

Министерство образования и науки РФ
Смоленский государственный университет

Системы компьютерной математики и их приложения

*Материалы XVI Международной научной конференции,
посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова*

Выпуск 16

Смоленск
Издательство СмолГУ
2015

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета СмолГУ*

Редакционная коллегия: *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *И.Б. Болотин*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *С.А. Гомонов*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *В.П. Дьяконов*, д-р техн. наук, проф.; *Е.П. Емельченков*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Н.М. Тимофеева*, канд. пед. наук, доц.

Системы компьютерной математики и их приложения:
С 409 материалы XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. – Вып. 16. – 286 с.

ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XVI Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 15–17 мая 2015 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

© Авторы, 2015
© Издательство СмолГУ, 2015

УЧЕНЫЙ И ПЕДАГОГ

К 75 летию профессора Дьяконова Владимира Павловича

7 февраля 2015 года исполнилось 75 лет ученому с мировым именем, заслуженному работнику высшей школы России, доктору технических наук, профессору Дьяконову Владимиру Павловичу.



В.П. Дьяконов родился в городе Киеве. С 1941 по 1947 годы находился в эвакуации в Крыму. В 1947 году вместе с семьей переехал в столицу Азербайджана город Баку, где окончил среднюю школу и увлекся радиоделом (стал мастером-радиоконструктором СССР, за значительные достижения в радиоделе отмеченным медалями ВДНХ СССР), работал бригадиром радиомехаников по ремонту войсковых радиостанций, закончил заочно энергетический институт и начал свою научно-педагогическую деятельность в Азербайджанском институте нефти и химии (на кафедре автоматики и телемеханики). В 1969 году В.П. Дьяконов защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук.

В 1970 году В.П. Дьяконов переехал в Смоленск, где продолжил свою научно-педагогическую деятельность в филиале НИУ «МЭИ» в г. Смоленске в должности заведующего кафедрой промышленной электроники. В этом вузе он четверть века посвятил развитию кафедры и созданию своей научной школы по электронике. В 1973 году вышла его первая монография по лавинным транзисторам. По ним, а позже и по мощным полевым транзисторам и их применению, Владимир Павлович развернул крупные хоздоговорные научные работы фундаментального значения. Он принимал участие в разработке почти всех типов отечественных мощных полевых транзисторов. В 1980 году в центре советской микроэлектроники (в городе Зеленограде) он защитил закрытую докторскую диссертацию в области разработки специальной аппаратуры космической связи и стал первым доктором технических наук в Смоленской области, получил ученое звание профессора. Под его руководством коллектив кафедры промышленной электроники, начиная с 8 неостепененных сотрудников, вырос до 45 человек, причем многие из них защитили кандидатские диссертации. Кафедра готовила ежегодно по 4 группы выпускников для предприятий Смоленской области и многих других регионов СССР.

В 80-х годах XX столетия профессору В.П. Дьяконову пришлось постигать основы математических расчетов и математического моделирования малоизвестных физических процессов в высокоскоростных электронных устройствах. Тогда еще не было персональных ЭВМ, но профессор Дьяконов, думая о будущем, добился создания Смоленского областного центра новых информационных технологий в образовании (СОЦНИТ) и стал его директором. Центр развернул работы по информатизации области и подготовке обширной серии книг по расчетам на программируемых микрокалькуляторах, а затем и на появившихся персональных ЭВМ (ПЭВМ). Среди них первые в СССР массовые справочники по математическим расчетам на микрокалькуляторах и ПЭВМ, изданные в ведущих издательствах СССР «Наука», «Физматлит» и «Радио и связь» (с общим тиражом 1,5 миллиона экземпляров!). Тогда же в соавторстве с тремя доцентами Смоленского педагогического института (ныне СмолГУ) была подготовлена и опубликована в Великобритании, США и Франции фундаментальная монография на английском языке по системе программирования Microsoft QBASIC. Она получила высокую оценку в научных кругах США и была признана классикой советского программирования.

В 1997 году профессор В.П. Дьяконов перешел на работу в Смоленский государственный педагогический институт (ныне СмолГУ) и возглавил новую кафедру информатики и электрорадиотехники. Здесь он продолжил работу по написанию большого числа книг и статей по информационным технологиям и, особенно, по системам компьютерной математики. За успехи в учебной и научной работе он дважды удостоивался гранта и звания «Соросовский профессор», выиграл грант фирмы Wolfram (США) на двухмесячную научную стажировку в мировой центр компьютерной математики, которую прошел в 2000 году, стал академиком международной академии наук педагогического образования. В 2003 году В.П. Дьяконов получил свою первую государственную награду «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации». Он установил творческие связи со многими зарубежными компаниями в области компьютерной математики - Mathsoft, Maplesoft, MathWorks и др. Своим трудом по подготовке учебной литературы, справочников и энциклопедий профессор Дьяконов, по существу, предопределил развитие компьютерной математики в России. Для огромного числа специалистов, аспирантов и студентов российских и зарубежных университетов книги профессора В.П. Дьяконова были первыми путеводителями в мир современной компьютерной математики, способствовали сближению исследований наших и зарубежных специалистов в новом направлении образования, науки и техники – компьютерной математике.

Ссылки на книги Дьяконова есть на интернет-сайтах ведущих мировых разработчиков и производителей компьютерных математических систем. Так, только на сайте крупной американской компании MathWorks помещено около двух десятков ссылок на книги В.П. Дьяконова по матричной системе MATLAB и пакету имитационного математического моделирования Simulink. Во всем мире известны его книги и труды по системам компьютерной математики Maple, MATLAB, Derive, Mathcad, Mathematica и др. Им написаны и опубликованы первые энциклопедии по мультимедиа, системам компьютерной математики, а также по электронным измерениям. За успехи в трудовой деятельности в 2011 году В.П. Дьяконов был награжден второй государственной наградой – орденом Дружбы.

В.П. Дьяконов - автор 120 книг и 61 изобретения, общее число его научно-педагогических трудов превысило 700! Много внимания он уделяет подготовке молодых научных кадров. Под его руководством защитили кандидатские диссертации более 20 аспирантов и соискателей, двое из них стали докторами наук. Профессор Дьяконов стал одним из инициаторов организации и проведения при СмолГУ ежегодных международных научных конференций «Системы компьютерной математики и их приложения» (СКМП). Многие годы он является членом диссертационного совета при Смоленской военной академии ПВО ВС РФ. Он член международной программы книгоиздания крупной компании MathWorks (США). В последние годы профессор Дьяконов часто возвращается к истокам своей научной деятельности, но на качественно новом и современном уровне. Вышли его крупные монографии по лавинным транзисторам и тиристорам, однопереходным транзисторам, новейшим цифровым измерительным приборам и приборам для нанотехнологий, микроэлектроники и сверхскоростной твердотельной электроники. Научные работы профессора В.П. Дьяконова широко отражены в мировом Интернете.

Владимир Павлович и в наши дни продолжает активную научную деятельность. Недавно вышли из печати его новые книги по компьютерной математике в измерениях, системе компьютерной алгебры Maple в метаматематике, применению MATLAB и Simulink в электроэнеогетике и радиотехнике. Своими выдающимися работами профессор Владимир Павлович Дьяконов заслужил мировую известность и признание. Пожелаем ему крепкого здоровья и новых успехов в творческой работе.

*Председатель Оргкомитета СКМП-2015,
профессор К.М. Расулов*

СЕКЦИЯ 1

Системы компьютерной математики

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СОВРЕМЕННЫХ ЦИФРОВЫХ ОСЦИЛЛОГРАФОВ

А.А. ДЕДЮХИН, О.В. КОТЕЛЬНИК, А.А. МЕНДЕРОВ

ЗАО «ПриСТ», г. Москва, info@prist.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: *цифровые осциллографы, входной сигнал, поисковая машина.*

В статье рассматриваются эксклюзивные функции и технологии, используемые при разработке и производстве цифровых осциллографов компании Teledyne LeCroy, Inc. (США).

Современные цифровые осциллографы, построенные на базе открытой платформы, предоставляют пользователю возможность визуально наблюдать исследуемый сигнал, зачастую, достаточно сложной формы. Использование длинной памяти, расширенных режимов синхронизации и сегментированной развертки позволяют инженеру фиксировать различные артефакты во входном сигнале или же наоборот «отлавливать» полезные сигналы, имеющие определенные параметры.

Но исключительная ценность цифрового осциллографа определяется не только его способностью визуально отображать форму входного сигнала, но и производить различного рода измерения, по заданным критериям выполнять аналитическую обработку полученных результатов, а также реализовывать функции интеллектуального документирования и удаленного обмена данными.

Инженеры компании *Teledyne LeCroy, Inc. (США)*, одного из мировых лидеров в области разработки и производства осциллографии высокого класса, активно внедряют эксклюзивные функции и технологии в модернизируемые и вновь создаваемые модели:

- технология высокого разрешения HD4096, реализованная на базе 12-битного АЦП собственной разработки [1];

- запатентованная *Teledyne LeCroy* технология цифрового чередования полос пропускания (DBI™) [2];
- запатентованная *Teledyne LeCroy* архитектура потоковой обработки данных X-Stream™ [3];
- расширенная функциональность обнаружения аномалий в сигнале: режимы WaveScan (поисковая машина) [4, 5] и History (предыстория);
- интеллектуальная система синхронизации TriggerScan [6];
- дополнительные виды специальных измерений (джиттер, глазковые диаграммы, цифровые фильтры, тестирование на ЭМС и пр.);
- исчерпывающий набор инструментов для анализа: LabNotebook (записная книжка), сегментированная память;
- аппаратно-программная интеграция дополнительных средств измерения: анализатор спектра, анализатор протоколов, логический анализатор, анализатор электрических цепей и пр.

12-битные АЦП обеспечивают в 16 раз лучшее разрешение по вертикали по сравнению с традиционными 8-битными АЦП. В результате форма сигнала воспроизводится с максимальной детализацией и обеспечивается исключительная точность измерений.

Чередование – это комбинация ресурсов нескольких каналов для увеличения частоты дискретизации и объема памяти. *Teledyne LeCroy* разработал новую технологию чередования – **Digital Bandwidth Interleave (DBI)**, которая, используя преимущества традиционного чередования, дополнительно позволяет увеличивать полосу пропускания. Например, на базе 4-канального модуля прямого преобразования частоты LabMaster 10 Zi с полосой 36 ГГц, используя DBI, можно получить 2 канала с полосой 65 ГГц или 1 канал с полосой 100 ГГц. В результате появился первый и пока единственный в мире серийный осциллограф с полосой 100 ГГц в реальном времени и частотой дискретизации 240 ГГц.

X-Stream – технология потоковой обработки сигнала. Является ключевой технологией цифровых осциллографов *Teledyne LeCroy*, обеспечивающей максимально достижимую на сегодняшний день скорость обработки больших массивов данных. Технология адаптирована для работы с длинной памятью, чтобы обеспечивать максимально быстрый отклик системы на обработку собранных данных.

Литература

1. http://www.prist.ru/info.php/articles/lecroy_hdo.htm.
2. http://www.prist.ru/info.php/articles/DBI_Explained.htm.
3. <http://www.lecroy-rus.ru/index.php?page=x-stream>.
4. <http://www.lecroy-rus.ru/index.php?page=wavescan>.
5. http://www.prist.ru/info.php/articles/lecroy_wavescan.htm.
6. <http://www.prist.ru/info.php/articles/triggerscan-2.htm>.

ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В.П. ДЬЯКОНОВ

Военная академия ПВО ВС РФ, г. Смоленск,
e-mail: vpdyak@yandex.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: *компьютерная математика, системы компьютерной математики, системы компьютерной алгебры.*

В статье приводится анализ современного состояния систем компьютерной математики и основных направлений их развития.

Компьютерная математика (КМ) - это область науки, образования и проектирования, находящаяся на стыке классической математики и информационных технологий. Основная ее задача - сделать для любого пользователя (школьника, студента, преподавателя, инженера и ученого) вполне доступными любые математические знания и возможности за счет использования современных компьютеров различного класса.

Развиваются три важных направления КМ – системы для численных вычислений, системы компьютерной алгебры и универсальные системы компьютерной математики (СКМ). Были созданы различные системы для численных расчетов – от табличных процессоров Omnicalc и Excel до специализированных систем Eureka, Mercury, Mathcad и бурно развивающейся и признанной лучшей в мире матричной системы MATLAB. Немалую роль сыграла возможность таких систем с высокой точностью, особенно в задачах прикладной математики, например, при решении систем нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений численными методами, которые обычно не имеют аналитического решения. На этом основано математическое моделирование многих процессов, систем, устройств и программ AutoCad, SPICE, DesignLAB, MicroCap и др.

Уже в начале появления ЭВМ выполнялись робкие, но первые работы по автоматизации решения алгебраических задач, такие как алгебра полиномов и решение нелинейных уравнений. Безусловным первенством в этом направлении явились работы советского и украинского академика В. Глушкова и его научной школы, которые создали малые ЭВМ «Мир» с графическим дисплеем и языком программирования «Аналитик» с богатым набором аналитических операций.

Однако полноценные системы компьютерной алгебры Maple и Mathematica были разработаны почти одновременно с появлением персональных компьютеров в начале 80-х годов прошлого века. Большое значение тут сыграла ориентация компьютеров на решение

задач обработки символов и текстов, позволившая реально приступить к обработке математической информации в символьном виде – основе аналитических и формульных преобразований. Постепенно эти системы стали универсальными.

В какой-то степени о массовости, известности и применении СКМ говорят данные о числе ссылок на них в Интернете (в млн.):

Derive	miPAD	Mathcad	Mathematica 10	Maple 18	MATLAB 8	FreeMat	Maxima 5.3
СКА	СКА	СКМ	СКМ	СКМ	Матр. СКМ	Свобод.	Свобод.
3.0	0,05	0,383	8.0	5.0	4.0	0,023	22

Стабильно высокое число ссылок занимают крупные коммерческие системы Mathematica 10, Maple 18, MATLAB 8 (последние версии), выпускаемые серийно как самостоятельные программные продукты. Массовое число ссылок на открытую систему Maxima скорее говорит об интересе к СКМ, чем к этой конкретной системе.

Развитие СКМ привело в мире к проявлению многих компаний и фирм, занимающихся разработкой СКМ и их крупносерийным выпуском. Основные тенденции развития СКМ следующие.

- Обострение конкуренции между разработчиками СКМ и объединение компаний.
- Резкое увеличение функциональных возможностей и числа функций.
- Использование средств компьютерной алгебры и аналитических вычислений.
- Широкое применение пакетов расширения в области физики, энергетики, обработки сигналов и изображений, вейвлет-преобразований, финансовых и экономических расчетов, астрономии и географии, музыки и т. д.
- Совершенствование графического интерфейса пользователя GUI в направлении его большей доступности, удобства и очевидности.
- Резкое расширение баз данных справочной системы, введения в нее огромного числа примеров (десятки тысяч) и обеспечения доступа в Интернет.
- Превращение систем в мощные справочники и учебники с возможностью развития пользователем справочных данных и разработкой и проверкой новых математических теорий, гипотез и примеров.
- Широкое применение технологии параллельных вычислений и поддержка многоядерных микропроцессоров, позволившая увеличить скорость вычислений в сотни и тысячи раз.
- Резкое (порой в сотни раз) увеличение скорости вычислений в основном за счет совершенствования алгоритмов и применения параллельных процессов.

- Разработка новых алгоритмов вычислений и математического моделирования, например, совместного применения численных и аналитических методов.
- Применение встроенных аппаратно СКМ (CAS) в графические микрокалькуляторы.
- Применение СКМ для расширения возможностей измерительных приборов, например, цифровых генераторов, осциллографов, анализаторов спектра и сигналов и др.

Одной из долгоживущих областей применения КМ стали современные микрокалькуляторы для научных вычислений с графическими возможностями. Их до сих пор массово выпускают фирмы Texas Instruments, Hewlett Packard и Casio. В калькуляторах TI-89 и TI-92 применяется несколько доработанная система компьютерной алгебры Derive. У последней модели с USB портом и цветным дисплеем TI Nspire CX CAS используется собственная система компьютерной математики Nspire. Уникальна новинка фирмы Hewlett Packard - HP Prime CAS с цветным сенсорным дисплеем, с более чем 2300 математическими функциями и памятью 250 Мбайт. Фирма Casio выпускает калькуляторы с цветным дисплеем и CAS Algebra.

К сожалению, программируемые микрокалькуляторы в России перестали выпускаться, а зарубежные графические калькуляторы распространены очень мало. Они вытесняются моделями портативных компьютеров (ноутбуков) со стандартными и более мощными СКМ и более универсальными коммуникаторами и смартфонами.

Нестабильность рынка в нашем веке привела к тому, что некоторые разработчики СКМ предпочли спрятаться под крылышко более крупных компаний. Это привело к смене команд разработчиков и нередко направлений работы. Одна из самых ранних систем Derive выпускаться перестала, хотя и доступна в Интернете. А популярная система Mathcad (разработчик – компания Mathsoft), с впервые реализованным в ней математически ориентированным вводом, сменила команду разработчиков и название на Mathcad Prime. К сожалению, первые три ее реализации так и не достигли уровня версии Mathcad 11-15.

Практически сразу с начала разработки СКМ стала ясна необходимость в развитии средств графической визуализации – начиная от представления математических формул и графиков всевозможных кривых и поверхностей до полноценной инженерной графики для систем математического моделирования и систем автоматического проектирования (САПР).

Система компьютерной алгебры Maple зародилась в университетах Канады и ряда других стран вначале как свободная система FreeWare. Сейчас эта система превратилась в одну из самых мощных универсальных систем с набором свыше 5000 математических функций

и превосходным современным графическим интерфейсом пользователя. Новые приложения ее – маплеты позволяют пользователю создавать свои приложения с GUI и иллюстрацией пошагового решения задач. В системе десятки тысяч примеров!

Созданная американской компанией Wolfram Research во главе с S. Wolfram система компьютерной математики Mathematica (часто ее путают просто с математикой) изначально также создавалась как система компьютерной алгебры. Система - наглядный пример коммерческой программы, получившей бурное развитие. С Maple программа входит в число двух лидирующих систем компьютерной алгебры, которые попеременно занимают лидирующее положение на рынке. Последней реализацией стала система Mathematica 10 с языком функционального программирования в своей основе, превосходным и оригинальным интерфейсом пользователя и свыше 5000 математических функций. Mathematica создавалась также как основа энциклопедических знаний по многим направлениям науки, техники, социально-экономической деятельности и даже по музыке и искусству! В 2000 году автор прошел научную стажировку в компании Wolfram Research и познакомился с ее развитием и работой коллектива компании.

Самой мощной СКМ вот уже многие годы является матричная система MATLAB американской компании Mathworks (последняя версия MATLAB R2015a). Ежегодно выпускаются две ее новые реализации, каждая из которых имеет мощный пакет расширения для математического имитационного моделирования Simulink и Toolbox имеющий свыше 80 пакетов расширения по самым различным областям науки, техники и экономики. На жестком диске компьютера система занимает 5-6 Гбайт. За последние годы система MATLAB существенно усовершенствована – в нее включен пакет расширения Symbolic Math на основе системы компьютерной алгебры MuPAD, новейший GUI и множество других инноваций.

Будучи матричной системой, MATLAB имеет простой в освоении и удобный язык программирования, признанный во всем мире как лучший для научно-технических вычислений. Даже одно число в нем рассматривается как матрица размера 1×1 , а в состав ядра входит около 1000 тщательно оптимизированных функций. MATLAB позволяет создавать исполняемые файлы и основан на открытом для модификации программном коде (подавляющее большинство функций системы реализованы в виде m-файлов, сохраняемых на жестком диске).

Матричный язык MATLAB оказался наиболее удобным для матрично-топологического анализа сложных устройств (например, таких как многозвенные механизмы, электрические и электронные схемы), для автоматического составления их уравнений состояния и решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений,

описывающих их работу. Это лежит в основе пакета расширения блочного имитационного математического моделирования Simulink – неотъемлемой части системы MATLAB.

Математические возможности СКМ охватывают практически все области классической и прикладной математики и статистики – начиная от школьной и вузовской математики и кончая самыми сложными разделами математической физики и различных видов математического моделирования и различной обработки сигналов. Перечислить их в небольшой работе практически невозможно. По существу, СКМ стали заменой многих справочников по математике и физике.

Коммерческие СКМ стоят дорого – и очень дорого! Поэтому закономерный интерес представляют так называемые открытые, т. е. бесплатные СКМ. Некоторые из них создаются как упрощенные системы серийных программ разработчиками коммерческих СКМ. Одни свободно распространяются и усиливают интерес пользователей к основным продуктам, другие разрабатываются коллективами энтузиастов.

Надо прямо сказать, что, несмотря на благородство создателей, открытые системы по степени доработки сильно уступают коммерческим СКМ. Поэтому, достигнув определенной степени совершенства, открытые системы становятся коммерческими и выпускаются серийно. Например, изначально система Maple была свободной системой и создавалась объединением ряда университетов. Сейчас это преуспевающая коммерческая система! Ныне известно с десяток открытых систем. Некоторые (FreeMat, SciLab и др.) основаны на кодах MATLAB.

Пожалуй, особое место занимает система компьютерной алгебры Maxima – реальная альтернатива коммерческим системам компьютерной алгебры. Она имеет богатый набор функций для аналитических вычислений и вполне полноценную графическую визуализацию. После разработки удобного и вполне современного GUI система WS Maxima получила большую известность и вызвала в Интернете огромный интерес.

Вообще, надо отметить, что «три кита» современной КМ (системы Maple, Mathematica и MATLAB) существенно разрослись и не помещаются на некоторых массовых типах компьютеров, например, на коммуникаторах и смартфонах для сотовых систем связи. Поэтому разработчики СКМ пришли к выводу о целесообразности перенесения их на мощные интернет-серверы с доступом к ним с помощью коммуникаторов и смартфонов. Пожалуй, наиболее известными представителями таких интернет-СКМ стали системы Web-Mathematica, Wolfram Alpha (свободная система) и Wolfram Alpha Pro фирмы Wolfram

Research. Они обладают многими возможностями базовой системы Mathematica.

Расширение областей применения СКМ идет по ряду других направлений. Особо следует отметить их использование в современных измерительных приборах – генераторах, цифровых осциллографах, анализаторах сигналов и спектра и т. д. Многие из них имеют открытую архитектуру на базе встроенного персонального компьютера и СКМ могут размещаться на их жестком диске, органично интегрируясь с прибором. Бесспорное лидерство здесь принадлежит матричной СКМ MATLAB, имеющей специальный пакет расширения для связи с измерительными приборами многих фирм.

До сих пор ни одной серийной СКМ в СССР и в России создано не было, и все имеющиеся на рынке системы являются англоязычными. Это резко повышает роль русскоязычной литературы по современным СКМ. Автор отдал многие годы жизни подготовке справочной, учебной и монографической литературы по современным микрокалькуляторам и всем классам СКМ. Они получили большую известность в России и за рубежом. Например, на сайте корпорации Mathworks из 31 русскоязычной книги по системе MATLAB отмечено 19 книг автора. Первый справочник по системе PC MATLAB в их число даже не попал – он был издан в издательстве «Физматлит» еще в советские времена.

К сожалению, из-за грубых нарушений авторского права и отсутствия справедливой оценки сложного и объемного труда по подготовке книг по СКМ в последнее время книгоиздание в области СКМ (и научно-технической литературы) в России практически остановилось и новые книги по СКМ перестали издаваться. Это тем более печально в связи с резким падением качества подобной книгам продукции в Интернете, например, в связи с появлением «публичной энциклопедии» Wikipedia, не несущей никакой ответственности за свои анонимные материалы низкого качества.

НАУЧНЫЕ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ С СЕНСОРНЫМ ЦВЕТНЫМ ГРАФИЧЕСКИМ ДИСПЛЕЕМ

В.П. ДЬЯКОНОВ

Военная академия ПВО ВС РФ, г. Смоленск,
e-mail: vpdyak@yandex.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: *микрокалькулятор, сенсорный дисплей, математика, графика, статистика, CAS, NSpire, Hewlett Packard, Texas Instruments, Casio.*

В статье описываются функциональные возможности и области применения современных микрокалькуляторов с сенсорным цветным графическим дисплеем.

С распадом СССР практически прекратился выпуск отечественных научных микрокалькуляторов [1]. Однако мировые лидеры в разработке и массовом серийном производстве микрокалькуляторов – корпорации Hewlett Packard, Texas Instruments и Casio в последние годы обновили свою продукцию [2] и выпустили микрокалькуляторы с резко расширенными возможностями и цветным сенсорным графическим дисплеем. По существу, это микрокомпьютеры с встроенной системой компьютерной алгебры (CAS), ориентированные на математические вычисления.

Флагманской моделью научного калькулятора корпорации Hewlett Packard стала модель HP Prime CAS (рис. 1). Этот калькулятор имеет следующие характеристики:



Рис. 1. Калькулятор HP Prime CAS

- Процессор: ARM9 400 МГц.
- Дисплей: цветной сенсорный TFT с диагональю 8,9 см (3,5"), 320 x 240, 16 бит (10 строк с 33 символами + меню + заголовок).
- Логика ввода данных: обратная польская RPN, алгебраическая и текстовая.
- Оперативная памяти 32 МБ, флэш-память 256 МБ.
- Встроенные функции: более 2300, хbскj cbvdjkdj 23000.
- Клавиатура: буквенно-цифровая.
- Питание: литиево-ионный аккумулятор.
- Защита памяти при выключении питания: Да.
- Размеры (Ш x Г x В): 18,23 x 8,58 x 1,39 см, вес: 228 г.

Калькулятор управляется с помощью графического меню (рис. 2). Он позволяет вводить до 23 000 символов с использованием как клавиатуры, так и различных виртуальных панелей ввода (см. примеры на рисунке 3).

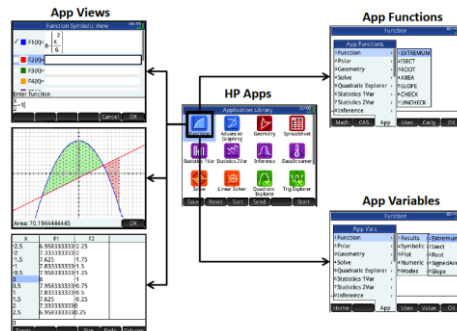


Рис. 2. Работа с калькулятором HP Prime CAS

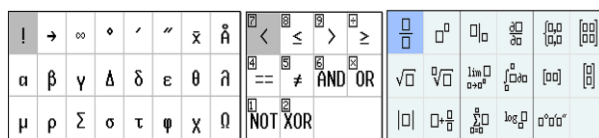


Рис. 3. Панели ввода HP Prime CAS

Функции и применения:

Графические функции: двухмерные функции, полярные и параметрические графики; дифференциальное уравнение, штриховой график; гистограмма, график рассеяния; нахождение: точек пересечения, экстремума, градиента, площади; увеличение изображения, кривая, координаты, тень (рис. 4).

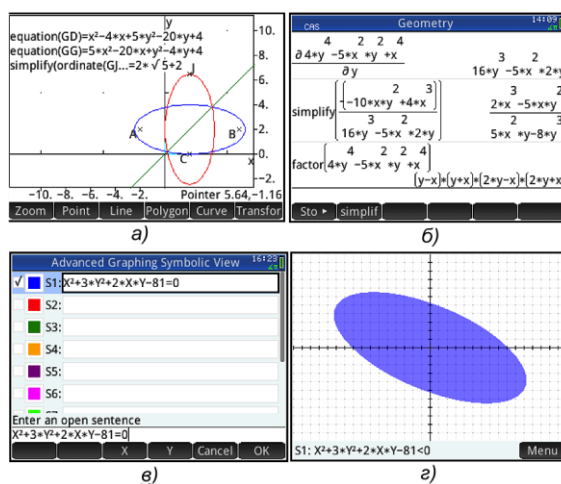


Рис. 4. Примеры вычислений: решение уравнений (а), символьные вычисления (б), задание площади (в) и график плоской фигуры (г)

Научные функции: преобразование часов из стандартного формата времени в десятичное число; преобразования полярных и прямоугольных координат; преобразования углов; основные преобразования и арифметические вычисления; преобразование единиц измерения; биты, логическая и специальная графика (рис. 5), графика изображений и печати.

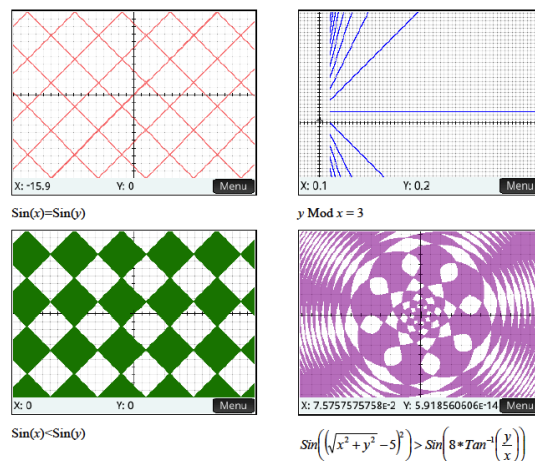


Рис. 5. Специальные графики

Статистические функции: Σx , Σx^2 , Σy , Σy^2 , Σxy ; выборочное среднее, квадратическое отклонение, средняя величина; среднее квадратическое отклонение; линейная регрессия; сочетания, перестановки; средневзвешенная величина; редактирование, сохранение, название файла, список; построение кривой (LIN, LOG, EXP, POW); графическое изображение статистических данных; проверка гипотез; доверительные интервалы.

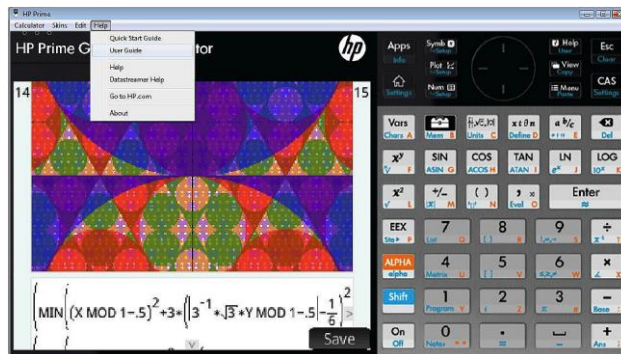


Рис. 6. Экран ПК при работе с HP Prime

Математические функции: +, -, x, ÷, ?, 1/x, +/-, ln, e^x, x^y; ux, LOG, 10^x, x², %, ? , n!; дробные вычисления; режим градусов, радианов или градиентов; тригонометрические функции/обратные функции; гиперболические функции/обратные функции; приложение HP Solve (нахождение корней уравнения); численное интегрирование; символическое интегрирование; численное дифференцирование; символическое дифференцирование; функции с комплексными числами; нахождение корня многочлена, ряд Тейлора; абсолютная величина, округление; целая и дробная часть числа; функция модуля, наибольшее целое число, наименьшее целое число; система CAS (компьютерная алгебраическая система).

Применения: алгебра, биология, проектирование, вычислительная техника, геодезические задачи, тригонометрия, статистические вычисления, геометрия, химия, физика. Микрокалькуляторы HP Prime могут подключаться через USB порт к ПК и просматривать работу на большом экране последнего (рис. 6).

Американская корпорация Texas Instruments известна как мировой лидер в разработке и массовом серийном выпуске микрокалькуляторов – в том числе графических научных с встроенной СКМ Derive (TI89, TI92) [2]. Новейший TI Nspire CX CAS (рис. 7) - это уникальный калькулятор, который имеет 3,2-дюймовый цветной (16 бит) LCD дисплей и поддерживает 3D-графику.

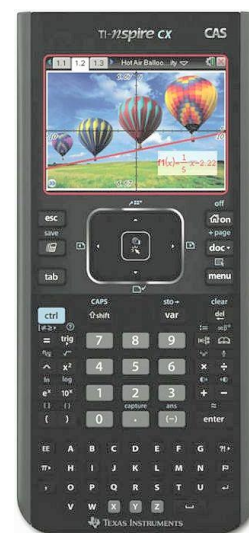


Рис. 7. Микрокалькулятор TI Nspire CX CAS

Объем встроенной памяти составляет 100 Мб. Калькулятор легко подключается к любому компьютеру или Mac-устройству. Используя специальное приложение, вы сможете передавать на домашний ПК вычисления, сделанные в классе, чтобы потом продолжить работу над ними. Для удобства вы можете выделять цветом нужные строки кода или математические выражения, а также использовать любые изображения и даже фотографии. Рисовать и вращать 3D-объекты можно вручную или в автоматическом режиме. Графический калькулятор TI Nspire CX комплектуется аккумуляторной батареей и имеет встроенный USB-порт для подключения к ПК.

Технические характеристики TI Nspire CX CAS.

- Размер экрана: 320 x 240 пикселей (диагональ – 3,2 дюйма), разрешение экрана: 125 DPI, качество цветопередачи – 16 бит.
- Питание: от перезаряжаемого аккумулятора TI-Nspire (поставляется в комплекте).
- Память: 100 Мб – для хранения результатов расчетов, 64 Мб – оперативная.

Встраиваемые приложения: GRAPHS (графика и графический), GEOMETRY – геометрия, LISTS & SPREADSHEET - работа со списками, числовыми матрицами и электронными таблицами, DATA & STATISTICS – обработка данных и статистические расчеты и графики, NOTES - словарь математических терминов и выражений, VERNIER DATAQUEST APP - функции проверки гипотез.

Одним из достоинств калькулятора TI Nspire CX является широкая поддержка трехмерной (3D) графики (рис. 9) и решения дифференциальных уравнений (рис. 10, где 1 - поле градиентов, 3 - запись уравнения, 3 - точечная линия решения, 4 - вывод параметра). Построение гистограмм дано на рисунке 11.

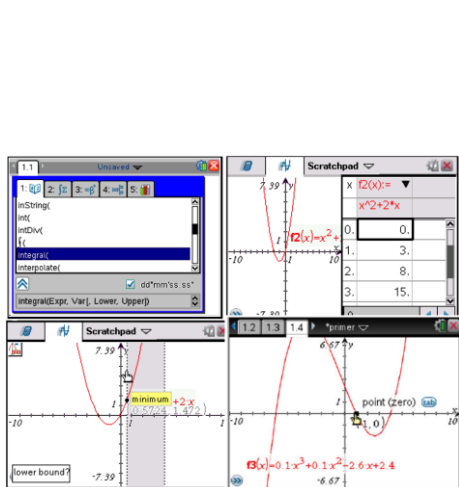


Рис. 8. Примеры работы с TI Nspire

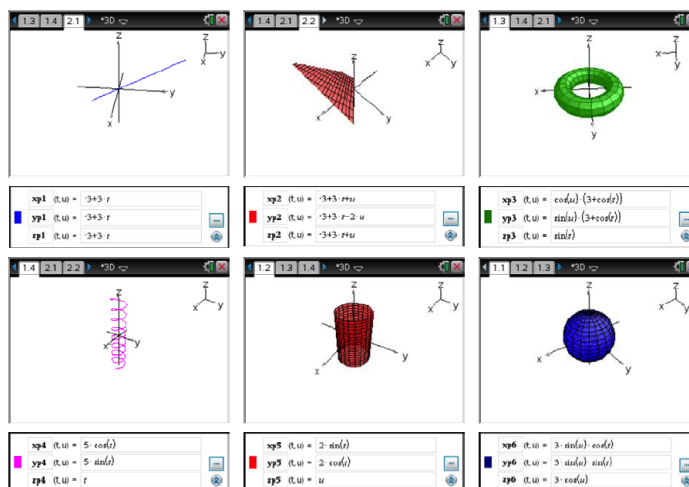


Рис. 9. Построения TI Nspire CX 3D графики

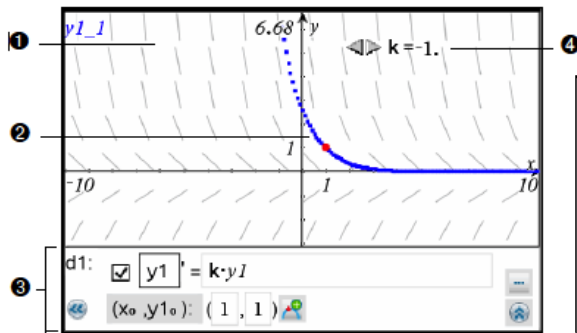


Рис. 10. Пример решения диф. уравнения

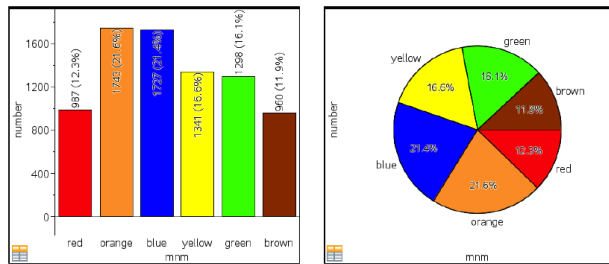


Рис. 11. Примеры построения гистограмм



Рис. 12. Калькулятор Casio FX-400

Это удобно при работе с длинными математическими формулами, которые лучше просматриваются в одну строчку. Новейшая клавиатура включает набор часто используемых стандартных кнопок и функций: дроби, квадратный корень, тригонометрические функции и т. д.

Японская корпорация Casio выпустила новейший микрокалькулятор fx-CP400 с большим 4.8-дюймовым цветным сенсорным экраном с разрешением 320x528 пикселей (рис. 12). Его габариты 206x89x21 мм и вес 320. Калькулятор имеет оперативную память 24 МБ, поддержку флэш-памяти и интерфейс USB 2.0. Для питания используются 4 аккумулятора типа ААА.

Калькулятор позволяет просматривать одновременно уравнения и их графики (рис. 13). Математические формулы могут быть графически изображены - для этого достаточно перетащить нужную формулу в область графика. С помощью специальной кнопки возможно переключение с вертикального отображения к горизонтальному.

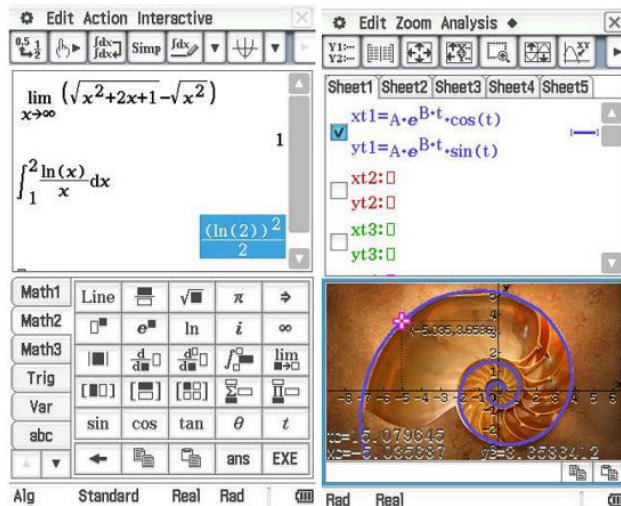


Рис. 13. Примеры работы с калькулятором Casio

Литература

1. Дьяконов В.П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. М.: Физматлит, 1989.
2. Дьяконов В.П. Современные зарубежные микрокалькуляторы. М.: СОЛОН-Р, 2012.

ИНТЕГРАЦИЯ СКМ МАТЛАВ С ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ

В.П. ДЬЯКОНОВ

Военная академия ПВО ВС РФ, г. Смоленск,
e-mail: vpdyak@yandex.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: *система компьютерной математики, MATLAB, измерительные приборы, специальные опции.*

В работе анализируются методы расширения функциональных возможностей современных измерительных приборов при их стыковке с системой MATLAB.

MATLAB (сокращение от англ. «Matrix Laboratory») - матричная система компьютерной математики (СКМ), признанная во всем мире как лучшая для решения задач технических вычислений и математического моделирования. В настоящее время мировые лидеры в разработке и серийном производстве измерительных приборов – компании Tektronix, Teledyne LeCroy и Keysight Technologies разработали и выпустили на рынок специальные опции для стыковки MATLAB со своими приборами, что резко расширило их возможности.

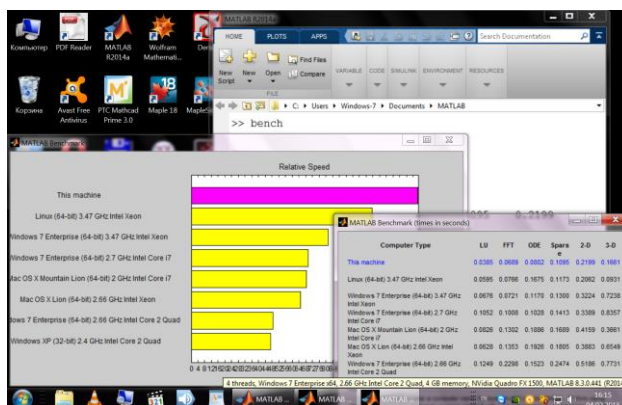


Рис. 1. Окно MATLAB для операционной системы Windows 7

MATLAB – содержит высокоуровневый язык технических расчетов, признанный лучшим и наиболее полным (около 1000 операторов и функций) языком для технических приложений. Он же интерактивная среда для разработки алгоритмов и современный инструментарий для анализа данных. По сравнению с традиционными языками программирования (C/C++, Java, Pascal, FORTRAN) MATLAB позволяет на порядок сократить время решения типовых задач и значительно упрощает разработку новых алгоритмов. Ныне в системе MATLAB и в ее свыше 80 пакетах расширения около 5000 операторов и функций.

Для работы с системой MATLAB лучшим можно признать ПК на 4-ядерном и выше процессоре Intel с твердотельным жестким диском и операционной системой Windows 7 или Windows 8.1 (рис. 1). Кстати,

такой компьютер входит как встроенный в большинство измерительных приборов с открытой архитектурой.

MATLAB широко используется в измерительной технике. Система может работать со многими приборами ведущих компаний в области мирового приборостроения (рис. 2).



Рис. 2. Приборы ведущих мировых фирм, совместимые с системой MATLAB

Пользователи могут самостоятельно создавать небольшие программы для стыковки приборов с MATLAB и ее пакетами расширения. Среди них пакет Instrument Control Toolbox, содержащий подробные сведения о стыковке приборов с системой MATLAB и множество драйверов для конкретных типов измерительных приборов.

Ниже приведен простой пример программы на языке MATLAB для задания двух сотен отчетов функции $\sin(x)/x$ и построения ее графика:

$$x = -10*\pi:1:10*\pi; y = \sin(x)./x; \text{plot}(x,y).$$

Программа может применяться для задания формы сигнала цифрового генератора, произвольных сигналов или осциллографа реального времени.

Большими возможностями применения системы MATLAB обладают осциллографы корпорации Teledyne LeCroy открытой архитектуры. Они предусматривают установку MATLAB прямо на жесткий диск встроенного в осциллограф компьютера (рис. 3).

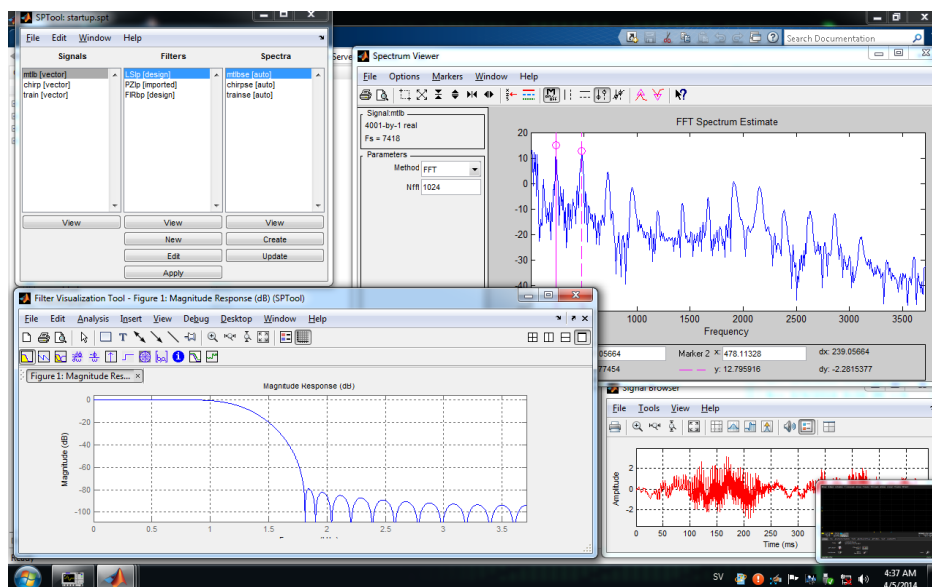


Рис. 3. Примеры работы в системе MATLAB, установленной на жесткий диск 1 ГГц осциллографа высокой четкости Teledyne LeCroy HDO6104

На рисунке 4 показан пример работы прямо в окне осциллографа – сигнал синусоиды, созданный системой MATLAB, функцией вычисления абсолютного значения в сигнал, модулирующий выходное напряжения двухполупериодного выпрямителя, и затем опцией осциллографа выполняется его спектральный анализ с построением спектра и автоматической маркировкой гармоник.

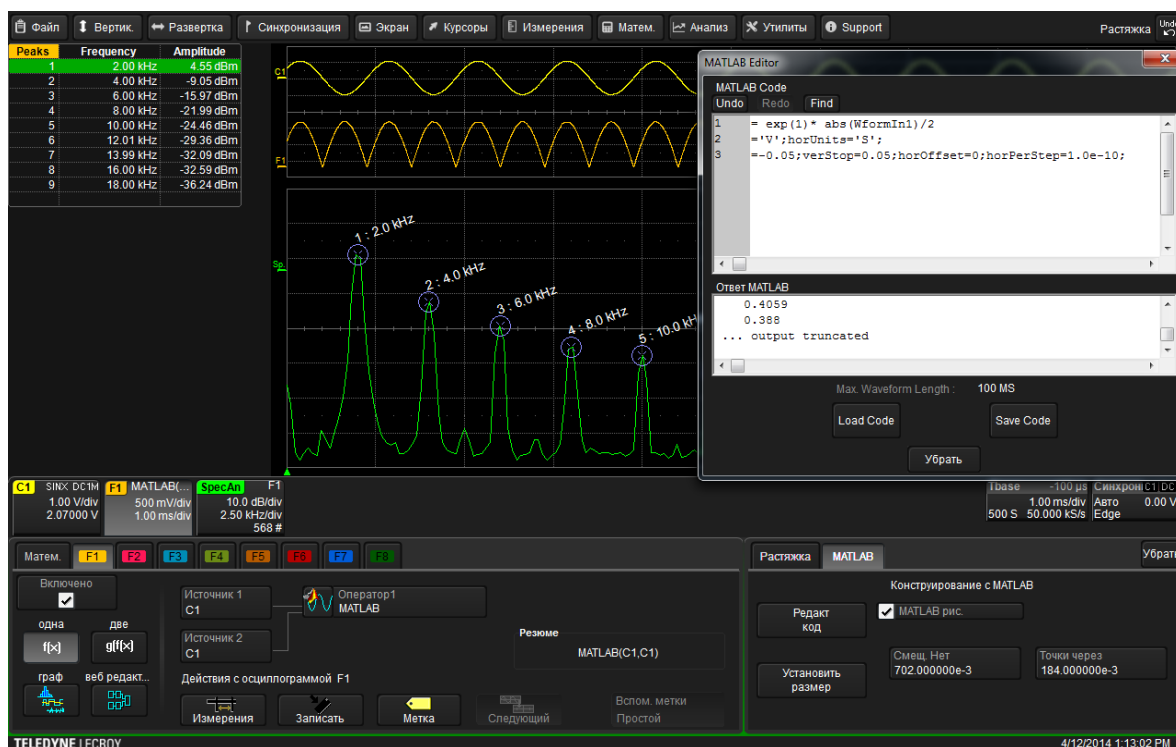


Рис. 4 . Работа с MATLAB прямо из окна осциллографа

Специальная опция компании Agilent (с осени 2014 года Keysight Technologies) N6171A MATLAB это профессиональная программа, которая позволяет расширить возможности генераторов и анализаторов сигналов по проведению измерений, анализу и визуализации данных, формированию сигналов произвольной формы, управлению приборами и созданию испытательных систем. Поставляется три варианта опции: Basic (основная), Standard (стандартная) и Advanced (расширенная).

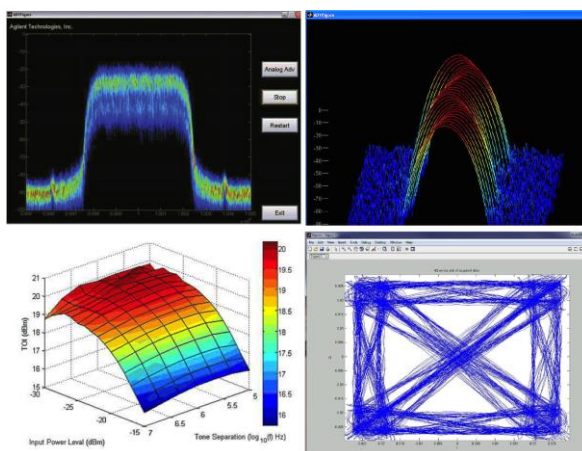


Рис. 5. Примеры графических диаграмм

С опцией N6171A поставляется бесплатный комплект материалов, содержащий руководства по применению и примеры использования MATLAB совместно с анализаторами сигналов, анализаторами спектра, модульными системами в формате PXI и AXIe и другими измерительными приборами компании Agilent (рис. 5).

Опция N6171A обеспечивает создание и воспроизведение специализированных сигналов: формирование сигналов произвольной формы, модулирование этих сигналов с использованием методов цифровой модуляции, загрузка данных IQ в генератор ВЧ сигналов, их передача, выполнение IQ измерений и воспроизведение восстановленного потока аудиоданных. Она имеет расширенные возможности по визуализации данных: анализ реальных сигналов, захваченным с помощью анализаторов сигналов Agilent серии X, в режиме двумерной (2-D) и трехмерной (3-D) визуализации.

Литература

1. Дьяконов В.П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров. ДМК-Пресс, 2011.
2. Дьяконов В.П., Хотова Ф.А. Компьютерная математика в измерениях. Смоленск.: ВАВПО РФ. 2011.
3. Дьяконов В.П. MATLAB - новые возможности в технологии осциллографии // Компоненты и системы. 2009. № 10.
4. Дьяконов В.П. Вейвлет-анализ в MATLAB реальных осциллограмм // Контрольно измерительные приборы и системы. 2010. № 3.
5. Дьяконов В.П. Математический и спектральный анализ в MATLAB реальных осциллограмм // Контрольно измерительные приборы и системы. 2010. № 1/2.
6. Дьяконов В.П. Работа цифровых осциллографов TDS1000B/2000B с системой компьютерной математики MATLAB // Схемотехника. 2007, № 7/8.
7. www.keysight.com. N6171A MATLAB Data Analysis. Software for X-Series and PSA Series Signal and Spectrum Analyzers. Technical Overview. 2014. August 3.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ В ПРОГРАММЕ MAPLE

Н.В. ЗАЙЦЕВА, Е.С. УЛЬЯНОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru

УДК 517.946

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, краевая задача, оператор Бесселя.*

В работе доказывается существование решения краевой задачи для гиперболического уравнения с оператором Бесселя.

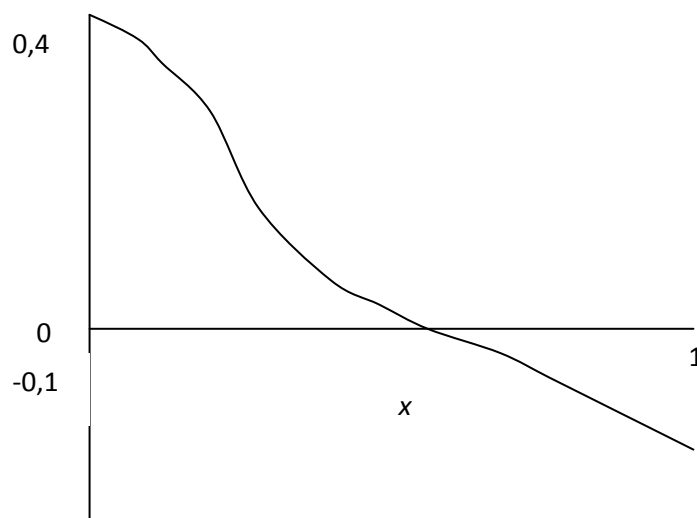
Рассмотрим задачу о нахождении в прямоугольной области решения гиперболического уравнения с частными производными с оператором Бесселя, удовлетворяющего двум ненулевым одновременно начальным условиям и классическим граничным условиям. Примем для определенности в операторе Бесселя [1] значение параметра $k = 1$.

Решим задачу методом разделения переменных в системе компьютерной математики Maple. Выпишем использованные пошагово команды:

```

> restart;
> Eq:=diff (u(x,t),t$2)=diff (u(x,t),x$2)+(1/x)*diff (u(x,t),x);
> pdsolve(Eq, HINT=X(x)*T(t));
> Eq1:=diff (X(x),x$2)= - lambda^2*X(x)-(1/x)*diff (X(x),x);
> dsolve({Eq1, D(x)(0)=0}, X(x));
> diff (BesselJ(0,x*lambda),x);
> _EnvAllSolutions:=true;
> solve(-lambda*BesselJ(1,lambda)=0, lambda);
> nu:=n -> BesselJZeros(1,n);
> X:=(x,n) -> BesselJ(0,x*nu(n));
> Eq2:=diff (T(t),t$2)=-lambda^2*T(t);
> dsolve({Eq2, D(T)(0)=0},T(t));
> T:=(t,n) -> cos(nu(n)*t);
> u:=(x,t) -> Sum(A[n]*X(x,n)*T(t,n), n=1..infinity);
> f:=x -> sin(x);
> u(x,0)=f(x);
> assume(n :: posint);
> A[n]:=int(x*f(x)*BesselJZeros(0,n), x=0..1) / int(x*BesselJZeros(0,n)^2, x=0..1);
> u(x,t);
> B:=n -> evalf(A[n]);
> u:=(x,t,N) -> sum(B(n)*X(x,n)*T(t,n), n=1..N);
> plots[animate](u(x,t,3), x=0..1, t=0..2).

