  – производная по внешней нормали к  $L$ ,  $h(t) = a(t) + ib(t)$  – заданная

на контуре  $L$  функция класса  $H(L)$  (то есть удовлетворяющая на  $L$  условию Гельдера).

Следуя [2], сформулированную задачу будем называть *задачей Неймана для обобщенных гармонических функций порядка  $n$*  или, кратко, *задачей  $\mathbf{GN}_n$* , а соответствующую однородную задачу ( $h(t) \equiv 0$ ) назовем *задачей  $\mathbf{GN}_n^0$* .

В работе авторов [2] излагался метод решения задачи  $\mathbf{GN}_n$  в случае, когда  $n = 2$  и  $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ . Основной целью настоящего сообщения является построение явного метода решения задачи  $\mathbf{GN}_n$  в случае  $n = 3$  и  $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ .

**2. О решении в явном виде задачи  $\mathbf{GN}_3$  в круге  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ .**

Пусть  $L_r = \{t : |t| = r\}$  – граница круга  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ . В силу (2) при  $n = 3$  всякую обобщенную гармоническую функцию  $W(z)$  из класса  $\mathbf{G}_3(T^+) \cap H^{(4)}(L)$  можно представить в виде:

$$W(z) = \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} + \frac{12\bar{z}}{1-z\bar{z}} \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{60\bar{z}}{(1-z\bar{z})^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{120\bar{z}^3}{(1-z\bar{z})^3} \cdot \varphi^+(z) + \overline{\frac{d^3 f^+(z)}{dz^3} + \frac{12z}{1-z\bar{z}} \frac{d^2 f^+(z)}{dz^2} + \frac{60z}{(1-z\bar{z})^2} \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{120z}{(1-z\bar{z})^3} f^+(z)}, \quad z \in T^+, \quad (4)$$

где  $\varphi^+(z), f^+(z)$  – аналитические в круге  $T_r^+$  функции, принадлежащие классу  $A(T^+) \cap H^{(4)}(L)$ .

С учетом представления (4), соотношения  $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ , которое выполняется на окружности  $L_r = \{t : |t| = r\}$ , и выражения  $\frac{\partial W}{\partial n_-} = t \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{r^2}{t} \frac{\partial W}{\partial \bar{t}}$  краевое условие (3) можно записать в виде

$$t^4 \frac{d^4 \varphi^+(t)}{dt^4} + \frac{12r^2}{1-r^2} t^3 \frac{d^3 \varphi^+(t)}{dt^3} + \frac{12r^2(6r^2+1)}{(1-r^2)^2} t^2 \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{120r^4(2r^2+1)}{(1-r^2)^3} t \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{360r^6(r^2+1)}{(1-r^2)^4} \varphi^+(t) + \frac{t^6}{r^6} \left( \overline{\frac{d^4 f^+(t)}{dt^4} + \frac{12r^2}{1-r^2} t^3 \frac{d^3 f^+(t)}{dt^3} + \frac{12r^2(6r^2+1)}{(1-r^2)^2} t^2 \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + \frac{120r^4(2r^2+1)}{(1-r^2)^3} t \frac{df^+(t)}{dt} + \frac{360r^6(r^2+1)}{(1-r^2)^4} f^+(t)} \right) = t^3 h(t), \quad t \in L_r. \quad (5)$$

Вводя в рассмотрение следующие вспомогательные аналитические в круге  $T_r^+$  функции

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) = & z^4 \frac{d^4 \varphi^+(z)}{dz^4} + \frac{12r^2}{1-r^2} z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} + \frac{12r^2(6r^2+1)}{(1-r^2)^2} z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + \\ & + \frac{120r^4(2r^2+1)}{(1-r^2)^3} z \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{360r^6(r^2+1)}{(1-r^2)^4} \varphi^+(z), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F^+(z) = & z^4 \frac{d^4 f^+(z)}{dz^4} + \frac{12r^2}{1-r^2} z^3 \frac{d^3 f^+(z)}{dz^3} + \frac{12r^2(6r^2+1)}{(1-r^2)^2} z^2 \frac{d^2 f^+(z)}{dz^2} + \\ & + \frac{120r^4(2r^2+1)}{(1-r^2)^3} z \cdot \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{360r^6(r^2+1)}{(1-r^2)^4} f^+(z), \end{aligned} \quad (7)$$

равенство (5) можно переписать в следующем виде

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^6}{r^6} \overline{F^+(t)} + t^3 h(t), \quad t \in L_r. \quad (8)$$

Наконец, построив аналитическую в области  $T_r^- = \bar{C} \setminus (T_r^+ \cup L_r)$  функцию  $F^-(z)$  по формуле

$$F^-(z) = \overline{F^+\left(\frac{r^2}{z}\right)}, \quad z \in T_r^-, \quad (9)$$

и учитывая (см., например, [1, с. 40] или [5, с. 290]), что на окружности  $L_r = \{t : |t| = r\}$  выполняется условие «симметрии»

$$F^-(t) = \overline{F^+(t)}, \quad t \in L_r, \quad (10)$$

из равенства (8) получаем

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^6}{r^6} F^-(t) + t^3 h(t), \quad t \in L_r. \quad (11)$$

Но равенство (11) есть граничное условие задачи Римана (см., например, [5, с. 106]) относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), F^-(z)\}$  с линией скачков  $L_r$ .

Так как индекс задачи Римана (11)  $\chi = \text{Ind}\left(-\frac{t^6}{r^6}\right) = 6$ , то она, безусловно, разрешима и ее общее решение задается в виде (см., например, [1, с. 46] или [5, с. 110]):

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{\tau^3 h(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{r^6} (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_6 z^6), \quad z \in T_r^+, \quad (12)$$

$$F^-(z) = -\frac{r^6 z^{-6}}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{\tau^3 h(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{r^6} \left( \frac{c_0}{z^6} + \frac{c_1}{z^5} + \frac{c_2}{z^4} + \dots + c_6 \right), \quad z \in T_r^-, \quad (13)$$

где  $c_k = \alpha_k + i\beta_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) — произвольные комплексные постоянные.

В силу (9) и (13) значения аналитической в  $T_r^+$  функции  $F^+(z)$  можно найти по формуле:



$$F^+(z) = \overline{F^- \left( \frac{r^2}{z} \right)}, z \in T_r^+. \quad (14)$$

После того, как найдены аналитические в круге  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$  функции  $\Phi^+(z)$  и  $F^+(z)$ , мы получаем из (6) и (7) следующие линейные дифференциальные уравнения Эйлера четвертого порядка относительно аналитических компонент  $\varphi^+(z)$ ,  $f^+(z)$  искомой обобщенной гармонической функции  $W(z)$ :

$$z^4 \frac{d^4 \varphi^+(z)}{dz^4} + \frac{12r^2}{1-r^2} z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} + \frac{12r^2(6r^2+1)}{(1-r^2)^2} z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{120r^4(2r^2+1)}{(1-r^2)^3} z \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{360r^6(r^2+1)}{(1-r^2)^4} \varphi^+(z) = \Phi^+(z), z \in T_r^+, \quad (15)$$

$$z^4 \frac{d^4 f^+(z)}{dz^4} + \frac{12r^2}{1-r^2} z^3 \frac{d^3 f^+(z)}{dz^3} + \frac{12r^2(6r^2+1)}{(1-r^2)^2} z^2 \frac{d^2 f^+(z)}{dz^2} + \frac{120r^4(2r^2+1)}{(1-r^2)^3} z \cdot \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{360r^6(r^2+1)}{(1-r^2)^4} f^+(z) = F^+(z), z \in T_r^+, \quad (16)$$

где  $\Phi^+(z)$  и  $F^+(z)$  – аналитические в круге  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$  функции, задаваемые формулами (12) и (14) соответственно.

Так как дифференциальные уравнения (15) и (16) отличаются лишь правыми частями, то подробно остановимся на исследовании дифференциального уравнения (15).

Исследуем соответствующее (15) однородное дифференциальное уравнение Эйлера, то есть уравнение вида

$$z^4 \frac{d^4 \varphi^+(z)}{dz^4} + \frac{12r^2}{1-r^2} z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} + \frac{12r^2(6r^2+1)}{(1-r^2)^2} z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{120r^4(2r^2+1)}{(1-r^2)^3} z \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{360r^6(r^2+1)}{(1-r^2)^4} \varphi^+(z) = 0, z \in T_r^+. \quad (17)$$

Как известно (см., например, [6, с. 136]), с помощью подстановки  $z = e^s$  уравнение (17) приводится к следующему линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^4 \tilde{\varphi}^+(s)}{ds^4} + \frac{12r^2}{1-r^2} \frac{d^3 \tilde{\varphi}^+(s)}{ds^3} + \frac{12r^2(6r^2+1)}{(1-r^2)^2} \frac{d^2 \tilde{\varphi}^+(s)}{ds^2} + \frac{120r^4(2r^2+1)}{(1-r^2)^3} \frac{d\tilde{\varphi}^+(s)}{ds} + \frac{360r^6(r^2+1)}{(1-r^2)^4} \tilde{\varphi}^+(s) = 0, \quad (18)$$

где  $\tilde{\varphi}^+(s) = \varphi^+(e^s)$ .

Характеристическое уравнение для (18) имеет вид:

$$k^4 - 6 \cdot \frac{1-3r^2}{1-r^2} \cdot k^3 + \frac{119r^4 - 46r^2 + 11}{(1-r^2)^2} \cdot k^2 +$$

$$+ 6 \cdot \frac{1-5r^2+r^4-57r^6}{(1-r^2)^3} k + 6 \cdot \frac{60r^6(r^2+1)}{(1-r^2)^4} = 0, \quad r \in (0, 1). \quad (19)$$

Решая данное уравнение средствами *Wolfram Mathematica*, получаем, что алгебраическое уравнение (19) действительных корней не имеет. Значит, однородные дифференциальные уравнения, соответствующие уравнениям (15) и (16), не имеют нетривиальных аналитических решений в круге  $T_r^+$ ,  $0 < r < 1$ . Следовательно, в случае их разрешимости неоднородные уравнения (15) и (16) будут иметь единственные решения, принадлежащие классу  $A(T^+) \cap H^{(4)}(L)$ .

Предположим, что неоднородные дифференциальные уравнения (15) и (16) имеют аналитические в круге  $T_r^+$  решения  $\varphi_1^+(z)$  и  $f_1^+(z)$  соответственно, которые принадлежат классу  $A(T^+) \cap H^{(4)}(L)$ . Тогда, подставив в правую часть формулы (4) вместо  $\varphi^+(z)$  и  $f^+(z)$  функции  $\varphi_1^+(z)$  и  $f_1^+(z)$  соответственно, получим решение искомой задачи  $\mathbf{GN}_3$  в круге  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ .

Ввиду вышеизложенного можно заключить справедливость следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Если  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ , то решение неоднородной задачи Неймана  $\mathbf{GN}_3$  в классе  $\mathbf{G}_3(T^+) \cap H^{(4)}(L)$  сводится к последовательному решению скалярной задачи Римана (11) относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), F^-(z)\}$  с линией скачков  $L_r$  и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера (15) и (16). Для разрешимости задачи  $\mathbf{GN}_3$  необходимо и достаточно, чтобы линейные дифференциальные уравнения Эйлера (15) и (16) были разрешимы в классе  $A(T^+) \cap H^{(4)}(L)$  и при выполнении этих условий общее решение задачи  $\mathbf{GN}_3$  можно задавать формулой (4), где  $\varphi^+(z)$  и  $f^+(z)$  – решения дифференциальных уравнений Эйлера (15) и (16) соответственно.*

### Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.
2. Расулов К.М., Нагорная Т.Р. О решении в явном виде краевой задачи Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 326–335.
3. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung  $(1+zz)^2 W_{zz} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. 1965. Schriften 23.

4. Bauer K.W., Ruscheweyh S. Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics / ed. by A.Dold and B. Eckmann, 791. 1980. 253 p.

5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.

6. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.

**T.R. Nagornaya, K.M. Rasulov**  
Smolensk State University

### **ON THE SOLUTION OF THE NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GENERALIZED HARMONIC FUNCTIONS OF THE THIRD ORDER IN CIRCULAR DOMAINS**

**Keywords:** *Neumann boundary value problem, differential equation, explicit solution, generalized harmonic function, circular domain.*

**Abstract.** *The paper is devoted to the Neumann boundary value problem for a second-order elliptic differential equation whose regular solutions are natural generalization of harmonic functions of two real variables. Moreover, it is established that in the case of circular domains the solution of the boundary value problem is reduced to sequential solving of the Riemann boundary value problem for the analytic functions of a complex variable and also solving a certain linear differential Euler equation, i.e., in the case when the support of the boundary condition is a circle, the given problem admits a solution in explicit form.*

**Д.Г. Новикова, М.М. Сорокина**  
Брянский государственный университет  
имени академика И.Г. Петровского

УДК 512.542

### **О КОРАДИКАЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ КЛАССОВ ГРУПП**

Ключевые слова: *конечная группа, класс групп, гомоморф, формация, корадикальное произведение классов групп.*

*В работе рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Изучаются свойства гомоморфов, то есть классов групп, содержащих с каждой группой все ее гомоморфные образы. Пусть  $Y$  – наследственный гомоморф. Для непустого  $\omega$ -примитивно замкнутого гомоморфа  $X \subseteq Y$  и непустой  $\omega$ -насыщенной формации  $F \subseteq Y$*

установлены условия, при которых их корадикальное произведение  $X \circ F$  является  $\omega$ -примитивно замкнутым гомоморфом в  $Y$ .

**1. Введение и постановка задачи.** Рассматриваются только конечные группы. В теории классов конечных групп большую роль играют классы, называемые гомоморфами. Так, например, гомоморфами являются такие хорошо известные классы групп, как формации и классы Шунка (см., например, [1]). Большое внимание изучению гомоморфов уделяется в монографии К. Дерка и Т. Хоукса [2].

Напомним, что гомоморф называется формацией, если он замкнут относительно подпрямых произведений. Основные положения и ключевые результаты теории формаций конечных групп представлены в монографии Л.А. Шеметкова [1]. Для непустой формации  $F$  через  $G^F$  обозначается наименьшая нормальная подгруппа группы  $G$ , фактор-группа по которой принадлежит классу  $F$ , называемая  $F$ -корадикалом группы  $G$ . Для двух классов групп  $X$  и  $F$  в случае, когда класс  $F$  является формацией, введено в рассмотрение корадикальное произведение  $X \circ F$  данных классов (см., например, [1]). Наиболее значимые результаты о корадикальных произведениях классов конечных групп, полученные за последние десятилетия, изложены в монографии Н.Н. Воробьева [3]. В книге В.С. Монахова [4] доказана следующая теорема: *Если  $X$  – разрешимый класс Шунка, а  $F$  – разрешимая насыщенная формация, то  $X \circ F$  – разрешимый класс Шунка* ([4], с. 179, Теорема 5.22).

Понятия  $\omega$ -примитивно замкнутого гомоморфа и  $\omega$ -насыщенной формации естественным образом обобщают понятия класса Шунка и насыщенной формации соответственно. Целью настоящей работы является распространение результата Теоремы 5.22 [4] на случай  $\omega$ -примитивно замкнутого гомоморфа  $X$  и  $\omega$ -насыщенной формации  $F$ .

**2. Предварительные сведения.** В работе используются методы абстрактной теории групп и методы теории классов групп. Определения и обозначения для групп и классов групп стандартны (см., например, [2]). Приведем лишь некоторые из них. Символ  $:=$  означает равенство по определению. Пусть  $\mathbb{P}$  – множество всех простых чисел,  $\omega$  – непустое подмножество множества  $\mathbb{P}$ . Группа  $G$  называется  $\omega$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \omega$ , где  $\pi(G)$  – совокупность всех простых делителей группы  $G$ . Запись  $A \leq G$  ( $A \triangleleft G$ ) означает, что  $A$  – подгруппа (нормальная подгруппа) группы  $G$ ,  $O_\omega(G)$  – наибольшая нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ ,  $Core_G(M)$  – ядро подгруппы  $M$  в группе  $G$ , то есть наибольшая нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $M$  [4].

*Классом групп* называется множество всех групп, которое вместе с каждой своей группой содержит все изоморфные ей группы. Через  $\mathbf{G}$  обозначается класс всех конечных групп. Класс групп  $\mathbf{F}$  называется

наследственным, если из  $G \in \mathbf{F}$  и  $N \leq G$  всегда следует, что  $N \in \mathbf{F}$ . Класс групп  $\mathbf{F}$  называется *замкнутым относительно гомоморфных образов* или, коротко, *гомоморфом*, если из  $G \in \mathbf{F}$  и  $N \triangleleft G$  всегда следует, что  $G/N \in \mathbf{F}$ . Гомоморф  $\mathbf{F}$  называется *формацией*, если из  $G/A \in \mathbf{F}$ ,  $G/B \in \mathbf{F}$  всегда следует, что  $G/(A \cap B) \in \mathbf{F}$ . Для непустой формации  $\mathbf{F}$  через  $G^{\mathbf{F}}$  обозначается  $\mathbf{F}$ -корадикал группы  $G$ , то есть наименьшая нормальная подгруппа группы  $G$ , фактор-группа по которой принадлежит  $\mathbf{F}$ . Пусть  $\mathbf{F}_1$  – класс групп,  $\mathbf{F}_2$  – непустая формация. *Корадикальным произведением* классов групп  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  называется класс  $\mathbf{F}_1 \circ \mathbf{F}_2 = \{G \in \mathbf{G} \mid G^{\mathbf{F}_2} \in \mathbf{F}_1\}$ . Пусть  $\mathbf{X}$  – класс групп. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  *$\mathbf{X}$ -максимальной подгруппой* в  $G$ , если  $H \in \mathbf{X}$  и для любой  $K \leq G$  такой, что  $K \in \mathbf{X}$ , из  $H \subseteq K \subseteq G$  всегда следует, что  $H = K$ . Класс  $\mathbf{X}$  называется *примитивно замкнутым*, если из того, что  $G/\text{Core}_G(M) \in \mathbf{X}$  для всех максимальных подгрупп  $M$  группы  $G$ , следует  $G \in \mathbf{X}$ . *Классом Шунка* называется класс групп, который одновременно замкнут относительно гомоморфных образов и примитивно замкнут. Класс  $\mathbf{X}$  называется *насыщенным*, если из того, что  $G/N \in \mathbf{X}$  и  $N \leq \Phi(G)$ , следует  $G \in \mathbf{X}$  [4]. Формация  $\mathbf{F}$  называется  *$\omega$ -насыщенной*, если из  $G/L \in \mathbf{F}$ , где  $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ , всегда следует, что  $G \in \mathbf{F}$  [5]. Пусть  $\mathbf{F}$  – гомоморф,  $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}$ . Класс групп  $\mathbf{F}$  называется  *$\omega$ -примитивно замкнутым в  $\mathbf{X}$*  или, коротко,  *$\omega P$ -замкнутым в  $\mathbf{X}$* , если для любой группы  $G \in \mathbf{X}$  из того, что  $G/\text{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathbf{F}$  для любой максимальной подгруппы  $M$  из  $G$ , всегда следует  $G \in \mathbf{F}$ .  $\omega$ -примитивно замкнутый в  $\mathbf{X}$  гомоморф называют  *$\omega P$ -гомоморфом в  $\mathbf{X}$*  [6].

**3. Основной результат.** В теореме 1 для непустого  $\omega$ -примитивно замкнутого гомоморфа  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$  и непустой  $\omega$ -насыщенной формации  $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{Y}$ , где  $\mathbf{Y}$  – наследственный гомоморф, установлены условия, при которых их корадикальное произведение  $\mathbf{X} \circ \mathbf{F}$  является  $\omega$ -примитивно замкнутым гомоморфом в  $\mathbf{Y}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{Y}$  – наследственный гомоморф,  $\mathbf{X}$  – непустой  $\omega P$ -гомоморф в  $\mathbf{Y}$ ,  $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ ,  $\mathbf{F}$  – непустая  $\omega$ -насыщенная формация,  $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{X} \circ \mathbf{F}$ . Если для любой группы  $G \in \mathbf{Y}$  справедливо включение  $\pi(G^{\mathbf{F}}) \subseteq \omega$  и всякая  $\mathbf{X}$ -максимальная подгруппа из  $G^{\mathbf{F}}$  является нормальной в  $G$ , то класс  $\mathbf{H}$  является  $\omega P$ -гомоморфом в  $\mathbf{Y}$ .

**Доказательство.** Пусть для любой группы  $G \in \mathbf{Y}$  выполняется включение  $\pi(G^{\mathbf{F}}) \subseteq \omega$  и всякая  $\mathbf{X}$ -максимальная подгруппа из  $G^{\mathbf{F}}$  является нормальной в  $G$ . Так как  $\mathbf{X}$  – гомоморф и  $\mathbf{F}$  – формация, то по теореме 5.10 (1) [4]  $\mathbf{H}$  является гомоморфом. Покажем, что класс  $\mathbf{H}$   $\omega P$ -замкнут в  $\mathbf{Y}$ . Пусть  $K \in \mathbf{Y}$  и для любой максимальной подгруппы  $M$  из  $K$  справедливо

$$K/(Core_K(M) \cap O_\omega(K)) \in \mathbf{H}. \quad (1)$$

Покажем, что  $K \in \mathbf{H}$ . Ввиду равенства  $\mathbf{H} = \mathbf{X} \circ \mathbf{F}$  достаточно проверить, что  $K^{\mathbf{F}} \in \mathbf{X}$ . Так как  $\mathbf{Y}$  – наследственный гомоморф и  $K \in \mathbf{Y}$ , то  $K^{\mathbf{F}} \in \mathbf{Y}$ . Поскольку, согласно условию,  $K^{\mathbf{F}}$  является  $\omega$ -группой, то  $K^{\mathbf{F}}$  обладает  $\mathbf{X}$ -корадикальной нормальной  $\omega$ -подгруппой. В силу того, что  $\mathbf{X}$  – непустой  $\omega P$ -гомоморф в  $\mathbf{Y}$ , то по теореме 3.1 [6] заключаем, что в группе  $K^{\mathbf{F}}$  существует  $\mathbf{X}^\omega$ -проектор.

Пусть  $H$  –  $\mathbf{X}^\omega$ -проектор в группе  $K^{\mathbf{F}}$ . Так как  $N = 1$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа в группе  $K^{\mathbf{F}}$ , то по определению  $\mathbf{X}^\omega$ -проектора получаем, что  $H$  –  $\mathbf{X}$ -максимальная подгруппа в  $K^{\mathbf{F}}$  и по условию  $H \triangleleft K$ . Следовательно,  $H \triangleleft K^{\mathbf{F}}$ .

Допустим, что существует такая максимальная подгруппа  $M_1$  в группе  $K$ , что  $H \subseteq M_1$  и  $K^{\mathbf{F}} \not\subseteq M_1$ . Из (1) имеем  $K/(Core_K(M_1) \cap O_\omega(K)) \in \mathbf{H}$  и, следовательно, с учетом определения корадикального произведения,

$$A := (K / Core_K(M_1) \cap O_\omega(K))^{\mathbf{F}} \in \mathbf{X}. \quad (2)$$

По лемме 1.2 [1] справедливо

$$\begin{aligned} A &= K^{\mathbf{F}} (Core_K(M_1) \cap O_\omega(K)) / (Core_K(M_1) \cap O_\omega(K)) \cong \\ &\cong K^{\mathbf{F}} / (K^{\mathbf{F}} \cap Core_K(M_1) \cap O_\omega(K)). \end{aligned}$$

Таким образом, ввиду (2) получаем

$$K^{\mathbf{F}}/B \in \mathbf{X}, \quad (3)$$

где  $B := (K^{\mathbf{F}} \cap Core_K(M_1) \cap O_\omega(K))$ .

Так как  $H$  –  $\mathbf{X}^\omega$ -проектор в  $K^{\mathbf{F}}$  и  $B$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа в группе  $K^{\mathbf{F}}$ , то по определению  $\mathbf{X}^\omega$ -проектора приходим к выводу, что  $HB/B$  – максимальная подгруппа в группе  $K^{\mathbf{F}}/B$ . Согласно определению  $\mathbf{X}$ -максимальной подгруппы, получаем равенство  $HB/B = K^{\mathbf{F}}/B$ . Следовательно,  $HB = K^{\mathbf{F}}$ . Ввиду включения  $K^{\mathbf{F}} \subseteq O_\omega(K)$  и с учетом модулярного тождества Дедекинда имеют место следующие равенства

$$K^{\mathbf{F}} = H(K^{\mathbf{F}} \cap Core_K(M_1) \cap O_\omega(K)) = HCore_K(M_1) \cap K^{\mathbf{F}}.$$

Так как  $H \subseteq M_1$ , то  $K^{\mathbf{F}} \subseteq HCore_K(M_1) = Core_K(M_1)$ . Отсюда получаем  $K^{\mathbf{F}} \subseteq M_1$ , что противоречит выбору подгруппы  $M_1$ . Таким образом, для любой максимальной подгруппы  $M$  группы  $K$  такой, что  $H \subseteq M$ , выполняется включение  $K^{\mathbf{F}} \subseteq M$  и, значит,

$$K^{\mathbf{F}}/H \subseteq M/H. \quad (4)$$

Поскольку  $H$  – нормальная подгруппа группы  $K$  и  $H \subseteq K^{\mathbf{F}}$ , то

$$K/K^F \cong (K/H)/(K^F/H) \in \mathbf{F}. \quad (5)$$

Покажем, что  $K^F/H \subseteq \Phi(K/H) \cap O_\omega(K/H)$ . Так как  $K^F$  –  $\omega$ -группа и  $K^F \triangleleft G$ , то  $K^F \subseteq O_\omega(K)$  и, следовательно,

$$K^F/H \subseteq O_\omega(K)/H \subseteq O_\omega(K/H). \quad (6)$$

Из (4) по лемме 3.17 (3) [4] для любой максимальной подгруппы  $M$  группы  $K$  такой, что  $H \subseteq M$ , фактор-группа  $M/H$  является максимальной в фактор-группе  $K/H$ . Верно и обратно, для любой максимальной  $L/S$  из  $K/S$  по лемме 3.17 (5) [4]  $L$  является максимальной подгруппой в группе  $K$ , причем  $H \subseteq L$ . Таким образом,

$$\Phi(K/H) = \bigcap_{M/H < G/H} M/H = \bigcap_{\substack{M < K, \\ H \subseteq M}} M/H = \bigcap_{\substack{M < K, \\ G^F \subseteq M}} M/H.$$

Поэтому, ввиду (4),  $K^F/H \subseteq \Phi(K/H)$ . Отсюда, с учетом (6), получаем

$$K^F/H \subseteq \Phi(K/H) \cap O_\omega(K/H). \quad (7)$$

Так как  $\mathbf{F}$  –  $\omega$ -насыщенная формация, то из (5) и (7) следует, что  $K/H \in \mathbf{F}$ . Согласно определению  $\mathbf{F}$ -корадикала, получаем включение  $K^F \subseteq H$ . Это означает, что  $K^F = H$  и поэтому  $K^F \in \mathbf{X}$ . По определению корадикального произведения классов заключаем, что  $K \in \mathbf{H}$ .

Следовательно, класс  $\mathbf{H}$  является  $\omega P$ -замкнутым в  $\mathbf{Y}$ . Тем самым установлено, что  $\mathbf{H}$  является  $\omega P$ -гомоморфом в  $\mathbf{Y}$ . Теорема доказана.

В случае, когда  $\omega = \mathbb{P}$ , получаем следующий результат.

**Следствие 1.** Пусть  $\mathbf{Y}$  – наследственный гомоморф,  $\mathbf{X}$  – непустой примитивно замкнутый гомоморф в  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{F}$  – непустая насыщенная формация,  $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{X} \circ \mathbf{F}$ . Если всякая  $\mathbf{X}$ -максимальная подгруппа из  $G^F$  является нормальной в  $G$ , то класс  $\mathbf{H}$  является примитивно замкнутым гомоморфом в  $\mathbf{Y}$ .

В случае, когда класс  $\mathbf{Y}$  совпадает с классом всех конечных групп, из следствия 1 вытекает

**Следствие 2.** Пусть  $\mathbf{X}$  – непустой класс Шунка,  $\mathbf{F}$  – непустая насыщенная формация и  $\mathbf{H} = \mathbf{X} \circ \mathbf{F}$ . Если всякая  $\mathbf{X}$ -максимальная подгруппа из  $G^F$  является нормальной в  $G$ , то класс  $\mathbf{H}$  является классом Шунка.

### Литература

1. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. 893 p.
3. Воробьев Н.Н. Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. 322 с.

4. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Высшая школа, 2006. 206 с.

5. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды, 1999. Т. 2, № 2. С. 114-147.

6. Ведерников В.А., Сорокина М.М.  $F$ -проекторы и  $F$ -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский матем. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239.

**D.G. Novikova, M.M. Sorokina**

Bryansk State Academician I.G. Petrovsky University

## ON CORADICAL PRODUCTS OF CLASSES OF GROUPS

**Keywords:** *finite group, class of groups, homomorph, formation, coradical product of classes of groups.*

**Abstract.** *In this paper, only finite groups and classes of finite groups are considered. We study the properties of homomorphs, i.e. of classes of groups containing with each group all its homomorphic images. Let  $Y$  be a hereditary homomorph. For a non-empty  $\omega$ -primitively closed homomorph  $X \subseteq Y$  and for a non-empty  $\omega$ -saturated formation  $F \subseteq Y$ , conditions under which their coradical product  $X \circ F$  is an  $\omega$ -primitively closed homomorph in  $Y$  are established.*

**А.М. Ольшанский**

*АО «Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт информатизации, автоматизации и связи на железнодорожном транспорте»*

УДК 519.17

## ОБ ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ИНС С ПЕРЕМЕННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ СИГНАЛА

**Ключевые слова:** *ИНС с переменной проводимостью сигнала, нейроуправление, устойчивость, эквивалентная система, оптимальное управление.*

*В данной работе исследуется поведение системы управления многослойной ИНС с переменной проводимостью сигнала, в которой в качестве контроллера выбран многослойный перцептрон. Оценивается устойчивость полученной системы управления через прием изучения эквивалентной системы, строится карта нулей и полюсов системы и делается вывод об устойчивости предложенной конструкции.*



**1. Описание задачи.** Рассмотрим многослойную ИНС с переменной проводимостью сигнала [1], которая используется для построения задач расписания на железнодорожном транспорте.

Для данной сети была разработана система управления [2], в которой применено прямое нейроуправление с многослойным персептроном с сигмоидной функцией активации в качестве нейроконтроллера.

Построенная система управления МИНС является сложной гибридной системой, что обусловлено принципиальной нелинейностью и сложностью объекта управления. В связи с этим при моделировании поведения системы управления используется дискретно-событийный подход к моделированию.

Задача заключается в оценке устойчивости построенной системы управления, в которой и объект управления, и контроллер – сложные нелинейные системы.

**2. Описание подхода.** В связи с тем, что рассматриваемый объект – МИНС и созданная с его участием система управления являются существенно нелинейными, непосредственно применить математический аппарат для анализа устойчивости, рекомендуемый в данном случае, невозможно.

Воспользуемся приемом получения эквивалентной модели созданной системы управления с помощью идентификации [3].

В [4] приводятся различные методы идентификации нелинейных систем в общей формулировке, однако наиболее часто встречающиеся – это сведение нелинейной системы к эквивалентной линейной.

Вопросы идентификации собственно нейросетевых систем являются в малой степени разработанными и не лежат в фокусе настоящего исследования.

В случае системы управления многослойной искусственной нейронной сетью проведение идентификации осложняется отсутствием соображений, позволяющих выбрать класс системы для дальнейшей оценки параметров, а также спецификой внешнего воздействия, которое является пассивным (никакого активного эксперимента с системой не проводится), распределенным по входному слою сети и не описывается напрямую дельта-функцией [5].

Модель многослойной ИНС функционирует без запаздывания, что отразится на выборе принципиального вида передаточной функции эквивалентной модели.

Оценка устойчивости выполнена в системе Matlab двумя способами.

1. Построение карты полюсов системы.
2. Построение годографа частотной характеристики и анализ по критерию Найквиста.

### 3. Итоги исследований.

Рассмотрим итоги проведенных построений.

Поведение системы может быть описано формулой

$$T(s) = \frac{-0.1746s^3 - 0.0007194s^2 - 9.715 \cdot 10^{-5}s + 1.902 \cdot 10^{-6}}{s^7 + 1.041s^6 + 0.2325s^5 + 0.033s^4 + 0.0017s^3 + 4.45 \cdot 10^{-5}s^2 + 7.53 \cdot 10^{-7}s + 1.3 \cdot 10^{-11}}$$

Таким образом, созданная система управления может быть рассмотрена как система 7 порядка.

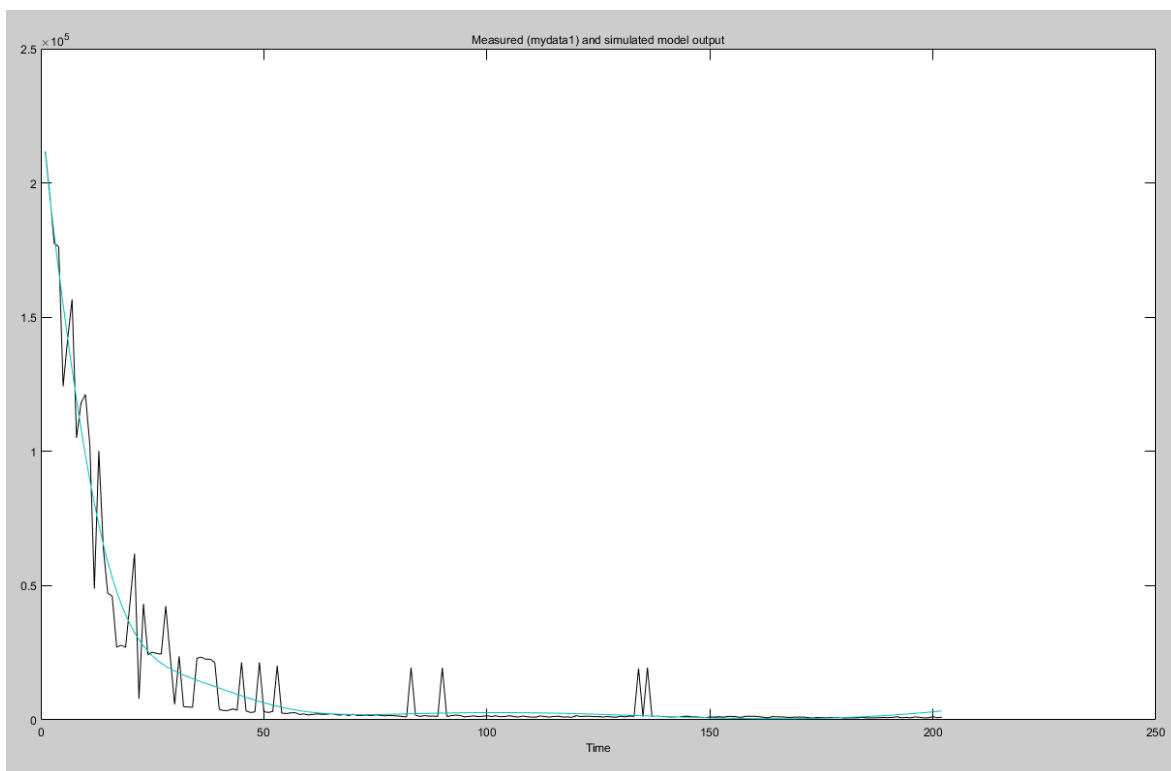


Рис. 1. Поведение функции ошибки при нейруправлении в процессе

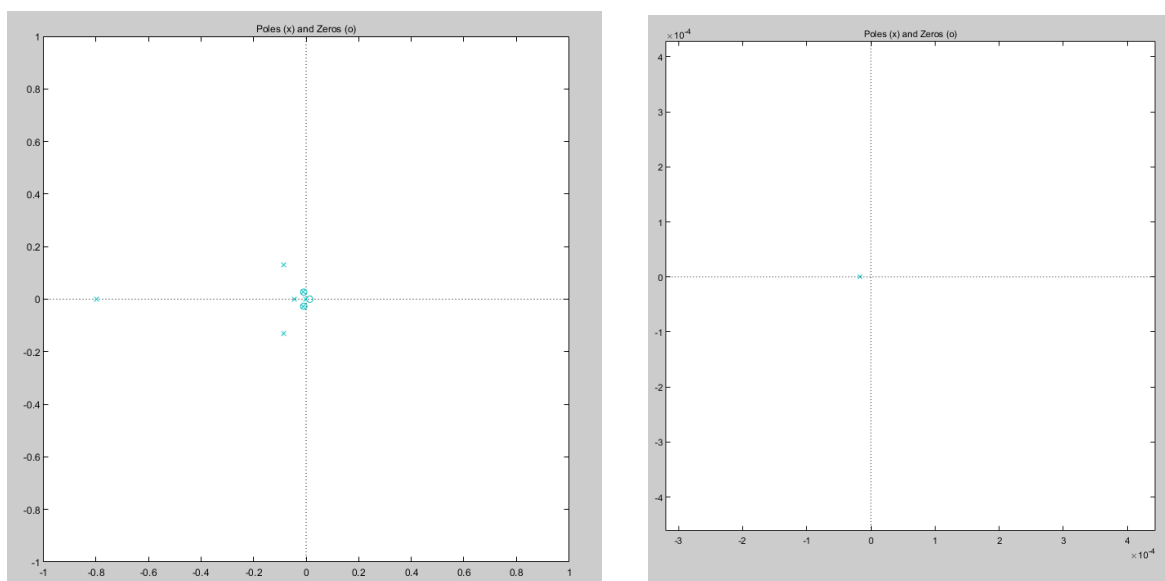


Рис. 2. Полюсы системы (общий вид и укрупненный)

Точность охвата всех вариаций ряда подобранными коэффициентами составляет 79,4%. Черная линия на рисунке 1 показывает значение наблюдаемого ряда, а зеленая – теоретическую модель.

Карта полюсов показана на рисунке 2.

Полученные значения полюсов:

- 0.7980 + 0.0000i
- 0.0869 + 0.1305i
- 0.0869 - 0.1305i
- 0.0448 + 0.0000i
- 0.0122 + 0.0266i
- 0.0122 - 0.0266i
- 0.0001 + 0.0000i

Наличие двух пар кратных полюсов обеспечивает значительную степень колебательности системы, тем не менее все полюсы лежат в левой полуплоскости. Это подтверждается характером схождения управляемой ИНС к решению.

Диаграмма Найквиста системы показана на рисунке 3.

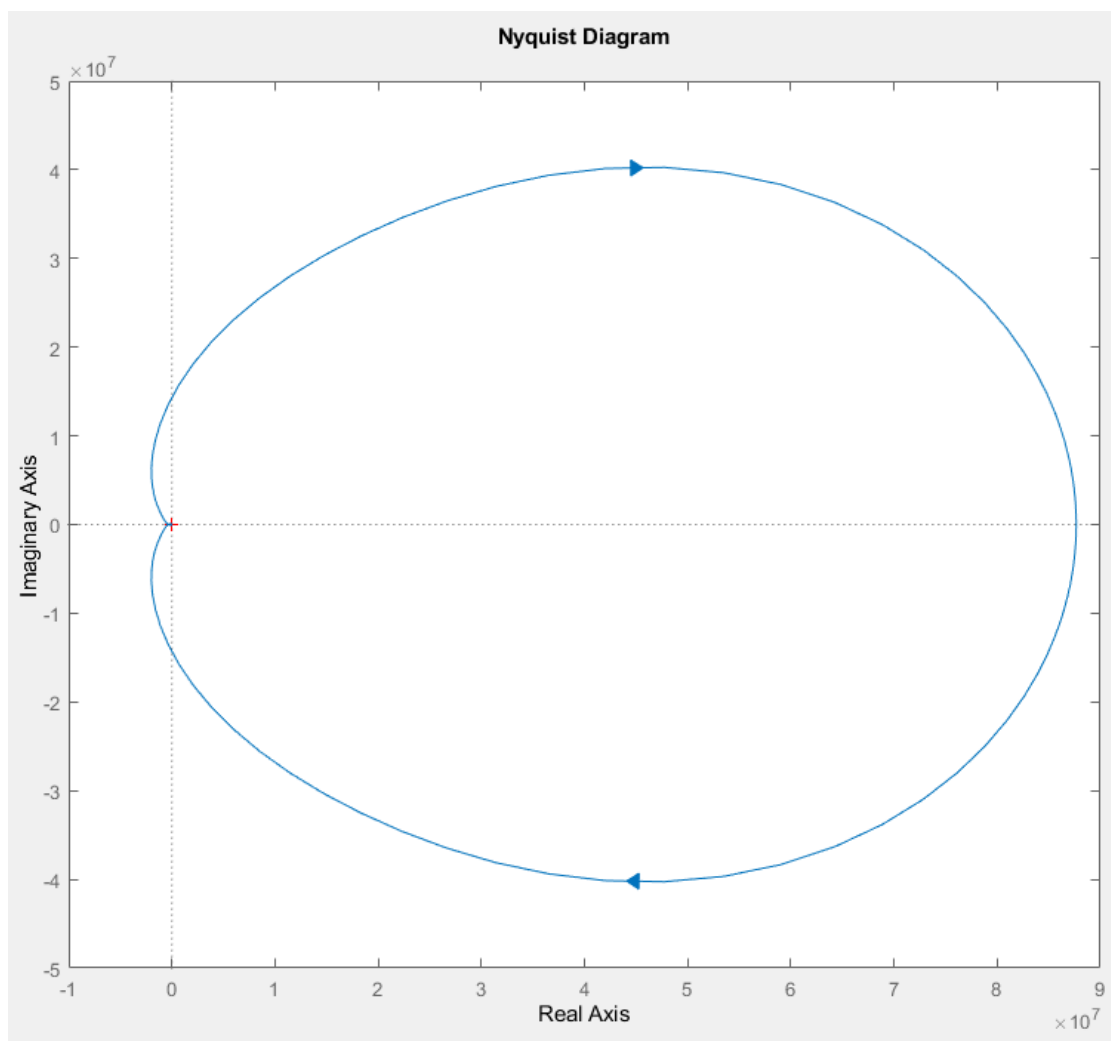


Рис. 3. Диаграмма Найквиста для системы

Так как все полюсы имеют отрицательную действительную часть, а годограф частотной характеристики охватывает точку (-1,0) справа, то созданная система является устойчивой, что и подтверждается на практике сходимостью сети к решениям.