```



Литература

1. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть первая. М.: И.Л., 1949. 799 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ, ВЫЗВАННЫХ НЕЙТРОНАМИ И ГАММА-КВАНТАМИ

А. А. КАСПАРОВ, Е.С. КОНОБЕЕВСКИЙ, С.В. ЗУЕВ

Институт ядерных исследований РАН, г. Москва,
e-mail: kasparov200191@gmail.com

УДК 519.6

Ключевые слова: *нейтронное излучение, гамма-кванты, разделение сигналов.*

Опробованы различные математические методы для разделения сигналов нейтронного и гамма-излучений в сцинтилляционных детекторах.

При решении некоторых задач ядерной физики возникает проблема регистрации нейтронного излучения на фоне естественного гамма-излучения. Сигналы детекторов излучения, вызванные нейтронами и гамма-квантами в смешанных полях, часто трудно различить. Ток импульса, возникающий в анодной цепи фотоэлектронного умножителя при регистрации сцинтилляций, преобразуется в цифровую форму при помощи аналогово-цифрового устройства (рис. 1). Затем полученные цифровые данные подвергаются процедуре идентификации.

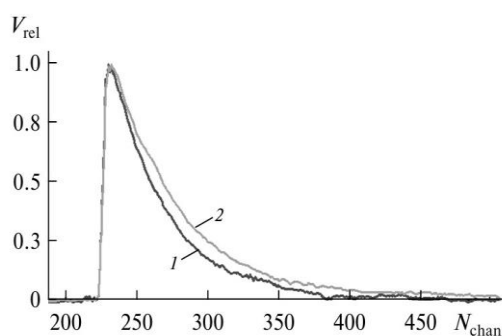


Рис. 1. Пример временной осциллограммы импульсов нейтрона (2) и гамма-кванта (1)

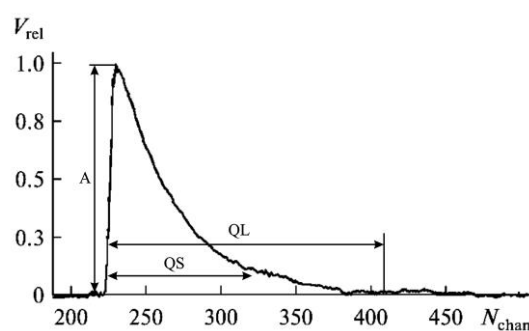


Рис. 2. Параметры формы импульса

Для разделения нейтронов и гамма-квантов главным образом используются методы разделения по форме импульсов. На основе формы сигнала вычисляются некоторые параметры его формы импульса. Примерами таких параметров являются QS и QL – «короткая» и «длинная» части интеграла импульса по времени, A – максимальная амплитуда (рис. 2). Также рассчитываются параметры для разделения сигналов, например, QL/A – эффективная ширина импульса, параметр PSD , определяемый как

$$PSD = \frac{QL - QS}{QL}$$

Для разделения строится, например, двумерная диаграмма зависимости вычисленного параметра PSD от максимальной амплитуды (рис. 3). Для количественного сравнения качества разделения рассчитывается

$$FOM = \frac{\Delta Peak}{FWHM_n + FWHM_\gamma},$$

где $\Delta Peak$ – расстояние между пиками, а $FWHM_n$ и $FWHM_\gamma$ – полные ширины на половине максимальной амплитуды. Чем выше значение FOM , тем лучше качество разделения.

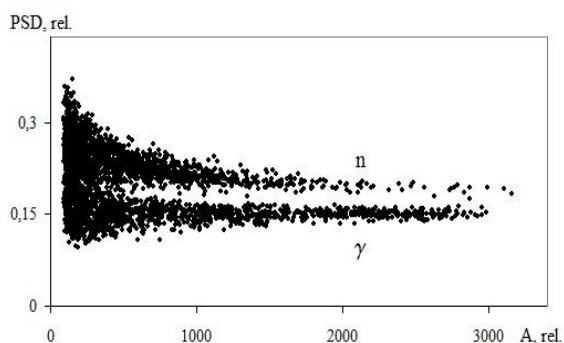


Рис. 3. Пример двумерной диаграммы $PSD - A$

В дополнение к этому строятся двумерные диаграммы зависимостей между вычисленными параметрами, например, $QL/A - PSD$ (рис. 4а). Проекция этих диаграмм на одну из осей могут не давать хорошего разделения между нейтронами и гамма-квантами. Добиться улучшения качества разделения можно вращением системы координат на угол, при котором линия, соединяющая центры нейтронного и гамма пятен, становится параллельной одной из осей координат (рис. 4б). В результате, после проектирования на ось одного из параметров, мы получаем новые спектры и можем измерить качество разделения (FOM).

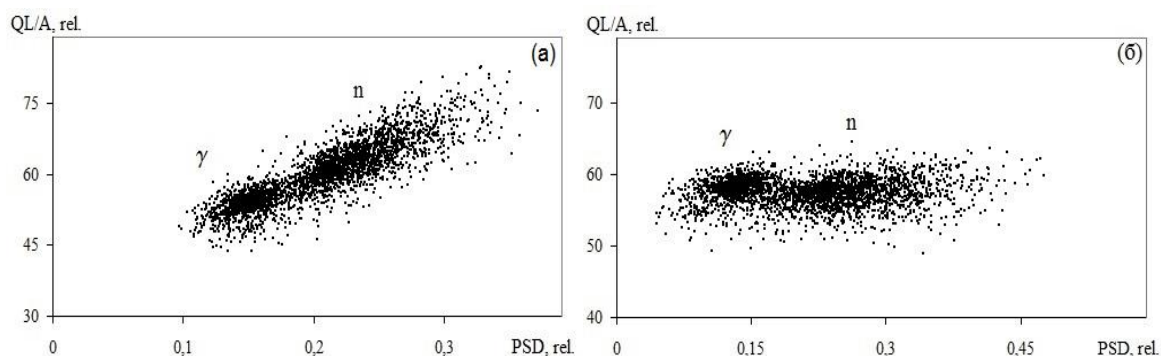


Рис. 4. Пример двумерной диаграммы $QL/A - PSD$ до (а) и после вращения системы координат (б)

В работе опробованы различные математические методы разделения нейтронов и гамма-квантов.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРОННЫХ РАЗРЯДОВ В ГАЗОВЫХ СРЕДАХ СРЕДСТВАМИ MATHCAD

Е.В. КИСЛЯКОВА

Смоленский государственный университет,
elena151082@mail.ru

УДК 533.9

Ключевые слова: *коронный разряд, электроотрицательный газ.*

Представлена модель коронного разряда в электроотрицательном газе. Методом аппроксимации экспериментальных данных получены аналитические зависимости для параметров модели – коэффициентов ударной ионизации, диффузии и подвижности электронов.

Закономерности протекания коронного разряда во многом определяются химическим составом газовой среды. В электроотрицательном газе, где велика вероятность образования отрицательных ионов, ток коронного разряда представляет собой последовательность импульсов Тричеля.

Коронный разряд может быть описан системой дифференциальных уравнений второго порядка [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_e}{\partial t} &= N_e \cdot \alpha \cdot V_e - N_e \cdot \eta \cdot V_e - N_e \cdot N_p \cdot \beta_1 - \nabla(\vec{V}_e \cdot N_e) + \nabla^2(D_e N_e); \\ \frac{\partial N_p}{\partial t} &= N_e \cdot \alpha \cdot V_e - N_e \cdot N_p \cdot \beta_1 - N_n \cdot N_p \cdot \beta_2 - \nabla(\vec{V}_p \cdot N_p) + \nabla^2(D_p N_p); \\ \frac{\partial N_n}{\partial t} &= N_e \cdot \eta \cdot V_e - N_n \cdot N_p \cdot \beta_2 - \nabla(V_n \cdot N_n) + \nabla^2(D_n N_n).\end{aligned}$$

Решение данной системы уравнений позволяет определить концентрации заряженных частиц (электронов N_e , положительных N_p и отрицательных N_n ионов) в газоразрядном промежутке. Основной проблемой при моделировании является нахождение параметров: скоростей частиц (V_e, V_p, V_n), коэффициентов ионизации (α), прилипания (η), рекомбинации (β_1 и β_2) и диффузии (D_e, D_p, D_n), так как они сами являются функциями локальной напряженности поля.

В результате многочисленных экспериментальных исследований для различных газов были получены эмпирические значения параметров. Дж. Даттон [2] обобщил эмпирические данные, представив их в графической и табличной формах. Использование MathCAD позволяет получить для параметров модели аналитические зависимости, более удобные для дальнейшей обработки.

На рисунке 1 представлена аппроксимационная зависимость

коэффициента ударной ионизации α от локальной напряженности электрического поля $\frac{E}{N}$, полученная средствами MathCAD на основе экспериментальных данных D. Price для кислорода [2].

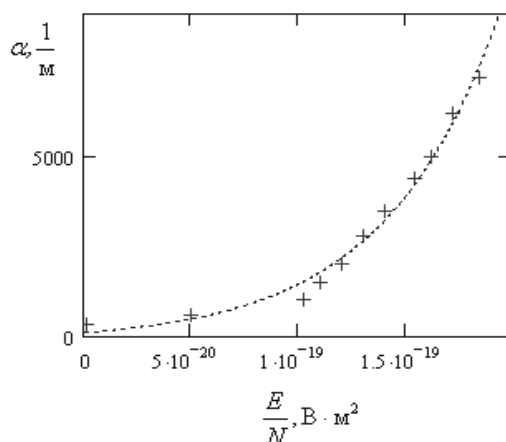


Рис. 1. Зависимость $\alpha = f(E/N)$ для кислорода: + – экспериментальные

Аналогично проведена аппроксимация других параметров модели для электроотрицательного газа – кислорода. Аналитические зависимости, полученные в MathCAD, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры модели для кислорода

Коэффициенты	Кислород
Ударной ионизации	$\alpha = 7,482 \cdot \exp(1,865 \cdot 10^{19} \cdot \frac{E}{N}) - 149,384$
Диффузии электронов	$D_e \cdot N = 2,805 \cdot 10^{24} \cdot \exp(-1,993 \cdot 10^{22} \cdot \frac{E}{N}) + 9,023 \cdot 10^{23}$
Подвижность электронов	$b_e(E/P) = \left[0,05 + \frac{0,276}{(1 + (E/P))^{0,764}} \right]$

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [2] и позволяют провести расчет концентрации заряженных частиц в газоразрядном промежутке при различных значениях локальной напряженности поля.

Литература

1. Брант ван Р. Физика и химия частичных разрядов и короны: последние достижения и будущие последствия: Уайтхедовские чтения. 1994.
2. Dutton J. A Survey of Electron Swarm Data // J. Phys. Chem. Ref. Data. 1975. Vol. 4, № 3. P. 577-856.

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ РАЗВИТИЯ РЛС НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ РЯДОВ ПАТЕНТОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ STATISTICA

В.Р. КРИСТАЛИНСКИЙ¹, Е.А. АНИКИНА²

Смоленский государственный университет¹;
Военная академия ПВО ВС РФ, г. Смоленск²,
e-mail kristvr@rambler.ru

Ключевые слова: *временные ряды, патентование, система Statistica.*

Работа посвящена использованию системы Statistica для анализа динамических рядов патентования на примере прогнозирования развития РЛС.

Для прогнозирования развития исследований по той или иной проблематике широко применяется анализ временных рядов. Временной ряд позволяет представить динамику патентования в той или иной области и сделать прогноз на будущее.

Один из подходов к прогнозированию временного ряда основан на построении его авторегрессионной модели. Авторегрессионная модель позволяет лучше оценить предысторию и получить более точный прогноз.

Авторегрессионная модель второго порядка имеет следующий вид

$$Y_i = A_0 + A_1 Y_{i-1} + A_2 Y_{i-2} \delta_i.$$

Авторегрессионная модель порядка p имеет следующий вид

$$Y_i = A_0 + A_1 Y_{i-1} + \dots + A_p Y_{i-p} \delta_i.$$

В авторегрессионной модели второго порядка оценивается зависимость и корреляция как между соседними, так и между последовательными значениями временного ряда, разделённые двумя временными интервалами. В авторегрессионной модели p -го порядка оценивается зависимость и корреляция между соседними значениями, последовательными значениями временного ряда, разделёнными двумя временными интервалами, и так далее вплоть до последовательных значений временного ряда, разделённых p временными интервалами.

В настоящей работе для проведения расчетов использовалась система Statistica. В этой системе реализовано построение авторегрессионной модели порядка, выбранного пользователем. Нами была выбрана модель второго порядка.

По данным о количестве патентов, выданных в США, Японии и Республике Корея, целью которых являлось совершенствование радиолокационных систем, были на основе предложенной модели построены прогнозы на ближайшие 10 лет по развитию данного научного направления.

Результаты расчетов для Республики Корея представлены в таблице 1.

Таблица 1

Годы	Прогноз	Нижняя граница	Верхняя граница
2015	3,806302	2,430325	5,182280
2016	4,280840	2,674663	5,887016
2017	4,091760	2,174883	6,008637
2018	4,166665	2,023026	6,310304
2019	4,136558	1,773685	6,499430
2020	4,148224	1,590103	6,706344
2021	4,143273	1,401848	6,884698
2022	4,144932	1,232464	7,057399
2023	4,143962	1,069695	7,218228
2024	4,144037	0,916192	7,371883

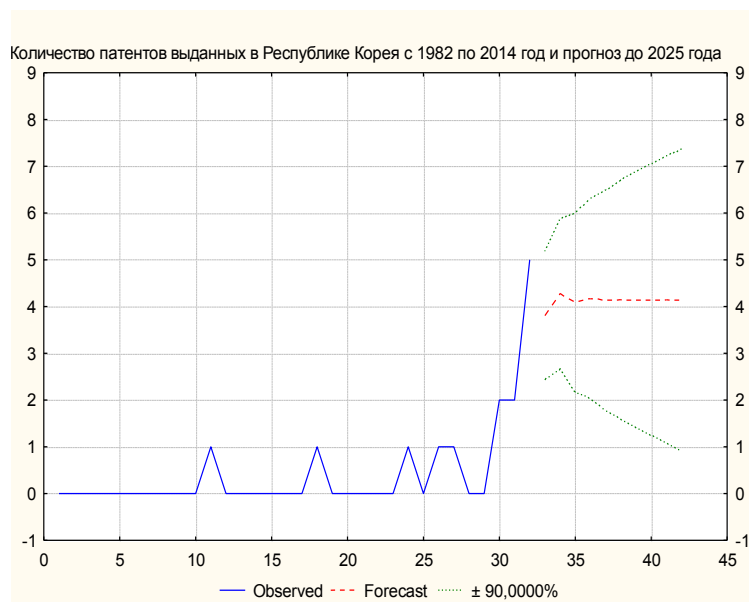


Рис 1. Прогноз развития РЛС в Республике Корея

На основе прогнозирования можно сделать вывод о том, что в Республике Корея интерес к рассматриваемой теме стабильно растет, и с вероятностью 0,9 на протяжении ближайших десяти лет ежегодно будут выдаваться от двух до 6-7 патентов.

ПРИВЕДЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИНВАРИАНТОВ В СКМ MAPLE

А.М. НИГМЕДЗЯНОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e-mail: aigmani@rambler.ru

УДК 004.94, 514.142.24

Ключевые слова: *математическое моделирование, системы компьютерной математики, аналитическая геометрия, кривые второго порядка, метод инвариантов, канонический вид кривых второго порядка.*

Работа посвящена приведению кривых второго порядка к каноническому виду с помощью метода ортогональных инвариантов в СКМ Maple.

Одним из приоритетных направлений процесса информатизации современного общества является информатизация образования. Использование информационно-коммуникационных технологий, как в средней общеобразовательной школе, так и в высшем учебном заведении, позволяет существенно изменить деятельность всех участников образовательного процесса, оптимизировать управление обучением, повысить эффективность и объективность учебного процесса при значительной экономии времени преподавателя, мотивировать учеников на получение новых знаний и закрепление выработанных умений и навыков.

В предыдущих статьях автор уже строил цифровое оснащение к задачам математической физики [1], динамическую текстовую визуализацию построения сечений многогранников [2], а также оснащённую динамическую визуализацию построения точки по ее проективным координатам на расширенной прямой [3] и плоскости [4]. Написанные программы позволяют повысить наглядность при изучении соответствующих разделов математики.

Для приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду можно использовать различные методы, в частности, метод ортогональных преобразований, который и был взят за основу написания данной программы.

В данной работе представляем программу-процедуру, в которой вводятся произвольные коэффициенты уравнения второго порядка, т.е. общее уравнение исследуемой кривой. Далее программа-процедура вычисляет значения ортогональных инвариантов квадратичной функции, на основе чего делается вывод: является ли кривая центральной или нецентральной, определяет тип линии в случае центральной кривой

(эллиптический или гиперболический), пишет название кривой (эллипс, гипербола, парабола), вычисляет угол поворота (в градусах), координаты центра кривой (в случае центральной линии), координаты вершины и ось (если это парабола). Далее программа прописывает каноническое уравнение кривой в новой системе координат, а также изображает график кривой на координатной плоскости вместе с новой системой координат, которая помечается пунктиром. Следует заметить, что область вывода графика зависит от вида кривой, его центра и т.д., т.е. для каждого случая он определяется «индивидуально».

"Исходное уравнение:", $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y - 5 = 0$

"Центральная кривая"

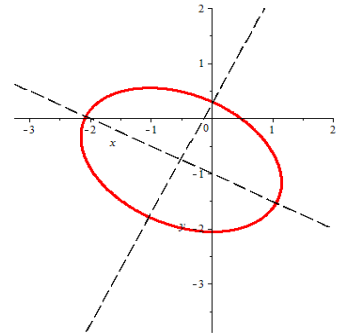
"Линия эллиптического типа"

"Угол поворота в градусах =", -63.6

"Центр поворота =", $\left\{ x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{4} \right\}$

"Эллипс"

"Каноническое уравнение:", $\frac{36}{49} \xi^2 + \frac{16}{49} \eta^2 = 1$



"Исходное уравнение:", $10x^2 + 9xy - 12y^2 - 20x + 2y + 10 = 0$

"Центральная кривая"

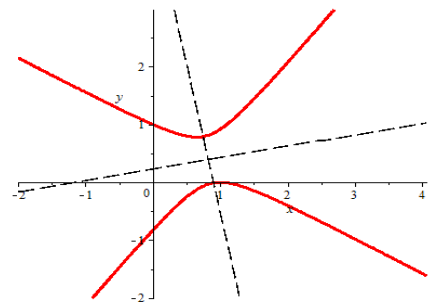
"Линия гиперболического типа"

"Угол поворота в градусах =", -11.1

"Центр поворота =", $\left\{ x = \frac{14}{17}, y = \frac{20}{51} \right\}$

"Гипербола"

"Каноническое уравнение:", $-\frac{\xi^2}{\frac{40}{2601} + \frac{20}{2601}\sqrt{565}} + \frac{\eta^2}{-\frac{40}{2601} + \frac{20}{2601}\sqrt{565}} = 1$



"Исходное уравнение:", $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

"Нецентральная кривая"

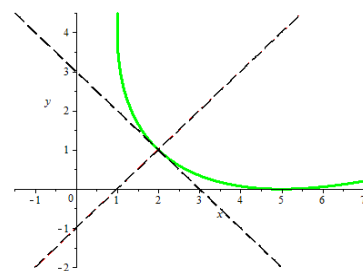
"Угол поворота в градусах =", -44.8

"Вершина кривой =", $\{x = 2., y = 1.\}$

"ось симметрии кривой:", $-x + y + 1 = 0$

"Парабола"

"Каноническое уравнение:", $2\xi^2 + 8\sqrt{2}\eta = 0$



"Исходное уравнение:", $8xy - 4x - 6y + 3 = 0$

"Центральная кривая"

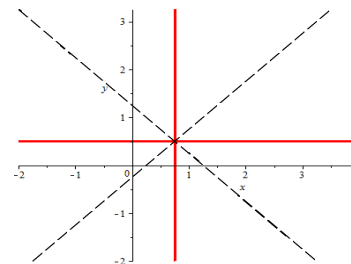
"Линия гиперболического типа"

"Угол поворота в градусах =", -44.8

"Центр поворота =", $\left\{ x = \frac{3}{4}, y = \frac{1}{2} \right\}$

"Пара пересекающихся прямых"

"Каноническое уравнение:", $[2\xi + 2\eta = 0, 2\xi - 2\eta = 0]$



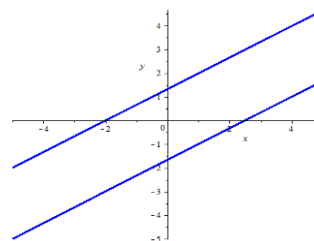
"Исходное уравнение:", $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 20 = 0$

"Нецентральная кривая"

"Пара параллельных прямых"

$$2x - 3y + 4 = 0, 2x - 3y - 5 = 0$$

"Каноническое уравнение:", $\xi^2 - \frac{2081}{676} = 0$



Таким образом, данная разработка может использоваться не только как наглядный материал для обучающихся, но и для проверки результатов, полученных аналитическим способом.

Литература

1. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация задач математической физики // Информационные технологии в образовании и науке ИТОН-2012: материалы конференции и труды семинара. 8-12 октября 2012 г., Казань. С.127-121.

2. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построений сечений многогранников // Международный научный семинар «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии» и Российская школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений». Казань, 21-26 октября 2013 г. С.151-157.

3. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построения точки по ее координатам на проективной прямой // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. научной конференции. Смоленск. 2014. Вып. 15. С. 36-38.

4. Нигмедзянова А.М. Динамическая визуализация построения точки в пространстве по ее проективным координатам. // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики». Казань: Изд-во «Фолиант», 2014. С. 236-239.

ПОСТРОЕНИЕ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В НЕКОММЕРЧЕСКИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Е.В. ПЕТРОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: petrova-elena-vlad@mail.ru

УДК 004.67

Ключевые слова: *регрессионные модели, информационный ресурс WolframAlpha, система компьютерной математики Maxima.*

В работе представлен обзор возможных вариантов построения регрессионных моделей в некоммерческих вычислительных системах MS Excel, WolframAlpha, Maxima.

Рассмотрим ситуацию, когда перед специалистом стоит задача построить модель для анализа определенной статистической последовательности данных. Для её решения могут быть привлечены средства известных систем компьютерной математики, которые способны реализовать разнообразные методы, минимизировать различные факторы погрешностей, присутствующие в математических моделях.

Но очень часто у специалистов экономических и управленческих направлений возникает необходимость в построении решений типовых задач, не требующих высокой точности решения. В таких ситуациях становится слишком затратным вариант приобретения коммерческого математического пакета для их решения.

Рассмотрим возможные варианты некоммерческих реализаций поставленной задачи.

Не стоит забывать о возможностях пакета MS Excel, если рассматривать версию предустановленного программного обеспечения (ОЕМ). Построение регрессионных моделей в нём реализуется путём добавления линии тренда на диаграмме исходных статистических данных. Линия тренда имеет ряд параметрических свойств, связанных с типом регрессии, вычислением коэффициентов аналитического выражения и величины достоверности приближения.

В современных условиях актуальным является вариант привлечения интернет-ресурсов для решения поставленной задачи. Так, например, в информационном ресурсе WolframAlpha компании Wolfram [1, 2] на странице готовых вычислительных решений (Examples), в разделе по статистике и анализу данных (Statistics and Data Analysis), предлагается ряд типовых примеров. Регрессионный анализ представлен основными видами [3]:

- линейный,
- полиномиальный,
- экспоненциальный,
- логарифмический.

Используя разработанные примеры, можно ввести собственные исходные данные, и система построит регрессионную модель, вычислит коэффициенты приближения и выдаст диагностику в виде информационных критериев AIC и BIC, коэффициент детерминации R^2 , что определяет количественную оценку качества построения модели. Кроме того, автоматически будет построен график исходного массива данных и найденной аналитической функции.

Другим вариантом построения регрессионных моделей является использование вычислительных возможностей систем компьютерной математики с открытым кодом GPL. Как отмечалось ранее,

вычислительные возможности пакета Maxima, его доступность создают хорошие предпосылки для использования в математическом моделировании [4].

Чтобы построить линейную регрессионную модель в Maxima, удобно применить встроенную функцию `simple_linear_regression`. Она работает устойчиво для различных исходных данных. Данная функция рассчитывает коэффициенты линейной модели и другие статистические параметры, такие как коэффициенты корреляции, детерминации, доверительные интервалы параметров и т.д. График функции `simple_linear_regression` исходной последовательности данных с коэффициентом корреляции, равным 0.95, представлен на рисунке 1. На поле графика выводится уравнение модели с приближенными значениями коэффициентов, а статистические параметры отражаются в документе пакета.

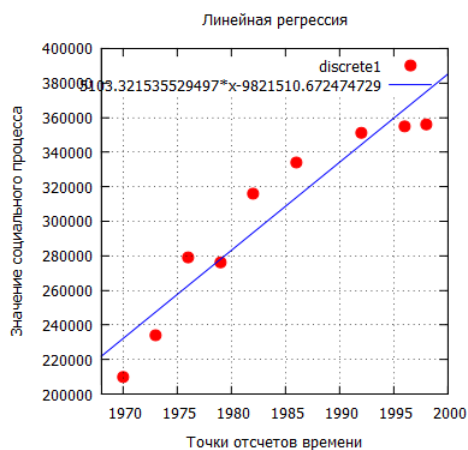


Рис. 1. Линейная регрессия

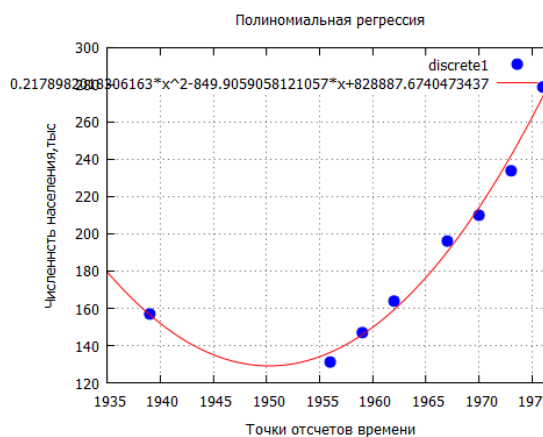


Рис. 2. Полиномиальная регрессия

Для моделирования нелинейных процессов хорошо зарекомендовала себя функция `lsquares_estimates` пакета расширений `lsquares`. В нём реализуется метод наименьших квадратов. Как известно, он позволяет формировать различные аналитические модели.

Исходные данные должны быть представлены в виде матрицы значений. Затем, активизировав пакет расширений и функцию, необходимо описать вид искомой аналитической зависимости.

В работе рассматривались примеры парной регрессии, где в качестве аналитической модели выступал полином второй степени.

Фрагмент документа Maxima построения полиномиальной модели будет содержать следующие команды ввода:

- > `load (lsquares);`
- > `M:matrix([1939,157],[1956,131],[1959,147],[1962,164],[1967,196],[1970,210],[1973,234],[1976,279]);`
- > `lsquares_estimates(M,[x,z],z=A*x+B*x^2+C,[A,B,C]).`

Надо отметить, что функция `lsquares_estimates` рассчитывает только значение коэффициентов заданной аналитической зависимости, поэтому необходимо оценить качество выбранной модели. Это можно сделать графически, построив график исходных данных и найденного полинома (рис. 2), или количественно, специально рассчитав необходимые статические параметры.

Литература

1. Дьяконов В.П. Облачная система компьютерной математики WOLFRAM ALPHA // Системы компьютерной математики и их приложения. 2014. Вып. 15. С. 13-18.
2. Инструмент вычислительных знаний WolframAlpha [Электронный ресурс]. URL: <http://www.wolframalpha.com/> (дата обращения март 2015).
3. Примеры регрессионного анализа системы WolframAlpha [Электронный ресурс]. URL: <http://www.wolframalpha.com/examples/RegressionAnalysis.html/> (дата обращения март 2015).
4. Петрова Е.В. Решение Паде-аппроксимации в системе MAXIMA // Системы компьютерной математики и их приложения. 2014. Вып. 15. -С. 38-40.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА НА КОЛЬЦЕВОЙ АВТОДОРОГЕ

А.В. ПОДОРОГА

МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва,
e-mail: anastasiapodoroga@gmail.com

УДК 532.5+004.942

Ключевые слова: *математическое моделирование, транспортный поток, модель Нагеля-Шрекенберга.*

Рассматривается идеальный транспортный поток на кольцевой автодороге. Устанавливается связь компьютерного моделирования с теоретической моделью Нагеля–Шрекенберга. Обсуждаются некоторые следствия.

С каждым годом число автомобилей на дорогах возрастает и проблемы моделирования транспортных потоков становятся все актуальнее. Подробное изложение математической теории дорожного движения можно найти в монографии [1]. В макроскопической модели транспортного потока основными характеристиками являются плотность потока $\rho = \rho(x, t)$, его скорость $v = v(x, t)$ и величина $q = q(x, t)$, выражающая усредненное число автомобилей, проходящих через точку x в момент времени t .

Величины v , ρ , q связаны следующими соотношениями. Должно выполняться уравнение неразрывности, которое в теории транспортных потоков называется *законом сохранения автомобилей*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Справедлива формула потока

$$q(x, t) = \rho(x, t)v(x, t).$$

Специфика дорожного движения предполагает, что при увеличении плотности потока его скорость уменьшается. Отсюда возникает третье соотношение, выражающее зависимость скорости потока от плотности

$$v(x, t) = V(\rho(x, t))$$

с монотонно убывающей функцией $V = V(\rho)$. Это соотношение называется *законом безопасного движения*. Также важную роль играет зависимость величины потока от плотности в виде так называемой *фундаментальной диаграммы*

$$q = Q(\rho) = \rho V(\rho).$$

Указанные соотношения действуют на однополосной автомобильной дороге без съездов и въездов машин.

Рассмотрим специальный случай кольцевой автодороги. Он удобен тем, что можно задавать лишь начальное расположение автомобилей и не надо генерировать входящий поток машин для изучаемого участка дороги. *Идеальным транспортным потоком* будем называть такой поток, при котором одинаковые автомобили движутся абсолютно равномерно на одинаковом расстоянии d друг от друга. Для кольцевой автодороги расстояние d выражается через число автомобилей N , длину кольца L и длину отдельной машины l по формуле

$$d = \frac{L}{N} - l.$$

При изучении идеальных транспортных потоков удобно использовать компьютерное моделирование. Нами была разработана программа "Cars", имитирующая движение автомобилей по однополосной дороге (см. [2]). Движение каждого автомобиля рассчитывается в зависимости от текущей ситуации. В одной недавней серии экспериментов моделировался идеальный транспортный поток на кольцевой автодороге. Автомобили с одинаковой стартовой скоростью располагались на равном расстоянии d друг от друга. Тогда постоянная плотность ρ вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{N}{L}.$$

Из закона безопасного движения следует, что финальная достижимая скорость автомобилей $v = V(\rho)$ тоже будет постоянной на кольце.

Используя эти соображения и компьютерные расчеты, удалось установить явную зависимость скорости v от плотности ρ (см. точки на графике ниже). При анализе полученных данных выяснилось, что численные результаты полностью соответствуют известной теоретической модели Нагеля-Шрекенберга [3] (см. линию на графике ниже), согласно которой зависимость скорости от плотности имеет вид

$$V(\rho) = \begin{cases} v_{\max}, & 0 < \rho \leq \rho^*, \\ \frac{\kappa}{\rho} - \frac{\kappa}{\rho_{\max}}, & \rho^* \leq \rho \leq \rho_{\max}. \end{cases}$$

Здесь κ – положительная константа, v_{\max} – максимально допустимое значение скорости, ρ_{\max} – максимальное допустимое значение плотности, при достижении которой транспортный поток останавливается. Специальную плотность ρ^* назовем *плотностью кристаллизации*, отвечающей переходу от свободного движения автомобилей к затрудненному. С помощью численных расчетов для идеального транспортного потока на кольце найдено значение $\kappa = 1.59$.

Теоретическое исследование модели Нагеля-Шрекенберга показывает, что задача Коши для уравнения дорожного движения

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V(\rho))}{\partial x} = 0, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), \end{cases}$$

при начальном условии $\rho_0(x) \equiv \rho^*$ имеет не единственное решение. При численной проверке этого результата эффект неединственности был подтвержден. Оказалось, что при

начальном распределении транспортных средств с плотностью, близкой к ρ^* , через некоторое время идеальность потока нарушается из-за любых микровозмущений, плотность перестает быть постоянной, в ней возникают сгущения и разрежения. В то же время при плотностях, хоть немного отделенных от ρ^* , подобные эффекты не наблюдаются, транспортный поток достигает определенной скорости, в точности соответствующей теоретической модели Нагеля-Шрекенберга, и продолжает устойчивое движение до бесконечности (см. рис. 1).

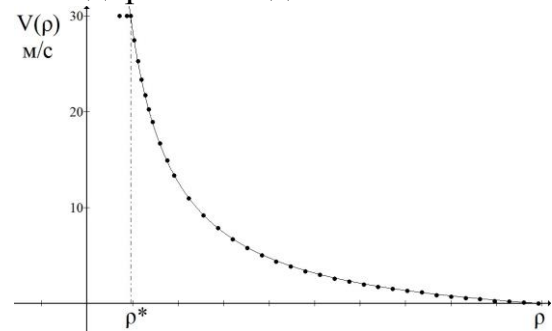


Рис. 1

Литература

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие / Гасников А.В. [и др.]; под ред. А.В. Гасникова. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: МЦНМО, 2013. 427 с.

2. Подорога А. В. Имитационные компьютерные модели в задачах однополосного дорожного движения // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV Международной научной конференции. Смоленск: СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 42–44.

3. Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automation model for freeway traffic // Journal de Physique I France. 1992. Vol. 2, № 12. P. 2221–2229.

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ВЫБОРУ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В СИСТЕМЕ MATHCAD

А.Г. СУХАНОВА

Филиал ФГБОУ ВПО «МГИУ» в г. Рославле,
г. Рославль, e-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru

УДК 519.688

Ключевые слова: *нечеткие множества, экспертная система, система нечеткого вывода, портфель ценных бумаг.*

Разработана экспертная система нечеткого вывода для оценки портфеля ценных бумаг. Для реализации математических моделей была использована система Mathcad.

В настоящее время нечеткие множества широко используются в различных областях, например, в [1] описаны возможности системы MATLAB при построении систем нечеткого вывода для определения готовности преподавателя к проектированию информационной образовательной исследовательской среды вуза. Применение нечетких множеств для оценки рыночного риска рассмотрено в [2].

В данной работе разработана экспертная система нечеткого вывода для оценки портфеля ценных бумаг в системе Mathcad.

Этапы проектирования и разработки программных средств рассмотрены в [3].

В качестве выходного параметра системы нечеткого вывода будем рассматривать нечеткую лингвистическую переменную (ЛП) «Портфель ценных бумаг». В качестве входных параметров выбраны две нечеткие лингвистические переменные: «Доходность портфеля», «Риск портфеля».

Экспертные знания о данной проблемной области могут быть представлены в виде следующих правил:

1) если доходность портфеля низкая и риск критический или повышенный, то это неудовлетворительный портфель;

2) если доходность портфеля средняя и риск повышенный, то это удовлетворительный портфель;

3) если доходность портфеля низкая и риск минимальный, то это удовлетворительный портфель;

4) если доходность портфеля высокая и риск повышенный или критический, то это хороший портфель;

5) если доходность портфеля высокая и риск минимальный, то это очень хороший портфель.

Терм-множество значений первой ЛП «Доходность портфеля» зададим как множество $T_1 = \{\text{«низкая»}, \text{«средняя»}, \text{«высокая»}\}$, а терм-множество второй ЛП «Риск портфеля» зададим как множество $T_2 = \{\text{«минимальный»}, \text{«повышенный»}, \text{«критический»}\}$. Терм-множество значений выходной ЛП «Портфель ценных бумаг» зададим как множество $T_3 = \{\text{«неудовлетворительный»}, \text{«удовлетворительный»}, \text{«хороший»}, \text{«очень хороший»}\}$.

Для доходности рынка будем использовать следующую шкалу границ доходности рынка (табл. 1).

Таблица 1

Шкала границ доходности портфеля			
Границы зон доходности, %	< 40	40 - 80	>80
Зоны доходности	Низкая	Средняя	Высокая

Для риска портфеля будем использовать следующую шкалу границ риска (табл.2).

Таблица 2

Шкала границ риска портфеля			
Границы зон риска, %	< 50	50 – 100	>100
Зоны риска	Минимальный	Повышенный	Критический

На рисунке 1 показано задание треугольных функций принадлежности для термов входной переменной «Доходность портфеля» в системе Mathcad.

$$AFYZ(x) := \max(AF(x), AY(x), AZ(x))$$

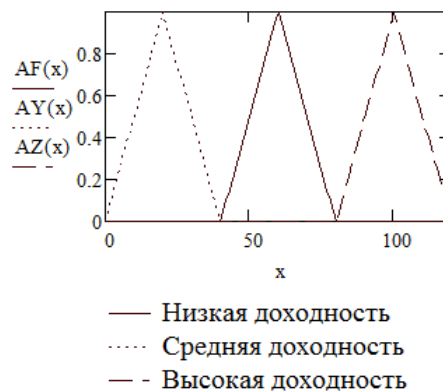


Рис. 1

Результат нечеткого вывода представлен на рисунках 2 и 3 при «четких значениях» входных переменных, равных 100, 60.

Задаем четкие значения входных переменных

$$x := 100 \quad y := 60$$

Вычисляем значения функций принадлежности, соответствующие значениям входных переменных

$$AF(x) = 0 \quad AY(x) = 0 \quad AZ(x) = 1 \quad BY(y) = 1 \quad BF(y) = 0 \quad BL(y) = 0$$

Находим уровни отсечения функции принадлежности выходной переменной

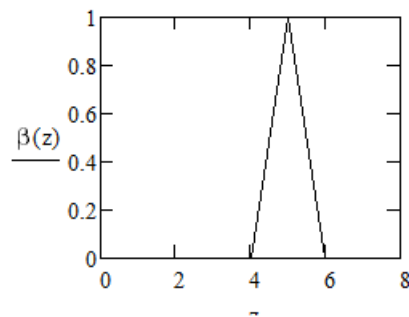
$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \min(AY(x), BL(y)) & \alpha_1 &= 0 & \alpha_2 &:= \min(AF(x), BY(y)) & \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &:= \min(AZ(x), BY(y)) & \alpha_3 &= 1 & \alpha_4 &:= \min(AZ(x), BF(y)) & \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_5 &:= \min(AY(x), BF(y)) & \alpha_5 &= 0 & \alpha_2 &:= \max(\alpha_2, \alpha_5) & \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_6 &:= \min(AY(x), BY(y)) & \alpha_6 &= 0 & \alpha_1 &:= \max(\alpha_1, \alpha_6) & \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_7 &:= \min(AZ(x), BL(y)) & \alpha_7 &= 0 & \alpha_3 &:= \max(\alpha_3, \alpha_7) & \alpha_7 &= 0 \end{aligned}$$

Находим объединение усеченных функций принадлежности $z := 0..8$

$$\begin{aligned} C1(z) &:= \min(\alpha_1, CF(z)) & C2(z) &:= \min(\alpha_2, CY(z)) & C3(z) &:= \min(\alpha_3, CZ(z)) \\ C4(z) &:= \min(\alpha_4, CM(z)) & \beta(z) &:= \max(C1(z), C2(z), C3(z), C4(z)) \end{aligned}$$

Рис. 2. Результат нечеткого вывода при значениях входных переменных [100, 60] в системе Mathcad

Строим график функции принадлежности переменной вывода



Находим "четкое" значение переменной вывода центроидным методом

$$z_w := \frac{\frac{0 \cdot \beta(0) + 8 \cdot \beta(8)}{2} + \sum_{i=1}^7 (i \cdot \beta(i))}{\sum_{i=1}^7 \beta(i)} \quad z_w = 5$$

Рис. 3. Результат нечеткого вывода при значениях входных переменных [100, 60] в системе Mathcad (продолжение)

Из рисунка 3 видно, что если задать первой входной переменной значение 100, что будет соответствовать высокой доходности портфеля, второй переменной значение 60, что соответствует повышенному риску портфеля ценных бумаг, то мы получаем «четкое значение» выходной переменной, равное 5, что соответствует хорошему портфелю.

Разработанная экспертная система позволяет по введенным конкретным значениям входных показателей получать оценку портфеля ценных бумаг, что позволяет ее пользователям снимать неопределенность принимаемых решений при работе с финансовыми активами, ориентироваться в сложившейся ситуации на рынке ценных бумаг и принимать нужные решения в плане формирования портфеля ценных бумаг.

Литература

1. Суханов М.Б., Суханова А.Г. Нечеткая оценка готовности преподавателя к проектированию образовательной среды // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. 2013. № 2. С. 15 – 19.

2. Суханова А.Г., Суханов М.Б. Система нечеткого вывода для оценки рыночного риска // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIV Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. Вып. 14. С. 106 – 109.

3. Рековец В.И., Рековец А.В. Этапы проектирования и разработки педагогических программных средств (ППС) // Сборник научных трудов ВА ВПВО. Смоленск. 2010. Вып. 13.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ СВЯЗИ

О. В. ТИХОНОВА

МГТУ радиотехники, электроники и автоматики МИРЭА, г. Москва,
e-mail: o_tikhonova@inbox.ru

УДК 623.4.01

Ключевые слова: *математическое моделирование, имитационное моделирование, цифровая система спутниковой связи.*

Обсуждается вопрос построения универсальной математической модели цифровой системы связи. Рассмотрена структура модели и ее основные элементы. Указаны примеры задач, решаемых с помощью модели. Приведены результаты расчетов для цифровой системы спутниковой связи.

На всех этапах жизненного цикла сложной радиотехнической системы от ее первоначального замысла до серийной эксплуатации важную роль играет математическое моделирование. Постоянно создаются новые, более полные математические модели, подвергаются кардинальным доработкам старые, но решаемые с их помощью задачи остаются по сути неизменными – это оценка достижимости заданных параметров системы, проверка правильности реализованных технических решений, всестороннее рассмотрение модернизационных возможностей системы в условиях ограничений, налагаемых как объективными внешними условиями, так и технико-экономическими аспектами. Фактически в общем виде решается многокритериальная оптимизационная задача при наличии ограничений.

Для цифровых систем передачи данных существенными ограничениями являются требуемые скорость и качество передачи, с одной стороны, и разрешенные полосы передачи, наличные мощности, ограничения на комплектующие, с другой стороны. Интуитивно ясно, что увеличение скорости передачи данных и уменьшение вероятности ошибок противоречит требованиям снижения потребляемой мощности и минимизации ширины полосы пропускания сигнала. Кроме того, существуют предельные теоретические барьеры, такие как минимальная требуемая ширина полосы пропускания сигнала по Найквисту и теорема о пропускной способности Шеннона. Приходится учитывать также пределы современных вычислительных мощностей [1].

Задача оптимизации параметров цифровой системы передачи данных весьма эффективно решается с помощью многоуровневой имитационной математической модели. Соответствие структуры модели и структуры реальной системы, полная идентичность алгоритмов цифровой обработки, подробная имитация внешних возмущений и положительные результаты проверки модели на адекватность позволяют распространить выводы, сделанные из численных экспериментов, на работу реальной системы [2].

Для повышения качества связи при заданных параметрах канала связи используют специальные узкополосные сигналы с особыми методами модуляции и демодуляции [3]. Также применяется помехоустойчивое канальное кодирование – преобразование исходного сигнала для минимизации ошибок, обусловленных помехами в канале связи. Канальное кодирование состоит во введении определенной избыточности в сообщение, что увеличивает степень непохожести передаваемых сигналов друг на друга. Как следствие, уменьшается вероятность принятия одного сигнала за другой.

Теория кодирования руководствуется фундаментальной теоремой Шеннона о пропускной способности канала связи, которая утверждает, что если канал характеризуется пропускной способностью C

(выраженной в бит/сек), а требуемая скорость передачи информации по каналу составляет R бит/с, то при $R > C$ не существует способа построения сигнала, обеспечивающего произвольную достоверность передачи данных. Наоборот, при $R \leq C$ всегда можно найти код, гарантирующий любую желаемую достоверность передачи информации.

Теорема Шеннона о пропускной способности канала связи дает строгое математическое обоснование существования кода, но не является конструктивной, т. е. не указывает никакого конкретного кода для достижения заявленного качества декодирования. Доказательство теоремы базируется на усредненной по всем возможным канальным кодам вероятности ошибки. Оно показывает, что почти все коды достаточно большой длины будут хороши с должной точки зрения. Разработанные в настоящее время помехоустойчивые коды [4; 5] различаются как по эффективности, так и по сложности реализации (обычно речь идет о сложности декодирования полученных сигналов).

Помехоустойчивые коды исправляют отдельно расположенные ошибки. Для компенсации негативного влияния «пакетных» подряд расположенных принятых ошибочных символов закодированный сигнал разбивается на блоки (кодовые слова) и подвергается перемешиванию (перемежению) по заранее известному алгоритму, позволяющему потом вернуться к первоначальному порядку.

При приеме непрерывного потока данных в первую очередь необходимо восстановить первоначальное разбиение на кодовые слова, затем провести процедуры, обратные перемежению и кодированию, и в итоге получить информацию, максимально приближенную к исходной.

Отдельно рассматривается вопрос получения «жестких» (0 или 1) или «мягких» решений о том, какой информационный символ принят приемным устройством. «Мягкие» решения определяют степень похожести принятого информационного символа на 0 или 1. Это несет в себе больше информации и позволяет использовать более эффективные алгоритмы декодирования и демодуляции, но увеличивает их сложность. Как следствие, повышаются требования к вычислительным ресурсам.

Поиск компромиссов и выбор оптимальных или приемлемых с технической точки зрения решений осуществляется с помощью имитационной модели цифровой системы связи. В соответствии со структурой реальной системы структура модели выглядит следующим образом (рис. 1).

Блок информации предназначен для формирования случайных или наперед заданных информационных слов данных (в двоичной системе).

Блок кодирования воспроизводит алгоритм кодирования помехоустойчивым кодом, преобразовывая информационные слова в кодовые слова большей длины.

Блок перемежения делает перестановку символов кодовых слов.

Блок вставки последовательности предназначен для формирования маркеров, отмечающих начало и конец кодовых слов при непрерывной передаче данных по каналу связи.

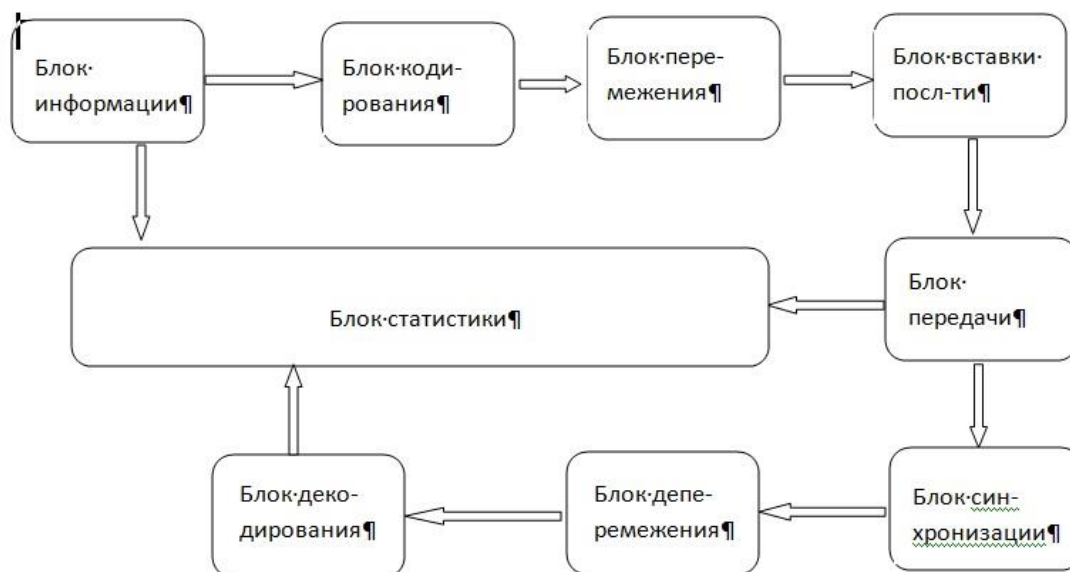


Рис. 1. Математическая модель цифровой системы связи

Блок передачи имитирует работу модулятора, канала связи и демодулятора. В соответствии с принципом многоуровневого моделирования эти три составляющие моделируются отдельно, а здесь используются статистические аналоги их работы.

Блок синхронизации выявляет в принимаемом потоке данных отдельные кодовые слова.

Блок деперемежения делает обратную перестановку символов кодовых слов, восстанавливая исходный порядок.

Блок декодирования исправляет ошибки передачи символов и восстанавливает исходные информационные слова.

Для получения статистических оценок работы системы связи в разных условиях (задаваемых в блоке передачи) в модели предусмотрен блок статистики, не имеющий аналога в реальной системе.

Предъявленная модель является универсальной, позволяя оценивать эффективность различных помехоустойчивых кодов, правильность логики работы алгоритмов синхронизации и декодирования, достаточности глубины перемежения. Наряду с этим при реализации конкретных алгоритмов на ПЛИС (программируемых логических интегральных схемах) есть возможность проверить корректность работы программ. Для примера, в таблице 1 приведены результаты моделирования цифровой системы спутниковой связи при использовании кода с малой плотностью проверки на четность (МППЧ) и проверочной матрицей 48 на 96.

Для получения статистических оценок процесс моделирования проводился многократно, что позволило получить некоторые обобщенные характеристики результатов итерационного декодирования МППЧ-кода.

Таблица 1

Заданная вероятность ошибок передачи символа	Среднее реализовавшееся число ошибок в кодовом слове (размера 96)	Число просчитанных реализаций	Число неуспешных декодирований кодовых слов	Процент успешных декодирований кодовых слов
0,01	0,95	600 000	0	100%
0,02	1,92	600 000	0	100%
0,025	2,4	600 000	0	100%
0,03	2,87	600 000	1	100%
0,05	4,81	600 000	4	100%
0,1	9,6	600 000	1200	99,8%

При анализе полученных данных следует принять во внимание, что моделирование проводилось при самых плохих условиях приема, поскольку для спутниковых каналов характерны средние вероятности ошибок не $10^{-1} - 10^{-2}$, как в таблице, а на несколько порядков ниже. Но даже для таких искусственных условий рассмотренная процедура декодирования показала хорошие результаты. Из таблицы видно, что при 600000 испытаниях безошибочное кодирование наблюдается вплоть до вероятности ошибки на символ, равной 0,025. Таким образом, результаты моделирования подтверждают работоспособность выбранного способа кодирования, правильность принципа и программной реализации алгоритма декодирования. Еще раз подчеркнем, что рассмотрены и сложный код, и сложная процедура декодирования.

Другим актуальным вопросом, решаемым с помощью математического моделирования, является отработка идеологии алгоритма синхронизации с выбором оптимальных параметров и явного вида маркеров.

В настоящее время моделирование применено к нескольким актуальным системам передачи данных со спутника, но в дальнейшем универсальность модели позволит использовать ее для других разрабатываемых систем.

Литература

1. Бернард Скляр. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. 1104 с.

2. Тихонова О. В. Многоуровневое моделирование сложных технических систем // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2012. Вып. 13. С. 216–217.

3. Викулов В. М. Методы снижения пик-фактора сигнала OFDM. Компьютерное моделирование // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV Международной научной конференции. Смоленск: СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 11–13.

4. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы алгоритмы, применение. М.: Техносфера, 2005. 320 с.

5. Золотарев В. В., Овечкин В. Г. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. М.: Горячая линия Телеком, 2004. 126 с.

СИНТЕЗ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Е.В. ХАРИТОНОВА

РЭУ им. Г.В. Плеханова, г. Москва, e-mail: alena@math.susu.ac.ru

УДК 519.6:621.317

Ключевые слова: *функция Грина, задача Валле-Пуссена.*

В работе рассматривается модель измерений, построенная на базе анализа обратной многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.

1. Введение

Одной из проблем теории и практики динамических измерений является проблема оперативного оценивания детектируемого сигнала в условиях, когда входной сигнал трудно поддается прямому измерению, а выходной содержит значительную часть динамической погрешности (например, при измерении импульсных или других, быстро меняющихся во времени, сигналов).

Задачи, возникающие при этом в теории измерений, могут быть условно разделены на две группы – задачи восстановления сигнала и задачи анализа динамической погрешности. Первая из упомянутых задач – определение входного сигнала, искаженного средствами измерений, представляет собой обратную задачу теории измерений, которая может быть сформулирована как задача решения операторного уравнения

$$Au(t) = x(t)$$

относительно функции $u(t)$ при неточно заданных операторе A и правой части $x(t)$. В важном для приложений случае, когда функции $u(t)$ и $x(t)$ связаны дифференциальным соотношением $L[x(t)] = u(t)$ (здесь $L[.]$ – дифференциальный оператор, порожденный краевыми условиями),

обращение задачи приводит к интегральному уравнению первого рода (Вольтерра или Фредгольма – в зависимости от постановки задачи).

В настоящей работе рассматривается синтез модели измерений, построенной на основе обратной многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.

2. Постановка задачи

Входной сигнал $u(t)$ первичного преобразователя (датчика) недоступен прямому наблюдению и регистрации и восстанавливается по наблюдениям за выходными показателями $x(t)$ измерительных приборов. Наблюдаемый сигнал $x(t)$ является решением краевой задачи

$$L(x) = \sum_{k=0}^n a_k(t) \cdot x^{(k)}(t) = u(t), \quad U_j(x) = l_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $U_j(x) = l_j, j = 1, 2, \dots, n$ – линейные в $C_{[a,b]}^{n-1}$ функционалы.

Пусть $\varphi_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ – фундаментальная система решений однородного уравнения $L(x) = 0$. Если выполнено условие $\det(U_j(\varphi_i)) \neq 0$, задача (1) однозначно разрешима и задача восстановления $u(t)$ по экспериментальным данным $x(t)$ может быть поставлена как задача решения интегрального уравнения

$$\int_a^b G(t, \tau) \cdot u(\tau) d\tau = \tilde{x}(t), \quad (2)$$

где $G(t, \tau)$ – функция Грина краевой задачи (1), $\tilde{x}(t)$ – «исправленный» наблюдаемый сигнал, даваемый соотношением

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \varphi_i(t) + \int_a^b G(t, \tau) \cdot L(\sum \alpha_i \varphi_i(\tau)) d\tau.$$

Для случая краевых условий типа Валле-Пуссена, функция Грина может быть эффективно численно найдена с помощью специального приема [1].

При этом константы α_i определяются из уравнений $U_j(\sum \alpha_i \varphi_i) = l_j, j = 1, 2, \dots, n$.

Задача (2) решается методом невязки, дискретизация осуществлялась с помощью кусочно-линейных функций с последующей минимизацией функционала метода невязки как функции многих переменных.

Литература

1. Ермаков С.В., Харитонов Е.В. Численное построение функции Грина многоточечной краевой задачи // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математика, Физика, Химия. Вып. 6. № 6(46). 2005. С.36-39.

ЧИСЛЕННОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИНКЕРИ О ВЕЩЕСТВЕННЫХ НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ БЕРНУЛЛИ

Д. Г. ЦВЕТКОВИЧ

Московский педагогический государственный университет, г. Москва,
e-mail: dianacve@inbox.ru

УДК 519.6

Ключевые слова: *полиномы Бернулли, вещественные нули, компьютерная математика.*

Методами компьютерной математики проводится проверка результатов Инкери о распределении вещественных нулей полиномов Бернулли.

Настоящая работа продолжает исследование, начатое в [1]. Речь идет о вещественных нулях полиномов Бернулли.

Полиномы Бернулли $B_n(t)$ стандартно вводят через производящую функцию

$$\frac{\lambda}{e^\lambda - 1} e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} \lambda^n, \quad |\lambda| < 2\pi.$$

Справедливо представление

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k t^{n-k},$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты, а B_k – числа Бернулли. Подробнее с теорией чисел и полиномов Бернулли можно познакомиться по книгам [2-4].

Ряд трудных и специальных исследований посвящен проблеме вещественных нулей полиномов Бернулли. Обозначим через c_n общее число вещественных нулей полинома $B_n(t)$. Величина c_n ведет себя весьма нетривиально. В работе Инкери [5] показано, что

$$c_n = \frac{2n}{\pi e} + o(n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Возникает естественный вопрос: существует ли явная формула для нахождения значения c_n по любому номеру n ? Так, при проведении расчетов для небольших номеров может возникнуть гипотеза о некоей повторяемости структуры последовательности c_n в том смысле, что

$$\exists p, q \in \mathbf{N}, \exists n_0 \in \mathbf{N}: c_{q+n} = p + c_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0.$$

Гипотеза, скорее всего, неверна, поскольку из нее путем несложных рассуждений с учетом (1) выводится соотношение

$$\frac{2}{\pi e} = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}.$$

Насколько известно, теоретико-числовая природа числа πe до сих пор не изучена, но маловероятно, что это число является рациональным.

Поведение нулей полиномов $B_n(t)$ на отрезке $[0,1]$ описывается следующим комбинированным утверждением из работ [6-8].

Теорема 1. При каждом четном $n \geq 2$ полином $B_n(t)$ имеет на $[0,1]$ в точности два простых нуля $t = \alpha_n \in (0, 1/2)$, $t = \beta_n \in (1/2, 1)$, причем $\beta_n = 1 - \alpha_n$. Нули $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots$ образуют строго возрастающую последовательность, сходящуюся к $1/4$ с оценкой

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}\pi} < \alpha_n < \frac{1}{4}.$$

При каждом нечетном $n \geq 3$ полином $B_n(t)$ имеет на $[0,1]$ в точности три простых нуля: $t = 0$, $t = 1/2$, $t = 1$.

Основной интерес представляет проблема вещественных нулей полиномов Бернулли, расположенных вне отрезка $[0,1]$. При описании таких нулей важную роль играют величины y_n , M_n , где y_n – максимальный вещественный нуль полинома $B_n(t)$, а значение M_n вводится по правилу:

1) $M_n = 0$, если $y_n \leq 1$, т. е. если полином $B_n(t)$ не имеет вещественных нулей вне отрезка $[0,1]$;

2) $M_n = [y_n]$, если $y_n > 1$, т. е. если наибольший вещественный нуль полинома $B_n(t)$ выходит за пределы отрезка $[0,1]$.

В терминах величины M_n в работе Инкери [5] получено следующее описание вещественных нулей, находящихся справа от отрезка $[0,1]$.

Теорема 2. Пусть $M_n \geq 1$. Тогда вещественные нули полинома $B_n(t)$, большие чем 1, расположены парами в интервалах

$$k < t < k+1, \quad k = 1, 2, \dots, M_n.$$

Исключение составляют два случая: если $n = 4m+1$, то в первом интервале $1 < t < 2$ всегда имеется только один нуль; если $n = 4m$, то в последнем интервале $M_n < t < M_n + 1$ имеется либо один, либо три различных нуля.

Этот результат содержится в теореме 4 из [5]. Установленное правило позволяет выразить общее число вещественных нулей через величину M_n .

Теорема 3. Для номеров $n = 4m + d$, $m \in \mathbf{Z}_+$, $d \in \{1, 2, 3\}$ справедливо соотношение

$$c_n = 4M_n + d. \quad (2)$$

Для номеров $n = 4m$, $m \in \mathbf{N}$, имеет место альтернатива:

$$c_n = 4M_n \quad \text{или} \quad c_n = 4M_n + 4. \quad (3)$$

Этот результат также содержится в теореме 4 из [5]. Аналитически оценивая ряд вспомогательных величин, Инкери получает асимптотическую оценку значения M_n .

Теорема 4. При $n \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$M_n \sim \frac{n}{2\pi e}. \quad (4)$$

Комбинируя соотношения (2) - (4), Инкери устанавливает свою основную формулу (1) для величины c_n . Дополнительные уточнения оценки (1) даны в работах [9; 10].

Недавно мной проведено численное исследование перечисленных выше утверждений Инкери, в результате чего удалось полностью подтвердить все его выводы и уточнить некоторые закономерности. С помощью встроенной команды *CountRoots* математического пакета Wolfram Mathematica 10.0 были найдены точные количества вещественных нулей полиномов $B_n(t)$ на всех допустимых отрезках для первых полутора тысяч номеров. Построены таблицы, содержащие значения c_n , y_n , M_n . Следует отметить, что в процессе локализации нулей полиномов $B_n(t)$ при обращении к Wolfram Mathematica 10.0 возникают особые проблемы с номерами $n = 4m + 3$ при $m \geq 18$. Это обстоятельство, скорее всего, связано с тем, что нуль, принадлежащий интервалу $1 < t < 2$, располагается очень близко к границе $t = 2$, из-за чего трудно локализуем. Также отдельно рассмотрен случай $n = 4m$, $m \in \mathbf{N}$, поскольку у полиномов $B_{4m}(t)$ согласно теореме 2 в последнем интервале имеется либо один, либо три нуля. Оказалось, что среди первых полутора тысяч номеров вторая возможность («с тремя нулями») реализуется достаточно редко – примерно в 13 – 14 % случаев из всех значений $n = 4m$. Такими номерами будут $n = 16, 32, 84, 100, 152, 168, 220, 236, 304, 356, 372, 408, 424, 440, 476, 492, 544, 560, 612, 628, 664, 680, 696, 732, 748, 800, 816, 868, 884, 920, 936, 952, 988, 1004, 1056, 1072, 1124, 1140, 1176, 1192, 1244, 1260, 1312, 1328, 1380, 1396, 1432, 1448, 1500$. Именно для этих n в формуле (3) получается $c_n = 4M_n + 4$.

Составленные таблицы наглядно подтверждают отсутствие строгой регулярности в распределении нулей полиномов Бернулли.

Попытки отыскать алгоритм для поиска точного числа вещественных нулей полиномов Бернулли предприняты в [9; 11; 12]. В частности, в работе [12] предложен «почти универсальный» метод, позволяющий вычислять величину c_n для подавляющего большинства значений n . С помощью пакета Maple авторы находят точное значение

c_n для первых двух миллионов номеров, за исключением $n = 1356486$, когда их подход дает два возможных варианта ответа

$$c_{1356486} = 317690 \quad \text{или} \quad c_{1356486} = 317694$$

при том, что истинным ответом является второй.

Литература

1. Цветкович Д. Г. Численные оценки количества вещественных нулей полиномов Бернулли // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 60–62.
2. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: ГИФМЛ, 1959. 400 с.
3. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: ГИФМЛ, 1959. 327 с.
4. Прасолов В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2001. 336 с.
5. Inkeri K. The real roots of Bernoulli polynomials // Annales Universitatis Turkuensis (Turku). 1959. Ser. A1. No. 37. P. 3–19.
6. Nörlund N. E. Mémoire sur les polynomes de Bernoulli // Acta Mathematica. 1922. Vol. 43. S. 121–196.
7. Lense J. Über die Nullstellen der Bernoullischen Polynome // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1934. Band. 41. S. 188–190.
8. Lehmer D. H. On the maxima and minima of Bernoulli polynomials // The American Mathematical Monthly. 1940. Vol. 47, No. 8. P. 533–538.
9. Delange H., Sur les zéros réels des polynômes de Bernoulli // Annales de l'institut Fourier (Grenoble). 1991. Tome 41, No. 2. P. 267–309.
10. Ефимов А. И. The asymptotics for the number of real roots of Bernoulli polynomials // Forum Mathematicum. 2008. Vol. 20(2). P. 387–393.
11. Leeming D. J. The real zeros of the Bernoulli polynomials // Journal of Approximation Theory. 1989. Vol. 58. P. 124–150.
12. Edwards R., Leeming D. J. The exact number of real roots of the Bernoulli polynomials // Journal of Approximation Theory. 2012. Vol. 164, Is. 5. P. 754–775.

МЕТОДИКА ПОВЫШЕНИЯ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ ORACLE TIMES TEN

В.В. ШЕПЕЛИН, К.Г. СТЕПАНОВ

Смоленский филиал «РАНХиГС при ПРФ»; Смоленский филиал НИУ «МЭИ»,
e-mail: shodin@mail.ru; stepanovrg@gmail.ru

УДК 004.9

Ключевые слова: база данных, быстродействие, оптимизация, оперативная память, интеллектуальный кэш.

В работе рассматривается вопрос о возможности существенного повышения быстродействия системы управления базами данных за счет применения технологии Oracle Times Ten In-Memory Database

Cache (IMDB). Это обеспечивается не только благодаря физическим свойствам оперативной памяти, но и меньшему использованию процессорного времени для одинаковых операций.

Несмотря на то, что современные системы управления базами данных (СУБД) совершенствуются с точки зрения быстродействия, время доступа к данным для ряда задач оказывается недостаточным даже при высоком уровне производительности аппаратной платформы. Например, в системах, обрабатывающих большой поток запросов (т.е. с точки зрения базы данных – огромное количество операций «вставка/удаление»), быстродействия стандартных решений оказывается недостаточно, а попытки оптимизировать не дают значительного эффекта. К тому же оптимизация быстродействия средствами самой СУБД, как правило, производится за счет надежности, что может оказаться недопустимым [1-2].

Решением проблемы может оказаться применение технологии Oracle Times Ten In-Memory Database Cache (IMDB). Times Ten – это СУБД, использующая для хранения и обработки данных оперативную память. Times Ten может применяться как отдельная база данных, так и в связке с СУБД Oracle (мастер-БД), выполняя роль высокопроизводительного интеллектуального кэша.

Основные отличия Times Ten от обычных СУБД [2-3]:

- высокая пропускная способность;
- низкая задержка (обновление записи за 15 микросекунд);
- практически мгновенная доступность;
- гарантированная целостность данных.

Используя оптимизированные структуры для работы именно в оперативной памяти, Oracle Times Ten позволяет получить очень маленькое время отклика (микросекунды) и высокую пропускную способность. Известно, что в современных информационных системах наиболее критичными с точки зрения быстродействия являются операции дискового чтения/записи. Так как оперативная память многократно быстрее, чем дисковая, то Times Ten позволяет обрабатывать запросы гораздо быстрее, чем традиционные СУБД. При применении Times Ten часть нагрузки переносится в оперативную память, повышая таким образом, общее быстродействие системы. Кроме того, благодаря размещению хранилища данных целиком в оперативной памяти, отпадает ряд операций, присущих стандартным СУБД, как например, преобразование логических адресов в физические на диске, управление буферным кэшем. Таким образом, повышение быстродействия достигается не только благодаря физическим свойствам оперативной памяти, но и меньшему использованию процессорного времени для одинаковых операций.

Times Ten IMDB наиболее часто применяется в следующих отраслях:

- биржевая торговля (Nasdaq) [5];
- биллинг, сети и телекоммуникации (Cisco) [5];
- высоконагруженные системы отчетности (Oracle Exalytics In-Memory Machine компании ФОРС, Россия) [4];
- банковская сфера (Deutsche Bank, J.P. Morgan) [5].

Большая часть информации в корпоративных базах данных относится к прошлым периодам и запрашивается нечасто. Однако среди этих масс данных находится информация, мгновенный доступ к которой бывает не только целесообразен, но даже необходим. В качестве примеров можно привести список заказчиков предприятия (или абонентов) и каталог продуктов, которые изменяются сравнительно редко, и данные о его недавних транзакциях, которые изменяются довольно часто. Кроме того, существует история транзакций абонента и исторические данные о его платежном балансе – данные, которые используются сравнительно редко. Таким образом, данные, используемые приложением, можно разделить на две части: историческую и оперативную. Оперативные данные используются часто и должны быть доступны в реальном времени. Исторические данные используются в отчетах и не требуют такой высокой доступности.

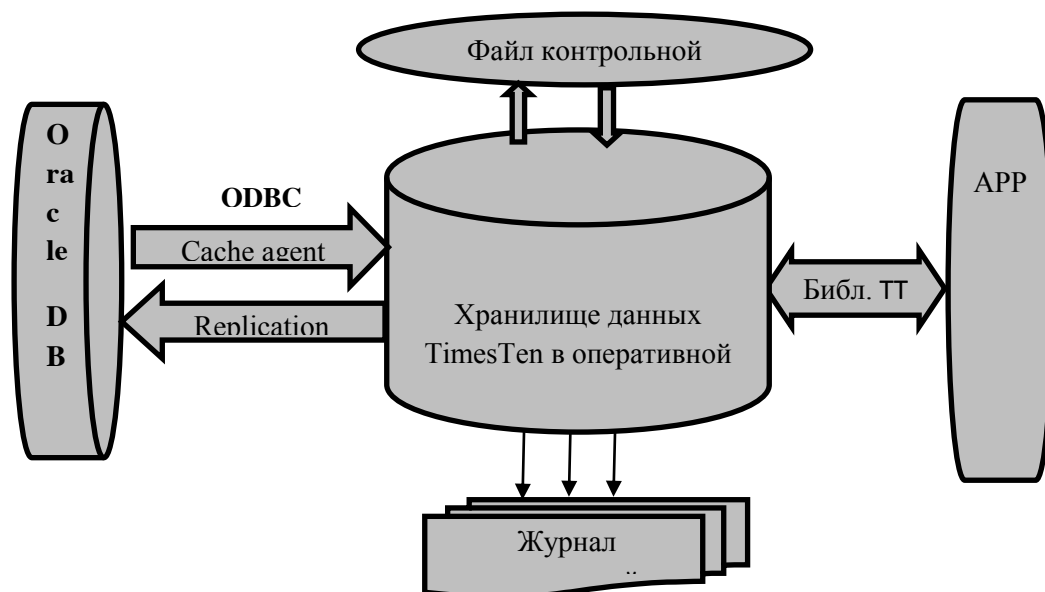


Рис 1. Архитектура Times Ten IMDB Cache

Суть оптимизации производительности информационной системы с использованием Oracle In-Memory Database Cache заключается в кэшировании оперативной (а также части необходимой исторической) информации и управление ею в базах данных TimesTen, размещенных в оперативной памяти. TimesTen обеспечивает возможность доступа к

данным в реальном времени, а также автоматическую синхронизацию данных между кэшем в оперативной памяти и СУБД Oracle.

Рассмотрим архитектуру Times Ten IMDB. Базу данных, расположенную в памяти, принято называть хранилищем данных Times Ten. Дисковым представлением хранилища данных является файл контрольной точки (checkpoint file). При запуске Times Ten в память загружается содержимое файла контрольной точки как начальное состояние хранилища. Последующие действия с данными происходят в оперативной памяти. Промежуточные состояния хранилища сохраняются в файле контрольной точки, периодически и асинхронно. Кроме того, действия над данными также фиксируются в журналах транзакций (transaction logs). В случае, если хранилище аварийно останавливается, то при восстановлении в память будет прочитан файл контрольной точки, а затем применены последующие транзакции, сохраненные в журнале.

Взаимодействие с мастер-базой данных Oracle осуществляется с помощью агентов кэша (Cache daemon) и репликации (Replication daemon) посредством ODBC. Наконец, приложение App взаимодействует с Times Ten через предустановленные на клиентской стороне специальные библиотеки Times Ten IMDB.

Times Ten предоставляет возможность работы с двумя типами структур данных для кэширования:

- 1) Read-only Cache group, кэш только для чтения, данные читаются приложением из Times Ten, изменяются напрямую в Oracle, изменения инкрементально передаются из Oracle в Times Ten). Используется для представления справочников - данных, к которым требуется обеспечить быстрый доступ для чтения и которые изменяются относительно редко;
- 2) Asynchronous Write-Through Cache group, асинхронный изменяемый кэш (изменения делаются в Times Ten и передаются в Oracle).

Кэш-группы представляют собой реляционные структуры, работа с данными в них аналогична работе с таблицами обычной СУБД (см. Листинг 1, 2).

Для больших таблиц может быть применена технология эйджинга (agings). Кэшируемые данные могут загружаться по мере необходимости и выталкиваются из кэша по мере устаревания — aging. Синхронизация с Oracle выполняется автоматически и можно настроить различные ее режимы: синхронный и асинхронный.

Приведем возможный алгоритм внедрения Times Ten IMDB. В качестве примера рассмотрим биллинговую информационную систему, работающую по модели Postpaid. Суть биллинга – сбор и обработка информации об указанных за некий период услуг (в частности, телекоммуникационных) абоненту с целью их тарификации,

выставления абоненту счета и обработки информации о платежах. Postpaid означает, что услуги абоненту предоставляются заранее, а затем абонент получает счет за предоставленные услуги за некий период. Неотъемлемой частью биллингового бизнес-процесса является так называемый рейтинг, то есть определение стоимости оказанной абоненту услуги согласно его тарифному плану. Физически процесс заключается в обработке большого массива файлов, содержащих информацию о звонках, смс-сообщениях и GPRS-сессиях. Задача рейтинга – соотнести указанные события конкретному абоненту, определить стоимость события в зависимости от местоположения абонента, его тарифного плана и т.д. Современные биллинговые системы позволяют реализовывать довольно востребованную услугу – предоставлении информации о текущем балансе абонента, что означает оперативную обработку огромного количества записей. Очевидно, что процесс рейтинга создает значительную нагрузку на СУБД, что во время пиковых нагрузок угрожает работоспособности информационной системы в целом, поэтому было принято решение использовать TimesTen IMDB для оптимизации.

1. В первую очередь, на этапе проектирования информационной системы следует определить, какие данные из мастер-БД будут представлены в высокопроизводительном кэше, реализуемом на платформе Times Ten. Далее указанные данные следует разделить на исторические (справочные), которые будут представлены как Read-only Cache group, и оперативные, представляемые в виде Write-Through Cache group. В нашем случае следует определить, к каким таблицам мастер-БД процесс рейтинга обращается чаще всего для чтения (например, таблицы, содержащие информацию о тарифных планах, которая меняется относительно редко), а также таблицы, содержимое которых будет изменяться часто (например, данные о балансах абонентов).

2. На этапе установки Times Ten следует определить режим, в котором будет функционировать IMDB. Программа установки предлагает два варианта, следует использовать «Oracle In-Memory Database Cache».

3. После установки и настраивается соединение с мастер-БД в конфигурационном файле sys.odbc.ini.

4. После установки Times Ten в пока еще пустом хранилище данных создаются заранее определенные группы кэша только для чтения (см. *Листинг 1*) и асинхронного изменяемого кэша (см. *Листинг 2*).

5. Для оптимизации доступа к данным кэш-групп Times Ten предоставляет механизм индексации. Следует помнить, что построение индексов следует производить при отключенном агенте кэширования. Агент отключается следующей командой: ttAdmin – cacheStop <instance name>.

6. После построения кэш-групп следует активизировать кэш-агента и репликацию: `ttAdmin -cacheStart <instance name>`, `ttAdmin -repStart <instance name>`.

Таким образом, в результате внедрения Times Ten IMDB для оптимизации работы процесса рейтинга был получен значительный прирост производительности биллинговой системы. Оценивая производительность предыдущей версии системы и современной, использующей Times Ten на сравнимых объемах данных, мы сделали вывод о практически десятикратном приросте производительности. Так, за время, ранее требовавшееся для обработки 275000 событий, система новой версии обрабатывает 2 500 000 событий. При незначительном увеличении затрат на лицензирование компания избавилась от рисков, связанных со срывом сроков договора на поставку услуг (обработка данных и выставление счетов абонентам компании-клиента) и сопутствующих штрафных санкций.

Листинг 1

Пример DDL предложения для создания кэш-группы только для чтения в TimesTen с названием TT_BALANCE_MAP из таблицы BALANCE_MAP мастер-БД с первичным ключом по полю BAL_MAP_UID, с автоматическим инкрементальным обновлением с периодом 3 секунды:

```
create readonly cache group TT_BALANCE_MAP
autorefresh
mode incremental
interval 300000 milliseconds
state on
from
BALANCE_MAP (
BAL_MAP_UID          NUMBER(20, 0)  NOT NULL,
ACCOUNT_NO           NUMBER(11, 0)  NOT NULL,
EQUIP_UID             NUMBER(11, 0),
BALANCE_UID           NUMBER(20, 0)  NOT NULL,
INITIAL_BALANCE       NUMBER(20, 0)  NOT NULL,
START_DT              DATE          NOT NULL,
END_DT                DATE,
LOCKED_YN             CHAR(1)       NOT NULL
ORDERING_DT           DATE          NOT NULL,
EQUIP_UID             NUMBER(11, 0)
DAEMON_YN             CHAR(1)       NOT NULL,
PRIMARY KEY (BAL_MAP_UID)
);
```


Листинг 2

Пример DDL предложения для создания изменяемой кэш-группы сквозной записи в TimesTen с названием TT_GSM_CALL_FILES с асинхронной репликацией для таблицы GSM_CALL_FILES мастер-БД с составным первичным ключом по полям CORRESPONDENT_UID, TRANSFER_TYPE, TRANSFER_NO:

```
create asynchronous writethrough cache group TT_GSM_CALL_FILES
FROM
GSM_CALL_FILES (
CORRESPONDENT_UID      NUMBER(11)      NOT NULL,
TRANSFER_TYPE          CHAR(2 BYTE)    NOT NULL,
TRANSFER_NO            NUMBER(11)      NOT NULL,
STATUS_CD              CHAR(2 BYTE)    NOT NULL,
START_DT               DATE            NOT NULL,
COMPLETE_DT            DATE,
HEADER_START_DT        DATE,
HEADER_END_DT          DATE,
FILENAME               CHAR(30 BYTE)   NOT NULL,
TAP_CUT_OFF_DT         DATE,
PRIMARY KEY
(CORRESPONDENT_UID,TRANSFER_TYPE,TRANSFER_NO));
```

Литература

1. April Sims. Oracle Database 11g - Underground Advice for Database Administrators // Packt Publishing. 2010. 384 с.
2. Sam Alapati, Darl Kuhn, Bill Padfield. Oracle Database 11g Performance Tuning Recipes: A Problem-Solution Approach // Apress, 2011. 585 с.
3. Oracle, Inc. Oracle TimesTen In-Memory Database and Oracle In-Memory Database Cache:
<http://www.oracle.com/technetwork/database/database-technologies/timesten/overview/index.html>.
4. Компания ФОРС:
http://www.fors.ru/upload/ppt/111212/Oracle%20Exalytics_11Dec2012.pdf.
5. The Register: <http://www.theregister.co.uk/>.

СЕКЦИЯ 2

Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОРПУСНОЙ ЛИНГВИСТИКИ СРЕДСТВАМИ БАЗ ДАННЫХ

В.В. АВХИМОВИЧ¹, Т.А. САМОЙЛОВА²

Гимназия № 1 им. Н.М. Пржевальского, г. Смоленск¹,

Смоленский государственный университет²,

e-mail:¹avk-veronika@yandex.ru, ²tatsam@hotmail.ru

УДК 81.139

Ключевые слова: *корпусный менеджер, реляционная СУБД, поэтический текст, частотный словарь, семантическая группа, частотность, процентное соотношение.*

В данной работе рассматривается использование баз данных для решения задач корпусной лингвистики. Существующий инструментарий (AntConc или Tenka Text) не способен в полной мере решать поставленные задачи. Импорт частотных словарей художественных произведений в СУБД Access позволяет распределять лексемы по семантическим группам, а затем сравнивать количество сформированных групп в других текстах. Данная методика была апробирована на двух поэтических текстах: «Балладе о дружбе» С.П. Гудзенко и «Балладе о товарище» А.Т. Твардовского. Гипотеза о качественном и количественном совпадении семантических групп тематически связанных текстов полностью подтвердилась.

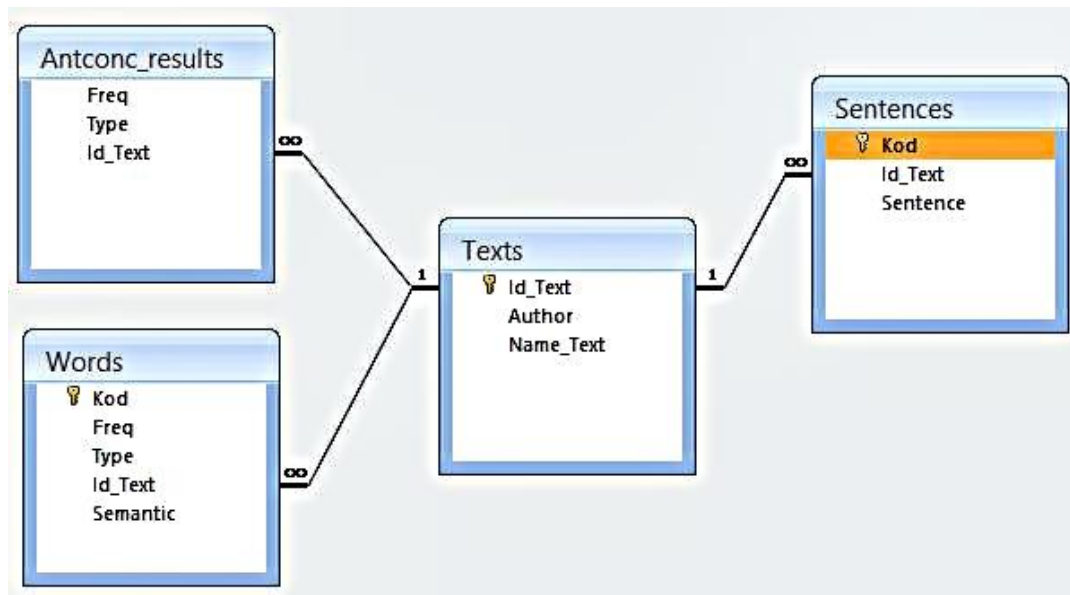
Свободно распространяемый в настоящее время программный инструментарий корпусных исследований [2; 4] весьма ограничен и не позволяет сравнить несколько художественных текстов на предмет частичечного совпадения лексики, единообразия в структуре построения словосочетаний и предложений, совпадения семантических полей. Всё вышеперечисленное является характеристикой индивидуального стиля того или иного автора. Для решения этих задач мы предлагаем совместное использование средств корпусных менеджеров и реляционной СУБД. При этом технология обработки авторских текстов в данном случае включает в себя три этапа:

1. Составление частотных словарей исследуемых произведений средствами AntConc [3] или Tenka Text.

2. Импорт частотных словарей и предложений текстов в таблицы реляционной СУБД Access.

3. Добавление в таблицы необходимых семантических признаков.

Схема базы данных лингвистического корпуса будет иметь вид:



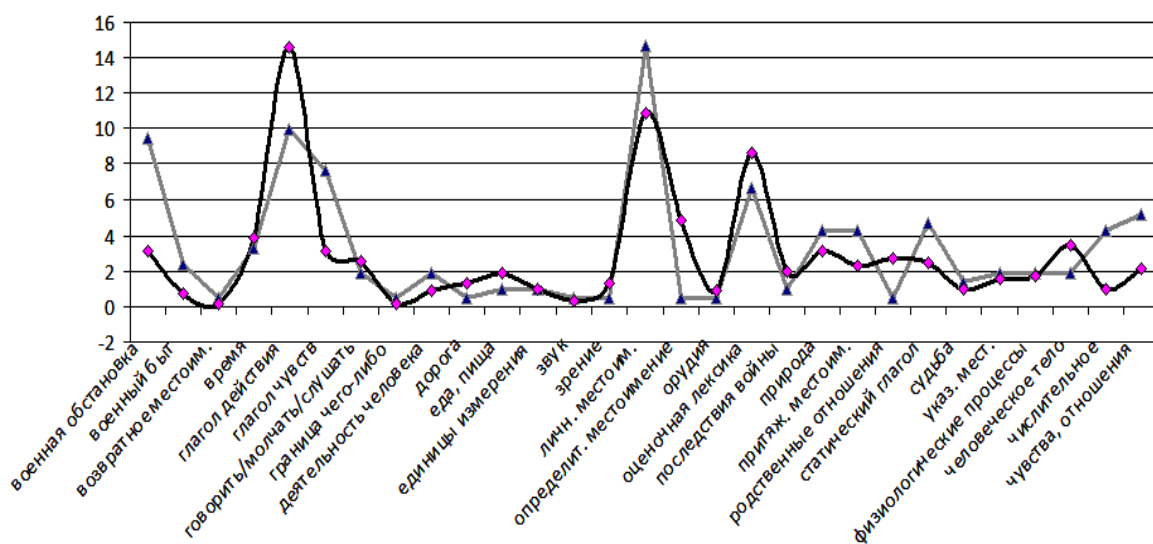
На приведенной схеме Antconc_result – результат импорта частотных словарей (Id_Text – номер анализируемого текста); Words – таблица слов, содержащая семантический признак (Semantic); Texts – таблица анализируемых текстов, Sentences – таблица импортированных из AntConc предложений.

Остановимся подробнее на исследовании и сравнении семантических полей двух поэтических текстов: «Баллады о дружбе» Семёна Петровича Гудзенко и «Баллады о товарище» Александра Трифоновича Твардовского. Оба текста написаны в один год – 1942-й и связаны между собой тематически. В стихотворении С.П. Гудзенко рассказывается история о дружбе двух бойцов, о страшном выборе между жизнью и смертью и испытании их дружбы боевой задачей. В стихотворении А.Т. Твардовского мы находим схожий сюжет: дружба двух товарищей, отношение одного из них (выступающего в роли рассказчика) к тёплой привязанности, которая возникла у его товарища к девушке, приютившей их. И несмотря на отклонения в сюжетной линии нами было высказано предположение, что семантические группы, которые составила поэтическая лексика одного стихотворения, будут совпадать с семантическими группами второго стихотворения, что обусловлено выбором темы, годом написания «Баллад» и условиями, в которых они создавались. Для проверки данной гипотезы мы воспользовались программным средством AntConc и СУБД Access. В ходе составления частотного словаря и распределения лексики по семантическим группам нами было выделено 29 смысловых полей,

среди которых мы выделили несколько полей в зависимости от части речи (сюда попали местоимения, числительное и некоторые глаголы).

Исследуемые тексты оказались разными по объёму, поэтому для получения корректных данных нами было выявлено процентное соотношение той или иной семантической группы по отношению ко всему объёму каждого стихотворения. В результате мы получили график, на котором наглядно видно, что за исключением нескольких групп (глаголы чувств; лексемы, обозначающие человеческое тело; родственные отношения; лексемы, передающие чувства или характеризующие отношения) идёт почти полное совпадение по семантическим группам в обоих текстах.

Процентное соотношение семантических групп анализируемых текстов



Семантические поля двух стихотворений не только оказались одинаковыми, но и наполняемость каждого текста ими оказалась приблизительно равной, о чём свидетельствуют подъёмы и спады на графике. Как мы видим, наибольшее предпочтение обоими авторами было отдано лексемам, характеризующим военную обстановку, передающим совершаемые действия, оценочной лексике (чаще всего туда попадали эпитеты). Всё это является подтверждением нашей гипотезы о том, что оба автора, работая в одно и то же время, в особой обстановке (война), наблюдая схожие явления и ситуации, использовали одни и те же семантические группы для описания близких сюжетных линий.

Таким образом, полученные с помощью СУБД данные помогают утверждать предположение о том, что в художественных текстах одной тематики наблюдаются как качественные совпадения (части речи, семантические группы), так и количественные (процентное соотношение внутри каждого текста).

Литература

1. Зубов А.В. Корпусная лингвистика: возможности и перспективы. http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/25711/1/Зубов%20А.%20В.%20Корпусная%20лингвистика_%20возможности%20и%20перспективы.pdf.
2. AntConc 3.2.4w, Dr. Laurence Anthony, Faculty of Science and Engineering at Waseda University, Japan. [Электронный ресурс]: <http://www.antlab.sci.waseda.ac.jp/>.
3. Лунькова Е.С. Использование программы AntConc 3.2.4w для анализа художественного текста // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 260-262.
4. Heidelberg Tenka Text 0.1.3.4. <http://sourceforge.net/projects/corsis/>.

ОДИН ПОДХОД К СНИЖЕНИЮ ЗАТРАТ НА IP-ТЕЛЕФОНИЮ

Ю.Г. БЕЛОНОЖКИНА

Смоленский государственный университет,
e-mail: belonojkina.j@gmail.com

УДК 004.051

Ключевые слова: *снижение затрат, оптимизация, ip-телефония.*

В докладе рассмотрена задача минимизации стоимости услуг IP-телефонии. Проведена ее формализация и доказано, что она относится к классу транспортных задач. Приведен результат решения задачи оптимизации в реальных условиях.

Одна из задач использования IP-телефонии в организации состоит в минимизации стоимости телефонных услуг. Провайдеры предлагают тарифы, в которых одни те же услуги имеют разную стоимость. В работе предлагается способ решения этой проблемы, основанный на использовании линейного программирования.

В общем виде рассматриваемая задача формулируется следующим образом. За один календарный период требуется совершить исходящих звонков на T минут в разных объемах по D направлениям. При этом известны стоимости исходящей минуты для каждого из P провайдеров. Требуется подобрать такую комбинацию провайдеров, чтобы количество минут по каждому из направлений было израсходовано, при этом затраты на связь были минимальными.

Пусть b_j ($j=1, \dots, D$) – объем исходящих звонков в минутах на направлении j , c_{ij} – стоимость минуты i -го провайдера в направлении j , x_{ij} – общее время звонков с использованием услуг i -го провайдера ($i=1, \dots, P$) по направлению j . Тогда матрица $X = (x_{ij})$ содержит стоимости всех возможных соединений. Она соответствует матрице

перевозок в транспортной задаче. Следовательно, рассматриваемая задача сводится к транспортной задаче, где целевая функция – $Z(X) = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^D c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$, при следующих ограничениях: $\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j$; $x_{ij} \geq 0$.

Задача решалась в следующих реальных условиях: за один календарный месяц требуется совершить исходящих звонков на 10 000 минут в разных объемах по 5 направлениям.

Таблица 1

Стоимость звонков по направлениям у разных провайдеров

Элемент множества	Смоленск	Нижний Новгород	Калуга	Москва	Мобильные операторы
МТТ	0,87	0,94	0,87	0,64	1,44
Смолтелеком	0,24	3,45	3,25	1,59	4,15
Ростелеком	0,40	4,87	4,45	4,45	7,00
Квантум	0,99	1,298	1,298	0,99	1,80

Таблица 2

Необходимое количество минут в месяц на каждое направление

Направление	Смоленск	Нижний-Новгород	Калуга	Москва	Мобильные операторы
Объем исходящих звонков (%)	50	3	9	8	30
Объем исходящих звонков (минуты)	5000	300	900	800	3000

Данные о стоимостях минуты звонка у различных провайдеров и требуемом времени звонков по разным направлениям приведены в таблицах 1 и 2. Тогда общая задача сводится к следующей частной задаче:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, 5,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 4; j = 1, 2, \dots, 5.$$

Комбинация провайдеров, соответствующая оптимальному распределению направлений по провайдерам, приведена в таблице 3.

Таблица 3

Распределение направлений по провайдерам

Направление	Смоленск	Нижний-Новгород	Калуга	Москва	Мобильные операторы
Провайдер	Смолтелеком	МТТ	МТТ	МТТ	МТТ

Минимальное значение целевой функции – $Z(X) = 6314$ рублей.

Предложенный метод позволил существенно сократить затраты организации на использование IP-телефонии.

Литература

1. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. Минск: Высшая школа, 2001. 448 с.

МОДЕЛИ АССОЦИАТИВНОЙ ПАМЯТИ В КВАЗИБИОЛОГИЧЕСКИХ АССОЦИАТИВНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ¹

В.В. БОРИСОВ

Филиал НИУ «МЭИ» в г. Смоленске,
e-mail: vbor67@mail.ru

УДК 004.2

Ключевые слова: *Квазибиологические ассоциативные информационные системы, модели ассоциативной памяти.*

Представлен класс квазибиологических ассоциативных информационных систем, характеризующийся отдельными свойствами биологических информационных систем. Определены условия и описаны способы формирования ассоциаций между информационными объектами в квазибиологических ассоциативных информационных системах. Представлена классификация и приведены примеры моделей ассоциативной памяти в квазибиологических информационных системах.

Квазибиологические информационные системы – информационные системы, обладающие отдельными свойствами биологических информационных систем ИС [1]. Стоит различать понятия технических и квазибиологических ассоциативных ИС. Это различие проиллюстрируем, в том числе, и различными подходами к эффективному применению этих подклассов ассоциативных ИС.

В настоящее время можно выделить два основных подхода к эффективному применению технических и квазибиологических ассоциативных ИС:

- во-первых, типовой подход, заключающийся в использовании свойств ассоциативных средств и систем, позволяющих более эффективно решить традиционные вычислительные и нечисловые

¹ Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России № 2014/123 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности, проект № 2493.

задачи обработки данных и информации, по сравнению с традиционными средствами и системами;

- во-вторых, реализация системных моделей ассоциативной памяти, а также моделей для решения отдельных задач ассоциативной памяти.

Первый подход в большей степени ориентирован на использование так называемых технических «ассоциативных» средств и систем, к которым можно отнести «ассоциативные» запоминающие устройства и «ассоциативные» процессоры, в названиях или в описании которых так или иначе присутствует термин «ассоциативный». Однако термин «ассоциативный» здесь, как правило, характеризует лишь более эффективное решение отдельных задач, а именно: записи; опроса; поиска и выборки информации. Причем, несмотря на существующие тенденции в развитии данного класса средств и систем, они, тем не менее, не позволяют уйти от ограничений, свойственных как существующим, так и перспективным решениям, так как эти решения по большому счету остаются в «мэйнстриме» традиционных парадигм обработки данных.

Второй подход ориентирован на использование квазибиологических ассоциативных ИС, обладающих отдельными свойствами биологических информационных систем и ориентированных на реализацию моделей (выполнение задач) ассоциативной памяти.

Свойствами биологических информационных систем, уже сейчас реализуемых (по-разному и в разных «наборах») в классе квазибиологических ассоциативных ИС, являются следующие:

- распределенная ассоциативная среда;
- ассоциативный доступ к информации в ассоциативной среде;
- ассоциированная запись информации в ассоциативную среду;
- совмещение процессов хранения и обработки информации в ассоциативной среде;
- формирование (задание и поиск) ассоциаций как способ обработки информации.

Обратим особое внимание на последнее из перечисленных свойств и конкретизируем основные понятия для квазибиологических ассоциативных информационных систем.

Ассоциативная память – совокупность процессов и механизмов, определяющих способность ассоциативной среды селективно фиксировать, сохранять, формировать и изменять информационные объекты и ассоциации между ними, результаты воздействий, а также полностью или частично их воспроизводить.

Ассоциация – структура взаимозависимостей, закодированная в информационных объектах, их признаках и в соответствующих связях между ними или в формах их представлений.

Типы ассоциаций: по совпадению/несовпадению; сходству/различию; предпочтительности (подчиненности, упорядоченности); смежности проявления во времени и/или в пространстве; выполнению пространственно-временных соотношений.

Критерий ассоциируемости – правило (совокупность правил), по которому можно соотнести информационные объекты в соответствии с типом ассоциации.

Ассоциативная среда – определенным образом организованная совокупность множеств упорядоченных и взаимосвязанных ассоциативных ячеек, обладающих свойствами фиксации, хранения, сопоставления (ассоциирования), агрегирования результатов сопоставления, изменения и обмена данными.

Для решения комплексной задачи создания квазибиологических ассоциативных ИС необходимо:

- обосновать модель ассоциативной памяти и механизмы формирования ассоциаций;
- создать методы построения и использования ассоциативной среды для квазибиологических ассоциативных информационных систем;
- разработать технологию создания квазибиологических ассоциативных информационных систем.

В данной работе остановимся в основном на первой проблеме.

Ассоциативная память квазибиологических информационных систем ориентирована на решение следующих системных задач:

- поиск информационных объектов (последовательности информационных объектов), ассоциируемых с поисковыми информационными объектами;
- восстановление информационного объекта по его частично заданным и/или искаженным фрагментам или признакам.

Очевидно, что эти задачи могут решаться как по отдельности, так и совместно.

При этом каждую из перечисленных системных задач можно разбить на «частные» задачи ассоциативной памяти:

- представление и хранение информационных объектов и ассоциаций между ними в ассоциативной среде;
- формирование ассоциаций между хранимыми в ассоциативной среде информационными объектами;
- изменение зафиксированных и сохраненных в ассоциативной среде информационных объектов и ассоциаций между ними в соответствии с новой приобретаемой информацией и новыми ассоциациями между информационными объектами (задача обучения);

- ассоциативный поиск, заключающийся в нахождении по поисковому информационному объекту (по его признакам) ассоциируемых с ним искомых информационных объектов в ассоциативной среде;
- интерпретация результатов ассоциативного поиска.

В соответствии с представленной выше классификацией задач ассоциативной памяти могут быть предложены следующие классы моделей:

- системные модели ассоциативной памяти;
- модели для решения отдельных задач ассоциативной памяти.

В свою очередь, системные модели ассоциативной памяти можно разделить:

- во-первых, на модели для поиска информационных объектов (последовательности информационных объектов), ассоциируемых с поисковыми информационными объектами;
- во-вторых, на модели для восстановления информационного объекта по его частично заданным и/или искаженным фрагментам или признакам.

Модели для решения отдельных задач ассоциативной памяти можно разделить на модели:

- информационных объектов и ассоциаций между ними;
- формирования ассоциаций между информационными объектами;
- приобретения новой информации и новых ассоциаций между информационными объектами (модели обучения);
- ассоциативного поиска;
- ассоциативной выборки;
- интерпретации результатов ассоциативного поиска.

Для решения задачи формирования (задания и поиска) ассоциаций между информационными объектами в квазибиологических ассоциативных ИС необходимо выполнить следующие условия:

- ответить на вопрос «между чем формируются ассоциации?»:
 - между различными признаками отдельного информационного объекта,
 - между одноименными признаками различных информационных объектов,
 - между информационными объектами, представленными совокупностью одноименных признаков,
 - между информационными объектами, представленными различными признаками;
- задать тип ассоциаций между информационными объектами и/или их признаками, основанный на установлении наличия или степени: совпадения/несовпадения, сходства/различия, предпочтительности, смежности их проявления;

- определить измерительные шкалы и допустимые операции для измерения (оценки) и сопоставления информационных объектов и/или их признаков: номинальные шкалы, порядковые шкалы, шкалы интервалов, шкалы отношений, абсолютную шкалу;
- выбрать способ сопоставления информационных объектов и/или их признаков и сформулировать критерии ассоциируемости в соответствии с заданным типом ассоциации;
- учесть при необходимости неопределенность признаков информационных объектов, которая зачастую является их неотъемлемым свойством;
- предусмотреть при необходимости механизм агрегирования результатов сопоставления информационных объектов и/или их признаков.

В данной работе рассмотрены способы решения указанных проблем.

Литература

1. Борисов В.В., Огнев И.В. Технические и квазибиологические ассоциативные информационные системы // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2015, № 5. С. 3–20.

ПРОБЛЕМЫ ИНТЕГРАЦИИ СРЕДСТВ АССОЦИАТИВНОЙ ОБРАБОТКИ В ТЕХНИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ¹

В.В. БОРИСОВ, А.В. ПОЛЯЧКОВ, А.П. ЧАНДЕР

Филиал НИУ «МЭИ» в г. Смоленске,

e-mail: vbor67@mail.ru; polyachkov.sml@mail.ru; arsentiy_ch@mail.ru

УДК 004.2

Ключевые слова: *ассоциативная обработка, ассоциативные запоминающие устройства, ассоциативные процессоры.*

Представлены классификационные признаки технических и биологических информационных систем. Выделен класс технических ассоциативных информационных систем, обладающих отдельными свойствами биологических информационных систем. Описан подход к обработке данных, ориентированный на эффективное использование свойств ассоциативных средств и систем. Рассмотрены проблемы интеграции ассоциативных средств в существующие и перспективные

¹ Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России № 2014/123 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности, проект № 2493.

технические информационные системы. Предложены способы решения этих проблем.

В работах [1; 2] предложена и дополнена классификация информационных систем на основе признаков, отражающих фундаментальные свойства этих систем. Основными из этих признаков являются:

- способ представления данных и информации;
- тип запоминающей среды;
- способ доступа к данным и информации в запоминающей среде;
- способ записи данных и информации в запоминающую среду;
- способ обработки данных и информации;
- способ организации процесса обработки данных и информации;
- степень совмещения процессов хранения и обработки данных и информации в запоминающей среде.

В соответствии с этой классификацией выделены классы технических и биологических информационных систем. Причем системы этих двух классов кардинально различаются практически по всем признакам.

Так, технические информационные системы характеризуются: символьным (дискретным) способом представления данных; дискретным типом запоминающей среды; адресным доступом к данным; адресным способом записи данных; вычислительным способом обработки данных; алгоритмическим способом организации процесса обработки данных; разделением процессов хранения и обработки данных.

Биологические же информационные системы отличаются: образным и символьным способами представления информации; непрерывным, распределенным типом запоминающей среды; ассоциативным доступом к информации; ассоциированным способом записи данных; формированием ассоциаций как способом обработки информации; обучением и самообучением как способом организации процесса обработки данных; совмещением процессов хранения и обработки данных.

Создание технических информационных систем, обладающих отдельными свойствами биологических информационных систем, позволяет выделить новый класс информационных систем – квазибиологические информационные системы.

Однако известные на настоящее время ассоциативные средства обработки данных (ассоциативные запоминающие устройства (АЗУ), ассоциативные процессоры (АП)) нельзя отнести к квазибиологическим, так как термин «ассоциативный» у них, как правило, трактуется

«утилитарно» и характеризует лишь особенности решения отдельных задач, а именно:

- ассоциированную запись как запись данных в ячейки ассоциативного накопителя, активизирующиеся в зависимости от результата сопоставления входных и хранящихся в них данных;
- ассоциативный опрос как одновременный и параллельный доступ к совокупности данных в ассоциативном накопителе для эффективного выполнения решаемой задачи (последовательно по словам – параллельно по разрядам; параллельно по словам – параллельно по разрядам);
- ассоциативный поиск как нахождение искомых значений на основе поиска «по содержимому» (максимальных/минимальных; больших/меньших; в заданных/вне заданных пределов; ближайших больших/меньших; по соответствию).

Причем основным подходом является использование свойств этих технических ассоциативных средств и систем, позволяющих более эффективно решать традиционные вычислительные и нечисловые задачи обработки данных и информации, по сравнению с существующими техническими средствами и системами.

Классами задач, при решении которых эффективно реализуются ассоциативные свойства технических ассоциативных средств и систем обработки данных (АЗУ, АП), являются следующие:

- аппаратная реализация различных задач операционных систем (кэш-ЗУ, поиск, сортировка, упаковка, защита данных);
- задачи управления и быстрого поиска в базах данных и знаний; распознавание и анализ образов, сцен и ситуаций;
- высокопроизводительные параллельные вычисления;
- обработка изображений;
- распознавание и синтез речи;
- параллельная обработка нечеткой информации и нечеткий вывод;
- машинный перевод и логический вывод.

Вместе с этим интеграция ассоциативных средств в существующие и перспективные технические информационные системы предполагает решение следующих проблем:

- сохранение эффекта от применения ассоциативных средств в технических информационных системах;
- создание развитых средств «коммуникаций» ассоциативных и традиционных средств обработки данных;
- рациональное распределение задач между ассоциативными и традиционными средствами обработки данных;
- поиск структурных, функциональных и технологических способов улучшения характеристик этих систем;

- разработка специализированных научно-технических решений для повышения эффективности «традиционной» обработки данных.

В данной работе рассмотрены способы решения указанных проблем интеграции средств ассоциативной обработки в технические информационные системы.

Литература

1. Огнев И.В., Борисов В.В. Ассоциативные среды. М.: Радио и связь, 2000. 312 с.
2. Борисов В.В., Огнев И.В. Технические и квазибиологические ассоциативные информационные системы // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2015. № 5. С. 3–20.

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ В СЛУЧАЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ ВЫСОКОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ¹

А.Н. ВАСИЛЬЕВ, Т.В. ЛАЗОВСКАЯ, Д.А. ТАРХОВ

СПбПУ, Санкт-Петербург,
e-mail: a.n.vasilyev@gmail.com, tatianala@list.ru, dtarhov@gmail.com

УДК 004.032.26+519.63:517.951

Ключевые слова: *высокопроизводительные вычисления, иерархическая модель, робастная модель, искусственная нейронная сеть, гетерогенные данные, окружающая среда.*

В работе рассматриваются иерархические робастные нейросетевые модели, допускающие естественное распараллеливание в случае кластерных вычислений, адаптацию к новым данным, использование условий гетерогенного типа, регуляризацию решений обратных и неклассических задач.

Развитие высокопроизводительных вычислений привело к появлению кластеров многопроцессорных узлов, имеющих иерархическую структуру. Таким образом, возникает проблема адаптации существующих алгоритмов математического моделирования к таким структурам или поиска новых алгоритмов, поддающихся естественному распараллеливанию и эффективному обмену данными.

¹ Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №14-01-00660 и №14-01-00733).

Некоторые фундаментальные проблемы разработки таких алгоритмов все еще требуют решения. Это, например, устойчивость к ошибкам в исходных данных, учет данных, поступающих в процессе работы алгоритма, повторное использование моделей в близких задачах.

Классические методы часто нуждаются в построении расчетных сеток высоких размерностей или соответствующих сеток для областей сложной конфигурации, откуда появляются плохо обусловленные матрицы. При этом находится лишь дискретная аппроксимация решения, и в дальнейшем требуется восстановление решения (с долей погрешности). В качестве альтернативы классическим методам мы предлагаем алгоритмы нейросетевого моделирования [3]. Нейросетевой подход реализует естественную иерархическую параллельность алгоритмов. Авторы применяют эволюционные алгоритмы [1,2], которые позволяют адаптировать структуру нейросетевой модели совместно с подбором ее весов, учитывая особенности решаемой задачи. Подобные виды вычислений допускают хорошее распараллеливание.

В книге [3] представлен унифицированный подход для решения сложных задач математического моделирования с помощью искусственных нейронных сетей, который был применен для создания иерархических систем мониторинга и оценки влияния объектов транспортной инфраструктуры на окружающую среду. В статье [2] рассматривается многоуровневая гетерогенная робастная модель с естественными уровнями иерархии: дома – перекрестки – участки улиц, районы города – малые города, крупные города, а также суточные, недельные и годовые ритмы. Обмен данными при классическом подходе является слишком затратным, в предлагаемом подходе между уровнями передаются параметризованные нейросетевые модели. Некорректные задачи идентификации объектов допускают построение нейросетевой регуляризации решения и в случае неточно известных параметров.