Таким образом, исследования устойчивости построенной системы управления МИНС показывают, что применение нейросетевого прямого управления обеспечивает сходимость разработанной в [2] конструкции к решениям.

## Литература

1. Игнатенков А.В., Ольшанский А.М. О построении квазигопфилдовской искусственной нейронной сети для решения задач упорядочения процессов // Перспективные информационные технологии (ПИТ-2015). Т. 2: Труды Международной научно-технической конференции. 2015. С. 73–78.

2. Rosenberg Y.N., Olshansky A.M., Ignatenkov A.V. et al. Some approaches to improving the quality of artificial neural network training//CEUR WORKSHOP PROCEEDINGS. Серия «ITNT-DS 2020 - Proceedings of the 6th International Conference Information Technology and Nanotechnology. Session Data Science». 2020. P.27–29.

3. Идентификация нелинейных динамических объектов во временной области [Текст] / Д.Н. Вятченников, В.В. Кособуцкий, А.А. Носенко, Н.В. Плотникова//Вестник ЮУрГУ . – 2006. - №14, С.66-70.

4. Александровский Н.М., Дейч А.М.. Методы определения динамических характеристик нелинейных объектов (обзор)// Автомат. и телемех., 1968, выпуск 1, с.167–188.

5. Пупков К.А., Егупов Н.Д. и др. Методы классической и современной теории автоматического управления. – 2004., Т.2.

**A.M. Olshansky**

JSC Railway Signaling Institute (NIIAS)

## ON THE ESTIMATION OF STABILITY FOR THE CONTROL SYSTEM OF MULTILAYERED ANN WITH VARIABLE SIGNAL CONDUCTIVITY

**Keywords:** *multilayered artificial neural network with variable signal conductivity, direct neurocontrol, stability, equivalent system, optimal control.*

**Abstract.** *The paper presents an estimation of the stability of a control system. The hybrid control system contains a multilayered ANN with variable signal conductivity and a multilayered perceptron (MLP) in direct neurocontrol mode. The main result is the stable mode of behavior confirmed by the Nyquist criterion and PZ-map method.*

## О МЕТОДАХ РЕГУЛЯРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ КОНТЕКСТНО-СВОБОДНЫХ ГРАММАТИК

Ключевые слова: КС-грамматика, самоприменимость, рекурсия, взаимная рекурсия, регулярный язык, аппроксимация,  $\varepsilon$ -НКА.

*В данной работе рассматривается свойство самоприменимости КС-грамматик. Для грамматик, не обладающих указанным свойством, с помощью построения конечного автомата доказывается, что они порождают регулярный язык. Для самоприменимых грамматик приводятся некоторые алгоритмы аппроксимации регулярными грамматиками. Все теоретические построения сопровождаются примерами.*

В работе [1] описан метод синтаксического анализа автоматных (регулярных) языков по соответствующим им грамматикам. Отметим, что такой анализ является самым простым. В то же время анализ языков по КС-грамматикам – существенно более сложный процесс и не всегда осуществим за линейное время. По этой причине на практике часто возникают следующие вопросы: 1) в каких случаях КС-грамматика порождает регулярный язык? 2) если КС-грамматика порождает регулярный язык, то как привести ее к регулярному виду? 3) если КС-грамматика не порождает регулярный язык, то какой регулярной грамматикой ее можно заменить, чтобы при этом в порождаемом языке произошло как можно меньше изменений?

Для того чтобы ответить на эти вопросы, приведем необходимые определения.

**Определение 1.** КС-грамматика обладает свойством самоприменимости, если  $\exists A \in N: A \Rightarrow \alpha A \beta$ , где  $\alpha, \beta \in (T \cup N)^+$ .

**Определение 2.** Нетерминал  $A$  называется рекурсивным, если  $A \stackrel{>0}{\Rightarrow} \alpha A \beta$ , где  $\alpha, \beta \in (T \cup N)^*$ .

**Определение 3.** Нетерминалы  $A$  и  $B$  называются взаимно рекурсивными, если  $A \Rightarrow \alpha_1 B \beta_1$  и  $B \Rightarrow \alpha_2 A \beta_2$ , где  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in (T \cup N)^*$ .

Нетрудно убедиться в том, что бинарное отношение взаимной рекурсии на множестве рекурсивных нетерминалов ( $\mathcal{N}$ ) является отношением эквивалентности. Кроме того, если различные нетерминалы взаимно рекурсивны, то каждый из них рекурсивен.

**Пример 1.** Грамматика с правилами  $S \rightarrow aA|bB, A \rightarrow bB|b, B \rightarrow Aa|a$  является самоприменимой, так как  $A \Rightarrow bAa$  и  $B \Rightarrow bBa, S$  – единственный нерекурсивный нетерминал,  $A$  и  $B$  – взаимно рекурсивны.

Ответ на первый из сформулированных выше трех вопросов дает следующая теорема.

**Теорема.** *Не самоприменимая КС-грамматика порождает регулярный язык.*

**Доказательство.** Докажем теорему конструктивно, то есть укажем способ построения  $\varepsilon$ -НКА по исходной КС-грамматике. При этом мы получим ответ и на второй из поставленных выше вопросов ( $\varepsilon$ -НКА всегда можно преобразовать в ДКА, и затем построить автоматную грамматику).

Пусть  $R = \{N_1, N_2, \dots, N_k\}$  – фактор-множество множества  $\mathcal{N}$  по отношению взаимной рекурсии. Класс эквивалентности будем считать левым (правым), если в нем содержатся только леворекурсивные (праворекурсивные) нетерминалы; самоприменимым, если и те, и другие, а также циклическим в остальных случаях (нетерминалы связаны только цепными правилами).

Введем две вспомогательные функции  $leftN(N_i)$  и  $rightN(N_i)$ , которые возвращают логическое значение *true*, если существует правило грамматики, соединяющее нетерминалы из одного класса специальным образом (каким именно – понятно из псевдокода; при этом нетерминалы могут совпадать).

```
function boolean leftN(Ni) { //true – если слева непустая цепочка
  if(  $\exists(A \rightarrow \alpha B \beta)$ , где  $A, B \in N_i$  и  $\alpha \neq \varepsilon$ ) { return true; } }
function boolean rightN(Ni) { //true – если справа непустая цепочка
  if(  $\exists(A \rightarrow \alpha B \beta)$ , где  $A, B \in N_i$  и  $\beta \neq \varepsilon$ ) { return true; } }
```

Введем функцию  $typeN(N_i)$ , определяющую тип каждого класса  $N_i$  и выводящую один из 4 вариантов: {left, right, self, cyclic}.

```
function type typeN(Ni) {
  if(leftN(Ni) && rightN(Ni)) { return self; }
  if(!leftN(Ni) && rightN(Ni)) { return left; }
  if(leftN(Ni) && !rightN(Ni)) { return right; }
  if(!leftN(Ni) && !rightN(Ni)) { return cyclic; }
}
```

Заметим, что  $typeN(N_i) \neq self$  для любого класса, так как в противном случае грамматика самоприменима.

Идея построения автомата следующая: алгоритм проходит по частям правил, начиная с аксиомы (аналог поиска в глубину), до тех пор, пока не встретит одиночный терминал или нетерминал, и в зависимости от ситуации принимает одно из следующих решений: 1) терминал или  $\varepsilon$  – множество переходов  $\varepsilon$ -НКА пополняется новым переходом; 2) рекурсивный нетерминал – генерирующая функция рекурсивно вызывает

сама себя; 3) нерекурсивный нетерминал – осуществляется запуск генерирующей функции от всех правых частей правил.

```
function automaton create(grammar G){//функция, создающая ε-НКА
    K= ∅; F= ∅;           //K, F – множество состояний и переходов
    s=createState();     //процедура createState() создает некоторое
    o=createState();     // состояние и добавляет его в K
    S={s}; O={o}; //S,O – множество начальных, финальных состояний
    return make(s,S,o);  //запуск генерирующей функции с аксиомы S
}
```

Изначально созданный автомат содержит только стартовое состояние  $s$  и финальное состояние  $o$  и не содержит переходов. Генерирующая функция в качестве аргументов принимает два состояния и цепочку: она добавляет к автомату переходы и новые состояния.

```
function void make(state k0, string a, state k1){
    if(a ∈ T || a== ε){
        F ∪= {f(k0, a) ⇒ k1}; //добавляется переход из k0 в k1 по символу a
        return; //в данном случае останавливается выполнение функции
    } //если текущий символ – терминал или ε
    if(a==Xβ, где X ∈ (T ∪ N) и β ∈ (T ∪ N)+){
        k=createState();
        make(k0, X, k); //запуск функции для самого левого символа
        make(k, β, k1); //запуск функции для остальной части правила
        return;
    } //здесь происходит дробление правых частей на отдельные символы
    if(∃Ni, где a ∈ Ni){//если текущий символ – нетерминал ∈ Ni,
        foreach (b in Ni){
            kb=createState();
            //для каждого нетерминала в классе создается состояние в ε-НКА
            if(typeN(Ni)==left){//левый тип класса
                foreach(C in Ni, где C → X1 ... Xm и X1, ..., Xm ∉ Ni){
                    make(k0, X1...Xm, kc);
                }
                foreach(C,D in Ni, где C → DX1 ... Xm и X1, ..., Xm ∉ Ni){
                    make(kD, X1...Xm, kc); //C и D могут совпадать
                    F ∪= {f(ka, ε) ⇒ k1};
                }
            }
            } else { // Ni типа right или cyclic
                foreach(C in Ni, где C → X1 ... Xm и X1, ..., Xm ∉ Ni){
                    make(kC, X1...Xm, k1);
                }
                foreach(C,D in Ni, где C → X1 ... XmD и X1, ..., Xm ∉ Ni){
                    make(kC, X1...Xm, kD);
                }
            }
        }
    }
```

```

    F ∪= {f(k0, ε) = ka};
  }
}
return;
}
foreach (p in P, где p = a → β) { // P – множество правил грамматики
  take(k0, β, k1); // запуск от правых частей правил
} // выполняется, если a – нерекурсивный нетерминал
}

```

На выходе функции create получим ε-НКА, построенный для данной КС-грамматики. Таким образом, теорема доказана.

**Пример 2.** С помощью вышеприведенного алгоритма построим автомат для следующей грамматики:  $S \rightarrow AB$ ,  $A \rightarrow aA|B|\varepsilon$ ,  $B \rightarrow Bb|b$ .

$S$  – нерекурсивный нетерминал.  $R = \{\{A\}, \{B\}\}$ ,  $A$  – праворекурсивный нетерминал,  $B$  – леворекурсивный. Последовательность вызовов генерирующей функции в данном случае будет выглядеть так: (s, S, o), (s, AB, o), (s, A, k), (k<sub>A</sub>, B, k), (k<sub>A</sub>, b, k<sub>B</sub>), (k<sub>B</sub>, b, k<sub>B</sub>), (k<sub>A</sub>, ε, k), (k<sub>A</sub>, a, k<sub>A</sub>), (k, B, o), (k, b, k<sub>B</sub>), (k<sub>B</sub>, b, k<sub>B</sub>). Построенный автомат представлен на рисунке 1.

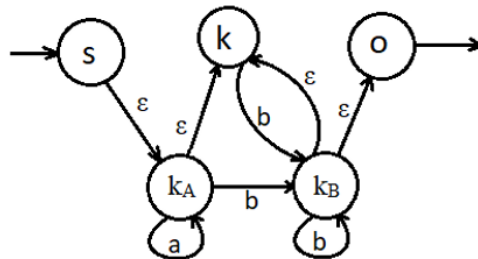


Рис. 1. ε-НКА для грамматики из примера 2

**Следствие.** Язык является контекстно-свободным, если все возможные для него грамматики самоприменимы.

Отметим, что самоприменимая грамматика все еще может порождать регулярный язык. Например, таким свойством обладает грамматика со следующими правилами:  $S \rightarrow aSa|a$ . Потому, чтобы доказать контекстную свободу языка, используют методы, не связанные со свойством самоприменимости.

Для ответа на третий из поставленных вопросов укажем два способа аппроксимации самоприменимых КС-грамматик регулярными.

**RTN-аппроксимация.** Этот метод позволяет построить ε-НКА, аппроксимирующий КС-грамматику. Алгоритм построения таков.

1. Для каждого нетерминала  $A$  создается автомат с двумя состояниями  $k_A$  и  $k_{A'}$ .



2. Для каждого правила  $A \rightarrow X_1 \dots X_m$ , где  $X_i \in (T \cup N)$  добавляются состояния  $k_A^0, \dots, k_A^m$  и переходы:  $f(k_A, \varepsilon) = k_A^0$ ,  $f(k_A^0, X_1) = k_A^1, \dots, f(k_A^{m-1}, X_m) = k_A^m$ ,  $f(k_A^m, \varepsilon) = k_{A'}$ . Если правых частей несколько, то нетерминалу  $A$  присваивается порядковый номер рассматриваемой правой части в промежуточных состояниях.

3. Все полученные автоматы для каждого нетерминала объединяются в один следующим образом: все состояния каждого автомата объединяются во множество  $K$ , всевозможные переходы – во множество  $F$ . Далее для каждого перехода вида  $f(k, X) = p$ , где  $X \in N$ , происходит его замена на переходы  $f(k, \varepsilon) = k_X$  и  $f(k_{X'}, \varepsilon) = p$ .

4. Начальным состоянием будет  $k_S$ , а финальным –  $k_{S'}$ , где  $S$  – аксиома.  $\varepsilon$ -НКА построен.

**Пример 3.** Построим описанным способом аппроксимирующий  $\varepsilon$ -НКА для грамматики  $S \rightarrow aA$ ,  $A \rightarrow Sb|xb$ . Его диаграмма состояний представлена на рисунке ниже.

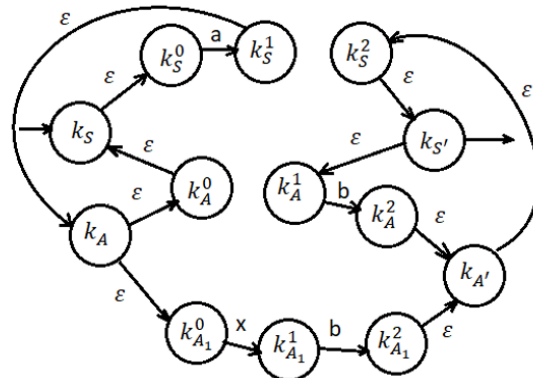


Рис. 2. RTN-аппроксимация грамматики из примера 3

Заметим, что исходная грамматика порождает КС-язык

$$L = \{a^n x b^n | n > 0\},$$

а построенный автомат распознает регулярный язык  $a^+ x b^+$ .

**MN-аппроксимация.** Этот метод аппроксимации позволяет построить праволинейную регулярную грамматику по исходной КС-грамматике. Достаточно применить следующий алгоритм.

1. Для каждого нетерминала  $A$  в новую грамматику  $G'$  добавляются нетерминалы  $A$  и  $A'$ , а также правила  $A' \rightarrow \varepsilon$ .

2. Для каждого правила  $A \rightarrow \alpha_0 B_1 \alpha_1 B_2 \alpha_2 \dots B_m \alpha_m$ , где  $B_i \in N$ ,  $\alpha_i \in T^*$  в новую грамматику добавляются нетерминалы  $B_1, \dots, B_m, B'_1, \dots, B'_m$  и

правила:  $A \rightarrow \alpha_0 B_1, B_1' \rightarrow \alpha_1 B_2, \dots, B_m' \rightarrow \alpha_m A'$ . Если же в правой части нет нетерминалов, то добавляется одно правило:  $A \rightarrow \alpha A'$ .

3. Из  $G'$  удаляются цепные правила.  $G'$  – праволинейная регулярная грамматика.

**Пример 4.** Рассмотрим грамматику из примера 3 и построим для нее регулярную грамматику методом MN-аппроксимации. Правила в регулярной грамматике  $G'$  будут такими:

$$S \rightarrow aA, A \rightarrow aA|xbA', \quad A' \rightarrow bA'|\varepsilon.$$

Отметим, что построенные методами RTN- и MN-аппроксимаций грамматики порождают один и тот же язык:  $a^+xb^+$ . Причем MN-аппроксимация обычно более предпочтительна, так как в конечной грамматике может содержаться максимум в 2 раза больше нетерминалов, чем в исходной, в то время как количество состояний автомата при RTN-аппроксимации будет равно  $|K| = \sum(|\alpha| + 1) + 2|N|$ , где  $|\alpha|$  – длина правой части правила.

Некоторые другие методы аппроксимации рассмотрены в [3].

### Литература

1. Козлов С.В., Светлаков А.В. Теория формальных грамматик и ее применение // Системы компьютерной математики и их приложения. 2021. Вып. 22. С. 358–364.
2. Малявко А.А. Формальные языки и компиляторы: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2020. 429 с.
3. ÖMER EĞECİOĞLU. Strongly Regular Grammars and Regular Approximation of Context-Free Languages // DLT '09: Proceedings of the 13th International Conference on Developments in Language Theory. 2009. P. 207–220.

**A.V. Svetlakov, G.A. Banaru**  
Smolensk State University

### ON METHODS OF REGULAR APPROXIMATION OF CONTEXT-FREE GRAMMARS

**Keywords:** *CF-grammar, self-applicability, recursion, mutual recursion, regular language, approximation,  $\varepsilon$ -NFA.*

**Abstract.** *In this paper, the property of self-applicability of CF-grammars is considered. By construction of a finite automaton, it is proved that grammars without this property generate a regular language. For self-applicable grammars, some algorithms of approximation by regular grammars are presented. All theoretical formulations are accompanied by examples.*

## **ЕДИНСТВЕННОСТЬ И НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА**

Ключевые слова: *абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка, линейная обратная задача, единственность решения, характеристическая функция, распределение нулей, собственные значения линейных операторов.*

*Рассматривается линейная обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка. Правая часть уравнения содержит неизвестное неоднородное слагаемое. Дополнительное условие задано в виде финального переопределения третьего рода. Для поставленной обратной задачи установлен критерий единственности решения, выраженный в спектральных терминах – через нули характеристической целой функции. Как практические следствия критерия указаны достаточные признаки единственности и неединственности решения. Мы даем целый ряд результатов, ориентированных на приложения в математической физике.*

В комплексном банаховом пространстве  $E$  на отрезке  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  рассматриваем задачу о нахождении функции  $u : [0, T] \rightarrow E$  и неизвестного элемента  $g \in E$  из соотношений

$$u''(t) = Au(t) + g, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (2)$$

$$\alpha u(T) + \beta u'(T) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  – фиксированные коэффициенты. Оператор  $A$  считаем линейным и замкнутым в пространстве  $E$  с областью определения  $D(A) \subset E$ , не обязательно плотной в  $E$ . Условия (2) суть стандартные условия Коши, а (3) – финальное переопределение третьего рода. Задача (1)–(3) относится к классу обратных задач (см. [1; 2]). Такая постановка представляет интерес для математической физики в связи, например, с обратными задачами «об источнике» для эллиптических уравнений в частных производных (см. [3; 4]).

Решением задачи (1)–(3) называем пару  $(u(t), g)$ , удовлетворяющую перечисленным соотношениям и стандартным ограничениям

$$u \in C^2([0, T], E), \quad u(t) \in D(A) \text{ при } 0 \leq t \leq T, \quad g \in E.$$

Ясно, что задача (1)–(3) всегда имеет тривиальное решение

$$u(t) \equiv 0, \quad g = 0. \quad (4)$$

Ставится вопрос о наличии иных, нетривиальных решений, отличных от пары (4).

Другими словами, речь идет об исследовании *однородного случая* в линейной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка (см. [5; 6]). Указанные далее результаты позволяют получить теоремы единственности для обратной задачи с неоднородными условиями

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = u_2 \quad (5)$$

при заданных элементах  $u_0, u_1, u_2$  из пространства  $E$ . Поскольку перенос формулировок на неоднородную задачу (1), (5) не представляет труда, ограничимся анализом единственности решения в однородной обратной задаче (1)–(3).

Ключевую роль в дальнейшем играет скалярная задача

$$y''(t) = \lambda y(t) + 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (7)$$

$$\alpha y(T) + \beta y'(T) = 0 \quad (8)$$

со спектральным параметром  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Коэффициенты  $\alpha, \beta$  – те же, что в формуле (3). Решение дифференциального уравнения (6) с условиями Коши (7) имеет вид

$$y(t) = y(t, \lambda) = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda} t - 1}{\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \frac{t^{2j+2}}{(2j+2)!}. \quad (9)$$

При этом

$$y'(t) = y'_t(t, \lambda) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}. \quad (10)$$

Функции (9), (10) являются целыми по переменным  $t \in \mathbb{R}$  и  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Они относятся к классу обобщенных экспонент (см. [7]) и тесно связаны с классическими функциями типа Миттаг-Леффлера (см. [8, 9]).

Подстановка выражений (9), (10) в финальное условие (8) приводит к характеристическому уравнению

$$\alpha \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda} T - 1}{\lambda} + \beta \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} T}{\sqrt{\lambda}} = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (11) определяются все спектральные значения  $\lambda \in \mathbb{C}$  задачи (6)–(8).

Для анализа уравнения (11) удобно ввести характеристическую функцию

$$L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta) \equiv \alpha \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda} T - 1}{\lambda} + \beta \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} T}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (12)$$

с множеством нулей

$$\Lambda = \Lambda(T, \alpha, \beta) \equiv \{ \lambda \in \mathbb{C} : L(\lambda) = 0 \}. \quad (13)$$

Из сказанного следует, что число  $\lambda \in \mathbb{C}$  является спектральным значением задачи (6)–(8) тогда и только тогда, когда оно попадает в множество (13). В таком случае функция  $y(t) = y(t, \lambda)$  вида (9) удовлетворяет всем соотношениям (6)–(8), т. е. является собственной функцией поставленной спектральной задачи.

Вернемся теперь к обратной задаче (1)–(3). Допустим, что некоторый нуль  $\lambda_k$  из (13) является также собственным значением оператора  $A$ , т. е.  $Af_k = \lambda_k f_k$  с собственным вектором  $f_k \in D(A)$ ,  $f_k \neq 0$ . Непосредственно проверяется, что пара

$$u(t) = y(t, \lambda_k) f_k = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_k} t - 1}{\lambda_k} f_k, \quad g = f_k \quad (14)$$

удовлетворяет всем соотношениям (1)–(3), образуя нетривиальное решение однородной обратной задачи. Такие решения принято называть *элементарными*.

Недавно нам удалось показать, что отсутствие среди нулей из множества (13) собственных значений оператора  $A$  не только необходимо, но и достаточно для единственности решения обратной задачи (1)–(3). Справедлив следующий универсальный результат.

**Теорема 1.** Пусть  $A$  – линейный замкнутый оператор в  $E$ . Для того чтобы однородная обратная задача (1)–(3) имела только тривиальное решение (4) необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции (12) не являлся собственным значением оператора  $A$ .

*Необходимость* в теореме 1 получается ссылкой на элементарные решения (14). Доказательство *достаточности* требует непростых рассуждений с активным использованием некоторых фактов из теории целых функций (см. [5]).

Сосредоточимся сейчас на другом аспекте проблемы. Заметим, что постановка обратной задачи (1)–(3) зависит от трех числовых параметров:  $T > 0$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Конкретный выбор этих значений влияет на распределение нулей характеристической функции (12) и на соотношение между нулями и собственными значениями оператора  $A$ . Поэтому особую ценность представляют достаточные признаки единственности решения, гарантирующие, что ни один нуль из множества (13) не совпадает с собственным значением оператора  $A$ .

Укажем базовый факт о распределении нулей характеристической функции. Заметим, что ее исходное представление (12) приводится к виду

$$L(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\lambda} T}{2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\lambda} T}{2} + \beta \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\lambda} T}{2} \right) = G_1(\lambda) G_2(\lambda) \quad (15)$$

с произведением двух целых функций

$$G_1(\lambda) = G_1(\lambda; T) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\lambda} T}{2}, \quad (16)$$

$$G_2(\lambda) = G_2(\lambda; T, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\lambda} T}{2} + \beta \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\lambda} T}{2} \quad (17)$$

переменной  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Тем самым множество нулей характеристической функции  $L(\lambda)$  оказывается составленным из множества нулей функции  $G_1(\lambda)$  и множества нулей функции  $G_2(\lambda)$  из формул (16) и (17) соответственно. Зафиксируем следующий результат.

**Теорема 2.** *Множество нулей характеристической функции  $L(\lambda)$  вида (12) или, что эквивалентно, вида (15) состоит из двух счетных серий. Первая универсальная серия нулей*

$$\lambda_k^{(1)} = -4k^2 \pi^2 / T^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

*отвечает множителю (16) и не зависит от выбора конкретных значений  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Вторая серия нулей*

$$\lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)}(T, \alpha, \beta), \quad k \in J = J(T, \alpha, \beta) \subset \mathbb{Z}, \quad (19)$$

*отвечает множителю (17). Серии (18) и (19) не пересекаются, т. е. ни один нуль функции (16) не является нулем функции (17).*

Обсуждение теоремы 2 и разбор ее следствий см. в работе [5]. Отметим, что нули функции (17) не вычисляются в явном виде, т. е. требуется отдельный анализ по оценке чисел  $\lambda_k^{(2)}$  из формулы (19) в зависимости от значений  $T > 0$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . При этом особую роль играет «безразмерный» параметр  $p = 2\beta / (\alpha T)$  (см. [5; 10; 11]).

В результате дополнительного изучения нулей нам удалось установить ряд достаточных признаков единственности решения обратной задачи (1)–(3).

Приведем соответствующие результаты. По-прежнему считаем, что оператор  $A$  – линейный и замкнутый в пространстве  $E$ . Других ограничений на  $A$  не налагается. Дадим сначала общие формулировки, а затем всё более и более специализированные.

**Теорема 3.** *Пусть у оператора  $A$  нет вещественных собственных значений. Тогда при любом выборе параметров  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $T > 0$  однородная обратная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение (4).*

**Теорема 4.** Пусть у оператора  $A$  нет собственных значений на луче  $(-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$ . Тогда при любом выборе  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  и  $T > 0$  однородная обратная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение (4).

**Теорема 5.** Пусть у оператора  $A$  нет собственных значений на луче  $(-\infty, -b) \subset \mathbb{R}$  с некоторым  $b > 0$ . Тогда при любом выборе параметров  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  и  $0 < T \leq \pi / \sqrt{b}$  однородная обратная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение (4).

**Теорема 6.** Пусть при выборе параметров  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $T > 0$  у оператора  $A$  нет вещественных собственных значений в промежутках  $[-4k^2\pi^2 / T^2, -(2k-1)^2\pi^2 / T^2)$  ни при каком  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда однородная обратная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение (4). [Это уточнение теоремы 4.]

**Теорема 7.** Пусть параметры  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  взяты разных знаков, а у оператора  $A$  нет собственных значений на луче  $(-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$ . Тогда при любом  $T$  из интервала

$$0 < T < -2\beta / \alpha \quad (20)$$

однородная обратная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение (4).

**Теорема 8.** Пусть при выборе параметров  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  разных знаков и при выборе  $T$  из интервала (20) у оператора  $A$  нет вещественных собственных значений в промежутке  $(-\pi^2 / T^2, 0)$  и в промежутках  $(-(2k+1)^2\pi^2 / T^2, -4k^2\pi^2 / T^2]$  ни при каком  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда однородная обратная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение (4). [Это уточнение теоремы 7.]

**Теорема 9.** Пусть при выборе параметров  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $T > 0$ , связанных специальным условием  $\alpha T + 2\beta = 0$ , у оператора  $A$  нет собственных значений на множестве

$$I \equiv \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k,$$

где  $I_0 = \{0\}$  и  $I_k = (-(2k+1)^2\pi^2 / T^2, -4k^2\pi^2 / T^2]$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда однородная обратная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение (4). В частности, для теоремы подходит любой оператор  $A$  без собственных значений на замкнутом луче  $(-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$ .

**Теорема 10.** Пусть при выборе параметров  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  разных знаков и при выборе  $T$  из интервала

$$-2\beta / \alpha < T < +\infty \quad (21)$$

у оператора  $A$  нет собственных значений в промежутке  $(0, +\infty)$  и в промежутках  $(-(2k+1)^2\pi^2 / T^2, -4k^2\pi^2 / T^2]$  ни при каком  $k \in \mathbb{N}$ .

Тогда однородная обратная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение (4).

Теоремы 3–10 следуют из результатов [5] и дают удобные признаки единственности решения обратной задачи. На практике стоит учитывать также противоположные по смыслу признаки неединственности решения. Сформулируем несколько наглядных утверждений.

**Теорема 11.** Рассмотрим однородную обратную задачу (1)–(3) с фиксированным значением  $T > 0$ . Предположим, что какое-то из чисел  $\lambda_k = -4k^2\pi^2 / T^2$  с некоторым  $k \in \mathbb{N}$  является собственным значением оператора  $A$ . Тогда единственность решения задачи (1)–(3) нарушается при любом выборе  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . В частности, согласно формуле (14), задача (1)–(3) имеет нетривиальное решение

$$u(t) = \frac{T^2}{4k^2\pi^2} \left( 1 - \cos \frac{2k\pi t}{T} \right) f_k, \quad g = f_k \quad (22)$$

с собственным вектором  $f_k \neq 0$ ,  $f_k \in D(A)$ ,  $Af_k = -(4k^2\pi^2 / T^2)f_k$ .

Этот результат можно записать в следующей эквивалентной форме.

**Теорема 12.** Пусть оператор  $A$  имеет отрицательное собственное значение  $\lambda = -\gamma^2$ , где  $\gamma > 0$ . Пусть  $T = 2k\pi / \gamma > 0$  с некоторым  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда при любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  единственность решения в обратной задаче (1)–(3) нарушается и задача имеет нетривиальное решение вида (22) с собственным вектором  $f_k \neq 0$ , таким, что  $f_k \in D(A)$  и  $Af_k = -\gamma^2 f_k = -(4k^2\pi^2 / T^2)f_k$ .

Следующие два результата имеют более специальный характер.

**Теорема 13.** Пусть  $\lambda_0 = 0$  – собственное значение оператора  $A$ , т. е.  $Af_0 = 0$  с элементом  $f_0 \in D(A)$ ,  $f_0 \neq 0$ . Предположим, что параметры  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $T > 0$  связаны условием  $\alpha T + 2\beta = 0$ . Тогда однородная обратная задача (1)–(3) имеет нетривиальное решение

$$u(t) = (t^2 / 2) f_0, \quad g = f_0.$$

**Теорема 14.** Пусть при выборе параметров  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  разных знаков и при выборе  $T$  из интервала (21) оператор  $A$  имеет собственное значение вида  $\lambda = 4\mu_0^2 / T^2$ , где  $\mu = \mu_0$  – единственный положительный корень уравнения

$$2\beta\mu + \alpha T \operatorname{th} \mu = 0.$$

Тогда однородная обратная задача (1)–(3) имеет нетривиальное решение

$$u(t) = \frac{T^2}{4\mu_0^2} \left( \operatorname{ch} \frac{2\mu_0 t}{T} - 1 \right) f_0, \quad g = f_0$$



с собственным вектором  $f_0 \neq 0$ ,  $f_0 \in D(A)$ ,  $Af_0 = (4\mu_0^2 / T^2)f_0$ .

Теоремы 11–14 также следуют из результатов [5].

Все перечисленные утверждения полезны на практике и применимы для широкого класса линейных операторов. Уточняя распределение нулей характеристической функции (12), можно получать более специальные признаки единственности (и неединственности) решения обратной задачи (1)–(3). Особо отметим необходимость дополнительных исследований для случая не вещественных значений  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

## Литература

1. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
2. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. N.Y., Basel: Marcel Dekker, 2000. xiv+710 p.
3. Прилепко А.И. Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи матем. физики и анализа. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992. С. 151–162.
4. Соловьев В.В. Разрешимость обратных задач для эллиптического уравнения в цилиндре // Вестник МГОУ. Серия: Физика. Математика. 2012. № 1. С. 27–38.
5. Тихонов И.В., Алмохамед М. Обратная задача с переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения (сдано в печать).
6. Алмохамед М., Тихонов И.В. Единственность решения в модельной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы. Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. С. 19–21.
7. Тихонов И.В., Алмохамед М. Обобщенные экспоненты и их применение в теории дифференциальных уравнений // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 21. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. С. 345–353.
8. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
9. Попов А.Ю., Седлецкий А.М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
10. Алмохамед М., Тихонов И.В. О некоторых спектральных исследованиях, связанных с теорией обратных задач // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Саратов: Саратовский университет, 2022. С. 20–26.
11. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Алмохамед М. О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Саратов: Саратовский университет, 2022. С. 294–299.

**I. V. Tikhonov, Muataz Almohamed**  
MSU, MPGU, University of Aleppo

## UNIQUENESS AND NON-UNIQUENESS OF SOLUTION IN LINEAR INVERSE PROBLEM WITH OVERDETERMINATION OF THE THIRD TYPE

**Keywords:** *abstract differential equation of the second order, linear inverse problem, uniqueness of solution, characteristic function, distribution of zeros, eigenvectors of linear operators.*

**Abstract.** *A linear inverse problem for a second order abstract differential equation is considered. An inhomogeneous term of the equation is unknown. An additional condition is given. This condition is a final overdetermination of the third type. For the inverse problem, a uniqueness criterion of a solution is pointed out. It is expressed through zeros of a characteristic entire function. As practical consequences of the criterion, sufficient conditions of a uniqueness and a non-uniqueness of a solution are established. These results are interested for mathematical physics.*

**И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков,  
Д.Г. Цветкович, И.В. Окорочков**  
*МГУ имени М.В. Ломоносова, НИЯУ «МИФИ», ИЯИ РАН, МПГУ*

УДК 517.518.82+519.677

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ОБЛАСТЕЙ, СВЯЗАННЫХ СО СХОДИМОСТЬЮ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА И КАНТОРОВИЧА

**Ключевые слова:** *полиномы Бернштейна, полиномы Канторовича, сходимости на комплексной плоскости, распределение нулей, аттракторы нулей, системы компьютерной математики.*

*Обсуждается нетривиальная задача о нахождении точной области сходимости для полиномов Бернштейна и полиномов Канторовича. На конкретных примерах показано, что достаточно полное представление об искомой области можно получить, анализируя распределение нулей полиномов на комплексной плоскости. При этом активно используются системы компьютерной математики.*

Некоторое время назад возник интерес к задаче распределения нулей полиномов Бернштейна. Приятно отметить, что один из первых докладов по тематике был сделан в 2016 году на конференции СКМП, традиционно

проводимой в Смоленске. К настоящему моменту накоплен богатый материал, причем выясняется, что многие результаты допускают перенос с полиномов Бернштейна на полиномы Канторовича. Покажем на примерах возможности новой теории.

Начнем с определений. Для порождающей функции  $f \in C[0,1]$  полиномы Бернштейна переменной  $z \in \mathbb{C}$  вводят формулой

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n f(k/n) C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Полиномы Канторовича  $K_n(f, z)$  получаются по той же схеме при замене значений  $f(k/n)$  на их усредненные приближения:

$$K_n(f, z) = (n+1) \sum_{k=0}^n \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(u) du \cdot C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Определение (2) применимо также в случае  $n=0$ . Как обычно, через  $C_n^k$  обозначаем биномиальные коэффициенты. Подробную информацию о полиномах Бернштейна и основные сведения о полиномах Канторовича можно найти в [1–3]. В качестве дополнительных ссылок укажем [4; 5].

Уже на ранних стадиях разработки теории, в работах Райта [6] и Канторовича [7], было показано, что сходимость полиномов (1) может распространяться с основного отрезка  $[0,1]$  на некоторое подмножество комплексной плоскости. Структура такого подмножества зависит от выбора порождающей функции и даже в простых примерах бывает весьма нетривиальной. Особая сложность вопроса хорошо видна из последовавших затем мемуаров Бернштейна [8; 9] (см. также [1, гл. IV]). Некоторые результаты недавнего времени, в том числе относящиеся к полиномам Канторовича, можно найти в [5].

Отдельно и независимо было обнаружено, что имеется связь между областью сходимости полиномов Бернштейна и их распределением нулей на комплексной плоскости. Развивая первоначальные идеи Новикова [10; 11], удалось построить подробную теорию аттракторов нулей для классических полиномов (1) в случае кусочно линейных порождающих функций (см. [12–17]). Компьютерными средствами было установлено, что при увеличении номера  $n \in \mathbb{N}$  нули полиномов Бернштейна стягиваются к фиксированному кривым – *аттракторам нулей*, зависящим от выбора порождающей функции.

В частности, обнаружена следующая закономерность. Если для некоторой «регулярной» функции  $f \in C[0,1]$  полиномы  $B_n(f, z)$  при  $n \rightarrow \infty$  имеют область сходимости  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , ограниченную контуром

$$\Gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m, \quad (3)$$

то сам контур  $\Gamma$  включается в аттрактор нулей. При этом на стыках кривых  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  из контура (3) возникают дополнительные фрагменты

аттрактора, называемые «усиками». Уравнения «усиков» определяются уравнениями стыкующихся кривых, а сами эти кривые  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  связаны с особенностями порождающей функции. За детализацией сказанного вместе с разбором ряда уточнений мы отсылаем к [14–16]. Таким образом, зная точные границы области сходимости, можно предсказывать многие закономерности, регулирующие распределение нулей полиномов Бернштейна.

В заметке [18] намечен противоположный путь – использовать компьютерные вычисления нулей для выявления области сходимости полиномов Бернштейна. Наглядную иллюстрацию к этой идее дает нетривиальный пример из работы Райта [6], выполненной при становлении теории полиномов Бернштейна (1930 г.).

Напомним, что работа [6] посвящена теоретическому нахождению области сходимости полиномов Бернштейна (1) в случае порождающей функции

$$f(x) = \frac{1}{x-a}, \quad x \in [0,1], \quad (4)$$

с фиксированным  $a \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$ . Согласно [6] для функции  $f = f_a$  вида (4) область сходимости  $\Omega = \Omega_a$  полиномов  $B_n(f, z)$  ограничена внешней линией  $\Gamma = \Gamma_a$ , взятой от кривой с уравнением

$$\left| \left( \frac{z}{a} \right)^a \left( \frac{1-z}{1-a} \right)^{1-a} \right| = 1. \quad (5)$$

Интерпретация данного результата представляет серьезные трудности. Обоснования в [6] используют сложный математический аппарат. Кривую (5) естественно называть *петлей Райта*.

Для упрощения анализа будем выбирать значения  $a$  на единичной окружности:

$$a = e^{i\theta}, \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad a \neq 1. \quad (6)$$

В таком случае (и при дополнительном ограничении  $a \neq -1$ ) общее уравнение (5) можно преобразовать к виду

$$\operatorname{ctg} \theta \cdot \ln |z| + \operatorname{tg}(\theta/2) \cdot \ln \frac{|1-z|}{2 \sin(\theta/2)} + \frac{\pi + \theta}{2} = \operatorname{Arg} \frac{z}{1-z}. \quad (7)$$

Визуализация петли (7) при заданном  $\theta \in (0, 2\pi)$ ,  $\theta \neq \pi$ , требует как специального выбора значений аргумента  $\operatorname{Arg}$ , так и особых настроек компьютерной программы. Основным интерес для нас представляет внешняя часть петли (7), помимо которой имеется «спиралевидная» внутренняя часть, наиболее трудная для моделирования.

Простой случай  $a = -1$  подробно разобран в заметке [18]. Там элементарным методом показано, что полиномы  $B_n(f, z)$  от функции

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x \in [0,1], \quad (8)$$

сходятся в области  $\Omega = \Omega_{-1} \subset \mathbb{C}$ , ограниченной внешней частью кривой

$$|z-1|^2 = 4|z|. \quad (9)$$

Кривую (9) будем называть *петлей Ватсона*, поскольку она впервые встречается в работе [19] по асимптотическим разложениям гипергеометрических функций. Насколько можно понять, работа [19] оказала заметное влияние на результаты Райта [6]. Петля (9) является частным случаем общей петли (5) при выборе значения  $a = -1$ .

Построить график петли Ватсона (9) несложно – он состоит из большой внешней части  $\Gamma = \Gamma_{-1}$  и маленькой внутренней «петельки» (см. рис. 1). С другой стороны, визуализировать примерное очертание для  $\Gamma = \Gamma_{-1}$ , т. е. для границы области сходимости  $\Omega = \Omega_{-1}$ , позволяет компьютерный расчет нулей полиномов Бернштейна (см. рис. 2). Как видно, при достаточно большом  $n \in \mathbb{N}$  нули полинома  $B_n(f, z)$  для функции (8) действительно сближаются с аттрактором, т. е. с внешней частью петли Ватсона (9) (см. рис. 3). За дальнейшими подробностями по поводу примера (8) мы отсылаем к [18].