Подобный подход был использован при решении одного жесткого дифференциального уравнения с параметром [4]. Для этой задачи был применен специальный вариант регенерации пробных точек при вычислении функционала минимизации, что позволило использовать меньшее количество точек и снизило временные затраты вычислений при сохранении качества результата.

Литература

1. Васильев А.Н., Тархов Д.А. Нейросетевые алгоритмы математического моделирования процессов и явлений в сложных системах на вычислительных комплексах сверхвысокой производительности // «Нейрокомпьютеры»: разработка, применение. М.: Радиотехника, 2014. №2. С.7-15.

2. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Денисов В.Н., Федотов В.Н. Научные основы создания иерархических систем мониторинга и оценки влияния объектов

транспортной инфраструктуры на окружающую среду // «Нейрокомпьютеры»: разработка, применение. М.: Радиотехника, 2014. №2. С. 22-30.

3. Васильев А.Н., Тархов Д.А. Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2009. – 528 с.

4. Тархов Д.А., Лазовская Т.В. Об использовании методов нейронных сетей для одного жесткого уравнения первого порядка // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: материалы XIV Международной научно-технической конференции. Пенза. 2014. С. 171-175.

ОБОСНОВАНИЕ ТИПОВ НЕЧЕТКИХ СИТУАЦИОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

М.А. ДЕНИСЕНКОВ

Филиал НИУ «МЭИ» в г. Смоленске,
e-mail: scoz2010@yandex.ru

УДК 004.891.2

Ключевые слова: *нечеткая ситуационная сеть, управляющие решения, нечеткие признаки.*

В работе рассматривается классификация нечетких ситуационных сетей в зависимости от особенностей решаемых задач поддержки принятия решений. Описываются основные классификационные признаки и соответствующие им разновидности нечетких ситуационных сетей.

В настоящее время для решения аналитических задач поддержки принятия решений (ППР) могут быть использованы различные подходы, одним из наиболее перспективных среди которых являются нечеткие ситуационные сети (НСС). Существует большое число разновидностей НСС, каждая из которых может быть применена для решения определенной задачи. Выбор типа НСС необходимо осуществлять с учетом особенностей решаемой задачи, управляемого объекта, системы, к которым могут быть отнесены сложность объекта управления, возможность внесения изменений в этот объект во время использования НСС, наличие взаимосвязей между его параметрами, особенности используемых управляющих решений.

На основании этих особенностей могут быть выделены следующие классификационные признаки нечетких ситуационных сетей:

- 1) по иерархии:
 - простые (неиерархические);

- иерархические сети – характеризуются наличием нескольких уровней, когда ситуации сети верхнего уровня соответствует сеть нижнего уровня. Обычно имеют место, когда все множество признаков управляемого объекта невозможно отобразить в одноуровневой сети;
- 2) по способу построения:
- статические – граф таких сетей строится до начала решения задач ППР с их помощью, во время использования их структура изменяться не может;
 - динамические – в процессе использования в них могут автоматически вноситься изменения в зависимости от целей управления и решаемых задач;
- 3) по способу адаптации – механизмов адаптации сети к изменению структуры управляемой системы [1]:
- сети с жестким способом получения значений ситуационных признаков – базируются на неизменном списке объектов и их характеристик. Используется для систем, изменение структуры которых в обозримый период не происходит, в противном случае – сеть строится заново;
 - сети с гибким способом получения ситуационных признаков – при изменении структуры управляемой системы происходит адаптация сети к новым условиям;
- 4) по характеру управляющих переходов:
- сети с полностью управляемыми переходами – результаты соответствующих управляющих решений детерминированы;
 - сети с вероятностными переходами – результаты применения управляющих решений носят случайный, событийный характер. Из текущей ситуации под действием некоторого управляющего решения возможен переход в одну из множества возможных ситуаций;
- 5) по кратности управляющих решений:
- 1-локальные – каждое управляющее решение может изменять значение только одного нечеткого признака;
 - k -локальные – одно управляющее решение может одновременно изменять значения k признаков;
- 6) по характеру взаимосвязей между признаками [2]:
- без взаимосвязей – признаки объекта, системы независимы;
 - с линейными взаимосвязями – изменение значения одного нечеткого признака вызывает изменение значения другого, связанного с ним. На всем множестве значений признаков влияние на связанный признак носит одинаковый (линейный) характер;

- с нелинейными взаимосвязями – связь между значениями признаков носит сложный характер: для различных значений признака или изменений его значения зависимый признак может изменяться на различные значения или в различных направлениях (уменьшение, увеличение);

7) по виду решаемых задач:

- оперативные – служат для решения оперативных задач ППР, где одним из важнейших критериев является оперативность (скорость) получения решений, быстрая реакция на изменяющиеся цели, задачи;
- стратегические;
- комбинированные.

Таким образом, предложенная классификация нечетких ситуационных сетей позволяет в зависимости от особенностей решаемых задач и управляемого объекта, системы разработать НСС, наиболее полно соответствующую этим особенностям.

Литература

1. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой / под ред. А.Н. Мелихова. М.: Наука, 1990. 272 с.
2. Денисенков М.А. Адаптивные нечеткие ситуационные сети для принятия оперативных решений // Вестник войсковой противовоздушной обороны. 2015. №12. Смоленск: Изд-во ВА ВПВО ВС РФ.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ СЛОЖНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ

Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ¹, А.И. МАКАРОВ²

Смоленский государственный университет,
e-mail: ¹ ypy1101@gmail.com, ² al.makarov8@gmail.com

УДК 681.3

Ключевые слова: *базы данных не первой нормальной формы, функциональные зависимости, теорема о полноте системы аксиом функциональных зависимостей.*

Рассматриваются задачи обработки сложноструктурированных данных. Перечисляются нерешенные задачи теории баз данных. Дается краткий обзор результатов, полученных сотрудниками СмолГУ, за последние 30 лет.

В 1991 году в [1] были введены понятия схемы над множеством имен, файла со схемой (не обязательно первого порядка), функциональной зависимости и определена операция проектирования файла на схему. Для описания функциональных зависимостей была предложена конечная дедуктивная система и доказана теорема о полноте этой системы подобная известной теореме Армстронга о функциональных зависимостях в реляционных базах данных.

Прошло четверть века, но в теории информационных систем со сложной структурой данных число открытых вопросов не уменьшилось. В связи с все возрастающей потребностью обработки Больших Данных (Big Data) отсутствие продвинутой теории обработки сложноструктурированных объектов стало фактором, замедляющим создание реальных систем обработки полуструктурированной и сложноструктурированной информации.

Ожидалось, что в начале XXI века объектно-ориентированные методы позволят существенно изменить технологии баз данных, сделать переход на новый уровень обработки сложноструктурированных данных. Однако широко пропагандируемый объектный подход к обработке данных так и не смог оказать значительного влияния на положение дел в этой области. И в теоретической области, и в прикладной сфере обработки сложноструктурированных данных до сих пор сохраняются слабые места [2]:

- отсутствие в ООБД базовых средств, к которым пользователи систем баз данных привыкли и поэтому ожидают видеть;
- отсутствие интероперабельности между РБД и ООБД;
- минимальная оптимизация запросов;
- отсутствие стандартной алгебры запросов;
- отсутствие средств обеспечения запросов;
- отсутствие поддержки представлений;
- проблемы с безопасностью;
- отсутствие поддержки динамических изменений определений классов;
- ограниченная поддержка ограничений целостности;
- ограниченные возможности настройки производительности;
- недостаточная поддержка сложных объектов;
- ограниченная интеграция с существующими объектно-ориентированными системами программирования;
- ограниченный выигрыш в производительности.

От себя также укажем:

- на недостаточно полное исследование функциональных зависимостей в базах данных с NFNF отношениями (Non First Normal Form relations);

- на отсутствие исчерпывающих рекомендаций по нормализации объектных баз данных.

В Смоленском государственном университете (СмолГУ) исследования, связанные с математическими аспектами обработки сложноструктурированных данных ведутся уже более 30 лет. Первая публикация [3] на эту тему появилась в 1984 году. Попытка описать результаты теоретических исследований в СмолГУ за последние 25 лет была предпринята в монографии [4].

В [4] приведено математическое описание фундаментальных понятий теории баз данных. Здесь отмечается, что термин «модель данных» в современной его трактовке обозначает инструмент моделирования, а вовсе не результат. В качестве такого инструмента моделирования предлагается использовать аксиоматический подход. При этом каждый класс однотипных объектов определяется соответствующей аксиоматической теорией, а объекты данного класса ассоциируются с моделями этой аксиоматической теории.

В качестве информационных моделей предметных областей предлагается использовать функциональные комплексы данных (ФКД), формальное описание которых представляется в виде совокупности аксиоматических теорий. Функциональный комплекс данных является математической моделью понятия «модель данных». На основе ФКД может быть построен формальный язык описания данных и язык манипулирования данными. Функциональные комплексы данных могут быть использованы как основа для дальнейшей формализации обработки данных в рамках современных технологий программирования.

В третьей части монографии излагается функциональный подход в теории баз данных – подход, обобщающий классический реляционный подход Э.Ф. Кодда. В этой части рассматриваются функциональные базы данных (ФБД) – базы данных, состояния которых описываются функциональными комплексами данных (ФКД). Описание объектов в ФКД осуществляется с помощью набора функций $\varphi^k(x_1, \dots, x_k)$, которые можно задать отношением, состоящим из кортежей вида $(x_1, \dots, x_k, \varphi^k(x_1, \dots, x_k))$.

Существенной особенностью функционального подхода является набор операций над ФКД. Реляционное исчисление развивается исходя из логических операций над предикатами, задающими отношения. Эти операции допускают естественное обобщение на случай произвольных функций данных. Суперпозиция с вычислимыми функциями заданного класса и обобщенная квантификация образуют вычислительные средства ФБД. На их основе строятся операторы в ФКД-пространствах.

В четвертой части изложена теория функциональных зависимостей в базах данных не первой нормальной формы, предложена аксиоматическая теория функциональных зависимостей и доказана ее полнота.

Предложенный в монографии аппарат может послужить основой для формального описания моделей данных и способов их обработки.

В настоящее время в СмолГУ теоретические исследования, связанные с обработкой сложноструктурированных данных и, в частности Больших Данных, продолжаются. Последние пять лет особую активность в этих исследованиях проявляет В.И. Мунерман, его исследования связаны с параллельной обработкой данных и имеют не только теоретическое, но и прикладное значение. Авторы статьи в настоящее время занимаются вопросами нормализации ООБД и оптимизацией запросов в базах данных не первой нормальной формы.

Литература

1. Yemelchenkov Ye. P., Tsalenko M. Sh. Functional dependencies in hierarchical Structures of Data. // Lect. notes in Compute Science. Berlin. 1991. V. 495. P. 258–275.
2. Сиха Багуи. Объектно-ориентированные базы данных: достижения и проблемы // Открытые системы. 2004. № 03.
3. Емельченков Е.П., Малеин Ю.С. О функциональном подходе в теории баз данных / Смоленск. СГПИ, 1984. Деп. в ВИНТИ N 6046-84. 29 с.
4. Емельченков Е.П. Базы данных. Современный подход: монография. Смоленск : ВА ВПВО ВС РФ, 2010. 60 с.

СИНТЕЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАПРОСОВ В СИСТЕМАХ МАССОВОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

В.Н. ЗАХАРОВ, В.И. МУНЕРМАН

ФИЦ ИУ РАН, г. Москва,

Смоленский государственный университет,

e-mail: VZakharov@ipiran.ru, vimoona@gmail.com

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, оптимизация запросов, динамическое программирование.*

В работе рассмотрен подход к синтезу и оптимизации запросов для массовой обработки данных, основанный на алгебраических моделях данных и методе динамического программирования. Предложены два метода реализации этого подхода. Первый метод реализует синтез запроса на основе метаданных, второй – оптимизацию существующего запроса.

В работе рассматриваются два метода повышения эффективности процессов массовой обработки данных (МОД), которые реализуют запросы в системах МОД. Эти методы основаны на применении теоретико-множественной и многомерно-матричной моделей данных, предложенных в [1]. Показано, что эти модели позволяют использовать известные методы оптимизации для синтеза новых и преобразования уже имеющихся процессов МОД с целью уменьшения вычислительной сложности этих процессов.

В терминах рассматриваемых моделей данных алгебраической моделью процесса МОД служит алгебраическое выражение вида $A = E(A_1, \dots, A_n)$, правая часть которого состоит из агрегатов данных A_1, \dots, A_n , соединенных знаками бинарных операций над этими агрегатами. При решении задачи синтеза и оптимизации процесса МОД методами дискретной оптимизации на каждом шаге выбирается пара агрегатов данных и заменяется одним агрегатом – результатом бинарной операции над ними. Поскольку рассматриваемые модели данных представляют собой, по крайней мере, гомоморфные универсальные алгебраические системы, то в дальнейшем будут использоваться термины из обеих моделей. Разница заключается только в способе оценки стоимости операций. Для многомерных матриц оценка стоимости операций производится на основе сведений о числе значений индексов многомерных матриц – операндов в рассматриваемой операции. При использовании файловой модели стоимость операции вычисляется на основе метаданных, содержащих информацию о количестве записей в классах эквивалентности для всех экземпляров множества ключей. Эта информация может быть легко получена при индексно-последовательной организации данных.

Первый метод, предложенный в [2; 3], позволяет, используя динамическое программирование, синтезировать процесс обработки файлов, соответствующий запросу. При этом производится пошаговая оптимизация процесса. Пусть элементам множества S_0 соответствуют файлы системы исходных файлов $\{A_1, \dots, A_n\}$ ($A_{0_i} = A_i$), а числам $C_{i_0 j_0}$ из множества C_0 соответствуют стоимости операций над файлами A_{0_i} и A_{0_j} . Множества $S_p[i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}]$ соответствуют промежуточным системам исходных файлов, а множества $C_p[i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}]$ ($0 < p \leq n-2$) содержат стоимости операций обработки пар файлов из этих промежуточных систем, которые пересчитываются для каждой очередной системы S_p с учетом изменившихся метаданных. Последовательность $[i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}]$ однозначно определяет пары файлов,

которые выбирались в качестве операндов на предыдущих шагах синтеза процесса и заменялись файлами – результатами операций.

Тогда задаче синтеза алгебраического выражения – модели процесса последовательной обработки файлов соответствует частный случай общей задачи динамического программирования, получаемый при следующих ограничениях:

1. $c_{i_0 j_0} = 0, c_{i_p j_p} [i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}] = 0$, то есть любой из исходных файлов может быть только одним операндом в любой из операций (не обрабатывается совместно сам с собой).

2. Выбор пары элементов A_{i_0} и A_{j_0} , $A_{i_p} [i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}]$ и $A_{j_p} [i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}]$, принадлежащих множеству $S_p [i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}]$, и замена ее на элемент множества $S_{p+1} [i_0 j_0 \dots i_p j_p]$ производится только в том случае, когда $c_{i_p j_p} [i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}] \neq 0$. Выбор такой пары означает, что над файлами, которые соответствуют элементам пары, выполняется одна из операций слияния.

3. $c_{i_p j_p} [i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}] = c_{j_p i_p} [i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}]$, если над файлами, соответствующими элементам пары, выбранной из множества $S_p [i_0 j_0 \dots i_{p-1} j_{p-1}]$, производится операция слияния строго упорядоченных файлов.

Следующий пример иллюстрирует реализацию синтеза алгебраического выражения – модели оптимального процесса обработки файлов методом динамического программирования.

Пусть задана неполносвязная система из пяти исходных файлов, приведенная на рисунке 1. Здесь вершины соответствуют файлам, а ребра отражают связи между ними. Наличие ребра (i, j) означает, что пересечение множеств ключей файлов A_i и A_j – не пустое множество.

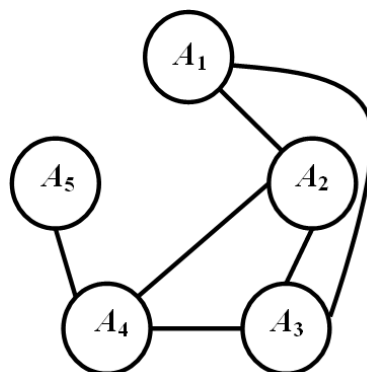


Рис.1. Система из пяти исходных файлов

Алгоритм синтеза алгебраического выражения реализует построение графа-сети, приведенного на рисунке 2 и отражающего

пошаговые переходы от начальной системы исходных файлов к системе, содержащей единственный файл – результат выполнения процесса. В этом графе вершины соответствуют системам исходных файлов, ребра – операциям, переводящим систему из p исходных файлов в систему из $p - 1$ исходного файла.

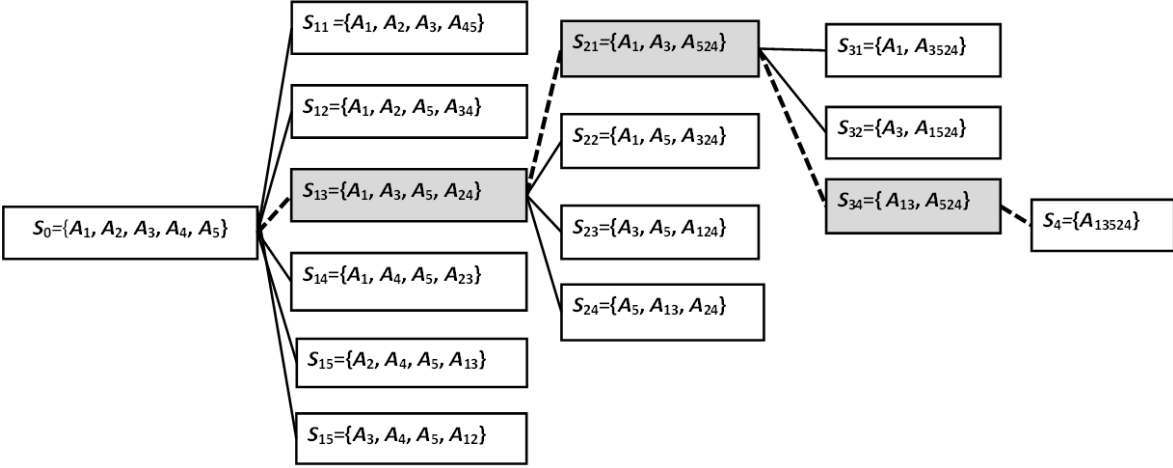


Рис. 2. Синтез процесса обработки файлов

На первом шаге в ходе построения графа-сети из системы исходных файлов $S_0 = \{A_1, \dots, A_n\}$ выбираются все допустимые пары (A_i, A_j) ($i, j = 1, \dots, n$) и строятся промежуточные системы вида $S_{1k} = \{A_{k1}, \dots, A_{kn-1}\}$, где один из файлов A_{k1}, \dots, A_{kn-1} есть результат операции над файлами $A_i, A_j \in S$. Так, построенная на первом шаге система S_{13} состоит из файлов A_1, A_3, A_5 , и файла A_{24} , полученного в результате выполнения операции над файлами A_2, A_4 . Для каждой системы S_{1k} производится преобразование метаданных, необходимых для последующего вычисления стоимости операций над файлами этой системы. На этом же шаге строятся и оцениваются связи, соответствующие выбранным операциям, переводящим исходную систему в каждую из построенных систем. Здесь же выбирается вершина, соответствующая промежуточной системе S_{1k} , стоимость (вычислительная сложность операции над файлами) перехода в которую минимальна.

Следующие шаги состоят:

- в построении всех систем S_{ik} , состоящих из $n - i$ файлов ($i = 2, 3, \dots, n - 1$) из системы, выбранной на предыдущем шаге, по тем же правилам, по которым формировались системы S_{1k} на первом шаге. На рисунке 2 файлы, не участвовавшие ни в одной операции, обозначаются так же как и в системе S_0 , а промежуточные файлы, полученные в результате обработки s исходных файлов обозначаются $A_{i_1 \dots i_s}$ ($s \leq 5, i_s \leq 5$);

- в оценке связей между системой, выбранной на предыдущем шаге, и системами S_{ik} ;
- в выборе вершины, соответствующей промежуточной системе S_{ik} , стоимость перехода в которую минимальна.

Таким образом, на каждом шаге строится система файлов, которая может быть получена в результате реализации условно-оптимального процесса, состоящего из последовательности операций с минимальной суммарной стоимостью.

В результате, на последнем шаге, соответствующем переходу от системы исходных файлов к системе из единственного файла – результата процесса выполнения запроса, из условно-оптимальных процессов выбирается оптимальный процесс. На рисунке 2 выделены промежуточные системы исходных файлов, которые выбираются на каждом шаге. Оптимальная траектория обозначена пунктирной линией.

Так реализуется алгоритм синтеза процесса обработки файлов методом динамического программирования. Достоинство этого метода состоит в том, что его результатом является оптимальный процесс МОД.

Второй метод применяется при решении задачи выбора оптимальной последовательности операций для вычисления результата алгебраического выражения, состоящего из операций умножения двумерных (плоских) матриц, с помощью алгоритма, приведенного в [4]. Этот алгоритм может быть обобщен на случай многомерных матриц. Пусть $M = M_1 \times \dots \times M_n$, где M, M_1, \dots, M_n – многомерные матрицы. Для любой пары матриц M_i и M_{i+1} сложность вычисления их произведения, независимо от того, последовательно или параллельно реализована операция умножения, зависит от величины $p^l \times p^s \times p^c \times p^m$, где:

– $p^l = \prod_{i=1}^k d(l_i)$ – произведение размерностей свободных индексов матрицы M_i ;

– $p^s = \prod_{i=1}^{\lambda} d(s_i)$ – произведение размерностей скоттовых индексов матриц M_i и M_{i+1} ;

– $p^c = \prod_{i=1}^{\mu} d(c_i)$ – произведение размерностей кэлиевых индексов матриц M_i и M_{i+1} ;

– $p^m = \prod_{i=1}^{\nu} d(m_i)$ – произведение размерностей свободных индексов матрицы M_{i+1} .

На каждом шаге основного цикла алгоритма вычисляется величина w_{ij} – минимальная сложность вычисления частичного произведения $M_i \times \dots \times M_j$ ($1 \leq i \leq j \leq n$). При $i < j$ $w_{ij} = \underset{i \leq k < j}{\text{MIN}} (w_{ik} + w_{k+1,j} + p_{i-1}^l \times p_k^s \times p_k^c \times p_j^m)$.

Здесь w_{ik} – минимальная сложность вычисления матрицы $M = M_i \times \dots \times M_k$, $w_{k+1,j}$ – минимальная сложность вычисления матрицы $M'' = M_{k+1} \times \dots \times M_j$, а $p_{i-1}^l \times p_k^s \times p_k^c \times p_j^m$ – сложность вычисления произведения многомерных матриц M и M'' , где:

– $p_{i-1}^l = \prod_{i=1}^{\kappa} d(l_i)$ – произведение числа значений свободных индексов матрицы M ;

– $p_k^s = \prod_{i=1}^{\lambda} d(s_i)$ – произведение числа значений скоттовых индексов матриц M и M'' ;

– $p_k^c = \prod_{i=1}^{\mu} d(c_i)$ – произведение числа значений кэлиевых индексов матриц M и M'' ;

– $p_j^m = \prod_{i=1}^{\nu} d(m_i)$ – произведение размерностей свободных индексов матрицы M'' .

Использование этого метода целесообразно для повышения эффективности процессов МОД, если каким-либо образом получено алгебраическое выражение – модель процесса обработки файлов, состоящее или из одних операций умножения многомерных матриц, или из суммы нескольких таких выражений.

Таким образом, можно утверждать, что теоретико-множественная и многомерно-матричная модели данных создают условия для решения задач синтеза и оптимизации процессов обработки МОД. Это обусловлено тем, что рассмотренные модели позволили унифицировать агрегаты данных и операции над ними, оценить стоимости выполнения операций и определить условия, при которых возможно применение этих операций.

Литература

1. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т.10, № 4. С. 3-16.
2. Гендель Е.Г., Мунерман В.И. Применение алгебраических моделей для синтеза процессов обработки файлов // Управляющие системы и машины. Киев: Наукова думка, 1984, №4. С. 69-72.
3. Гендель Е.Г., Мунерман В.И., Шкляр Б.Ш. Оптимизация процессов обработки данных на базе алгебраических моделей // Управляющие системы и машины. Киев: Наукова думка, 1985, №6. С. 91-95.
4. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979. 536 с.

ПОВЫШЕНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЕБ-СЕРВИСОВ МЕТОДОМ СЖАТИЯ

Г.Г. ЛАСТОЧКИН¹, Т.А. САМОЙЛОВА²
Смоленский государственный университет,
e-mail: ¹lastochkin.gg@gmail.com, ²tatsam@hotmail.ru

УДК 004.773+004.428.2

Ключевые слова: *Java, веб-сервис, GZIP, сжатие трафика.*

В статье рассматривается повышение производительности веб-сервисов методом сжатия передаваемого трафика. Для иллюстрации подхода создана демонстрационная программа на языке Java для контейнера сервлетов Apache Tomcat. Передаваемый трафик сжимается с помощью алгоритма GZIP. Данный подход позволяет сократить объем передаваемой по сети информации на 55–85%.

В данной работе предложен метод сжатия XML-данных, которыми обмениваются веб-сервис и клиентское приложение по протоколу SOAP. Метод реализован средствами Java-технологий, проведена оценка его эффективности.

Для современных корпоративных информационных систем характерны такие тенденции, как удаленная работа с использованием веб-сервисов [1], активный доступ к ним мобильных приложений, увеличение объемов хранимых и передаваемых данных. Наращивание пропускной способности каналов (собственных или арендуемых) нередко обходится дорого и не всегда помогает, задержка в сети все равно остается слишком большой. При использовании веб-сервисов проблема обостряется, поскольку чаще всего необходимо передавать многословные текстовые XML-данные по протоколу SOAP (Simple Object Access Protocol). Одно из решений проблемы ускорения сетевой обработки данных может быть их сжатие. Это позволит повысить производительность информационной системы без затрат на расширение пропускной способности глобальных сетей. Сжатие позволяет получить их представление, имеющее меньший размер, но содержащее ту же информацию. Однако широко используемые для организации SOAP веб-сервисов протоколы не включают средства непосредственной поддержки сжатия, что приводит к необходимости создания соответствующих программных средств в языках C#, Java, PHP и т.п.

Для программной реализации сжатия при обмене XML данными по протоколу SOAP между веб-службой и клиентским приложением, взаимодействующим с сервисом, выбран формат потокового сжатия GZIP [2], который особенно эффективен для текстовых данных. GZIP

обеспечивает сжатие без потерь, иными словами, исходные данные можно полностью восстановить при распаковке. Он основан на алгоритме DEFLATE, который использует комбинацию кода Хаффмана [3] и алгоритма сжатия LZ77 [4]. Данные кодируются блоками. Каждый блок кодируется независимо от других. Границы блоков не выровнены на границу байта. Блоки начинаются с трех битового префикса, который содержит признак последнего блока в последовательности. Кодирование проходит в два этапа.

На первом этапе алгоритм LZ77 находит повторяющиеся последовательности символов в пределах окна, размер которого в алгоритме DEFLATE равен 32КБ. Все повторения каждой такой последовательности заменяются указателем, который содержит смещение до места, где последовательность встретилась первый раз, и длину этой последовательности. Таким образом, после первого этапа кодирования в блоке остаются указатели LZ77 (они всегда указывают назад) и символы, не попавшие в повторяющиеся последовательности (а также символы, составляющие первые, встреченные в окне экземпляры повторяющихся последовательностей).

На втором этапе символы и значения длин последовательностей кодируются кодом Хаффмана. Собственно для них создается один общий словарь, в котором символам отводится диапазон кодов от 0 до 255. Код 256 используется для индикации конца блока, а коды 257 – 286 используются для указания длин последовательностей. Все эти коды преобразуются в слова кода, длина которых обратно пропорциональна частоте появления кода в исходных данных блока.

Для реализации предложенного подхода разработано программное обеспечение на языке Java для контейнера сервлетов Apache Tomcat с использованием технологии JAX-WS создания веб-сервисов. Сжатие передаваемых веб-сервисом данных осуществляется с помощью фильтра для HTTP ответа сервера, в котором к ответу добавляется заголовок Accept-Encoding со значением gzip, а содержимое ответа сжимается. Сжатие реализовано с помощью стандартного для Java утилитного класса GZIPOutputStream. Так как заголовок «Accept-Encoding: gzip» описывается стандартом HTTP/1.1 (RFC 2616), любой клиент, получивший такой ответ от сервера, способен без потерь восстановить исходное содержимое.

Анализ работы разработанной системы сжатия данных показал, что использование формата GZIP позволяет сократить объем передаваемой по сети информации на 55–85%, что повышает качество и надежность работы веб-сервисов и расширяет функциональные возможности информационных систем сервисно ориентированной архитектуры. С перемещением веб-служб в облачные системы, актуальность предложенного подхода к сжатию будет только возрастать, поскольку

производительность сети становится ключевым экономическим фактором работы для удаленных и мобильных приложений информационной системы.

При реализации алгоритма Хаффмана была использована технология параллельных вычислений на основе матричного представления данных и специально определяемой операции матричного умножения над ними [5]. Это позволило многократно ускорить сжатие данных.

Литература

1. Биберштейн Н., Боуз С., Джонс К., Фиаммант М., Ша Р. Компас в мире сервис-ориентированной архитектуры (SOA): ценность для бизнеса, планирование и план развития предприятия / Пер. с англ. М.: КУДИЦ-ПРЕСС, 2007. 256 с.
2. Официальный сайт GZIP, описание алгоритма [Электронный ресурс], <http://www.gzip.org/algorithm.txt>.
3. Huffman D. A. A Method for the Construction of Minimum Redundancy Codes // Proceedings of the Institute of Radio Engineers. 1952. September. Vol. 40, No. 9. P. 1098-1101.
4. Ziv J., Lempel A. A Universal Algorithm for Sequential Data Compression // IEEE Transactions on Information Theory. 1977. Vol. 23, No. 3. P. 337-343. DOI: 10.1109/TIT.1977.1055714.
5. Самойлов М.Ю., Самойлова Т.А. Использование матричных операций при построении дерева Хаффмана // Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. Русская версия 2.0. Смоленск: СГМА, 1997. Том 2. Вып.2. 246 с.

АРХИТЕКТУРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗАПРОСОВ В СИСТЕМАХ МАССОВОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

В.И. МУНЕРМАН, Д.В. МУНЕРМАН, И.Н. СИНИЦЫН

Смоленский государственный университет;

ФИЦ ИУ РАН, г. Москва,

e-mail: vimoon@gmail.com, danvmoon@gmail.com, sinitsin@dol.ru

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, оптимизация запросов, динамическое программирование.*

Предложен подход к выбору архитектуры и построению программно-аппаратных комплексов для массовой обработки данных. Предложена комбинированная архитектура, основанная на конвейерной и SIMD архитектурах. Вычислительные комплексы на основе предложенной архитектуры обеспечивают повышение эффективности выполнения запросов в системах массовой обработки данных.

В работе рассматриваются архитектуры программно-аппаратных комплексов для параллельной реализации задач массовой обработки

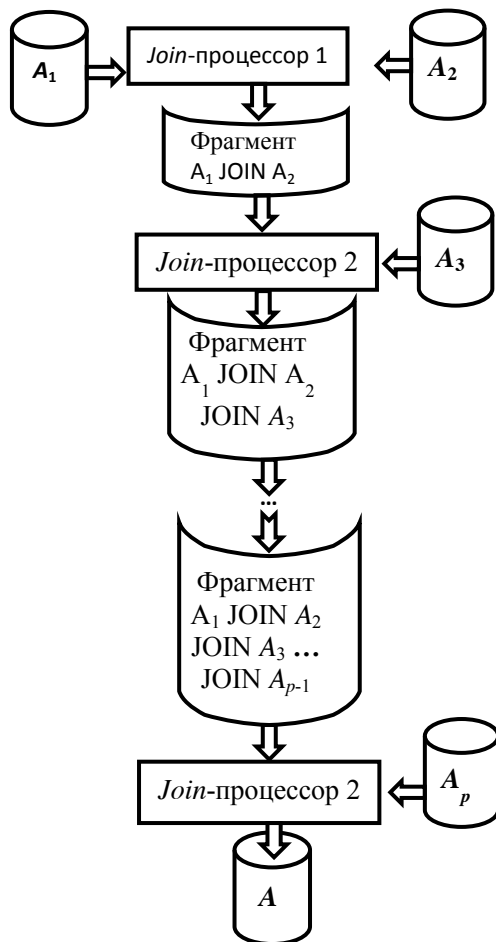


Рис. 1. Конвейерный вычислительный комплекс для вычисления цепочки операций Join

данных (МОД). В качестве модели данных используется теоретико-множественная (файловая) модель [1]. В терминах этой модели данных алгебраической моделью процесса МОД служит алгебраическое выражение вида $A = E(A_1, \dots, A_n)$, правая часть которого состоит из файлов A_1, \dots, A_n , соединенных знаками операций над файлами, а левая – многомерная матрица – модель выходного файла. Далее рассматриваются только аддитивная операция слияния строго упорядоченных файлов и мультипликативная операция слияния нестрого упорядоченных файлов. Тогда правая часть алгебраического выражения $E(A_1, \dots, A_n)$ может быть сведена к "сумме произведений" исходных файлов. В реляционной модели данных операции слияния нестрого упорядоченных файлов соответствует операция JOIN, поэтому в дальнейшем будет

применяться это имя операции. Для параллельного вычисления цепочки «произведений» файлов можно использовать конвейерную архитектуру вычислительного комплекса (рис. 1). Этот комплекс состоит из p *Join-процессоров*, первый из которых начинает обработку первых двух «сомножителей». Как только готов очередной фрагмент (один или несколько классов эквивалентности) файла-результата, он передается следующему *Join-процессору*, который обрабатывает этот фрагмент с соответствующим классом эквивалентности файла A_3 , и так далее по конвейеру. Последний *Join-процессор* конвейера принимает классы эквивалентности файла, полученного в результате предыдущих произведений и обрабатывает их с соответствующими классами эквивалентности последнего файла в цепочке.

Среди операций МОД операция JOIN имеет наибольшую вычислительную сложность. В [2] приведено описание метода

симметричного горизонтального распределения данных, который дает возможность параллельной реализации операции JOIN. В теоретико-множественной модели файл определяется как фактор-множество множества однотипных записей по отношению эквивалентности заданному множеству ключей. Это означает, что он состоит из непересекающихся подмножеств записей. Каждое такое подмножество (класс эквивалентности) содержит записи, идентифицированные одним и тем же экземпляром множества ключей.

При таком подходе *Join*-процессор можно организовать, как вычислительный комплекс на основе SIMD-архитектуры (рис. 2). Фрагменты файлов-операндов, обрабатываемых *i*-тым фрагмент-процессором, можно рассматривать как совокупность пар G_{i1}, \dots, G_{ip} , каждая из которых содержит два соответствующих друг другу класса эквивалентности файлов-операндов. Размещение данных в памяти фрагмент-процессоров производится на основе принципа симметричного горизонтального распределения [2].

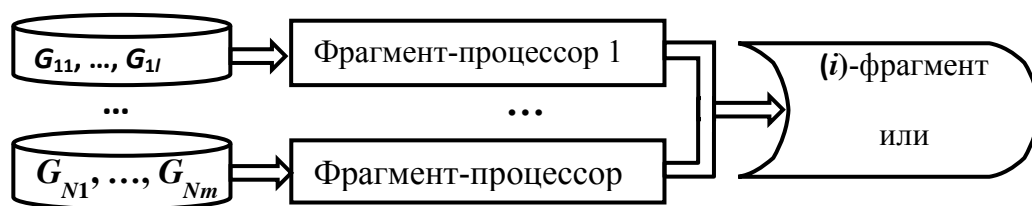


Рис. 2. SIMD-архитектура *Join*-процессора

Фрагмент-процессор выполняет операцию JOIN над фрагментами файлов и передает на выход либо весь результат операции, либо фрагмент, содержащий результат декартова произведения классов эквивалентности очередной пары G_{ij} .

При таком сочетании конвейерной и SIMD-архитектур вычислительных комплексов можно добиться значительного повышения эффективности процессов МОД.

Литература

1. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, № 4. С. 3-16.
2. Мунерман В.И. Реализация обработки больших объемов данных на симметричных мультипроцессорных системах // Системы высокой доступности. 2013. Т. 9. № 2. С. 36-39.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЕМАНТИКИ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ В АЛГЕБРУ

В. И. МУНЕРМАН, А.А. СИМАКОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: vimoona@gmail.ru, bessima13@yandex.ru

УДК 004.89

Ключевые слова: *семантика задачи, алгебра, семантическая сеть, система интегрированного вида, нейронная сеть, искусственный интеллект, нечёткие множества.*

В докладе рассматривается структура алгоритма, который позволит создать систему интегрированного вида с использованием методов искусственного интеллекта. Эта система позволит решить задачу преобразования семантики задачи в алгебру.

При решении задач средствами вычислительной техники на основании условий задачи строится алгебра, формализующая объекты предметной области и операции их преобразования. То есть выбираются множества, которое наилучшим образом соответствуют свойствам объектов, и над этими множествами определяются операции, задающие преобразования объектов. Человек при наличии соответствующих знаний и опыта, может подобрать необходимую алгебру. Для автоматической реализации этого процесса необходимо разработать алгоритм, который позволит осуществить выбор алгебры на основе семантики решаемой задачи.

В данной работе рассматривается способ преобразования семантики задачи в алгебру, необходимую для формализации и решения задачи. Предлагается метод построения системы интегрированного вида [1], которая выполняет следующие действия:

1. Формализация качественных знаний, их представление в памяти, а также хранение информации.
2. Анализ исходных данных и принятие решения.

Для построения системы предлагается использовать методы моделирования искусственного интеллекта.

На первом этапе строится модель знаний, которая преобразует знания, представленные в текстовой форме, к их аналогам, пригодным для ввода в память интеллектуальной системы.

Для задания основных множеств конструируемых алгебр строится универсальное множество E , которое содержит имена возможных основных множеств, например $E = \{N, Z, R, \dots\}$, при этом каждый элемент

из E представляет собой класс подмножеств с заданной операцией. Например, для элемента N класс подмножеств представляет собой множество пар вида $\langle N, \omega \rangle$, где $\omega \in \Omega$ – операция на данном множестве, $\Omega = \{+, -, \min, \dots\}$.

Затем строим нечёткое множество M , определяющее семантику класса задач. Его элементы – лингвистические переменные, значениями которых выступают слова или словосочетания естественного языка. Например, пусть дана задача о поиске кратчайшего пути со следующей семантикой: «При строительстве нового микрорайона на всех улицах в проекте были указаны места остановок общественного транспорта. Необходимо определить самый длинный по количеству остановок маршрут общественного транспорта». В этом примере элементами множества M будут выбраны все слова.

Над этим множеством строим семантическую сеть в виде графа, вершины которого – переменные, а дуги – отношения между ними [2; 3]. Семантическая сеть на этом графе позволит оставить только те лингвистические переменные, которые помогут в дальнейшем определить алгебру задачи. Так мы получаем множество A .

Например, семантическая сеть позволит оставить из предыдущего примера только следующие переменные: «места остановок», «количество остановок», «самый длинный», «маршрут».

Связь между множествами A и E задается как множество кортежей вида $\langle x, \mu_A(x) \rangle$, где x – это элемент множества A , а $\mu_A(x)$ – функция принадлежности, которая ставит в соответствие каждому из элементов $x \in A$ соответствующий элемент из E , при этом $\mu_A(x)$ выражается действительным числом из интервала $[0, 1]$, которое определяет степень соответствия элемента множества A конкретному элементу из E . Данная функция определяется отображением $\mu_A(x): (A \rightarrow E)$.

В качестве элементов множества E используем множества различных мощностей. Само же значение $\mu_A(x)$ будем определять с помощью построенного семантического графа, где каждой из вершин соответствует её значение, при этом от количества дуг зависит значение показателя $\mu_A(x)$. Если для $x \in A$ $\mu_A(x) = 1$, то это означает, что элемент x определённо принадлежит нечёткому множеству A , а значение $\mu_A(x) = 0$ означает, что элемент x определённо не принадлежит ему. После построения семантической сети имеем готовую систему знаний, полученную из семантики задачи.

Помимо того, что семантическая сеть будет использоваться в качестве основного определителя функции μ_A , представление знаний в памяти системы также будет осуществляться этой моделью. Вся полученная информация об алгебрах задач будет описана как

совокупность троек вида (aRb) , где a – это формализованное условие задачи, b – алгебра, а R – отношение между ними.

На основе исходного примера в памяти программы хранится следующее знание: $a = \{\langle \text{места остановок} \rangle, \langle \text{количество остановок} \rangle, \langle \text{самый длинный} \rangle, \langle \text{маршрут} \rangle\}$, $b = \{N, \langle \text{max} \rangle\}$.

Для реализации этапов накопления знаний, анализа полученных данных и принятия решения воспользуемся нейронными моделями. Они не только повторяют функцию мозга, но и способны выполнять функции, имеющие свою собственную ценность.

Для накопления знаний нашей системы воспользуемся рядом обучающихся примеров, то есть строим такое отображение $X \rightarrow Y$, чтобы в ответ на каждый входной сигнал X формировался правильный выходной сигнал Y .

Для реализации второго этапа воспользуемся структурой искусственного нейрона. Если в качестве веса синапса выступает значение $\mu_A(x)$, а в качестве компонентов входного вектора – элементы множества A , то на выходе имеем конкретную алгебру для формализации задачи.

Конечный вид модели нашей системы приведен на рисунке 1.

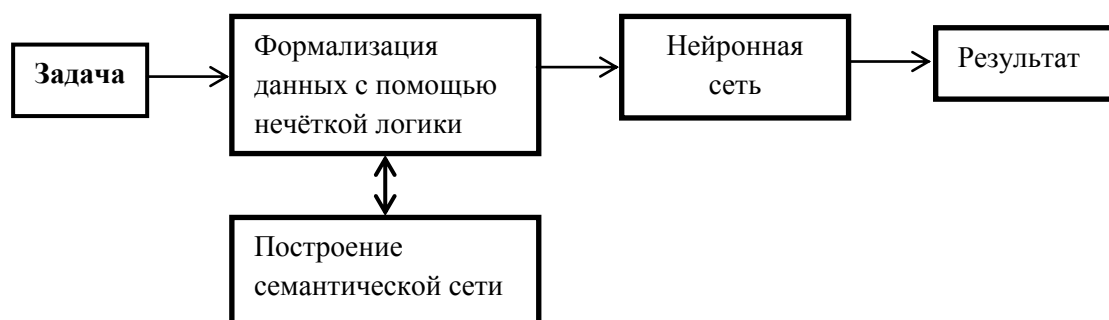


Рис. 1. Модель интегрированной системы для преобразование семантики задачи в алгебру

Литература

1. Чулюков В.А. [и др.]. Системы искусственного интеллекта. Практический курс: учебное пособие. М., БИНОМ, 2008.
2. Люгер Дж. Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем: 4-е изд: пер. с англ. - М.: «Вильямс», 2003.
3. Дьяконов В.П., Круглов В.В. MATLAB 6.5 SP1/7/7 SP1/7 SP2 + Simulink 5/6. Инструменты искусственного интеллекта и биоинформатики М., СОЛОН-ПРЕСС, 2006.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

В.И. МУНЕРМАН, В.Д. ЧИКУНОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: vimoon@gmail.com; bal-port@yandex.ru

УДК 004.896

Ключевые слова: *распознавание образов, персептрон, распределённая база данных.*

В работе рассматриваются различные алгоритмы распознавания образов, производится их классификация и выбор алгоритма, параллельная реализация которого даёт наилучший результат. Приводятся экспериментальные данные, подтверждающие эффективность сделанного выбора и реализации алгоритма.

Цель распознавания образов состоит в разбиении множества объектов, называемых образами, по нескольким категориям или классам (классификация). Классификация основывается на прецедентах – ранее классифицированных объектах, которые принимаются за образцы (эталоны) при решении задач распознавания. Задача распознавания образов состоит в том, чтобы отнести новый распознаваемый объект к какому-либо классу. Если образ не распознан, то он либо отбрасывается, либо добавляется как новый прецедент [1].

Известные методы распознавания образов имеют, как правило, высокую вычислительную сложность. Распараллеливание метода распознавания образов поможет существенно её снизить. К числу этих методов относятся: метод потенциальных функций, метод классификацией по минимуму расстояния, метод анализа образов и др.

В качестве базового алгоритма был выбран однослойный персептрон. Выбор обусловлен тем, что программные и аппаратные реализации модели персептрона очень просты. Это обеспечивает:

- простой и быстрый алгоритм обучения;
- простоту реализации параллелизма;
- возможность расширить алгоритм до многослойного персептрона.

Персептрон представляет собой простейшую форму нейронной сети, предназначенную для классификации линейно-разделимых сигналов (те, которые можем разделить одной гиперплоскостью).

Вычислительная сложность персептрона линейная. При больших n , и больших объёмах базы данных скорость распознавания уменьшается. Цель работы состоит в том, чтобы повысить производительность персептрона за счёт использования параллелизма данных.

В качестве объекта исследования взята задача распознавания цифр 0,1 ... 9. В базе данных каждой цифре соответствует таблица прецедентов (рис. 1).

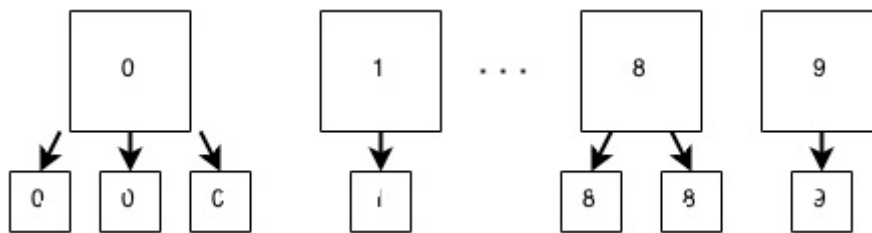


Рис. 1. База данных прецедентов

Таблицы в общем случае могут иметь различные объёмы. Число потоков, выполняющий поиск в таблицах прецедентов, может быть значительно меньше, чем число образов. Для обеспечения наибольшей эффективности параллельной обработки, необходимо добиться того, чтобы всем потокам соответствовали фрагменты базы данных, незначительно отличающихся по объёму. Для этой цели можно использовать принцип симметричного горизонтального распределения данных и распределяющий алгоритм бустрофедона [2].

Для оценки результатов был проведён эксперимент, в котором в качестве изображений используются символы размера 3×5 пикселей. Результат реализации параллельного алгоритма однослойного персептрона приведен на рисунке 2.

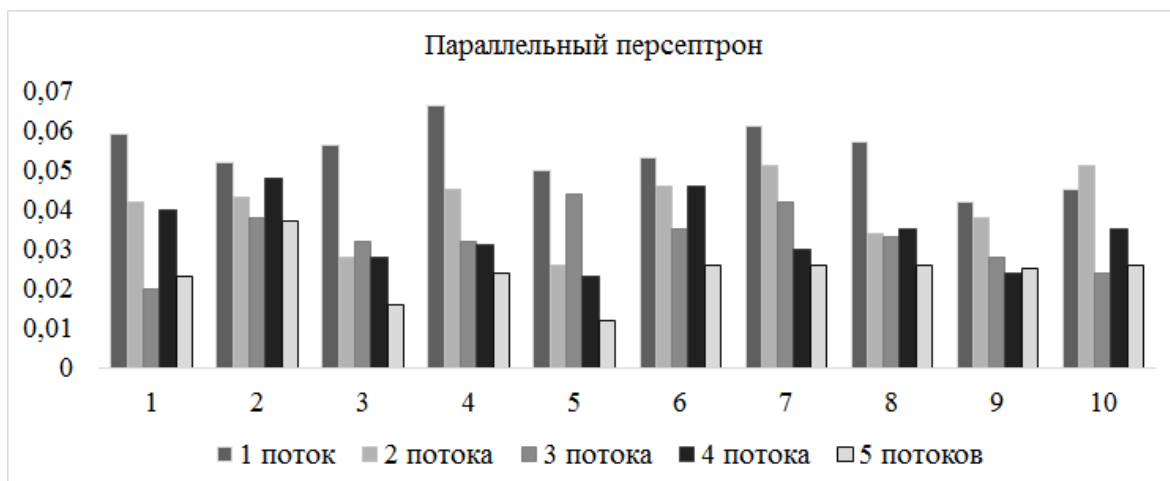


Рис. 2

Эксперимент показал, что параллельная реализация алгоритма персептрона и применение принципа симметричного горизонтального распределения данных существенно ускоряют распознавание образов.

Литература

1. Haykin S. Neural Networks and Learning Machines (3rd Edition). Prentice Hall, 2009.
2. Мунерман В.И. Реализация обработки больших объемов данных на симметричных мультипроцессорных системах // Системы высокой доступности. 2013. Т. 9, № 2. С. 36–39.

РЕАЛИЗАЦИЯ MPP-АРХИТЕКТУРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДЛЯ БАЗ ДАННЫХ СРЕДСТВАМИ WINDOWS AZURE

В.И. МУНЕРМАН¹, Е.В. ШПИЛЕЦКИЙ²

Смоленский государственный университет,
e-mail: ¹vimoon@gmail.com, ²hotsound@bk.ru

УДК 004.657

Ключевые слова: *архитектура вычислительных комплексов, базы данных, облачные технологии, Windows Azure.*

В работе рассмотрена возможность использования облачных технологий для повышения эффективности обработки данных. Предложен метод создания виртуального вычислительного комплекса на основе MPP-архитектуры.

Существующие способы обработки данных большого объема (Big Data) имеют большую вычислительную сложность. Методы массовой обработки структурированных данных (МОД) не составляют исключения [1]. Современные аппаратные и программные средства обработки таких данных в информационных системах основаны на использовании рабочих станций и систем управления базами данных. Современные рабочие станции – это, как правило, вычислительные системы, которые подключаются к вычислительной сети типа LAN или WAN, или обоих типов одновременно. Применение таких рабочих станций для реализации МОД позволяет использовать современные архитектуры виртуальных параллельных вычислительных комплексов. Например, grid-архитектуру, которая представляет собой согласованную, открытую, стандартизованную среду, обеспечивающую гибкое, безопасное, скоординированное разделение ресурсов в рамках виртуальной организации [2].

Реализация grid-архитектуры возможна как на имеющихся в распоряжении пользователя стационарных и мобильных рабочих

станциях, так и в виртуальных средах, к числу которых относятся облачные системы [3]. Для реализации на их основе виртуальных вычислительных комплексов целесообразно использовать облачную технологию PaaS – «платформа как сервис» (Platform as a Service).

PaaS – это модель облачных вычислений, при которой разработчик виртуального вычислительного комплекса получает доступ к использованию различных информационно-технологических платформ: операционных систем, систем управления базами данных, связующему программному обеспечению, средствам разработки и тестирования, размещённым у облачного провайдера. Ему предоставляется возможность использовать различные платформы, создавать их виртуальные экземпляры, устанавливать, разрабатывать, тестировать, эксплуатировать на них прикладное программное обеспечение, при этом динамически изменяя количество потребляемых вычислительных ресурсов.

При использовании платформы PaaS разработчик может пользоваться практически неограниченными вычислительными мощностями, а также количеством и объемом баз данных. Он может создавать как однородные, так и неоднородные вычислительные комплексы, которые состоят из обрабатывающих элементов, в состав которых входят процессоры, устройства локальной и массовой [4] памяти, операционные системы, системы управления базами данных.

Примеры приведены ниже:

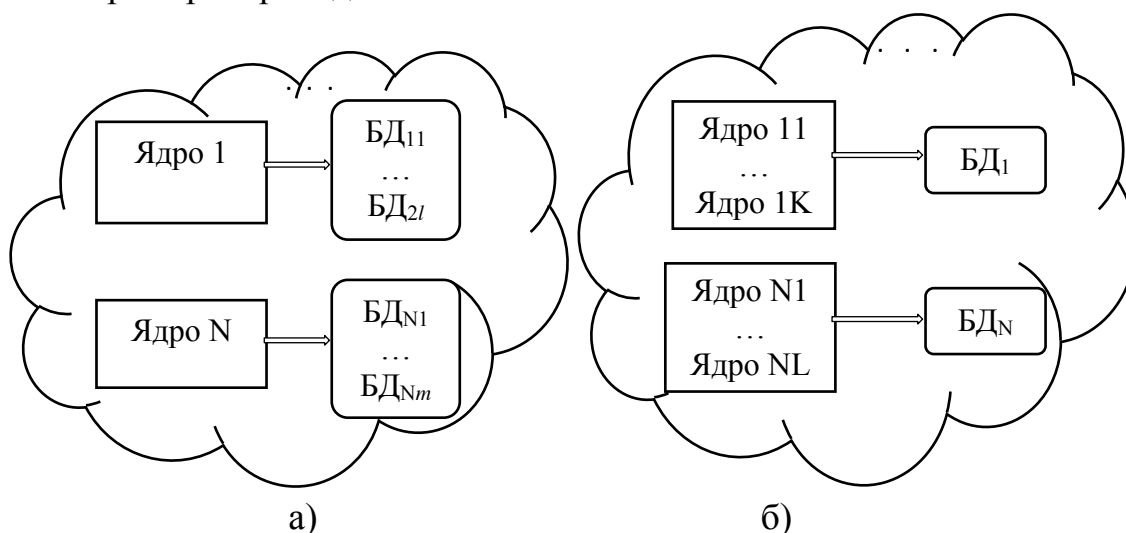


Рис. 1. Варианты построения виртуального комплекса MPP-архитектуры

На рисунке 1 приведены варианты построения виртуального комплекса MPP-архитектуры средствами облачных технологий. Вариант а) демонстрирует возможность размещения на одном ядре нескольких БД, организованных в одной или различных СУБД. Данные одной задачи распределены между этими БД. Таким образом реализуется возможность параллельного распределения обработки данных. В случае

варианта б) одна БД обрабатывается несколькими ядрами, что позволяет реализовать параллельную обработку запросов к этим БД. Возможны и другие архитектурные решения.