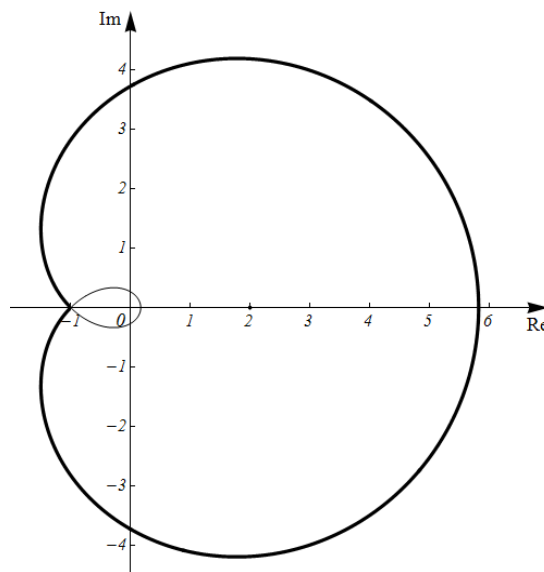


Рис. 1. Петля Ватсона (9). Жирным выделена ее внешняя часть  $\Gamma = \Gamma_{-1}$ , совпадающая с границей области сходимости полиномов Бернштейна от функции (8). Внутри большого внешнего контура расположена маленькая светлая «петелька», не играющая роли в наших рассуждениях

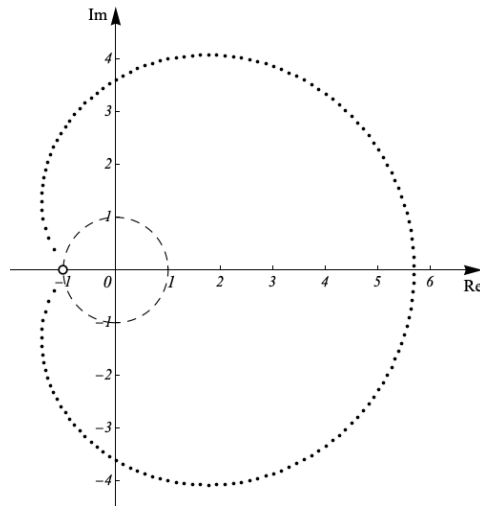


Рис. 2. Множество нулей полинома  $B_{150}(f, z)$  для функции (8). Пунктиром отмечена единичная окружность  $|z| = 1$ , где расположена особая точка функции (8)

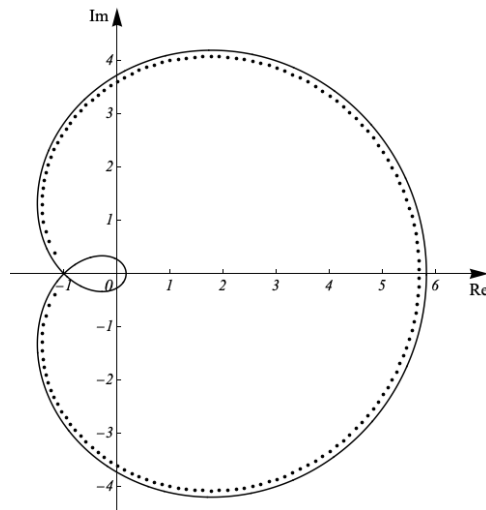


Рис. 3. Множество нулей полинома  $B_{150}(f, z)$  для функции (8) вместе с графиком кривой  $|z - 1|^2 = 4|z|$  из формулы (9)

Рассмотрим более сложный пример

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right), \quad x \in [0, 1], \quad (10)$$

с двумя особыми точками  $a_1 = i$  и  $a_2 = -i$ . Область сходимости полиномов  $B_n(f, z)$  есть пересечение областей  $\Omega = \Omega_i$  и  $\Omega = \Omega_{-i}$ , ограниченных внешними частями соответствующих петель Райта (5). Для  $a_1$  и  $a_2$  в показательной форме (6) имеем углы  $\theta_1 = \pi/2$  и  $\theta_2 = 3\pi/2$ . При их подстановке в формулу (7) возникают уравнения

$$\ln \frac{|1 - z|}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4} = \text{Arg} \frac{z}{1 - z}, \quad (11)$$

$$-\ln \frac{|1-z|}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{4} = \operatorname{Arg} \frac{z}{1-z} \sim \ln \frac{|1-z|}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4} = -\operatorname{Arg} \frac{z}{1-z}. \quad (12)$$

Легко проверяется, что графики кривых (11), (12) расположены симметрично друг другу относительно вещественной оси. Поэтому изобразим внешнюю часть только для первой петли (11) (см. рис. 4). Точная же область сходимости полиномов Бернштейна в примере (10) ограничена соответствующими фрагментами, взятыми от обеих кривых (см. рис. 5). Подчеркнем, что это построение весьма нетривиально, так как оно требует знания результатов трудной работы [6] и специальных настроек компьютерных программ для моделирования подобных трансцендентных кривых.

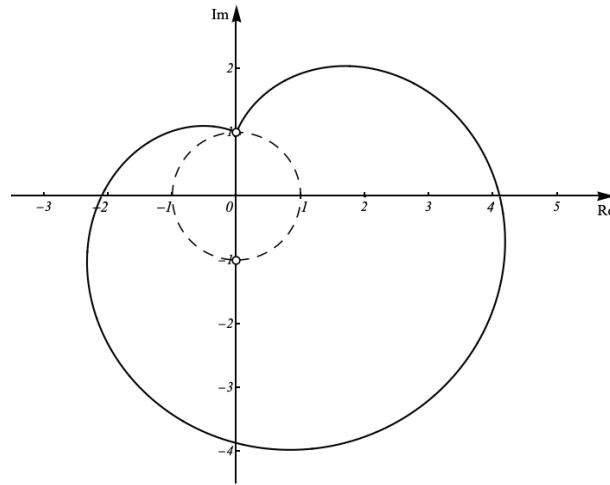


Рис. 4. Внешняя часть петли Райта (11). Пунктиром отмечена окружность  $|z|=1$ , на которой расположены особенности из примера (10). Мы не приводим внутреннюю «спиралевидную» часть петли, возникающую при проходе через особую точку  $a=i$  (точку самопересечения кривой (11))

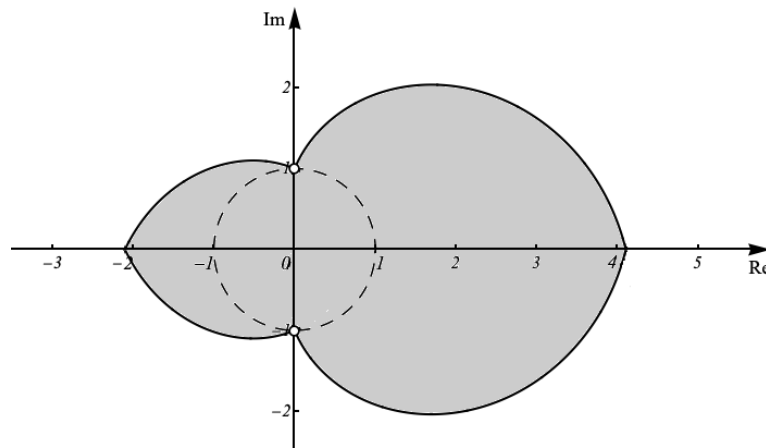


Рис. 5. Область сходимости полиномов Бернштейна, взятых от функции (10). Границу области составляют соответствующие фрагменты кривых (11), (12). Пунктиром отмечена единичная окружность  $|z|=1$

В то же время, примерный вид области, указанной на рисунке 5, можно увидеть, просто рассчитав нули полиномов Бернштейна в примере

(10) (см. рис. 6). Нет сомнений, что граница области сходимости в данном примере является частью аттрактора нулей. При этом, в согласии с общей теорией, на стыках кривых, образующих границу области, возникают дополнительные «усики» аттрактора, расположенные горизонтально на вещественной оси. Им соответствуют группы вещественных нулей на рисунке 6. Рисунок 7 демонстрирует совмещение двух подходов: связанного с кривыми (11), (12) и основанного на нулях полиномов Бернштейна. Результат оказывается достаточно наглядным.

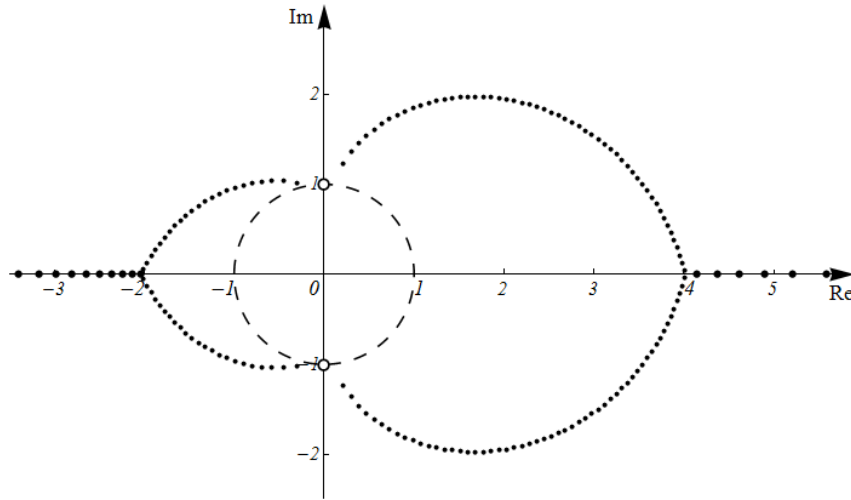


Рис. 6. Основное множество нулей полинома  $B_{200}(f, z)$  для функции (10). Для лучшего форматирования картинки мы «обрезаем» часть нулей, расположенных на вещественной оси вдали от начала координат. Пунктиром отмечена единичная окружность  $|z| = 1$

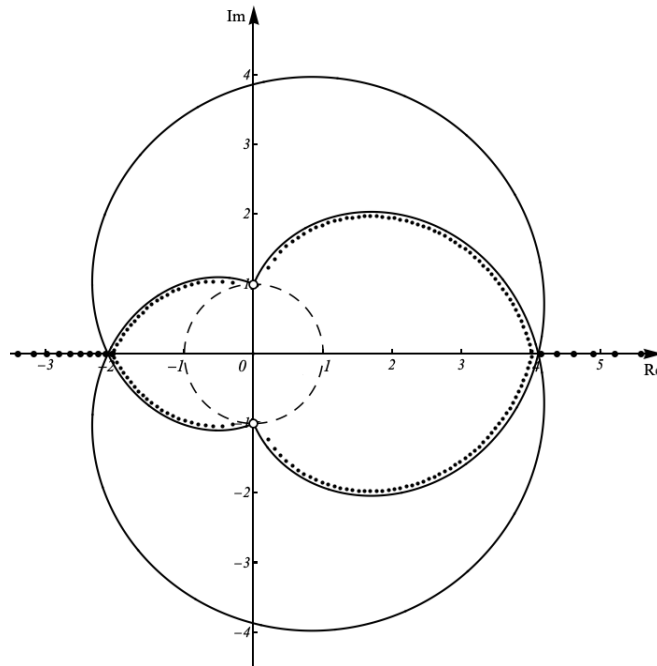


Рис. 7. Сочетание внешних частей, взятых от кривых (11), (12), и основного множества нулей полинома  $B_{200}(f, z)$  для функции (10). Пунктиром отмечена единичная окружность  $|z| = 1$



Для данных примеров проведем сравнение между полиномами Бернштейна и Канторовича. По формулам (1) и (2) для порождающей функции (8) получаем соответственно

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n \frac{n}{n+k} C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (13)$$

$$K_n(f, z) = (n+1) \sum_{k=0}^n \ln \frac{n+k+2}{n+k+1} C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (14)$$

Аналогично для порождающей функции (10) полиномы Бернштейна и Канторовича запишутся так

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n \frac{n^2}{n^2+k^2} C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (15)$$

$$K_n(f, z) = (n+1) \sum_{k=0}^n \operatorname{arctg} \frac{n+1}{(n+1)^2+k^2+k} C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (16)$$

Насколько мы знаем, в подобных ситуациях сходимость полиномов Канторовича на плоскости  $\mathbf{C}$  еще не исследовалась и точная область сходимости пока не известна. Однако компьютерный расчет нулей для полиномов (14), (16) дает (по крайней мере, при больших номерах) практически те же результаты, что и для полиномов Бернштейна ранее. Мы не приводим получившихся рисунков, поскольку в выбранных масштабах заметить различия в распределении нулей полиномов Бернштейна и Канторовича почти невозможно. Ввиду обнаруженного совпадения картин в примерах (13), (14) и в примерах (15), (16) возникает естественное предположение, что область сходимости полиномов Канторовича при выборе порождающей функции (4) будет точно такой же, как и для полиномов Бернштейна. Эта гипотеза проверена нами методом компьютерного вычисления нулей на ряде других значений  $a = e^{i\theta}$  из формулы (6). Распределение нулей полиномов Бернштейна и Канторовича оказывалось всегда очень близким. Аналитическое обоснование указанных идей представляет собой перспективную задачу.

В заключение укажем одну техническую проблему, с которой мы столкнулись при нахождении нулей полиномов Канторовича. Заметим, что в примерах (14), (16) вычисление коэффициентов производится при помощи трансцендентных функций  $\ln$  и  $\operatorname{arctg}$ . В этой связи при численных расчетах нулей для полиномов Канторовича рекомендуется настраивать компьютерный пакет так, чтобы вычисление значений логарифма и арктангенса выполнялось со всей доступной точностью, т. е. с максимальным числом знаков после запятой. Если точность вычисления коэффициентов будет недостаточной, то, как показывает наш опыт, при больших номерах  $n \in \mathbf{N}$  картина распределения нулей полиномов Канторовича заметно исказится и утратит соответствие с реально

существующей. Отмеченный эффект есть проявление сильной «неустойчивости» для отдельных свойств полиномов типа (1) и (2) при малых «нерегулярных» возмущениях коэффициентов.

С другой стороны, сам переход от полиномов Бернштейна (1) к полиномам Канторовича (2) также можно интерпретировать на языке возмущения коэффициентов. Но здесь возмущения носят устойчивый, регулярный характер – они тесно связаны с природой порождающей функции  $f \in C[0,1]$ . По-видимому, подобные возмущения уже не приводят к существенным структурным изменениям в распределении нулей полиномов бернштейновского типа.

Еще раз подчеркнем, что обнаруженные явления проверены пока лишь численно и нуждаются в тщательном теоретическом обосновании. Последнее будет, скорее всего, весьма непростым.

## Литература

1. Lorentz G.G. Bernstein Polynomials. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. x+130 p.
2. DeVore R.A., Lorentz G.G. Constructive Approximation. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verlag, 1993. x+450 p.
3. Виденский В.С. Многочлены Бернштейна: учебное пособие к спецкурсу. Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.
4. Bustamante J. Bernstein operators and their properties. Basel: Birkhäuser, 2017. xii+420 p.
5. Gal S.G. Approximation by Complex Bernstein and Convolution Type Operators. (Series on Concrete and Applicable Mathematics. Vol. 8.). New Jersey, London, Singapore: World Scientific, 2009. xii+338 p.
6. Wright E.M. The Bernstein Approximation Polynomials in the Complex Plane // Journal of the London Mathematical Society. 1930. Vol. 5. Part 4. P. 265–269.
7. Канторович Л.В. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Известия АН СССР. VII сер. 1931. № 8. С. 1103–1115.
8. Bernstein S. Sur la Convergence de Certaines Suites de Polynomes // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1936. V. 15. P. 345–358. (См. также Бернштейн С.Н. Собрание сочинений. Т. 2. Конструктивная теория функций [1931–1953]. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 187–197.)
9. Бернштейн С.Н. О сходимости многочленов  $\sum_0^n C_n^m f\left(\frac{m}{n}\right)x^m(1-x)^{n-m}$  в комплексной области // Известия АН СССР. Сер. матем. 1943. Т. 7. № 2. С. 49–88. (См. также Бернштейн С.Н. Собрание сочинений. Т. 2. Конструктивная теория функций [1931–1953]. Изд-во АН СССР, 1954. С. 310–348.)
10. Новиков И.Я. Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Математические заметки. 2002. Т. 71. Вып. 2. С. 239–253.
11. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 616 с.

12. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г. Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. «Герценовские чтения–2016». Материалы научной конференции, 11–15 апреля 2016. СПб.: Изд. РГПУ им. А.И. Герцена, 2016. С. 139–145.

13. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г. Компьютерная классификация аттракторов для нулей полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII международной научной конференции. Вып. 17. Смоленск: СмолГУ, 2016. С. 224–227.

14. Тихонов И.В., Цветкович Д.Г., Шерстюков В.Б. Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21. № 4. С. 151–174.

15. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г. Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 59–73.

16. Цветкович Д.Г. Подробный атлас аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3. Вып. 1. С. 58–89.

17. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г. Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 170. М.: ВИНТИ РАН, 2019. С. 71–117.

18. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г. Об одном методе для нахождения области сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. «Герценовские чтения – 2018». Материалы научной конференции, 9–13 апреля 2018. СПб.: Изд. РГПУ им. А.И. Герцена, 2018. С. 145–153.

19. Watson G.N. Asymptotic Expansions of Hypergeometric Functions // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1918. Vol. 22, № 14. P. 277–308.

**I. V. Tikhonov, V. B. Sherstyukov, D. G. Tsvetkovich, I. V. Okorochkov**  
MSU, MEFPI, INR RAS, MPG U

## **COMPUTER MATHEMATICS APPLICATIONS TO VISUALIZE THE REGIONS WHICH RELATED TO CONVERGENCE OF BERNSTEIN AND KANTOROVICH POLYNOMIALS**

**Keywords:** *Bernstein polynomials, Kantorovich polynomials, convergence in complex plane, distribution of zeros, attractors of zeros, computer mathematics systems.*

**Abstract.** *We discuss a non-trivial problem of an exact domain of convergence for Bernstein and Kantorovich polynomials. Some typical examples show that a complete description of desired regions can be obtained by analyzing a distribution of zeros of these polynomials in the complex plane. Our method actively uses a system of Computer Mathematics.*

## О РЕШЕНИИ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ С ОПРЕДЕЛИТЕЛЯМИ И КОМПЛЕКСНЫМ СОПРЯЖЕНИЕМ

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярный интеграл, определитель Вронского, краевая задача Гильберта, линейное дифференциальное уравнение.*

*Изучено гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение на действительной оси, записанное с помощью определителей. Определители имеют характер вронскианов. Наряду с искомой комплекснозначной функцией в уравнение входит ее комплексно-сопряженное значение. Уравнение сведено к краевой задаче Гильберта и линейным дифференциальным уравнениям. Полученный результат позволяет записывать решение исходного уравнения в замкнутой форме.*

**Введение.** Для конструирования и исследования дифференциальных уравнений часто используются определители Вронского. С помощью определителей, имеющих характер определителей Вронского, в работах [1; 2] и др. введены в рассмотрение и решены гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения, связанные с краевыми задачами для аналитических функций. Важной особенностью уравнения, указанного в настоящей работе, является наличие комплексно-сопряженных значений заданных и искомой функций.

**Постановка задачи.** На действительной оси  $-\infty < t < +\infty$  зададим функции  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $f(t)$  и будем искать функцию  $\varphi(t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\begin{vmatrix} p(t) & q(t) & \varphi(t) \\ p'(t) & q'(t) & \varphi'(t) \\ p''(t) & q''(t) & \varphi''(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{p(t)} & \overline{q(t)} & \varphi(t) \\ \overline{p'(t)} & \overline{q'(t)} & \varphi'(t) \\ \overline{p''(t)} & \overline{q''(t)} & \varphi''(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{p(t)} & q(t) & \overline{\varphi(t)} \\ \overline{p'(t)} & q'(t) & \overline{\varphi'(t)} \\ \overline{p''(t)} & q''(t) & \overline{\varphi''(t)} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{vmatrix} p(t) & \overline{q(t)} & \overline{\varphi(t)} \\ p'(t) & \overline{q'(t)} & \overline{\varphi'(t)} \\ p''(t) & \overline{q''(t)} & \overline{\varphi''(t)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{\tau-t} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{\tau-t} & \varphi(t) \\ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \varphi'(t) \\ \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \varphi''(t) \end{vmatrix} - \\
& -2\operatorname{Re} \left( \begin{vmatrix} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{\tau-t} & \overline{q(t)} & \varphi(t) \\ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \overline{q'(t)} & \varphi'(t) \\ \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \overline{q''(t)} & \varphi''(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{p(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{\tau-t} & \varphi(t) \\ \overline{p'(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \varphi'(t) \\ \overline{p''(t)} & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \varphi''(t) \end{vmatrix} + \right. \\
& + \begin{vmatrix} p(t) & \overline{q(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} \\ p'(t) & \overline{q'(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \\ p''(t) & \overline{q''(t)} & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{\tau-t} & q(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} \\ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & q'(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & q''(t) & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} p(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{\tau-t} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} \\ p'(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \\ p''(t) & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} \end{vmatrix} = f(t), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (1)
\end{aligned}$$

Предположения: все функции комплекснозначны; функции  $p^{(k)}(t)$ ,  $q^{(k)}(t)$ ,  $\varphi^{(k)}(t)$ ,  $f(t)$  удовлетворяют условию Гельдера на действительной оси вплоть до бесконечно удаленной точки, причем  $p^{(k)}(\infty) = q^{(k)}(\infty) = \varphi^{(k)}(\infty) = 0$ ,  $k = 0, 1, 2$ ; интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару.

**Решение уравнения.** Заменяем удвоенную действительную часть определителей, стоящих в уравнении (1) в скобках, на сумму этих определителей и комплексно-сопряженных к ним. Далее сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} p(t) & q(t) & \varphi(t) \\ p'(t) & q'(t) & \varphi'(t) \\ p''(t) & q''(t) & \varphi''(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{\tau-t} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{\tau-t} & \varphi(t) \\ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \varphi'(t) \\ \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \varphi''(t) \end{vmatrix} - \\
& - \begin{vmatrix} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{\tau-t} & \overline{q(t)} & \varphi(t) \\ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \overline{q'(t)} & \varphi'(t) \\ \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \overline{q''(t)} & \varphi''(t) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \overline{p(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{\tau-t} & \varphi(t) \\ \overline{p'(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \varphi'(t) \\ \overline{p''(t)} & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \varphi''(t) \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} p(t) & \overline{q(t)} & \varphi(t) \\ p'(t) & \overline{q'(t)} & \varphi'(t) \\ p''(t) & \overline{q''(t)} & \varphi''(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{\tau-t} & q(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} \\ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & q'(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & q''(t) & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} \end{vmatrix} - \\
& - \begin{vmatrix} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{\tau-t} & q(t) & \overline{\varphi(t)} \\ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & q'(t) & \overline{\varphi'(t)} \\ \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & q''(t) & \overline{\varphi''(t)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \overline{p(t)} & q(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} \\ \overline{p'(t)} & q'(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \overline{p''(t)} & q''(t) & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} \overline{p(t)} & q(t) & \overline{\varphi(t)} \\ \overline{p'(t)} & q'(t) & \overline{\varphi'(t)} \\ \overline{p''(t)} & q''(t) & \overline{\varphi''(t)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{\tau-t} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} \\ p'(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \\ p''(t) & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} \end{vmatrix} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{ccc} p(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{\tau-t} & \overline{\varphi(t)} \\ p'(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} & \overline{\varphi'(t)} \\ p''(t) & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} & \overline{\varphi''(t)} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} p(t) & \overline{q(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} \\ p'(t) & \overline{q'(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \\ p''(t) & \overline{q''(t)} & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} \end{array} \right| + \\
& \left. + \left| \begin{array}{ccc} p(t) & \overline{q(t)} & \overline{\varphi(t)} \\ p'(t) & \overline{q'(t)} & \overline{\varphi'(t)} \\ p''(t) & \overline{q''(t)} & \overline{\varphi''(t)} \end{array} \right| \right) = f(t), \quad -\infty < t < +\infty.
\end{aligned}$$

Определители в каждой паре скобок сведем к одному определителю («суммируем»):

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{ccc} p(t) & q(t) & \varphi(t) \\ p'(t) & q'(t) & \varphi'(t) \\ p''(t) & q''(t) & \varphi''(t) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{\tau-t} - \overline{p(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{\tau-t} - \overline{q(t)} & \varphi(t) \\ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \overline{p'(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \overline{q'(t)} & \varphi'(t) \\ \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} - \overline{p''(t)} & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} - \overline{q''(t)} & \varphi''(t) \end{array} \right| + \\
& \left. + \left| \begin{array}{ccc} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{\tau-t} - \overline{p''(t)} & q(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} - \overline{\varphi(t)} \\ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \overline{p'(t)} & q'(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \overline{\varphi'(t)} \\ \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} - \overline{p''(t)} & q''(t) & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} - \overline{\varphi''(t)} \end{array} \right| + \\
& \left. + \left| \begin{array}{ccc} p(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{\tau-t} - \overline{q(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} - \overline{\varphi(t)} \\ p'(t) & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \overline{q'(t)} & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \overline{\varphi'(t)} \\ p''(t) & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} - \overline{q''(t)} & \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} - \overline{\varphi''(t)} \end{array} \right| = f(t), \quad (2) \\
& \qquad \qquad \qquad -\infty < t < +\infty.
\end{aligned}$$

Воспользуемся равенствами

$$\varphi(t) = \Phi_+(t) - R(t), \quad \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} - \overline{\varphi(t)} = \Phi_+(t) + R(t), \quad (3)$$

где  $\Phi_+(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} + i \operatorname{Im} \varphi(t)$  есть предельное значение на действительной оси функции, аналитической в верхней полуплоскости, а  $R(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} - \operatorname{Re} \varphi(t)$  – действительная функция. Эти равенства,

являющиеся следствием классических формул Сохоцкого, указаны в [3], где изучена краевая задача Гильберта для полуплоскости в постановке, несколько отличающейся от традиционной. Следствием обобщенных формул Сохоцкого [4] будут равенства с производными

$$\varphi^{(k)}(t) = \Phi_+^{(k)}(t) - R^{(k)}(t), \quad \frac{2k!}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} - \overline{\varphi^{(k)}(t)} = \Phi_+^{(k)}(t) + R^{(k)}(t), \quad (4)$$

где  $k = 1, 2$ . Аналогичный смысл имеют равенства для  $k = 0, 1, 2$

$$p^{(k)}(t) = P_+^{(k)}(t) - r^{(k)}(t), \quad \frac{2k!}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} p(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} - \overline{p^{(k)}(t)} = P_+^{(k)}(t) + r^{(k)}(t), \quad (5)$$

$$q^{(k)}(t) = Q_+^{(k)}(t) - \rho^{(k)}(t), \quad \frac{2k!}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} q(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} - \overline{q^{(k)}(t)} = Q_+^{(k)}(t) + \rho^{(k)}(t). \quad (6)$$

С помощью равенств (3)–(6) уравнению (2) можно придать вид

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} P_+(t) - r(t) & Q_+(t) - \rho(t) & \Phi_+(t) - R(t) \\ P'_+(t) - r'(t) & Q'_+(t) - \rho'(t) & \Phi'_+(t) - R'(t) \\ P''_+(t) - r''(t) & Q''_+(t) - \rho''(t) & \Phi''_+(t) - R''(t) \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} P_+(t) + r(t) & Q_+(t) + \rho(t) & \Phi_+(t) - R(t) \\ P'_+(t) + r'(t) & Q'_+(t) + \rho'(t) & \Phi'_+(t) - R'(t) \\ P''_+(t) + r''(t) & Q''_+(t) + \rho''(t) & \Phi''_+(t) - R''(t) \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} P_+(t) + r(t) & Q_+(t) - \rho(t) & \Phi_+(t) + R(t) \\ P'_+(t) + r'(t) & Q'_+(t) - \rho'(t) & \Phi'_+(t) + R'(t) \\ P''_+(t) + r''(t) & Q''_+(t) - \rho''(t) & \Phi''_+(t) + R''(t) \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} P_+(t) - r(t) & Q_+(t) + \rho(t) & \Phi_+(t) + R(t) \\ P'_+(t) - r'(t) & Q'_+(t) + \rho'(t) & \Phi'_+(t) + R'(t) \\ P''_+(t) - r''(t) & Q''_+(t) + \rho''(t) & \Phi''_+(t) + R''(t) \end{vmatrix} = f(t), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (7) \end{aligned}$$

Теперь определители в (7) представим в виде надлежащих сумм таких определителей, элементами которых являются отдельные слагаемые.



После взаимного уничтожения большей части получающихся определителей приходим к уравнению

$$\begin{vmatrix} P_+(t) & Q_+(t) & \Phi_+(t) \\ P'_+(t) & Q'_+(t) & \Phi'_+(t) \\ P''_+(t) & Q''_+(t) & \Phi''_+(t) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r(t) & \rho(t) & R(t) \\ r'(t) & \rho'(t) & R'(t) \\ r''(t) & \rho''(t) & R''(t) \end{vmatrix} = \frac{f(t)}{4}, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (8)$$

Уравнение (8) представляет собой дифференциальную краевую задачу Гильберта о скачке для верхней полуплоскости. После введения обозначений

$$\Psi_+(t) = \begin{vmatrix} P_+(t) & Q_+(t) & \Phi_+(t) \\ P'_+(t) & Q'_+(t) & \Phi'_+(t) \\ P''_+(t) & Q''_+(t) & \Phi''_+(t) \end{vmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{vmatrix} r(t) & \rho(t) & R(t) \\ r'(t) & \rho'(t) & R'(t) \\ r''(t) & \rho''(t) & R''(t) \end{vmatrix} \quad (9)$$

получим обычную задачу Гильберта о скачке

$$\Psi_+(t) - \omega(t) = \frac{f(t)}{4}, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (10)$$

Если задача (10) будет решена, то равенства (9) следует расценивать затем как линейные дифференциальные уравнения для нахождения функций  $\Phi_+(t)$ ,  $R(t)$ . Если и эти уравнения будут решены, то решение уравнения (1) найдем с помощью первой из формул (3).

**Основной результат. Заключительные замечания.** Результат исследования сформулируем в виде теоремы.

**Теорема.** *Решение уравнения (1) сводится к последовательному решению задачи Гильберта (10) и дифференциальных уравнений (9). Если в результате этих решений функции  $\Phi_+(t)$  и  $R(t)$  будут найдены, то искомое решение записывается по первой формуле (3).*

Отметим конструктивный характер теоремы. С помощью результатов [3] можно указать условия разрешимости и (при их выполнении) решение задачи (10). Решение дифференциальных уравнений может быть осуществлено методом вариации произвольных постоянных, поскольку для соответствующих однородных уравнений функции  $P_+(t)$ ,  $Q_+(t)$  и  $r(t)$ ,  $\rho(t)$  будут являться фундаментальными системами решений.

## Литература

1. Шилин А.П. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с определителями типа вронскианов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2021. Т.57, №3. С. 296–310.

2. Шилин А.П. Решение одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, заданного с помощью определителей // АЧМ: матер. XV Междунар. научн.-техн. конф. Пенза: Изд-во ПГУ, 2020. С. 18–22.

3. Шилин А.П. Краевая задача Гильберта для полуплоскости // Белорусский гос. ун-т. 1984. Деп. в БелНИИИТИ, №839 Бе-D84. 18 с.

4. Зверович Э.И. Обобщение формул Сохоцкого // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. №2. С. 24–28.

**A.P. Shilin**

Belarusian State University

**ON THE SOLUTION OF A SECOND-ORDER INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION ON THE REAL AXIS WITH DETERMINANTS AND COMPLEX CONJUGATION**

**Keywords:** *integro-differential equation, hypersingular integral, Vronsky's determinant, Hilbert boundary problem, linear differential equation.*

**Abstract.** *A hypersingular integro-differential equation on the real axis, written using determinants, is studied. The determinants are of the Vronsky type determinants. Along with the desired complex-valued function, its complex-conjugate value is included in the equation. The equation is reduced to the Hilbert boundary value problem and linear differential equations. The result obtained allows you to write the solution of the original equation in a closed form.*

## СЕКЦИЯ 4

### Новые информационные технологии в образовании

**М.М. Абдуллаева**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

УДК 159.9.072

#### **ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБ УЧАЩЕМСЯ КАК ИНДИКАТОР ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ЗДОРОВЬЯ ПЕДАГОГОВ**

Ключевые слова: *психосемантика, профессиональное здоровье, учителя средних школ, учащиеся, развитие субъекта труда.*

*Статья посвящена изучению профессионального опыта учителей средних школ с использованием методологии психосемантического подхода. Мы обратились к описанию предметной области профессиональной деятельности педагогов как к показателю особенностей их профессионального опыта. В исследовании приняли участие 196 учителей, работающих в московских школах. Полученные данные демонстрируют диагностические возможности психосемантических методик, позволяющих определять респондентов, находящихся в зоне риска и нуждающихся в психологической помощи.*

**Введение.** Тема профессионального здоровья, объединяющая психологов самых разных специализаций, получила новый стимул для изучения, связанный с пандемией COVID-19. Переход на дистанционные формы обучения, вызвавший серьезную перестройку отношений «учитель – ученик», потребовал от всех участников образовательного процесса быстрого включения в онлайн-режим вне зависимости от уровня цифровой грамотности и наличия соответствующего технического оснащения [12; 14]. И, как результат, – возросшая тревожность и жалобы на ухудшение самочувствия у всех участников. В этом контексте обращение к рассмотрению «состояния» профессионального здоровья учителей, наряду с физическим и психическим, несмотря на отсутствие общепринятого определения, связано с пониманием характера их трудовой нагрузки: высокой моральной ответственностью, напряженной коммуникацией с разными по возрасту и статусу людьми, опорой преимущественно на

функциональные средства труда и серьезными требованиями к нравственности. Все это приводит к риску появления профессионально-личностных деформаций у педагогов [13]. Учитывая, что численность учителей в РФ достигает порядка 1,7 млн. человек (по данным Росстата), задача обеспечения условий для сохранения здоровья профессионалов, отвечающих за воспитание и образование подрастающего поколения, а также своевременного выявления учителей, нуждающихся в психологической поддержке, становится необычайно важной [3; 5; 6; 9].

**Цель данного исследования** состояла в изучении особенностей семантического описания учащегося как основного объекта труда учителей, являющегося основанием отнесения их к представителям социономической сферы [7]. Идея исследования заключалась в обращении к семантическому измерению «мира профессии» (по Е.Ю. Артемьевой, 1999), связывающим воспринимаемую реальность и ценностно-смысловую сферу личности [2]. Выбор учащегося в качестве ключевого элемента семантического слоя профессионального опыта учителей обусловлен сложившейся системой отношений в образовательной среде «администрация – учитель – ученики – их родители», в которой весь учебный процесс выстраивается в связи и по поводу учащихся, все трудовые задачи учителей так или иначе связаны с их отношениями с учениками. В связи с этим мы предположили, что семантика описаний учащегося позволит увидеть особенности взаимодействия в подсистеме «учитель – ученик».

**В выборку** вошли учителя средних школ г. Москвы, 66 мужчин и 130 женщин со средним стажем – 15 лет и средним возрастом по выборке – 39 лет. Всего 196 человек. Респондентам были предложены опросные методики, направленные на диагностику содержательных характеристик деятельности и переживаний, связанных с работой, – это «Психологический портрет личности учителя» [10] и «Профессиональное выгорание» [4; 11], а также психосемантические, дающие возможность получить уникальный авторский текст с характерными для респондента словами и смысловыми конструкциями, – «Неоконченные предложения» на тему «Моя профессия» [1] и свободные ассоциации на слова «Ученик», «Ребенок». Опросные методики обрабатываются в соответствии с авторскими ключами, психосемантические предполагают качественный анализ полученных окончаний и списка коннотативных значений, связанных со словами-стимулами [8]. Надо отметить, что учителя – это «трудные» респонденты, отчасти вынужденные защищаться от интереса к их работе из-за страха не соответствовать негласно существующему в общественном сознании представлению об «идеальном учителе», безусловно любящем всех детей, всегда спокойном и мудром, умеющем интересно и доходчиво подавать свой предмет. Поэтому сочетание традиционных, опросных методов и психосемантических, проективных

по характеру методик, не имеющих однозначно одобряемого ответа, позволяет не только обойти психологические защиты респондентов, но и дополнить изучаемые особенности профессиональной деятельности субъективным «видением» своей работы.

Полученные данные опросника «Психологический портрет личности учителя» позволяют выделить группы респондентов с разными ценностными ориентациями в работе – на отношения с детьми, на отношения с коллегами и на собственные переживания, в связи с чем мы предположили, что эти учителя будут различаться описаниями своей работы и учащихся. Статистическая обработка данных осуществлялась в компьютерной программе SPSS 21.0.

**Результаты.** Процедура кластерного анализа позволила выделить группы учителей по приоритетным ориентациям: респонденты, ориентированные на детей (51 человек), и респонденты, ориентированные на коллег и собственные переживания (47 человек). Учителя, вошедшие в первую группу, статистически значимо ( $p < 0,05$ ) отличаются от представителей второй группы по показателям опросных методик. Их психоэмоциональное состояние характеризуется позитивным настроем, уверенностью в собственных силах, умением контролировать проявления своих чувств. Однако, если сравнивать эти группы по выраженности симптомов выгорания, несмотря на полученные статистические различия между ними, показатель эмоционального истощения у всех респондентов попал в диапазон низких значений, а показатель циничного отношения к другому человеку у первой группы практически отсутствует, у второй – находится в диапазоне высоких оценок, что отчасти подтверждает «выпадение» учеников из приоритетных ценностей, по которым эти группы были разделены.

Контент-анализ авторских текстов и семантических описаний стимульных объектов «Ученик» и «Ребенок» проводился по выделенным группам учителей. Содержательный анализ окончаний предложений «Самое трудное в моей профессии ...», «В моей работе...» позволяет подтвердить напряженность труда современных педагогов, наличие проблем с коллегами и администрацией, усталость от заполнения бумаг, не имеющих прямого отношения к сути их работы, отметить закрытость педагогов, выражаемую в краткости, иногда формальности и клишированности их ответов.

Подсчет частоты встречаемости лексических категорий в анализируемых текстах, категорий, выделенных по «знаку» эмоций (позитивные, негативные и нейтральные), позволил выделить следующие особенности ответов наших респондентов: 1) учителя, для которых значимы отношения с учениками, более открыты, они многословны, их ответы лексически богаче, отличаются эмоциональной теплотой и яркостью; 2) у учителей, ориентированных на коллег и собственные

чувства, в ответах значимо чаще ( $p < 0,05$ ) присутствуют негативные оценки учеников (например, невнимательный, глупый, нарушитель дисциплины и т.п.); 3) серьезное смысловое расхождение в ответах учителей этих двух групп в продолжении предложений «Общение с детьми...» и «Мои ученики...»; 4) учителя, ориентированные, прежде всего, на отношения с коллегами и собственные переживания, описывают их, используя больше негативные и нейтральные слова.

Количественный анализ полученных ассоциаций на стимулы «Ученик» и «Ребенок» подтверждают обнаруженные особенности авторских текстов. Так, учителя первой группы продуцируют в 1,7 раза больше ассоциаций, причем по характеру эти ассоциации эмоционально теплые по сравнению с учителями из второй группы, предпочитающих отрицательные или нейтральные характеристики. Контент-анализ свободных ассоциаций на слово «Ученик» осуществлялся по следующим смысловым категориям: «Ученик как человек» (ябеда, человечек, ребенок, личность, плакса, упрямец и т.п.), «Школьные принадлежности и атрибуты» (класс, портфель, пенал, классный журнал и т.п.), «Качества, свойственные ученику» (любопытность, усидчивость, ленивый и т.п.). Учителя с ориентацией на ученика чаще подчеркивают, что ученик – это личность, ребенок, требующий особого подхода и понимания. Список ассоциаций на «Ученика» во второй группе учителей с направленностью на себя и коллег носит скорее отрицательный оттенок (непослушный, двоечник, черствый и т.д.) или абстрактный характер, например, употребляются слова, семантически не связанные напрямую со школой (взгляд, тяжесть, время, нервы, дистанция и т.п.), что позволяет говорить о выраженной негативной психосоматической симптоматике – чрезмерной реакции на раздражающие стимулы, низкой эмоциональной устойчивости и сложностях социальной адаптации, дополненной проявлениями синдрома выгорания. Интересно, что категория абстрактных понятий в ассоциациях отсутствует у респондентов первой группы, ориентированных на детей, в своих ассоциациях они конкретны, их идеи четко определены.

Контент-анализ ассоциаций на стимул «Ребенок» проводился на основе выделения следующих смысловых категорий: «Семья» (любовь, беременность, мама, целовать и т.п.), «Статус ребенка» (школа, детский сад, малыш, дитя и т.п.), «Качества» (капризный, шаловливый, маленький, несмышленный и т.п.), «Эмоции и чувства» (смех, радость, приятно, интерес и т.п.). Результаты частотного анализа ассоциаций в двух выделенных группах учителей показывают, что педагоги, для которых ученики важнее коллег и себя, используют в описании «ребенка» слова, семантически связанные со школой и обучением (учеба, воспитание, ученик(-ца), дошкольник). Для этих учителей «ребенок» – это тот, кто учится, кого воспитывают, а «ученик», прежде всего, ребенок, капризный,

непослушный, разный, но при этом эмоционально принимаемый. У учителей, ориентированных на отношения с коллегами и собственные чувства, ассоциации на стимул «Ребенок» направлены скорее на себя, на собственного ребенка (дочь (сын), беременность, жизнь, родитель, мысли, рука и т.д.), что подтверждает их ориентацию на собственные переживания, «отгороженность» от учеников и, возможно, более формальное к ним отношение. В ассоциациях учителей второй группы присутствуют преимущественно описания самого ребенка и ситуации детства, слова, связанные с развитием и обучением детей, в их ассоциациях практически не встречаются.

**Выводы и заключение.** Таким образом, семантическими «измерениями» субъективных представлений респондентов об объекте своего труда, диагностирующих профессиональное самочувствие, являются: «эмоциональный тон оценки», «доля смыслового совпадения описаний ученика и ребенка» и «абстрактность / конкретность описаний». Парадоксальность полученных результатов заключается в амбивалентности связи «объекта труда» учителей и их профессионального здоровья. Дети, выступающие перед учителем в разных ролях, – ребенка и учащегося, являются источником вдохновения, ресурсом, оберегающим педагога от профессионального выгорания, и одновременно одним из источников отрицательных эмоций в работе, приводящих к накоплению негатива и появлению циничного отношения в работе.

Выборка респондентов, принявших участие в нашем исследовании, накладывает некоторые ограничения на экстраполяцию полученных результатов на всех учителей московских школ. Учитывая возросшие нагрузки на педагогов в связи с постоянным реформированием среднего образования, выделенные нами семантические «измерения» профессионального здоровья учителей – преобладание отрицательных характеристик в оценках учащихся, склонность к использованию разных словарей описаний «детей» и «учеников», появление абстрактных, отвлеченных ответов – могут быть полезны для определения учителей, нуждающихся в психологической помощи.

## Литература

1. Абдуллаева М.М. Семантические характеристики текста и особенности профессионального труда // Вестник Московского университета. Серия 14 «Психология». 2005. № 4. С. 25–36.
2. Артемьева Е.Ю. Психология субъективной семантики. М.: Наука, Смысл, 1999.