Таким образом, показано, что применение облачных технологий позволяет строить различные вычислительные комплексы с MPP-архитектурой, ориентированные на решения конкретных задач, т.е. архитектура вычислительных комплексов соответствует семантике решаемых задач. Предложенный подход позволяет повысить эффективность обработки данных.

Литература

1. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, № 4. С. 3-16.
2. Демичев А.П., Ильин В.А., Крюков А.П. Введение в грид-технологии. Препринт НИИЯФ МГУ. 2007. 11/832.
3. Redkar T. Guidici Windows Azure Platform, 2nd Edition. APRESS, 2011. 602 p.
4. http://www.webopedia.com/TERM/M/mass_storage.html.

РЕАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ СРЕДСТВАМИ БАЗ ДАННЫХ

В.И. МУНЕРМАН, Т.Д. ЮЛДАШЕВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: vimoona@gmail.com; tota1995@mail.ru

УДК 004.657

Ключевые слова: *многомерные матрицы, распределённые базы данных.*

В работе рассматривается способ параллельной реализации операции умножения разреженных многомерных матриц средствами баз данных. Для достижения результата используется представление разреженных матриц в виде таблиц баз данных и параллельная обработка баз данных на основе принципа симметричного горизонтального распределения.

Умножение многомерных матриц относится к разряду алгоритмов полиномиальной сложности, кроме того эта операция легко распараллеливается при помощи известных алгоритмов [1]. Проблема состоит в том, что эффективность алгоритмов существенно падает при умножении разреженных матриц [2]. Разреженной называется матрица, имеющая малый процент элементов, отличных от нейтрального по

аддитивной операции. При этом относительно местоположения нейтральных элементов никаких предположений не выдвигается: они могут быть расположены случайным образом.

Теория многомерных матриц является естественным обобщением теории обычных матриц. Далее для простоты рассматриваются логические многомерные матрицы. Логическая многомерная матрица определяется как система $(n_1 \times \dots \times n_p)$ двоичных элементов $A_{i_1 \dots i_p}$ ($i_\alpha = 1, \dots, n_\alpha, \alpha = 1, \dots, p$), расположенных в точках p -мерного пространства, определяемых координатами i_1, \dots, i_p , и обозначается $A = \parallel a_{i_1 \dots i_p} \parallel$. Над логическими многомерными матрицами определены унарные операции транспонирования, сечения, свертки и бинарные операции сложения и умножения.

Пусть даны p -мерная матрица $A = \parallel a_{i_1 \dots i_p} \parallel$ и q -мерная матрица $B = \parallel b_{i_1 \dots i_q} \parallel$. Можно разбить совокупности индексов i_1, \dots, i_p и i_1, \dots, i_q на четыре группы, содержащие соответственно κ, λ, μ и ν индексов ($\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0$). Причем $\kappa + \lambda + \mu = p$, а $\lambda + \mu + \nu = q$. Разбиение порождает четыре группы индексов: $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$, $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$, $c = (c_1, \dots, c_\mu)$ и $m = (m_1, \dots, m_\nu)$. Индексы разбиений s и c принадлежат обеим матрицам. Тогда матрицы A и B можно представить в виде $A = \parallel a_{lsc} \parallel$ и $B = \parallel b_{scm} \parallel$. Очевидно, что если индексу $s_\gamma (c_\gamma)$ соответствуют индекс i_α в матрице A и индекс i_β в матрице B , то $n_{i_\alpha} = n_{i_\beta}$. Матрица $C = \parallel c_{ism} \parallel$, элементы которой вычисляются по формуле $c_{ism} = \sum_{(c)} a_{lsc} \times b_{scm}$, называется (λ, μ) -свернутым произведением

(умножением) матриц A и B и обозначается ${}^{\lambda, \mu}(A \times B)$. В [1] доказано соответствие операции умножения многомерных матриц операции JOIN.

В дальнейшем рассматриваются только многомерные матрицы, совместимые по умножению. Обычно очень большие разреженные матрицы хранятся в так называемом «упакованном» виде. Это означает, что хранятся только их «ненулевые» элементы вместе с необходимой информацией об их местоположении (индексами). Поэтому многомерные матрицы можно хранить в таблицах баз данных. Поля, соответствующие индексам матриц, должны образовывать первичный ключ. Цель работы состоит в том, чтобы оптимизировать операцию умножения разреженных многомерных матриц средствами баз данных. Для достижения поставленной цели был проведен эксперимент, в ходе которого:

- 1) случайным образом создавались две разреженные матрицы.
- 2) каждая матрица сохранялась в отдельной таблице.

3) таблицы разбивалась на фрагменты в соответствии с принципом симметричного горизонтального распределения данных [3].

4) выполнялся запрос, соответствующий операции (λ, μ) - свернутого произведения матриц A и B :

```
SELECT A.l, B.l, A.s, A.m, B.m FROM A INNER JOIN B
ON A.c = B.c AND A.s = B.s
GROUP BY A.l, B.l, A.s, A.m, B.m
ORDER BY A.l, B.l, A.s, A.m, B.m.
```

В этом запросе используются следующие обозначения: A, B – таблицы (матрицы), $A.c, B.c$ – группы полей, соответствующих келиевым индексам таблиц A и B , $A.s, B.s$ – скоттовым индексам, $A.l, B.l, A.m, B.m$ – свободным индексам.

Эксперимент показал, что параллельное выполнение операции умножения разреженных многомерных матриц средствами баз данных дает ускорение, кратное количеству процессоров параллельной вычислительной системы, а также улучшает характеристики параллельного умножения матриц известными алгоритмами за счет того, что нейтральные элементы не участвуют в вычислительных операциях и операциях пересылки.

Литература

1. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, № 4. С. 3-16.

2. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. М.: МИР, 1977. 172 с.

3. Мунерман В.И. Реализация обработки больших объемов данных на симметричных мультипроцессорных системах // Системы высокой доступности. 2013. Т. 9, № 2. С. 36-39.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ КРОССПЛАТФОРМЕННЫХ СЕРВИС-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ

Т.А. САМОЙЛОВА¹, И.М. ШАШЕРО²

Смоленский государственный университет,
e-mail: ¹tatsam@hotmail.ru, ²lunrox@gmail.com

УДК 004.051

Ключевые слова: *сервис-ориентированная архитектура, параллельные вычисления, JavaScript.*

В данной статье рассматриваются проблемы производительности кроссплатформенных сервис-ориентированных

приложений. Исследования проводятся на основании игрового проекта. Был проведен анализ потенциальных проблем клиентской и серверной частей приложения.

Повышение требований к современным информационным системам приводит к появлению новых архитектурных подходов к их созданию. Так, при наличии проблем, обусловленных ростом объема данных и необходимостью интеграции с партнёрами, целесообразна организация сервис-ориентированной архитектуры (СОА) [1]. В разработках клиентских программ в этом случае применяют кроссплатформенные средства языка HTML5. Эти средства предполагают развертывание на различных платформах.

Для анализа проблем производительности кроссплатформенных СОА-приложений был создан игровой проект. Игра основана на противостоянии двух игроков в реальном времени. Игроки-партнеры обмениваются информацией посредством серверной веб-службы.

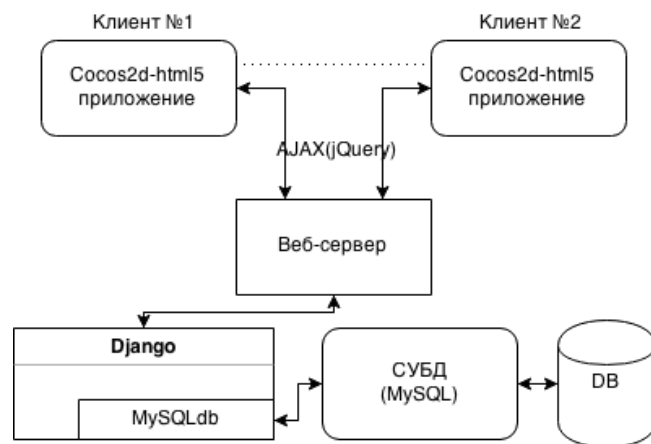


Рис. 1. Схема взаимодействия компонентов СОА

Анализ проекта позволил выявить следующие слабые звенья СОА: низкая производительность JavaScript и проблемы одновременной обработки всей информации при большом числе игроков.

Проблемы производительности серверной части приложения несложно решить стандартными подходами организации параллельных вычислений, а параллельный доступ к базе данных реализовать с помощью механизма транзакций. Наибольший интерес представляет клиентское приложение.

Для повышения производительности вычислений на клиентских приложениях использовалась библиотека Parallel.js, которая позволяет использовать потоки и технологию MapReduce. Эффективность данной библиотеки была проанализирована на примере вычисления элементов последовательности чисел Фибоначчи. На рисунке 2 видно двукратное (при использовании двухядерного процессора) ускорение вычислений.

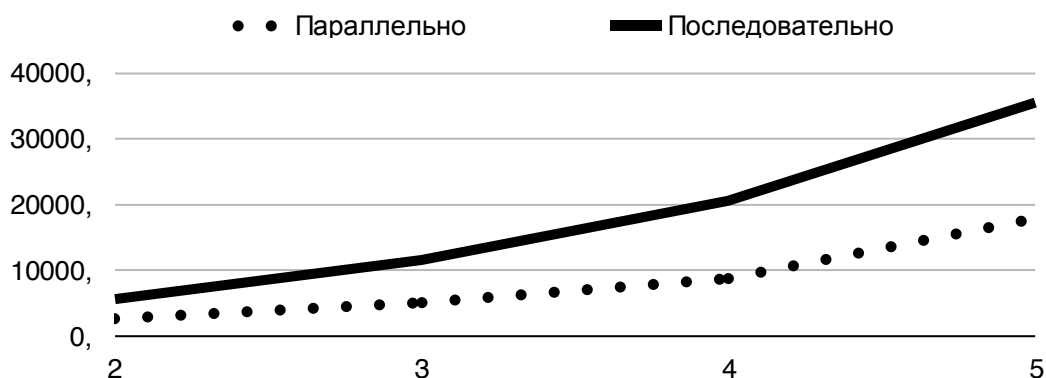


Рис. 2. Ускорение вычислений средствами Parallel.js

Кроме того, предложен способ повышения производительности средствами библиотеки River Trail [2]. Это расширение языка JavaScript для реализации параллельных вычислений на многоядерных процессорах.

Таким образом, результаты проведенных экспериментов показали, что при использовании стандартного программного обеспечения и с учетом особенностей решаемых задач можно существенно повысить производительность программных средств SOA за счет применения методов параллельной обработки данных.

Литература

1. Биберштейн Н., Боуз С., Джонс К., Фиаммант М., Ша Р. Компас в мире сервис-ориентированной архитектуры (SOA): ценность для бизнеса, планирование и план развития предприятия : пер. с англ. М.: КУДИЦ-ПРЕСС, 2007. 256 с.
2. Stephan Herhut Richard L. Hudson Tatiana Shpeisman Jaswanth Sreeram. River Trail: A Path to Parallelism in JavaScript, Intel Labs, 2013/8/10. <http://herhut.eu/files/herhut-oopsla-2013-preprint.pdf>.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ СРЕДСТВАМИ СУБД

Г.А. СЕЛЕЗНЕВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: g-selezneva@bk.ru

УДК 681.3

Ключевые слова: *графы, алгоритмы на графах, матричные алгоритмы, разреженные матрицы, методы работы с разреженными матрицами.*

Рассматриваются алгоритмы обработки информации, представленной в графовой форме. Подробно обсуждаются матричные алгоритмы. Отмечается, что при работе с разреженными матрицами важно выбрать правильный способ хранения матриц в памяти ЭВМ, полезно также помнить о возможности использования СУБД для оптимизации алгоритмов.

Современное общество характеризуется тем, что активно использует достижения научно-технического прогресса в своей повседневной деятельности. Активно развивающиеся информационные технологии позволяют существенно облегчить человеку ведение работ по хранению и обработке больших объемов информации.

Часто в решаемых задачах встречается следующая конструкция – есть объекты и связи между ними, часто связи имеют вес. Такая конструкция является графом. Развитие теории графов обязано большому числу всевозможных приложений. Из всех математических объектов графы занимают одно из первых мест в качестве формальных моделей реальных систем. Поэтому работа с алгоритмами на графах является перспективным направлением на данный момент.

Из большого многообразия алгоритмов для работы на графах стоит выделить матричные алгоритмы. Это связано с тем, что огромные потоки информации нужно хранить в памяти ЭВМ и матричный способ хранения является наиболее удобным.

Стоит отметить, что часто используемые матрицы оказываются разреженными, то есть матрицами, у которых количество ненулевых элементов мало по сравнению с нулевыми. Работу с такими матрицами стоит строить несколько другим образом, нежели с обычными матрицами.

Большие разреженные матрицы обычно хранятся в ЭВМ в упакованном виде. Можно указать четыре причины использования упакованной формы хранения:

- такая форма позволяет хранить и обрабатывать в оперативной памяти ЭВМ матрицы больших размерностей, чем при обычном хранении;
- могут встретиться случаи, когда даже в упакованном виде матрица не размещается в оперативной памяти (например, при работе ЭВМ в режиме с разделением времени) и требуется использовать внешнюю память;
- существенно экономится время благодаря тому, что программой предусматривается исключение тривиальных операций, т. е. вычисления с нулевыми элементами матрицы опускаются;
- можно добиться экономии в памяти при хранении обратных матриц, если их представлять в виде произведения элементарных матриц и в

упакованной форме хранить только нетривиальные элементы таких матриц.

Если же продолжать работу с разреженными матрицами в стандартном виде, то можно использовать средства СУБД для повышения эффективности работы. Хранение матриц в БД позволит выполнять запросы различного рода к хранимым таблицам. Например, при наличии двух матриц A_{ij} и B_{jk} можно организовать запрос Select таким образом, что на выходе запроса мы получим новую матрицу, которая будет представлять собой результат умножения исходных матриц A_{ij} и B_{jk} .

Литература

1. Емельченков Е.П., Сенькина Г.Е., Киселева О.М. Методы математического моделирования в обучении: монография. Смоленск: СмолГУ, 2007. 112 с.
2. Писсанецки С. Технология разреженных матриц: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 410 с.
3. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы: пер. с англ. М.: Мир, 1977. 172 с.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

А.А. СИЗОВ

Филиал НИУ «МЭИ» в г. Смоленске,
e-mail: alexander.sizov@eteron.ru

УДК 519.8

Ключевые слова: *временной ряд с переменной структурой, локальный фрактальный анализ, точка разладки, индекс фрактальности, прогнозирование, цвет шума.*

В докладе рассматривается решение задачи идентификации оптимальных методов анализа и прогнозирования временных рядов различных типов на основе их структуры и характеристик с помощью объединения возможностей статистического, нейро-нечеткого и фрактального подходов.

При практическом анализе временных рядов (ВР) различных типов неизбежно приходится каждый раз решать задачу выбора оптимального метода анализа и прогнозирования ряда в зависимости от тех или иных его характеристик. При этом эффективное решение этой задачи требует от исследователя глубоких знаний специфики подходов к прогнозированию данных, их особенностей и опыта их применения.

Поэтому актуальной является разработка методологии, позволяющей автоматизировать решение этой задачи. При этом интерес

представляют временные ряды с переменной структурой, порожденные существенно нелинейными стохастическими динамическими системами [1], так как ряды такого типа подвержены влиянию не поддающихся математическому описанию внешних факторов, а также характеризуются меняющимися закономерностями на всей области определения и повышенным уровнем шума.

Для решения изложенной задачи представляется целесообразным разработать гибридный способ прогнозирования временных рядов, который сочетал бы в себе возможности статистического, нейро-нечеткого и фрактального подходов [2].

В случае изменчивой природы исследуемого процесса зачастую бывает невозможно в силу ряда причин – воздействия внешних факторов, процессов внутри системы, неучтенных в модели и др. – выполнить аппроксимацию удовлетворительной точности на всей области определения прогнозируемых параметров. В таких случаях целесообразно на основе определения моментов изменения выбранных мер (определения точек разладки) разбивать всю область определения параметра на несколько локальных участков и для каждого такого участка строить свою модель прогнозирования. На основе характеристик текущего участка, а также с учетом нечеткой динамики ряда в целом выбирается оптимальный метод прогнозирования с помощью системы нечеткого продукционного вывода.

В качестве такой системы предлагается использовать нечеткую нейронную продукционную адаптивную сеть нечеткого логического вывода по Сугэно типа ANFIS, на вход которой подаются значения фрактальных показателей – индекса фрактальности [3], спектрального показателя, размерности Хаусдорфа, индекса амплитудной вариации, показателя Херста (в случае достаточного количества отсчетов). Сеть предварительно обучается. База правил строится на основе следующей таблицы.

Таблица 1

Соотнесение значений фрактальных показателей и поведения ряда

Тип шума	Индекс фрактальности	Показатель Херста	Размерность Хаусдорфа	Характер ВР
Черный шум	$0 < \mu < 0.5$	$0.5 < H < 1$	$1 < D < 1.5$	Персистентный
	$\mu \rightarrow 0.5$	$H \rightarrow 0.5$	$D \rightarrow 1.5$	В значительной степени стохастичный
Белый шум	$\mu \sim 0.5$	$H \sim 0.5$	$D \sim 1.5$	Стохастичный
Розовый шум	$0.5 < \mu < 1$	$0 < H < 0.5$	$1.5 < D < 2$	Антиперсистентный. Разладка не предполагается
	$\mu \rightarrow 0.6$	$H \rightarrow 0.4$	$D \rightarrow 1.6$	Антиперсистентный. Возможна разладка

В качестве выходных значений сеть формирует методы (группы методов) с набором рекомендаций, касающихся процедуры прогнозирования, а также оценки степени достоверности прогноза.

Литература

1. Абраменкова И.В., Круглов В.В., Дли М.Я. Мультимодельный метод прогнозирования процессов с переменной структурой. М.: Физматлит, 2003. 231 с.
2. Сизов А.А. Модели, способы и программные средства поддержки принятия решений на основе прогнозирования временных рядов с переменной структурой: дис.... канд. техн. наук: 05.13.17: защищена 10.10.2014.
3. Старченко, Н.В. Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов: дис.... канд. физ-мат. наук: 01.01.03: защищена 15.02.2006.

РАЗВИТИЕ РАБОТ В ОБЛАСТИ «БОЛЬШИХ ДАННЫХ» В РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**И.А. СОКОЛОВ, В.И. БУДЗКО, Л.А. КАЛИНИЧЕНКО,
И.Н. СИНИЦИН, С.А. СТУПНИКОВ**

ФИЦ ИУ РАН, г. Москва,
email: isokolov@ipiran.ru; vbudzko@ipiran.ru; leonidk@synth.ipi.ac.ru;
sinitsin@dol.ru; ssa@synth.ipi.ac.ru

УДК 681.3

Ключевые слова: *аналитика обработки и управления данными, «Большие Данные» (ВД), интенсивное использование данных, платформа ВД, системы высокой доступности, центр обработки данных, CALS-технологии*

Рассматривается современное состояние и направления работ в области информационных технологий (ИТ) «Большие Данные (BigData)». Выделяются области с интенсивным использованием данных, формулируются стратегические ИТ, рассматриваются платформы обработки и хранения больших данных. Приводятся результаты работ ИПИ РАН (ФИЦ ИУ РАН) в области аналитики «Больших Данных» и рассматривается опыт методической и научной поддержки аналитики и управления данными в областях с интенсивным использованием данных.

В бизнесе, науке и технике происходит революция, движимая накоплением массивных коллекций данных, генерируемых с экспоненциально растущей интенсивностью в инфраструктурах бизнеса, социальной сферы, технологий, в научных экспериментах и моделях [1–3]. Подобное развитие в ближайшее время должно оказать влияние на

основы, саму суть того, как принимаются решения, осуществляются научные открытия и технологическое развитие. Рост объемов данных практически во всех научных областях, экономике и бизнесе, государственных организациях достигает пропорций, оцениваемых примерно как ежегодное удвоение объема данных. Уже возник существенный разрыв между генерируемым количеством данных и нашей способностью понимать, анализировать эти данные.

Приведем некоторые данные, характеризующие объемы информации, полученные из различных источников. В 2014 году количество пользователей Интернета достигло 3 миллиардов. Ежедневно социальная сеть Twitter генерирует более 12 ТБ данных твитов, Facebook – более 25 ТБ данных материалов, а Нью-Йоркская биржа New York Stock Exchange – более 1 ТБ данных о торгах. Каждый день создается более 30 миллиардов меток радиочастотной идентификации. Сюда же могут быть отнесены данные, генерируемые сотнями миллионов GPS-устройств, которые продаются каждый год, а также более 30 миллионами сетевых датчиков, количество которых увеличивается ежегодно на 30%. Ожидается, что объем этих данных будет удваиваться каждые два года в течение следующих 10 лет.

Большие данные обычно характеризуются:

- *объемом* - их размер выходит за пределы возможностей программных средств традиционных баз данных собирать, хранить, обрабатывать и анализировать данные;

- *разнообразием* - необходимостью обработки множества типов, источников и форматов данных от сенсоров, умных устройств, социальных сетей; интеграции большого количества ресурсов, содержащих различные данные (структурированные наряду с сырыми, слабоструктурированными, неструктурированными данными);

- *скоростью* - необходимостью реакции на текущую информацию за время, ограниченное приложением; потоковой обработки (например, GPS-данных в реальном времени).

Предметные области, рост объема данных в которых наиболее заметен и определяющую роль в которых играют методы и средства анализа данных и управления данными, называют *областями с интенсивным использованием данных* (data intensive domains - DID). К таким областям относятся так называемые X-информатики (X=астро, био, гео, нейро, медицина, физика, химия и пр.), социальные науки, различные отрасли промышленности, финансов и бизнеса.

В информационном обществе с развивающейся экономикой, опирающейся на знания, несомненно, что производительные силы завтрашнего дня должны быть оснащены адекватными методами и средствами для восприятия данных. Такое восприятие должно быть основано на умении обеспечивать своевременный доступ, поиск,

интерпретацию, анализ, извлечение знаний, интеграцию данных из разнообразных источников. Умение извлекать знания (структурированную информацию) из данных в таких быстро растущих репозиториях предопределяет успех бизнеса, экономики, науки. Примером движения в этом направлении является образование в октябре 2013 в IBM новой исследовательской лаборатории (Accelerated Discovery Research Lab.) для организации совместной работы исследователей IBM и ее партнеров при решении наиболее сложных задач анализа больших данных в разнообразных областях. В ее задачи входит доступ к разнообразным источникам данных, создание уникальных методов исследования, включая образование моделей предметных областей, средства обработки естественных языков, основанные на подходах Watson'a, мощные аппаратурно-программные инфраструктуры, широкий диапазон методов, накопленных в биологии, медицине, финансах, моделировании погоды, математике, информатике. Такое сочетание достижений должно привести к сокращению времени открытий, к снижению стоимости разработок и усилению влияния науки. Создание и использование новых методов и средств анализа разнообразных больших данных, образование массовой высокоинтеллектуальной профессии data scientist становится необходимой предпосылкой конкурентоспособности науки и промышленности, становления экономики, основанной на знаниях, а также обеспечения безопасности государства.

Из-за огромного количества публикаций результатов исследований и применений аналитики данных их систематизация требует специальной организации. Большие ежегодные конференции (такие как, например, VLDB, SIGMOD/PODS, ICDE, SIGKDD) содержат огромное, от года к году увеличивающееся число докладов по аналитике данных. Журналы переполнены статьями по аналитике данных. Достаточно взглянуть на журналы в области различных X-информатик. Разнообразие подходов, моделей, методов решения задач вызвано большим разнообразием природы данных, областей науки и деятельности людей, инструментов для получения данных, специфики задач в различных областях. На одной лишь конференции SIGKDD (ACM Special Interest Group on Knowledge Discovery in Data) в августе 2014 года объем трудов превышал 1000 страниц, формата А4, двухколонного.

Ниже приводятся наиболее интенсивно развивающиеся информационные технологии на ближайший период:

- глубокая всеобъемлющая и незаметная для пользователя аналитика;
- контекстно-зависимые системы;
- информационная безопасность приложений;

- «Интернет вещей»;
- 3D печать;
- «Умные машины»;
- архитектура клиент-облако;
- все ресурсы центр обработки данных станут программируемыми;
- Web-Scale IT.

Средства работы с большими данными включают платформы (инфраструктуры) обработки и хранения больших данных, а также средства построения систем аналитической обработки больших данных.

Платформы обработки и хранения больших данных включают:

- интегрированную платформу для накопления, хранения, распределенной параллельной обработки разнотипных данных. В качестве основы таких платформ (например, IBM BigInsights, Cloudera, HortonWorks) в настоящее время широко используется Apache Hadoop;

- средства распределенной обработки потоковых данных в реальном времени. Примерами таких средств служат IBM InfoSphere Streams, Flume;

- средства интеграции данных (например, IBM Information Server);

- распределенные средства хранения и массивно-параллельного оперирования структурированными данными (хранилища данных), например, IBM DB2 Warehouse, Microsoft SQL Server Parallel Data Warehouse, СУБД Vertica;

- СУБД, основанные на NoSQL моделях данных, например Oracle NoSQL, HBase, MongoDB.

Методы и средства построения систем аналитической обработки больших данных включают:

- методы и средства прогнозного моделирования (predictive modeling), реализованные в таких решениях, как SPSS Modeler, SAS Predictive Analytics, SAP Predictive Analytics;

- методы и средства извлечения информации из данных (data mining), реализованные в таких решениях, как SPSS Modeler, SAS Data Mining, Oracle Data Mining, Microsoft Analysis Services;

- методы и средства текстовой аналитики (извлечение информации из неструктурированных текстовых документов). Примерами средств текстовой аналитики являются IBM BigInsights Text-Analytics, IBM Watson Content Analytics, SAP Text Analytics, SAS Text Analytics, Lexalytics Text Analytics;

- методы и средства статистической аналитики (например, R, SAS, SPSS Statistics).

Перечисленные программные средства позволяют обрабатывать и анализировать большие объемы различных (как структурированных, так и неструктурированных) данных.

ИПИ РАН имеет значительный опыт в областях интеграции данных, организации инфраструктур решения задач над неоднородными информационными ресурсами и их применения для решения конкретных научных и практических задач.

Проведены исследования методов организации решения задач над множественными распределенными неоднородными ресурсами. Осуществлены исследование и разработка методов и средств семантической идентификации релевантных научной задаче спецификаций ресурсов и их интеграции в спецификациях задачи в информационных системах для научных исследований. Разработаны методы и средства определения концептуальных моделей предметных областей в научных исследованиях и поддержки решения научных задач на основе предметных посредников в гибридной грид-инфраструктуре. Проведены исследования методов интеграции декларативных программ и знаний на правилах, баз данных и сервисов для решения научных задач над неоднородными распределенными ресурсами.

Ряд проектов, выполненных совместно с ИНАСАН и ИКИ РАН, посвящен разработке методов и средств поддержки решения задач в области астрономии. Разработаны принципы и основы информационного взаимодействия в инфраструктуре Российской виртуальной обсерватории (РВО). Проведено исследование методов и средств поддержки архитектуры предметных посредников для Российской виртуальной обсерватории. Создается интегрированное хранилище данных о двойных звездах и методика формирования аналогичных хранилищ результатов наблюдений в различных научных областях.

Существенное внимание уделяется новым методам, моделям данных, платформам интеграции и аналитики больших разноструктурированных данных. Проводятся исследования методов и средств интеграции неоднородных (структурированных и слабоструктурированных) баз данных в системах с интенсивным использованием данных. Разрабатываются подходы к трансформации средствами Nooор-образных инфраструктур контента больших разноструктурированных коллекций данных в структурированную, агрегированную информацию.

В 2013 году в ИПИ РАН была выполнена НИР «Платформы Big Data», в которой были исследованы задачи, архитектура, компоненты систем анализа, обработки, хранения больших данных. Особое внимание в исследовании уделено платформе больших данных IBM. Согласно оценкам Гартнера, это наиболее полная и продвинутая платформа по

сравнению с известными (например, с платформой Oracle). Практическим продолжением НИР стала проведенная в 2014 году НИР «Текстовая аналитика Big Data». НИР ориентирована на апробацию принципов, подходов, методов и средств аналитической обработки данных большого объема на конкретной задаче мониторинга тональности отношения населения к органам региональной власти на примере одного из регионов РФ. В ИПИ РАН развернуты работы по применению ТИ «Большие Данные» в CALS системах [4].

Планируется создание Методического междисциплинарного центра интенсивного использования данных РАН (ММЦИИД) при ИПИ РАН. Главная цель ММЦИИД – способствовать ускорению исследований и повышению их эффективности (качества, конкурентоспособности, видимости результатов) за счет стимулирования совместного использования новейших данных, накопленных в мире, совершенствования и обобщения методов и средств анализа и управления данными в DID. Ожидается, что взаимная дополнительность подходов в междисциплинарных DID будет способствовать развитию корпоративной культуры, обобщающей методы совместного использования, анализа данных и создания информационных систем, применяемых в различных DID.

Основные задачи центра:

- отслеживание глобальных тенденций накопления больших коллекций данных в науке для их совместного использования коллективами ученых, выявление перспективных направлений применения методов и средств анализа и управления данными;

- накопление междисциплинарного опыта анализа и управления данными в информатике и в различных областях с интенсивным использованием данных, организации научных экспериментов в таких областях;

- реализация конкретных проектов (поддерживаемых РФФИ, РНФ и т.д.);

- зеркалирование мировых коллекций данных (например, SDSS, NSP);

- анализ состояния использования мировых коллекций данных в РАН, применения методов и средств анализа и управления данными; определение целей и стратегических направлений развития применения данных, выработка соответствующих дорожных карт и прогнозов развития;

- участие в конкретных проектах (институтов РАН) с целью распространения и аккумулирования опыта применения данных, их анализа, организации экспериментов с интенсивным использованием данных;

- деятельность в сфере образования (разработка и поддержка курсов магистерских программ совместно с МГУ, МИФИ, и другими ВУЗами);
- организация международной научной конференции и симпозиумов по аналитике и управлению данными в областях с интенсивным использованием данных;
- организация рабочих групп и формирование сообществ в различных областях с интенсивным использованием данных.

13–16 октября 2015 года в Обнинске будет проводиться XVII Международная конференция DAMDID/RCDL'2015 «Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных» (<http://www.damdid2015.iate.obninsk.ru>). Конференция планируется как междисциплинарный форум исследователей и практиков из разнообразных областей науки, содействующий сотрудничеству и обмену идеями в сфере анализа и управления данными в условиях их интенсивного использования.

Ожидается, что взаимная дополнительность подходов в междисциплинарных DID будет способствовать развитию корпоративной культуры, обобщающей методы анализа данных и создания информационных систем, применяемых в различных DID. Для участия в конференции приглашаются специалисты из таких DID, как X-информатика (где в качестве X выступают астро, био, гео, нейродисциплина, медицина, физика, химия и др.), социальные науки, экономика, финансы и др., а также специалисты из области информатики, статистики, машинного обучения, data mining, data science, новых технологий и ИТ, бизнеса и др.

Определение тематических направлений конференций DAMID/RCDL, формирование программных комитетов, планирование мест проведения конференций, стратегии развития конференций обеспечивается Координационным комитетом конференций DAMDID/RCDL, включающим представителей различных областей исследований с интенсивным использованием данных.

Тематика конференции 2015 года включает *треки сферы анализа данных и решения задач в DID*:

- особенности данных в DID;
- постановки и решение задач в DID;
- организация экспериментов в DID;
- модели (как составная часть процесса исследований);
- методы и процедуры анализа данных;
- информационные системы поддержки исследований в DID;
- концептуальное моделирование предметных областей в DID;
- видение будущего вычислений с интенсивным использованием данных

и треки сферы управления данными в DID:

- интеграция данных в DID;
- извлечение данных из текстов;
- облака и гриды данных в DID;
- роль Семантического веба в DID;
- платформы больших данных и опыт их применения в DID.

Литература

1. Будзко В.И. Развитие систем высокой доступности с применением технологий «Большие Данные» // Системы высокой доступности. 2013. Т. 9, № 4. С. 3–15.
2. Будзко В.И., Сеницын И.Н. Развитие компьютерных информационных технологий «Большие Данные» // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 69–75.
3. Будзко В.И. (ред.). Тематический выпуск. Системы высокой доступности. Москва, 2014. Т. 10, № 3.
4. Сеницын И.Н., Шаламов А.С. Лекции по теории систем интегрированной логистической поддержки. М.: Торус Пресс, 2012. 624 с.

УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ ЗАЩИЩЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННО- ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ¹

И.И. ЧУКЛЯЕВ

Военная академия ПВО ВС РФ, г. Смоленск,
e-mail: nil_va@pochta.ru

УДК 511.1

Ключевые слова: *управление рисками защищенности, информационно-вычислительная система, нечеткая когнитивная модель, ANFIS-модель, байесова модель.*

В статье представлены метод и комплексная модель управления рисками защищенности распределенных информационно-вычислительных систем на основе методологии нечеткого моделирования. Полученные научные результаты позволяют в условиях

¹ Научные результаты получены при продолжении исследований в рамках государственной поддержки Российским фондом фундаментальных исследований и Администрацией Смоленской области инициативных научных проектов № 10-07-97502, 13-07-97518 и Департаментом приоритетных направлений науки и технологий Министерства образования и науки РФ – грантами Президента РФ № МК-755.2012.10, МК-3603.2014.10.

возрастания сложности процессов, неопределенности и нечеткости данных, размытости и быстрого изменения целей комплексно анализировать сложные системы и процессы; определять набор исследуемых факторов системы и источники рисков; формировать перечень возможных рисков и их последствий; вырабатывать комплекс стабилизирующих мероприятий.

Управление рисками представляет собой одну из основных современных концепций управления сложными системами и процессами. Использование данной концепции обосновано особенностями построения и функционирования таких систем [1; 2]: сложность структуры, многокомпонентность, многочисленные протекающие процессы, учет большого количества параметров, динамичное изменение структуры, неполнота исходной информации, разнообразие воздействий рискообразующих системных и внешних факторов вероятностного и нестохастического характера, наличие сложных нелинейных зависимостей между параметрами, необходимость оперативного принятия управленческих решений, ограниченные возможности экспериментальных исследований, невозможность создания и использования общих аналитических моделей системы и процессов её функционирования, необходимость использования различных подходов к моделированию системы и использование результатов моделирования для оперативного управления системой, оперативное управление возможно в псевдореальном масштабе времени, обусловленном инерционностью системы.

Основными этапами управления рисками являются: идентификация; анализ; планирование мероприятий для противодействия рискам на каждом из уровней управления рисками; мониторинг [3, 4].

Разработанный метод управления рисками обобщенно состоит из следующих этапов:

- этап 1:* анализ исследуемой системы;
- этап 2:* оценка взаимосвязей системных факторов;
- этап 3:* определение влияния этих факторов на источники рисков;
- этап 4:* анализ влияния идентифицированных опасностей на риски;
- этап 5:* оценка и определение класса мероприятий по результатам оценки степени риска и возможных его последствий;
- этап 6:* выбор мероприятий в рамках выделенного класса;
- этап 7:* оценка воздействия выбранных мероприятий;
- этап 8:* моделирование динамики управления рисками и анализ возможных сценариев управления рисками;
- этап 9:* мониторинг рисков.

Основу предлагаемого метода составляет комплексная модель и способы ее построения, предназначенные для реализации соответствующих этапов метода управления рисками: нечеткая когнитивная модель оценки взаимосвязей системных факторов; нечеткие модели влияния системных факторов на источники рисков на основе нечетких нейронных продукционных ANFIS-сетей; нечеткие байесовы модели; нечеткие модели оценки и выбора класса мероприятий по предотвращению / снижению рисков на основе нейронечетких классификаторов; модели оценки и выбора мероприятий по предотвращению / снижению рисков на основе деревьев решений.

Литература

1. Аветисян А.И., Белеванцев А.А., Чуляев И.И. Технологии статического и динамического анализа уязвимостей программного обеспечения // Вопросы кибербезопасности. -2014. № 3 (4). -С. 20-28.
2. Морозов А.В., Майбуров Д.Г., Чуляев И.И. Информационное оружие: теория и практика применения // Проблемы безопасности российского общества. 2014. № 2. С. 177-183.
3. ГОСТ Р 51897–2002 Менеджмент риска. Термины и определения. Издания. Международный стандартный книжный номер. Использование и издательское оформление. М.: Изд-во стандартов, 2002. 5 с.
4. Макаренко С.И., Чуляев И.И. Терминологический базис в области информационного противоборства // Вопросы кибербезопасности. 2014. № 1 (2). С. 13-21.

ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ ЯДЕР В КОНВЕЙЕРНОЙ МИКРОПРОЦЕССОРНОЙ АРХИТЕКТУРЕ \mathfrak{Z} (КСИ)

А.Е. ШИРАЙ

ООО «СайнГрейн», г. Москва, e-mail: aesheerai@gmail.com

УДК 519.283

Ключевые слова: многоядерная конвейерная серверная архитектура, объект-сегмент, интерфейс клиент - сервер, вычислительное ядро, сервер памяти, ядро сервера памяти, потоковый процессор, конвейер команд, исполнительное устройство.

В работе рассматривается концепция организации вычислений в ядрах микропроцессора, базирующегося на конвейерной архитектуре (КСИ).

Рассмотренная в работах [1-3] концепция новой микропроцессорной архитектуры предназначена для построения вычислительных систем широкого спектра производительности и

применений (от мобильных до серверных). Она призвана обеспечить следующие возможности.

1. Удобство программирования:
 - a. Многопоточное программирование без конфликтов.
 - b. Аппаратную поддержку функционирования ОС, глобальных сервисов, виртуальных машин.
 - c. Аппаратную поддержку ООП на языках высокого уровня.
2. Высокая производительность:
 - a. Высокий темп работы с оперативной памятью.
 - b. Малые накладные расходы на работу ОС.
 - c. Высокий уровень масштабируемости и параллелизма вычислений.
3. Экономичность и высокий уровень масштабируемости архитектуры.
4. Аппаратную поддержку\у одновременной работы нескольких операционных систем.

Архитектура имеет две основные структурные части, в которых производится обработка информации – это Сервер памяти и Пул вычислительных ядер.

В Сервере памяти организуется функционирование множества глобальных объектов, обеспечивающих интерфейс с виртуальной памятью системы, поддержку работы ОС, взаимодействие с внешним полем, а также множество интерфейсов вида клиент – сервер для взаимодействия с объектами потоков вычислений, функционирующими в вычислительных ядрах. Сервер памяти функционально полноценная единица и может работать без привлечения вычислительных ядер, что позволяет организовать экономичный режим функционирования в мобильных устройствах.

Структура каждого ядра, как в СП, так и в ПВ, помимо специализированных частей, включает в себя одинаковую исполнительную часть (пул многопоточных исполнительных устройств), локальную память (ЛП), выполняющую роль кэш-памяти второго уровня, исполнительные устройства, выполняющие до четырех потоков с кэш-памятями первого уровня.

Организация ЛП ядра обеспечивает как функциональность кэш-памяти, так и строгую структурную организацию информации, соответствующую текущему контексту объектов – потоков вычислений, исключая хранение мусора и обеспечивающую их сохранение в объектах сервера памяти. Кэш-память первого уровня содержит только отображение объектов из ЛП. ЛП содержит именно контекст потоков, а не отображение глобальной виртуальной памяти. Исключения составляют фрагменты исполняемого кода, который соответствует уровню контекста одной из ОС.

Архитектура системы обеспечивает одновременное функционирование нескольких ОС без каких-либо дополнительных ухищрений.

Концепция архитектуры ядер обеспечивает поддержку параллельных вычислений на всех уровнях – от уровня параллельных процессов и потоков до уровня команд и ветвей вычислений. Для этого исполнительные устройства (ИУ) поддерживают:

- 1) защиту контекста потоков;
- 2) динамическое распределение ресурсов ИУ между активизированными на них потоками вычислений;
- 3) исполнение команд в режиме data-flow.

В частном случае один поток может захватить все ресурсы ИУ. В этом случае он может выполнять несколько параллельных ветвей вычислений, исполняемых в общем контексте. Это могут быть, например, тела цикла, ветвь отладчика, ветвь превентивных вычислений, некая процедура. Синхронизация параллельных ветвей средствами data-flow кардинально упрощает ее реализацию.

Data-flow подход не исключает возможность принудительного упорядочивания, что обеспечивает реализацию полноценных точных прерываний. Заметим, что число типов прерываний в ИУ меньше, чем в традиционных процессорах, так как они непосредственно не обращаются в глобальную память. Возможны только прерывания арифметики и прерывания нарушения защиты при обращении за пределы контекста.

Интересной особенностью системы команд является отсутствие команд переходов. Вместо них используются специальные команды условного присваивания. В частности, в качестве условий могут выступать и флаги ошибок от арифметических устройств в теге результата.

Модель вычислений предусматривает пошаговое выполнение программ. Шагом, как правило, является исполнение некоторого метода объекта, над структурой, переданной в качестве параметра, в контексте объекта. Таким образом обеспечивается присутствие данных и отсутствие циклов ожидания данных иное, чем между шагами вычислений. Интерфейсы объектов, с которыми работают потоки, могут обеспечивать превентивное выполнение запросов, что позволяет получить согласованный конвейер.

Пошаговая модель исполнения также предусматривает исполнение дальних переходов и вызов процедур как переход к исполнению соответствующего шага программы с коррекцией контекста.

Освобождение ИУ от потока и его активизация происходят практически моментально, что позволяет исполнять в одном ядре десятки потоков квазипараллельно.

Организация вычислений и данных в памяти позволяет работать, либо без «мусора», либо кардинально упростить создание сборщиков.

Для внедрения современных процессоров предусматривают возможность использования существующих средств разработки ПО, а то и полную поддержку системы команд других процессоров. Так, китайские процессоры Loongson и Godson, а также российские Эльбрус имеют средства битовой компиляции для системы команд X86.

Архитектура, которую назовем Ξ (КСИ), так как в ней используется клиент-сервер интерфейс с памятью, ориентирована на использование ООП. Поэтому в качестве входных программных кодов для нее, наряду с native instruction set, логичнее взять за основу байт код (Java, Dot-net CLI) и соответствующую организацию файла исполняемого кода. В результате создания специализированных библиотек можно будет реализовать специальные расширения для оптимизации, а также реализовать битовую компиляцию и набор интерфейсов на интерпретаторе системы.

Литература

1. Ширай А.Е. Системная поддержка вычислений в Многоядерной конвейерной серверной архитектуре // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конференции. Смоленск: СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 106 -109.

2. Ширай А.Е, Гайдаенко Т.И., Провоторова А.О. Аппаратная поддержка векторно-матричной модели данных // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конференции. Смоленск: СмолГУ, 2012. Вып. 13. С. 135 -138

3. Ширай А.Е. Использование объектно-ориентированного подхода в архитектуре многоядерного микропроцессора для ускорения параллельных конвейерных вычислений // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конференции. Смоленск: СмолГУ, 2011. Вып. 12. С. 141 -145.

4. http://www.opensparc.net/pubs/t2/docs/OpenSPARCT2_Core_Micro_Arch.pdf.

5. http://www.spscicom.org/ScicomP16/presentations/Power7_Performance_Overview.pdf.

СЕКЦИЯ 3

Математика и её приложения

О ТЕОРЕМЕ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В.М. АДУКОВ, А.А. САВЕЛЬЕВА

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск,
e-mail: adukovvm@susu.ac.ru, savelyevanastya@mail.ru

УДК 589.12

Ключевые слова: *линейные разностные уравнения, теорема Пуанкаре, асимптотическое поведение решений.*

В докладе изучается асимптотическое поведение решений линейного разностного уравнения третьего порядка с предельно постоянными коэффициентами в предположении, что выполнено условие Буслаевых. Получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых справедливо утверждение классической теоремы Пуанкаре.

Линейное разностное уравнение

$$u(n+k) + a_1(n)u(n+k-1) + \dots + a_k(n)u(n) = 0$$

называется уравнением с предельно постоянными коэффициентами или уравнением Пуанкаре, если существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i(n) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, k$.

Многочлен $\lambda^k + \alpha_1 \lambda^{k-1} + \dots + \alpha_k$ называется *характеристическим многочленом* уравнения, а его корни – *характеристическими корнями*.

Пусть последовательность $\{u(n)\}_{n=0}^{\infty}$ является решением разностного уравнения с предельно постоянными коэффициентами, для которого все характеристические корни различны по модулю. Тогда либо $u(n) = 0$ для всех $n \geq n_0$, либо существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n+1)}{u(n)}$ и этот предел равен одному из характеристических корней. Это утверждение есть классическая теорема Пуанкаре – одна из самых тонких теорем в теории линейных разностных уравнений.

Целью работы является обобщение теоремы Пуанкаре на случай, когда характеристические корни могут иметь одинаковый модуль. Рассматривается линейное разностное уравнение третьего порядка

$$u(n+3) + [a + \alpha(n)]u(n+2) + [b + \beta(n)]u(n+1) + [c + \gamma(n)]u(n) = 0, \quad (1)$$

с предельно постоянными коэффициентами ($\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = 0$) при выполнении условий Буслаевых [1]:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha(n)|} \leq q < 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\beta(n)|} \leq q < 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\gamma(n)|} \leq q < 1. \quad (2)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни характеристического многочлена уравнения (1). Пронумеруем их так, чтобы $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$. Условие (2) гарантирует, что производящая функция $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^n$ любого решения $\{u(n)\}_{n=0}^{\infty}$ будет мероморфной функцией в некотором круге $|z| < q^{-1}R_0$ с возможными полюсами в точках $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}$ [1]. Это позволяет применить к исследуемой проблеме теорию сходимости последней промежуточной строки таблицы Паде, разработанную в [2].

В следующей теореме перечислены все случаи расположения характеристических корней уравнения, для которых остается в силе утверждение классической теоремы Пуанкаре.

Теорема. Для нетривиального решения $\{u(n)\}_{n=0}^{\infty}$ уравнения (1) при выполнении условий Буслаевых (2) предел отношения $\frac{u(n+1)}{u(n)}$ существует тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих соотношений:

- 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n+1)}{u(n)} = \lambda_1$;
- 2) $\lambda_1 = \lambda_2$, $|\lambda_1| < |\lambda_3|$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n+1)}{u(n)}$ равен λ_1 или λ_3 ;
- 3) $\lambda_2 = \lambda_3$, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n+1)}{u(n)}$ равен λ_1 или λ_2 ;
- 4) $|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n+1)}{u(n)}$ равен λ_1 , или λ_2 , или λ_3 .

Литература

1. Буслаев В.И., Буслаева С.Ф. О теореме Пуанкаре о разностных уравнениях // Математические заметки. 2005. Т. 78, № 6. С. 877–882.
2. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Pade table // J. Approx. Theory. 2003. Vol. 122. P. 160 – 207.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.М. АДУКОВ, А.С. ФАДЕЕВА

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск,
e-mail: adukovvm@susu.ac.ru, fadeevaas@susu.ac.ru

УДК 517.53

Ключевые слова: *краевые задачи для аналитических функций, задача факторизации Винера - Хопфа, матричная краевая задача Римана, частные индексы.*

В докладе изучается устойчивость задачи факторизации Винера – Хопфа для треугольной матрицы-функции второго порядка при малых возмущениях, сохраняющих треугольную структуру матрицы. Получен эффективно проверяемый критерий устойчивости частных индексов. Результаты могут быть использованы для разработки устойчивых алгоритмов приближенного решения задачи факторизации.

В теории краевой задачи Римана для вектора классическим результатом является теорема Гохберга – Крейна – Боярского об устойчивости частных индексов: правые частные индексы $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_n$ матрицы-функции $A(t)$ порядка n устойчивы тогда и только тогда, когда $\rho_n - \rho_1 \leq 1$.

Поскольку до настоящего времени в общем случае нет способов вычисления частных индексов, эта теорема не может быть использована для эффективной проверки устойчивости. Кроме того, для приложений важно иметь критерий устойчивости не только для произвольных малых возмущений матрицы-функции, но и для тех из них, которые сохраняют структуру данной матрицы-функции. В докладе мы получим такой эффективный критерий для класса треугольных матриц-функций второго порядка.

Пусть $A(t)$ – треугольная обратимая матрица-функция вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

с элементами из алгебры Винера W ;

$$a_{11}(t) = a_{11}^-(t)t^{v_1}a_{11}^+(t), \quad a_{22}(t) = a_{22}^-(t)t^{v_2}a_{22}^+(t),$$

– правая факторизация Винера – Хопфа диагональных элементов

матрицы;
$$\frac{t^{-v_1}a_{21}(t)}{a_{22}^-(t)a_{11}^+(t)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j t^j.$$

Теорема. Если достаточно малое возмущение $A(t)$ сохраняет ее треугольную структуру, то при $v = v_2 - v_1 \leq 1$ матрица-функция $A(t)$ имеет устойчивые индексы $\rho_1 = v_1$, $\rho_2 = v_2$.

При $v \geq 2$ индексы $A(t)$ устойчивы тогда и только тогда, когда теплицева матрица

$$T = \begin{pmatrix} b_l & b_{l-1} & \cdots & b_1 \\ b_{l+1} & b_l & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{v-1} & b_{v-2} & \cdots & b_{v-l} \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг l . Здесь $l = \left[\frac{v}{2} \right] - 1$ и $\left[\frac{v}{2} \right]$ – целая часть числа $\frac{v}{2}$.

При выполнении этого условия $\rho_1 = v_1 + l$, $\rho_2 = v_2 - l$.

Доказательство теоремы основано на явных формулах для частных индексов, полученных в [1]. Отметим, что критерий устойчивости остается в силе для любых достаточно малых возмущений $A(t)$.

Литература

1. Адуков В.М. О классах матриц-функций, допускающих явное решение задачи факторизации Винера – Хопфа // Известия Челябинского научного центра. 2008. Вып. 3(41). С. 12 -17.

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ РЕКЛАМНОГО БЮДЖЕТА

Н.В. АДУКОВА

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск,
e-mail: adnatasha94@mail.ru

УДК 519.863

Ключевые слова: дискретная модель оптимального управления, оптимальные расходы на рекламу, динамическое программирование.

Рассмотрена дискретная модель определения оптимальных расходов на рекламу компании - монополиста. Поставлена задача оптимального управления в дискретном времени. Методом динамического программирования получено ее решение. Алгоритм реализован в пакете Maple. Рассмотрены модельные примеры. Результаты работы позволяют расширить применение математических методов при решении различных проблем в области маркетинга.

Рассматривается задача определения оптимального объема рекламных расходов компании-монополиста, реализующей уникальный продукт и доминирующей на рынке этого продукта. В виду дискретного характера принятия решения используется динамическая модель с дискретным временем.

Пусть $t = 1, \dots, T$ – моменты времени, когда принимались решения (шаги динамического процесса); T – число моментов принятия решения; $X(t)$ – доля рынка, принадлежащая компании в момент времени t ; X_0 – доля рынка в начальный момент времени; $u(t)$ – расходы на рекламу в момент времени t ; константа $\delta \in [0, 1]$ – коэффициент, показывающий, на сколько снижается доля рынка при отсутствии рекламы; ρ – параметр эффективности рекламы.

Исследуется дискретный аналог непрерывной модели из [1], а именно, изменение доли рынка $X(t)$ определяется разностным уравнением:

$$X(t+1) = (1-\delta)X(t) + \rho u(t)\sqrt{1-X(t)}, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad X(0) = X_0.$$

Расходы на рекламу $u(t)$ в момент времени t рассматриваются как управление данной динамической системой. Вся последовательность управлений представляет собой вектор $u = (u(0), u(1), \dots, u(T-1))$. Лицо, принимающее решение, использует управление $u(t)$ для того, чтобы максимизировать функционал

$$J(u) = \frac{mX(T)}{(1+r)^T} + \sum_{i=0}^{T-1} \frac{mX(i) - cu^2(i)}{(1+r)^i}, \quad (1)$$

представляющий собой прибыль компании (дисконтированную к начальному моменту времени) за вычетом квадрата расходов на рекламу.

В правой части (1) постоянная m – коэффициент перевода объема рынка в его денежный эквивалент, r – коэффициент дисконтирования на начальный момент времени, c – параметр, характеризующий стоимость рекламы.

Для решения поставленной задачи используется метод динамического программирования Беллмана [2]. Строятся $T+1$ функции Беллмана $V^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, T$. Решение задачи осуществляется в обратном порядке, начиная с шага T .

Функция Беллмана на шаге T имеет вид:

$$V^{(T)}(X(T)) = \frac{mX(T)}{(1+r)^T}.$$

Показано, что функция Беллмана на шаге k определяется по рекуррентной формуле:

$$V^{(k)} = \frac{m}{(1+r)^T} [\alpha_k X(k) + \beta_k],$$

где α_k, β_k находятся по формулам:

$$\alpha_k = (1+r)^{T-k} - \frac{m\rho^2\alpha_{k+1}^2}{4c(1+r)^{T-k}} + (1-\delta)\alpha_{k+1}, \quad \beta_k = \frac{m\rho^2\alpha_{k+1}^2}{4c(1+r)^{T-k}} + \beta_{k+1},$$

где $\alpha_T=1, \beta_T=0$. Оптимальное управление на шаге k находится по формуле

$$u^*(k) = \frac{m\rho\alpha_{k+1}\sqrt{1-X(k)}}{2c(1+r)^{T-k}}.$$

При этом максимум функционала $J(u)$ совпадает со значением функции Беллмана $V^{(0)}$, а именно $\max_u J(u) = V^{(0)}$.