3. Березовская Р.А. Психология профессионального здоровья за рубежом: современное состояние и перспективы развития // Психологические исследования: электронный научный журнал. 2012. Т. 5, №. 26. С. 12–19.
4. Водопьянова Н.Е., Старченкова Е.С. Синдром выгорания. Диагностика и профилактика. СПб.: Питер, 2005. 336 с.
5. Дружилов С.А. Профессиональное здоровье трудящихся и психологические аспекты профессиональной адаптации // Успехи современного естествознания. 2013. № 6. С. 34–37.
6. Исаев А.А., Никифоров Г.С., Родионова Е.А. Психология профессионального здоровья: обзор концепций // Учёные записки Санкт-Петербургского гос. ин-та психологии и социальной работы. 2019. Т. 32, № 2. С. 114–122.
7. Климов Е.А. Введение в психологию труда. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. 350 с.
8. Крис А. Свободные ассоциации. Метод и процесс. М.: Когито-Центр, 2007. 160 с.
9. Психология здоровья / под ред. Г.С. Никифорова. СПб.: Питер, 2006. 607 с.
10. Резапкина Г.В. Психологический портрет учителя: учебно-методическое пособие. М.: Генезис, 1999. 88 с.
11. Maslach C., Jackson S.E: The measurement of experienced burnout // Journal of Occupational Behavior. 1981. № 2. P. 99–115.
12. Onyema E., Dr. Eucheria N., Dr. Faith A. Impact of Coronavirus Pandemic on Education // Journal of Education and Practice. 2020. Vol. 11, No 13. URL: [www.iiste.org](http://www.iiste.org) (Online). P.108-121.
13. Potyrała K. A few reflections on contemporary science education and educational research // Problems of Education in the 21st Century. 2020. 78(1). [//doi.org/10.33225/pec/20.78.04](https://doi.org/10.33225/pec/20.78.04)
14. Zierer K. Effects of Pandemic-Related School Closures on Pupils' Performance and Learning in Selected Countries: A Rapid Review // Education Sciences. 2021. No 11(6). P. 2529–271. [doi.org/10.3390/educsci11060252](https://doi.org/10.3390/educsci11060252)

**M.M. Abdullaeva**

Lomonosov Moscow State University

## **REPRESENTATIONS OF A STUDENT AS AN INDICATOR OF PROFESSIONAL HEALTH OF TEACHERS**

**Keywords:** *psychosemantics, occupational health, secondary school teachers, students, development of the subject of labor.*

**Abstract.** *The article is devoted to the study of the professional experience of teachers using the methodology of the psychosemantic approach. We turned to the description of the subject area of the professional activity of teachers as a characteristic of the features of professional health. The study involved 196 teachers working in the Moscow schools. The results obtained demonstrate the diagnostic capabilities of psychosemantic methods, which make it possible to identify respondents in need of psychological support.*



## РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СКМ WOLFRAM MATHEMATICA

Ключевые слова: *разностные уравнения, последовательности, модели динамики с дискретным временем, система компьютерной математики Wolfram Mathematica.*

*В данной статье рассматриваются возможности использования математического пакета Wolfram Mathematica при отыскании общих и частных решений разностных уравнений.*

**1. Введение.** Дифференциальные и разностные уравнения являются эффективным инструментом математического моделирования. Разностным (или рекуррентным) уравнением называют уравнение относительно неизвестной последовательности. Сфера применения разностных уравнений обширна. Эти уравнения используются для приближенного решения дифференциальных уравнений и в моделях динамики с дискретным временем. В экономике, например, к таким процессам относятся ежедневные изменения курса валюты, стоимости ряда ценных бумаг, величины банковских вкладов и ежемесячный расчет процентов по вкладам, ежеквартальные и ежегодные статистические данные о микроэкономических и макроэкономических показателях.

Например, рост процентного вклада задается разностным уравнением первого порядка. Пусть  $f(x)$  – величина вклада после  $x$  месяцев;  $p$  – месячная процентная ставка,  $0 < p < 1$ . Тогда

$$f(x+1) = (1+p)f(x).$$

Последовательность Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots,$$

в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел, удовлетворяет разностному уравнению второго порядка

$$f(x+2) = f(x+1) + f(x)$$

и начальным условиям  $f(1) = 1, f(2) = 1$ .

**2. Решение задач.** Приведем некоторые примеры нахождения общих и частных решений разностных уравнений в зависимости от корней их соответствующих характеристических уравнений с помощью СКМ Wolfram Mathematica.

```

(*1*)

(*Зададим коэффициенты разностного уравнения*) p = -1; q = -1;

(*Составим разностное уравнение*) RE = f[x+1] + p*f[x] + q*f[x-1] == 0;

(*Решим его с помощью встроенной функции*) RS = RSolve[RE, f[x], x];

(*Найдем дискриминант характеристического уравнения*) d = p^2 - 4*q;

(*Решим характеристическое уравнение*) Sol = Solve[k^2 + p*k + q == 0, k];

(*Зададим массив корней характеристического уравнения*) R = Table[k /. Sol[[i]], {i, 1, 2}];

(*Запишем общее решение уравнения в зависимости от дискриминанта*)
If[d == 0, y[x_] = C[1]*R[[1]]^x + C[2]*x*R[[2]]^x,
  If[d > 0, y[x_] = C[1]*R[[1]]^x + C[2]*R[[2]]^x, y[x_] = C[1]*Abs[R[[1]]]^x*Cos[Arg[R[[1]]]*x] + C[2]*Abs[R[[1]]]^x*Sin[Arg[R[[1]]]*x]];

Print["D=", d];

D=5

Print["Корни характеристического уравнения имеют вид: ", R]
Print["f[x]=", y[x]]
Print["Встроенное решение: ", f[x] /. RS[[1]]]

Корни характеристического уравнения имеют вид:  $\left\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right\}$ 

 $f[x] = \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^x C[1] + \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^x C[2]$ 

Встроенное решение: C[1] Fibonacci[x] + C[2] LucasL[x]

(*Найдем частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию*) x0 = 1; y0 = 1; x1 = 2; y1 = 1;

col = FullSimplify[Solve[{y[x0] == y0, y[x1] == y1}, {C[1], C[2]}]]
C1 = C[1] /. col[[1, 1]]
C2 = C[2] /. col[[1, 2]]
F[x_] = FullSimplify[y[x] /. {C[1] -> C1, C[2] -> C2}]
For[i = 1, i <= 5, i++, Print[FullSimplify[F[i]]]]

 $\left\{\left\{C[1] \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}}, C[2] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}\right\}$ 

 $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 

 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 

 $\frac{-\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^x + \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^x}{\sqrt{5}}$ 

1
1
2
3
5

```

Рис. 1. Решение разностного уравнения в случае различных действительных корней характеристического уравнения

```

(*2*)

(*Зададим коэффициенты разностного уравнения*) p = 8; q = 16;

(*Составим разностное уравнение*) RE = f[x + 2] + p * f[x + 1] + q * f[x] == 0;

(*Решим его с помощью встроенной функции*) RS = RSolve[RE, f[x], x];

(*Найдем дискриминант характеристического уравнения*) d = p^2 - 4 * q;

(*Решим характеристическое уравнение*) Sol = Solve[k^2 + p * k + q == 0, k];

(*Зададим массив корней характеристического уравнения*) R = Table[k /. Sol[[i]], {i, 1, 2}];

(*Запишем общее решение уравнения в зависимости от дискриминанта*)
If[d == 0, y[x_] = C[1] * R[[1]]^x + C[2] * x * R[[2]]^x,
  If[d > 0, y[x_] = C[1] * R[[1]]^x + C[2] * R[[2]]^x, y[x_] = C[1] * Abs[R[[1]]]^x * Cos[Arg[R[[1]]] * x] + C[2] * Abs[R[[1]]]^x * Sin[Arg[R[[1]]] * x]];

Print["D=", d];

D=0

Print["Корни характеристического уравнения имеют вид: ", R]
Print["f[x]=", y[x]]
Print["Встроенное решение: ", f[x] /. RS[[1]]]

Корни характеристического уравнения имеют вид: {-4, -4}
f[x]=(-4)^x C[1] + (-4)^x x C[2]
Встроенное решение: (-4)^x C[1] + (-4)^x x C[2]

(*Найдем частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию*) x0 = 1; y0 = 1; x1 = 2; y1 = 1;

col = FullSimplify[Solve[{y[x0] == y0, y[x1] == y1}, {C[1], C[2]}]]
C1 = C[1] /. col[[1, 1]]
C2 = C[2] /. col[[1, 2]]
F[x_] = FullSimplify[y[x] /. {C[1] -> C1, C[2] -> C2}]
For[i = 1, i <= 5, i++, Print[FullSimplify[F[i]]]]

{{C[1] -> -9/16, C[2] -> 5/16}}

-9/16
5/16
(-1)^x 4^-2+x (-9 + 5 x)
1
1
-24
176
-1024

```

Рис. 2. Решение разностного уравнения в случае двукратного действительного корня характеристического уравнения

```

(*3*)

(*Зададим коэффициенты разностного уравнения*) p = -2; q = 4;

(*Составим разностное уравнение*) RE = f[x + 2] + p * f[x + 1] + q * f[x] == 0;

```

```

(*Решим его с помощью встроенной функции*)RS = RSolve[RE, f[x], x];

(*Найдем дискриминант характеристического уравнения*)d = p^2 - 4*q;

(*Решим характеристическое уравнение*)Sol = Solve[k^2 + p*k + q == 0, k];

(*Зададим массив корней характеристического уравнения*)R = Table[k /. Sol[[i]], {i, 1, 2}];

(*Запишем общее решение уравнения в зависимости от дискриминанта*)
If[d == 0, y[x_] = C[1]*R[[1]]^x + C[2]*x*R[[2]]^x,
  If[d > 0, y[x_] = C[1]*R[[1]]^x + C[2]*R[[2]]^x, y[x_] = C[1]*Abs[R[[1]]]^x*Cos[Arg[R[[1]]]*x] + C[2]*Abs[R[[1]]]^x*Sin[Arg[R[[1]]]*x]];

Print["D=", d];
D=-12

Print["Корни характеристического уравнения имеют вид: ", R]
Print["f[x]=", y[x]]
Print["Встроенное решение: ", f[x] /. RS[[1]]]

Корни характеристического уравнения имеют вид: {1 - i*sqrt(3), 1 + i*sqrt(3)}

f[x]=2^x C[1] Cos[pi x / 3] - 2^x C[2] Sin[pi x / 3]

Встроенное решение: (1 - i*sqrt(3))^x C[1] + (1 + i*sqrt(3))^x C[2]

(*Найдем частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию*)x0 = 1; y0 = 1; x1 = 2; y1 = 1;

col = FullSimplify[Solve[{y[x0] == y0, y[x1] == y1}, {C[1], C[2]}]]
C1 = C[1] /. col[[1, 1]]
C2 = C[2] /. col[[1, 2]]
F[x_] = FullSimplify[y[x] /. {C[1] -> C1, C[2] -> C2}]
For[i = 1, i <= 5, i++, Print[FullSimplify[F[i]]]]

{{C[1] -> 1/4, C[2] -> -sqrt(3)/4}}

1/4
-sqrt(3)/4

2^-2*x (Cos[pi x / 3] + sqrt(3) Sin[pi x / 3])

1
1
-2
-8
-8

```

Рис. 3. Решение разностного уравнения в случае комплексных корней характеристического уравнения

Приложения разностных уравнений многообразны: от моделей мобилизации до численного решения задач математической физики. Система компьютерной математики Wolfram Mathematica позволяет находить решения таких уравнений, причем не только в случае линейных разностных уравнений, но и многих других.

## Литература

1. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения. СПб.: Лань, 1997.
2. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию): учебное пособие. М.: Наука, 2007.
3. Романенко В.К. Разностные уравнения. М.: Просвещение, 2018.
4. Королев А.В. Дифференциальные и разностные уравнения. М.: Юрайт, 2019.
5. Глызин С.Д., Марушкина Е.А. Дифференциальные и разностные уравнения и системы в примерах и задачах. Ярославль: ЯрГУ, 2019.

**N.N. Bogdanova**  
Smolensk State University

## SOLUTION OF DIFFERENCE EQUATIONS USING SCM WOLFRAM MATHEMATICA

**Keywords:** *difference equations, sequences, discrete-time dynamics models, Wolfram Mathematica computer mathematics system.*

**Abstract.** *This article discusses the possibilities of using the Wolfram Mathematica mathematical package to find general and particular solutions to difference equations.*

**А.Ю. Бороздина, О.М. Киселева**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

## ОСОБЕННОСТИ РАЗРАБОТКИ ОБУЧАЮЩЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ

Ключевые слова: *образовательная информационная система, ЕГЭ по физике, дистанционное обучение.*

*В данной работе описывается обучающее приложение для подготовки учащихся к ЕГЭ по физике. В качестве основы для разработки используется графовая модель теоретического материала, фрагмент которой также представлен в статье.*

Актуализация существующих и необходимость разработки новых обучающих приложений по физике для дистанционной формы обучения обусловлены изменениями в общем среднем образовании, которые повлекла за собой пандемия 2020 [1]. В условиях постоянной угрозы полного перехода на удаленное обучение необходимо обеспечить

сохранение качества образования, его фундаментальности, соответствия современным и перспективным потребностям личности, общества и государства [2].

В таких условиях общеобразовательная школа должна формировать у учеников не только целостную систему знаний, умений и навыков, но и навыки самостоятельной учебной деятельности и самоконтроля [3]. При дистанционном обучении умение систематически учиться особенно важно в процессе подготовки к выпускным экзаменам.

Экзамен ЕГЭ по физике относится к списку предметов по выбору. Для его успешной сдачи от выпускников потребуется использование всего комплекса полученных во время учебы знаний по предмету и их полное отражение в экзаменационном ответе [4].

Для подготовки по всем предметам, включенным в список единого государственного экзамена, в настоящее время существует большое число образовательных приложений, посвященных как предмету в целом, так и отдельным его темам [5; 6; 7], не стала исключением и физика. Ученик, который серьезно, осмысленно и систематически работает над уровнем своих знаний, используя информацию на данных ресурсах, может самостоятельно, без дополнительной помощи со стороны репетиторов подготовиться к сдаче ЕГЭ на высоком уровне.

Некоторые онлайн-сервисы представлены органами власти и подведомственными им учреждениями, и пользование ими является бесплатным, другие разрабатываются коммерческими организациями или отдельными педагогами [8]. В качестве примера таких вспомогательных источников материалов приведем сайт ФИПИ, официальный информационный портал ЕГЭ, портал «Решу ЕГЭ», сервис «Яндекс.Репетитор.ЕГЭ», сайт «4ЕГЭ» и другие.

Для самостоятельной подготовки учащихся к экзамену по физике могут быть использованы как отдельные сервисы, так и вся их совокупность. При разработке образовательной информационной системы для подготовки к ЕГЭ по физике авторами использовались материалы портала «Решу ЕГЭ». К преимуществам разрабатываемого приложения относится то, что ему не нужен выход в глобальную сеть, оно доступно для пополнения материалами учителем-предметником, организующим работу учащихся. В основе приложения лежит графовая модель теоретического материала [9], позволяющая отобразить связи между различными заданиями ЕГЭ. На рисунке 1 представлен фрагмент графовой модели теоретического материала, необходимого для подготовки к ЕГЭ по физике.

Сегодня существует значительное число примеров формализации элементов образовательного процесса для последующей автоматизации [10; 11; 12; 13; 14]. Семантическая сеть была выбрана для формализации теоретической основы информационной системы, поскольку она

позволяет наглядно представить структуру изучаемого материала.

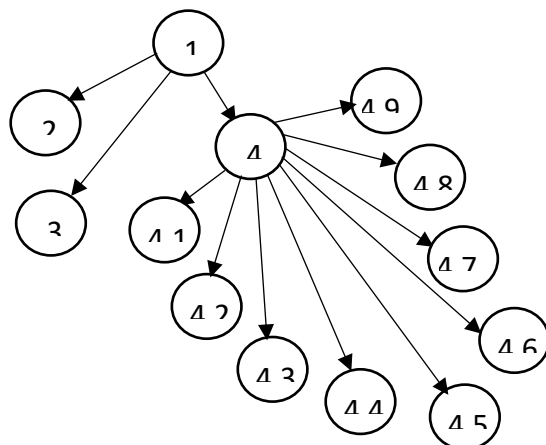


Рис. 1. Фрагмент графовой модели теоретического материала, необходимого для подготовки к ЕГЭ по физике

Элементы знания, соответствующие вершинам графа:

1. Физика
2. Физический смысл величин, законов и закономерностей
3. Графическое представление информации
4. Кинематика. Динамика
  - 4.1 Координаты, анализ графиков
  - 4.2 Равномерное движение, относительность движения
  - 4.3 Равнопеременное движение, ускорение тела
  - 4.4 Движение по окружности
  - 4.5 Второй закон Ньютона
  - 4.6 Равнодействующая сила
  - 4.7 Сила трения
  - 4.8 Сила упругости
  - 4.9 Закон всемирного тяготения

...

Программа написана на языке программирования C#. В каждом из разделов, используя разработанное приложение для подготовки к ЕГЭ по физике, учащийся может ознакомиться с теоретическим материалом и заданиями по выбранной теме. На рисунке 2 представлен главный экран раздела «Графическое представление информации».

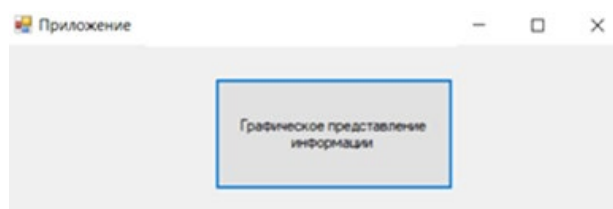


Рис. 2. Главный экран раздела «Графическое представление информации»

После перехода с главного экрана учащимся предоставляется возможность повторить теоретический материал и выбрать задания из списка для решения. Образец задания представлен на рисунке 3.

Даны следующие зависимости величин:  
 А) зависимость модуля перемещения тела от времени при прямолинейном равномерном движении;  
 Б) зависимость температуры твердого тела от времени при охлаждении при постоянной мощности теплоотвода;  
 В) зависимость числа оставшихся ядер от времени при радиоактивном распаде.

Установите соответствие между этими зависимостями и видами графиков, обозначенных цифрами 1–5. Для каждой зависимости А–В выберите соответствующий вид графика и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

Ответ:

| А | Б | В |
|---|---|---|
|   |   |   |

Показать решение

Рис. 3. Образец задания

После решения заданий учащийся имеет возможность проверки своего решения (рис. 4).

**Решение.**  
 А) При прямолинейном равномерном движении зависимость модуля перемещения от времени прямая пропорциональная  $s = vt$ . Данной зависимости соответствует рисунок (2).  
 Б) При охлаждении тела температура уменьшается. Графиком зависимости процесса охлаждения является рисунок (5).  
 В) Зависимость числа оставшихся ядер выражается законом радиоактивного распада  $N = N_0 \cdot 2^{-t/T}$ . Графиком данной зависимости является рисунок (1).  
 Ответ: 251.

Рис. 4. Образец решения задания

Таким образом, при подготовке к выпускному экзамену по физике каждый учащийся имеет возможность качественно подготовиться и получить высокий балл при наличии усердия и личной заинтересованности. Сегодня существует значительное число программных продуктов, которые могут ему в этом помочь. Так, применяя рассматриваемое в статье обучающее приложение, можно проработать все разделы физики, представленные на экзамене.

### Литература

1. Быков А.А., Коноплев Д.Ю., Киселева О.М. Анализ подготовки абитуриентов к изучению курса физики в техническом вузе // *Фундаментальные исследования*. 2013. № 10-13. С. 2944–2948.
2. Быков А.А., Киселева О.М. Перевод традиционной лекции в дистанционный формат // *Современные проблемы науки и образования*. 2021. № 2. С. 75. URL: <https://clck.ru/YNxkZ> (дата обращения: 03.02.2022).
3. Сенчилов В.В., Тимофеева Н.М., Киселева О.М., Быков А.А. Подходы к проектированию дистанционных курсов по обучению математике детей с ограниченными возможностями здоровья // *Мир науки*. 2017. Т. 5, № 4. С. 7.



4. Тимофеева Н.М. О цифровых технологиях из арсенала современного преподавателя // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи. Киров, 2020. С.108–113.

5. Ибрагимова М.Р., Козлов С.В. Разработка образовательного приложения «Четырехугольники» средствами языка программирования С# // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. 2019. С. 98–103.

6. Лебедева Е.А., Козлов С.В. Содержание и особенности разработки учебно-методического проекта по математике «Системы линейных уравнений» в среде программирования С# // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. 2019. С. 161–166.

7. Пешко Ю.С., Киселева О.М. Содержание и особенности демонстрационно-контролирующей программы «Треугольники» // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. Вып. 21. С. 399–404.

8. Тимофеева Н.М. О структурировании и наглядном представлении информации в виде интеллект-карт средствами онлайн-сервисов // Системы компьютерной математики и их приложения. 2019. Вып. 20. Ч. 2. С. 214–218.

9. Киселева О.М. Применение методов математического моделирования в обучении: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Смоленск, 2007.

10. Козлов С.В., Быков А.А. Применение методов математического моделирования для диагностики знаний школьников // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 4. С. 157–162.

11. Киселева О.М., Тимофеева Н.М. Построение концептуальной модели учебных словарей по педагогическим дисциплинам // Концепт. 2013. № 3. С. 3216–3220.

12. Киселева О.М. Сенькина Г.Е. Применение методов математического моделирования в педагогике // Вестник Поморского университета. 2007. № 3. С. 32–36.

13. Тимофеева Н.М. Попытка формализации педагогической науки путем систематизации её терминосистемы // Информатика и образование. 2008. № 4. С. 105–107.

14. Тимофеева Н.М. Проектирование учебных словарей по педагогическим дисциплинам: дис. ... канд. пед. наук. Смоленск, 2004. 215 с.

**A.Y. Borozdina, O.M. Kiseleva**  
Smolensk State University

## **FEATURES OF THE DEVELOPMENT OF A TRAINING APPLICATION FOR PREPARING FOR THE UNIFIED STATE EXAM IN PHYSICS**

**Keywords:** *educational information system, Unified State Exam in physics, distance learning.*

**Abstract.** *This paper describes an educational application for preparing students for the Unified State Exam in physics. As a basis for the development, a graph model of theoretical material is used, a fragment of which is also presented in the article.*

## **ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ ЦИФРОВИЗАЦИИ**

Ключевые слова: *информационное образовательное пространство, цифровизация, дистанционное обучение, адаптивность, гибкость, педагогическое проектирование.*

*В статье рассматривается информационное образовательное пространство на современном этапе цифровизации, характеризующемся в первую очередь переходом к дистанционному обучению на основе новых информационно-коммуникационных технологий. Рассматриваются основные вызовы, с которыми сталкивается система образования. В качестве ведущей выделяется проблема готовности субъектов информационного образовательного пространства к обучению и профессиональной деятельности в новых условиях. Делается вывод о важности принципов адаптивности и гибкости при проектировании информационного образовательного пространства. Также отмечается значительный потенциал реализации идей инклюзивного образования в новых условиях.*

В настоящее время в области теории и практики образования происходят процессы, характеризующиеся высокой динамикой и значительным масштабом происходящих изменений. Цифровизация, проходившая на протяжении уже достаточно значительного времени, получила начиная с 2020 года существенное ускорение. Пандемия и сопутствующие ей социальные ограничения привели к практически мгновенному переходу систем образования большинства стран мира в новый формат работы, характеризующийся прежде всего доминированием дистанционного обучения на основе цифровых образовательных платформ. Изменения, которые в существенной степени опирались на значительные достижения последних десятилетий в области подходов к формированию и использованию информационного образовательного пространства, были введены в педагогическую практику стремительно, как реакция на чрезвычайные обстоятельства, имеющие внешнее по отношению к системе образования происхождение (пандемию). Собственно, состоявшийся переход к дистанционному обучению описывается многими авторами как «дистанционное обучение в чрезвычайной ситуации» (emergency distant learning) [1].

Переход к дистанционному обучению на основе новых информационно-коммуникационных технологий придаёт учебному процессу новые качества и предоставляет образовательным организациям новые возможности по организации обучения. С другой стороны, чрезвычайный и экстренный характер произошедших изменений приводит к возникновению неоднозначной ситуации. Актуализируются и становятся предметом научной рефлексии новые проблемы. Обобщая результаты соответствующих исследований, можно отметить, что доминирующим вызовом в настоящих условиях является недостаточный уровень готовности обучающихся и преподавателей к обучению и профессиональной деятельности в учебной среде, основанной на современных онлайн-платформах.

На основе анализа обширного эмпирического материала А.П. Агилера-Эрмида отметила доминирование у обучающихся негативных впечатлений, вызванных включением в онлайн-обучение в условиях пандемии [1]. Естественный вопрос о путях преодоления этой проблемы привёл данного исследователя к выводу о необходимости поиска комплексного решения в рамках всей системы образования: «внедрение среды онлайн-обучения – это не только технический вопрос, но также педагогическая и институциональная проблема» [1]. Отметим, что в рамках такого подхода приобретает особое значение процесс педагогического проектирования информационного образовательного пространства, структуру и содержание которого мы анализировали ранее [2].

И Думанис с соавторами рассматривает специфику воздействия онлайн-образовательных платформ как актуальной формы информационного образовательного пространства, на учебный процесс в условиях пандемии [3]. В качестве одного из основных недостатков, присущих процессу обучения в новых условиях, они отмечают «ограниченную степень погружения» обучающегося в учебную деятельность, снижающую потенциальный позитивный эффект обучения [3]. Недостаточное «погружение» приводит к проблемам с мотивацией и плохому усвоению учебного материала. Отметим, что достижение ситуации, в которой информационное образовательное пространство будет «пространством личностного развития учащихся» [2] позволяет существенно увеличить степень погружения обучающихся в образовательную среду. Средством достижения такой ситуации выступает соответствующая организация процесса педагогического проектирования информационного образовательного пространства. При этом создаются также предпосылки для использования технологических инструментов, позволяющих увеличить степень «погружения». К таким инструментам относятся, например, технологии дополненной и виртуальной реальности [3].

М.А. Аль Мамун с соавторами особо акцентируют внимание на придании информационному образовательному пространству таких свойств, как адаптивность и гибкость. Они призывают «внедрить [в педагогическую практику] среду, которая является гибкой и дифференцированной для индивидуальных потребностей учащихся в обучении» [4]. Необходимо отметить, что принципы адаптивности и гибкости, которые мы постулировали ранее [2], в новых условиях приобретают ещё большее значение.

Согласно взглядам М.А. Аль Мамун с соавторами, педагогическое проектирование (рассматриваемое применительно к процессу создания гибкого и адаптивного образовательного пространства) должно включать в себя компоненты, обеспечивающие следующие основные функции [4] «предсказание», «наблюдение», «объяснение» и «оценивание».

Наряду с анализом проблем и вызовов, в педагогической литературе отражены также и положительные стороны перехода на дистанционное обучение на основе современных интернет-платформ.

Д. Аль-Фрайхат с соавторами выделяют основные «детерминанты воспринимаемой удовлетворенности» дистанционным обучением на основе современных цифровых образовательных платформ [5]:

- технические качества системы;
- качество учебной информации, представленной в системе;
- качество технического и организационного обслуживания системы;
- качество системы поддержки обучающихся в процессе обучения в системе;
- «качество обучаемого» под которым понимается в первую очередь степень готовности к дистанционному обучению на основе современных цифровых образовательных платформ;
- «качество преподавателя» под которым понимается прежде всего степень готовности к профессиональной деятельности в условиях использования современных цифровых образовательных платформ;
- предполагаемая полезность образовательного контента для обучающихся.

Произошедшие в последнее время масштабные изменения в педагогической теории и практике позволяют по-новому рассмотреть отдельные аспекты проектирования и функционирования информационного образовательного пространства. Решение проблемы обеспечения готовности субъектов этого пространства к учебной и профессиональной деятельности в новых условиях требует прежде всего анализа специфики данных субъектов. Большинство исследователей в таком качестве выделяют только обучающихся и преподавателей, но мы полагаем, что данный список должен быть расширен. При этом представляется методологически полезным проведённое нами ранее

выделение трёх основных групп этих субъектов, относящихся к образовательной среде, профессиональной среде и социальной среде [6]. Каждая из групп требует отдельного анализа и соответствующих технологий и инструментов для формирования готовности к деятельности в новых условиях.

Также заметим, что в условиях дистанционного обучения на основе новых информационно-коммуникационных технологий создаются значительные предпосылки для реализации идей инклюзивного обучения [7]. Необходимым условием эффективности реализации модели инклюзивного обучения также будет обеспечение должного уровня готовности обучающихся.

Информационное образовательное пространство в условиях «дистанционного обучения в чрезвычайной ситуации» демонстрирует важность принципов адаптивности и гибкости и значительный потенциал реализации идей инклюзивного образования. Основным вызовом является уровень готовности субъектов пространства к учебной и профессиональной деятельности. Обеспечение необходимого уровня готовности должно быть в фокусе внимания в процессе педагогического проектирования информационного образовательного пространства.

### Литература

1. Aguilera-Hermida, A. P. College students' use and acceptance of emergency online learning due to COVID-19 // *International Journal of Educational Research Open*. Vol. 1, 2020. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2020.100011> (дата обращения: 10.01.2022).
2. Бояринов Д.А. Педагогическое проектирование информационного образовательного пространства личностного развития учащихся // *Фундаментальные исследования*. 2014. № 12–2. С. 379–383.
3. Doumanis Ioannis., Economou D., Sim G.R., Porter S. The impact of multimodal collaborative virtual environments on learning: A gamified online debate // *Computers & Education* 130 (2019). URL: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.09.017> (дата обращения: 10.01.2022).
4. Al Mamun M.A., Lawrie G., Wright T. Instructional design of scaffolded online learning modules for self-directed and inquiry-based learning environments // *Computers & Education* 144 (2020). URL: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103695> (дата обращения: 10.01.2022).
5. Al-Fraihat D., Joy M., Masa'deh R., Sinclair J. Evaluating E-learning systems success: An empirical study // *Computers in Human Behavior* 102 (2020) 67–86. URL: <https://doi.org/10.1016/j.chb.2019.08.004> (дата обращения: 10.01.2022).
6. Бояринов Д.А. Адаптивное образовательное пространство // *Современные проблемы науки и образования*. 2014. № 1. URL: <http://www.science-education.ru/115-12248> (дата обращения: 10.01.2022).
7. Бояринов Д.А. Реализация идей инклюзивного образования в условиях информационного образовательного пространства // *Современные проблемы науки и образования*. 2015. № 6. URL: <http://www.science-education.ru/130-23329> (дата обращения: 10.01.2022).

**D.A. Boyarinov**  
Smolensk State University

## **INFORMATION EDUCATIONAL ENVIRONMENT AT THE MODERN STAGE OF DIGITALIZATION**

**Keywords:** *information educational environment, digitalization, distance learning, adaptability, flexibility, pedagogical design.*

**Abstract.** *The article deals with the information educational environment at the modern stage of digitalization, characterized primarily by the transition to distance learning based on new information and communication technologies. The main challenges faced by the education system are considered. The leading problem is the problem of readiness of the subjects of the information educational environment for learning and professional activities in the new conditions. The conclusion is made about the importance of the principles of adaptability and flexibility in the design of information educational space. The significant potential for the implementation of the ideas of inclusive education in the new conditions is also stated.*

**А.С. Винокурова**  
Смоленский государственный университет

УДК 378

## **ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВИДЕОУРОКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В УНИВЕРСИТЕТЕ**

Ключевые слова: *видеоуроки, дистанционное обучение, высшая математика, интегрирование путем разложения, интегрирование путем подстановки, интегрирование по частям, приложения определенного интеграла, несобственные интегралы, основные понятия функций нескольких переменных, предел и непрерывность функций нескольких переменных, частные производные, полный дифференциал.*

*В статье освещается опыт создания видеоуроков по высшей математике для студентов технических специальностей. Проводится анализ реализации обучения с использованием этой технологии.*

С развитием информационных технологий возникают новые перспективные формы обучения – вебинары, видеоуроки. В период пандемии умение создавать видеоуроки стало необходимостью для

многих преподавателей. В данной статье описывается трехгодичный эксперимент внедрения видеоуроков по высшей математике в обучение студентов технических специальностей, рассказывается об используемых технологиях, программах, о плюсах и минусах реализации.

*Видеоурок* – это дистанционная форма обучения, с помощью которой можно изменить классическую форму преподавания в вузе, заменив чтение лекций преподавателем у доски записью этого действия на видеокамеру или действиями с голосом на компьютере [1].

Для разработки высококачественных видеозанятий по высшей математике необходимы глубокие знания из разных областей: помимо собственно предметной области, требуются знания дидактических и методических аспектов восприятия учебного видео, операторское искусство, базовые знания режиссуры, монтажа, компьютерной анимации, скринкастинга [2].

### **Необходимость внедрения видеоуроков в процесс обучения**

Создание видеоуроков началось в 2019 году. Стимулом послужило существенное сокращение в учебных планах аудиторных часов работы со студентами (порядка 20%) и перенос их в раздел самостоятельного обучения. При этом предполагаемый объем требований к объему знаний и умений студентов не уменьшился. Лекции данными видеоуроками не заменялись, а дополнялись в качестве практической части.

### **Техническое и программное обеспечение**

Видеоуроки записывались рукописно стилусом на ноутбуке (с установленной операционной системой Windows) с сенсорным экраном. В видеозаписи делались вставки готового графического материала. Для записи аудиосопровождения встроенный микрофон ноутбука не подошел, так как он улавливал звуки стилуса. От профессионального микрофона (без применения усилителя / предусилителя) пришлось отказаться, так как значение соотношения сигнал / шум оказалось недостаточным. Оптимальным вариантом стал микрофон выносной web-камеры Logitech. Камера оснащена стереомикрофонами (по обе стороны от камеры), она отлично снижала фоновый шум, улавливая реалистичные звуки, делая их громче и четче. В качестве программного обеспечения использовалась платная программа «BandiCAM». Она выполняла захват и запись с экрана видео с голосовым сопровождением. Выкладывались видеоролики на канале сервиса «YouTube» (канал «Анна Винокурова - Царева-»).

### **Алгоритм создания видеоролика**

Для каждого занятия создавался плейлист. В первой записи демонстрировались базовые понятия и методы, необходимые для успешного выполнения задач. Далее шли записи разборов задач, длительность каждой не превышала 15 минут (максимальная длительность для бесплатного размещения роликов в «YouTube»). Если

времени на разбор задачи требовалось больше, то видеоролик разбивался на несколько отдельных видеоклипов с помощью программы видеомонтажа «Avidemux». Каждая видеозапись начиналась с постановки задачи. Далее шло подробное решение с комментированием.

### **Первый этап эксперимента**

В 2019 году состоялся запуск проекта. Первые видеоуроки создавались по теме «Интегрирование». Лекции велись в аудитории. Практические занятия по темам «Интегрирование путем разложения» (22 видео), «Интегрирование путем подстановки» (13 видео), «Интегрирование по частям» (22 видео) были выложены для студентов на канале. Контроль изучения осуществлялся с помощью проверки наличия конспекта. В ходе этого эксперимента было выявлено, что количество просмотров не соответствовало количеству студентов в группе. Многие учащиеся предпочли списать конспект без прослушивания пояснений. Интерес к просмотру видеоуроков от занятия к занятию уменьшался и последние видео были просмотрены единицами студентов. Более ответственные учащиеся просмотрели, законспектировали, дали ценные советы и высказали замечания. Оставшиеся практики по теме «Интегрирование» выявили, что большая часть группы так и не освоила основные приемы. Таким образом, практическое использование видеоуроков в курсе «Высшей математики» показало возможность применения этой технологии как дополнительного средства, однако в полной мере заменить классические уроки с преподавателем не позволило.

### **Второй этап эксперимента**

В связи с переходом на дистанционное обучение в 2020 году практика использования видеоуроков была возобновлена. В этот период значительно пополнилась коллекция видеоматериалов такими темами, как «Приложения определенного интеграла» (18 видео), «Несобственные интегралы» (17 видео), «Основные понятия функций нескольких переменных» (17 видео), «Предел и непрерывность функций нескольких переменных» (17 видео), «Частные производные, полный дифференциал» (11 видео). Необходимость получения знаний студентами в условиях отсутствия непосредственных контактных занятий привела к значительному росту популярности видеоуроков. Доля студентов, просматривающих видеозаписи, возросла примерно в три раза. Самообучение студентов было организовано в рамках видеоуроков. Контроль осуществлялся в виде итогового теста и просмотра электронных копий конспектов. Эксперимент показал, что студенты в течение семестра не могли правильно организовать свою работу с видеоуроками: откладывали её на вечернее, иногда ночное время, а максимальное количество просмотров наблюдалось непосредственно перед выполнением контрольных тестов.



### **Третий этап эксперимента**

Негативные моменты, отмеченные в 2020 году, привели к изменению формы дистанционной работы со студентами в 2021. Конспектирование видеоуроков сопровождалось проведением групповых онлайн-занятий посредством платформы «Skype». На онлайн-уроках разбирались примеры базового уровня, в видеоуроках был представлен полный спектр (от самых простых до очень сложных) заданий. Хотелось бы отметить, что при наличии традиционной формы общения с преподавателем интерес к просмотру видеоуроков сохранялся только у мотивированных обучающихся.

### **Выводы**

Несмотря на большой спектр преимуществ видеоуроков, таких как:

- 1) свобода выбора времени изучения материалов;
- 2) общедоступность (требуется только возможность выхода в Интернет без дополнительных регистраций);
- 3) возможность в отсутствие живого общения с преподавателем вербально получать информацию;
- 4) четкое соответствие последовательности видеоматериалов рабочей программе дисциплины;
- 5) возможность повторного просмотра учебного материала, что особенно актуально в период ускоренной подготовки к сдаче экзаменов;
- 6) применение видеоматериалов для углубленного изучения предмета мотивированными студентами,

видеоуроки не могут заменить традиционную контактную форму обучения высшей математике [2]. Большинство студентов лучше усваивают материал при непосредственном классическом общении с преподавателем в рамках практических и лекционных занятий, что связано с наличием обратной связи. Студент – не пассивный зритель и слушатель, а действующее лицо в организованном преподавателем процессе. Обучение же с использованием видеоуроков требует от студентов усилий для самоорганизации, что в большей степени подходит для мотивированных студентов.

*Примечание. За три года реализации проекта «Видеоуроки по высшей математике» было создано более 140 учебных видеороликов по темам «Интегрирование», «Теория функций нескольких переменных», канал собрал более 20 000 просмотров. [3]*

Выражаю благодарность проф. Г.Е. Сенькиной, беседы с которой значительно улучшили статью.

### **Литература**

1. Чалиев А.А. Видеоурок как перспективная информационная технология обучения в вузах // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 5. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=15233>.

2. Учебное видео и качество обучения в ВУЗе. НИУ КГТУ им. А.Н. Туполева  
<https://eto.kai.ru/files/2015/08/Video.pdf>.

3. <https://www.youtube.com/channel/UCtCzArOp8Z7DzvGphd5uWBw/playlists>.

**A.S. Vinokurova**  
Smolensk State University

## **EXPERIENCE OF USING VIDEO TUTORIALS WHEN TEACHING STUDENTS HIGHER MATHEMATICS AT THE UNIVERSITY**

**Keywords:** *Video tutorials, distance learning, higher mathematics.*

**Abstract.** *The article highlights the experience of creating video tutorials in higher mathematics for students of technical specialties. The analysis of the implementation of training using this technology is carried out.*

**А.В. Дюндин, Н.Н. Савченкова**  
Смоленский государственный университет

УДК 378.146

## **ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМИ СЕТЕВЫМИ РЕСУРСАМИ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Ключевые слова: *дополнительное образование, дистанционное обучение, сетевой образовательный ресурс, метапредметные результаты освоения образовательной программы.*

*В работе рассмотрены методы организации обучения с использованием сетевых образовательных ресурсов в системе дополнительного образования.*

Современные тенденции общественного развития порождают новые и все более жесткие требования как к подрастающему поколению, так и к населению средней возрастной группы. Постоянно увеличивающийся объем информации, разные формы ее представления, значительные изменения номенклатуры профессий требуют новых подходов к системе образования, и на первые роли выходит готовность и способность человека осваивать новые знания практически без отрыва от основных

видов деятельности. В связи с этим возрастает роль дополнительного образования.

Под дополнительным образованием будем понимать образование детей и взрослых, которое «направлено на формирование и развитие творческих способностей детей и взрослых, удовлетворение их индивидуальных потребностей в интеллектуальном, нравственном и физическом совершенствовании, формирование культуры здорового и безопасного образа жизни, укрепление здоровья, а также на организацию их свободного времени» [6]. Такое определение является довольно широким, и в данной работе мы будем рассматривать его только в аспекте удовлетворения индивидуальных потребностей в интеллектуальном совершенствовании учащихся средней и старшей школы.

В структуре дополнительного образования выделяют «дополнительное образование детей и взрослых и дополнительное профессиональное образование» [6], и, как указано выше, мы рассматриваем первую его составляющую.

В качестве одной из основных причин повышенного интереса к дополнительному образованию мы выделяем несоответствие уровня обучения, которое дает выпускникам большинство общеобразовательных школ, требованиям ЕГЭ и вузов. На причинах этого несоответствия в данной работе мы останавливаться не будем.

Дополнительное образование в соответствии с запросами ученика осуществляют организации разного рода, от частных школ и образовательных центров, до подразделений вузов и частных лиц. Выбор того или иного учреждения осуществляется по целому ряду параметров. В качестве наиболее важных из них выделим наличие положительной репутации и приемлемую стоимость обучения. Отдельно отметим, что услуги дополнительного образования, предлагаемые общеобразовательными школами, зачастую остаются невостребованными. Основные формы описанных выше организаций дополнительного образования и их особенности рассмотрены нами ранее [1].

Наиболее распространёнными причинами обращения учащихся к системе дополнительного образования являются:

- проблемы с изучением отдельных тем выбранного предмета;
- необходимость более глубокого изучения одной из дисциплин;
- желание подготовиться к олимпиаде или конкурсу;
- потребность в интенсивной подготовке к итоговой аттестации по одному или нескольким предметам.

Отметим, что в дополнительном образовании преподаватель не привязан жестко к программе, и существует возможность более полного учета индивидуальных потребностей ученика, так как обучение чаще всего ведется в малых группах.

В рамках действующих эпидемиологических ограничений дополнительное образование реализуется не только в очном формате, но и в форме дистанционного (или электронного) обучения. В статье 16 закона об образовании электронное обучение определяется как «организация образовательной деятельности с применением содержащейся в базах данных и используемой при реализации образовательных программ информации и обеспечивающих ее обработку информационных технологий, технических средств, а также информационно-телекоммуникационных сетей, обеспечивающих передачу по линиям связи указанной информации, взаимодействие обучающихся и педагогических работников» [6]. В дальнейшем мы все же будем использовать термин «дистанционное обучение», рассматривая его как синоним электронного из указанного выше закона.