Алгоритм решения задачи реализован в системе Maple. Так, при значениях параметров:

$$T=10, \quad r=0.01, \quad \delta=0.3, \quad m=0.3, \quad \rho=0.5, \quad c=1$$

для различных начальных значений X_0 (взятых от 0 до 1 с шагом 0.1) было построено оптимальное управление. На рисунке 1 показан график зависимости оптимальных расходов на рекламу $u^*(t)$ от времени t при различных начальных значениях X_0 .

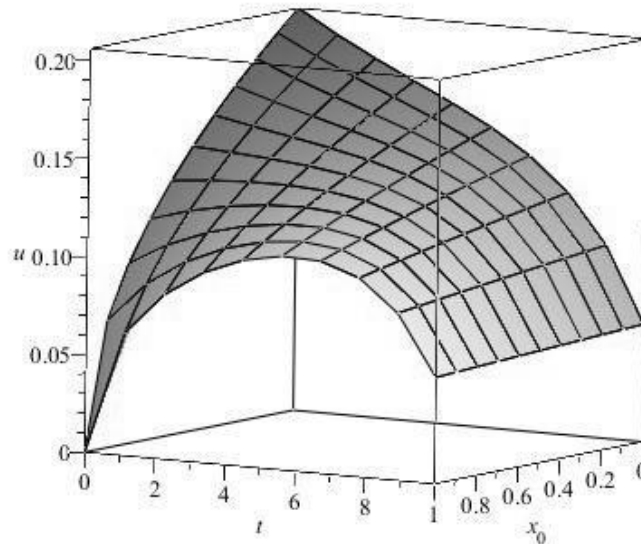


Рис. 1

Литература

1. Prasad A., Sethi S.P. Competitive Advertising under Uncertainty: Stochastic Differential Game Approach // Journal of Optimization Theory and Applications. 2004. V.123 (1). P. 163–185.

2. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов и приложения. М.: URSS, 2012. 304 с.

МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ СТАТИСТИКИ В СПОРТЕ

С.А. АНТОНОВА¹, Г.С. ЕВДОКИМОВА²

Смоленский государственный университет,
e-mail: antonovasvetlan@mail.ru¹, kaf-matem@smolgu.ru²

УДК 621.396.677.73

Ключевые слова: *прикладная статистика, рейтинговые классификации, вариационный ряд, выборочная средняя, ранжирование.*

В работе рассматривается нестандартный подход к ранжированию результатов турниров, разыгрываемых по круговой системе. В основе метода лежит использование главной числовой характеристики специального вариационного ряда.

Методы прикладной статистики активно используются в современном спорте для установления объективности и достоверности результатов соревнований. Высокая конкуренция приводит к плотному расположению показателей спортсменов, с чем и связана необходимость использовать более новые подходы к ранжированию результатов. Рассмотрим итоговую таблицу футбольной премьер-лиги России 2013-2014 года

Команды	ЦСКА	Зенит	Локомотив	Динамо	Краснодар	Спартак	Ростов	Кубань	Рубин	Амкар	Урал	Терек	Томь	Крылья советов	Волга	Анжи
Очки	64	63	59	52	50	50	39	38	38	38	34	33	31	29	21	20

Отметим, что Кубань, Рубин и Амкар набрали в чемпионате равное количество очков, так же как «Краснодар» и «Спартак». Кроме того, результаты первых двух команд мало отличаются друг от друга. Возникает вопрос о расстановке команд, учитывая «вес» набранных очков.

Составим для каждой команды нестандартный вариационный ряд, выбирая в качестве варианта набранные очки в домашних и гостевых встречах ($x_i = 0, 1, 2, 3, 4$ или 6), а в качестве частот - все очки, набранные этими командами во встречах друг с другом. Для полученных вариационных рядов находим их главную характеристику положения - выборочную среднюю, которая означает новое среднее число набранных командой очков в парных встречах с соперниками [1]. Так, выборочная средняя \bar{x}_1 для команды ЦСКА находится следующим образом:

$$\bar{x}_1 = (3 \cdot 63 + 6 \cdot 59 + 0 \cdot 52 + 3 \cdot 50 + 3 \cdot 50 + 4 \cdot 39 + 38 \cdot 6 + 38 \cdot 4 + 38 \cdot 6 + 34 \cdot 4 + 33 \cdot 3 + 31 \cdot 6 + 29 \cdot 6 + 21 \cdot 6 + 20 \cdot 4) / (64 + 63 + 59 + 52 + 50 + 50 + 39 + 38 + 38 + 38 + 34 + 33 + 31 + 29 + 21 + 20) \approx 3,65.$$

Аналогично находим значения для других команд:

$$\bar{x}_2 \approx 3,46; \bar{x}_3 \approx 3,40; \bar{x}_4 \approx 3,02; \bar{x}_5 \approx 2,71; \bar{x}_6 \approx 2,94; \bar{x}_7 \approx 2,29; \bar{x}_8 \approx 2,04; \bar{x}_9 \approx 2,20; \bar{x}_{10} \approx 2,06; \bar{x}_{11} \approx 1,77; \bar{x}_{12} \approx 2,03; \bar{x}_{13} \approx 1,7; \bar{x}_{14} \approx 1,51; \bar{x}_{15} \approx 1,07; \bar{x}_{16} \approx 1,26.$$

Учитывая полученные результаты, команды можно расположить в следующем порядке: ЦСКА, Zenит, Локомотив, Динамо, Спартак, Краснодар, Ростов, Рубин, Амкаp, Кубань, Терек, Урал, Томь, Крылья советов, Анжи, Волга. Таким образом видно, что выборочные средние очки парных встреч можно перевести на новые очки во всех матчах, а вычисления осуществить в матричном виде. Тогда предложенные вычисления примут вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 3 & 4 & 6 & 4 & 6 & 4 & 3 & 6 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 6 & 3 & 3 & 4 & 3 & 4 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 6 & 4 & 3 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 3 & 6 & 3 & 6 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 3 & 6 & 4 & 3 & 6 & 4 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 6 & 3 & 0 & 6 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 6 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 & 3 & 6 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 4 & 6 & 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 64 \\ 63 \\ 59 \\ 52 \\ 50 \\ 50 \\ 39 \\ 38 \\ 38 \\ 38 \\ 34 \\ 33 \\ 31 \\ 29 \\ 21 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2408 \\ 2345 \\ 2239 \\ 1991 \\ 1782 \\ 1934 \\ 1506 \\ 1341 \\ 1447 \\ 1355 \\ 1166 \\ 1340 \\ 1128 \\ 985 \\ 707 \\ 830 \end{pmatrix} = \frac{24504}{659} \begin{pmatrix} 64,8 \\ 63,1 \\ 60,3 \\ 53,5 \\ 47,9 \\ 52,0 \\ 40,5 \\ 36,1 \\ 38,8 \\ 36,4 \\ 31,5 \\ 36,0 \\ 30,3 \\ 26,5 \\ 19,0 \\ 22,3 \end{pmatrix}$$

Итоговая таблица примет вид:

Команды	ЦСКА	Zenит	Локомотив	Динамо	Краснодар	Спартак	Ростов	Кубань	Рубин	Амкаp	Урал	Терек	Томь	Крылья советов	Волга	Анжи
Очки	64	63	59	52	50	50	39	38	38	38	34	33	31	29	21	20
Новые очки	64,8	63,1	60,3	53,5	47,9	52,0	40,5	36,1	38,8	36,4	31,5	36,0	30,3	26,5	19,0	22,3
Рейтинг	1	2	3	4	6	5	7	10	8	9	12	11	13	14	16	15

Полученные рейтинги команд сильно коррелируют с традиционными рейтингами (коэффициент Спирмена равен 0,98). Поэтому предложенный подход может быть полезен для определения истинной силы той или иной команды [2]. Пересчитывание очков данным способом практически исключает возникновение спорных ситуаций в распределении мест, а также повышает значение последних матчей в национальном турнире.

Литература

1. Афанасьев В.В., Непряев И.Н. Методы математической статистики в спорте. Ярославль, 2005.
2. Масальгин Н.А. Математико-статистические методы в спорте. М., 1974.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ЕСТЕСТВЕННЫЙ ПРИРОСТ НАСЕЛЕНИЯ В РЕГИОНАХ РОССИИ

О.В. АСТАПЧИК

ООО «Инновационный центр ИТ», г. Смоленск,
e-mail: oksana.astapchik@list.ru

УДК 314.88

Ключевые слова: *статистика, демография, регрессионный анализ, естественный прирост населения.*

В докладе описана модель множественной линейной регрессии. Построенная модель описывает зависимость естественного прироста населения в регионах России от социально-экономических показателей.

Проблема сокращения численности населения России была и остается достаточно важной проблемой развития современной России.

Уровень роста численности населения отражается в показателе естественного прироста населения. Естественный прирост населения зависит от многих социально-экономических показателей.

Для построения математической модели в форме регрессионного уравнения были использованы данные Федеральной службы государственной статистики, отражающие показатель естественного прироста населения за 2013 год по 80 регионам России (www.gks.ru).

С использованием пакета SPSS было построено уравнение множественной линейной регрессии методом шагового отбора между показателем естественного прироста и другими социально-

экономическими факторами. Полученное уравнение множественной линейной регрессии имеет следующий вид:

$$Y = 1,56X_1 - 0,96X_2 + 0,71X_3 + 0,07X_4 - 0,38X_5 - 0,09X_6 - 1,05,$$

где Y – естественный прирост, X_1 – рождаемость, X_2 – смертность, X_3 – ожидаемая продолжительность жизни при рождении, X_4 – средняя заработная плата, X_5 – средняя цена жилья на первичном рынке, X_6 – заболеваемость на 1000 человек населения.

Направление связи между переменными определяется на основании знаков (отрицательный или положительный) коэффициентов регрессии. Таким образом, при увеличении значения рождаемости, средней продолжительности жизни и средней заработной платы естественный прирост населения увеличивается, но снижается при увеличении средней цены на жилье и заболеваемости населения.

Основным показателем значимости регрессионной модели является коэффициент детерминации, характеризующий качество полученной регрессионной прямой. Это качество выражается степенью соответствия между исходными данными и регрессионной моделью (расчетными данными). Мера определенности всегда находится в пределах интервала $[0;1]$.

Полученное значение коэффициента равно 0,97, что говорит о хорошей подгонке регрессионной прямой к исходным данным и означает, что построенная модель объясняет почти всю изменчивость соответствующих переменных.

Проверка значимости полученного уравнения регрессии проведена на основе F-критерия Фишера. Расчетное значение F-критерия с 18 и 61 степенями свободы значительно больше критического значения критерия при уровне значимости $\alpha = 0,05$. Следовательно, уравнение регрессии признается адекватным, построенная модель является значимой.

При помощи регрессионного анализа возможно решение задачи прогнозирования. Если функция регрессии определена, интерпретирована и обоснована и оценка точности регрессионного анализа соответствует требованиям, можно считать, что построенная модель и прогнозные значения обладают достаточной надежностью.

Прогнозные значения вычисляются путем подстановки в уравнение регрессии параметров значений объясняющих переменных. Прогнозные значения, полученные таким способом, являются средними значениями, которые можно ожидать.

Таким образом, с использованием пакета SPSS было построено уравнение множественной линейной регрессии для показателя естественного прироста населения, установлены показатели, оказывающие влияние на естественный прирост населения, была проведена оценка значимости полученной модели. Так как модель была

принята значимой, то ее можно использовать для прогнозирования показателя естественного прироста населения в различных регионах России.

Литература

1. Дорогонько Е.В. Обработка и анализ социологических данных с помощью пакета SPSS. Сургут: Издательский центр СурГУ, 2010.

2. Орлова И.В., Концевая Н.А., Турундаевский В.Б., Филонова Е.С., Уродовских В.Н. Многомерный статистический анализ в экономических задачах: компьютерное моделирование в SPSS. М.: Вузовский учебник, 2009.

О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ШЕСТИМЕРНОЙ СФЕРЫ

М.Б. БАНАРУ, Г.А. БАНАРУ

Смоленский государственный университет,

e-mail: mihail.banaru@yahoo.com

УДК 513.82

Ключевые слова: *почти эрмитова структура, приближенно келерова структура, почти контактная метрическая структура, гиперповерхность.*

Доказано, что почти контактная метрическая структура на τ -гиперповерхностях шестимерной сферы при малых τ является слабо косимплектической.

1. Шестимерная сфера S^6 с канонической приближенно келеровой структурой занимает особое место в эрмитовой геометрии. Дело в том, что каноническая приближенно келерова структура, индуцируемая на S^6 , – исторически первый пример отличной от келеровой почти эрмитовой структуры [1]. Количество опубликованных в серьезных математических журналах статей о различных аспектах геометрии приближенно келеровой шестимерной сферы исчисляется сотнями. Среди них как работы классиков эрмитовой геометрии (А. Грей, Е. Калаби, В.Ф. Кириченко, К. Секигава), так и статьи многих других геометров из самых разных стран. Отметим, что новый обзор [2] об эрмитовой геометрии шестимерных многообразий содержит множество разнообразных результатов, связанных с геометрией сферы S^6 .

2. В статье [3] А. Абу-Салим и М. Банару рассмотрели вопрос о виде почти контактной метрической структуры на ориентируемой 1-гиперповерхности (т.е. на гиперповерхности с типовым числом один) приближенно келеровой сферы S^6 . Было доказано, что почти контактная

метрическая структура на такой гиперповерхности является слабо косимплектической. В данной заметке этот факт распространен и на вполне геодезические гиперповерхности (или на 0-гиперповерхности) сферы S^6 . С учетом упомянутого выше результата А. Абу-Салима и М. Банару получается следующее утверждение.

Теорема. Пусть τ – типовое число ориентируемой гиперповерхности приближенно келеровой шестимерной сферы S^6 . Тогда условие $\tau \leq 1$ является необходимым и достаточным для того, чтобы почти контактная метрическая структура на этой гиперповерхности была слабо косимплектической.

3. Отметим, что данная теорема является обобщением ряда результатов, полученных в последнее время авторами о почти контактных метрических гиперповерхностях келеровых, приближенно келеровых и эрмитовых многообразий (см., например, [4; 5; 6]). Кроме того, эта теорема исчерпывающе решает задачу о виде почти контактной метрической структуры, индуцируемой на ориентируемых гиперповерхностях сферы S^6 с малыми типовыми числами. Поэтому в конце этой заметки мы формулируем такую задачу: охарактеризовать почти контактную метрическую структуру на τ -гиперповерхности приближенно келеровой шестимерной сферы в случае, когда $\tau \geq 2$. Разумеется, такая задача может быть решена и в несколько этапов. Случаи $\tau = 2$ и $\tau = 5$, очевидно, самые простые.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Ахмаду Абу-Салиму (университет Аль Аль-Байт, Иордания) за содержательные дискуссии о геометрии гиперповерхностей шестимерной сферы, послужившие отправной точкой для написания данной заметки.

Литература

1. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный дом, 2013. – 458 с.
2. Банару М.Б. Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 126. С. 10 -61.
3. Abu-Saleem A., Banaru M. On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2014. V. 8, № 1. P.35-46.
4. Banaru M., Banaru G. A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. N 1(74). P. 23 -32.
5. Банару М.Б. О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в 6-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. №10. С. 13 -18.
6. Banaru M. Special Hermitian manifolds and the 1-cosymplectic hypersurfaces axiom // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 2014. V. 90, № 3. P. 504 -509.

О РАЗРЕШИМОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ ОДНОЙ ЧЕТЫРЁХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н.Н. БОГДАНОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: nadingioia@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: аналитическая функция, бианалитическая функция, четырёхэлементная задача типа Карлемана, интегральное уравнение типа Фредгольма.

В работе для одной из основных четырёхэлементных краевых задач типа задачи Карлемана в классах кусочно бианалитических функций получены условия, при выполнении которых рассматриваемая задача допускает решение в замкнутой форме (в интегралах типа Коши).

Пусть T^+ – конечная односвязная область на расширенной плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром L . Через T^- обозначим область, дополняющую $T^+ \cup L$ до полной плоскости, и для определённости положим, что начало координат принадлежит области T^+ . В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Рассматривается следующая краевая задача K_{42} . Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на линии скачков L следующим условиям:

$$A_{11}(t) \overline{\partial F^+(t)} + A_{12}(t) \partial F^+[\alpha(t)] = G_{11}(t) \overline{\partial F^-(t)} + G_{12}(t) \partial F^-[\alpha(t)] + g_1(t), \quad (1)$$

$$A_{21}(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} + A_{22}(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+} = G_{21}(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + G_{22}(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial n_-} + g_2(t), \quad (2)$$

где $A_{kj}(t)$, $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ ($k=1, 2$; $j=1, 2$) – заданные на L комплекснозначные функции класса $H(L)$ (Гёльдера), $\frac{\partial}{\partial n_+} \left(\frac{\partial}{\partial n_-} \right)$ – производная по внутренней (внешней) нормали к L , $\alpha(t)$ – прямой или обратный сдвиг контура L , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \quad (3)$$

причём $\alpha'(t) \in H(L)$, $L \in C_\mu^3$.

В работе [1] автором был разработан конструктивный алгоритм решения краевой задачи K_{42} при следующих ограничениях на коэффициенты краевых условий:

$$\Delta(t) \neq 0, \Delta_1(t) \neq 0, \Delta_2(t) \neq 0, V(t) \neq 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= A_{11}(t) \cdot \overline{G_{11}[\alpha(t)]} - \overline{A_{12}[\alpha(t)]} G_{12}(t), \quad \Delta_1(t) = A_{11}(t) \cdot \overline{A_{11}[\alpha(t)]} - A_{12}(t) \overline{A_{12}[\alpha(t)]}, \\ \Delta_2(t) &= G_{11}(t) \cdot \overline{G_{11}[\alpha(t)]} - G_{12}(t) \cdot \overline{G_{12}[\alpha(t)]}, \quad V(t) = \overline{A_{11}[\alpha(t)]} G_{12}(t) - A_{12}(t) \cdot \overline{G_{11}[\alpha(t)]}. \end{aligned}$$

Хорошо известно (см., например, [1; 3 - 9]), что в общем случае четырехэлементные краевые задачи даже в классах аналитических функций не решаются в так называемой замкнутой форме (в интегралах типа Коши). Однако во многих вопросах (например, для построения эффективных численных методов решения рассматриваемой задачи) важное значение имеет выявление частных случаев рассматриваемой задачи, когда она допускает решение в квадратурах.

Основной целью настоящего сообщения является установление некоторых частных случаев задачи K_{42} , допускающих решение в замкнутой форме.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: СГПУ, 1998. 344 с.
2. Богданова Н.Н. Об одной четырехэлементной краевой задаче типа задачи Карлемана для бианалитических функций в случае произвольного контура // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конференции. Смоленск: СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 124 -125.
3. Богданова Н.Н. Расулов К.М. О решении одной четырехэлементной краевой задачи типа задачи Карлемана для бианалитических функций в произвольных областях // Известия Смоленского государственного университета. 2013. № 4(24). С. 158 -165.
4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
7. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
8. Расулов К.М. Об одном методе конструктивного решения четырёхэлементной краевой задачи типа Римана в классах аналитических функций // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции. – СПб., 2004. – С. 71 -76.
9. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: СмолГУ, 2013. 189 с.

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И КОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ю.М. ВУВУНИКЯН

ГрГУ им. Я. Купалы, г. Гродно (Беларусь),
e-mail: vuv64@mail.ru

УДК 517.98

Ключевые слова: *полиномиальный системный оператор, композиция натурального числа, композиция натурального числа с ограничениями, тензорное произведение, тензорная степень, композиция операторов.*

Вводятся полиномиальные системные операторы и доказываются теоремы о тензорном произведении и композиции таких операторов.

В работах автора (см., например, [1]) был развит метод моделирования сложных нелинейных систем с помощью эволюционных операторов с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками. При этом одной из центральных теорем построенной теории является теорема о композиции полиномиальных эволюционных операторов. Недавно эта «алгебраическая часть» названной теоремы была обобщена на общий случай полиномиальных системных операторов.

Полиномиальным системным оператором степени k , действующим из векторного пространства X в векторное пространство Y , будем называть оператор A , определяемый равенством

$$Ax = \sum_{n=1}^k A_n x^{\otimes n} \quad (x \in X),$$

где A_n ($n=1,2,\dots,k$) – n -линейные операторы, действующие из пространства X^n в пространство Y .

Пусть A^1, A^2, \dots, A^m – полиномиальные системные операторы

степеней k_1, k_2, \dots, k_m соответственно: $A^j x = \sum_{n_j=1}^{k_j} A_{n_j} x^{\otimes n_j} \quad (j=1,2,\dots,m)$.

Изучим сначала тензорное произведение $\bigotimes_{j=1}^m A^j x$. Для этого рассмотрим понятие **композиции** натурального числа n , под которым понимается такой конечный набор $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ натуральных чисел, что $|\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

Натуральные числа n_1, n_2, \dots, n_m называются *частями композиции* числа n . Множество всех композиций натурального числа n с m частями будем обозначать $\Xi_{n,m}$. Введем также понятие *композиции с ограничениями*. Пусть $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ – фиксированный конечный

набор натуральных чисел. Будем говорить, что композиция $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \Xi_{n,m}$ удовлетворяет ограничению k , если $n_j \leq k_j$ ($j=1, 2, \dots, m$). Множество всех композиций натурального числа n с m частями, удовлетворяющих ограничению k , будем обозначать $\Xi_{n,m,\vec{k}}$.

Теорема 1. Пусть A^1, A^2, \dots, A^m – полиномиальные системные операторы степеней k_1, k_2, \dots, k_m соответственно:

$$A^j x = \sum_{n_j=1}^{k_j} A_{n_j} x^{\otimes n_j} \quad (j=1, 2, \dots, m).$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\bigotimes_{j=1}^m A^j x = \sum_{n=m}^{|\vec{k}|} \sum_{\alpha \in \Xi_{n,m,\vec{k}}} \bigotimes_{j=1}^m A_{n_j} x^{\otimes n_j},$$

где $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, $n = |\alpha| = n_1 + \dots + n_m$, $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$, $|\vec{k}| = k_1 + \dots + k_m$.

Из теоремы 1 получаем теорему о тензорных степенях оператора A .

Для этого обозначим через $\Xi_{n,m,k}^*$ множество всех композиций натурального числа n с m частями, каждая из которых не превосходит k .

Теорема 2. Пусть A – полиномиальный оператор степени k :

$$Ax = \sum_{n=1}^k A_n x^{\otimes n} \quad (x \in X).$$

Тогда для любого m справедлива следующая формула:

$$(Ax)^{\otimes m} = \sum_{n=m}^{km} \sum_{\alpha \in \Xi_{n,m,k}^*} \bigotimes_{j=1}^m A_{n_j} x^{\otimes n_j},$$

где $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, $n = |\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_m$.

Имеет место следующая теорема о композиции полиномиальных системных операторов:

Теорема 3. Пусть A и B – полиномиальные системные операторы степеней k и l соответственно:

$$Ax = \sum_{n=1}^k A_n x^{\otimes n} \quad (x \in X), \quad By = \sum_{m=1}^l A_m y^{\otimes m} \quad (y \in Y).$$

Тогда их композиция $C = B \circ A$ является полиномиальным системным оператором степени kl :

$$Cx = \sum_{n=1}^{kl} \sum_{m=1}^n \sum_{\alpha \in \Xi_{n,m,k}^*} B_m (A_{n_1} x^{\otimes n_1} \otimes A_{n_2} x^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes A_{n_m} x^{\otimes n_m}),$$

где $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, $|\alpha| = n$.

Литература

1. Вувуникян, Ю.М. Обобщенные функции и нелинейные эволюционные операторы. Гродно: ГрГУ, 2014. 308 с.

О СТРОЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ В ТОЧКЕ ∞ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ДВУЧЛЕННОГО ВИДА

С.А. ГОМОНОВ

Смоленский государственный университет

УДК 517.54

Ключевые слова: *полианалитическая функция, предельное множество, полианалитический полином.*

В статье рассматриваются свойства предельных множеств в точке ∞ полианалитических полиномов двучленного вида.

Известно, что предельное множество любого неконстантного полианалитического полинома одного переменного $P(z, \bar{z}) \in \mathbf{C}[z, \bar{z}] \setminus \mathbf{C}$ (п.а. полинома) в точке ∞ либо состоит из одной точки ∞ , либо является объединением конечного числа нетривиальных полиномиальных линий, пополненных точкой ∞ [1; 2]. При этом нахождение конкретного числа и конкретного вида этих полиномиальных линий – процесс достаточно продолжительный и громоздкий [4], хотя в ряде случаев [3, 5] по более специальному виду этого п.а. полинома $P(z, \bar{z})$ удается конкретизировать строение его $C(P(z, \bar{z}), \infty)$.

В данной статье выделяется из $\mathbf{C}[z, \bar{z}] \setminus \mathbf{C}$ весьма обширный класс п.а. полиномов, для которых подобная необременительная конкретизация их предельных множеств в точке ∞ может быть осуществлена.

Определение. Полианалитическим полиномом двучленного вида будем называть всякий многочлен $P(z, \bar{z})$ из кольца $\mathbf{C}[z, \bar{z}]$, представимый в следующем виде

$$P(z, \bar{z}) = p_1(z) \cdot p_2(\bar{z}) + p_3(z) \cdot p_4(\bar{z}) = \begin{vmatrix} p_1(z) & -p_4(\bar{z}) \\ p_3(z) & p_2(\bar{z}) \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где $p_1(z), p_2(z), p_3(z), p_4(z) \in \mathbf{C}[z]$ – произвольные аналитические полиномы одного переменного z .

Перечислим некоторые свойства предельных множеств в точке ∞ п.а. полиномов вида (1).

1. Для всякого отличного от константы п.а. полинома $P(z, \bar{z})$ (в частности, и для п.а. полинома вида (1))

$$\infty \in C(P(z, \bar{z}), \infty).$$

2. Чтобы неконстантный п.а. полином вида (1)

$$P(z, \bar{z}) = (a_l z^l + \dots + a_0) \cdot (b_m \bar{z}^m + \dots + b_0) + (c_k z^k + \dots + c_0) (d_s \bar{z}^s + \dots + d_0), \quad (2)$$

где $a_l, b_m, c_k, d_s \neq 0$, имел в точке ∞ конечные предельные значения, необходимо, но недостаточно выполнение двух условий:

- а) $l + m = k + s$;
- б) $|a_l| \cdot |b_m| = |c_k| \cdot |d_s|$.

3. Всякая последовательность (z_n) , порождающая конечную точку предельного множества неконстантного п.а. полинома вида (2) в его точке ∞ , имеет хотя бы одну подпоследовательность (z_{q_n}) , для которой

последовательность $\left(\frac{\bar{z}_{q_n}}{z_{q_n}} \right)$ сходится к одному из значений $\sqrt[m-s]{\frac{c_k \cdot d_s}{a_l \cdot b_m}}$,

считая для определенности, что $m \geq s$.

4. Если (z_n) порождает конечный элемент предельного множества в точке ∞ неконстантного п.а. полинома $P(z, \bar{z})$ вида (2), то всякая последовательность (\tilde{z}_n) вида

$$(\tilde{z}_n) = \left(z_n + \frac{t}{z_n^{l+m-1}} \right)$$

(с точностью до перехода к подпоследовательности) при любом фиксированном $t \in \mathbb{C}$ порождает конечный элемент предельного множества $C(P(z, \bar{z}), \infty)$, а значит, вместе с каждым конечным элементом $l \in C(P(z, \bar{z}), \infty)$ в $C(P(z, \bar{z}), \infty)$ присутствует (как часть этого множества) целая прямая, проходящая через точку l .

Замечание. Доказательства свойств 1-4 аналогичны обоснованию сходных результатов в [2, 3, 5].

Теорема. *Предельное множество в точке ∞ любого п.а. полинома вида (1) или состоит из одной точки (конечной, если этот многочлен тождественен константе), или представляет объединение конечного числа прямых комплексной плоскости, пополненных точкой ∞ , причем количество этих прямых не превосходит числа*

$$2 \min \{ \deg_z P(z, \bar{z}), \deg_{\bar{z}} P(z, \bar{z}) \}.$$

Литература

1. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1991. Т. 85. С. 187–254.
2. Гомонов С.А. О структуре предельных множеств полианалитических функций в изолированных особых точках // Mathematica Montisnigri. Подгорица, 1995. Vol. 5(1995). Ежегодник Черногорского университета. С. 27–64.

3. Гомонов С.А. О некоторых методах исследования предельных множеств бианалитических функций в их изолированных особых точках // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям / Смоленский гос. ун-т. Смоленск, 2006. Вып. 7. С. 38–58.

4. Гомонов С.А. О применении алгебраических функций к исследованию предельных множеств в точке ∞ полианалитических полиномов // Некоторые вопросы теории полианалитических функций и их обобщений / СГПИ. Смоленск, 1991. С. 16–42.

5. Гомонов С.А. О строении предельных множеств полианалитических функций двучленного вида // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции / СГПУ. Смоленск, 2002. С. 125–127.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В АЛГОРИТМЕ RSA

С.А. ГОМОНОВ, А.Л. АРЗАМАСЦЕВ
Смоленский государственный университет

УДК 511

Ключевые слова: *простые числа, свойства простых чисел, система вычетов, функция Эйлера, числовые сравнения, НОД, алгоритм RSA.*

В статье рассматривается применение некоторых свойств простых чисел в организации алгоритма RSA, имеющего в настоящее время большое практическое применение.

1. Со школьной скамьи нам известны понятия простого и составного числа, тем не менее приведем аккуратные определения этих фундаментальных понятий.

Определение 1. Натуральное число p называется простым, если оно имеет лишь два натуральных несовпадающих делителя, а именно 1 и p . Натуральное число называется составным, если оно превосходит единицу и не является простым (считается, что число 1 – не простое и не составное); таким образом, число $n \in \mathbb{N}$ является составным тогда и только тогда, когда оно допускает так называемое нетривиальное разложение $n = ab$, где целые числа a, b лежат строго между 1 и n .

Многие свойства простых чисел известны уже более двух тысяч лет, но многие получены совсем недавно, а некоторые все еще ждут своего первооткрывателя. Напомним некоторые замечательные теоремы о простых числах [2].

Теорема 1. *Всякое натуральное число, большее единицы, имеет хотя бы один простой делитель.*

Теорема 2 (основная теорема арифметики). Каждое натуральное число n , отличное от единицы, можно единственным образом представить в следующем виде

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

где все показатели α_k – натуральные числа, а числа $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ – простые.

Теорема 3 (Евклида). Простых чисел бесконечно много.

Многие свойства простых чисел известны достаточно давно. Так, например, в свое время замечательным и неожиданным дополнением к теореме Евклида явилась теорема 1837 году П. Дирихле.

Теорема 4 (Дирихле). Для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b арифметическая прогрессия

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots$$

содержит бесконечно много простых чисел.

И уже в наше время, как настоящий подарок для математиков, истосковавшихся по простым и всем понятным результатам, появилась теорема, опубликованная в 2003 году двумя молодыми математиками, – Бенем Грином (родился в 1977 г.) и Теренсом Гао (родился в 1975 г.) [6].

Теорема 5 (теорема Грина – Тао). Последовательность простых чисел содержит арифметические прогрессии произвольной длины.

Теоремы 2–5, конечно, замечательные, но практическое их применение всегда было под большим вопросом.

2. Однако еще в античные времена стало понятно, что поиск делителей конкретного натурального числа n , а значит, и выяснение является ли n составным или простым, требует (при большом n) весьма значительных объемов вычислений, так что придуманный Леонардо Пизанским (Фибоначчи) метод, уменьшающий число проверок и заключающийся в том, что для $n \geq 4$ достаточно в качестве чисел, «подозрительных» на делители числа n , перебирать все натуральные числа (а можно только простые!) промежутка $[2; \sqrt{n}]$, давал некоторое уменьшение объема вычислительной работы [2]. Наука и практика знают довольно много случаев, когда недостаток вдруг превращается в достоинство, и вот в середине XX века естественные сложности в разложении на простые множители неожиданно стали весьма ценным фактором в создании практически полезных алгоритмов шифрования и дешифрования.

Оказалось, что, несмотря на мощные быстродействующие компьютеры, разложение натуральных многозначных чисел на простые множители – процесс все равно весьма небыстрый, а значит, и недешевый. Так что знаменитый американский писатель и

популяризатор науки Мартин Гарднер не слишком рисковал в августе 1977 года, когда озаглавил свою статью в журнале «Scientific American» «Новый вид шифра, на расшифровку которого потребуются миллионы лет», но все же дал подсказку желающим расшифровать послание: надо найти разложение на простые множители весьма многозначного натурального числа, и тогда назначенная премия в 100 долларов безусловно достанется тому, кто первый получит правильный ответ.

Правильный ответ был получен лишь через 17 лет, его искала группа из 600 человек.

Зашифрованная фраза была прочитана и весь математический мир познакомился с алгоритмом RSA, названным так по именам его создателей: Рона Ривеста (Rivest), Ади Шамира (Shamir) и Лена Адлемана (Adleman) из Лаборатории информации Массачусетского технологического института [5].

Надо признать, что работа с алгоритмом RSA требует определенной подготовки и достаточно весомых знаний из классической теории чисел [1; 3]. А также стоит напомнить, что любая система шифрования называется системой «с открытым ключом», если ключ шифрования доступен любому отправителю, желающему передавать сообщения. Каждый получатель имеет свой открытый ключ. Сообщения всегда передаются в виде цифр, будь то ASCII-коды или какая-либо другая система.

Вот как может выглядеть общение неких господина А и господина В с помощью алгоритма RSA:

а) сначала господин А вычисляет значение n путем умножения двух несовпадающих простых чисел p и q ($n = pq$) и выбирает значение $e \in N$ так, чтобы $\text{НОД}(\varphi(n), e) = 1$. Напомним, что $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$. Данные, которые являются открытыми, это значение n и значение e (при этом ни при каких обстоятельствах нельзя выдавать значения p и q). Пара (n, e) является открытым ключом системы, а значения p и q называются RSA-числами. Затем господин А вычисляет единственное наименьшее натуральное число d , удовлетворяющее условию $d \cdot e \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$. Так как мы знаем, что $\text{НОД}(e, \varphi(n)) = 1$, то класс вычетов $\bar{e}_{\varphi(n)}$ обратим в кольце $\mathbf{Z}_{\varphi(n)}$, а значит, в этом классе действительно есть единственный наименьший положительный элемент d ;

б) это число d является закрытым ключом системы. Со своей стороны господин В использует открытый ключ (n, e) для шифрования сообщения для господина А (пусть это сообщение – некоторое натуральное число $m < n$) и находит по следующему правилу число $M = \text{ост}_n(m^e)$. Затем господин В отправляет число M господину А;

в) получив сообщение M , господин А вычисляет $\text{ост}_n M^d = \text{ост}_n (m^e)^d = \text{ост}_n m(\text{mod } n)$ и получает в качестве такового остатка именно «секретное» число m , т.е. сообщение расшифровано.

3. Почему работает RSA-алгоритм или каково его математическое обоснование?

RSA-алгоритм зашифровывает численное представление m некоторого сообщения с помощью двух достаточно больших несовпадающих простых чисел p и q . Возьмем $n = p \cdot q$ и пусть e – любое натуральное число со свойствами

а) $\text{НОД}(\varphi(n), e) = 1$;

б) $1 < e < \varphi(n) - 1$.

Пусть d – «обратный» элемент к числу e по модулю $\varphi(n)$ (он существует, так как $\text{НОД}(\varphi(n), e) = 1$), т.е. $d \cdot e \equiv 1(\text{mod } \varphi(n))$ и даже $1 < d < \varphi(n) - 1$.

Теперь послание $m \in [1; n - 1]$ шифруется числом $M = \text{ост}_n (m^e)$, а затем утверждается, что исходное сообщение m можно получить по правилу

$$m = \text{ост}_n M^d = \text{ост}_n (m^e)^d.$$

Докажем последнее утверждение, используя малую теорему Ферма и теорему Эйлера [2].

Рассмотрим 2 случая.

I. Если $(m, n) = 1$, то по теореме Эйлера

$$m^{\varphi(n)} \equiv 1(\text{mod } n).$$

Из сравнения $d \cdot e \equiv 1(\text{mod } \varphi(n))$ следует, что $d \cdot e - 1 \equiv 0(\text{mod } \varphi(n))$, а значит, $d \cdot e - 1 = k \cdot \varphi(n)$, где $k \in N_0$, но тогда $d \cdot e = k \cdot \varphi(n) + 1$, и значит, используя теорему Эйлера, имеем:

$$(m^e)^d = m^{ed} = m^{k\varphi(n)+1} = m^{k\varphi(n)} \cdot m = (m^{\varphi(n)})^k \equiv 1^k \cdot m = m = \text{ост}_n m(\text{mod } n),$$

так как $1 \leq m \leq n - 1$. Первый случай рассмотрен.

II. Пусть теперь $\text{НОД}(m, n) \neq 1$, а значит, так как $n = p \cdot q$, где p и q – простые несовпадающие, то: $\begin{cases} m : p \\ m \not: q \end{cases}$, либо $\begin{cases} m : q \\ m \not: p \end{cases}$, либо $\begin{cases} m : q \\ m : p \end{cases}$, причем последний случай исключаем, так как если $m : (pq)$, т.е. $m : n$, и мы получаем противоречие с условием $m \in [1; n - 1]$. Пусть теперь $\begin{cases} m : p \\ m \not: q \end{cases}$, тогда $m = r \cdot p$, где $r \in N$, а значит, $m \equiv 0(\text{mod } p)$, но тогда

$m^{de} \equiv 0 \pmod{p}$ и, таким образом, $m^{de} \equiv m \pmod{p}$, короче: $m^{de} - m = Ap$, где $A \in \mathbb{Z}$; с другой стороны:

$$(m^e)^d = m^{ed} = m^{k\varphi(n)+1} = (m^{\varphi(n)})^k \cdot m = (m^{(q-1)(p-1)})^k \cdot m = (m^{(q-1)})^{k(p-1)} \cdot m,$$

но $m \not\equiv q$ и q – простое, значит, по малой теореме Ферма $m^{(q-1)} \equiv 1 \pmod{q}$, значит

$$(m^e)^d = (m^{\varphi(n)})^k \cdot m = (m^{(q-1)})^{k(p-1)} \cdot m \equiv 1^{k(p-1)} \cdot m \equiv m \pmod{q},$$

то есть $m^{de} - m = Bq$, где $B \in \mathbb{Z}$, но из равенств $m^{de} - m = Ap$, $m^{de} - m = Bq$, где $A, B \in \mathbb{Z}$, следует, что $(m^{de} - m) : (pq)$, а ведь $pq = n$, значит, $m^{de} - m \equiv 0 \pmod{n}$, т.е. $\text{ост}_n m^{de} = \text{ост}_n m = m$, т.к. $1 \leq m \leq n-1$.

Аналогично рассматривается случай $\begin{cases} m \not\equiv q \\ m \not\equiv p \end{cases}$.

4. Теперь рассмотрим реализацию данного алгоритма в системе Mathematica.

Пример. Выбираем два простых несовпадающих числа p и q . Пусть $p = 7703$, а $q = 7919$ соответственно. Зашифруем слово «HELLO» («привет») и представим его в виде массива $b[i] = \{\text{"H"}, \text{"E"}, \text{"L"}, \text{"L"}, \text{"O"}\}$, где каждая буква соответствует номеру i . Затем нам надо перевести буквенное выражение в числовое. Для этого рассмотрим два массива $g[k]$ и $y[k]$, которые представляют собой английский алфавит и номера букв соответственно.

```
For[i = 1, i ≤ Length[b], i ++, For[k = 1, k ≤ Length[g], k ++,
  If[b[[i]] == [[k]], b[[i]] = y[[k]]]]].
```

Мы получили численное представление зашифрованного слова. Теперь найдем числа $n = pq$ и $m = (p-1)(q-1)$. Далее выберем наименьший (хотя можно выбрать и произвольный) открытый ключ e , для которого выполняется условие взаимной простоты $\text{НОД}(e, m) = 1$.

```
For[i = 2, i < m, i ++, If[GCD[i, m] == 1, {e = i, i = m}]],
```

где команда GCD возвращает наибольший общий делитель чисел.

Найдем закрытый ключ d , который является обратным элементом к числу e по модулю m $d = \text{PowerMod}[e, -1, m]$, где PowerMod в данном случае находит модульную инверсию числа e по модулю m . Вычислим шифротекст на основе открытого ключа и отправим его другому человеку

```
For[i = 1, i ≤ Length[b], i ++, c[[i]] = PowerMod[b[[i]], e, n]],
```

где $c[i]$ – пустой массив, размерность которого равна размерности массива $b[i]$, а $PowerMod$ возвращает $\text{ост}_n(b[i]^e)$. Получив зашифрованное сообщение, расшифруем его с помощью секретного ключа

$$\text{For}[i = 1, i \leq \text{Length}[b], i ++, b[[i]] = \text{PowerMod}[c[[i]], d, n]],$$

где на выходе получим массив $b[i] = \{8, 5, 12, 12, 15\}$, состоящий из цифр. Чтобы расшифровать текст, каждому числу сопоставим его «букву»

$$\text{For}[i = 1, i \leq \text{Length}[b], i ++, \text{For}[k = 1, k \leq \text{Length}[g], k ++, \\ \text{If}[b[[i]] == [[k]], b[[i]] = g[[k]]]].$$

На выходе получим массив $h[i] = \{\text{"H"}, \text{"E"}, \text{"L"}, \text{"L"}, \text{"O"}\}$, то есть исходное зашифрованное слово.

Почему мы можем доверять алгоритму RSA? Потенциальный шпион располагает значениями n и e , потому что они являются открытыми. Чтобы расшифровать сообщение, ему нужно также значение d , то есть закрытый ключ. Как мы показали в предыдущем примере, значение d получается из n и e . Чем же обусловлена безопасность? Напомним, что для построения d необходимо знать $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$, в частности, p и q . Для этого «достаточно» разложить n на простые множители p и q . Проблема для шпиона заключается в том, что разложение большого числа на простые множители является медленным и трудоемким процессом. Если n достаточно большое (состоящее более чем из 100 цифр), не существует известных способов нахождения p и q за разумное количество времени. В настоящее время простые числа, используемые для шифрования чрезвычайно конфиденциальных сообщений, состоят более чем из 200 цифр.

Алгоритм RSA требует много машинного времени и очень мощных процессоров. До 1980-х годов только правительства, армии и крупные предприятия имели достаточно мощные компьютеры для работы с RSA. В результате у них была фактически монополия на эффективное шифрование.

5. Диффи и Хеллман [5] предложили интересный способ использования шифрования с открытым ключом для проверки подлинности сообщения. В криптографических системах такого типа отправитель шифрует сообщение с помощью открытого ключа получателя, который в свою очередь использует свой закрытый ключ для расшифровки сообщения. Диффи и Хеллман заметили, что RSA и другие подобные алгоритмы обладают интересной симметрией. Закрытый ключ также можно использовать для шифрования сообщения,

а открытый – для расшифровки. Этот подход не усиливает безопасность – ведь открытый ключ доступен для всех – зато получатель может убедиться, что сообщение пришло от определенного отправителя, владельца закрытого ключа. Чтобы проверить подлинность отправителя сообщения, достаточно добавить к нормальному шифрованию дополнительные шаги.

1. Отправитель шифрует сообщение с помощью открытого ключа получателя. Этот первый шаг гарантирует конфиденциальность.

2. Отправитель снова шифрует сообщение, на этот раз с помощью своего закрытого ключа. Таким образом удостоверяется подлинность сообщения, оно «подписано».

3. Получатель использует открытый ключ отправителя, чтобы расшифровать шифр шага 2. Таким образом проверяется подлинность сообщения.

4. Получатель теперь использует свой закрытый ключ, чтобы расшифровать шифр шага 1.

Литература

1. Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. М.: МЦНМО, 2003. 385 с.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 384 с.
3. Марков А.А. Введение в теорию кодирования. М.: Наука, 1982. 192с.
4. Крендалл Р., Померанс К. Простые числа. М.: УРСС: Книжный дом «Либроком», 2011. – 664 с.
5. Гомес Ж. Математики, шпионы и хакеры. Кодирование и криптография // Мир математики. М.: Де Агостини. 2014. Т.2. 144 с.
6. Хуанхо Руэ. Искусство подсчета. Комбинаторика и перечисление // Мир математики. М.: Де Агостини. 2014. Т.34. 144 с.

О ПРИМЕНЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ В РЕШЕНИИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

С.А. ГОМОНОВ, Н.Г. СОЛОГУБОВ
Смоленский государственный университет

УДК 372.851.21

Ключевые слова: *классическое неравенство, система уравнений, критерий реализации неравенства в варианте равенства.*

В работе рассматриваются некоторые приемы решения систем уравнений с использованием критериев реализации некоторых классических нестрогих неравенств в варианте равенства.

Давно и хорошо известны многочисленные классические неравенства, часто используемые в весьма серьезных теоретических и прикладных исследованиях. Напомним некоторые из этих замечательных неравенств.

1. Неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right),$$

где $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ – любые действительные числа, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы (x_1, \dots, x_n) и (y_1, \dots, y_n) линейно зависимы, т.е. пропорциональны;

2. Неравенство между арифметическим и геометрическим средними:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}},$$

где $x_1, \dots, x_n \in [0; +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

3. Неравенство Гельдера:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$; если $p < 1$, но $p \neq 0$, то смысл неравенства меняют, ну а если $p < 0$, то все числа $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ должны быть положительны, и опять-таки равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ и $(y_1^p, y_2^p, \dots, y_n^p)$ пропорциональны. Есть еще и знаменитое неравенство Минковского и многие обобщения указанных выше неравенств [1–3]. Однако стоит отметить, что весьма часто математики, хорошо знающие и применяющие те или иные классические неравенства, не слишком внимательны к прилагаемым «дополнениям» ко многим из этих неравенств – к условиям реализации их в виде равенства, а ведь и эти дополнения могут оказать большую помощь при решении целого ряда задач, в том числе и при решении уравнений и систем уравнений, а также при нахождении наибольшего и наименьшего значения той или иной функции. Обратили на эти возможности внимание и использовали их, прежде всего математики–составители задач [3–5]. Приведем несколько примеров подобного использования неравенства Коши–Буняковского для решения систем уравнений.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 18. \end{cases}$$

Решение. Помогут нам два подсказанные уравнениями этой системы вектора $(1; -1)$ и $(x; y)$ и добавленное к системе всегда выполняющееся неравенство Коши–Буняковского, записанное для этих вспомогательных векторов:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 18; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 18, \\ |(1; -1) \cdot (x; y)| \leq \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 18, \\ |x - y| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 18, \\ 6 \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{18}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 18, \\ 6 \leq 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Неравенство Коши–Буняковского реализовалось в варианте равенства, а значит, векторы $(1; -1)$ и $(x; y)$ – пропорциональны, короче:

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 18, \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x, \\ x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -3. \end{cases}$$

Ответ: $(3; -3)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим векторы $(x^2; y^2; z^2)$ и $(1; 2; 2)$ и введем в систему неравенство Коши–Буняковского, записанное для этих векторов:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 3, \\ |(1, 2, 2) \cdot (x^2, y^2, z^2)| \leq \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{x^4 + y^4 + z^4}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 3, \\ \underbrace{3 \leq \sqrt{9} \cdot \sqrt{1}}_{\text{истинное соотношение в варианте равенства!}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 3, \\ \frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x^2, \\ z^2 = 2x^2, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 = 3, \\ y^2 = 2x^2, \\ z^2 = 2x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{3}, \\ y^2 = \frac{2}{3}, \\ z^2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Очевидно, что получили восемь решений, выписывать которые не станем.

Пример 3. Решить систему $\begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ 9x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим вспомогательные векторы $(3x; y)$ и $(1; 4)$, тогда:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ 9x^2 + y^2 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ 9x^2 + y^2 = 3, \\ |(3x; y) \cdot (1; 4)| \leq \sqrt{9x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ 9x^2 + y^2 = 3, \\ \underbrace{8 \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{17}}_{\text{ложное числовое неравенство}}; \end{cases}$$

т.е. система несовместна.

Ответ: система несовместна.

Похожие задачи могут быть придуманы для весьма многих классических неравенств, но, к сожалению, в школьном курсе математики эти неравенства не изучают, а в высшей школе не очень стараются на подобные задачи обращать внимание.

Стоит отметить, что методический прием добавления в систему уравнений классического неравенства позволяет сделать оформление решения задачи и достаточно кратким, и логически безупречным.

Литература

1. Харди Г.Г., Литлвуд Дж. И., Поля Г. Неравенства. М.: Из-во ЛКИ, 2008. 456 с.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.

3. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения: учебное пособие. М.: Дрофа, 2007. 254 с.

4. Гальперин И.М., Габович И.Г. Использование векторного неравенства Коши-Буняковского при решении задач по алгебре // Математика в школе. М., 1991. № 2. С. 54–57.

5. Халиков А. Примеры применения скалярного произведения // Математика в школе. М., 1991. № 9. С. 59–60.

О ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

И.А. ГУЛЯЩИХ

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
e-mail: giarist@mail.ru

УДК 517.956.223

Ключевые слова: *задача Неймана, полигармоническое уравнение.*

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения.

Рассмотрим задачу Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in R^n : |x| < 1\}$

$$\begin{aligned} \Delta^k u(x) &= f(x), & x \in S; \\ \frac{\partial^j u}{\partial \nu_{|S}^j} &= \varphi_j(s), & s \in \partial S, \quad j = \overline{1, k}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к ∂S . В работе [1] была рассмотрена более общая краевая задача, содержащая многочлены высокого порядка от нормальных производных в граничных условиях, а в работе [2] приводится решение задачи Дирихле для уравнения из [1]. В работе [3] дается способ нахождения решения задачи (1). Обозначим

$$\Lambda u = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}.$$

Теорема 1 [3, теорема 8]. *Решение задачи Неймана (1) имеет вид*

$$u(x) = \int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t} + C, \quad (2)$$

где $v(x)$ – решение следующей задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta^k v(x) &= (\Lambda + 2k)f(x), & x \in S; \\ v_{|S} &= \varphi_1(s), & \frac{\partial^j v}{\partial \nu_{|S}^j} = j\varphi_j(s) + \varphi_{j+1}(s), & s \in \partial S, \quad j = \overline{1, k-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из приведенной теоремы следует, что условие разрешимости задачи Неймана (1) записывается в виде $v(0) = 0$, где $v(x)$ - решение задачи Дирихле (3). Рассмотрим частный случай задачи (1), когда $f(x) = 0$ и обозначим $f_0 = \varphi_1$, $f_j = j\varphi_j + \varphi_{j+1}$ при $j = 1, \dots, k-1$. Для нахождения значения $v(0)$ - решения задачи Дирихле с функциями f_0, \dots, f_{k-1} на границе воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 2 [4, теорема 2]. Для всякой полигармонической в единичном шаре $S \subset R^n$ функции $v \in C^{k-1}(\bar{S})$ справедливо равенство

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} (h_k^0 v + h_k^1 v \frac{\partial v}{\partial \nu} + \dots + h_k^{k-1} v \frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}) ds_x, \quad (4)$$

где числа h_k^s являются коэффициентами разложения

многочлена $H_{k-1}(\lambda) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)!!} (\lambda-2) \dots (\lambda-2k+2)$ (здесь $H_0(\lambda) = 1$) по

факториальным степеням $\lambda^{[s]} = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-s+1)$:

$$H_{k-1}(\lambda) = h_k^{k-1} \lambda^{[k-1]} + h_k^{k-2} \lambda^{[k-2]} + \dots + h_k^1 \lambda^{[1]} + h_k^0.$$

Учитывая соотношения $f_0 = \varphi_1$, $f_j = j\varphi_j + \varphi_{j+1}$, где $j = 1, \dots, k-1$,

перепишем равенство (4) в виде $\int_{\partial S} \sum_{i=1}^k n_k^{i-1} \varphi_i(s) ds_x = 0$, где числа n_k^i

являются коэффициентами разложения многочлена $N_{k-1}(\lambda) = (\lambda-1) \dots (\lambda-2k+3)$ по факториальным степеням $\lambda^{[i]}$.

Лемма 1. Имеет место равенство

$$(\lambda-1) \dots (\lambda-2k+3) = (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{2k-i-2}{i} (2k-2i-3)!! \lambda^{[i]},$$

причем при $k=1$ многочлен слева равен 1.

Из леммы 1 следует, что

$$n_k^{i-1} = (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{2k-i-2}{i} (2k-2i-1)!!,$$

а значит, условие разрешимости однородной задачи Неймана имеет вид

$$\int_{\partial S} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{2k-i-1}{i} (2k-2i-1)!! \varphi_i(s) ds_x = 0.$$

Полученное условие согласуется с найденным в [3].

Литература

1. Карачик В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сибирский математический журнал. 1991. Т. 32, № 5. С. 51-58.
2. Карачик В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // ЖВМиМФ. 2014. Т. 54, № 7. С. 1149-1170.
3. Карачик В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. XVI, № 4(56). С. 61-74.
4. Карачик В.В. О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // Математические труды. 2013. Т.16, № 2. С. 69-88.