Основные теоретические вопросы, связанные с дистанционным обучением и его организацией, подробно рассмотрены в различных работах Е.С. Полат, например [4], и на них мы останавливаться не будем.

Дистанционная форма реализации дополнительного образования позволяет увеличить количество учащихся, однако на практике более эффективной является комбинация очной и дистанционной форм обучения.

Обучение в системе дополнительного образования не только служит достижению конкретных целей, поставленных заказчиком, но и развивает предусмотренные ФГОС метапредметные умения, например, «готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, владение навыками получения необходимой информации из словарей разных типов, умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников», «владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания» [5].

Для реализации поставленных заказчиком задач одним из необходимых условий является наличие доступных учебных пособий и сборников дидактических материалов, причем с актуальным и современным содержанием. В наибольшей степени таким требованиям соответствуют в настоящее время материалы, представленные в сетевых изданиях. Таким образом, на первый план выходит формирование и описание методики организации работы с данными ресурсами.

Для обеспечения эффективной работы необходимо предоставить доступ к комплексу сетевых ресурсов со следующим минимальным содержанием:

- лекции с разбором теоретического материала;

- планы-конспекты изучаемого материала;
- дидактические материалы по заданной тематике;
- ресурсы для контроля результативности.

Приведенный выше перечень минимально необходимого можно многократно дополнять, но это не является основной целью данной работы. При необходимости с данными материалами можно ознакомиться, например, в работе Н.А. Максимовой [2] или В.П. Ущeko в [3].

Основной формой работы с учащимися по-прежнему остается очная, но для организации их самостоятельной работы и повышения эффективности учебной деятельности часто используются именно сетевые ресурсы. Характерной особенностью последних нередко является их избыточность в отношении излагаемого материала. Этот подход к содержанию («с запасом»), с одной стороны, позволяет расширить целевую аудиторию, а с другой стороны во многом затрудняет применение подобных материалов неподготовленным пользователем.

В идеальном варианте все сетевые ресурсы должны разрабатываться коллективом учреждения, реализующего программу дополнительного образования. Только в этом случае возможно учесть всю специфику обучения по тому или иному направлению. Однако подобное на практике осуществляется редко и реализуется только крупными центрами, организациями с большими коллективами и бюджетами. В реальности используются уже имеющиеся в свободном доступе ресурсы с уточнением условий и последовательности их изучения конкретной аудиторией слушателей.

Подача основного теоретического материала, как правило, осуществляется преподавателем в очном формате при непосредственном взаимодействии с обучающимися. Дополнительный материал может быть предложен для самостоятельного изучения с помощью ограниченного набора доступных источников и с обязательным последующим контролем. Со временем при удачном опыте освоения можно постепенно увеличивать самостоятельно изучаемую часть материала, обязательно осуществляя при этом выборочный контроль.

В процессе овладения методами решения тех или иных задач учащиеся также первоначально получают материал непосредственно от учителя, постепенно осваивая предлагаемые сетевые ресурсы с необходимыми методами. Таким образом, реализуется трехуровневая система работы с сетевыми материалами, по итогам которой учащиеся начинают самостоятельно отбирать материалы по заданию преподавателя, овладевая метапредметными умениями на высоком уровне.

В процессе организации работы слушателей с сетевыми источниками первоочередной задачей является отбор ресурсов в соответствии с задачами обучения и их первоначальная оценка, а также организация

контроля, причем на первом этапе обязательно в очном режиме, с указанием ошибок, неточностей, границ применимости и др.

Подводя итоги, можно выделить следующие уровни развития в организации работы с сетевыми образовательными ресурсами:

- начальный – работа преимущественно с преподавателем, демонстрация работы с сетевым контентом;
- совмещенный – изучение части материала самостоятельно с контролем за освоением;
- самостоятельный – преимущественно самостоятельная работа с необходимой отчетностью в соответствии с поставленными задачами;
- творческий – работа с самостоятельной постановкой целей и определением путей их достижения.

Отметим, что обычно обучающиеся выходят в лучшем случае на второй из указанных уровней, для достижения третьего или четвертого необходима планомерная работа в течение нескольких лет.

### Литература

1. Дюндин А.В. Организация дистанционной подготовки к ЕГЭ по физике // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XX международной конференции. Смоленск: СмолГУ, 2019. Вып. 20. Ч. 2. С. 185–190.
2. Максимова Н.А. Проблемы проектирования региональных образовательных порталов // Фундаментальные исследования. Педагогические науки. 2014. № 9. С. 1343–1346.
3. Ущeko В.П. Методические аспекты создания курсов дистанционного обучения физике в школе // Вестник Псковского государственного университета. Серия «Естественные и физико-математические науки». 2018. № 12. С. 119–131.
4. Полат Е.С. Дистанционное обучение // Педагогические и информационные технологии в образовании. 2001. № 4. URL: <http://journals.susu.ru/pit-edu/article/view/318> (дата обращения: 01.03.2021).
5. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. № 413) с изменениями и дополнениями от: 29 декабря 2014 г., 31 декабря 2015 г., 29 июня 2017 г., 24 сентября, 11 декабря 2020 г. URL: <https://base.garant.ru/70188902/8ef641d3b80ff01d34be16ce9bafcb6e0> Дата обращения: 09.03.2022.
6. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» N 273-ФЗ от 29 декабря 2012 года с изменениями 2018 года. URL: <http://zakon-ob-obrazovanii.ru>. (дата обращения: 09.03.2022).

**A.V. Dyundin, N.N. Savchenkova**  
Smolensk State University

**WORK ORGANIZATION WITH EDUCATIONAL NETWORK  
RESOURCES IN THE SYSTEM OF EXTENDED EDUCATION**

**Keywords:** *extended education, distance teaching, network learning resource, meta-subject results of learning the educational program.*

**Abstract.** *The article is devoted to the methods of organization of teaching process using network educational resources in the system of extended education.*

**Г.С. Евдокимова, В.И. Усачев**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 519.688

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТОХАСТИКИ В ПАКЕТЕ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ GRETЛ**

Ключевые слова: *информационные технологии, студент, профессиональные навыки, стохастика, свободно распространяемое программное обеспечение, прикладные задачи.*

*В статье рассматривается возможность повышения эффективности решения задач стохастики с помощью информационных технологий. В центре внимания специфика использования пакета прикладных программ GRETЛ. Проиллюстрировано применение этого свободно распространяемого программного обеспечения для проведения регрессионного анализа – одного из часто применяемых методов прикладной статистики.*

В вузе на современном этапе образовательный процесс характеризуется высоким уровнем интенсивности: значительным объемом предлагаемой информации в единицу времени, что предъявляет к методике разработки учебного процесса по некоторым дисциплинам свои требования. А именно, подготовка будущих специалистов не должна осуществляться обособленно от компьютерных технологий. Однако подчеркнем, что информационные технологии хороши тогда, когда они переплетаются с традиционными технологиями обучения. На данный момент насчитывается более 1000 универсальных и специализированных математических пакетов. Анализ статистической базы данных можно осуществлять и посредством табличного редактора Excel и его эквивалентов Calc, Gnumeric. Высокая стоимость в подавляющем большинстве (от 10 000 руб. до 150 000 руб.) порождает спрос на СПО – свободно распространяемое программное обеспечение. В ходе обучения преподавателю надо решить задачу: выбор пакета-помощника. Обратим

внимание на набор объективных критериев, которые могут повлиять на его окончательное решение:

- применяемая программа должна быть установлена на компьютерах в лабораториях учебного вуза и на личном компьютере студента;

- доступность понимания работы с пакетом. Это предусматривает дружеский интерфейс, наличие методической литературы по пакету;

- подбор вычислительных ресурсов, обеспечивающих возможность решения значительного большинства задач стохастики. Плюс высокого качества графика, способствующая наглядности обучения.

Первое требование незамедлительно исключает все коммерческие пакеты. Когда бы такового не было, то пальма первенства могла быть представлена Stadia (или Statistica) [1; 2]. Пакет программ GRETЛ олицетворяет собой инструментарий для фактической реализации непростых вычислительных процедур моделирования. Его автор профессор Аллен Котрелл сделал продукт общедоступным, бесплатным. Данный пакет программ представлен на Интернет-сайтах. Его возможности: описательные статистики, проверка нормальности распределения, доступ к статистическим таблицам, анализ временных рядов, регрессионный анализ, метод главных компонент, экспорт и импорт в Microsoft Excel и текстовые редакторы, построение графиков и др. Интерес к GRETЛ обусловлен следующими факторами. Во-первых, это бесплатный свободно распространяемый пакет, вполне хорошо приспособленный для выполнения сложных расчетов. Во-вторых, он дает возможность осознать всю специфику осваиваемых методов при их осуществлении [3; 4]. Решение многих прикладных задач требует привлечения аппарата регрессионного анализа – одного из часто применяемых методов стохастики, представляющего основу многих других методов этого раздела математики. Регрессионный анализ нуждается в довольно впечатляющем объеме расчетов и проверки ряда гипотез, не реализованных в массово популярных офисных пакетах MS Excel и OpenOffice. Плюс ко всему в них не представлены методы проверки наличия и особенно методы устранения мультиколлинеарности. Все вышеперечисленное требует применения специализированных пакетов, распространяемых по платной лицензии. Но, оказывается, реализацию множественного регрессионного анализа можно осуществить на базе свободно распространяемого пакета прикладных программ GRETЛ. Для освоения способов работы с пакетом GRETЛ можно найти в интернете довольно большое количество учебных пособий и методических разработок. Нужно ли что-то ещё? Опыт показывает, что ДА, с более подробной детализацией необходимых действий. Ниже в качестве иллюстрации предложен такой фрагмент для построения линейной регрессионной модели.



В качестве примера взят файл, в котором анализируются переменные pol1, pol2, rost, vozrast и др.

Модель ищется в виде  $comp = a * vozrast + b$ .

1. Первое – это визуальное представление связи данных в виде графика рассеяния. Вызываем пункт **Меню Вид ► График ► Разброс X–Y ...** (см. рис. 1).

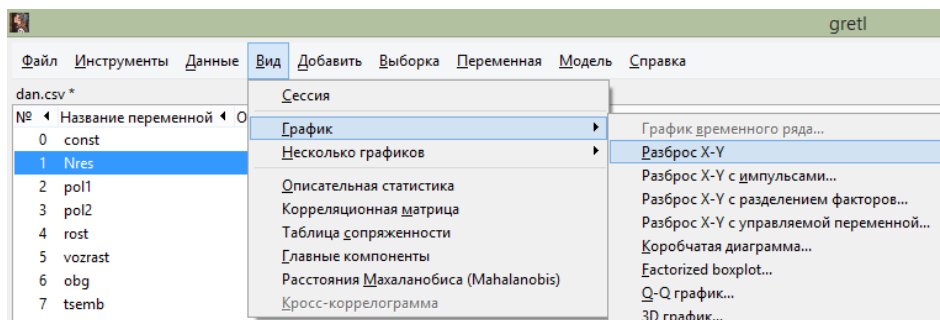


Рис. 1. Меню GRETL

2. Щелчок мышью на пункте **Разброс X–Y ...** приводит к появлению диалогового окна **gretl: график**. Из списка в левой части этого окна выделяем значения переменных X и Y. Отмеченные выборки после нажатия на стрелочки отразятся в правой части окна **gretl: график** (см. рис. 2). «Ок.» И получаем график рассеяния (см. рис. 3).

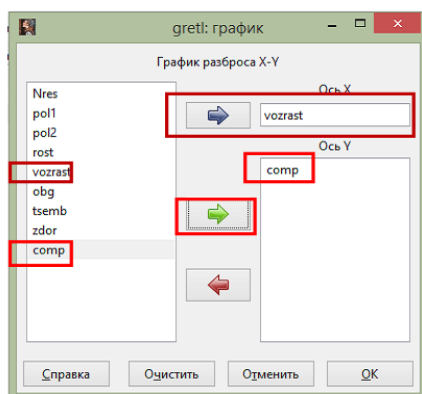


Рис. 2. Окно спецификации графика

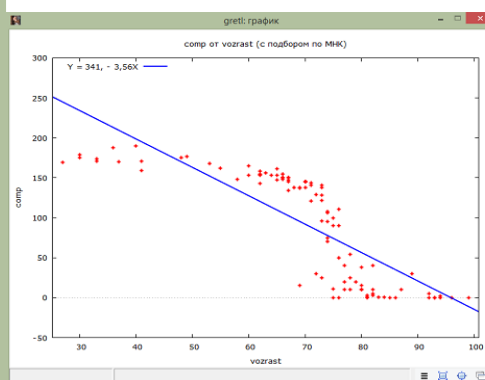


Рис. 3. График рассеяния

3. На следующем шаге начинаем построение линейной модели. Вызываем пункт **Меню Модель ► Ordinary Least Squares** (см. рис. 4).

4. Щелчок мышью на пункте **Ordinary Least Squares** повлечет появление диалогового окна **gretl: спецификация модели** (см. рис. 5). Из списка в левой части этого окна выделяем значения зависимой переменной и регрессора. После чего нажимаем на соответствующие стрелки. Отмеченные выборки отразятся в правой части окна **gretl: спецификация модели**. Наличие в окне «регрессоры» переменной **const** говорит о том, что строится МНК-модель со свободным членом.

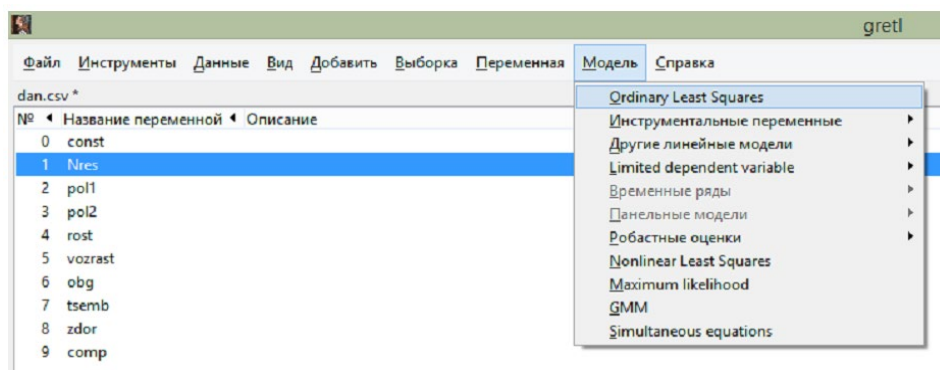


Рис. 4. МНК-модель

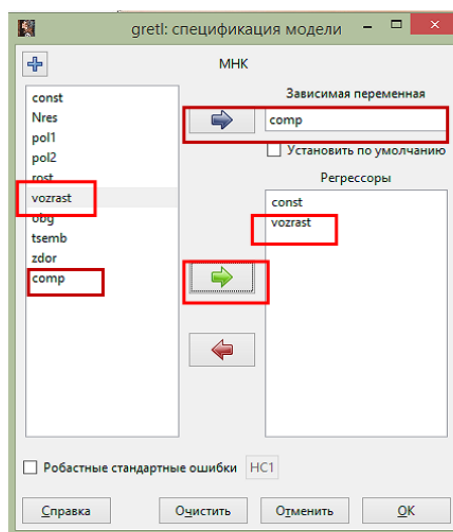


Рис. 5. Спецификация модели

5. После нажатия на «Ок» (рис. 5) получаем следующее окно отчета

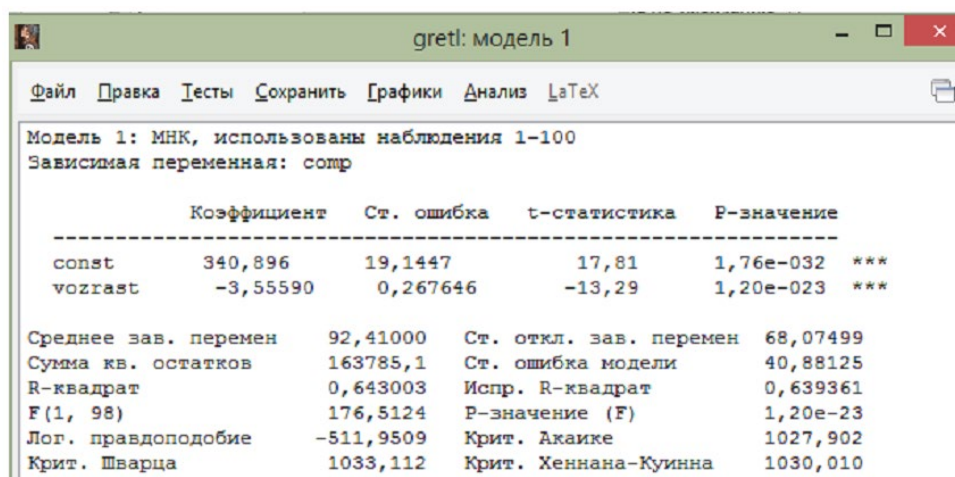


Рис. 6. Основное окно отчета для МНК-модели

Информация в этом окне дает возможность ответить на вопросы о статистической значимости регрессионной модели, ее адекватности, произвести сравнение с другими моделями и т.д.

6. Используя пункты вкладок меню окна отчета (рис. 7), можно просмотреть наблюдаемые и расчетные значения, получить прогнозы, исследовать остатки на нормальность, увидеть результаты тестирования на гетероскедастичность, добавить линейные ограничения и т.д.

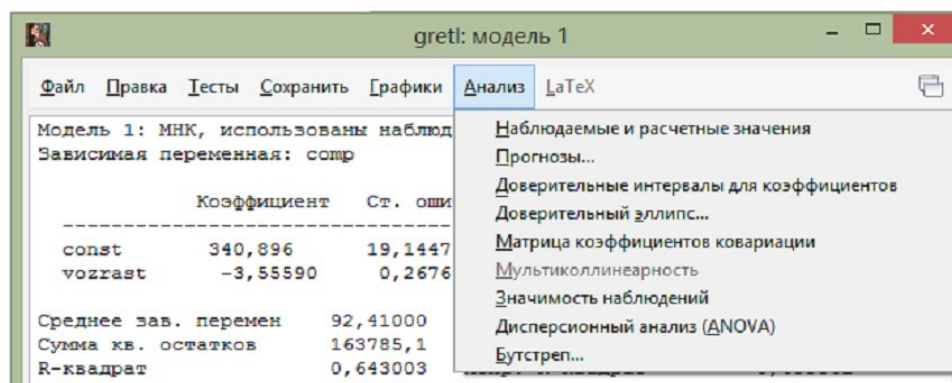


Рис. 7. Дополнительная информация об МНК модели

## Литература

1. Евдокимова Г.С., Усачев В.И. Системы компьютерной математики, используемые при обучении стохастике будущего учителя // Известия Смоленского государственного университета. 2015. № 4. С. 411–420.
2. Евдокимова Г.С., Усачев В.И. Применение систем компьютерной математики в практике обучения стохастике // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов II Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. 2020. Вып. 2. С. 73–79.
3. Исмагилов И.И., Кадочникова Е.И. Многофакторная регрессия в среде Gretl: учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению 38.04.01 «Экономика». Казань: Казанский ун-т, 2016. 62 с.
4. Малова А.С. Основы эконометрики в среде GRETL: учебное пособие. М.: Проспект, 2016. 112 с.

G.S. Evdokimova, V.I. Usachev  
Smolensk State University

## SOLVING STOCHASTIC PROBLEMS IN A PACKAGE GRETL APPLICATION PROGRAMS

**Keywords:** *information technology, student, professional skills, stochastics, freely distributed software, applied tasks.*

**Abstract.** *The article considers the possibility of increasing the efficiency of solving stochastic problems using information technology. The focus is on the specifics of using the GRETL application software package. The use of this freely distributed software for regression analysis, one of the most frequently used stochastic methods, is illustrated.*

## О ФАКТОРАХ, ВЛИЯЮЩИХ НА УСПЕШНОСТЬ ОБУЧЕНИЯ

Ключевые слова: *успешность обучения, факторы, искусственный интеллект, генетический алгоритм.*

*Рассматривается вопрос о влиянии различных факторов на успешность обучения. Отмечается большая трудоемкость алгоритмов, выявляющих ключевые факторы повышения эффективности обучения. Для выяснения ключевых факторов предлагается использовать методы искусственного интеллекта, в частности генетические алгоритмы.*

От каких факторов зависит успешность обучения ученика (ниже под термином «ученик» мы понимаем любого обучающегося – школьника, студента вуза, слушателя курсов повышения квалификации и т.д.)?

Поиски ответа на этот вопрос начались давно – с момента, когда возникла необходимость обучать. В последние годы интерес к этой теме значительно возрос, появилось огромное количество публикаций. Так, в частности, в Яндексе по запросу «Факторы, влияющие на успешность обучения» нашлось 5 миллионов результатов.

Несмотря на обилие публикаций на эту тему, до сих пор исследователи не пришли к единому мнению по поводу набора факторов, влияющих на успешность обучения. Более того, результаты исследований, в которых, по сути, используется похожий инструментарий, зачастую прямо противоположны.

Например, в некоторых публикациях [1; 2; 3] утверждается, что занятия с репетиторами при подготовке к ЕГЭ практически ничего не дают и повышают результат только по русскому языку. Не понятно, откуда следуют такие выводы. Может быть, в этих публикациях рассматривалась деятельность репетиторов, плохо владеющих предметом или не имеющих достаточного опыта преподавания. На основании каких критериев оценивался вклад репетиторов в полученную на экзаменах оценку?

Изучением факторов, влияющих на эффективность обучения, сейчас занимаются многие исследователи. Тема модная, актуальная. Но имеются ли основания для категоричных утверждений о том, что «занятия с репетиторами при подготовке к ЕГЭ практически ничего не дают и повышают результат только по русскому языку» [1; 2; 3]?

Разумеется, что это не единственный фактор, который в различных публикациях оценивается по-разному.

Приведем теперь развернутое описание исследования.

**Проблема исследования.** Проблема заключается в необходимости выявления основных факторов, влияющих на формирование успешности обучения.

**Объект исследования.** Процесс формирования успешности обучения учащихся.

**Предмет исследования.** Факторы, влияющие на формирование успешности обучения.

**Цель исследования.** Определить состояние научного знания по проблеме «Факторы, влияющие на эффективность обучения».

Выяснение, на каком уровне находится изучение данного вопроса, оказалось серьезной проблемой. Во-первых, из-за невозможности просто перечислить факторы, влияющие на эффективность обучения, по причине их большого числа и, во-вторых, из-за сложности определения, какие из факторов являются главными.

**Гипотеза исследования.** Использование искусственного интеллекта для выявления основных факторов, влияющих на формирование успешности обучения, является наиболее рациональным методом.

**Задача исследования.** Предложить оптимальный алгоритм вычисления факторов, влияющих на успешность обучения, с помощью методов искусственного интеллекта.

**Методы исследования.** Анализ литературы по теме исследования и обобщение исследований.

Для определения основных факторов, влияющих на успешность обучения, авторы предложили воспользоваться одним из методов искусственного интеллекта – генетическим алгоритмом. При использовании генетического алгоритма в результате получается совокупность групп факторов, каждая из которых положительно влияет на успешность обучения. В этом заключается привлекательность генетического алгоритма. Наличие нескольких возможных групп факторов позволяет выбрать ту из них, которая наиболее подходит для обучения конкретного контингента учеников.

Ответ на вопрос «От каких факторов зависит успешность обучения?» не является тривиальным. Даже перечень факторов, влияющих на успешность обучения, пока еще полностью не изучен. Трудно предсказать, совокупность каких факторов наиболее сильно влияет на успешность обучения. В литературе перечислено множество факторов, в той или иной степени влияющих на успешность обучения.

Например, финские экономисты провели исследование, чтобы оценить, каким образом изменение размера затрат на образование повлияло на успешность обучения. Авторы исследования взяли за основу данные, собранные с 1990 по 1998 год. При этом для их анализа использовалось 30 контрольных параметров [4; 5].

Очевидно, анализ такого объема данных требует значительных усилий.

В литературе предпринято достаточно много попыток классифицировать факторы, влияющие на успешность обучения. Представляет интерес статья [6], в которой рассматриваются результаты метаанализов из зарубежных источников, посвященных изучению факторов учебной успешности школьников. В качестве важнейшего фактора они выделяют собственные усилия ученика, и утверждают, что вклад самого ученика имеет значительно больший вес, чем другие факторы. По оценке Р. Марцано [7], вес собственных усилий ученика неизмеримо выше всего остального – 87%.

В 2004 году аналогичные вопросы обсуждались в монографии А.Д. Ишкова [8].

В 2017 году вышла на русском языке фундаментальная книга Джона Хэтти [9]. Хэтти обобщил более 800 метаанализов, суммарно содержащих более 50 000 исследований.

Следует отметить, что в большинстве публикаций среди главных факторов учебной успешности ученика исследователи отмечают «желание учиться». Обязательное наличие этого фактора среди прочих настолько очевидно, что в некоторых статьях он даже не упоминается.

Понятно, что набор факторов, влияющих на успешность обучения, зависит от контингента учеников, от учителей, ведущих занятия в данной группе. Ведь не зря говорят, что ученики в школе любят не предметы, а учителей, их преподающих. То же самое, хотя и в меньшей степени, можно сказать и о вузовских преподавателях.

Перейдем теперь к задаче исследования. Как отмечалось выше, решение задачи о факторах, влияющих на эффективность обучения, требует значительных усилий.

Из просмотренных публикаций на эту тему можно сделать вывод, что на данный момент не существует единого мнения относительно того, какие факторы действительно определяют образовательные достижения ученика.

Представляется, что не существует универсального набора факторов учебной успешности, являющегося основным для изучения произвольной предметной области. Для каждой предметной области приходится определять свой конкретный набор основных факторов учебной успешности.

Для определения основных факторов требуется:

- 1) перечислить совокупность  $M$  факторов, которые предположительно могут повлиять на успешность обучения;
- 2) из совокупности  $M$  выбрать подмножество  $K$  факторов, претендующих на основные факторы учебной успешности;
- 3) найти основные факторы.

Выбор основных факторов из множества факторов  $K$  является трудоемкой задачей. Для ее решения целесообразно воспользоваться компьютером. В качестве метода решения задачи мы предлагаем воспользоваться методами искусственного интеллекта, а именно генетическим алгоритмом.

Генетический алгоритм моделирует феномен естественной эволюции. При естественной эволюции выживают и дают самое многочисленное потомство особи, наиболее адаптированные к сложным условиям окружающей среды.

Генетический алгоритм не пытается оптимизировать единственное решение. Он работает с группой решений, которые кодируются подобно хромосомам.

При вычислении основных факторов методом генетического алгоритма мы получаем совокупность групп факторов, каждая из которых положительно влияет на успешность обучения. В этом заключается привлекательность генетического алгоритма. Наличие нескольких возможных групп факторов, повышающих эффективность обучения, предоставляет свободу выбора преподавателю, организующему обучение учеников.

Более того, результативность воздействия группы факторов на эффективность обучения может быть сильнее (или слабее), чем простая сумма эффективностей отдельных факторов. Учет группового воздействия факторов на эффективность обучения является вторым достоинством генетического алгоритма.

Поясним работу генетического алгоритма на примере.

Пусть имеется некоторый набор факторов, от которых, по нашему мнению, зависит успешность обучения. В рамках генетического подхода факторы называют генами, а весь их набор для конкретной особи – хромосомой. Вся информация о значениях факторов и оценки результатов обучения хранятся в таблице (рис. 1). Здесь  $a_{ij}$  – значение фактора  $A_j$  для объекта  $i$ ;  $O_i$  – оценка хромосомы  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$ , соответствующей объекту  $i$ .

| Факторы (гены) | Объект 1 | Объект 2 | ... | Объект $n$ |
|----------------|----------|----------|-----|------------|
| $A_1$          | $a_{11}$ | $a_{21}$ | ... | $a_{n1}$   |
| $A_2$          | $a_{12}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{n2}$   |
| ...            | ...      | ...      | ... | ...        |
| $A_m$          | $a_{1m}$ | $a_{2m}$ | ... | $a_{nm}$   |
| Оценка         | $O_1$    | $O_2$    | ... | $O_n$      |

Рис. 1. Гены, хромосомы, оценки

В примере мы ограничимся рассмотрением объектов с хромосомами  $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ , содержащими три гена. В литературе, как правило, в примерах используются хромосомы с двумя генами. По мнению авторов,

при таком подходе у исследователей возникают сложности с переходом к обработке хромосом с большим числом генов (например, на этапе перемешивания).

В общем случае можно выделить следующие этапы генетического алгоритма.

1. Задание целевой функции (функции пригодности) для особей (хромосом). Функция пригодности - это функция, которая принимает на вход параметры особи и выдает решение о приспособленности особи к существованию в данной предметной области.

2. Инициализация (выбор начальной популяции).

3. Вычисление значения целевой функции для всех особей.

4. Кроссовер.

5. Мутация.

6. Формирование нового поколения (селекция).

7. Если выполняются условия остановки, то завершить цикл, иначе перейти к выполнению пункта 3.

Смысл этих шагов поясним на примере.

1. Задание целевой функции. Пусть  $(x, y, z)$  вектор над множеством целых чисел больших  $-10$ . Покажем, как найти вектор, на котором некоторая целевая функция, например, функция  $f(x, y, z) = x \times y - z$ , принимает наименьшее значение.

2. Инициализация. Для начальной популяции случайным образом зафиксируем четыре особи (рис. 2).

|    |   |    |    |
|----|---|----|----|
| 1  | 3 | 0  | 1  |
| 2  | 2 | -1 | 0  |
| 3  | 1 | -1 | -6 |
| -1 | 5 | 1  | 6  |

Рис. 2. Инициализация популяции

3. В нижней строке таблицы для каждой особи вычислим значение функции пригодности (рис. 2).

Так как в задаче требуется найти особь с минимальным значением функции пригодности, то наиболее приспособленной для жизни является особь с минимальным значением функции  $f$ .

4. Для реализации генетического алгоритма нам нужно задать схему скрещивания (кроссовера).

Схема кроссовера выбирается произвольно. Главное, чтобы в новой популяции гены особи наиболее приспособленной для жизни присутствовали в наибольшем количестве.

Рассмотрим схему кроссовера для популяции из четырех особей.

В начальной ситуации располагаем особи  $A, B, C, D$  в порядке их приспособленности для жизни (рис. 3). Для нашего примера особь  $A$



имеет наименьшее значение функции, особь  $D$  имеет наибольшее значение функции  $f$ .

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| $A$  | $B$  | $C$  | $D$  |
| A1   | B1   | C1   | D1   |
| A2   | B2   | C2   | D2   |
| A3   | B3   | C3   | D3   |
| $O1$ | $O2$ | $O3$ | $O4$ |

Рис. 3. Четыре особи, подготовленные к кроссоверу

Кроссовер будем производить по схеме, приведенной на рисунке 4. Особь  $D$  сразу удаляем как наихудшую и заменяем ее новой в соответствии с рисунком 4.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| A1 | A1 | B1 | C1 |
| B2 | A2 | A2 | B2 |
| A3 | B3 | B3 | C3 |

Рис. 4. Четыре особи после кроссовера

После выполнения кроссовера гены лучшей особи  $A$  появились в новой популяции 5 раз, гены второй по пригодности особи  $B$  появились в новой популяции также 5 раз, гены особи  $C$  появились 2 раза.

Применим кроссовер к начальной популяции (рис. 2). Подготовленная к кроссоверу популяция приведена на рисунке 5.

|     |     |     |  |
|-----|-----|-----|--|
| $A$ | $B$ | $C$ |  |
| 1   | 1   | 0   |  |
| 2   | 0   | -1  |  |
| 3   | 1   | -1  |  |

Рис. 5. Начальная популяция, подготовленная к кроссоверу

Проведем кроссовер (рис. 6) и вычислим значения целевой функции  $f$  для всех особей.

|    |   |   |    |
|----|---|---|----|
| 1  | 1 | 1 | 0  |
| 0  | 2 | 2 | 0  |
| 3  | 1 | 1 | -1 |
| -3 | 1 | 1 | 1  |

Рис. 6. Новая популяция после кроссовера

Заметим, что после однократного выполнения цикла суммарная оценка популяции улучшилась (была 4, стала 0).

На этом выполнение цикла в примере мы заканчиваем. Следующие итерации цикла выполняются аналогично.

Мутация в приведенном примере не рассматривалась.

После знакомства с публикациями о влиянии различных факторов на успешность обучения учеников [6; 7; 9] авторы пришли к выводу, что

единого мнения по этому вопросу еще не выработано:

1) не существует универсального набора факторов учебной успешности, являющегося основным для изучения произвольной предметной области;

2) для каждой предметной области приходится определять свой конкретный набор основных факторов учебной успешности.

Единственным фактором, относимым большинством исследователей к числу наиболее значимых, является желание ученика получить знания, его мотивированность.

С другой стороны, знание факторов, влияющих на успешность обучения в заданной предметной области, может значительно облегчить обучение за счет акцентирования внимания на самых значимых из них.

Вычисление групп факторов, влияющих на успешность обучения в конкретной предметной области, является трудоемкой задачей. Для ее решения авторы предложили использовать методы искусственного интеллекта, в частности генетические алгоритмы.

В качестве иллюстративного примера рассмотрена задача поиска минимума для некоторой трехместной функции. Для решения задачи предложен генетический алгоритм обработки группы особей с тремя генами. Выбор особей с тремя генами (а не с двумя, как в большинстве публикаций) обусловлен легкостью обобщения алгоритма на случай особей с  $n$  генами.

При вычислении основных факторов методом генетического алгоритма получается несколько групп факторов, каждая из которых положительно влияет на успешность обучения. В этом заключается привлекательность генетического алгоритма. Наличие нескольких возможных групп факторов, повышающих эффективность обучения, предоставляет свободу выбора преподавателю, организующему обучение учеников.

Более того, результативность воздействия группы факторов на эффективность обучения может быть сильнее, чем простая сумма эффективностей отдельных факторов. Учет группового воздействия факторов на эффективность обучения является вторым достоинством генетического алгоритма.

**Выводы.** Предметом исследования в работе являлись факторы, влияющие на формирование успешности обучения. Выяснилось, что в настоящее время полный перечень таких факторов пока еще не известен. Не известен даже перечень основных факторов, влияющих на формирование успешности обучения. Отмечено, что для различных предметных областей наборы основных факторов, влияющих на успешность обучения, могут быть различны.

Практически значимым результатом исследования является вывод о необходимости вычисления набора основных факторов, влияющих на

успешность обучения, отдельно для каждой изучаемой предметной области.

Другим практически значимым результатом исследования является предложение об использовании генетического алгоритма для вычисления групп основных факторов, влияющих на успешность обучения. Генетический алгоритм позволяет выделять различные группы факторов с учетом их группового воздействия на эффективность обучения.

Отметим, что изучаемая в работе проблема далека от завершения и ждет своих исследователей.

### Литература

1. Zaharov A. (2016). *As a result, the USE affects academic performance and what determines the number of points on the state exam*. URL: <https://www.statusbt.ru/news/ot-senki-po-russkomu-yazyiku-zavisit-uspeshnost-uchebyi-v-lyubom-vuze.html>.

2. Shchipkova E.N. (2018). *Tutoring as a problem of pedagogical science and practice*. DOI 10.24411 / 1813-145X-2018-20005 UDC 374 E.N. Shipkova. URL: <https://orcid.org/0000-0002-9788-1339> Tutoring as a problem.

3. Buslaev A.V. (2019). *9 myths about tutors and tutoring*. <https://foma.ru/devyat-mifov-o-repetitorah-repetitorstve.html>.

4. Häkkinen I., Kirjavainen T., Uusitalo R. (2003) School Resources and Student Achievement Revisited: New evidence from panel data. *Economics of Education Review*, 22, 329–335.

5. Прахов И.А. Влияние института ЕГЭ на образовательные стратегии абитуриентов и доступность высшего образования. ИНИИ НИУ ВШЭ. URL: <https://www.hse.ru/data/2012/09/20/1244887342/20121009-Prakhov-text.pdf>.

6. Вачков И.В., Вачкова С.Н. Факторы повышения учебной успешности школьников (по материалам зарубежных исследований) // Проблемы современного образования. 2018. № 2. Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/factory-povysheniya-uchebnoy-uspeshnosti-shkolnikov-po-materialam-zarubezhnyh-issledovaniy>.

7. Marzano R.J. A new era of school reform: Going where the takes us. Aurora, CO: Mid-Continent Research for Education and Learning. Hattie J. A.C. (1987) Identifying the salient facets of model of student learning: A synthesis of meta-analyses // *International Journal of Education Research*. 1987. Vol. 11 (2). P. 187–212.

8. Ишков А.Д. Учебная деятельность студента: психологические факторы успешности: монография. М.: Издательство АВС, 2004. 224 с.

9. Хэти Дж. А.С. Видимое обучение: синтез результатов более 50 000 исследований с охватом более 86 миллионов школьников / под ред. В.К. Загвоздкина, Е.А. Хамраевой. М.: Национальное образование. 2017. 496 с.

**E.P. Emelchenkov, A.M. Shilyagina**  
Smolensk State University

### ABOUT THE FACTORS INCREASE THE EFFICIENCY OF TRAINING

**Keywords:** *success of training, various factors, artificial intelligence, genetic algorithm.*

**Abstract.** *The question of the influence of various factors on the success of training is considered. A great complexity of algorithms that identify key factors for improving the effectiveness of training is noted in the article. To use artificial intelligence methods, in particular, genetic algorithms to find out the key factors is proposed.*

**С.В. Козлов**

*Смоленский государственный университет*

**А.А. Быков**

*Филиал Национального исследовательского университета «МЭИ»*

*в г. Смоленске*

УДК 004.94:372.8

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ СРЕДСТВАМИ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ**

*Ключевые слова: динамическое программирование, электронные таблицы, математические функции, исполнитель, робот, клеточная карта, оптимальный путь, траектория.*

*В статье обсуждаются вопросы применения инструментов электронных таблиц для решения задач динамического программирования. В качестве примера рассмотрены два задания компьютерного ЕГЭ по информатике. Первое из них предполагает математический анализ и поиск оптимального пути на клеточной карте. Второе – моделирование работы исполнителя на наборе заданных команд и вычисление количества возможных программ при заданной траектории. Особое внимание уделяется особенностям использования математических функций электронных таблиц и методам организации обработки числовых табличных данных.*

Единый государственный экзамен по информатике предназначен для проверки знаний и умений учащихся в профильной предметной области. Он включает разнообразные задания по основам информатики и информационным технологиям. При этом на протяжении всех лет экзаменационного тестирования вплоть до 2020 года решение всех заданий предполагало письменный формат экзамена. В связи с переходом в 2021 году на компьютерную форму аттестации школьников появилась

возможность оценки навыков учащихся не только в реальном программировании, но и в области моделирования сложных процессов в прикладных задачах [1; 2]. Это обуславливает необходимость получения учащимися прочных знаний и умений компьютерного моделирования в различных программных средах [3; 4].

Так, в контексте подготовки к ЕГЭ по информатике для этого возможно эффективно использовать инструментальные средства математического моделирования электронных таблиц. Экзамен по информатике в компьютерной форме устроен так, что задания, предлагаемые школьникам, можно условно разделить на три блока. Первый из них включает проверку знаний по большинству разделов теоретической информатики в письменном виде, второй – проверку умений составлять алгоритмы и написания программ в современных инструментальных средах, третий – проверку умений манипулирования функциональными средствами прикладного назначения. При этом средства электронных таблиц можно использовать не только в заданиях, которые непосредственно направлены на раскрытие умений действий в них, но и в заданиях, которые предполагают автоматизированное решение на «бумаге». Так, например, можно поступить в задании на использование рекурсивных методов обработки информации или в задании поиска выигрышной стратегии. В обоих из них электронные таблицы будут служить средством построения информационной модели объекта и алгоритмического анализа процессов, протекающих в них [5; 6]. Кроме того, даже решение отдельных задач экзамена по информатике из области программирования [7; 8] можно перенести в среду работы с электронными таблицами. Например, задание, требующее продемонстрировать умение обрабатывать массив данных с использованием сортировки и фильтрации [9]. Для этого необходимо перенести заданный объем информации из текстового файла в файл электронных таблиц с помощью размещения по строкам и столбцам. После чего использовать стандартные функции математической обработки числового массива данных.

Остановимся более подробно на применении электронных таблиц для решения заданий динамического программирования компьютерного ЕГЭ по информатике. Тематика динамического программирования присутствует в двух заданиях экзамена. В первом из них, в задании № 18, учащимся предлагается определить оптимальный маршрут для работа на клеточной карте и вычислить наименьшую и наибольшую стоимость монет, которую он может собрать на своем пути. Данная задача изначально позиционируется для оптимизации средствами электронных таблиц. Именно они в этом случае являются наиболее эффективным средством ответа на поставленные вопросы. Безусловно, можно перенести моделирование задания в одну из сред программирования, но

для этого в случае ее реализации на экзамене в инструментальной системе требуется больше времени, а также глубины и полноты знаний технического исполнения. В электронных таблицах для получения ответа необходимо минимум знаний и умений. Так, в первую очередь необходимо понимать общий принцип динамического подхода. При его применении решение задачи ускоряется за счет объемов используемой памяти. Метод предполагает запоминание всех решений задачи при меньших значениях, чем исходные параметры. Это требует определенного запаса имеющейся памяти, однако полный перебор вариантов осуществляется значительно быстрее, нежели, например, при рекурсивном подходе. В электронных таблицах для этого можно рационально использовать пространство на одном или нескольких листах рабочей области программного средства. Пространство даже одного листа позволяет создать копию исходной области клеточной карты и построить на вторичной генерации полный перебор имеющихся решений.

Пусть роботу требуется собрать наибольшее число монет на пути из верхней левой клетки в правую нижнюю клетку заданной прямоугольной области. При этом роботу разрешается двигаться только вправо или вниз. Тогда решение задачи после копирования ниже исходной области значений будет состоять в следующем. В крайнем левом столбце робот может осуществлять перемещение только из верхней ячейки, непосредственно граничащей с текущей ячейкой. А в верхней строке только из ячейки слева, непосредственно граничащей с текущей ячейкой. Следовательно, для выполнения операций для этих ячеек понадобится суммировать значение из предыдущей ячейки маршрута со значением текущей ячейки. Так как требуется изменять значение текущей ячейки, используя ее предыдущее значение, то, как раз, для этого будет служить таблица исходных значений, из соответствующих ячеек которой мы будем брать начальные данные. Для остальных ячеек прямоугольной области формула будет немного сложнее, так как двигаться теперь можно с двух направлений – слева и справа. В связи с этим формула для вычисления наибольшего количества собранных монет для текущей ячейки будет представлять сумму максимума из ячеек слева и сверху относительно нее и начального значения в рассматриваемой точке маршрута. Три указанных вида формул необходимо скопировать по ячейкам соответствующих диапазонов. Первую формулу «протянуть» по ячейкам первого столбца, вторую – по ячейкам первой строки, третью – по ячейкам оставшейся прямоугольной области.

В том случае, если требуется вычислить не максимум, а минимум, требуется изменить в третьей формуле только функцию. После чего полученную формулу скопировать в ячейки вниз и вправо от нее. Если задание подразумевает наличие границ в виде вертикальных или горизонтальных стен в области движения робота, то формулы справа и

снизу от них соответственно необходимо отредактировать. Для этого в этих областях следует задать формулы образом, аналогичным для левого столбца и первой строки. Таким образом, базовая задача без вертикальных и горизонтальных стен может быть в среднем решена за три минуты. Модификация потребует еще минуту времени. При этом отметим, что такой подход в решении задачи с роботом предполагает наличие только базовых умений ввода формул в ячейки электронной таблицы, вставки в них стандартных математических функций и их копирования с помощью «протягивания» по соответствующим диапазонам. В то время как на компьютерном ЕГЭ по информатике подобные задачи относятся к заданиям проверки умений повышенного уровня сложности. Из этого можно сделать вывод о том, что выбор средства реализации решения данной задачи играет существенную роль [10]. Электронные таблицы служат одним из оптимальных инструментов получения быстрого ответа на ее вопросы.

Теперь рассмотрим второе задание ЕГЭ по информатике, которое проверяет знания в области динамического программирования. В задании 23 требуется определить количество программ, по которым исполнитель с помощью имеющегося набора команд может преобразовать одно натуральное число в другое. Команды для исполнителя в ней, как правило, реализуют арифметические операции сложения и умножения. Для решения задачи сначала требуется составить рекуррентную формулу, позволяющую вычислить количество программ для любого промежуточного числового значения. Так, например, если у исполнителя набор команд состоит из действий «прибавь 1» и «умножь на 2», то для того, чтобы вычислить количество программ в точке  $N$ , необходимо сложить количество программ в точках  $(N-1)$  и  $(N/2)$ . То есть мы приходим к необходимости вычисления и хранения всех промежуточных значений, если хотим ускорить вычисления по времени. В электронных таблицах для определения количества программ в точке  $(N-1)$  всего лишь следует обратиться к предыдущей ячейке. С количеством программ в точке  $(N/2)$  все немного сложнее. Сначала необходимо проверить, делится ли вообще число  $N$  на два. Для этого придется использовать встроенную в инструменты электронных таблиц логическую функцию *ЕСЛИ*. В том случае, если число  $N$  делится на два, следует добавить к итоговой сумме в данной точке вычислений количество программ в точке  $(N/2)$ . Если же нет, то вторая команда в данной точке неприменима. Иначе это можно сформулировать как добавление к сумме числа 0. Для этого при формировании таблицы значений необходимо предусмотреть точку 0, значение в которой для искомой функции количества программ следует обнулить. Также присвоить нулевые значения необходимо во всех точках от нулевой до исходной. В начальной точке маршрута всегда независимо от ее значения следует задавать значение рекуррентной функции, равное

1. Собственно для вычисления значения слагаемого в точке ( $N/2$ ) как один из возможных вариантов решения, используется встроенная функция *ВПР*. Аббревиатура функции происходит от английского Vertical Look Up – вертикальный просмотр. Работа данной функции основана на поиске слева направо по столбцам искомого вычисленного значения. После нахождения его первого вхождения функция *ВПР* возвращает результат из той же строки, что и найденное значение, но из указанного в параметрах функции номера столбца справа. Столбцы при этом имеют порядковые номера, начиная с 1, относительно выделенной прямоугольной области. Определив таким образом функцию суммарного вычисления количества программ в заданной точке, остается «протянуть» – скопировать ее по всем ячейкам столбца значений диапазона от второй точки маршрута до конечной. Искомый результат будет отражен в нижней точке вставленной функции. Таким образом, в столбце значений рекуррентной функции будут динамически получены и отражены все промежуточные значения и итоговое значение.

Подводя итог сказанному, необходимо подчеркнуть, что для решения заданий динамического программирования ЕГЭ по информатике, относящихся к повышенному уровню сложности, достаточно базовых навыков оперирования стандартными инструментами электронных таблиц и функцией вертикального поиска данных. Алгоритмы решения задач 18 и 23 получают простую реализацию и наглядную демонстрацию последовательных действий от начальных данных через промежуточные результаты до требуемого ответа. Учащиеся получают набор инструментов с понятными функциональными свойствами, которые позволяют эффективно решить тестовое задание за малый промежуток времени. Это делает электронные таблицы востребованным средством решения данного типа задач.

## Литература

1. Козлов С.В., Шкуратова А.А. Особенности мониторинга образовательного пространства с использованием новых информационных технологий // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. Вып. 21. С. 393–399.
2. Шкуратова А.А., Козлов С.В. Использование программных приложений как средств мониторинга образовательной среды // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Киров, 2020. С. 123–128.
3. Киселева О.М., Быков А.А. Готовность педагогов к применению методов математического моделирования в образовательном процессе // Наукоедение: интернет-журнал. 2014. № 1 (20). С. 97.
4. Козлов С.В. Перспективы внедрения методов интеллектуального анализа данных как цифровых средств поддержки процесса обучения // Вызовы цифровой



экономики: развитие комфортной городской среды: труды III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. 2020. С. 399-403.

5. Максимова Н.А. Возможности формирования компетенций XXI века при изучении дисциплины «Цифровые технологии в образовании» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2021. № 4. С. 88–100.

6. Тимофеева Н.М. О цифровых технологиях из арсенала современного преподавателя // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи. – Киров, 2020. С.108–113.

7. Козлов С.В. Особенности обучения школьников информатике в профильной школе // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2014. № 1. С. 31–35. ART 14006. URL: <http://e-koncept.ru/2014/14006.htm>.

8. Козлов С.В., Быков А.А. О применении методов математического моделирования при обучении алгоритмизации в вузе // Современные проблемы науки и образования. 2021. № 3. С. 92. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=30946> (дата обращения: 02.10.2021).

9. Подлущкая А.Г., Киселева О.М. Особенности преподавания дисциплины «Математические модели процессов обработки данных в условиях цифровизации образования» // Образование в цифровую эпоху: сборник статей по материалам Международной научно-практической конференции преподавателей, студентов, аспирантов, докторантов и заинтересованных лиц. 2019. С. 59–62.

10. Козлов С.В. Интеллектуальная система поддержки принятия решений «Advanced Tester» // Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии: сборник материалов X Всероссийской конференции. Оренбург, 2021. С. 127–131.

**S.V. Kozlov**

Smolensk State University

**A.A. Bykov**

Branch of the National Research University

«Moscow Power Engineering Institute» in Smolensk

## **SOLVING PROBLEMS OF DYNAMIC PROGRAMMING OF THE EXAM IN INFORMATICS BY MEANS OF SPREADSHEETS**

**Keywords:** *dynamic programming, spreadsheets, mathematical functions, performer, robot, cell map, optimal path, trajectory.*

**Abstract.** *The article discusses the use of spreadsheet tools to solve dynamic programming problems. As an example, two tasks of the computer exam in computer science are considered. The first involves mathematical analysis and the search for the optimal path on the cell map. The second is modeling the performer's work on a set of specified commands and calculating the number of possible programs at a given trajectory. Particular attention is paid to the peculiarities of the use of mathematical functions of spreadsheets and methods of organizing the processing of numerical table data.*

## **РЕАЛИЗАЦИЯ АУТЕНТИФИКАЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ В WEB-ПРИЛОЖЕНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАНДАРТА JWT**

Ключевые слова: *IT-технологии, web-приложение, аутентификация, стандарт JWT, фреймворк BLAZOR, платформа ASP.NET.*

*В статье рассматриваются вопросы компьютерной безопасности образовательных web-приложений. Особое внимание уделяется аутентификации пользователя в информационной системе web-ресурса. Авторами охарактеризованы основные аспекты реализации программного кода с использованием стандарта JWT для создания токенов доступа.*

В настоящее время вопросы компьютерной безопасности являются одним из приоритетных направлений внедрения компьютерных приложений IT-технологий в различные сферы жизнедеятельности человека. Не является исключением и образование, в разнообразных процессах которого требуется защита получаемой и хранимой информации, надежная передача индивидуальных данных [1; 2]. Одной из главных составляющих безопасности любого IT-приложения, в том числе и образовательного продукта, является процесс аутентификации пользователя в информационной среде [3; 4]. Аутентификация представляет собой процесс идентификации пользователя. Один из способов ее программной реализации в ASP.NET это использование Json Web Token (JWT). Данная технология предоставляет авторизовавшемуся пользователю уникальный идентификатор – токен [5]. С его помощью пользователь может взаимодействовать с web-приложением.

Рассмотрим создание web-приложения Blazor WebAssembly с хостингом Web API на базе платформы .NET 6 и посмотрим, как можно реализовать аутентификацию пользователя. Платформа Blazor предназначена для создания интерактивного web-интерфейса на стороне клиента с использованием .NET. Приложения Blazor основаны на компонентах. Компонентом Blazor называется любой элемент пользовательского интерфейса, например страница, диалоговое окно или форма ввода данных. Платформа подразделяется на две модели: Blazor Server и Blazor WebAssembly. Для разрабатываемого web-приложения было решено выбрать вторую модель из-за следующих преимуществ. Во-первых, программный код выполняется на стороне клиента, в его браузере, тем самым не перегружая сервер. Во-вторых, в случае разрыва

соединения приложение в браузере не перестанет работать. В-третьих, для отзывчивости UI не нужно надежное и быстрое соединение с сервером. Такое выполнение кода .NET в web-браузерах становится возможным благодаря технологии WebAssembly. Технология WebAssembly – это компактный формат байт-кода, оптимизированный для быстрой загрузки и максимального быстродействия. Web API представляет способ построения приложения ASP.NET, который специально предназначен для работы в стиле REST. Данный стиль характеризует собой передачу состояния представления (Representation State Transfer). REST-архитектура предполагает применение таких методов или типов запросов HTTP для взаимодействия с сервером, как GET, POST, PUT, DELETE.

Рассматриваемое приложение разделено на три основных части: web-клиент, сервер, база данных. При его построении использовался подход на основе сервисов и паттерна проектирования Dependency injection (внедрение зависимостей) [6]. Шаблон Dependency injection (DI) представляет механизм, который позволяет сделать взаимодействующие в приложении объекты слабосвязанными. Такие объекты связаны между собой через абстракции, например через интерфейсы, что делает всю систему более гибкой, более адаптируемой и расширяемой [7]. В сервисах, расположенных на web-клиенте, реализована логика взаимодействия с сервером посредством http-запросов. Запрос поступает на выбранный контроллер, после чего идет взаимодействие с сервисом серверной части. Такой сервис, может отвечать, например, за взаимодействие с базой данных или обработку данных.

Теперь остановимся более подробно на программной реализации аутентификации пользователя в информационной системе. Как было сказано ранее, аутентификация – это идентификация пользователя. То есть для успешной аутентификации нужно проверить, находится ли пользователь в базе данных приложения. Для упрощения, вместо хранилища базы данных информация о пользователе сохраняется в классе, который внедрен в жизненный цикл зависимостей с помощью команды AddSingleton в классе Program. Заметим, что объект сервиса создается при первом обращении к нему, все последующие запросы используют один и тот же ранее созданный объект сервиса.

```
public class Data: IData // Класс, представляющий базу данных
    {public List<User> Users { get; set; } = new List<User>(); ...}
builder.Services.AddSingleton<IData, Data>(); // Регистрация сервиса
```

После сохранения информации остается лишь проверить данные, введенные пользователем на валидность, и отправить http-запрос на соответствующий контроллер сервера.

```
var response = await _httpClient.PostAsJsonAsync("api/auth/login", request);
Ниже представлена логика контроллера для аутентификации.
[HttpPost("login")]
```

```

        public async Task<ActionResult<ServerResponse<string>>> Login(UserLogin
request)
    {try {var serviceResponse = await _authService.Login(request);
        return Ok(new ServerResponse<string> {Data = serviceResponse, Success
= true}); }
        catch(Exception ex)
        {return BadRequest(new ServerResponse<string> { Message = ex.Message,
Success = false}); } }

```

Тип `ServerResponse` – это класс, созданный для удобства чтения ответа контроллера.

```

public class ServerResponse<T>
    {public T Data { get; set; } //Данные
    public string Message { get; set; } = string.Empty; // Сообщение в случае
ошибок
    public bool Success { get; set; } = false; //Статус выполнения }

```

Как мы видим, контроллер возвратит данные типа `string`, именно тут будет реализован сгенерированный `json web token`. Алгоритм создания JWT представлен ниже.

```

public string CreateToken(User user)
    {List<Claim> claims = new List<Claim>
    {new Claim(ClaimTypes.Name, user.UserName),
    new Claim(ClaimTypes.Role, user.Role)};
    Claims = new ClaimsIdentity(claims);
    var key = new SymmetricSecurityKey (System.Text.Encoding.UTF8.GetBytes
(_configuration.GetSection("AppSettings:Token").Value));
    var creds = new SigningCredentials (key,
SecurityAlgorithms.HmacSha512Signature);
    var token = new JwtSecurityToken(
        claims: claims,
        expires: DateTime.Now.AddDays(1),
        signingCredentials: creds);
    var jwt = new JwtSecurityTokenHandler().WriteToken(token);
    return jwt; }

```

В качестве параметров метод принимает объект аутентифицированного пользователя. Объект `claim` описывает свойство пользователя, прошедшего проверку подлинности, он может хранить имя пользователя, роль, `e-mail` и другие данные. Это те самые свойства, которые в итоге мы сможем прочесть в токене с помощью клиентского приложения. Объект `key` хранит ключ безопасности, применяемый для генерации токена. Это должен быть объект класса `SecurityKey`. В нашем случае в качестве него выступает объект производного класса `SymmetricSecurityKey`, принимающий массив байт. Объект `creds` представляет ключ шифрования и алгоритм безопасности. Сам токен представляет собой объект `JwtSecurityToken`, для инициализации которого применяются все данные, полученные выше. Получив ответ от сервера на стороне клиента, мы записываем токен в локальное хранилище браузера. На этом процесс безопасной аутентификации завершен, и

можно программно переходить к этапу авторизации пользователя в среде информационной системы.

Итак, с помощью стандарта доступа JWT с использованием фрейворка Blazor и платформы ASP.NET можно эффективно реализовать исходную безопасность доступа к пользовательским компонентам информационной среды. Образовательное приложение получит верифицированную защиту на этапе аутентификации в программной информационной среде. Посторонний человек не сможет не только войти в систему, он не увидит данные конфиденциального пользования, предназначенные для взаимодействия участников образовательного процесса. Это является особенно важным на этапе современного распространения IT-технологий в образовании [8; 9], использования возможностей онлайн-платформ [10; 11] и более широкого внедрения дистанционных методов обучения [12; 13]. Таким образом, IT-технологии позволят реализовать безопасный образовательный процесс, обеспечив унифицированный защищенный доступ к системным данным.

### Литература

1. Козлов С.В. Перспективы внедрения интеллектуальных цифровых технологий в процессы управления // Цифровой регион: опыт, компетенции, проекты: сборник статей Международной научно-практической конференции (г. Брянск, 30 ноября 2018 г.). Брянск: Брян. гос. инженерно-технол. ун-т, 2018. С. 236–240.
2. Козлов С.В., Быков А.А. Организация обучения в профильной школе в условиях цифровизации системы образования // Аксиологические проблемы педагогики. 2020. № 11. С. 102–110.
3. Киселева О.М., Солдатенкова Я.Г. Проектирование образовательных информационных систем // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи – НТТДМ 2021: сборник материалов V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Киров, 2021. С. 93–98.
4. Козлов С.В. Использование алгебраических структур для моделирования процессов в сложных информационных системах // Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии: сборник материалов IX Всероссийской конференции с международным участием. Оренбург, 2019. С. 436–440.
5. Васильев П.А. Технология JWT языка программирования Node JS // Вестник науки и образования. 2016. № 8. С. 32–33.
6. Лок Э. ASP.Net Core в действии / пер. с англ. Д. А. Беликова. М.: ДМК Пресс, 2021. 906 с.
7. Козлов С.В. Применение соответствия Галуа для анализа данных в информационных системах // Траектория науки. 2016. Т. 2, № 3 (8). С. 18.
8. Козлов С.В. Особенности использования методов интеллектуального анализа данных в обучающих информационных системах // International Journal of Open Information Technologies. 2020. Т. 8, № 7. С. 29–39.
9. Козлов С.В. Применение методов функционального анализа при формировании оптимальных стратегий обучения школьников // Международный журнал экспериментального образования. 2016. № 3-2. С. 182–185.
10. Максимова Н.А. Анализ образовательных платформ для осуществления онлайн-обучения // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи:

сборник материалов IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Киров, 2020. С. 78–82.

11. Козлов С.В., Суин И.А. О некоторых аспектах применения инвариантных методов функционального анализа данных в различных предметных областях // Системы компьютерной математики и их приложения. 2019. № 20-1. С. 199–205.

12. Быков А.А., Киселева О.М. О применении элементов индивидуального обучения в дистанционной работе со студентами // Современные наукоемкие технологии. 2020. № 9. С. 106–110.

13. Козлов С.В., Быков А.А. Применение методов адаптивного обучения при организации дистанционной работы со студентами // Вопросы педагогики. 2021. № 4-1. С. 158–161.

**S.V. Kozlov, M.S. Vorobyov**  
Smolensk State University

## **IMPLEMENTING USER AUTHENTICATION IN WEB APPLICATION USING JWT STANDARD**

**Keywords:** *IT technologies, web application, authentication, JWT standard, BLAZOR framework, platform ASP.NET.*

**Abstract.** *The article deals with the computer security of educational web-applications. Particular attention is paid to user authentication in the web resource information system. The authors describe the main aspects of implementing program code using the JWT standard for creating access tokens.*

**А.С. Кузнецова**  
*Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова*

УДК 159.9:331.101.3

## **ПРИЗНАКИ ПРОАКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ОПЕРАТИВНО-ВОССТАНОВИТЕЛЬНОГО ОТДЫХА И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ТРУДА ПЕДАГОГОВ**

Ключевые слова: *отдых, проактивный и реактивный подходы, психологическая саморегуляция, эффективность труда, психологические ресурсы, психологическая поддержка.*

*Эмпирическое исследование выполнено в контексте психологического анализа отдыха у специалистов непроемственной сферы, включая сферу образования. Обсуждаются особенности*

*опережающего отношения к отдыху и рассматриваются признаки проактивного и реактивного подходов к планированию и организации отдыха. Анализируются собранные сведения о взаимосвязи проявлений данных подходов и эффективности приемов преодоления профессионального стресса. Показано, что реактивный подход к отдыху способствует кумуляции симптоматики стресса. Анализируются различия субъективной оценки степени напряженности профессионального труда у специалистов с проактивным и реактивным подходом к отдыху. Рассматривается целесообразность разработки профессионально-специфичных программ организации отдыха педагогов на основе применения приемов проактивного планирования времени и содержания рабочих перерывов, позволяющих обеспечить эффективное восстановление и преодоление трудовых стрессов.*

**Актуальность проблемы исследования.** В последние годы научная разработка проблем организации отдыха с целью повышения работоспособности и сохранения профессионального здоровья является динамично развивающимся и перспективным направлением психологического анализа ресурсов профессионалов, в том числе и педагогов средних и высших учебных заведений. Следует подчеркнуть, что до недавнего времени психологическая проблематика в исследованиях отдыха была теоретически не осмысленной и практически не разработанной: как правило, отдых рассматривается в качестве объекта экономических и социологических исследований (Пожитной, Хромешкин, 2011; Haworth J.T., Veal A.J., 2004). Вместе с тем при работе педагогов в условиях повышенной эмоциональной напряженности труда, высокой степени автономности в планировании ряда профессиональных задач и распределении времени отдых целесообразно рассматривать как временной ресурс и основу для выбора адекватных ситуативным требованиям средств психологической саморегуляции, направленной на эффективное преодоление трудового стресса (Cropley, Millard Purvis, 2003). Более того, данные показывают, что полноценный и эффективный отдых способствует восстановлению креативности и упрощает поиск продуктивных путей решения новых и нестандартных задач (Pang, 2017).

Накопленные эмпирические материалы в сфере исследования отдыха можно сгруппировать по следующим основным направлениям: (1) анализ отдыха как целесообразной деятельности, планируемой и реализуемой профессионалом для повышения стресс-резистентности, поддержки здоровья, обеспечения успешного профессионального развития; (2) изучение соотношения субъективной ценности и доступности отдыха профессионалов; (3) анализ отдыха в структуре временной организации труда, предполагающей выделение времени для рабочих перерывов с целью проведения рекреационных и

оптимизационных мероприятий в структуре рабочего процесса; (4) оценка результатов отдыха и прогнозирование путей повышения его эффективности (Кузнецова, Лузянина, 2021; Лузянина, 2009; Kuznetsova, Luzianina, 2020).

Показано, что выделяются два основных подхода к планированию и организации отдыха: (а) проактивный подход, суть которого заключается в опережающей организации отдыха, основанной на признании его высокой ценности, осознании необходимости планировать отдых заблаговременно, отслеживании изменений текущего функционального состояния в процессе работы для организации рабочих перерывов (при разрешенной возможности планировать рекреационные перерывы самостоятельно), конструктивном отношении к выбору оптимальных средств восстановления ресурсов во время перерывов, отношении к отдыху как к целенаправленной и специально организованной деятельности, ориентированной на своевременное и эффективное восстановление для сохранения здоровья; (б) реактивный подход, для которого типично невнимательное (если не сказать пренебрежительное) отношение к собственному здоровью и своим ресурсам, представление о физиологических и психологических ресурсах как самовосполняемых, восприятие отдыха как вынужденной остановки в работе, заполненной, как правило, непродуманными и спонтанными способами рекреации.

**Цель и задачи исследования.** Учитывая, что в деятельности специалистов сферы среднего и высшего образования фактор повышенной стрессогенности труда нередко приводит к развитию напряженных ситуаций во взаимодействии с учениками, их родителями, представителями администрации учебных организаций и коллегами, необходима разработка научно обоснованных программ развития стрессоустойчивости и формирования навыков конструктивного разрешения конфликтов. В этой связи были развернуты исследования стресс-резистентности, где важное место занимает анализ представлений профессионалов о полноценном отдыхе как необходимой базе для восстановления ресурсов. Основная цель представленного исследования – анализ взаимосвязи направленности на проактивный подход к планированию отдыха и эффективности разных моделей копинг-поведения, активизируемых для преодоления стресса. В качестве основных задач были сформулированы следующие пути достижения цели: (1) выявление признаков проактивного и реактивного подходов к планированию и организации отдыха; (2) анализ представлений о копинг-моделях, характерных для представителей проактивного и реактивного подходов к отдыху.

**Организация исследования.** Цикл исследований выполнен на профессиональных контингентах специалистов непромышленной сферы, включая представителей профессионального труда в сфере



образования. Общий объем выборки - 438 респондентов (157 мужчин, 281 женщина; возраст – 18-60 лет,  $M=34,8$ ), жителей крупных городов и близлежащих населенных пунктов, вынужденных тратить значительное время на путь до работы. Эмпирические данные собраны при помощи диагностического пакета методик, включавшего: (1) авторскую анкету «Особенности организации отдыха и отношения к отдыху»; (2) опросник трудового стресса в адаптации А.Б. Леоновой; (3) опросник «Стратегии преодоления стрессовых ситуаций» в адаптации Н.Е. Водопьяновой и Е.С. Старченковой; (4) опросник для оценки профессионального выгорания в адаптации Н.Е. Водопьяновой.

**Результаты.** Установлено, что для большинства респондентов характерен реактивный подход к организации отдыха. При этом у значительной части профессионалов выявлены признаки проактивного отношения к отдыху (от 22,7 до 34,7%): (1) восстановление сил рассматривается ими в качестве основной цели отдыха во время перерывов; (2) в процессе работы эти респонденты отслеживают динамику функционального состояния и стараются не допускать чрезмерной потери ресурсов; (3) при гибком графике работы и отдыха они ориентированы на «профилактические» перерывы, цель которых – предотвращение развития состояний сниженной работоспособности высокой степени выраженности. Вместе с тем даже профессионалы с выраженным проактивным отношением к отдыху замечают недостаток отдыха и восстановления.

Анализ типичных для представителей проактивного и реактивного подходов моделей копинг-поведения показал, что для профессионалов с выраженным реактивным подходом (в отличие от «проактивных» респондентов) характерна тенденция к кумуляции симптоматики стресса и, как следствие, к развитию эмоционального истощения ( $t = 1,9$ ;  $p = 0,063$ ). Можно сделать вывод о том, что отсутствие опережающей направленности в организации отдыха снижает эффективность актуализируемых в напряженных ситуациях приемов копинг-поведения, направленного на смягчение действия профессиональных стрессоров. Интересно, что выявлены значимые различия между профессионалами с проактивным и реактивным отношением к отдыху в субъективных представлениях о привычности осторожных действий как модели копинг-поведения, показывающих, что для специалистов с проактивным подходом осмотрительность и осторожность как формы преодоления стресса более привычны ( $t = 2,1$ ;  $p = 0,04$ ). Вместе с тем «проактивные» профессионалы оценивают свою работу как более напряженную и требующую особых усилий в поиске времени для отдыха.

**Основные выводы.** Итоги анализа опубликованных материалов и собранных эмпирических данных позволяют рассматривать проактивный подход к планированию и организации как фактор развития стресс-

резистентности. Направленность на опережающую организацию отдыха можно рассматривать как основу для эффективного восстановления ресурсов и применения таких психологических средств саморегуляции в преодолении профессионального стресса, которые позволяют обеспечить успешную адаптацию в напряженных трудовых ситуациях. Анализ специфики факторов профессионального труда педагогов необходим для разработки и внедрения психологических программ организации отдыха, основанных на использовании проактивных приемов планирования временных ресурсов для рабочих перерывов и подбора средств психологической саморегуляции для эффективного восстановления и преодоления профессиональных стрессов.

### Литература

1. Кузнецова А.С., Лузянина М.С. Проблемы психологического исследования отдыха профессионалов с высокой степенью автономности в планировании режима работы // Актуальные проблемы психологии труда, инженерной психологии и эргономики / под ред. А.Л. Журавлева, А.А. Обознова, Ю.В. Бессоновой. М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2021. Вып. 10. С. 134–151.
2. Лузянина М.С. Отдых в системе ценностей трудящегося человека // Вестник Московского государственного областного университета. 2009. № 2. С. 125–134.
3. Пожитной Н.М., Хромешкин В.М. Основы теории отдыха. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та управления и экономики, 2011.
4. Cropley M. Job strain and rumination about work issues during leisure time: A diary study / M. Cropley, L.J. Millard Purvis // European journal of work and organizational psychology. 2003. Vol. 12 (3). P. 195–207.
5. Haworth J.T., Veal A.J. Work and leisure: themes and issues // Work and leisure / Ed. by J.T. Haworth &, A.J. Veal. L.-N.-Y.: Routledge (Taylor & Francis Group), 2004. P. 213–230.
6. Kuznetsova A.S., Luzianina M.S. Proactive approach to rest and functional states' self-regulation in flexible work arrangements // European Proceedings of Social and Behavioural Sciences (EpSBS). 2020. Vol. 91. P. 244–252.
7. Pang A.S.-K. Rest: Why you get more done when you work less. London: Penguin random house, 2017.

**A.S. Kuznetsova**

Lomonosov Moscow State University

## **SIGNS OF PROACTIVE PLANNING OF RECOVERY AND WORK EFFICIENCY OF TEACHERS**

**Keywords:** *rest, proactive and reactive approaches, psychological self-regulation, work efficiency, psychological resources, psychological support for teachers.*

**Abstract.** *An empirical study was carried out in the context of a psychological analysis of rest and recovery among specialists in the non-*

*productive sphere, including the field of education. The features of the proactive attitude to rest are discussed, and the signs of proactive and reactive approaches to planning and organizing recreation are considered. The obtained data on the relationship between the manifestations of these approaches and the effectiveness of coping means for overcoming professional stress are analyzed. It has been shown that a reactive approach to rest contributes to the accumulation of stress symptoms. Differences in the subjective assessment of the degree of intensity of professional work among specialists with a proactive and reactive approach to rest are analyzed. The expediency of developing professional-specific programs for organizing the recreation of teachers based on the use of proactive time planning techniques and the maintenance of work breaks, which make it possible to ensure effective recovery and overcome labor stresses, is considered.*

**Н.Р. Перельман**

*Смоленский государственный университет*

УДК 519.86

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДСТВ MSExcel ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕРАВЕНСТВА В РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДОХОДОВ**

Ключевые слова: *математическая экономика, кривая Лоренца, коэффициент Джини.*

*Статья посвящена методике обучения студентов-экономистов основам математической экономики, в частности исследованию неравенства распределения доходов страны с помощью кривой Лоренца и коэффициента Джини. Сначала строятся математические объекты на основе интегрального исчисления функции одной переменной, затем эти же объекты рассматриваются с применением средств MSExcel. В качестве статистического материала для решения задач берутся данные Росстата.*

Рассмотрим изучение неравенства в распределении доходов студентами направления подготовки 38.03.02 Менеджмент (профиль – Таможенная логистика). Этот раздел математической экономики представлен в двух дисциплинах, изучаемых студентами-логистами.

Первая из них – «Б1.В.ДВ.10.1 Математическое моделирование социально-экономических процессов». Целью этой дисциплины является углубление основ математических знаний, полученных при изучении дисциплины «Математика», в направлении экономико-математического моделирования.

Здесь вводится понятие кривой Лоренца и коэффициента Джини как инструментов, с помощью которых можно определить степень неравенства в распределении доходов государства. В частности, *кривая Лоренца* показывает зависимость  $y = f(x)$  процента доходов ( $y\%$ ) от процента имеющего его населения ( $x\%$ ). При изображении кривой Лоренца измерения дохода и имеющего его населения можно показывать как в процентах, так и в десятичных дробях.

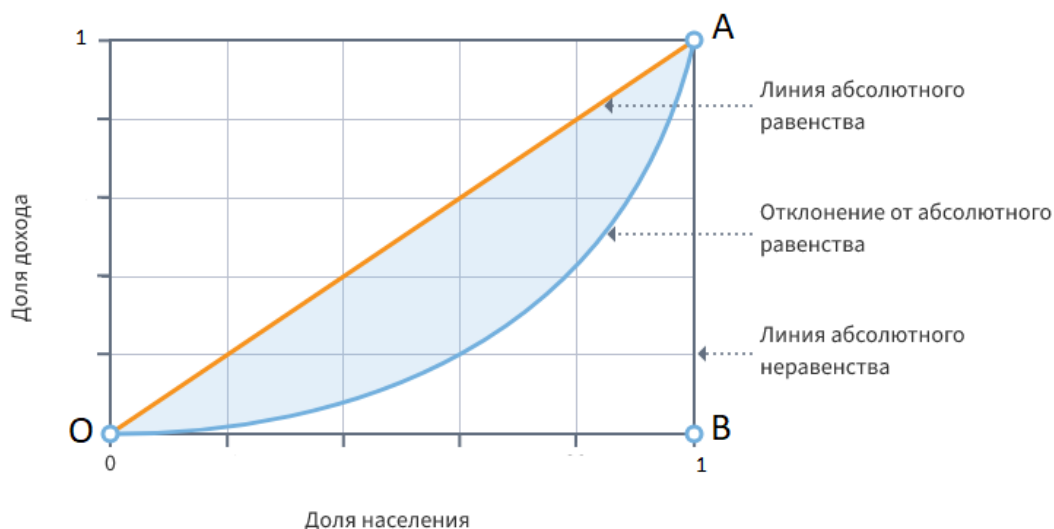


Рис. 1

Величина, равная отношению площади фигуры, ограниченной кривой Лоренца и биссектрисой первого координатного угла, к площади треугольника OAB (см. рис. 1), называется *коэффициентом Джини*.

Используя геометрические приложения определенного интеграла, можно вывести следующую формулу для коэффициента Джини:

$$k = \frac{\int_0^1 |x - f(x)| dx}{0,5} = \frac{\left| 0,5 - \int_0^1 f(x) dx \right|}{0,5}.$$

Связь коэффициента Джини и неравенства в распределении доходов:

$k = 0$  – полное равенство в доходах населения;

$k < 0,3$  – слабое неравенство;

$0,3 \leq k < 0,7$  – значительное неравенство;

$0,7 \leq k \leq 1$  – сильное неравенство (см. [1, с. 24]).

Вторая дисциплина, в которой встречаются эти понятия – это «Б1.В.ОД.1 Экономико-математические методы и модели в логистике». В этой дисциплине предусмотрены лабораторные работы, поэтому построение кривой Лоренца и нахождение коэффициента Джини здесь

производится компьютерными методами на примере реальных статистических данных, которые можно посмотреть, например, на [2].

На занятиях студенты работают с данными таблицы «Распределение общего объема денежных доходов и характеристики дифференциации денежных доходов населения». Эта таблица имеет вид:

| Год  | Денежные доходы всего | в том числе по 20-процентным группам населения, в %: |        |        |           |                                |
|------|-----------------------|--|--------|--------|-----------|--------------------------------|
|      |                       | первая(с наименьшими доходами)                       | вторая | третья | четвертая | пятая (с наибольшими доходами) |
| 2020 | 100                   | 5,5  | 10,2   | 15,2   | 22,7      | 46,4                           |

По данным этой таблицы студенты сначала строят кривую Лоренца.

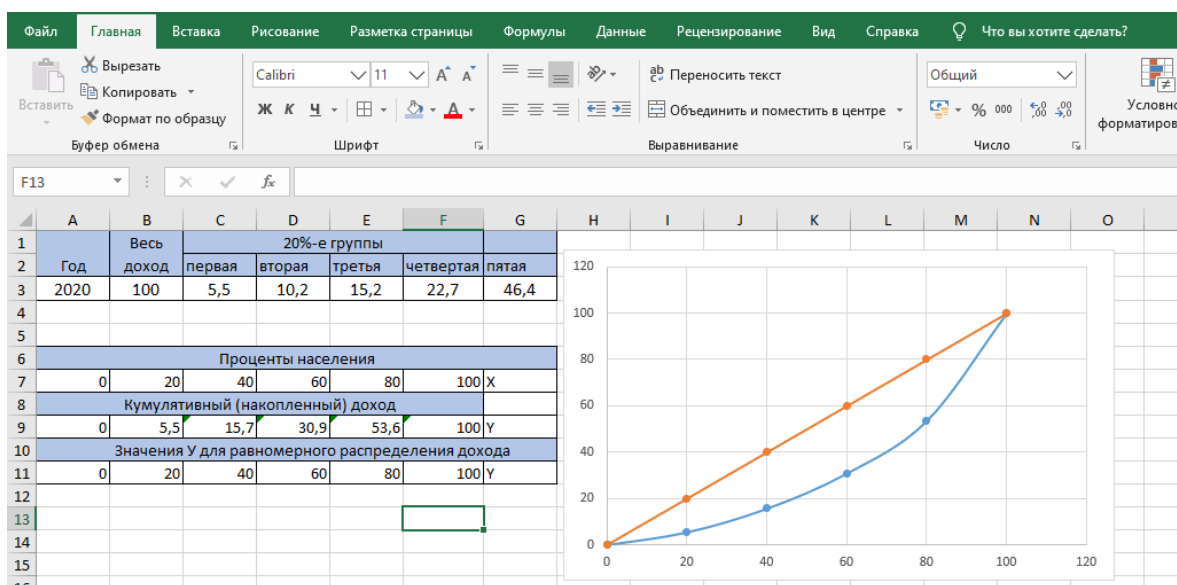


Рис. 2

Далее перед студентами ставится задача посчитать коэффициент Джини. Это представляет определенную сложность для них, так как, во-первых, отсутствует уравнение кривой Джини, поэтому интегральная формула не работает, во-вторых, в MSExcel вообще возможно только численное интегрирование (то есть с использованием приближенных методов интегрирования), в частности, это может быть метод трапеций.

Чтобы посчитать площадь фигуры, ограниченной кривой Лоренца и биссектрисой первого координатного угла, можно найти сначала площадь криволинейной трапеции под кривой Лоренца (как определенный интеграл), а затем вычесть из 0,5 эту площадь.

Для реализации формулы метода трапеций разобьем отрезок  $[0; 100]$  на несколько равных частичных отрезков с шагом  $h$ . Тогда требуемый интеграл можно найти по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = h \left( \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

|    | X (проценты населения) | f(x) (кумулятивный доход) | h (шаг разбиения) | Площадь под кривой Лоренца | Коэффициент Джини |
|----|------------------------|---------------------------|-------------------|----------------------------|-------------------|
| 16 |                        |                           |                   |                            |                   |
| 17 | 0                      | 0                         |                   |                            |                   |
| 18 | 20                     | 5,5                       |                   |                            |                   |
| 19 | 40                     | 15,7                      |                   |                            |                   |
| 20 | 60                     | 30,9                      | 20                | 3114                       | 0,3772            |
| 21 | 80                     | 53,6                      |                   |                            |                   |
| 22 | 100                    | 100                       |                   |                            |                   |

Рис. 3

Полученный коэффициент Джини немного отличается от приведенного в таблицах [2] из-за погрешности, которую дает метод трапеций.

Проанализировав изучение понятий кривой Лоренца и коэффициента Джини студентами профиля Таможенная логистика, можно сформулировать следующие выводы:

1) последовательное введение методов вычисления коэффициента Джини дает возможность хорошего овладения математическими методами экономики;

2) вторая дисциплина дополняет первую не только в области применения информационных технологий, но и в области методов вычислительной математики (в том числе ее экономических приложений).

Заметим, что было бы целесообразно при изучении данных понятий использовать не только средства MS Excel, но и системы компьютерной математики, например Mathcad.

Преимуществами систем компьютерной математики являются:

1) наличие как аналитических, так и численных методов вычислений;

2) удобная визуализация результатов вычислений.

Таким образом, подключение использования Mathcad к изучению дисциплины «Б1.В.ОД.1 Экономико-математические методы и модели в логистике» позволило бы расширить круг решаемых студентами задач.

### Литература

1. Перельман Н.Р. Основы математической экономики: учебно-методическое пособие. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. 50 с.
2. <https://rosstat.gov.ru/folder/13723>

**N.R. Perelman**  
Smolensk State University

## USING MS EXCEL TOOLS IN STUDYING INEQUALITY IN INCOME DISTRIBUTION

**Keywords:** *mathematical economics, Lorentz curve, Gini coefficient.*

**Abstract.** *The article is devoted to the methodology of teaching economics students the basics of mathematical economics, in particular, the study of the inequality of the country's income distribution using the Lorentz curve and the Gini coefficient. First, mathematical objects are built on the basis of the integral calculus of a function of one variable, then these same objects are considered using MS Excel tools. Rosstat data are taken as statistical material for solving problems.*

**А.В. Светлаков, С.А. Гомонов**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 37.022+514.752.22

### О ПРИМЕНЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ СЕТЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В КУРСЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Ключевые слова: *сетевые технологии, «Geogebra», книга, дифференциальная геометрия, дифференциальные преобразования кривых.*

*В данной работе показана актуальность применения прикладных сетевых технологий при обучении математике, в частности при изучении курса дифференциальной геометрии. Кроме того, в работе демонстрируется авторская книга, созданная в сетевом ресурсе «Geogebra» по такому разделу геометрии, как дифференциальные преобразования кривых на плоскости. Книга может использоваться (с возможными дополнениями) как источник прикладного материала при чтении курса дифференциальной геометрии.*

В настоящее время во многих сферах жизни прочно закрепляются интернет-технологии. Не является исключением и образование: практически каждый день в Интернете появляются электронные учебники, интерактивные ресурсы, обучающие сайты, электронные курсы и др. Этот процесс касается как среднего образования (в наибольшей степени – подготовки к ЕГЭ), так и высшего, хотя в высшем образовании он идет несколько медленнее.

На данный момент разнообразные мобильные и интернет-ресурсы могут активно использоваться хотя бы как источники вспомогательных материалов и в высшей школе: они позволяют обеспечить, прежде всего, наглядность, доступность, а также продемонстрировать связь теории с практикой. Их актуальность становится особенно значимой при

дистанционном обучении. В случае же с геометрией такие технологии, помимо прочего, позволяют упростить и ускорить разнообразные геометрические построения.

Технология «Geogebra» – это бесплатный ресурс, специально разработанный для занятий математикой. С помощью нее можно, прежде всего, строить графики, таблицы, графы, диаграммы и осуществлять геометрические построения в двумерном и трехмерном пространстве [4]. Технология существует в двух версиях: в виде программы и в виде сетевого ресурса. Речь пойдет о последней, так как она может использоваться не только для осуществления указанных выше действий, но и в методических целях. Несмотря на то, что сайт английский, в нем можно размещать материалы и на русском языке.

В онлайн-версии «Geogebra» преподаватель может создавать и публиковать методические материалы, давать различные заранее подготовленные задания для студентов. Все опубликованные материалы находятся во вкладке «ресурсы» (resources). Возможны два варианта таких материалов: 1) активность (activity) – это лист, наполненный графиками, таблицами, заданиями, тестами; 2) книга (book) – это сборник из активностей. В некоторых случаях книга может использоваться как основной учебный материал. Как было отмечено выше, «Geogebra» наиболее приспособлена к разработке активностей и книг по геометрии. Ниже рассматривается одна из таких книг, созданная по курсу дифференциальной геометрии, точнее, по одному из циклов тем: дифференциальные преобразования кривых на плоскости.