НОВЫЙ ПРИМЕР КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГАЗЕМАНА, ДОПУСКАЮЩЕЙ РЕШЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

О.Б. ДОЛГОПолова, Э.И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет, г. Минск,
e-mail: Dolgopolova@tut.by; Zverovich@bsu.by

УДК 517.948.32 + 517.544

Ключевые слова: риманова поверхность, краевые задачи, краевая задача Газемана, краевая задача Римана.

В статье рассматривается краевая задача Газемана в классах кусочно-аналитических функций. Приводится пример «нетривиальной» задачи Газемана, допускающей решение в замкнутой форме.

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ – простая гладкая замкнутая кривая, являющаяся общим краем ограниченной области D^+ и неограниченной области D^- .

Кривой L припишем ориентацию, оставляющую область D^+ слева. Зададим на L H – непрерывные функции $G: L \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$ и $g: L \rightarrow \mathbb{C}$, где $g(t)$ не равна тождественно нулю. Пусть еще задан сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\alpha: L \rightarrow L$, производная которого H – непрерывна и нигде не обращается в нуль. Краевой задачей Газемана называется задача, в которой требуется найти все кусочно-аналитические функции $\Phi^\pm: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ с линией разрыва L , на которой должно выполняться следующее краевое условие

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t) \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L. \quad (1)$$

При $z \rightarrow \infty$ должна иметь место асимптотика: $\Phi^-(z) = O(z^n)$, где $n \in \mathbb{N}$ – настолько большое, чтобы гарантировать безусловную разрешимость задачи (1). Картина разрешимости задачи (1) известна [1, с. 117 – 129; 2, с. 146 – 157]. Построение решений этой задачи сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода и квадратурам. Если дополнительно предположить, что гомеоморфизм $\alpha(t)$ допускает продолжение в область D^+ до однозначной аналитической в D^+ функции, то задача (1) становится задачей Римана, которая, как известно, допускает решение в «замкнутой форме» (т. е. в квадратурах). Такого рода примеры задачи Газемана условимся называть «тривиальными». Примеры «нетривиальных» задач Газемана в доступной авторам литературе не встречались. Цель статьи – привести такой пример.

С этой целью рассмотрим задачу (1), в которой L – единичная окружность $|t|=1$, ориентированная в направлении против часовой стрелки. В качестве диффеоморфизма $\alpha(t)$ возьмем непрерывную ветвь функции $\alpha(t) = \sqrt{\frac{t^2 - a}{1 - at^2}}$, где $0 < a < 1$, $|t|=1$, $\alpha(1) = 1$. Тогда функция $\Phi^+[\alpha(t)]$ допускает аналитическое продолжение на двулистный единичный круг (два круга $|z| \leq 1$, разрезанные по отрезку $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$, вдоль которого они склеены «накрест»). Для продолженной так функции $\Phi^+[\alpha(t)]$ мы введем новое обозначение, т.е. положим $\Phi^+[\alpha(t)] = F^+(z, w)$, где $w^2 = (z^2 - a)(1 - az^2)$. Аналогично положим $\Phi^-(z) = F^-(z, w)$. Уравнение $w^2 = (z^2 - a)(1 - az^2)$ задает риманову поверхность рода 1 (гомеоморфную тору), которую геометрически будем представлять себе в виде двух листов, разрезанных так, как показано на рисунке 1, и вдоль этих разрезов склеенных «накрест».

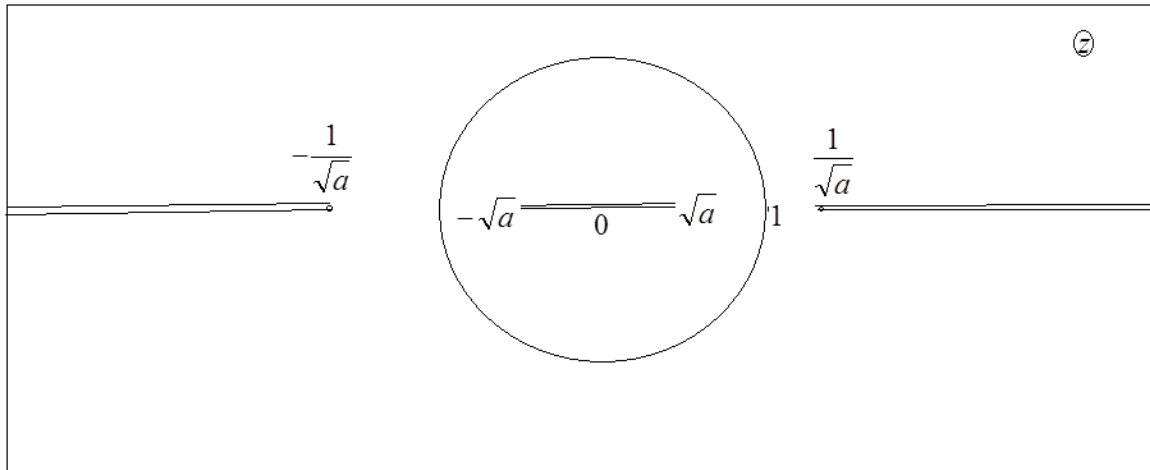


Рис. 1

Первым листом римановой поверхности назовем множество пар $(z, w(z))$, где $w(z) = \sqrt{(z^2 - a)(1 - az^2)}$ – непрерывная на разрезанной плоскости ветвь, удовлетворяющая условию $w(1) = 1 - a > 0$. Считаем, что краевое условие (1) задано на первом листе, и тогда оно имеет вид:

$$F^+(t, v) = G(t) F^-(t, v) + g(t), \quad |t|=1, \quad v = \sqrt{(t^2 - a)(1 - at^2)}. \quad (2)$$

На второй лист краевое условие продолжим до краевого условия с теми же коэффициентами:

$$F^+(t, -v) = G(t) F^-(t, -v) + g(t), \quad |t|=1. \quad (3)$$

Таким образом, мы получили задачу Римана на торе с краевыми условиями (2), (3), заданными на окружностях $|t|=1$, лежащих соответственно на первом и втором листах. Как известно [3], эта задача

допускает решение в замкнутой форме и безусловно разрешима, если $F^-(z, \pm w) = O(z^n)$ при $z \rightarrow \infty$ и достаточно большом $n \in N$. Если $F(z, w)$ – решение задачи (2), (3), то, заменив в краевых условиях v на $(-v)$, мы видим, что они только меняются местами. Значит, $F(z, -w)$ также является решением задачи (2), (3). Решения $F(z, \pm w)$ линейно независимы, так как в противном случае имело бы место тождество $\lambda F(z, w) + \mu F(z, -w) \equiv 0$, $\lambda + \mu = 1$. Умножив (2) на λ , а (3) на μ и сложив, получим тождество $g(t) \equiv 0$, что противоречит тому, что $g(t)$ не равна тождественно нулю.

Образовав полусумму краевых условий (2) и (3), мы видим, что функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}[F(z, w) + F(z, -w)] \quad (4)$$

также удовлетворяет краевым условиям (2), (3). К тому же очевидно, что она не меняется при замене w на $(-w)$, т. е. является четной функцией от w . Значит, функция (4) зависит только от z и от $w^2 = (z^2 - a)(1 - az^2)$, т. е. является *однозначной* аналитической функцией от z и, следовательно, служит решением задачи (1).

Литература

1. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
3. Зверович Э.И. Ядро Беенке-Штейна и решение в замкнутой форме краевой задачи Римана на торе // ДАН СССР. 1969. Т.188, № 1. С. 27 – 30.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Г.С. ЕВДОКИМОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: evgalsema@gmail.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: *надежность изделия, мгновенные выборочные моменты, уравнения Колмогорова, параметр, точечная оценка, метод максимального правдоподобия.*

В статье с помощью метода максимального правдоподобия представлено нахождение по мгновенным выборочным наблюдениям точечной оценки неизвестного параметра λ экспоненциального закона распределения.

Для повышения надежности изделий применяется статистический метод мгновенных выборочных наблюдений, главным преимуществом которого является то, что производится фиксация состояния изделия лишь в определенный момент. На основании обследования некоторой совокупности элементов в выборочные моменты изучаемого периода T производится оценка показателей, характеризующих ее состояние в целом. Выясним возможность получения оценок надежности при таком методе сбора информации. Рассмотрим систему, состоящую из N изделий, для каждого из которых время наработки на отказ примем распределенным по экспоненциальному закону с параметром λ . Время восстановления – по экспоненциальному закону с параметром μ . Информацию о состоянии изделий получим путем выборочного наблюдения в некоторые моменты t_0, t_1, \dots, t_k , принадлежащие промежутку времени T . Экспериментальный материал можно представить таблицей.

Моменты времени	0	1	2	...	k
Число отказавших изделий в момент	i_0	i_1	i_2	...	i_k

При случайном чередовании моментов наблюдения вероятности перехода для каждой пары имеют вид:

$$P_{i_{k-1}i_k} = \sum_{n=0}^N C_{i_{k-1}}^n P_{10}^n P_{11}^{i_{k-1}-n} C_{N-i_{k-1}}^{i_k-i_{k-1}+n} P_{01}^{i_k-i_{k-1}+n} P_{00}^{N-i_k-n}.$$

Функционирование отдельного элемента можно описать с помощью регенерирующего процесса с двумя состояниями – 0 (изделие исправно) и 1 (изделие восстанавливается). Введем обозначения:

$$P_{10}(t) = P \left\{ \begin{array}{l} \text{в момент } t \text{ изделие исправно/} \\ \text{в момент } 0 \text{ изделие восстанавливалось} \end{array} \right\}.$$

Аналогично можно представить $P_{00}(t), P_{10}(t), P_{11}(t)$.

Записав уравнения Колмогорова [1] для вероятностей состояний

$$P_{ij}(t) \quad (i, j=0,1) \text{ при начальном условии } P_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \text{ получим}$$

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, \quad P_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t},$$

$$P_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, \quad P_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

Запишем уравнение правдоподобия [2]

$$\sum_{k=1}^K \frac{\left(\sum_{n=0}^N C_{i_{k-1}}^n P_{10}^n P_{11}^{i_{k-1}-n} C_{N-i_{k-1}}^{i_k-i_{k-1}+n} P_{01}^{i_k-i_{k-1}+n} P_{00}^{N-i_k-n} \right)^\lambda}{\sum_{n=0}^N C_{i_{k-1}}^n P_{10}^n P_{11}^{i_{k-1}-n} C_{N-i_{k-1}}^{i_k-i_{k-1}+n} P_{01}^{i_k-i_{k-1}+n} P_{00}^{N-i_k-n}} = 0,$$

которое может быть решено одним из приближенных методов на основе конкретного статистического материала. Например, результаты мгновенных наблюдений над 27 снегоуборочными машинами в течение 260 часов представлены в таблице.

Моменты времени	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Число отказавших изделий в момент	3	1	0	2	5	2	0	3	5	2	4	3	2	5	3	8	2

Согласно статистическим данным уравнение правдоподобия запишется следующим образом:

$$\frac{P'_{31}}{P_{31}} + \frac{P'_{10}}{P_{10}} + \frac{P'_{02}}{P_{02}} + 2 \frac{P'_{25}}{P_{25}} + 2 \frac{P'_{52}}{P_{52}} + \frac{P'_{20}}{P_{20}} + \frac{P'_{35}}{P_{35}} + \frac{P'_{24}}{P_{24}} + \frac{P'_{45}}{P_{45}} + \frac{P'_{32}}{P_{32}} + \frac{P'_{53}}{P_{53}} + \frac{P'_{38}}{P_{38}} + \frac{P'_{82}}{P_{82}} = 0. \quad (1)$$

При определении отношений $\frac{P'_{lm}}{P_{lm}}$ появляется закономерность

$$\frac{P'_{lm}}{P_{lm}} = \begin{cases} 0, & \text{если } l = 0; \\ \frac{\mu m - (N - m)\lambda}{\lambda(\lambda + \mu)}, & \text{если } l \neq 0. \end{cases}$$

Заменяя каждое слагаемое в соотношении (1) соответствующим ему выражением, получим уравнение относительно λ :

$$\frac{42\mu - 336\lambda}{\lambda(\lambda + \mu)} = 0.$$

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 383 с.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.

АЕ-СТРУКТУРЫ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ КОЛЛИНЕАЦИЯМИ С ЦЕНТРАМИ НА ПРЯМОЙ $x = 0$ И Е-АЛГЕБРЫ

Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: ypy1101@gmail.com

УДК 514.14 + 514.16

Ключевые слова: *АЕ-структура, Е-алгебра, аффинная плоскость Сандлера, аффинная плоскость Грозе, центральная коллинеация, трансляция.*

Рассматриваются зависимости между наличием в АЕ-структурах центральных коллинеаций с центрами на прямой $x = 0$ и наличием

трансляций в направлении прямой $x = 0$. Найден алгебраический эквивалент $(0, 0)$ -транзитивности $\Pi_{x=0}$ -транзитивной АЕ-структуры.

Сформулирована нерешенная задача.

В работе рассматриваются АЕ-структуры $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ - аффинные инцидентностные структуры (АІ-структуры), допускающие координатизацию с помощью E -алгебр $R = \langle \mathbf{R}; T, 0, 1 \rangle$ типа $\langle 3, 0, 0 \rangle$ [1; 2]. АЕ-структуры являются наиболее общими аффинными инцидентностными структурами, допускающими координатизацию методом Холла [3]. Классу АЕ-структур принадлежат известные инцидентностные структуры: аффинные плоскости Сандлера, аффинные плоскости Грозе и аффинные плоскости.

Исследование АЕ-структур, допускающих наличие определенных центральных коллинеаций, было начато автором в работе [4]. Ниже мы продолжим изучение таких структур.

Определение 1. Алгебра $\langle \mathbf{R}; T, 0, 1 \rangle$ типа $\langle 3, 0, 0 \rangle$, удовлетворяющая условиям:

$$|\mathbf{R}| \geq 2,$$

$$(\forall a, b \in \mathbf{R}) T(a, 0, b) = T(0, a, b) = b,$$

$$(\forall a \in \mathbf{R}) T(1, a, 0) = T(a, 1, 0) = a,$$

называется E -алгеброй [1].

Тернарная операция T E -алгебры порождает три бинарные операции:

$$a \cdot b = T(a, b, 0);$$

$$a + b = T(1, a, b);$$

$$a \oplus b = T(a, 1, b),$$

через которые сама операция T может быть выражена в некоторых частных случаях.

Каждая E -алгебра $R = \langle \mathbf{R}; T, 0, 1 \rangle$ порождает АЕ-структуру $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$, ассоциированную с R , где:

$P = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$	- множество точек;
$L = \{[m, n] \mid m, n \in \mathbf{R}\} \cup \{[a] \mid a \in \mathbf{R}\}$	- множество прямых;
$(a, b) I [m, n] \Leftrightarrow T(m, a, n) = b;$ $(a, b) I [c] \Leftrightarrow a = c;$	- отношение инцидентности;
$[a, b] \parallel [c, d] \Leftrightarrow a = c;$ $(\forall a, b \in \mathbf{R}) [a] \parallel [b]$	- отношение параллельности.

Отношение параллельности является отношением эквивалентности на множестве прямых L и делит L на классы эквивалентности, называемые направлениями. Направление, содержащее прямую L ,

обозначается Π_L ; прямая из направления Π_L , проходящая через точку p , обозначается $p\Pi_L$.

Ниже мы будем употреблять имена, используемые для обозначения объектов в AE -структурах [3] (рис. 1):

для точек $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = (0, 1)$, $p_2 = (1, 0)$, $p_3 = (1, 1)$;

для направлений $\Pi_1 = p_0\Pi_{x=0}$, $\Pi_2 = p_0\Pi_{y=0}$, $\Pi_3 = p_0\Pi_{y=x}$;

для прямых $L_1 = p_0\Pi_1$, $L_2 = p_0\Pi_2$, $L_3 = p_0\Pi_3$, $L_4 = p_2\Pi_1$.

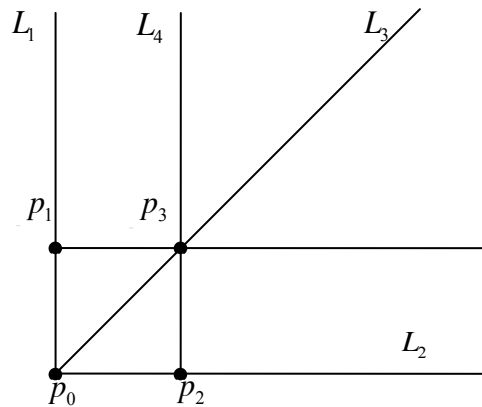


Рис. 1. Базовые элементы AE -структуры $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$

AE -структура S_R характеризуется следующими геометрическими свойствами:

(AE1) каждая точка p AE -структуры S_R инцидентна точно одной прямой $p\Pi_1$ направления Π_1 и точно одной прямой $p\Pi_2$ направления Π_2 ;

(AE2) каждая точка p прямой L_1 инцидентна точно одной прямой $p\Pi$ произвольного направления Π ;

(AE3) каждая прямая L направления Π_1 пересекает произвольную прямую M , не принадлежащую направлению Π_1 , в единственной точке;

(AE4) каждая прямая направления Π_2 пересекает прямую L_3 в единственной точке;

(AE5) существуют три точки p_0, p_1, p_2 , не инцидентные одной прямой, такие, что:

$p_0\Pi_1 = L_1$, $p_0\Pi_2 = L_2$, $p_1 I p_0\Pi_1$, $p_2 I p_0\Pi_2$, $\Pi_1 \neq \Pi_2$, $p_3 = p_2\Pi_1 \cap p_1\Pi_2$, $p_3 I p_0\Pi_3$, $\Pi_3 \neq \Pi_1$, $\Pi_3 \neq \Pi_2$, $p_0\Pi_3 = L_3$, $p_2\Pi_1 = L_4$ (рис. 1);

(AE6) мощность множества точек на произвольной прямой, мощность любого из направлений и мощность множества всех направлений без направления Π_1 ($(L / \parallel) \setminus \Pi_1$) совпадают.

Если AE -структура S_R конечна, число точек на прямой называется *порядком* AE -структуры.

Определение 2. Коллинеация α AE -структуры называется *невыврожденной дилатацией* [2], если для любой прямой L : $\alpha(L) \parallel L$.

Определение 3. Невырожденная дилатация α AE -структуры, обладающая инвариантной точкой o такой, что любая прямая L , проходящая через точку o , также инвариантна, называется *центральной коллинеацией*, или *коллинеацией с центром в точке o* , или *o -коллинеацией*.

Определение 4. AE -структура S называется *o -транзитивной*, если для любых двух точек p и q , отличных от точки o и инцидентных прямой, проходящей через точку o , существует центральная коллинеация γ AE -структуры S с центром в точке o , переводящая точку p в точку q .

В работе [3] найден алгебраический эквивалент $(0, 0)$ -транзитивности AE -структуры S .

Теорема 1. AE -структура S , ассоциированная с E -алгеброй $R = \langle \mathbf{R}; T, 0, 1 \rangle$, $(0, 0)$ -транзитивна тогда и только тогда, когда E -алгебра R удовлетворяет условиям:

- 1) $T(u, c, v) \cdot a = T(u, c \cdot a, v \cdot a)$;
- 2) $(c + v) \cdot a = c \cdot a + v \cdot a$;
- 3) алгебра $\langle \mathbf{R} \setminus \{0\}; \cdot, 1 \rangle$ является группой.

В теореме 1 описаны зависимости между наличием в AE -структуре S всевозможных центральных коллинеаций с фиксированным центром o и алгебраическими свойствами E -алгебры $R = \langle \mathbf{R}; T, 0, 1 \rangle$, координатирующей AE -структуру S . Ниже мы обсудим ряд вопросов, связанных с наличием в AE -структуре центральных коллинеаций с различными центрами.

Теорема 2. Пусть S_R - AE -структура, ассоциированная с E -алгеброй $R = \langle \mathbf{R}; T, 0, 1 \rangle$. Если AE -структура S_R p_0 -транзитивна ($p_0 = (0, 0)$), то:

($AE7$) существует точно одна прямая, проходящая через точку $q \neq p_0$ и точку p_0 .

Доказательство. Пусть (a, b) произвольная точка AE -структуры, отличная от точки $p_0 = (0, 0)$. Если $a = 0$, то искомой прямой является прямая $[0]$ (или $x = 0$). В противном случае таковой будет прямая $[b \cdot a^{-1}, 0]$ (или $y = (b \cdot a^{-1}) \cdot x$) в силу свойства 3 теоремы 1.

Теорема 3. Пусть S_R - AE -структура, ассоциированная с E -алгеброй $R = \langle \mathbf{R}; T, 0, 1 \rangle$. Если AE -структура S_R o -транзитивна для любой точки o инцидентной прямой L_1 (прямой с уравнением $x = 0$), то:

($AE8$) существует точно одна прямая, проходящая через произвольную точку q , инцидентную прямой L_1 , и точку p , отличную от q .

($AE9$) две произвольные прямые M и N из направлений Π_2 и Π_3 соответственно пересекаются в единственной точке.

Доказательство. (АЕ8). Если S_R - АЕ-структура порядка 2, то S_R является аффинной плоскостью Фано, для которой утверждение (АЕ8), очевидно, выполняется. Пусть теперь порядок S_R больше 2. Выберем на прямой L_1 точку o , отличную от точек p и p_0 , и рассмотрим o -коллинеацию γ , переводящую точку p в точку p_0 . При этом γ точку q переведет в некоторую точку q_0 . По теореме 2 существует единственная прямая L_0 , проходящая через точки p_0 и q_0 . Прямая $L = \gamma^{-1}(L_0)$ является искомой единственной прямой, проходящей через точки $p = \gamma^{-1}(p_0)$ и $q = \gamma^{-1}(q_0)$.

(АЕ9). Для аффинной плоскости Фано утверждение (АЕ9) выполняется. Пусть теперь порядок S_R больше 2. Выберем на прямой L_1 точку o , отличную от точек $p = N \cap L_1$ и p_0 , и рассмотрим o -коллинеацию γ , переводящую точку p в точку p_0 . При этом $\gamma(N) = L_3$. По свойству (АЕ4) прямая L_3 пересекается с прямой $\gamma(M) = M_0$ в единственной точке q_0 . Точка $q = \gamma^{-1}(q_0)$ является искомой единственной точкой, инцидентной прямым $M = \gamma^{-1}(M_0)$ и $N = \gamma^{-1}(L_3)$.

Теорема 4. Пусть S_R - АЕ-структура, ассоциированная с E -алгеброй $R = \langle R; T, 0, 1 \rangle$, o -транзитивная для любой точки o инцидентной прямой L_1 . Если S_R удовлетворяет условию

(АЕ10) существует точно одна прямая, проходящая через произвольную точку q , инцидентную прямой L_2 , и точку p , отличную от q , то АЕ-структура S_R является Π_1 -транзитивной.

Доказательство. На прямой L_4 выберем две различные точки $a_1 = (1, 1)$ и a_2 (рис. 2).

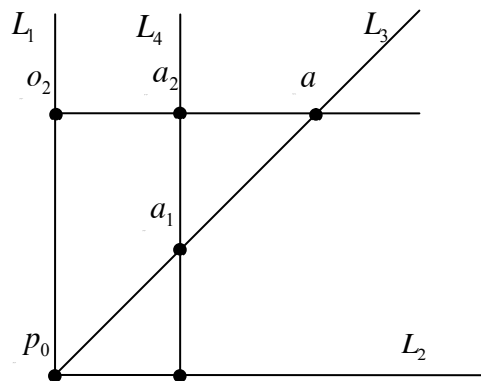


Рис. 2. Точки a_1 и a_2 на прямой L_4 АЕ-структуры $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$

Определим две центральные коллинеации γ_1 и γ_2 таким образом, чтобы их композиция $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ переводила точку a_1 в точку a_2 . Выберем

точки $a_2\Pi_2 \cap L_1 = o_2$ и $a_2\Pi_2 \cap L_3 = a$. В качестве γ_1 и γ_2 выберем соответственно p_0 -коллинеацию, переводящую точку a_1 в точку a , и o_2 -коллинеацию, переводящую точку a в точку a_2 . При этом $\gamma(a_1) = (\gamma_2 \circ \gamma_1)(a_1) = \gamma_2(\gamma_1(a_1)) = \gamma_2(a) = a_2$.

Пусть теперь b_1 - произвольная точка на прямой L_2 и $\gamma(b_1) = b_2$. По условию (AE10) через точки b_1 и b_2 проходит единственная прямая L . Докажем, что $L \parallel L_4$ ($L \in \Pi_1$).

От противного, пусть $L \not\parallel L_4$. Тогда прямые L и L_1 пересекаются в точке c_1 . Так как $\gamma(L_1) = L_1$ и $\gamma(L) = L$, то $\gamma(c_1) = c_1$. Учитывая, что коллинеация γ сохраняет отношение параллельности, получаем, что для любой прямой M , проходящей через точку c_1 , $\gamma(M) = M$. Поэтому $c_1 a_1 = \gamma(c_1 a_1) = c_1 \gamma(a_1) = c_1 a_2$ и, следовательно, $a_1 = a_2$, что противоречит условию.

Таким образом, любая прямая $L \in \Pi_1$ инвариантна относительно коллинеации γ . Поэтому коллинеация γ является трансляцией (переносом), переводящим точку a_1 в точку a_2 [2].

Так как точка a_2 выбиралась произвольно на прямой L_4 , то отсюда вытекает существование трансляции τ , переводящей произвольную точку a_1 в точку a_2 , инцидентную прямой $a_1\Pi_1$. Следовательно, AE-структура S_R является Π_1 -транзитивной ($\Pi_{x=0}$ -транзитивной) [2].

Замечание 1. Вопрос «Является ли AE-структура, o -транзитивная для любой точки o , инцидентной прямой L_1 , Π_1 -транзитивной?» остается открытым.

Теорема 5. Если ассоциированная с E-алгеброй $R = \langle \mathbf{R}; T, 0, 1 \rangle$ AE-структура S_R удовлетворяет условию (AE10) и o -транзитивна для любой точки o , инцидентной прямой L_1 , то E-алгебра R удовлетворяет условиям:

- 1) $T(a, b, c) = a \cdot b + c$;
- 2) $\langle \mathbf{R}; +, 0 \rangle$ - группа;
- 3) алгебра $\langle \mathbf{R} \setminus \{0\}; \cdot, 1 \rangle$ является группой;
- 4) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Доказательство следует из [2, теорема 1] и [3, теорема 1].

Теорема 6. AE-структура S_R , ассоциированная с E-алгеброй $R = \langle \mathbf{R}; T, 0, 1 \rangle$, $\Pi_{x=0}$ -транзитивна и $(0, 0)$ -транзитивна тогда и только тогда, когда R удовлетворяет условиям:

- 1) $T(a, b, c) = a \cdot b + c$;
- 2) $\langle \mathbf{R}; +, 0 \rangle$ - группа;
- 3) алгебра $\langle \mathbf{R} \setminus \{0\}; \cdot, 1 \rangle$ является группой;

$$4) (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Доказательство следует из [2, теорема 1] и [3, теорема 1].

Теорема 7. *AE-структура S_R , ассоциированная с E-алгеброй $R = \langle R; T, 0, 1 \rangle$, $\Pi_{x=0}$ -транзитивная и $(0, 0)$ -транзитивная, является аффинной плоскостью Грозе.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке аксиом AG-плоскости:

(AG1) Через любую точку проходит точно одна прямая направления Π_3 .

(AG2) Две произвольные прямые из направлений Π_2 и Π_3 пересекаются в единственной точке.

(AG3) Любая прямая L , проходящая через точку p_0 и не принадлежащая направлению Π_2 , пересекает произвольную прямую направления Π_2 в единственной точке.

(AG4) Существует точно одна прямая, проходящая через точку $p \neq p_0$ и точку p_0 .

Теорема 8. *AE-структура S_R , ассоциированная с E-алгеброй $R = \langle R; T, 0, 1 \rangle$, $\Pi_{x=0}$ -транзитивная и $(0, 0)$ -транзитивная, является аффинной плоскостью Сандлера.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке аксиом AS-плоскости:

(AS1) Существует точно одна прямая, проходящая через две различные точки, одна из которых инцидентна прямой L_1 .

(AS2) Любая прямая направления Π_2 пересекает произвольную прямую другого направления в единственной точке.

(AS3) Для любых точки p и прямой L существует единственная прямая M , проходящая через точку p и параллельная прямой L .

Выполнение каждой из перечисленных аксиом легко проверяется, основываясь на алгебраических свойствах E-алгебры R .

Литература

1. Емельченков Е.П. Геометрии над алгебрами типа $\langle 3 \rangle$. Аффинные тернарные структуры // Известия Смоленского государственного университета. 2013, № 3 (23). С. 365-379.
2. Емельченков Е.П. Π -транзитивные AE-структуры. // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной конференции. Вып. 15. Смоленск: СмолГУ, 2014. С. 143-146.
3. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1980. 467 с.
4. Емельченков Е.П. Центральные коллинеации AE-структур и E-алгебры // Известия Смоленского государственного университета. 2014, № 4 (28). С. 327-331.

ПОСТРОЕНИЕ СХОДЯЩЕГОСЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ С ЦЕЛОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Э.И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет, г. Минск,
e-mail: Zverovich@bsu.by

УДК 517.948.32 + 517.544

Ключевые слова: *интеграл типа Коши, формулы Сохоцкого, конечная часть интеграла.*

В статье рассмотрен интеграл типа Коши, плотностью которого служит целая функция, суммируемая на положительной полуоси. Получено сходящееся всюду вне начала координат разложение этого интеграла в ряд.

Пусть $f(z)$ - целая функция, вещественная на вещественной оси и суммируемая на луче $(0, +\infty)$. Будем искать всюду при $z \neq 0$ сходящееся разложение интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (1)$$

в ряд. Эта задача рассматривалась ранее в [1], но там имеются погрешности, которые здесь устраняются. Интеграл (1) имеет линию разрыва $[0, +\infty)$, на которой имеют место известные [2] формулы Сохоцкого

$$\Phi^{\pm}(x) = \pm \pi i f(x) + \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt,$$

равносильные следующим:

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = 2\pi i f(x),$$

$$\Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt.$$

Взяв главную ветвь логарифма $\ln z := \ln|z| + i \arg z$, где $0 \leq \arg z \leq 2\pi$, видим, что функция $(\pi i - \ln z) \cdot f(z)$ тоже имеет линию разрыва $[0, +\infty)$.

Скачок ее при переходе через эту линию

$$[(\pi i - \ln x)f(x)]^{+} - [(\pi i - \ln x)f(x)]^{-} = 2\pi i f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

очевидно, такой же, как и скачок функции $\Phi(z)$. Поэтому разность

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt - [\pi i - \ln z]f(z) =: g(z)$$

является целой функцией (в силу теоремы об аналитическом продолжении через луч $[0, +\infty)$). Наша цель – найти коэффициенты

тейлоровского разложения функции $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$, выразив их через функцию $f(z)$.

Так как обе функции $f(z)$ и $g(z)$ – целые, то должен существовать конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt - [\pi i - \ln z] f(z) \right\} = g_0.$$

Он не зависит от направления $\arg z$, поэтому можно считать, что $z = -x$, где $x > 0$. При таком предположении этот предел можно заменить следующим:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t+x} dt + f(-x) \ln x \right\} = g_0.$$

Очевидно, что если $f(0) = 0$, то $g_0 = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$. Если же $f(0) \neq 0$, то при

любом $N > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} g_0 &= \lim_{x \rightarrow +0} \left[\int_0^N \frac{f(t)}{t+x} dt + f(-x) \ln x \right] + \int_N^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left[\int_0^N \frac{f(t) - f(0)}{t+x} dt + f(0) \int_0^N \frac{dt}{t+x} + f(-x) \ln x \right] + \int_N^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left[\int_0^N \frac{f(t) - f(0)}{t+x} dt + f(0) \ln(N+x) - f(0) \ln x + f(-x) \ln x \right] + \int_N^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \\ &= \int_0^N \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + f(0) \ln N + \int_N^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = g_0. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее равенство по N , получим тождество

$$\frac{f(N) - f(0)}{N} + \frac{f(0)}{N} - \frac{f(N)}{N} \equiv 0.$$

Это означает, что полученное выражение для g_0 не зависит от N .

Поэтому, полагая $N = 1$, найдем

$$g_0 = \int_0^1 \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + \int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \mathbf{pf} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt,$$

где **pf** здесь и в дальнейшем означает, что интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. Для нахождения остальных коэффициентов g_k найдем k -ю производную равенства

$$g(-x) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t+x} dt + f(-x) \ln x, \quad x > 0.$$

Тогда получим

$$(-1)^k g^k(-x) = (-1)^k k! \int_0^\infty \frac{f(t) dt}{(t+x)^{k+1}} + \frac{d^k}{dx^k} [f(-x) \ln x].$$

Переходя здесь к пределу при $x \rightarrow +0$, после деления на $(-1)^k k!$ будем иметь

$$g_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \int_0^\infty \frac{f(t) dt}{(t+x)^{k+1}} + \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} [f(-x) \ln x] \right\}.$$

Найдя по формуле Лейбница k -ю производную произведения $f(-x) \ln x$, получим сумму, каждое слагаемое которой либо бесконечно малое, либо бесконечно большое при $x \rightarrow +0$. Отбросив бесконечно малые и учитывая существование конечного предела g_k , заключаем, что бесконечно большие слагаемые в сумме образуют бесконечную часть расходящегося интеграла $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{k+1}} dt$.

Таким образом, имеем

$$g_k = \mathbf{pf} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{k+1}} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Окончательно получаем следующее разложение:

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t-z} dt = [\pi i - \ln z] f(z) + \sum_{k=0}^\infty z^k \cdot \mathbf{pf} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{k+1}} dt,$$

сходящееся при всех $z \neq 0$.

В качестве примера на применение полученного равенства найдем разложение интеграла $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t-z} dt$. С этой целью преобразуем следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \mathbf{pf} \int_0^\infty t^{-k-1} e^{-t} dt &= \mathbf{pf} \int_0^N t^{-k-1} e^{-t} dt + \int_N^\infty t^{-k-1} e^{-t} dt = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \mathbf{pf} \int_0^N t^{\nu-k-1} dt + \int_N^\infty t^{-k-1} e^{-t} dt = \\ &= \mathbf{pf} \left\{ \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu-k)} t^{\nu-k} \Big|_0^N + \frac{(-1)^k}{k!} \ln t \Big|_0^N \right\} + \int_N^\infty t^{-k-1} e^{-t} dt = \\ &= \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^\infty \frac{(-1)^\nu N^{\nu-k}}{\nu!(\nu-k)} + \frac{(-1)^k}{k!} \ln N + \int_N^\infty t^{-k-1} e^{-t} dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{pf} \int_0^\infty t^{-k-1} e^{-t} dt = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^\infty \frac{(-1)^\nu N^{\nu-k}}{\nu!(\nu-k)} + \frac{(-1)^k}{k!} \ln N + \int_N^\infty t^{-k-1} e^{-t} dt.$$

Дифференцируя это равенство по N , получим очевидное тождество

$$0 \equiv \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^\infty \frac{(-1)^\nu N^{\nu-k-1}}{\nu!} + \frac{(-1)^k}{k!} N^{-1} - N^{-k-1} e^{-N}.$$

Оно показывает, что $\text{pf} \int_0^{\infty} t^{-k-1} e^{-t} dt$ не зависит от N . Поэтому, полагая $N=1$, найдем

$$\text{pf} \int_0^{\infty} t^{-k-1} e^{-t} dt = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu-k)} + \int_1^{\infty} t^{-k-1} e^{-t} dt.$$

Сопоставив это равенство с известным [3, формула 8.314] представлением гамма-функции

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+z)} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

получим

$$\text{pf} \int_0^{\infty} t^{-k-1} e^{-t} dt = \text{pf} \Gamma(-k).$$

Здесь

$$\text{pf} \Gamma(-k) := \lim_{z \rightarrow -k} \left[\Gamma(z) - \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} \right]$$

– значение в точке $z=-k$ регулярной части лорановского разложения гамма-функции в окрестности точки $z=-k$.

Таким образом, окончательно имеем:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t-z} dt = (\pi i - \ln z) e^{-z} + \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \text{pf} \Gamma(-k),$$

причем этот ряд сходится всюду при $z \neq 0$.

Литература

1. Зверович Э.И. Разложения некоторых интегралов типа Коши с целыми плотностями // Известия АН Беларуси. 2012. № 4. С. 10–13.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

ИНТЕГРАЛ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ЕГО ОЦЕНКА

А.М. ЗУЕВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: zueandrej@yandex.ru

УДК 517.98

Ключевые слова: *усреднение функции, интеграл от произведения функций Бесселя, оценка усреднения интеграла.*

В работе продолжаютя исследования по оценкам интеграла специального вида от произведения функций Бесселя, начатые автором в [1].

Напомним, что усреднением функции $f(R)$ называется величина $D_{R_0} f = \frac{2}{R_0} \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} f dR$. В работе [1] автором была приведена оценка для

усреднения интеграла $J_k^{(j)} = \int_0^R r^{j-s-\frac{1}{2}} J_{s+\frac{1}{2}}(\mu r) \cos(\mu_k r - \frac{\pi}{2} j) dr$. А именно, было установлено, что $|D_{R_0} J_k^{(j)}| \leq C \cdot R_0^{j-s-2} \cdot \mu^{-\frac{1}{2}} \cdot |\mu - |\mu_k||^{-2}$, где $\mu > 0$, $|\mu - |\mu_k|| \geq \varepsilon > 0$, $j > s + 2$.

Пусть теперь $s + 1 < j < s + 2$.

Не нарушая общности, можно считать $\mu_k > 0$ и j – чётным. Тогда с точностью до знака $J_k^{(j)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mu_k} \int_0^R r^{j-s} J_{s+\frac{1}{2}}(\mu r) J_{-\frac{1}{2}}(\mu_k r) dr$.

Воспользуемся частным случаем формулы, полученной автором в [2], считая сначала $\mu_k < \mu$.

$$J_k^{(j)} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mu_k} \left\{ \frac{1}{\mu} R^{j-s} J_{-\frac{1}{2}}(\mu_k R) J_{s+\frac{3}{2}}(\mu R) + \frac{\mu_k}{\mu^2} R^{j-s} J_{\frac{1}{2}}(\mu_k R) J_{s+\frac{5}{2}}(\mu R) - \frac{\mu_k}{\mu^2} (j-2s-3) \times \right. \\ \left. \times \int_0^R r^{j-s-1} J_{s+\frac{5}{2}}(\mu r) J_{\frac{1}{2}}(\mu_k r) dr - \frac{1}{\mu} \left(j-2s-2 + (2s+3) \frac{\mu_k^2}{\mu^2} \right) \int_0^R r^{j-s-1} J_{-\frac{1}{2}}(\mu_k r) J_{s+\frac{3}{2}}(\mu r) dr \right\}.$$

Правую часть этого равенства разобьем на сумму двух выражений, первое из которых не содержит интегралов, а второе содержит только интегралы, и применим операцию усреднения. Получим равенство

$$D_{R_0} J_k^{(j)} = \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{-1} \left\{ D_{R_0} \bar{J}_k^{(j)} + D_{R_0} \bar{\bar{J}}_k^{(j)} \right\}. \quad (1)$$

Для первого слагаемого в правой части равенства (1), исходя из рассуждений, подобных выводу оценки в [1], получим

$$|D_{R_0} \bar{J}_k^{(j)}| \leq C_1 R_0^{j-s-2} \mu^{-\frac{3}{2}} (\mu - \mu_k)^{-1}.$$

Во втором слагаемом правой части равенства (1) интегралы по отрезку $[0; R]$ заменим разностью интегралов, соответственно по $[0; +\infty)$ и $[R; +\infty)$.

Один из интегралов

$$\int_0^{+\infty} r^{j-s-1} J_{-\frac{1}{2}}(\mu_k r) J_{s+\frac{3}{2}}(\mu r) dr = \frac{\mu_k^{-\frac{1}{2}}}{2^{s+1} \mu^{-\frac{1}{2}-s} \Gamma(s+2)} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{s+1}.$$

Продифференцировав соответствующее слагаемое в $D_{R_0} \overline{J}_k^{(j)}$ по μ_k j раз (в случае нечетного j дифференцировать следует $j-1$ раз), получим

$$\int_0^{+\infty} r^{j-s-1} J_{\frac{1}{2}}(\mu_k r) J_{s+\frac{3}{2}}(\mu r) dr = \frac{(-1)^{\frac{j}{2}} \mu^{\frac{1}{2}+s} \mu_k^{-\frac{1}{2}}}{2^{s+1} \Gamma(s+2)} \cdot \frac{d^j}{d\mu_k^j} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{s+1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left| \frac{d^j}{d\mu_k^j} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{s+1} \right| \leq C_2 \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{s+1-j} \cdot \mu^{-j}.$$

Аналогично поступаем с другим интегралом в $D_{R_0} \overline{J}_k^{(j)}$.

Для оценки оставшихся в $D_{R_0} \overline{J}_k^{(j)}$ интегралов воспользуемся формулой из [2]. В результате получим, что модуль каждого из этих интегралов есть

$$\left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{-1} \cdot O(1) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}} R_0^{j-s-2} = O(1) \cdot \mu^{-\frac{1}{2}} \cdot \mu_k^{-\frac{1}{2}} (\mu - \mu_k)^{-1} \cdot R_0^{j-s-2}.$$

Тогда $\left| D_{R_0} \overline{J}_k^{(j)} \right| \leq$

$$\leq C_3 \left[\mu^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{s+1-j} \cdot \mu^{-j} + \mu_k \mu^{-\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{s+1-j} \mu^{1-j} + R_0^{j-s-2} \frac{\sqrt{\mu_k}}{\mu} \cdot \mu^{-\frac{1}{2}} \mu_k^{-\frac{1}{2}} (\mu - \mu_k)^{-1} \right] \leq$$

$$\leq C_4 \left[\mu^{-s-j-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{s+1-j} + R_0^{j-s-2} \cdot \mu^{-\frac{3}{2}} (\mu - \mu_k)^{-1} \right].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \left| D_{R_0} J_k^{(j)} \right| &\leq \\ &\leq C_5 \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{-1} \left\{ R_0^{j-s-2} \cdot \mu^{-\frac{3}{2}} (\mu - \mu_k)^{-1} + \mu^{-s-j-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{s+1-j} + R_0^{j-s-2} \mu^{-\frac{3}{2}} (\mu - \mu_k)^{-1} \right\} \leq \\ &\leq C_6 \left[R_0^{j-s-2} + (\mu - \mu_k)^{s+2-j} \right] \mu^{-\frac{3}{2}} (\mu - \mu_k)^{-1} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\left| D_{R_0} J_k^{(j)} \right| \leq C_7 \left[R_0^{j-s-2} + |\mu - \mu_k|^{s-j+2} \right] \cdot \mu^{-\frac{1}{2}} (\mu - |\mu_k|)^{-2}.$$

Аналогично можно поступить и при $|\mu_k| > \mu$. Несобственные интегралы по $[0; +\infty)$ будут равны нулю, и

$$\left| D_{R_0} J_k^{(j)} \right| \leq C_8 R_0^{j-s-2} \mu^{-\frac{1}{2}} (\mu - |\mu_k|)^{-2}.$$

Объединим оба случая в одну формулу. Положим

$$\delta_k(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\mu_k| < \mu, \\ 0 & \text{при } |\mu_k| \geq \mu. \end{cases}$$

Тогда

$$|D_{R_0} J_k^{(j)}| \leq C_9 \left[R_0^{j-s-2} + \delta_k(\mu) |\mu - |\mu_k||^{s-j+2} \right] \mu^{-\frac{1}{2}} \cdot |\mu - |\mu_k||^{-2}$$

при $s+1 < j < s+2, \mu > 0, |\mu - |\mu_k|| \geq \varepsilon > 0$.

Литература

1. Зуев А.М. Оценка интеграла специального вида от бесселевых функций // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2014. Вып.15 С. 150 -151.

2. Зуев А.М. Формулы для интеграла специального вида от бесселевых функций // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Смоленск, 2004. Вып.5. С. 20 -22.

О НЕТЕРОВОСТИ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ ТРИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПЛОСКОСТИ СО ЩЕЛЯМИ

И.М. ЗУЕВА, И.Б. БОЛОТИН

Смоленский государственный университет,
e-mail: irishka_15_93@mail.ru, IBVolotin@smolgu.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *трианалитическая функция; вторая краевая задача Римана; плоскость со щелями.*

Работа посвящена изучению второй основной краевой задачи типа Римана в классе трианалитических функций. В ходе исследования установлена нетеровость второй основной краевой задачи типа Римана для трианалитических функций в плоскости со щелями.

Исключим из полной комплексной плоскости попарно непересекающиеся отрезки действительной оси $[a_m; b_m]$ ($m=1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$) и пусть D есть оставшаяся область. Под границей L области D будем понимать выброшенные отрезки (разрезы). Таким образом, $L = \bigcup_{m=1}^n [a_m; b_m]$ и $D = \bar{C} \setminus L$. Концы контура L будем называть узлами и обозначать c_p ($p=1, 2, \dots, 2n$).

В дальнейшем в основном будем использовать термины и обозначения, принятые в [1].

Рассмотрим следующую краевую задачу: *Требуется найти все трианалитические функции $F(z)$ принадлежащие классу $A_3(D) \cap I^{(4)}(L)$ [2], исчезающие на бесконечности, ограниченные вблизи узлов контура L и удовлетворяющие во всех обыкновенных точках L следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) = G_0(t)F^-(t) + g_0(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} = -G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + ig_1(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 F^+(t)}{\partial n_+^2} = -G_2(t) \frac{\partial^2 F^-(t)}{\partial n_-^2} - g_2(t), \quad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_+} \left(\frac{\partial}{\partial n_-} \right)$ – производная по левой (правой) нормали к контуру L , а

$G_k(t)$, $g_k(t)$ ($k=0,1,2$) – заданные на L функции класса $H_0^{(4-k)}(L)$, причем $G_k(t) \neq 0$ на L . Здесь множители (-1) при $G_1(t)$ и $G_2(t)$, а так же множитель i^k при $g_k(t)$ соответственно введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу будем называть *второй основной краевой задачей типа Римана для трианалитических функций в плоскости со щелями* или задачей $R_{2,3}$ в плоскости со щелями, а соответствующую однородную задачу ($g_0(t) \equiv g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) назовем *задачей $R_{2,3}$ в плоскости со щелями*.

Отметим, что задача $R_{2,3}$ представляет собой одну из основных краевых задач типа Римана для трианалитических функций, поставленных в известной монографии Ф.Д. Гахова (см. [3]). В случае, когда контур L состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых гладких замкнутых кривых, задача $R_{2,3}$ была подробно исследована в работах К.М. Расулова. В работах [4, 5] получен конструктивный метод решения данной задачи.

В настоящей работе установлено, что справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $L = \bigcup_{m=1}^n [a_m; b_m]$, $D = \bar{C} \setminus L$. Тогда задача $R_{2,3}$ в плоскости со щелями нормально разрешима и число ее условий разрешимости, а также число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи, являются конечными, то есть задача $R_{2,3}$ в плоскости со щелями является нетеровой.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998.
2. Болотин И.Б. Об одном обобщении теоремы Лорана // Известия Смоленского государственного университета. Смоленск: СмолГУ, 2011. № 2. С. 127–133.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
4. Болотин И.Б., Зуева И.М. О второй основной краевой задаче типа Римана для трианалитических функций в плоскости со щелями // Теоретические и прикладные аспекты современной науки: материалы IV междунар. научно-практич. конференц. в 3 ч. / Под общ. ред. М.Г. Петровой. Белгород : ИП Петрова М.Г., 2014. Часть I.
5. Болотин И.Б., Зуева И.М. О решении второй основной краевой задачи типа Римана для трианалитических функций в плоскости со щелями // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики: матер. 5-й научно-практ. internet-конференции / Отв. ред. Ю.С. Нагорнов. Ульяновск: SIMJET, 2015.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.И. КАЛИНИН¹, Л.И. ЛАВРИНОВИЧ²

Белорусский государственный университет, г. Минск,
e-mail: ¹kalininai@bsu.by, ²lavrinovich@bsu.by

УДК 519.626

Ключевые слова: *оптимальное управление, квадратичный функционал, квазилинейная система, сингулярные возмущения, асимптотические приближения, субоптимальный синтез.*

Рассматриваются задачи минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях линейных сингулярно возмущенных и квазилинейных систем. Строятся асимптотические приближения к оптимальным программным управлениям и оптимальным обратным связям в этих задачах.

Многие прикладные задачи оптимального управления в своих математических моделях содержат малые параметры, причем зачастую модели существенно упрощаются (понижается порядок дифференциальных уравнений, исчезают сложные члены и т.п.), если положить эти параметры равными нулю. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы, основное достоинство которых состоит в том, что при их применении исходные задачи, которые принято называть возмущенными, сводятся к коррекции решений более простых задач оптимального управления.

Пожалуй, наиболее эффективны асимптотические методы при оптимизации квазилинейных и сингулярно возмущенных систем. Квазилинейными называются системы управления, содержащие малые параметры при нелинейностях. Выигрыш от применения асимптотических методов к таким системам состоит, прежде всего, в том, что вместо исходных по существу нелинейных задач решаются задачи оптимизации линейных систем. Сингулярно возмущенными называют системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных. Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В сингулярно возмущенных задачах эти динамические системы являются жесткими [1], и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Применение асимптотических методов позволяет не только избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, но и свести исходную задачу оптимального управления к решению задач меньшей размерности.

Статья посвящена построению асимптотических приближений к решениям задач оптимизации переходных процессов в линейных сингулярно возмущенных и квазилинейных системах. Эти задачи состоят в нахождении допустимых управлений с минимальным значением интегральных квадратичных функционалов. Их можно трактовать как задачи управления с минимальными энергетическими затратами.

Суть предлагаемых асимптотических методов решения рассмотренных задач состоит в разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных (множителей Лагранжа), которые в силу принципа максимума [2] соответствуют оптимальным управлениям. Следует отметить, что используемый подход к исследованию (см. [3]) удобен для численной реализации, поскольку при его применении дело сводится к асимптотическому разложению конечномерных элементов. Асимптотические приближения, полученные при помощи разработанных алгоритмов, можно использовать для точного решения рассмотренных задач при заданном значении малого параметра. Для этого предложены соответствующие вычислительные процедуры.

Литература

1. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноурцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

3. Калинин А.И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В.В. КАРАЧИК

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
e-mail: karachik@susu.ru

УДК 517.956.223+517.575

Ключевые слова: *полигармоническое уравнение, задача Дирихле.*

В работе построено решение задачи Дирихле для однородного полигармонического уравнения в единичном шаре.

Рассмотрим неоднородную задачу Дирихле для l -гармонического уравнения в единичном шаре:

$$\Delta^l u(x) = f(x), x \in S; u|_{\partial S} = f_0(s), \dots, \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}|_{\partial S} = f_{l-1}(s), s \in \partial S, \quad (1)$$

где $S = \{x \in R^n : |x| < 1\}$, ν - внешняя нормаль к ∂S . Известно, что если $f_k \in C^{l-1-k+\lambda}(\partial S)$, где $\lambda \in (0,1)$ и $k = \overline{0, l-1}$, то решение задачи (1) при $f = 0$ существует единственно и принадлежит классу $C^{l-1+\lambda}(\bar{S}) \cap C^{2l}(S)$.

Обозначим через $u_k(x; f)$ решение однородной задачи Дирихле ($f_0 = \dots = f_{l-1} = 0$) при $l = k$, которое может быть выражено через функцию Грина [1]. В случае полиномиальных данных, т.е. при $f(x) = P(x)$, где $P(x)$ - полином, решение $u_k(x; P)$ имеет вид [2, формула (28)]

$$u_k(x; P) = \frac{(|x|^2 - 1)^k}{2(2k - 2)!!} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha |x|^2)^s (1 - \alpha)^{s+k-1}}{(2s)!!(2s + 2k)!!} \Delta^s P(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \quad (2)$$

Обозначим также $V_p(x) = \sum_{k=0}^{l-1} p_k(x) (|x|^2 - 1)^k$, где $p_0(x), \dots, p_{l-1}(x)$ - некоторый набор функций таких, что $p_k \in C^{2l}(S)$, $\Delta^{l-k} p_k \in C^\lambda(\bar{S})$ и $(1 - |x|^2)^{k-l} u_{l-k}(x; \Delta^{l-k} p_k) \in C^\lambda(\bar{S})$.

Решение задачи Дирихле для гармонического и бигармонического уравнений при полиномиальных данных было получено в работах [3; 4]. Связь задачи Дирихле и задачи Неймана показана в работе [5].

Введем оператор $\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Определим разностную производную функции $p(\lambda)$ по формуле

$$p^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} p(\lambda + i). \quad (3)$$

На основе исследования функции $V_p(x)$ можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $q_j(x)$, $j = \overline{0, l-1}$ - система гармонических продолжений функций $f_j(s) \in C^{l-1-k+\lambda}(\partial S)$, $f_j(s) \in C^{l-1-j+\lambda}(\partial S)$, $j = \overline{0, l-1}$ с ∂S на \bar{S} . Тогда, при функциях

$$p_s(x) = \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} H_s^{(j)}(-\Lambda) q_j(x), \quad s = \overline{0, l-1},$$

где обозначено $H_s(\lambda) = \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2s+2)/(2s)!!$, $s \in N$, а производная $H_s^{(k)}(\lambda)$ порядка k от полинома $H_s(\lambda)$ берется в смысле определения (3), функция

$$U(x) = \sum_{k=0}^{l-1} p_k(x) (|x|^2 - 1)^k \quad (4)$$

является решением задачи Дирихле (1).