Дифференциальная геометрия – это раздел математики, изучающий свойства геометрических объектов с помощью методов математического анализа, в частности дифференциального и интегрального исчисления. В начальных подразделах этими объектами являются кривые и поверхности. Геометрия кривых – подраздел дифференциальной геометрии, занимающийся исследованием гладких (кусочно-гладких) кривых в евклидовом пространстве аналитическими методами. В нем рассматриваются различные способы задания кривых (например, с помощью естественной параметризации), вводятся кривизна, кручение, рассматриваются свойства кривых [2].

К этому разделу также относятся и дифференциальные преобразования – отображения кривых, полученные с помощью операторов дифференцирования и интегрирования. Выделяют следующие основные виды таких преобразований: эволюта, эвольвента, подера, антиподера и эквидистанта (здесь и далее эти термины употребляются по отношению как к самим преобразованиям, так и к их результату).

Именно эти преобразования и рассматриваются в созданной авторами статьи книге в интернет-ресурсе «Geogebra». На титульном



листе написана тема и краткая аннотация к книге (рис. 1), а ниже следуют её разделы.

Книга состоит из 4 разделов: кривизна, эволюта и эвольвента, подера и антиподера, огибающая и эквидистанта. Первый раздел нужен для раскрытия остальных разделов. Он состоит из введения (об интуитивном понятии кривизны); понятия кривизны; вычисления кривизны; соприкасающейся окружности.

Каждая активность (кроме введения) с небольшими вариациями содержит в себе теоретические определения, формулы расчета, интерактивные изображения, поясняющие материал, практические примеры, а также несколько заданий на графике и тестовое задание (с выбором ответа или свободным ответом).

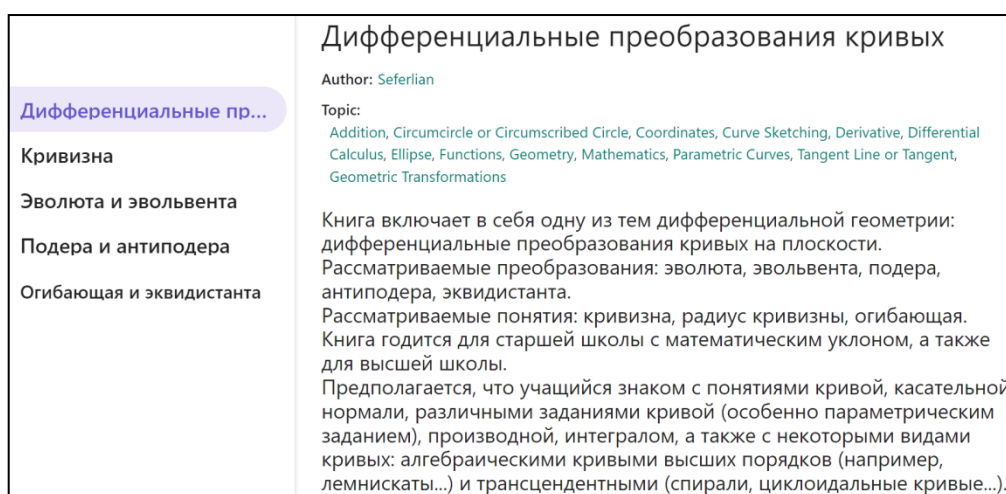


Рис. 1. Титульный лист книги

На рисунке 2 продемонстрирована часть одной из начальных активностей: определение средней кривизны и график к нему. Точки на графике можно двигать, меняя положение касательных.



Рис. 2. Определение и интерактивный график к нему

Все остальные разделы содержат по две активности. Материал в них излагается следующим образом: определение, формулы расчета, два-три

примера в виде аналитических расчетов, наглядная демонстрация примеров, два-три задания на графике и вопрос. Один из примеров в активности «Эволюта» представлен на рисунках 3 и 4. Следует отметить, что график в примере не только интерактивный, но и анимированный – параметр  $t$  меняет свое значение, и соответствующая точка на синусоиде меняет свое положение, а значит, меняется положение соприкасающейся окружности, центр которой прорисовывает эволюту синусоиды. Дополнительно показан график кривизны (пунктирной линией) и значение кривизны (второе значение) в каждой точке синусоиды при каждом значении параметра  $t$  (первое значение). Многие другие графики также имеют анимацию, а точки на них можно перемещать и вручную, остановив её.

Пример 2

Найдем эволюту синусоиды.  
 В параметрическом виде ее можно представить так:  $x(t) = t$  и  $y(t) = \sin(t)$   
 Находим производные:  $x' = 1$ ,  $x'' = 0$  и  $y' = \cos(t)$ ,  $y'' = -\sin(t)$ .  
 Подставим в формулы найденные значения. Тогда параметрическое задание эволюты имеет вид:

$$X(t) = t + \cos(t) \cdot \frac{1 + \cos^2(t)}{\sin(t)}$$

$$Y(t) = \sin(t) - \frac{1 + \cos^2(t)}{\sin(t)}$$

Покажем кривые на графике.

Рис. 3. Аналитический расчет эволюты

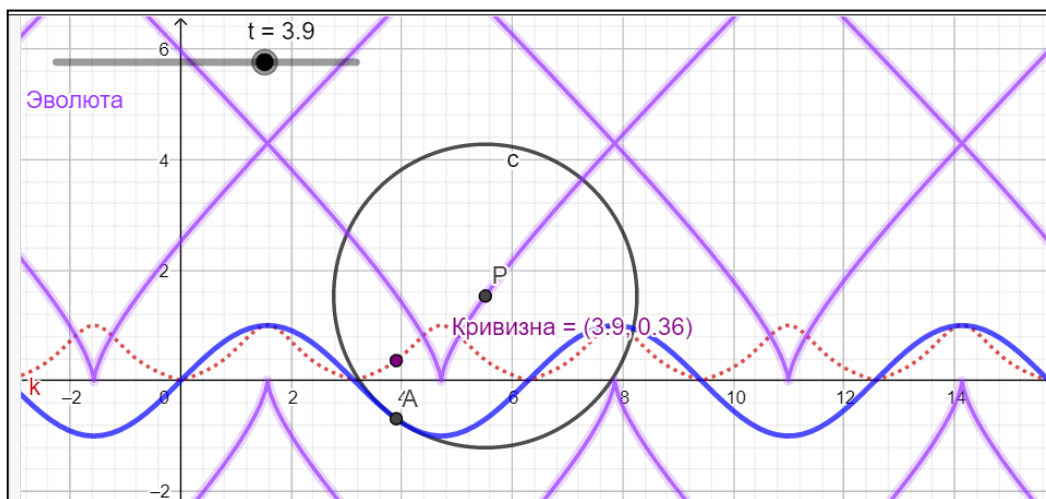


Рис. 4. Интерактивный анимированный график эволюты синусоиды

Некоторые задания также интерактивны: на рисунке 5 продемонстрировано одно из заданий в активности «подера». Предполагается не только нахождение параметрического уравнения подеры в аналитическом виде, но и ее построение (аналогично примерам).

Задание 1

Найдите и напишите уравнение подеры параболы  $2y = x^2$ :

- 1) В общем виде.
- 2) Относительно точки экстремума.
- 3) Относительно фокуса.
- 4) Относительно точки  $P(0, -1)$ .

Ниже на графике изобразите эти кривые с помощью строки ввода.

Аа π Type your answer here...

|                                  |                                   |          |
|----------------------------------|-----------------------------------|----------|
| <input checked="" type="radio"/> | $f: 2y = x^2$                     | ⋮        |
| <input type="radio"/>            | $F = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ | ⋮        |
| <input type="radio"/>            | $\rightarrow (0, 0.5)$            |          |
| <input type="radio"/>            | $B = (0, 0)$                      | ⋮        |
| <input type="radio"/>            | $P = (0, -1)$                     | ⋮        |
| <input type="radio"/>            | +                                 | Input... |

Рис. 5. Пример интерактивного задания

Огибающая хоть и не является дифференциальным преобразованием, примененным к одной кривой (это преобразование семейства кривых), но служит необходимым понятием для раскрытия последней активности – эквидистанты, так как последняя определяется через нее (а потому это отдельная активность в книге непосредственно перед эквидистантой). На рисунке 6 продемонстрирован анимированный интерактивный график из последней активности, а именно эквидистанта трехлепестковой розы (пример 2). На нем можно менять не только значение параметра  $t$ , но и значение параметра эквидистанты ( $|a|$  – так называемое «расстояние» от кривой до эквидистанты, или радиус огибающей окружности). Уравнение эквидистанты аналитически находится в этой же активности выше.

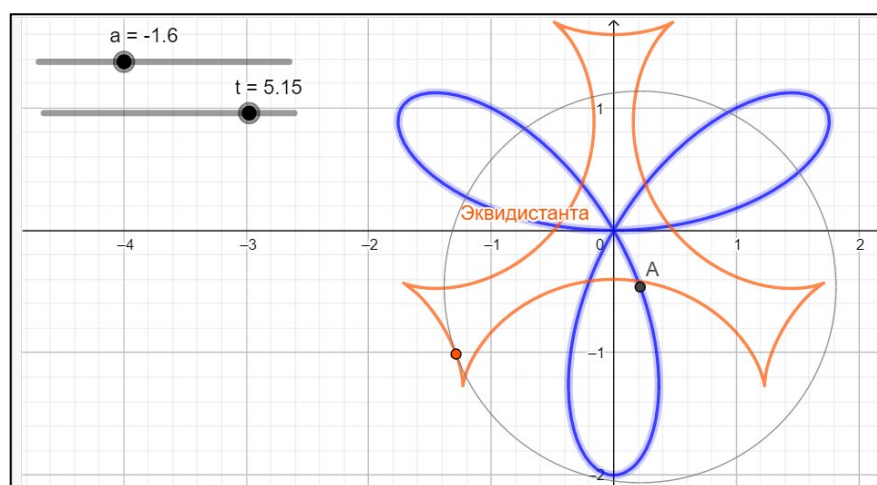


Рис. 6. Эквидистанта трехлепестковой розы при  $a = -1.6$

Последние задания в активностях обычно имеют тестовый характер с мгновенной проверкой ответов (рис. 7).

Какая кривая (при  $a \neq R$ ) будет являться эквидистантой окружности?

Check all that apply

|                                     |                                     |            |
|-------------------------------------|-------------------------------------|------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | Окружность |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | Кардиооида |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | Прямая     |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | Эллипс     |

Рис. 7. Пример тестового задания с проверкой ответа

Таким образом, применение сетевой технологии «Geogebra» хорошо помогает при обучении математике.

Книга опубликована авторами и доступна по ссылке <https://www.geogebra.org/m/kqmvmvhs>.

### Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр. Казань: Казанский университет, 2013. 204 с.

2. Савелов А.А. Плоские кривые: систематика, свойства, применения: справочное руководство. М: URSS, 2020. 294 с.

3. Дифференциальные преобразования кривых. URL: <https://www.geogebra.org/m/kqmvmvhs> (дата обращения: 15.02.2022).

4. Руководство. URL: <https://wiki.geogebra.org/ru/%D0%A0%D1%83%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE> (дата обращения: 15.02.2022).

**A.V. Svetlakov, S.A. Gomonov**  
Smolensk State University

### ON THE APPLICATION OF APPLIED NETWORKING TECHNOLOGIES IN A DIFFERENTIAL GEOMETRY COURSE

**Keywords:** *network technology, «Geogebra», book, differential geometry, differential curve transformations.*

**Abstract.** *This paper shows the relevance of the use of applied network technologies in the teaching of mathematics, in particular in the study of the course of differential geometry. In addition, the work demonstrates the author's book, created in the network resource "Geogebra" on such a section of geometry as differential transformations of curves in the plane. The book can be used (with possible additions) as a source of applied material in the course of differential geometry.*

**О СОЗДАНИИ ФЕДЕРАЛЬНОГО ЦЕНТРА НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ РАБОТНИКОВ НА БАЗЕ СМОЛГУ: ЦЕЛИ, ЗАДАЧИ, НАПРАВЛЕНИЯ**

Ключевые слова: *федеральный центр, научно-методическое сопровождение, единая система, модели и технологии, обучение в цифровой среде.*

*Статья посвящена проблеме повышения уровня профессиональной подготовки педагогических работников в условиях цифровизации. Показаны возможные пути решения проблемы в рамках единой федеральной системы научно-методического сопровождения педагогических работников. Основное внимание уделено роли федеральных центров как одного из элементов указанной системы. Сформулированы цели, задачи, основные направления федеральных центров научно-методического сопровождения педагогических работников на примере вновь созданного центра на базе СмолГУ. Раскрыты проблема и основные идеи, планируемые результаты одного из направлений деятельности центра «Модели и технологии обучения в цифровой среде».*

В условиях стремительно меняющегося мира в связи с пандемией, глобальным экономическим, политическим и социальным кризисом значительные изменения претерпевает и система образования, включая общее среднее и высшее профессиональное образование. Оставаясь на месте, не меняя форм, содержания, методов и технологий обучения, вузы и школы рискуют утратить связь с действительностью, потерять значительную часть контингента студентов и преподавательского корпуса. В качестве «тревожных маркеров» можно отметить значительное снижение качества математической подготовки абитуриентов, поступающих на физико-математический факультет, несмотря на формальное повышение среднего балла ЕГЭ. Помимо объективных внешних факторов (вынужденное онлайн-обучение в течение последних двух лет, недостаточно развитая инфраструктура образовательных организаций) существуют также и внутренние причины снижения качества обучения: низкий уровень предметной, методической, цифровой культуры учителей школ, академический подход в преподавании фундаментальных и профильных дисциплин в вузе, трудно вписывающийся в вынужденный онлайн-формат. Достаточно низкий

уровень цифровой культуры преподавателей, отсутствие мотивов овладения моделями и технологиями обучения в цифровой среде приводят иногда к тому, что высококвалифицированные в предметной области специалисты вынуждены покидать вуз, уходя на заслуженный отдых, в репетиторство, в лучшем случае – в научные исследования и разработки в рамках академических институтов.

Проблемы усугубляются тем, что в последние десятилетия утрачена традиционная система повышения квалификации учителей и преподавателей, предполагающая серьезную предметную и методическую подготовку при ведущих вузах (многомесячная, с отрывом от производства, финансируемая государством). Взамен предлагалось в основном «натаскивание» учителей на решение трудных задач ЕГЭ на курсах повышения квалификации, мастер-классах, многочисленных недостаточно эффективных онлайн-семинарах. Преподаватели вузов при этом «довольствовались» краткосрочными курсами по овладению платформами типа MOODLE, разработке объемных рабочих программ по учебным дисциплинам в соответствии с формальными требованиями. Ни о какой серьезной предметной и методической подготовке здесь даже речи не шло. Каким образом можно изменить сложившуюся практику?

Возможным ответом на поставленный вопрос является решение Министерства просвещения РФ о создании единой федеральной системы научно-методического сопровождения педагогических работников [1; 2].

*Целью* указанной системы заявлено формирование единого национального пространства в области повышения профессионального уровня педагогических работников и управленческих кадров в рамках федерального проекта «Современная школа» национального проекта «Образование».

*В задачи* входит:

– развитие системы непрерывного педагогического образования за счет проведения прикладных исследований образовательных систем по единой методологии;

– решение актуальных задач развития отрасли и тиражирования образовательных практик, трансфера научных достижений и передовых педагогических технологий в сферу образования.

По результатам конкурса Министерства просвещения образования РФ в Смоленском государственном университете создан Федеральный центр научно-методического сопровождения педагогических работников (в числе 21 центра по РФ) по трем направлениям: модели и технологии обучения в цифровой среде; психолого-педагогические методы и методики эффективного взаимодействия педагога с семьей обучающегося; технологии формирования управленческих компетенций руководителей образовательных организаций.

Физико-математический факультет реализует первое направление «Модели и технологии обучения в цифровой среде». Программа направления разработана в соответствии с тем, что цифровая трансформация образования является одним из приоритетных направлений государственной политики, представленным в Государственной программе РФ «Развитие образования» на 2018–2025 годы в форме реализации федерального проекта «Цифровая образовательная среда». Определены конкретные действия по научно-методическому сопровождению процесса обучения в следующих аспектах:

- разработка, апробация и реализация адаптивных и интеллектуальных обучающих систем и методик их внедрения;
- создание, апробация новых и использование существующих цифровых платформ обучения с их коррекцией по мере выявления недостатков и недоработок;
- анализ образовательных данных, полученных в процессе апробации, и прогнозирование результатов обучения.

В Смоленском государственном университете за два последних десятилетия сложилась научно-методическая школа по системам автоматизации работы (САПР) учителя, проектированию обучающих систем, цифровой образовательной среды, систем подготовки учителя в условиях цифровизации.

**Постановка проблемы.** Анализ существующих цифровых платформ обучения выявил их высокую трудозатратность, неадаптивность в плане настройки под конкретные образовательные потребности обучающихся и методические запросы учителей. В особенности это проявилось в связи с внезапным переходом практически всего мира в дистанционный формат обучения в период пандемии, который привел к всеобъемлющей цифровой трансформации образовательного процесса. В частности, обозначились следующие противоречия:

- между современными требованиями цифрового общества к образованию и традиционным (по сути) преподаванием;
- между необходимостью реализации новых целей общего и профессионального образования, их пониманием, принятием и ограниченностью технических, технологических ресурсов, недостаточным уровнем цифровых компетенций участников образовательного процесса.

**Ключевые идеи.** Мы понимаем цифровую платформу обучения как форму цифровой образовательной среды, основная функция которой состоит в поддержке преподавания и учебной деятельности в среде Интернет. Полагаем, что придание интернет-платформе необходимых свойств (таких, как адаптивность и гибкость) возможно при реализации принципа интермодальности, предполагающего предоставление

обучающемуся возможности выполнять различные социальные и учебные роли в процессе обучения. Современные образовательные платформы, отвечающие на вызовы системы образования в условиях пандемии, глобального кризиса, должны быть ориентированы на организацию в полной мере адаптивного индивидуального и группового обучения. Соответственно, они должны обладать свойствами адаптивности и гибкости. Для реализации отмеченных свойств такие платформы должны быть оснащены средствами адаптивной диагностики учебных компетенций. Они с необходимостью должны предоставлять разработчику учебных курсов широкий набор элементной базы. При этом в их состав обязательно следует включать модули, которые позволяют моделировать индивидуальное и групповое обучение. Данные функциональные компоненты в структуре образовательной платформы будут выступать средством достижения образовательных целей оптимальным образом.

Образовательная платформа, отвечающая принципу адаптивности, должна включать функциональные инструменты совместного контроля, диагностики и мониторинга различных учебных ситуаций. Для этого возможно применять различные методы математического моделирования. При этом они должны позволять интерпретировать результаты обучения и экстраполировать их на построение оптимальных траекторий обучения. В качестве таких методов мы предлагаем использовать теорию графов, методологию соответствия Галуа и математический аппарат импликативных матриц.

В рамках научно-методической школы СмолГУ имеются теоретически и практически обоснованные и сертифицированные разработки, позволяющие как корректировать имеющиеся, так и создавать новые цифровые платформы обучения, отвечающие требованиям адаптивности, гибкости и самонастраивания с учетом выявленного уровня подготовки обучающихся с использованием автоматизированного индивидуального тестирования (система Advanced Tester), коррекции результатов обучения в форме индивидуального и группового обучения (системы «Задачник», «Траектория обучения»).

Имеется многолетний опыт внедрения и сопровождения как авторских, так и массово внедряемых в практику обучения современных цифровых образовательных платформ, онлайн-курсов, а также подготовки учителей к их применению в рамках курсов повышения квалификации, в том числе региональных, межрегиональных, всероссийских. Этот опыт представлен в многочисленных научных статьях, методических разработках специалистов СмолГУ, включенных в группу по заявленному направлению «Модели и технологии обучения в цифровой среде».

В качестве результатов деятельности предполагаются:



1. Объединение в единую цифровую платформу обучения «Smart teacher» либо встраивание в уже существующие платформы модулей адаптивности – систем Advanced Tester, «Задачник», «Траектория обучения».

2. Создание сайта «Smart teacher» для разработки, апробации, внедрения и сопровождения соответствующей системы в массовую практику обучения.

3. Создание сайта Федерального научно-методического центра, в котором будет представлена информация о центре и его деятельности.

4. Проведение всероссийских конференций, выставок, семинаров, курсов повышения квалификации как на базе создаваемого Федерального центра, так и на базе Смоленского областного института развития образования, других региональных и всероссийских институтов, организаций общего, дополнительного и профессионального образования.

5. Разработка и издание научно-методических материалов (статей, сборников статей, методических рекомендаций) по проблемам цифрового обучения, в том числе на содержательной предметной основе.

### **Литература**

1. Об утверждении Концепции создания единой федеральной системы научно-методического сопровождения педагогических работников и управленческих кадров. URL:

<https://fioso.ru/Media/Default/Documents/для%20новостей/Концепция%20создания%20единой%20федеральной%20системы%20научно-методического%20сопровождения%20пед.%20работников.pdf> (дата обращения: 13.03.2022).

2. Об утверждении методических рекомендаций по реализации мероприятий по формированию и обеспечению функционирования единой федеральной системы научно-методического сопровождения педагогических работников и управленческих кадров. URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/51d3c15a6842dce2585500acd9236624/download/3508/> (дата обращения: 13.03.2022).

**G.E. Senkina**

*Smolensk State University*

## **ON THE CREATION OF A FEDERAL CENTER FOR SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL SUPPORT OF PEDAGOGICAL WORKERS ON THE BASIS OF SMOLGU: GOALS, OBJECTIVES, DIRECTIONS**

**Keywords:** *federal center, scientific and methodological support, unified system, models and technologies, training in a digital environment.*

**Abstract.** *The article is devoted to the problem of increasing the level of professional training of teachers in the context of digitalization. Possible ways of solving the problem within the framework of a unified federal system of scientific and methodological support for teaching staff are shown. The main attention is paid to the role of federal centers as one of the elements of this system. The goals, objectives, main directions of federal centers for scientific and methodological support of pedagogical workers are formulated on the example of a newly created center on the basis of Smolensk State University. The problem and main ideas, the planned results of one of the activities of the center "Models and technologies of learning in a digital environment" are disclosed.*

**Н.М. Тимофеева**

*Смоленский государственный университет*

УДК 004.9

## **О ВЛИЯНИИ СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОГО КУРСА ИНФОРМАТИКИ НА РЕЗУЛЬТАТЫ МЕЖДУНАРОДНЫХ СРАВНИТЕЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ ОЦЕНКИ ШКОЛЬНОЙ УСПЕШНОСТИ**

Ключевые слова: *оценка качества образования, международные сравнительные исследования оценки школьной успешности, математическая грамотность, естественнонаучная грамотность, читательская грамотность, школьный курс информатики.*

*В данной работе рассматривается влияние содержания школьного курса информатики на формирование и развитие математической, естественнонаучной и читательской грамотности школьников; приводятся данные международных сравнительных исследований, иллюстрирующие уровень и динамику успешности российских школьников; приводятся примеры заданий из школьных учебников информатики на формирование и развитие читательской грамотности учащихся; делается вывод о необходимости изучения школьного курса информатики как обязательного на начальном этапе обучения и в основной школе.*

Оценка качества российского образования с помощью международных сравнительных исследований помогает сопоставить результаты учебных достижений российских школьников с результатами учащихся из других стран. Она позволяет, во-первых, определить функционирование всей образовательной системы в международном

контексте, во-вторых, оценить качество учебных программ и методов преподавания с дальнейшим определением стратегии и тактики их развития, в-третьих, дает возможность принимать обоснованные решения о реформировании содержания образования и создании образовательных стандартов.

Международные исследования сравнительного сопоставления в области оценки школьной успешности имеют 60-летнюю историю. Регулярное проведение таких исследований началось в 50-е годы XX века. За последние десятилетия выделились отдельные циклы и виды сравнительных исследований:

- естественно-математическое образование – TIMSS, PISA;
- чтение и понимание текстов – PISA, PIRLS;
- граждановедческое образование – CIVIC и ICCS [1].

TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study, проводилось в 1995, 1999, 2003, 2007, 2011, 2015, 2019 гг.) проверяет сформированность умений анализировать, интерпретировать и обобщать информацию, представленную в различной форме (таблицы, диаграммы, графики). В рамках исследования оценивается общеобразовательная подготовка учащихся 4 и 8 классов по математике и естественнонаучным дисциплинам, а также подготовка выпускников 11 классов по углубленным курсам математики и физики.

Таблица 1

Место РФ в исследовании TIMSS

| Класс | Направление исследования        | 1995     | 1999     | 2003     | 2007     | 2011     | 2015    | 2019    |
|-------|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|
| 4     | Естественно-научная грамотность | -        | -        | 9 из 49  | 5 из 59  | 5 из 63  | 4 из 57 | 3 из 67 |
|       | Математическая грамотность      | -        | -        | 9 из 49  | 6 из 59  | 10 из 63 | 7 из 57 | 6 из 67 |
| 8     | Естественно-научная грамотность | 14 из 45 | 16 из 38 | 17 из 49 | 10 из 59 | 7 из 63  | 7 из 57 | 5 из 67 |
|       | Математическая грамотность      | 15 из 45 | 12 из 38 | 12 из 49 | 8 из 59  | 6 из 63  | 6 из 57 | 6 из 67 |

Исследование PISA (Programme for International Student Assessment, 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015, 2018 гг.) проводится трехлетними циклами и направлено на проверку грамотности в области математики, естествознания, чтения и компетентности учащихся в области решения проблем. Ключевой вопрос исследования – обладают ли учащиеся 15-летнего возраста, получившие общее обязательное образование, знаниями и умениями, необходимыми им для полноценного функционирования в обществе? То есть PISA направлена не на определение уровня освоения школьных программ, а на оценку

способности учащихся применять полученные в школе знания и умения в жизненных ситуациях.

Таблица 2

**Место РФ в исследовании PISA**

| Направление исследования | 2000        | 2003        | 2006        | 2009        | 2012        | 2015        | 2018        |
|--------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Математика               | 21-25 из 32 | 29-31 из 40 | 32-36 из 57 | 38-39 из 65 | 31-39 из 65 | 22-24 из 70 | 27-35 из 70 |
| Естествознание           | 26-29 из 32 | 20-30 из 40 | 33-38 из 57 | 38-40 из 65 | 34-38 из 65 | 30-34 из 70 | 30-37 из 70 |
| Чтение                   | 27-29 из 32 | 32-34 из 40 | 37-40 из 57 | 41-43 из 65 | 38-42 из 65 | 19-30 из 70 | 26-36 из 70 |

PIRLS (Progress in International Reading Literacy Study, 2001, 2006, 2011, 2016, 2021 гг.) – это исследование в области качества чтения и понимания текста учащимися начальной школы. Основные компоненты читательской грамотности, проверяемые у учащихся 4 классов:

- нахождение информации в заданном виде;
- формулирование выводов;
- интерпретация и обобщение информации;
- анализ и оценка содержания информации.

Таблица 3

**Место РФ в исследовании PIRLS**

| Направление исследования | 2001     | 2006    | 2011    | 2016    | 2021   |
|--------------------------|----------|---------|---------|---------|--|
| Читательская грамотность | 16 из 35 | 1 из 40 | 2 из 49 | 1 из 50 | ? из 55<br>нет данных на момент написания статьи |

Программы исследований CIVIC (Civic Education, 1999 г.) и ICCS (International Civic and Citizenship Study, 2009, 2016 гг.) выявляют способности учащихся ориентироваться в потоках информации, вырабатывать механизм защиты от манипулирования сознанием личности; наличие аналитических умений: сравнивать, обобщать, находить главное; выражать свое мнение и свое отношение по вопросам, связанным с окружающей жизнью. Данные исследования выявляют знания и понимание гражданской позиции молодого поколения, его самоопределение в социальном обществе.

Результаты сопоставительных международных исследований указывают на то, что

- у российских школьников происходит снижение читательской грамотности при переходе из начальной школы в основную;
- значительное снижение уровня читательской грамотности российских школьников сказывается на результатах по математике и естествознанию;

- ключевые компетентности личности, формируемые в рамках школьного предмета «Информатика и ИКТ», такие как умение анализировать, сравнивать, обобщать информацию, находить главное и т.п. [2], занимают значительное место в содержании всех международных сравнительных исследований.

Все сказанное выше говорит о влиянии школьной информатики не только на уровень математической и естественнонаучной грамотностей, что очевидно, так как информатика – это наука близкородственная математике и дисциплинам естественнонаучного цикла, но и на читательскую грамотность и граждановедческое образование учащихся.

Содержание учебников школьной информатики, например, в таких разделах, как «Инфографика», «Моделирование знаковых систем», «Технологии мультимедиа» и т.п. дает школьникам основные опорные стратегии работы с текстами (символьной информацией), обеспечивающие их понимание. Наличие информационных текстов достаточной сложности, сопровождающихся различными средствами передачи данных: таблицами, графиками, диаграммами и схемами, включение в курс проблемных вопросов и заданий – все это развивает читательские навыки школьников.

Рассмотрим в качестве иллюстрации к сказанному задания на развитие читательской грамотности из учебно-методического комплекса Л.Л. Босовой по курсу «Информатика» для 5, 6, 7 классов.

**Нахождение информации.** Прочтение текста, определение его основных элементов, поиск необходимой информации, иногда выраженной в тексте в непрямой форме, выделение главного и второстепенного содержания.

*Задания из УМК для 5 класса [3]*

Страница 48, тема «Хранение информации», № 57:

Воспользуйтесь текстом учебника, а также справочниками и энциклопедиями и подберите к каждой дате, указанной в левой колонке, соответствующее событие в правой колонке.

| <b>Дата</b>                | <b>Событие</b>  |
|----------------------------|---|
| V – IV тысячелетия до н.э. | Изобретение технологии изготовления бумаги в Китае    |
| II – I тысячелетия до н.э. | Начало книгопечатания в Европе                        |
| II в. н. э.                | Появление алфавитного письма в Финикии                |
| Середина XV в.             | Появление первых лазерных дисков                      |
| Середина XVI в.            | Первые следы иероглифического письма в Древнем Египте |
| 1839 г.                    | Начало книгопечатания в России                        |
| 70-е гг. XIX в.            | Появление первых жестких дисков для компьютеров       |
| 1895 г.                    | Изобретение магнитофона                               |
| 20-е гг. XX в.             | Изобретение фотографии                                |
| 60-е гг. XX в.             | Первая запись звука с помощью фонографа               |
| 80-е гг. XX в.             | Демонстрация первого кинофильма                       |

*Задания из УМК для 6 класса [4]*

Страница 5, тема «Знаковые информационные модели», № 115:

Воспользуйтесь учебником биологии и приведите пример словесной модели объекта растительного или животного мира.

*Задания из УМК для 7 класса [5]*

Страница 29, вопросы и задания по теме «Информация и информационные процессы», № 5:

Представим, что текст этого параграфа размещён на web-сайте. Какие слова из текста можно выбрать в качестве ключевых, чтобы наиболее точно передать его смысл? Перечислите до 10 таких слов.

Страница 79, вопросы и задания по теме «Компьютер», № 11:

Пользуясь дополнительными источниками информации, ответьте на следующие вопросы:

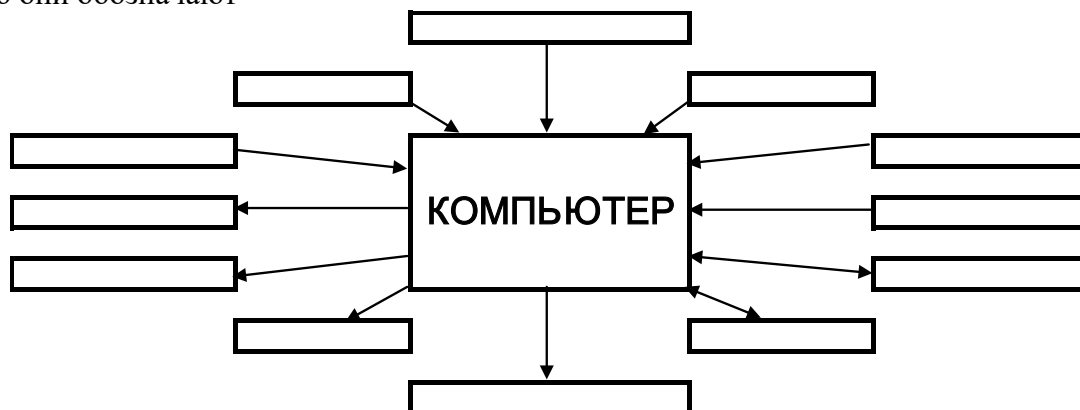
- 1) Один из языков программирования называется АДА. Каково происхождение этого названия?
- 2) Каково происхождение названия языка программирования Паскаль?
- 3) Кто является разработчиком языка программирования Лого?

**Интерпретация текста.** Сравнение и противопоставление заключённой в тексте информации разного характера, обнаружение в нём аргументов и выводов, выведение заключения о намерении автора или главной мысли текста.

*Задания из УМК для 5 класса [3]*

Страница 19, тема «Компьютер – универсальная машина для работы с информацией», № 18:

Впишите в рамки названия всех известных вам устройств, которые могут быть подключены к компьютеру. Обратите внимание на направление стрелок. Подумайте, что они обозначают



*Задания из УМК для 6 класса [4]*

Страница 6, тема «Знаковые информационные модели», № 117:

Модель каких отношений между людьми построена в басне И.А. Крылова «Волк и Ягненок»? Приведите строки басни, подтверждающие вашу мысль.

*Задания из УМК для 7 класса [5]*

Страница 69, вопросы и задания по теме «Компьютер», № 10:

Постройте граф, описывающий состав устройства персонального компьютера.

Страница 132, вопросы и задания по теме «Обработка графической информации», № 6:

Почему с помощью цветовой модели HSB человеку более удобно подбирать нужный цвет, чем с помощью цветовой модели RGB?

**Рефлексия содержания текста или его формы и их оценка.**

Связывание информации, обнаруженной в тексте, со знаниями из других источников, оценка утверждений, сделанных в тексте, исходя из своих представлений о мире, нахождение доводов в защиту своего мнения

*Задания из УМК для 5 класса [3].*

Стр. 21, тема «Компьютер – универсальная машина для работы с информацией», № 22:

Компьютер состоит из устройств, выполняющих некоторые функции мыслящего человека. Проведите аналогию между человеком и компьютером и заполните таблицу.

| Органы человека                           | Информационный процесс      | Устройства компьютера |
|---|-----------------------------|-----------------------|
| Органы чувств                             | Прием (ввод) информации     |                       |
| Мозг                                      | Хранение информации         |                       |
| Мозг                                      | Обработка информации        |                       |
| Органы речи и опорно-двигательной системы | Передача (вывод) информации |                       |

*Задания из УМК для 6 класса [4]*

Страница 8, тема «Знаковые информационные модели», № 119:

Придумайте и запишите сиквейны.

Компьютер \_\_\_\_\_

Общение \_\_\_\_\_

Модель \_\_\_\_\_

*Задания из УМК для 7 класса [5]*

Страница 21, вопросы и задания по теме «Информация и информационные процессы», № 3:

Подберите примеры ситуаций (из повседневной жизни, художественной литературы, кино), в которых информация:

- а) собирается;      б) копируется;      в) обрабатывается;      г) передается;  
д) упрощается;      е) принимается;      ж) создается;      з) разрушается;  
и) запоминается;      к) делится на части;      л) измеряется;      м) ищется.

Стр. 157, вопросы и задания по теме «Обработка текстовой информации», № 2:

Как вы понимаете высказывание о том, что «навык квалифицированного клавиатурного письма сегодня считается социальным, общекультурным»? Нужен ли этот навык лично вам?

Приведенные в статье результаты международных сравнительных исследований и анализ содержания школьного курса информатики говорят о большом потенциале этой дисциплины для повышения уровня успешности российских школьников, возможности влияния школьной информатики не только на математическую и естественнонаучную грамотность учащихся, но и на читательскую. Это еще раз подтверждает

необходимость введения дисциплины «Информатика и ИКТ» как обязательного предмета на всех этапах обучения – пропедевтическом, базовом и профильном.

### Литература

1. <https://fioco.ru/> – сайт Федерального института оценки качества образования.
2. Тимофеева Н.М. О целеполагании в школьном курсе информатики: от алгоритмической культуры к цифровой грамотности / Развитие научно-технического творчества детей и молодежи – НТТДМ 2021: сборник материалов V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Киров, 2021. С. 31-35.
3. Босова Л.Л. Информатика: рабочая тетрадь для 5 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017.
4. Босова Л.Л. Информатика: рабочая тетрадь для 6 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2018.
5. Босова Л.Л. Информатика: учебник для 7 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2018.

**N.M. Timofeeva**

Smolensk State University

**Keywords:** *assessment of the quality of education, international comparative studies of school success assessment, mathematical literacy, natural science literacy, reading literacy, school computer science course.*

**Abstract.** *This paper examines the influence of the content of the school course of computer science on the formation and development of mathematical, natural science and reading literacy of schoolchildren; provides data from international comparative studies illustrating the level and dynamics of success of Russian schoolchildren; provides examples of tasks from school textbooks of computer science on the formation and development of reading literacy of students; concludes that it is necessary to study a school course of computer science as mandatory at the initial stage of education and in primary school.*

**Н.А. Шерстнёва**

Смоленский государственный университет

УДК 519.677

### О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ WOLFRAMMATHEMATICA В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Ключевые слова: *СКМ WolframMathematica, решение задач математического анализа в математических пакетах.*

*В статье отражены некоторые возможности системы компьютерной математики WolframMathematica в решении задач*



*математического анализа на основе преподавательской практики автора на таких направлениях подготовки, как 44.03.05 Педагогическое образование с двумя профилями (профили «Математика и информатика», «Физика и информатика») и 08.03.01 Строительство (профиль «Промышленное и гражданское строительство»).*

Образовательный процесс в вузе на протяжении последних лет периодически подвергается трансформации и модернизации. Новые федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования призваны повысить качество обучения по выбранному направлению подготовки; сформировать необходимый спектр универсальных и специфических компетенций; подготовить базу для будущей профессиональной деятельности бакалавров; вооружить их знаниями, умениями и навыками решения предметных и профессиональных задач. Среди современных трендов высшей школы – цифровизация образовательной среды, внедрение в рабочие программы дисциплины сквозных цифровых технологий, в том числе за счёт использования в процессе преподавания систем вычислительной математики. Математические пакеты существенно упрощают трудоёмкость математических выкладок; сокращают время решения задач математического анализа; способствуют большей наглядности и «осязаемости» предметного материала; формируют цифровые компетенции студентов; развивают креативность их мышления; помогают при написании выпускной квалификационной работы; расширяют предметный и профессиональный инструментарий выпускников различных направлений подготовки.

В Смоленском государственном университете первоначальное знакомство бакалавров с системами компьютерной математики происходит на лабораторных занятиях по математическому анализу, начиная с первого курса обучения (в рамках рабочей программы дисциплины Б1.О.19 Математический анализ для направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование с двумя профилями (направление подготовки «Математика и информатика» с 2021–2022 учебного года; направления подготовки «Математика и информатика» и «Физика и информатика» в 2016–2021 учебных годах) и в курсе Б1.О.19 Математический анализ для направления подготовки 08.03.01 Строительство (профиль «Промышленное и гражданское строительство») в 2016–2021 учебных годах). Второй, более глубокий уровень погружения в математические пакеты реализуется на летних вычислительных и ознакомительных практиках (Б2.О.02(У) ознакомительная практика по математической обработке данных для направления подготовки 08.03.01 и Б2.О.06(У) вычислительная практика по основам математической обработки информации для направления

подготовки 44.03.05). Цифровые и профессиональные компетенции, связанные с системами компьютерной математики (WolframMathematica, Mathcad, Statistica, GeoGebra), формируются и на других курсах, реализуемых преподавателями кафедры математического анализа.

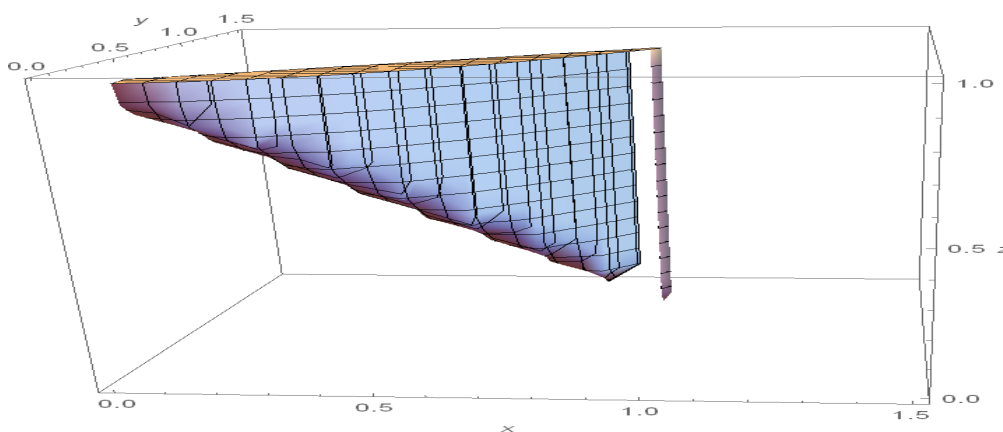
Остановимся на некоторых приложениях математического пакета WolframMathematica, реализуемых автором в своей преподавательской деятельности.

**Пример 1.** Вычислить объём тела, ограниченного сверху плоскостью  $2 - x - y - 2z = 0$ , снизу – плоскостью  $Oxy$ , с боков – поверхностью  $y = x^2$  и плоскостью  $y = x$ .

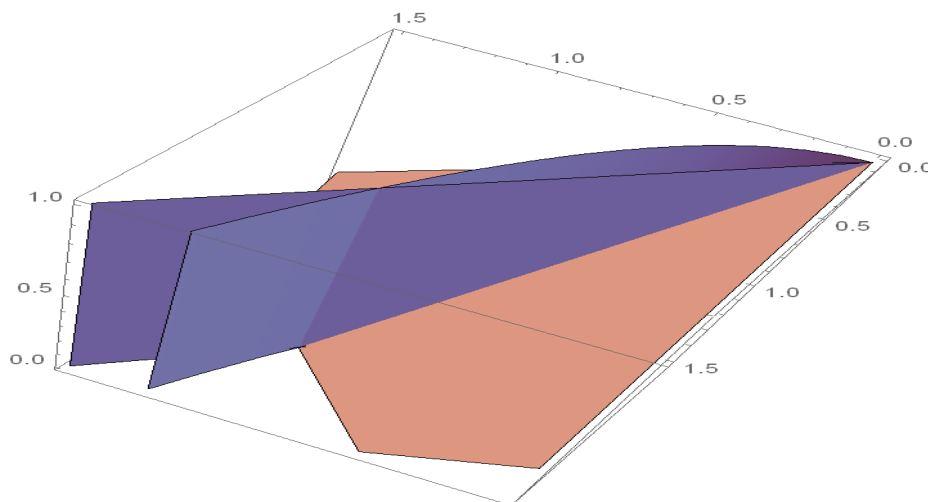
*Решение.*

/изображение тела/

```
RegionPlot3D[2 - x - y - 2z <= 0 && y - x^2 >= 0 &&
y <= x, {x, 0, 1.5}, {y, 0, 1.5}, {z, 0, 1}, AxesLabel -> {x, y, z}]
```



```
ContourPlot3D[{2 - x - y - 2z == 0, y - x^2 == 0, y - x == 0}, {x, 0, 1.5}, {y, 0, 1.5}, {z, 0, 1}, Mesh -> None]
```



/вычисление объёма/

```
Integrate[1 - x/2 - y/2, {x, 0, 1}, {y, x^2, x}]
```

$\frac{11}{120}$

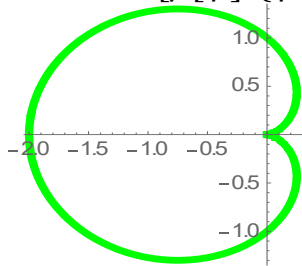
**Пример 2.** Найти длину кардиоиды и площадь фигуры, ограниченной кардиоидой.

*Решение.*

/заданье кардиоиды и её изображение/

$$\rho[\phi] := 1 - \text{Cos}[\phi];$$

$$\text{PolarPlot}[\rho[\phi], \{\phi, 0, 2 * \pi\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.03], \text{Green}\}]$$



/вычисление площади фигуры/

$$1/2 * \int_0^{2*\pi} \rho[\phi]^2 d\phi$$

$$\frac{3\pi}{2}$$

/нахождение длины кривой/

$$2 * \int_0^{\pi} \sqrt{\rho[\phi]^2 + \rho'[\phi]^2} d\phi$$

8

**Пример 3.** Решить дифференциальное уравнение и найти его частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$y' + 46xy = 23xe^{-x^2}, y(0) = \frac{23}{44}.$$

*Решение.*

$$\text{DSolve}[y'[x] + 46 * x * y[x] == 23 * x * e^{-x^2}, y[x], x]$$

$$\{\{y[x] \rightarrow \frac{23e^{-x^2}}{44} + e^{-23x^2} C[1]\}\}$$

$$\text{DSolve}[\{y'[x] + 46 * x * y[x] == 23x * e^{-x^2}, y[0] == \frac{23}{44}\}, y[x], x]$$

$$\{\{y[x] \rightarrow \frac{23e^{-x^2}}{44}\}\}$$

**Пример 4.** Исследовать функцию  $f(x) = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1$  и построить её график.

*Решение.*

/заданье функции, поиск области определения/

$$f[x_] := 3 * \text{Log}[\frac{x}{x-3}] - 1$$

$$\text{FunctionDomain}[3 * \text{Log}[\frac{x}{x-3}] - 1, x]$$

$x < 0 || x > 3$

/исследование на монотонность и экстремум/

```
f1 = Simplify[D[f[x], x]];
V = Reduce[f1 ≥ 0 && FunctionDomain[f[x], x], x];
U = Reduce[f1 ≤ 0 && FunctionDomain[f[x], x], x];
s = Solve[f1 == 0 && FunctionDomain[f[x], x], x];
Print["Производная функции: ", f1]
```

"Производная функции:  $-\frac{9}{(-3+x)x}$ "

```
Print["Промежутки возрастания функции: ", V]
```

"Промежутки возрастания функции: False"

```
Print["Промежутки убывания функции: ", U]
```

"Промежутки убывания функции:  $x < 0 || x > 3$ "

```
Print["Стационарные точки функции: ", s]
```

"Стационарные точки функции: {}"

/исследование на выпуклость и вогнутость, перегиб/

```
f2 = Simplify[D[f[x], {x, 2}]];
M = Reduce[f2 < 0 && FunctionDomain[f[x], x], x];
W = Reduce[f2 > 0 && FunctionDomain[f[x], x], x];
p = Solve[f2 == 0 && FunctionDomain[f[x], x], x];
Print["Вторая производная функции", f2]
```

"Вторая производная функции  $\frac{9(-3+2x)}{(-3+x)^2x^2}$ "

```
Print["Функция выпукла при", M]
```

"Функция выпукла при  $x < 0$ "

```
Print["Функция вогнута при", W]
```

"Функция вогнута при  $x > 3$ "

```
Print["Точки подозрительные на перегиб", p]
```

"Точки подозрительные на перегиб {}"

/поиск асимптот графика функции/

```
k = Limit[f[x]/x, x → -∞];
b = Limit[f[x] - k * x, x → -∞];
y = k * x + b;
k1 = Limit[f[x]/x, x → +∞];
b1 = Limit[f[x] - k1 * x, x → +∞];
y1 = k1 * x + b1;
```

```
If[(Element[k, Reals] && Element[b, Reals]), Print["Асимптота при x  
→ -∞: y = ", y], Print["При x → -∞ асимптоты нет"]]
```

"Асимптота при  $x \rightarrow -\infty: y = -1$ "

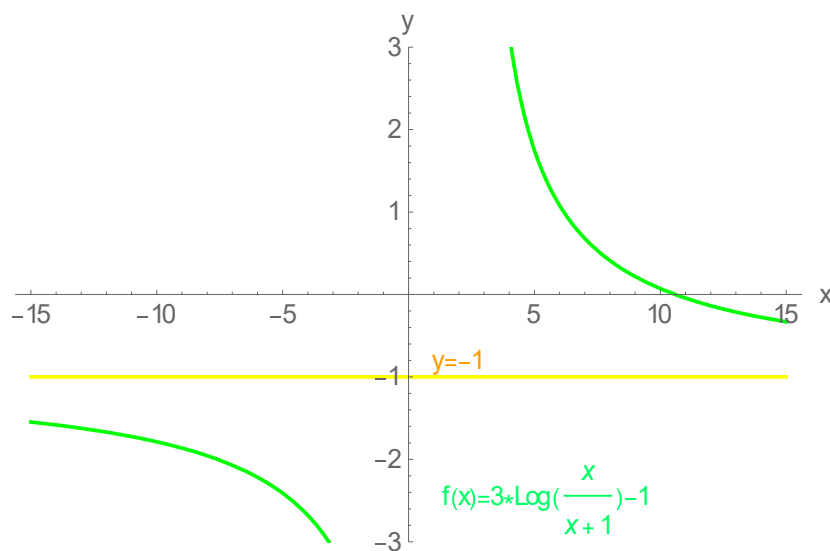
```
If[(Element[k1, Reals] && Element[b1, Reals]), Print["Асимптота при x  
→ +∞: y = ", y1], Print["При x → +∞ асимптоты нет"]]
```

"Асимптота при  $x \rightarrow +\infty: y = -1$ "

```

/точки пересечения графика с осью абсцисс/
sol = Solve[f[x] == 0];
Print["Точки пересечения с осью Ох: ", sol]
"Точки пересечения с осью Ох: {{x ->  $\frac{3e^{1/3}}{-1 + e^{1/3}}$ }}"
/построение графика функции/
Plot[{f[x], y}, {x, -15, 15}, PlotStyle -> {Green, Yellow}, AxesLabel
-> {"x", "y"}, Epilog -> {Hue[0.4], Text["f(x)
= 3 * Log("  $\frac{x}{x+1}$  ") - 1", {5.5, -2.5}], Hue[0.1], Text["y
= -1", {2, -0.8}]}], PlotRange -> {-3, 3}]

```



**N.A. Sherstneva**  
Smolensk State University

## ABOUT SOME APPLICATIONS OF THE WOLFRAM MATHEMATICA COMPUTER MATHEMATICS SYSTEM IN TEACHING MATHEMATICAL ANALYSIS

**Keywords:** *computer math system Wolfram Mathematica, solving problems of mathematical analysis in mathematical packages.*

**Abstract.** *The article reflects some of the capabilities of the Wolfram Mathematica computer mathematics system in solving mathematical analysis problems based on the author's teaching practice in such areas of training as 44.03.05 Pedagogical education with two profiles (profiles "Mathematics and Computer Science", "Physics and Computer Science") and 08.03.01 Construction (profile "Industrial and Civil Engineering").*

**М.Ю. Ястребов, И.В. Ланева**  
*Санкт-Петербургский государственный университет  
имени адмирала С.О. Макарова*

УДК 519.212.2

**ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ – ОБЛАСТЬ  
ПРИМЕНЕНИЯ ДИАЛОГОВОГО МАШИННОГО  
ЭКСПЕРИМЕНТА В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ  
В КУРСЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Ключевые слова: *теория вероятностей, методика преподавания, парадоксы, машинный эксперимент, парадокс дней рождения, парадокс Монти-Холла, парадокс времени ожидания.*

*В данной работе обобщается опыт статистической иллюстрации основных положений теории вероятностей в учебном процессе на материале парадоксов теории вероятностей.*

В условиях повсеместной глубокой компьютеризации учебного процесса в высшей школе появляются новые возможности повышения интереса студентов к изучаемым дисциплинам, в обсуждаемом случае – к теории вероятностей как разделу общего курса высшей математики. Нам представляется, что благодатную почву для этого предоставляют парадоксы теории вероятностей. Их рассмотрение вызывает, как правило, глубокий интерес и оживлённую дискуссию в аудитории.

Статистический аспект проявления вероятностей в серии испытаний, то есть эмпирический закон больших чисел, предполагает машинный эксперимент на базе компьютерного класса (хотя статистически значимую для проявления не слишком малых вероятностей серию, скажем из тридцати испытаний, вполне можно реализовать, имея запас разноцветных фишек или колоду карт).

Обсуждение данной темы на практических (лабораторных) занятиях целесообразно проводить в следующей последовательности:

- 1) наблюдение парадокса в традиционной формулировке и первоначальное обсуждение студентами;
- 2) расчёт теоретических вероятностей, участвующих в парадоксе; объяснение парадокса с привлечением соответствующих теорем; аппарат теории вероятностей позволяет здесь использовать альтернативные подходы – например, классическое определение вероятности по схеме равновероятных исходов и формулы Байеса;
- 3) формализация ситуации, приводящей к парадоксу;
- 4) запись блок-схемы многократно воспроизводимого в режиме диалога эксперимента;

5) участие студентов в формировании выбора (например, выбор двери в случае реализации парадокса Монти-Холла в первичной игровой ситуации шоу, формирование случайных наборов дат в случае парадокса дней рождения и т. д.);

б) автоматический пошаговый запуск серии испытаний (с оговорённой стратегией в случае альтернативного выбора).

Для реализации последних пунктов предлагаемого плана, разумеется, нужно располагать программным модулем с соответствующим интерфейсом. Здесь важно отметить, что программная реализация модуля (алгоритмически весьма несложная) может выступать как задание в рамках параллельно или ранее изучаемого курса программирования, что особенно полезно для информационных специальностей.

Отдельным разделом, связанным с моделированием парадоксов, может выступать краткое изложение методов «ручного» получения псевдослучайных чисел, без которых невозможно проведение машинного статистического эксперимента. Лабораторная работа, связанная с получением наборов таких чисел «вручную», может предшествовать машинным экспериментам, связанным с парадоксами (когда получение случайных чисел стандартными процедурами языков программирования остаётся для пользователя «за кадром» [1; 2]).

**1. Парадокс Монти-Холла.** В исходном шоу-обрамлении парадокса играющий выбирает одну из трёх закрытых дверей, за одной из которых находится призовой автомобиль, а за двумя другими приз отсутствует. После акта выбора ведущий открывает ту из двух оставшихся дверей, за которой приза нет, и ставит играющего перед выбором: сохранить прежний выбор либо изменить его на дверь, оставшуюся закрытой. Парадокс заключается в том, что смена двери играющим повышает вероятность его выигрыша, хотя, казалось бы, он и до того знал, что за двумя из трёх дверей приза нет, и он, таким образом, не узнал ничего нового. Правильный ответ, проявляемый статистически: вероятность выигрыша при смене двери увеличивается с исходного значения  $1/3$  до  $2/3$ .

Как показывает наш опыт, малоубедительным для студентов оказывается следующее качественное объяснение: сохранение первоначального выбора оставляет играющего в ситуации «один шанс из трёх», а изменение выбора переводит в ситуацию «один шанс из двух». Кроме того, это рассуждение не даёт количественного значения соответствующих вероятностей.

Целесообразно предъявить аудитории три разных способа расчёта вероятностей в парадоксе, что, собственно, и означает его объяснение.

1. Пусть, например, играющим выбрана дверь № 1. Вероятность выигрыша –  $1/3$ . Вероятность нахождения приза за одной из оставшихся

дверей равна  $2/3$ ; эти две трети приходятся на группу из двух дверей {№ 2, № 3}. После открытия одной из них эти же две трети приходятся уже на одну дверь, так что при смене первоначального выбора вероятность получения приза равна  $2/3$ .

Более развёрнутое объяснение опирается либо на схему равновероятных исходов, либо на формулу Байеса.

2. В первом случае строится дерево элементарных исходов, состоящих из (равновероятного) назначения ведущим призовой двери и первоначального (равновероятного) выбора играющего (рис. 1).

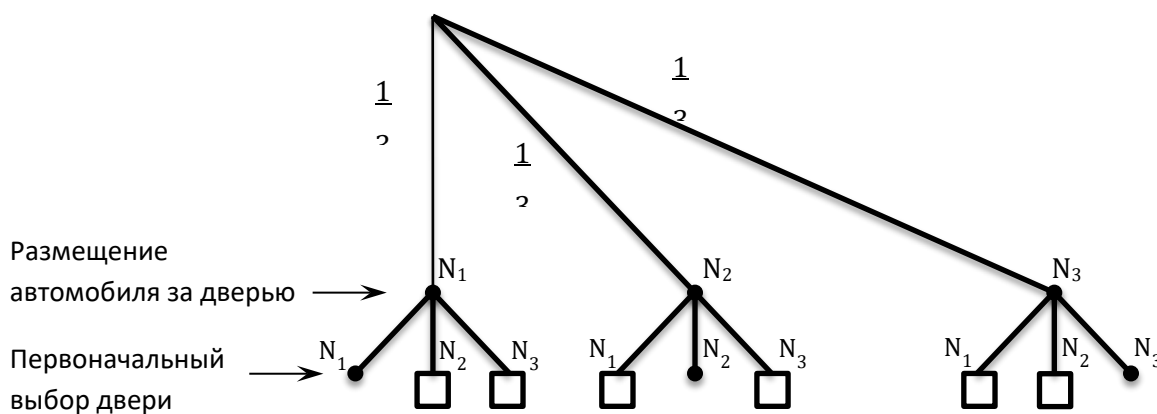


Рис. 1

На узлах первого уровня показаны варианты призовой двери и их вероятности, равные  $1/3$ ; на узлах второго уровня (листьях дерева) – варианты (с вероятностью также  $1/3$ ) первоначального выбора двери. Вероятность каждого листа равна  $1/9$ . Квадратами изображены те листья дерева, которые приводят к получению приза при изменении первоначального выбора. Вероятность выигрыша при изменении выбора, таким образом, равна  $6/9$ , а при сохранении –  $3/9$ .

3. Применим формулы Байеса. Пусть, например, играющий первоначально выбрал 1-ю дверь.

Введём гипотезы  $H_i$  ( $i=1,2,3$ ) – призовой является  $i$ -я дверь. Априорные вероятности всех гипотез равны  $1/3$ . Двери № 2 и № 3 симметричны относительно дальнейших действий. Событие  $B$  — ведущий открыл дверь № 3. Условные вероятности:  $P(B / H_1) = 1/2$ ;  $P(B / H_2) = 1$ ;  $P(B / H_3) = 0$ . По формуле полной вероятности

$$P(B_1) = P(H_1)P(B / H_1) + P(H_2)P(B / H_2) + P(H_3)P(B / H_3) = 1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 0 = 1/2.$$

Теперь

$$P(H_1 / B) = \frac{P(H_1)P(B / H_1)}{P(B)} = \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/2} = 1/3.$$



$$P(H_2 / B) = \frac{P(H_2)P(B / H_2)}{P(B)} = \frac{1/3 \cdot 1}{1/2} = 2/3.$$

**2. Парадокс дней рождения.** Этот парадокс широко известен. Вероятность  $p(n)$  того, что в случайно собранной группе из  $n$  человек (например, студенческой) хотя бы у двух из них день рождения придётся на одно и то же число (без учёта года рождения), при  $n \geq 23$ , превышает 0,5; эта вероятность растёт с увеличением количества членов группы, так что при  $n \geq 57$  уже  $p(n) \geq 0,99$ . Это противоречит интуитивно ожидаемой оценке вероятности, что, по-видимому, связано с ошибочным восприятием числа  $\frac{1}{365} \cdot 23 \approx 0.067$ , как примерно равного искомой

вероятности. К слову сказать, данное расхождение может быть использовано как яркий пример при обсуждении формулы для вероятности суммы совместных событий и связанной с ней теоретико-множественной формулы включений-исключений.

После проверки «вживую» наличия совпадений дней рождения в группе целесообразно провести следующий статистический эксперимент «в общих обозначениях» с использованием соответствующего программного модуля:

- $k$  раз циклически выполняется следующая процедура;
- формируется псевдослучайная последовательность из  $n$  натуральных чисел, независимо выбираемых с равной вероятностью из диапазона  $1 \div N$  (здесь  $N$  – аналог числа 365);
- проверяется наличие в ней хотя бы одного совпадения членов;
- накапливается текущее значение  $m$  счётчика количества выявленных совпадений;
- по завершении цикла вычисляется относительная частота  $v(k, n, N) = m / k$  наличия совпадений как статистическая оценка теоретической вероятности  $p(n, N)$ .

Далее с использованием программного модуля возможно экспериментальное исследование поведения величины  $v(k, n, N)$  при независимом изменении параметров  $k$ ,  $n$  и  $N$  ( $n < N$ ) и сопоставление этой оценки с теоретической вероятностью  $p(n, N) \approx 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2N}}$ .

**3. Парадокс времени ожидания.** Если на маршруте автобусы ходят строго по расписанию, прибывая на каждую остановку через равные промежутки времени  $t$ , то среднее время ожидания для пассажира, пришедшего на остановку в случайный равномерно распределённый на промежутке  $[0, t]$  момент времени  $\tau$  равно  $t/2$ . Интуитивное предположение, что такая же средняя длительность ожидания автобуса

( $M(\tau) = t/2$ ) будет иметь место при любом ином распределении случайной величины  $\tau$  (то есть при неравномерном в силу случайных обстоятельств движении) противоречит реальным наблюдениям, поскольку оказывается  $M(\tau) > t/2$ .

Например, если прибытие автобуса на остановку моделируется простейшим потоком событий, то  $\tau$  имеет показательное распределение, при этом среднее время ожидания равно  $\tau$ .

На практическом /лабораторном занятии вполне достаточно следующего качественного объяснения. Пусть  $T$  – средняя длительность, за которую автобус проходит весь маршрут,  $a$  – момент начала ожидания (равномерно распределён на  $[0, T]$ ). При неравномерном движении более длинным дистанциям между двумя непосредственно следующими друг за другом автобусами соответствуют более длинные промежутки времени между их появлениями в фиксированной точке маршрута, которые в сумме занимают большую чем  $T/2$  долю от  $T$  (рис. 2).

Экспериментальную статистическую проверку студенты могут осуществить следующим образом. После некоторого периода неравномерного по скорости движения автобусы случайным образом располагаются на маршруте, после чего движение вновь становится равномерным, так что время ожидания пропорционально расстоянию до ближайшего автобуса.

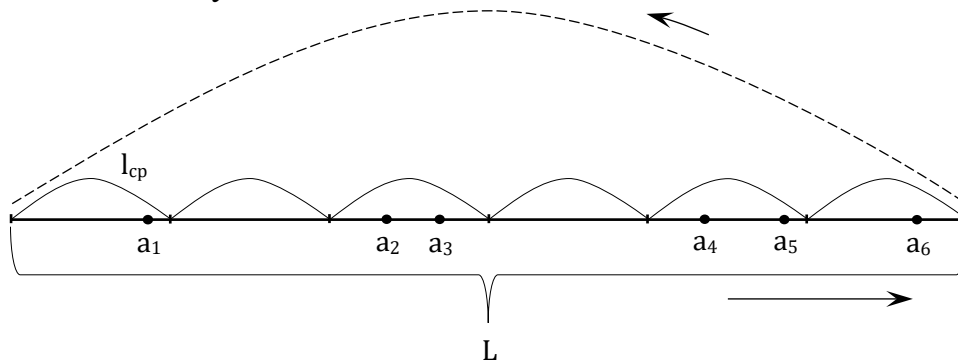


Рис. 2

Студент получает лист с изображением случайного расположения  $n$  автобусов на маршруте длины  $L$  единиц. Проводя испытание, он формирует (вручную или программными средствами) значение случайной величины  $x$ , равномерно распределённой на  $[0, L]$  и задающей место ожидания (рис. 2). После этого вычисляется по чертежу значение  $l$  расстояния до ближайшего автобуса. Это значение сравнивается со средним расстоянием при равномерной расстановке автобусов на маршруте, то есть с  $L/(2n)$ .

После серии из  $k$  испытаний вычисляется относительная частота  $\nu$

события ( $l > l_{cp}$ ), означающего превышение фактического времени ожидания его среднего значения при равномерном движении. Ожидается, что при достаточно большом  $k$  студент убедится, что  $\nu > 1/2$ .

### Литература

1. Ланева И.В., Нырков А.П., Ястребов М.Ю. Статистическая иллюстрация основных положений теории вероятностей. Л.: ЛИВТ, 1989. 15 с.

2. Ястребов М.Ю, Ланева И.В. Методические вопросы разработки структуры и содержания лабораторного практикума по дисциплине «Случайные процессы» // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX Международной научной конференции. СмолГУ-2018. Вып. 19. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. С. 405-409.

3. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1990. 240 с.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001. 318 с.

5. Ястребов М.Ю. Теория вероятностей. СПб, ГУМРФ, 2018. 112 с.

**M.Y. Yastrebov, I.V. Laneva**

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping

### **PARADOXES OF PROBALITE THEORY – APPLICATION AREA IN THE EDUKATIONAL PROCESS IN THE COURSE OF PROBALITE THEORY**

**Keywords:** *probalite theory, method of teaching, paradoxes, machine experiment, birthdays paradox, Monty Hall problem, waiting time paradox.*

**Abstract.** *The article describes experience of statistical illustration of the main provisions of the theory of probability in the educational process on the basis of the paradoxes.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Абдуллаева Мехирбан Махаметжановна** – доцент, кандидат психологических наук, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: mehirban@rambler.ru

**Адуков Виктор Михайлович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и методики преподавания математики Южно-Уральского государственного университета. E-mail: adukovvm@susu.ru

**Адукова Наталия Викторовна** – аспирант, ассистент кафедры математического анализа и методики преподавания математики Южно-Уральского государственного университета. E-mail: adukovanv@susu.ru

**Банару Галина Анатольевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com

**Банару Михаил Борисович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com

**Бирюкова Татьяна Константиновна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального информационного центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ИПИ ФИЦ ИУ РАН). E-mail: yukonta@mail.ru

**Блохин Данил Андреевич** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. blokhin\_danill@mail.ru

**Богданова Надежда Николаевна** – старший преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: nadingioia@yandex.ru

**Бондарь Александр Александрович** – аспирант кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: alex.kvitkovsky@yandex.ru

**Борисов Вадим Владимирович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной техники филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: vbor67@mail.ru

**Бороздина Анастасия Юрьевна** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: borozdinaanactacy@gmail.com

**Бояринов Дмитрий Анатольевич** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий

Смоленского государственного университета. E-mail: dmboyarinov@mail.ru

**Булименко Алексей Дмитриевич** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: mekyne92@gmail.com

**Булименко Антон Дмитриевич** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: antonbulimenko@gmail.com

**Быков Александр Александрович** – кандидат педагогических наук, завкафедрой физики филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: alex1by@mail.ru

**Веселов Владимир Федорович** – начальник отдела НПК «Технологический центр», научный сотрудник СПИНТех Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: 1233801@bk.ru

**Веснин Сергей Георгиевич** – кандидат технических наук, генеральный директор ООО «Фирма РЭС». E-mail: Vesnin47@gmail.com

**Винокурова Анна Сергеевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: leanqueen@gmail.com

**Воробьев Максим Сергеевич** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: maks233online@gmail.com

**Вувуникян Юрий Микиртычевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. E-mail: vuv64@mail.ru

**Гагарина Лариса Геннадьевна** – профессор, доктор технических наук, директор Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: gagar@bk.ru

**Гадальшин Александр Фаридович** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: english200999@gmail.com

**Гершкович Максим Михайлович** – старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального информационного центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ИПИ ФИЦ ИУ РАН). E-mail: makmg@mail.ru

**Гомонов Сергей Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: gomonov.serg@yandex.ru

**Гончаров Евгений Игоревич** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: drbenvey1996@mail.ru

**Городилов Алексей Владиславович** – кандидат технических наук, институт СПИНТех МИЭТ. E-mail: kaverina@mail.ru

**Дюндин Андрей Викторович** – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и технических дисциплин Смоленского государственного университета. E-mail: avdyndin@yandex.ru

**Евдокимова Галина Семеновна** – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: evgalsema@yandex.ru

**Емельченков Евгений Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: уру1101@gmail.com

**Забезжайло Михаил Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом интеллектуального анализа данных и автоматизированной поддержки научных исследований Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН. E-mail: m.zabezhailo@yandex.ru

**Захаров Виктор Николаевич** – доктор технических наук, доцент, ученый секретарь Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: vzakharov@ipiran.ru

**Ильин Павел Леонидович** – студент магистратуры физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: zub.dayu@mail.ru

**Карачик Валерий Валентинович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Южно-Уральского государственного университета. E-mail: karachik@susu.ru

**Карпенко Анатолий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Системы автоматизированного проектирования» МГТУ им. Н.Э. Баумана. E-mail: arkarpenk@mail.ru

**Кирьяцкий Эдуард Григорьевич** – доктор физико-математических наук, профессор Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса. E-mail: eduard.kiriyatzkii@mail.ru

**Киселева Ольга Михайловна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: foxu03@yandex.ru

**Козлов Сергей Валерьевич** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики

Смоленского государственного университета. E-mail: svkozlov1981@yandex.ru

**Конашенкова Татьяна Дмитриевна** – кандидат физико-математических наук, ведущий программист в отделении «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных» Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: tkonashenkova64@mail.ru

**Кононова Александра Игоревна** – кандидат технических наук, институт СПИНТех МИЭТ. E-mail: illinc@bk.ru

**Корепанов Эдуард Рудольфович** – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, руководитель отдела в отделении «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных» Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: ecorepanov@ipiran.ru

**Костин Андрей Борисович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки НИЯУ «МИФИ». E-mail: abkostin@yandex.ru

**Кристалинский Владимир Романович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: kristvr@rambler.ru

**Кузнецова Алла Спартаковна** – кандидат психологических наук, доцент кафедры психологии труда и инженерной психологии факультета психологии МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: kuznetsovamsu@rambler.ru

**Ланева Ирина Владимировна** – кандидат экономических наук, доцент кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. E-mail: lainir@list.ru

**Лютикас Павел Леонидович** – сотрудник Военной академии войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации.

**Матвеев Роман Алексеевич** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: roman89203323606@gmail.com

**Махина Наталья Михайловна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского. E-mail: mahinanm@yandex.ru

**Михалёва Татьяна Игоревна** – аспирант кафедры математического анализа физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tat.timopheeva@yandex.ru

**Морозов Сергей Андреевич** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: jndrn17@yandex.ru

**Алмохамед Муатаз** – аспирант кафедры математического анализа Московского педагогического государственного университета и сотрудник Университета Алеппо (Syria). E-mail: mssrmtz@gmail.com

**Мунерман Виктор Иосифович** – доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета, кандидат технических наук. E-mail: vimoona@gmail.com

**Мунерман Даниил Викторович** – стажер-исследователь, Смоленский государственный университет. E-mail: danvmoon@gmail.com

**Нагорная Татьяна Романовна** – аспирант кафедры математического анализа физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tani7n@gmail.com

**Нгуен Ван Минь** – аспирант Российского технологического университета – МИРЭА. E-mail: nguyenninhvkq1009@gmail.com

**Николаев Константин Сергеевич** – аспирант Московского института электронной техники, ассистентом института СПИИТех. E-mail: knpreacher@gmail.com

**Новикова Диана Геннадьевна** – аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского. E-mail: dyasha.19@yandex.ru

**Окорочков Иван Владимирович** – аспирант кафедры математического анализа, математический факультет Института математики и информатики, Московский педагогический государственный университет. E-mail: ivan.okorochkov@yandex.ru

**Ольшанский Алексей Михайлович** – кандидат технических наук, руководитель Центра перспективных разработок АО «Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт информатизации, автоматизации и связи на железнодорожном транспорте». E-mail: lexolshans@gmail.com

**Парамонов Алексей Анатольевич** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов МИРЭА – Российского технологического университета. E-mail: paramonov@mirea.ru

**Перельман Наталья Романовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аналитических и цифровых



технологий Смоленского государственного университета. E-mail: perelmannr@gmail.com

**Прудников Игорь Михайлович** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-исследовательского центра Смоленского государственного медицинского университета Минздрава России. E-mail: prudnik09@yandex.ru

**Расулов Карим Магомедович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: kahrimanr@yandex.ru

**Савченкова Наталья Николаевна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: snn.smolgu@yandex.ru

**Садекова Екатерина Халиловна** – старший преподаватель кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ». E-mail: EKSadekova@mephi.ru

**Самойлова Татьяна Аркадьевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: tatsamoiliva24@gmail.com

**Светлаков Алексей Владимирович** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: seferlian@mail.ru

**Сенчилов Владислав Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: senchilov.vv@gmail.com

**Сенькина Гульжан Ержановна** – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информационных и образовательных технологий, руководитель Федерального центра научно-методического сопровождения педагогических работников на базе Смоленского государственного университета. E-mail: gulzhan.senkina@gmail.com

**Симаков Валерий Александрович** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: 67Rus.67Rus@gmail.com

**Синицын Владимир Игоревич** – профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, руководитель отделения «Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных» Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: vsinitsin@ipiran.ru

**Синицын Игорь Николаевич** – профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), доктор технических наук, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник, научный руководитель направления «Теоретико-вероятностные и статистические методы моделирования и обработки информации» Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: sinitsin@dol.ru

**Солоднева Дарья Александровна** – старший преподаватель кафедры клинической психологии Смоленского государственного медицинского университета. E-mail: darya210895@mail.ru

**Сорокина Марина Михайловна** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского. E-mail: mmsorokina@yandex.ru

**Суханова Анна Геннадьевна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры естественно-научных дисциплин Военной академии войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации имени Маршала Советского Союза А.М. Василевского. E-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru

**Тимотин Андрей Максимович** – инженер по качеству научно-производственного предприятия «Грань». E-mail: antej82@yandex.ru

**Тимофеева Наталья Михайловна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: nat.timopheeva@yandex.ru

**Тихонов Иван Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики, факультет ВМК, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. E-mail: ivtikh@mail.ru

**Тихонова Ольга Вадимовна** – доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: o\_tikhonova@inbox.ru

**Усачев Валерий Игнатьевич** – доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: usa-vi@yandex.ru

**Филиппов Станислав Александрович** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: stanislav@philippov.ru

**Цветкович Диана Горановна** – стажер-исследователь лаборатории фотоядерных реакций Института ядерных исследований РАН. E-mail: dianacve@inbox.ru

**Чжень Ваньли** – аспирант факультета математики и информатики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, wanli19930806@gmail.com.

**Чирков Андрей Владимирович** – аспирант научно-исследовательского университета «Московский институт электронной техники». E-mail: andrewchirckov@gmail.com

**Шевнина Юлия Сергеевна** – кандидат технических наук, доцент Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ».

**Шерстнева Наталья Александровна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: MathSmolgu@gmail.com

**Шерстюков Владимир Борисович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ». E-mail: shervb73@gmail.com

**Шилин Андрей Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета. E-mail: a.p.shilin@gmail.com

**Шилягина Алла Михайловна** – ассистент кафедры иностранных языков Смоленского государственного университета. E-mail: уру1101@gmail.com

**Ястребов Михаил Юрьевич** – кандидат экономических наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. E-mail: mikyast@gmail.com

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| <b>СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики</b>  | <b>3</b>  |
| <i>Бирюкова Т.К., Гершкович М.М.</i> Методы определения приоритета передачи логических блоков данных с учетом изменения ценности информации во времени                      | 3         |
| <i>Бондарь А.А.</i> Моделирование и исследование корректирующих алгоритмов в цепи ретрансляторов  | 7         |
| <i>Кристалинский В.Р., Лютикас П.Л.</i> Имитационная математическая модель функционирования сложной технической системы   | 12        |
| <i>Парамонов А.А., Тихонова О.В., Нгуен В.М.</i> Распознавание видов цифровой модуляции радиосигналов с использованием многослойной нейронной сети по кумулянтным признакам | 23        |
| <i>Суханова А.Г., Солоднева Д.А.</i> Корреляционно-регрессионный анализ зависимости тревожности от эмоционального интеллекта в юношеском возрасте в системе MATHCAD         | 29        |
| <i>Тимотин А.М.</i> Принципы привязки (базирования) деталей при замере на КИМ в случае плохо обусловленных базовых элементов  | 33        |
| <i>Тихонова О.В., Бондарь А.А.</i> Динамический способ оценки качества системы цифровой связи: моделирование и исследование   | 40        |
| <i>Чирков А.В.</i> Особенности применения аппарата нечеткой логики для распознавания болезней растений  | 46        |
| <b>СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры</b>  | <b>51</b> |
| <i>Блохин Д.А., Мунерман В.И.</i> Использование технологии баз данных для автоматизации перевода идиоматических выражений   | 51        |
| <i>Булименко А.Д., Самойлова Т.А.</i> Экспериментальное исследование распознавания речевых эмоций на основе моделей глубокого обучения                                      | 57        |
| <i>Булименко А.Д., Самойлова Т.А.</i> Коллаборативная фильтрация для рекомендательной системы в управлении цепями поставок  | 64        |
| <i>Веселов В.Ф., Гагарина Л.Г.</i> Эмулятор вычислительного устройства с абсолютной точностью вычислений  | 70        |
| <i>Веснин С.Г., Ильин П.Л., Мунерман В.И., Самойлова Т.А.</i> Метод построения системы радиотермометрии с использованием веб-сервисов                                       | 78        |
| <i>Гагарина Л.Г., Шевнина Ю.С.</i> Моделирование цифрового двойника производственного процесса с использованием смарт структуры   | 84        |
| <i>Гадальшин А.Ф.</i> Реализация и анализ алгоритма распределения объектов с учетом ограниченности контейнеров  | 90        |

|   |     |
|---|-----|
| <i>Гончаров Е.И.</i> Реализация $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения матриц средствами $(0, \mu)$ -свернутого произведения   | 96  |
| <i>Городилов А.В., Кононова А.И.</i> Ввод данных: традиция или реакция  | 100 |
| <i>Забезжайло М.И., Борисов В.В.</i> Искусственный интеллект как особая область исследований и разработок   | 109 |
| <i>Захаров В.Н., Филиппов С.А.</i> Метод повышения эффективности рекомендательных систем на основе анализа неявных данных   | 116 |
| <i>Карпенко А.П.</i> Элементы теории популяционных алгоритмов глобальной оптимизации  | 123 |
| <i>Матвеев Р.А., Сенчилов В.В.</i> Об особенностях применения криптографической защиты данных в информационных системах   | 136 |
| <i>Морозов С.А., Мунерман В.И., Симаков В.А.</i> Сравнение реализаций алгоритма поиска всевозможных маршрутов в графе   | 142 |
| <i>Мунерман В.И., Мунерман Д.В.</i> Требования к построению моделей данных и моделей вычислений   | 150 |
| <i>Николаев К.С.</i> Исследование и разработка модели и алгоритма получения поискового образа для интеллектуальных рекомендательных систем  | 156 |
| <i>Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.</i> Инструментальное программное обеспечение синтеза оптимальной системы по байесовому критерию методом вейвлет канонических разложений | 161 |
| <b>СЕКЦИЯ 3. Математика и её приложения</b>   | 179 |
| <i>Адуков В.М.</i> О нормировке факторизации Винера-Хопфа для матриц-функций с различными частными индексами  | 179 |
| <i>Адукова Н.В.</i> О явном построении канонической факторизации Винера–Хопфа лорановских матричных многочленов   | 185 |
| <i>Банару М.Б., Банару Г.А.</i> Базылев и Атанасян  | 192 |
| <i>Борисов В.В., Прудников И.М.</i> Формула для углов микроваскулярного узла  | 197 |
| <i>Вувуникян Ю.М., Ваньли Чжень</i> Операторное моделирование импульсной нейронной сети и прямое произведение реакций системных операторов  | 202 |
| <i>Гомонов С.А.</i> О некоторых применениях алгебраических функций к исследованию предельных множеств полианалитических полиномов   | 210 |
| <i>Емельченков Е.П.</i> Аффинные ельмслевовы плоскости с серединой  | 237 |
| <i>Карачик В.В.</i> Решение задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре  | 241 |
| <i>Кирьяцкий Э.Г.</i> Об одном функционале на классе типично-вещественных функций   | 246 |

|  |     |
|--|-----|
| <i>Костин А.Б., Садекова Е.Х., Шерстюков В.Б.</i> Два модельных примера приближения разрывных функций гладкими в метрике Хаусдорфа   | 251 |
| <i>Махина Н.М.</i> О воспроизводящих ядрах и их приложениях  | 258 |
| <i>Михалёва Т.И., Расулов К.М.</i> Об одном методе решения краевой задачи типа Газемана в классах квазигармонических функций в круговых областях   | 261 |
| <i>Нагорная Т.Р., Расулов К.М.</i> О решении задачи Неймана для обобщенных гармонических функций третьего порядка в круговых областях  | 269 |
| <i>Новикова Д.Г., Сорокина М.М.</i> О корадикальных произведениях классов групп  | 275 |
| <i>Ольшанский А.М.</i> Об оценке устойчивости системы управления ИНС с переменной проводимостью сигнала  | 280 |
| <i>Светлаков А.В., Банару Г.А.</i> О методах регулярной аппроксимации контекстно-свободных грамматик   | 285 |
| <i>Тихонов И.В., Муатаз Алмохамед.</i> Единственность и неединственность решения в линейной обратной задаче с переопределением третьего рода   | 291 |
| <i>Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г., Окорочков И.В.</i> Использование компьютерной математики для визуализации областей, связанных со сходимостью полиномов Бернштейна и Канторовича | 298 |
| <i>Шилин А.П.</i> О решении одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка на действительной оси с определителями и комплексным сопряжением  | 308 |
| <b>СЕКЦИЯ 4. Новые информационные технологии в образовании</b>   | 315 |
| <i>Абдуллаева М.М.</i> Представления об учащемся как индикатор профессионального здоровья педагогов  | 315 |
| <i>Богданова Н.Н.</i> Решение разностных уравнений с помощью СКМ WOLFRAM MATHEMATICA   | 321 |
| <i>Бороздина А.Ю., Киселева О.М.</i> Особенности разработки обучающего приложения для подготовки к ЕГЭ по физике   | 325 |
| <i>Бояринов Д.А.</i> Информационное образовательное пространство на современном этапе цифровизации   | 330 |
| <i>Винокурова А.С.</i> Опыт использования видеоуроков при обучении студентов высшей математике в университете  | 334 |
| <i>Дюндин А.В., Савченкова Н.Н.</i> Организация работы с образовательными сетевыми ресурсами в системе дополнительного образования   | 338 |
| <i>Евдокимова Г.С., Усачев В.И.</i> Решение задач стохастики в пакете прикладных программ GRETЛ  | 343 |
| <i>Емельченков Е.П., Шильгина А.М.</i> О факторах, влияющих на успешность обучения   | 348 |

|  |     |
|--|-----|
| <i>Козлов С.В., Быков А.А.</i> Решение задач динамического программирования ЕГЭ по информатике средствами электронных таблиц   | 356 |
| <i>Козлов С.В., Воробьев М.С.</i> Реализация аутентификации пользователя в web-приложении с использованием стандарта JWT   | 362 |
| <i>Кузнецова А.С.</i> Признаки проактивного планирования оперативно-восстановительного отдыха и эффективность труда педагогов  | 366 |
| <i>Перельман Н.Р.</i> Использование средств MS Excel при изучении неравенства в распределении доходов  | 371 |
| <i>Светлаков А.В., Гомонов С.А.</i> О применении прикладных сетевых технологий в курсе дифференциальной геометрии  | 375 |
| <i>Сенькина Г.Е.</i> О создании федерального центра научно-методического сопровождения педагогических работников на базе СмолГУ: цели, задачи, направления             | 381 |
| <i>Тимофеева Н.М.</i> О влиянии содержания школьного курса информатики на результаты международных сравнительных исследований в области оценки школьной успешности     | 386 |
| <i>Шерстнёва Н.А.</i> О некоторых приложениях системы компьютерной математики WOLFRAM MATHEMATICA в преподавании математического анализа                               | 392 |
| <i>Ястребов М.Ю., Ланева И.В.</i> Парадоксы теории вероятностей – область применения диалогового машинного эксперимента в учебном процессе в курсе теории вероятностей | 398 |
| <b>Сведения об авторах</b>   | 404 |

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 23

Издательство Смоленского государственного  
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко, И.В. Марусова*

---

Подписано к печати 21.04.2022. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать ризографическая.  
Усл. п. л. 26. Уч.-изд. л. 26. Тираж 120 экз.  
Заказ №

---

Отпечатано с готового оригинал-макета  
ИП Суркова Н.Н.  
214000 г. Смоленск, ул. Б. Советская, д. 12/1  
Тел.: 8-951-697-22-23