Пример 1. Решение (4) при $l=3$ имеет вид

$$U(x) = q_0(x) + \frac{1-|x|^2}{2} (\Lambda q_0(x) - q_1(x)) + \frac{(1-|x|^2)^2}{2} ((\Lambda^2 + 2\Lambda)q_0(x) - (2\Lambda + 1)q_1(x) + q_2(x))$$

и согласуется с полученным в [2].

Литература

1. Кальменов Т.Ш., Сураган Д., О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 441 - 445.
2. Карачик В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2014. Т. 54, N 7. С. 1149 - 1170.
3. Карачик В.В., Антропова Н.А. Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. N 2. С. 250 - 254.
4. Карачик В.В., Антропова Н.А. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Сибирский журнал промышленной математики. 2012. Т. XV, N 2. С. 86 - 98.

5. Карачик В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения, 2014. Т. 50, N11. С. 1455--1461.

НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫЕ СПЛАЙН-МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА НЕРЕГУЛЯРНОМ ШАБЛОНЕ

В.И. КИРЕЕВ¹, Т.К. БИРЮКОВА², М.М. ГЕРШКОВИЧ³

¹ НИТУ МИСиС, г. Москва,

^{2,3} Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

e-mail: ¹Vladimir-Kireyev@mail.ru, ²yukonta@mail.ru, ³makmg@mail.ru

УДК 519.622

Ключевые слова: *обыкновенное дифференциальное уравнение, ОДУ, задача Коши, дискретная схема, сплайн, сплайн-метод, дискретное решение задачи Коши.*

В работе рассматриваются численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на сплайн-аппроксимации дискретного опорного решения, полученного по явным и неявным разностным схемам.

В развитие исследований по построению многошаговых дискретных схем решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на нерегулярном шаблоне, освещенных в докладе на конференции СКМП-2013 [1], в данной работе предлагаются сплайн-методы решения задачи Коши с использованием дискретного опорного решения.

Результаты, получаемые численными методами на заданных сетках (в частности, предлагаемые авторами в [1]), имеют дискретный характер и требуют восполнения для определения значений функций на интервалах между точками сетки и, возможно, для последующей обработки найденного решения. Для решения такой задачи используются сплайны. Однако классические сплайн-методы решения задачи Коши, основанные на разложении искомой функции в ряд Тейлора [2], неудобны в практической реализации, так как для нелинейных задач требуется решать нелинейные алгебраические уравнения. В данной работе предлагаются последовательные непрерывно-дискретные сплайн-методы решения задачи Коши второго и третьего порядков, позволяющие избежать решения нелинейных уравнений.

Процедура решения задачи Коши для ОДУ:

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [a, b], \quad x_0 = a \quad (1)$$

при переходе от известного значения \hat{y}_i в точке x_i к очередному значению \hat{y}_{i+1} в точке x_{i+1} состоит из двух этапов.

Первый этап. Находится дискретное опорное решение задачи Коши с помощью явных или неявных методов второго и третьего порядков, изложенных в [1]. (Некоторые дискретные схемы из [1] приведены здесь в примерах 1, 2.)

Второй этап. Полученное на первом этапе опорное решение подставляется в соответствующую по порядку формулу многочлена (звена сплайна). В качестве этих звеньев сплайнов могут быть приняты многочлены второй и третьей степени, использующиеся в теории приближений [3]:

$$S_{2,i}(x) = \hat{y}_i + \bar{m}_i \cdot (x - x_i) + \frac{1}{h_{i+1}} \left(\frac{\Delta \hat{y}_i}{h_{i+1}} - \bar{m}_i \right) \cdot (x - x_i)^2, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1); \quad (2)$$

$$S_{3,i}(x) = \hat{y}_i + \bar{m}_i \cdot (x - x_i) + \left(\frac{3\Delta \hat{y}_i}{h_{i+1}^2} - \frac{3\bar{m}_i}{h_{i+1}} - \frac{\Delta \bar{m}_i}{h_{i+1}} \right) \cdot (x - x_i)^2 + \frac{1}{h_{i+1}^2} \left(-\frac{2}{h_{i+1}} \Delta \hat{y}_i + 2\bar{m}_i + \Delta \bar{m}_i \right) \cdot (x - x_i)^3, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (3)$$

где $\bar{m}_i = \hat{y}'(x_i)$, $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$.

Формула для $S_{2,i}(x)$ получается из условий согласования $S_{2,i}(x_k) = \hat{y}_k$, ($k = i, i+1$), $S'_{2,i}(x_i) = \bar{m}_i$, а формула для $S_{3,i}(x)$ следует из условий согласования $S_{3,i}(x_k) = \hat{y}_k$, ($k = i, i+1$), $S'_{3,i}(x_k) = \bar{m}_k$ ($k = i, i+1$).

Таким образом, алгоритм получения непрерывного сплайн-решения задачи Коши на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) разбиения отрезка $[a, b]$ на n промежутков (данное разбиение может осуществляться как заранее, так и в процессе решения задачи) содержит две совокупности вычислительных процедур, которые выполняются последовательно и независимо друг от друга. Последовательный характер таких процедур определяет название данного метода решения задачи Коши.

Рассмотрим совокупности процедур отдельно для схем второго и третьего порядков, так как они имеют некоторые особенности.

Схема второго порядка

Первый этап. Рассчитывается дискретное решение $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$ по одной наиболее приемлемой явной или неявной несоставной схеме (см. [1]) или по составной схеме из числа методов прогноза и коррекции [4],

скомпонованной из совокупности явной и неявной схем (см. [5]). Решение, полученное на данном этапе, называется опорным. При выборе конкретной схемы необходимо, чтобы ее порядок точности равнялся $k-1=2$, где $k=3$ – порядок сходимости сплайна на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

Второй этап. На каждом очередном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ дискретное решение преобразуется в непрерывное путем определения одного из звеньев сплайна (2). Для этого сначала необходимо рассчитать коэффициенты $a_{0,i}, a_{1,i}, a_{2,i}$ многочлена (т.е. звена сплайна)

$$S_{2,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i}(x - x_i) + a_{2,i}(x - x_i)^2. \quad (4)$$

Из сопоставления формул (2) и (4) видно, что коэффициент $a_{0,i}$ определяется значением \hat{y}_i , которое рассчитано на первом этапе. Для обеспечения непрерывности производной сплайна $S_2(x)$ коэффициент $a_{1,i}$, равный производной $y'(x_i) = \bar{m}_i$, находится путем дифференцирования в точке $x = x_i$ звена $S_{2,i-1}(x)$, полученного на предыдущем частичном отрезке (то есть $\bar{m}_i = S'_{2,i-1}|_{x=x_i} = a_{1,i-1} + 2a_{2,i-1}h_i$).

Таким образом, $a_{0,i} = \hat{y}_i$, $a_{1,i} = S'_{2,i-1}|_{x=x_i}$ ($a_{1,i} = \bar{m}_i$), $a_{2,i}$ вычисляется с использованием полученного на первом этапе дискретного решения \hat{y}_i по формуле $a_{2,i} = \frac{1}{h_{i+1}} \left(\frac{\Delta \hat{y}_i}{h_{i+1}} - a_{1,i} \right)$, следующей из (2). Здесь $\Delta \hat{y}_i = \hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i$ ($\hat{y}_i, i = 1, 2, \dots, n$, вычислены на первом этапе).

Замечание 1. При построении функции $S_{2,0}(x)$ на первом частичном отрезке следует положить $a_{0,0} = \hat{y}_0 = y_0$ (значение y_0 задано в (1), а $a_{1,0} = F(x_0, \hat{y}_0)$).

Замечание 2. Данный алгоритм построения сплайна $S_2(x)$ обеспечивает непрерывность самого решения $\hat{y}(x) \equiv \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{2,i}(x)$ на всем отрезке $[a, b]$, а также его производной, т.е. $S'_{2,i-1}(x)|_{x=x_i} = S'_{2,i}(x)|_{x=x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Поэтому получаемое по данной схеме решение соответствует параболическому сплайну дефекта $q = 1$.

Пример 1. Для задачи Коши $y' = x + y$; $y(0) = 1$ найти численное решение на отрезке $[0; 0,4065]$ последовательным сплайн-методом второго порядка, задав число частичных отрезков $n = 3$; параметр нерегулярности сетки $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i} = 0,9$ ($i = 1; 2$), шаг $h_1 = 0,15$.

1. Формирование узлов сетки. С учетом заданных параметров сетки находим:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = x_0 + h_1 = 0,15; \quad x_2 = 0,285 \quad (h_2 = 0,135); \quad x_3 = 0,4065 \quad (h_3 = 0,1215).$$

2. Получение опорного решения (*первый этап*). В качестве опорного возьмем решение, полученное по составной схеме второго порядка точности (метод прогноза и коррекции).

На шаге «предиктор» рассчитаем предварительное значение $\hat{y}_{i+1}^{(\Pi)}$ по явной двухшаговой схеме второго порядка точности [1]:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i - \delta_{i+1}^2 \Delta \hat{y}_i + H_i^{i+1} \delta_{i+1} F_i \quad (h = var), \quad \text{где } F_i = F(x_i, \hat{y}_i). \quad (5)$$

На шаге «корректор» уточним предварительное значение путем применения одношаговой неявной схемы второго порядка точности [1]:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} \left[F_i + F(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}^{(\Pi)}) \right] \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6)$$

(Здесь в правую часть (6) подставлено значение $\hat{y}_{i+1}^{(\Pi)}$, вычисленное на шаге «предиктор»).

Получаем: $\hat{y}_1 = 1,174097$, $\hat{y}_2 = 1,375370$, $\hat{y}_3 = 1,597867$. Учитываем, что $\hat{y}_0 = 1$ из условия задачи.

3. Построение формул сплайнов на трех частичных отрезках промежутка $[0; 0,4065]$ (второй этап).

Рассчитаем коэффициенты сплайна на первом частичном отрезке $[0; 0,15]$:

$$a_{0,0} = \hat{y}_0 = y_0 = 1; \quad a_{1,0} = f(x_0, \hat{y}_0) = x_0 + \hat{y}_0 = 1, \quad \Delta \hat{y}_0 = \hat{y}_1 - \hat{y}_0 = 0,174097,$$

$$a_{2,0} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\Delta \hat{y}_0}{h_1} - a_{1,0} \right) = \frac{1}{0,15} \left(\frac{0,174097}{0,15} - 1 \right) = 1,070964.$$

С учетом найденных коэффициентов записываем формулу первого звена сплайна: $S_{2,0}(x) = 1 + x + 1,070964x^2$.

Рассчитаем коэффициенты сплайна на втором частичном отрезке $[0,15; 0,285]$:

$$a_{0,1} = \hat{y}_1 = 1,174096; \quad a_{1,1} = S'_{2,0}(x) \Big|_{x=0,15} = 1,321289;$$

$$a_{2,1} = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\Delta \hat{y}_1}{h_2} - a_{1,1} \right) = 1,256463.$$

Записываем формулу второго звена сплайна:

$$S_{2,1}(x) = 1,1740967 + 1,3212893 \cdot (x - 0,15) + 1,2564633 \cdot (x - 0,15)^2.$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты и записывается формула третьего звена:

$$S_{2,2}(x) = 1,375370 + 1,660534 \cdot (x - 0,285) + 1,405082 \cdot (x - 0,285)^2.$$

В результате получено непрерывное решение задачи Коши, соответствующее параболическому сплайну дефекта $q = 1$.

Замечание 3. В примере 1, так же как и в последующем примере, связанном с применением кубического сплайна $S_3(x)$, процессы получения дискретного и непрерывного решений (на первом и втором этапах) для упрощения полностью разделены. При решении реальных задач Коши более целесообразно их не разделять, а сразу после определения дискретного решения на очередном частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ строить соответствующее непрерывное решение, т.е. формировать очередное звено сплайна.

Схема третьего порядка

Первый этап. Рассчитывается дискретное (опорное) решение \hat{y}_{i+1} в точке x_{i+1} по явной или неявной несоставной схеме или по некоторой составной схеме, состоящей из явной и неявной схем. Порядок точности этой схемы должен быть не ниже трех, что соответствует $k - 1$, где $k = 4$ – порядок сходимости сплайна $S_3(x)$.

Второй этап. Дискретное решение \hat{y}_i, \hat{y}_{i+1} , соответствующее концам отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, преобразуется в непрерывное путем построения одного звена сплайна (3). Для этого рассчитываются коэффициенты $a_{0,i}, a_{1,i}, a_{2,i}, a_{3,i}$ многочлена $S_{3,i}(x)$:

$$S_{3,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i}(x - x_i) + a_{2,i}(x - x_i)^2 + a_{3,i}(x - x_i)^3, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7)$$

Из сопоставления формул (3) и (7) видно, что $a_{0,i}$ определяется значением \hat{y}_i , рассчитанным на первом этапе. Коэффициент $a_{1,i}$ вычисляется с использованием правой части исходного дифференциального уравнения (1) по формуле $a_{1,i} = \bar{m}_i = F(x_i, \hat{y}_i)$, а коэффициенты $a_{2,i}$ и $a_{3,i}$ – с использованием дискретного решения по формулам $a_{2,i} = \frac{3\Delta\hat{y}_i}{h_{i+1}^2} - \frac{3\bar{m}_i}{h_{i+1}} - \frac{\Delta\bar{m}_i}{h_{i+1}}$; $a_{3,i} = \frac{1}{h_{i+1}^2} \left(-\frac{2\Delta\hat{y}_i}{h_{i+1}} + 2\bar{m}_i + \Delta\bar{m}_i \right)$, следующим из (3).

Величина \bar{m}_{i+1} вычисляется с использованием правой части исходного дифференциального уравнения, т.е. $\bar{m}_{i+1} = F(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$. При построении функции $S_{3,0}(x)$ на первом отрезке следует положить $a_{0,0} = \hat{y}_0 = y_0$, $a_{1,0} = F(x_0, \hat{y}_0)$.

Пример 2. Для задачи Коши $y' = x + y$; $y(0) = 1$ найти численное решение на отрезке $[0; 0,4065]$ последовательным сплайн-методом третьего порядка ($n = 3$, $\delta_{i+1} = 0,9$; $h_1 = 0,15$).

1. Формирование сетки осуществляется аналогично примеру 1.

2. Получение опорного решения (первый этап). В качестве опорного возьмем решение, полученное методом прогноза и коррекции третьего порядка точности, где на шаге «предиктор» используется схема (5), а на шаге «корректор» - следующая схема из [1]:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i - \delta_{i+1}^2 \Delta \hat{y}_{i-1} + \frac{h_{i+1}^2}{3} \left[\frac{1}{h_i} F_{i-1} + 2 \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) F_i + \frac{1}{h_{i+1}} F(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}^{(II)}) \right].$$

Получаем: $\hat{y}_1 = 1,173700$, $\hat{y}_2 = 1,374445$, $\hat{y}_3 = 1,596537$. Учитываем, что $\hat{y}_0 = 1$ из условия задачи.

3. Построение формул сплайна на трех частичных отрезках разбиения отрезка $[0; 0,4065]$ (второй этап).

Рассчитаем коэффициенты сплайна на первом отрезке $[0; 0,15]$ (первое звено сплайна):

$$a_{0,0} = \hat{y}_0 = y_0 = 1; \quad a_{1,0} = \hat{y}'_0 = F(x_0, \hat{y}_0) = 1 = \bar{m}_0; \quad \bar{m}_1 = F(x_1, \hat{y}_1) = x_1 + \hat{y}_1 = 1,323700;$$

$$a_{2,0} = \frac{3\Delta \hat{y}_0}{h_1^2} - \frac{3\bar{m}_0}{h_1} - \frac{\Delta \bar{m}_0}{h_1} = 1,001975; \quad a_{3,0} = \frac{1}{h_1^2} \left(-\frac{2\Delta \hat{y}_0}{h_1} + 2\bar{m}_0 + \Delta \bar{m}_0 \right) = 0,342332.$$

По значениям рассчитанных коэффициентов записывается формула первого звена сплайна

$$S_{3,0}(x) = 1 + x + 1,0019746 \cdot x^2 + 0,342332 \cdot x^3.$$

Аналогично находятся и два оставшихся звена кубического сплайна. Коэффициенты всех трех звеньев приведены в таблице 1.

Таблица 1

Номер звена i	$a_{0,i}$	$a_{1,i}$	$a_{2,0}$	$a_{3,0}$
0	1,0000	1,0000	1,0020	0,3423
1	1,1737	1,3237	1,1419	0,5016
2	1,3744	1,6594	1,3318	0,4507

Литература

1. Бирюкова Т.К., Гершкович М.М., Киреев В.И. Многошаговые дискретные схемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений на нерегулярном шаблоне. // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIV междунар. научн. конференции, посвященной 90-летию профессора М.Б. Балка. Смоленск: СмолГУ, 2013. Вып.14. С. 122–127.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.

3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Новосибирск: Наука, 1980. 350 с.
4. Самарский. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
5. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2008. 480 с.

ТРИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОЙ РАЗНОСТИ n -го ПОРЯДКА

Е. КИРЬЯЦКИС

Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса,
e-mail: jk@vgtu.lt

УДК 517.54

Ключевые слова: *полуплоскость, функция, конечная разность.*

В работе даются три формулы для вычисления конечной разности n -го порядка аналитической в полуплоскости функции. Приводятся некоторые следствия.

Теорема 1. Пусть Π – полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Конечную разность n -го порядка аналитической в полуплоскости Π функции $F(z)$ можно представить в виде

$$\Delta_n[F(z); z, \zeta_1, \dots, \zeta_n] = \sum_{m=0}^n (-1)^m \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_{n-m} \leq n} F(z + \zeta_{m_1} + \dots + \zeta_{m_{n-m}}). \quad (1)$$

Теорема 2. Конечную разность n -го порядка аналитической в полуплоскости Π функции $F(z)$ можно представить в виде

$$\Delta_n[F(z); z, \zeta_1, \dots, \zeta_n] = \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 F^{(n)}(z + \zeta_1 t_1 + \dots + \zeta_n t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

Теорема 3. Конечную разность n -го порядка аналитической в полуплоскости Π функции $F(z)$ можно представить в виде

$$\Delta_n[F(z); z, \zeta_1, \dots, \zeta_n] = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{F^{(p)}(z)}{p!} \Delta_n[z^p; z, \zeta_1, \dots, \zeta_n].$$

Следствие 1. Пусть $\zeta_1 = \dots = \zeta_n = h$. Тогда формула (1) превращается в известную формулу для конечной разности n -го порядка с фиксированным шагом h :

$$\Delta_n^h[F(z)] = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k F(z + kh).$$

Следствие 2. Пусть $P_n(z)$ – полином степени не выше n . Тогда для любых $\zeta_1, \dots, \zeta_{n+k} \in \bar{\Pi}$ и любого $k=1, 2, \dots$ имеем равенство $\Delta_{n+k} [P_n(z); z, \zeta_1, \dots, \zeta_{n+k}] = 0$.

О ТЕОРЕМАХ ПОКРЫТИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Е. КИРЬЯЦКИС, Э. КИРЬЯЦКИЙ

Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса,
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt, jk@vgtu.lt

УДК 517.54

Ключевые слова: класс, функция, круг, отображение.

Работа посвящена известному в геометрической теории функций вопросу, связанному с оценкой образа области, при отображении этой области функцией из некоторого класса.

Теорема 1. Пусть E – круг $|z| < 1$ и $n \geq 1$. Пусть $\tilde{K}_{n,1}(E)$ – класс аналитических в круге E функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, для которых n -я разделенная разность $[z^{n-1}f(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ для любых попарно различных, $z_0, \dots, z_n \in E$. Тогда образ круга E при отображении его любой функцией $w = f(z)$ из класса $\tilde{K}_{n,1}(E)$ целиком покрывает круг $|w| < \frac{n}{2(n+1)}$, но не всегда больший.

Теорема 2. Пусть $L_{n,1}(E)$ – класс аналитических в круге E функций $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$, для которых выполняется условие

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \left| [z^{n-1}f(z); z_0, \dots, z_n] \right| \leq 1$$

для любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in E$. Тогда образ круга E при отображении его любой функцией $w = f(z)$ из класса $L_{n,1}(E)$ целиком покрывает круг $|w| < \frac{n}{n+1}$, но не всегда больший.

Теорема 3. Пусть Π – полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Пусть $\tilde{K}_1(\Pi)$ – класс однолистных в полуплоскости Π функций $f(z)$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$. Тогда любая функция $f(z)$ из класса $\tilde{K}_1(\Pi)$ отображает Π на область, содержащую круг $|w| < \frac{1}{2}$, но не всегда больший.

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ МАРКОВА

Д. КИРЬЯЦКИС, Э. КИРЬЯЦКИЙ

ЗАО «Оракулас», г. Вильнюс,
Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса,
e-mail: dmitr.kir@gmail.com, Eduard.kiriyatzkii@takas.lt

УДК 517.54

Ключевые слова: *комплексная область, последовательность, аналитическая функция, область, система Маркова.*

В работе рассматривается последовательность функций, образующих систему Маркова. Приводятся примеры систем Маркова.

Определение. Пусть задана бесконечная последовательность аналитических в области D функций $u_0(z), u_1(z), \dots, u_n(z), \dots$ и для каждого $n \geq 0$ система функций $u_0(z), u_1(z), \dots, u_n(z)$ является системой Чебышева в области D . Тогда такая система функций называется системой Маркова в области D .

Пример 1. Бесконечная система функций

$$1, z, \dots, z^{n-1}, \frac{z^n}{(1-z)^2} \left(1 + \frac{1-n}{1+n} z \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

является системой Маркова в круге $|z| < 1$.

Пример 2. Бесконечная система функций

$$1, z, \dots, z^{n-1}, e^z, \quad n = 1, 2, \dots$$

является системой Маркова в горизонтальной полосе $0 < \text{Im}z < \pi$.

ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Д.А. КОМИССАРОВА

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
e-mail: darya-komissar@mail.ru

УДК 517.929.2

Ключевые слова: *устойчивость, разностное уравнение.*

Получены достаточные условия асимптотической устойчивости линейного разностного уравнения. Ранее были известны более жесткие признаки устойчивости.

Рассмотрим линейное разностное уравнение порядка k

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{i=1}^k a_i x_{n-i}, \quad (1)$$

где $a_i \in R$ ($1 \leq i \leq k$), $x_n : N \mapsto R$.

Под асимптотической устойчивостью уравнения (1) будем понимать асимптотическую устойчивость его нулевого решения.

Теорема 1. Если $a_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq k$) и

$$0 < \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{2 \sin \frac{\pi}{2(2i-1)}} < 1, \quad (2)$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 1 не означает, что условие (2) является необходимым для устойчивости уравнения (1). Теорема 1 определяет симплекс, являющийся подмножеством области устойчивости уравнения (1). Вообще говоря, границы области устойчивости уравнения (1) не выпуклы.

Доказана невозможность увеличения хотя бы одного из знаменателей в неравенстве (2) с сохранением устойчивости уравнения (1).

Из теоремы 1 получаем следующий, более простой признак асимптотической устойчивости уравнения (1).

Теорема 2. Если $a_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq k$) и

$$0 < \sum_{i=1}^k i a_i \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Константа $\pi/2$ в правой части неравенства (3) неулучшаема. Однако если допустить, чтобы правая часть в неравенстве (3) зависела от порядка уравнения, то получим следующий признак асимптотической устойчивости уравнения (1).

Теорема 3. Если $a_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq k$) и

$$0 < \sum_{i=1}^k i a_i < 2k \sin \frac{\pi}{2(2k-1)}, \quad (4)$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Правая часть неравенства (4) также неулучшаема.

Литература

1. Kipnis M.M., Komissarova D.A. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations. // J. Difference Equ. Appl. 2007. Vol. 13, № 5. P. 457-461.
2. Комиссарова Д.А., Кипнис М.М. Простое условие асимптотической устойчивости для разностного уравнения $x(n)=x(n-1)-ax(n-m)-bx(n-k)$ // Известия Челябинского науч. центра. 2007. Вып. 1(35). С. 1-4.

К ВОПРОСУ О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ КВАДРАТНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.В. КОНАШЕНКО, Н.А. ШЕРСТНЁВА
Смоленский государственный университет

УДК 517.927.25

Ключевые слова: базисность, бесселевость, пучок дифференциальных операторов, система корневых функций.

В докладе рассматривается необходимое условие базисности системы корневых функций квадратичного пучка дифференциальных операторов. Сформулирована теорема – критерий бесселевости. Она проиллюстрирована на трёх конкретных примерах.

Рассмотрим квадратичный пучок дифференциальных операторов

$$Lu = u'' + (2\gamma a + p(x))u' + (\gamma^2 b + q(x))u, \quad (1)$$

где $p(x) \in W_1^1(G)$, $q(x) \in L_1(G)$ - некоторые функции. Согласно известной теореме Н.К. Бари [1] установление безусловной базисности данной системы $\{u_n\}$ в некотором гильбертовом пространстве H сводится либо к

установлению бесселевости систем вида $\left\{ \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}$ и $\left\{ \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$, где $\{v_n\}$ -

система, биортогонально сопряжённая к $\{u_n\}$ в пространстве H , полноты и равномерной минимальности одной из этих систем, либо к установлению бесселевости, гильбертовости и минимальности системы

$\left\{ \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}$. Мы в качестве системы $\{u_n\}$ рассматриваем систему корневых

функций пучка (1), определяемую безотносительно к виду краевых условий [2]. Пространство H в нашем случае $L_2(G)$, где G - конечный промежуток числовой оси. Так как построение биортогональной системы при таком подходе затруднительно, мы рассматриваем условия базисности в соответствии со второй частью теоремы Н.К. Бари. Согласно этому подходу необходимым условием базисности является бесселевость системы корневых функций пучка (1). В работе [2] сформулирована следующая теорема.

Пусть: а) последовательность спектральных параметров $\{\gamma_n\}$ не имеет конечных точек сгущения; б) существуют константы $c_1 > 0, c_2 > 0$ такие, что для любого натурального n выполнены неравенства $|\operatorname{Im}(i\gamma_n a)| \leq c_1, |\operatorname{Im}(\gamma_n c)| \leq c_2$, где $c = \sqrt{b - a^2}$; в) ранг собственных функций равномерно ограничен. Тогда найдётся такое число $p_0 > 0$, что при

любых $p(x)$ таких, что $\|p(x)\|$ в $L_2(G)$ меньше p_0 для бесселевости системы $\left\{ \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}$ в $L_2(G)$ необходимо и достаточно выполнение условия г) существует константа $c_3 > 0$ такая, что для любых $\gamma \in C$ выполнено соотношение $\sum_{|\gamma_n - \gamma| \leq 1} 1 \leq c_3$ (так называемое условие «сумма единиц»).

Автоматически это условие г) становится необходимым для безусловной базисности в $L_2(G)$ нормированной системы корневых функций, то есть базисности Рисса. Проиллюстрируем применение этой теоремы на конкретных примерах, выясняя вопрос о бесселевости системы корневых функций и тем самым выясняя вопрос о потенциальной базисности.

В работе [3] рассматривается задача $y'' - 2\gamma ay' + \gamma^2 by = 0$, $y(0) = y(1) = 0$, где $a, b \in R, a^2 > b, b \neq 0$. В этих предположениях соответствующее уравнение в частных производных, из которого возникает данная задача, является гиперболическим. Характеристическое уравнение имеет корни $\omega_1 = a + \sqrt{a^2 - b}$, $\omega_2 = a - \sqrt{a^2 - b}$. Характеристический определитель - $e^{a\gamma} - e^{a_2\gamma}$. Таким образом, возникает последовательность спектральных параметров $\{\gamma_n\} = \left\{ \frac{\pi ni}{\sqrt{a^2 - b}} \right\}$, $n \in Z$. Все элементы этой последовательности чисто мнимые. Легко заметить, что все условия теоремы выполнены. Значит, система корневых функций будет бесселевой независимо от знака b . В выше же указанной работе теоремы применяются только для $b < 0$.

Рассмотрим другой пример: квадратичный пучок $y'' - 2\gamma y' + 3\gamma^2 y = 0$ с краевыми условиями $y(0) = 0, y'(1/2) = y'(1)$. Характеристическое уравнение имеет корни $\omega_1 = 3i, \omega_2 = -i$. Учитывая краевые условия, получим уравнение $3e^{4i\gamma} - 3e^{5/2 i\gamma} - e^{1/2 i\gamma} + 1 = 0$, которое после замены $e^{1/2 i\gamma} = t$ примет вид $3t^8 - 3t^5 - t + 1 = 0$. Оно имеет два действительных положительных корня $t_1 = 1, t_2 \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$ и три пары комплексно сопряжённых корней. Таким образом, возникает восемь последовательностей спектральных параметров $\{\gamma_{n,k}\}$, где $\gamma_{n,k} = 4\pi n + c_k, c_k = O(1), k = 1, \dots, 8$, причём $c_1 = 0$. Очевидно, что все условия теоремы выполнены. Поэтому система корневых функций рассматриваемой задачи будет бесселевой в $L_2(0;1)$.

Рассмотрим третий пример: пучок $y'' - 6\gamma y' + 5\gamma^2 y = 0$ с теми же краевыми условиями $y(0) = 0, y'(1/2) = y'(1)$. Теперь характеристическое

уравнение имеет корни $\omega_1 = 5, \omega_2 = 1$. Учитывая краевые условия и сделав замену $e^{\frac{1}{2}t} = t$, получим уравнение $5t^{10} - 5t^5 - t^2 + t = 0$. Это уравнение имеет четыре действительных корня $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 \in (0;1), t_4 < 0$ и три пары комплексно сопряжённых корней. В итоге возникает девять последовательностей спектральных параметров $\{\gamma_{n,k}\}$, где $\gamma_{n,k} = 4\pi i + c_k, c_k = O(1), k = 1, \dots, 9, c_1 = 0$. Опять-таки все условия теоремы легко проверяются. Таким образом, система корневых функций рассматриваемой задачи будет бесселевой в $L_2(0;1)$.

Литература

1. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. зап. МГУ. 1951. Т. 4. Вып. 148. С. 69-107.
2. Конашенко А.В. Критерий бесселевости системы корневых функций квадратичного пучка дифференциальных операторов // Доклады РАН. 2000. Т. 373, № 6. С. 1-3.
3. Шкалик А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 190-229.

СИЛЬНО ГАРАНТИРОВАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ

К.Н. КУДРЯВЦЕВ¹, И.С. СТАБУЛИТ²

¹Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск

²Челябинская государственная агроинженерная академия,

e-mail: ¹kudrkn@gmail.com, ²irisku76@mail.ru

УДК 519.833

Ключевые слова: *дуополия Хотеллинга, бескоалиционная игра, игра при неопределенности, сильно гарантированное равновесие.*

Исследована дуополия Хотеллинга на плоскости с манхэттенским расстоянием и при неопределенности. Построено сильно гарантированное равновесие.

Рассматривается дуополия Хотеллинга [1] на плоскости [2; 3]. В каждой точке единичного квадрата

$$D = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\},$$

называемого далее городом Хотеллинга, с равной плотностью расположены покупатели. На квадрате определена манхэттенская

метрика, а именно, расстояние между двумя точками вычисляется как сумма модулей разности их координат.

В городе действуют два продавца (игроки I и II), реализующие один и тот же товар. Первый продавец (игрок I) расположен в точке с координатами $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Местоположение игрока II не определено. Известно лишь то, что власти города выделяют для него точку в «правой» части города. Ее координаты будут (y_1, y_2) , где интервальные неопределенности $y_1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ и $y_2 \in [0, 1]$.

Партия игры протекает следующим образом. Игроки, не вступая в переговоры, независимо друг от друга назначают цены c_1 и c_2 на предлагаемый товар. Одновременно с этим власти города объявляют о выделении места под магазин второго игрока – реализуется конкретное значение неопределенности $y = (y_1, y_2)$.

После этого каждый из покупателей, находящийся в точке $(x_1, x_2) \in D$, сравнивает свои затраты на посещение каждого из продавцов $L_i(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2$), которые представляют собой сумму стоимости товара c_i и стоимости доставки товара (пропорциональных манхэттенскому расстоянию от покупателя до продавца).

Покупатель приобретает товар у того игрока, затраты на посещение которого ниже. При этом весь город разобьется на два множества D_1 и D_2 , тех, кто предпочел игрока I и II соответственно.

Прибыль $f_i(c_1, c_2, y)$ i -го игрока ($i = 1, 2$) равна произведению цены единицы товара c_i на площадь S_i области D_i ,

$$f_i(c_1, c_2, y) = c_i \cdot S_i \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Целью каждого из игроков является назначение такой цены на свой товар, чтобы его прибыль была по возможности больше, при этом игроки вынуждены ориентироваться на возможность реализации любой неопределенности $y \in Y = \{(y_1, y_2) \mid 0.5 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1\}$.

Формально описанная выше бескоалиционная игра при неопределенности представляет собой кортеж

$$\langle \{1, 2\}, \{C_i = [0, 1]\}_{i=1,2}, Y = \{(y_1, y_2) \mid 0.5 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1\}, \{f_i(c_1, c_2, y)\}_{i=1,2} \rangle. \quad (2)$$

Здесь 1 и 2 – номера игроков, C_i - множество стратегий c_i у i -го игрока, Y - множество неопределенностей $y = (y_1, y_2)$. Функция выигрыша игрока i ($i = 1, 2$) определена в (1).

Для игры (2) построены *сильно гарантированное равновесие* и *балансовое равновесие* (введенные для бескоалиционных игр при неопределенности в [4] и [5] соответственно).

Литература

1. Hotelling H. Stability in Competition // Economic Journal. 1929. Vol.39, № 153. P. 41-57.
2. Мазалов В.В., Щипцова А.В., Токарева Ю.С. Дуополия Хотеллинга и задача о размещении на плоскости // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46, № 4. С. 91-100.
3. Кудрявцев К.Н., Стабулит И.С. Гарантированное по Парето равновесие в дуополии Хотеллинга на плоскости // Вестник Южно-Уральского государственного университета Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 40 (299). -С. 177-181.
4. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, № 2. С. 3-45.
5. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, № 1. С. 27-44.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

О.Н. КУПРИКОВА

Смоленский филиал МИИТ,
e-mail: onkuprikova@mail.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *квазигармоническая функция, краевая задача, дифференциальное уравнение, единичный круг.*

В статье рассматривается одна из основных краевых задач для квазигармонических функций произвольного рода n ($n > 1$) в односвязных областях. Разработан конструктивный алгоритм решения рассматриваемой задачи в классах квазигармонических функций первого рода в единичном круге.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная гладким замкнутым контуром L .

Напомним [1], что *квазигармоническими функциями рода n в области T^+* называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, а n – некоторое фиксированное натуральное число.

Хорошо известно [1], что всякую квазигармоническую функцию рода n в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где $A_k = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W(z)$.

Следуя К.М. Расулову [1], будем говорить, что квазигармоническая функция $W(z)$ рода n ($n \geq 1$) принадлежит классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, если в представлении (2) аналитическая компонента $\varphi(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т.е. аналитическая функция $\varphi(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача A_n . Требуется найти все квазигармонические функции $W(z)$ рода n ($n \geq 1$), принадлежащие классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$\frac{\partial W(t)}{\partial \bar{t}} + G(t) \overline{W(t)} = g(t), \quad (3)$$

где $\frac{\partial W(t)}{\partial \bar{t}} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}}$, а $G(t)$ и $g(t)$ – заданные на L функции класса $H(L)$ (т.е. удовлетворяющие на L условию Гельдера).

Основной целью настоящей работы является разработка общего конструктивного алгоритма решения задачи A_n в случае $n=1$, $G(t) \neq 0$ и $T^+ = \{z: |z| < 1\}$.

Пусть $L = \{t: |t| = 1\}$. В силу (2) всякую квазигармоническую первого рода в круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ функцию $W(z)$, принадлежащую классу $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, можно представить в виде

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} \varphi^+(z), \quad (4)$$

где $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$.

С учетом представления (4), краевое условие (3) при $n=1$ можно переписать так:

$$\frac{1}{2}\varphi^+(t) + G(t) \left(\overline{\frac{d\varphi^+(t)}{dt}} - t \cdot \overline{\varphi^+(t)} \right) = g(t), \quad t \in L. \quad (5)$$

Вводя в рассмотрение вспомогательную аналитическую в $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ функцию вида

$$\varphi^-(z) = \overline{\varphi^+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad z \in T^-, \quad (6)$$

краевое условие (5) перепишем в виде

$$\varphi^+(t) = G_1(t) \left\{ t \frac{d\varphi^-(t)}{dt} + \varphi^-(t) \right\} + g(t), \quad t \in L, \quad (7)$$

где $G_1(t) = t^2 G(t)$.

Наконец, вводя в рассмотрение вспомогательную функцию вида

$$\Phi^-(z) = z \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + \varphi^-(z), \quad z \in T^-, \quad (8)$$

где $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(1)}(L)$, равенство (7) запишем в виде

$$\varphi^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L. \quad (9)$$

Но равенство (9) представляет собой краевое условие хорошо известной (см., например, [1, с. 59]) задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\Phi(z) = \{\varphi^+(z), \Phi^-(z)\}$ с линией скачков L .

Предположим, что задача Римана (9) разрешима и уже найдено ее общее решение $\Phi(z) = \{\varphi^+(z), \Phi^-(z)\}$.

Далее, в классе $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(1)}(L)$ решаем дифференциальное уравнение Эйлера вида

$$z \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + \varphi^-(z) = \Phi^-(z), \quad z \in T^-, \quad (10)$$

где $\Phi^-(z)$ – решение задачи Римана (9). Если уравнение (10) неразрешимо в указанных классах функций, то искомая задача A_1 также неразрешима. Если же уравнение (10) разрешимо, то находим его общее решение. Наконец, среди решений дифференциального уравнения (10) выбираем те, которые удовлетворяют на L условию «симметрии»:

$$\overline{\varphi^+(t)} = \varphi^-(t), \quad t \in L, \quad (11)$$

где $\varphi^+(z)$ - решение задачи Римана (9).

Пусть $\tilde{\varphi}^+(z)$ те из решений задачи Римана (9), которые удовлетворяют условию (11). Тогда решение искомой краевой задачи A , в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ можно найти по формуле

$$W(z) = \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\tilde{\varphi}^+(z). \quad (12)$$

Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: СмолГУ, 2013. 189 с.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

С.Ю. КУРИЦЫН, К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: KuritsynSergey@me.com, kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *метааналитическая функция, краевая задача типа Римана, интегральные члены, гладкий контур.*

В статье разработан алгоритм решения одной из основных краевых задач типа Римана с интегральными членами в краевых условиях, когда носителем краевых условий служит произвольный гладкий контур.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $L \in C_\mu^2$, а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Напомним (см., например, [1, с. 139]), что *кусочно метааналитической функцией с линией скачков L* будем называть функцию $F(z)$ комплексного переменного z , которая в двух дополняющих друг друга до расширенной комплексной плоскости областях T^+ и T^- определяется так:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)] \exp\{\lambda_0 \bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)] \exp\left\{\lambda_0 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (1)$$

или

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_1 \bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_2 \bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) \exp\left\{\lambda_1 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\} + \varphi_1^-(z) \exp\left\{\lambda_2 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi_k^\pm(z) \in A(T^\pm)$, $k=0,1$, а $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ – некоторые постоянные ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), $m \in \mathbb{N}$ и $m \geq 2$, причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

Обычно функцию $F(z)$, задаваемую формулой (1), называют *кусочно метааналитической функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулой (2), – *кусочно метааналитической функцией второго типа*.

Кроме того, кусочно метааналитическую функцию $F(z)$ вида (1) (или (2)) будем называть *исчезающей на бесконечности*, если $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq k+1$ (или $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1$), где $k=0,1$.

Наконец, будем говорить, что кусочно метааналитическая функция $F(z)$ с линией скачков L принадлежит классу $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_k^\pm(z)$ ($k=0,1$) непрерывно продолжаются на границу L вместе со своими производными $\frac{d\varphi_k^\pm(z)}{dz}$ ($k=0,1$), причем так, что граничные значения функций $\varphi_k^\pm(z)$ ($k=0,1$) и указанных производных удовлетворяют на L условию Гёльдера.

Рассматривается следующая краевая задача (см. также [1, с. 141]). *Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) + G_1(t)F^-(t) + \int_L A_1(t, \tau)F^+(\tau)d\tau + \int_L B_1(t, \tau)F^-(\tau)d\tau = g_1(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} + G_2(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + \int_L A_2(t, \tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial n_+}d\tau + \int_L B_2(t, \tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial n_-}d\tau = ig_2(t), \quad (4)$$

где $G_k(t)$, $g_k(t)$ ($k=1,2$) – заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, причем $G_k(t) \neq 0$, а $A_k(t, \tau)$, $B_k(t, \tau)$ ($k=1,2$) – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(1)}(L \times L)$, $\frac{\partial}{\partial n_\pm}$ – производная по внутренней (внешней) нормали к контуру L .

В равенстве (4) множитель i при $g_2(t)$ введен для удобства в дальнейших обозначениях.

Следуя [1], сформулированную выше краевую задачу будем называть *второй основной обобщенной краевой задачей типа Римана в классах метааналитических функций*, или, короче, *задачей $GR_{2,M}$* , а соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) – *задачей $GR_{2,M}^0$* .

Отметим, что в классе функций вида (1) при $\lambda_0 = 0$, когда на L выполняются условия

$$A_k(t, \tau) \equiv B_k(t, \tau) \equiv 0 \quad (k = 0, 1), \quad (5)$$

задача $GR_{2,M}$ подробно исследована в работах К.М. Расулова (см. [1] и имеющуюся там библиографию). Основной целью настоящего сообщения является разработка конструктивного метода решения задачи $GR_{2,M}$ в классе функций вида (1) в случае произвольного гладкого контура L .

2. О решении задачи $GR_{2,M}$ в классе кусочно метааналитических функций первого типа. В силу представления (1) и соотношения (см., например, [2, с. 37])

$$\frac{\partial}{\partial n_{\pm}} = \pm i \left(t' \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \quad (6)$$

краевые условия (3) и (4) соответственно можно переписать так:

$$\exp \{ \lambda_0 \bar{t} \} \{ \varphi_0^+(t) + \bar{t} \varphi_1^+(t) \} - G_1(t) \exp \left\{ \lambda_0 \frac{\bar{t}}{t^m} \right\} \{ \varphi_0^-(t) + \bar{t} \varphi_1^-(t) \} + \quad (7)$$

$$+ \int_L A_1(t, \tau) \exp \{ \lambda_0 \bar{\tau} \} \{ \varphi_0^+(\tau) + \bar{\tau} \varphi_1^+(\tau) \} d\tau + \int_L B_1(t, \tau) \left\{ \lambda_0 \frac{\bar{\tau}}{\tau^m} \right\} \{ \varphi_0^-(\tau) + \bar{\tau} \varphi_1^-(\tau) \} d\tau = g_1(t),$$

$$t' \cdot \exp \{ \lambda_0 \bar{t} \} \cdot \left\{ \frac{\partial \varphi_0^+(t)}{\partial t} + \bar{t}' \frac{\partial \varphi_1^+(t)}{\partial t} \right\} - \bar{t}' \exp \{ \lambda_0 \bar{t} \} \cdot \left\{ \lambda_0 \cdot \varphi_0^+(t) + (1 + \lambda_0 \bar{t}) \varphi_1^+(t) \right\} - \quad (8)$$

$$- G_2(t) \left\{ t' \cdot \exp \left\{ \lambda_0 \frac{\bar{t}}{t^m} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial \varphi_0^-(t)}{\partial t} + \bar{t}' \frac{\partial \varphi_1^-(t)}{\partial t} \right\} \right\} +$$

$$+ G_2(t) \cdot \exp \left\{ \lambda_0 \frac{\bar{t}}{t^m} \right\} \cdot \left\{ \frac{\lambda_0 m t' \bar{t} + \lambda_0 t \bar{t}'}{t^{m+1}} \cdot \varphi_0^-(t) + \frac{\lambda_0 m t' (\bar{t})^2 + \bar{t}' t^{m+1} + \lambda_0 |t|^2 \bar{t}'}{t^{m+1}} \cdot \varphi_1^-(t) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_L A_2(t, \tau) \left\{ \tau' \cdot \exp \{ \lambda_0 \bar{\tau} \} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0^+(\tau)}{\partial \tau} + \bar{t} \frac{\partial \varphi_1^+(\tau)}{\partial \tau} \right) \right\} d\tau - \\
& - \int_L A_2(t, \tau) \left\{ \bar{\tau}' \cdot \exp \{ \lambda_0 \bar{\tau} \} \cdot \left(\lambda_0 \cdot \varphi_0^+(\tau) + (1 + \lambda_0 \bar{\tau}) \cdot \varphi_1^+(\tau) \right) \right\} d\tau - \\
& - \int_L \tau' \cdot \exp \left\{ \lambda_0 \frac{\bar{\tau}}{\tau^m} \right\} B_{11}(t, \tau) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0^-(\tau)}{\partial \tau} + \bar{\tau} \frac{\partial \varphi_1^-(\tau)}{\partial \tau} \right) d\tau + \\
& + \int_L \exp \left\{ \lambda_0 \frac{\bar{\tau}}{\tau^m} \right\} B_{11}(t, \tau) \cdot \left\{ \frac{\lambda_0 m \tau' \bar{\tau} + \lambda_0 \tau \bar{\tau}'}{\tau^{m+1}} \varphi_0^-(\tau) + \frac{\lambda_0 m \tau' (\bar{\tau})^2 + \bar{\tau}' \tau^{m+1} + \lambda_0 |\tau|^2 \bar{\tau}'}{\tau^{m+1}} \varphi_1^-(\tau) \right\} d\tau = \\
& = g_2(t).
\end{aligned}$$

Далее, перепишем равенство (7) в виде

$$\varphi_0^+(t) - G_{11}(t) \varphi_0^-(t) + \int_L A_{11}(t, \tau) \varphi_0^+(\tau) d\tau + \int_L B_{11}(t, \tau) \varphi_0^-(\tau) d\tau = Q_1(t), \quad (9)$$

где

$$G_{11}(t) = G_1(t) \exp \left\{ \lambda_0 \bar{t} \left(\frac{1}{t^m} - 1 \right) \right\},$$

$$A_{11}(t, \tau) = A_1(t, \tau) \exp \{ \lambda_0 (\bar{\tau} - \bar{t}) \}, \quad B_{11}(t, \tau) = B_1(t, \tau) \exp \left\{ \lambda_0 \left(\frac{\bar{\tau}}{\tau^m} - \frac{\bar{t}}{t^m} \right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
Q_1(t) = & -\bar{t} \exp \{ \lambda_0 \bar{t} \} \cdot \varphi_1^+(t) + \bar{t} G_1(t) \exp \left\{ \lambda_0 \frac{\bar{t}}{t^m} \right\} \cdot \varphi_1^-(t) + g_1(t) \exp \{ -\lambda_0 \bar{t} \} - \\
& - \int_L A_1(t, \tau) \cdot \bar{\tau} \exp \{ \lambda_0 (\bar{\tau} - \bar{t}) \} \varphi_1^+(\tau) d\tau - \int_L B_1(t, \tau) \cdot \bar{\tau} \exp \left\{ \lambda_0 \left(\frac{\bar{\tau}}{\tau^m} - \frac{\bar{t}}{t^m} \right) \right\} \varphi_1^-(\tau) d\tau.
\end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $\chi_1 = \text{Ind} G_{11}(t) = \text{Ind} G_1(t)$ - индекс Коши функции $G_1(t)$. Тогда, считая временно $Q_1(t)$ известной функцией и решая обобщенную задачу Римана (9) относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции $\varphi_0(z) = \{ \varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z) \}$, например, методом, изложенным в §2 монографии [1], будем иметь:

$$\varphi_0^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_1(\tau)}{\tau - z} d\tau + \int_L R_0^+(z, \tau) Q_1(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \beta_k a_k^+(z), \quad (11)$$

$$\varphi_0^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_1(\tau)}{G_{11}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_0^-(z, \tau) Q_1(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \beta_k a_k^-(z), \quad (12)$$

где функции $R_0^+(z, \tau)$, $R_0^-(z, \tau)$ и $a_k^+(z)$ ($a_k^-(z)$) вполне определяются по коэффициентам краевого условия, β_k ($k=1, 2, \dots, l_1$) - произвольные комплексные постоянные, а

$$l_1 = \begin{cases} \chi_1 + \nu_1 - r_1, & \text{если } \chi_1, \\ \max(0, \nu_1 - \chi_1) \end{cases}$$

(см., например, [1, с. 49]).

В силу формул Сохоцкого (см., [1, с. 27] или [2, с. 29]) из (11) и (12) (с учетом обозначений (10)) соответственно получаем

$$\varphi_0^+(t) = -\bar{t} \cdot \varphi_1^+(t) + \int_L M_0^+(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \beta_k a_k^+(t), \quad t \in L, \quad (13)$$

$$\varphi_0^-(t) = -\bar{t} \cdot \varphi_1^-(t) + \int_L M_0^-(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \beta_k a_k^-(t), \quad t \in L, \quad (14)$$

где функции $M_0^+(t, \tau)$, $M_0^-(t, \tau)$ - вполне определенные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(1)}(L \times L)$.

С помощью дифференцирования из (13) и (14) находим:

$$\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} = -\bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \overline{t^2} \varphi_1^+(t) + \int_L \frac{\partial M_0^+(t, \tau)}{\partial t} \varphi_1^+(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \beta_k \frac{da_k^+(t)}{dt}, \quad (15)$$

$$\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} = -\bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \overline{t^2} \varphi_1^-(t) + \int_L \frac{\partial M_0^-(t, \tau)}{\partial t} \varphi_1^-(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \beta_k \frac{da_k^-(t)}{dt}. \quad (16)$$

Наконец, подставив в левую часть равенства (8) вместо $\varphi_0^+(t)$, $\varphi_0^-(t)$, $\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}$, $\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt}$ их значения, найденные по формулам (13)-(16), получим

$$\varphi_1^+(t) - G_{21}(t) \varphi_1^-(t) + \int_L A_{21}(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \int_L B_{21}(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau = Q_2(t), \quad (17)$$

где $G_{21}(t)$ - функция, которая выражается через заданные функции $G_k(t)$ ($k=1, 2$), а $A_{21}(t, \tau)$, $B_{21}(t, \tau)$ - определенные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*(L \times L)$ (в силу громоздкости мы здесь не приводим их явные выражения).

Равенство (17) - краевое условие обобщенной задачи Римана относительно кусочно аналитической функции $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$, исчезающей на бесконечности. Предположим, что обобщенная задача Римана (17) разрешима и уже найдено ее общее решение $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$. Тогда, подставив граничные значения $\varphi_1^+(t)$, $\varphi_1^-(t)$ найденных функций $\varphi_1^+(z)$, $\varphi_1^-(z)$ в правую часть формулы (10), а затем решая обобщенную задачу Римана (9) (в случае ее разрешимости), определим кусочно аналитическую функцию $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$.

Наконец, по найденным функциям $\varphi_0^\pm(z)$ и $\varphi_1^\pm(z)$ решение искомой задачи $GR_{2,M}$ определим по формуле

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]\exp\{\lambda_0\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)]\exp\left\{\lambda_0\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-. \end{cases} \quad (18)$$

Обратно, если (18) есть решение задачи $GR_{2,M}$, то кусочно аналитическая функция $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$ удовлетворяет краевому условию (17), а функция $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$ удовлетворяет краевому условию (9).

Таким образом, получили следующий результат.

Теорема 1. Если $L \in C_\mu^2$, то решение задачи $GR_{2,M}$ в классе кусочно метааналитических функций первого типа сводится к последовательному решению двух обобщенных задач Римана (17) и (9) относительно неизвестных кусочно аналитических функций $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$ и $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$ соответственно. При этом обобщенная задача Римана (17) не зависит от $\varphi_0^\pm(z)$, а в свободный член $Q_1(t)$ краевого условия задачи Римана (9) входят граничные значения функций $\varphi_1^\pm(z)$.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
2. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: СмолГУ, 2013. 189 с.

О НЕВАНЛИННОВСКИХ ОБЛАСТЯХ С НЕСПРЯМЛЯЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

М.Я. МАЗАЛОВ¹, О.Д. МОТРОШИЛОВА²

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: ¹maksimmazalov@yandex.ru, ²ura2001@rambler.ru

УДК 517.54

Ключевые слова: неванлинновские области, полианалитические функции.

Существует область с неспрямляемой границей, в которой есть непостоянные бианалитические функции, равные нулю на границе.

Пусть D - единичный круг на плоскости, T - единичная окружность. Ограниченная односвязная область Ω с границей Γ называется *неванлинновской* [1] (кратко – *n-областью*), если существуют функции u и v , аналитические и ограниченные в Ω , такие, что равенство $\bar{z} = u(z)/v(z)$ выполнено в смысле конформного отображения почти всюду на Γ . Последнее означает, что почти всюду на T выполнено равенство угловых граничных значений $\overline{\varphi(t)} = u(\varphi(t))/v(\varphi(t))$, где φ - некоторая функция, аналитическая и однолистная в D , конформно отображающая D на Ω .

Далее будем считать область Ω жордановой, а граничную кривую Γ назовем *неванлинновским контуром* (кратко – *n-контуром*).

Имеет место следующий критерий [1, Предложение 3.1].

Теорема 1. *Ω является n-областью тогда и только тогда, когда существуют функции f_1 и f_2 , аналитические и ограниченные в области $\{z: |z| > 1\}$, такие, что почти всюду на T выполнено равенство угловых граничных значений $\varphi = f_1/f_2$ (соответственно изнутри и извне T).*

Из теоремы 1 автоматически следует, что аналитический контур Γ является *n-контуром* тогда и только тогда, когда функция φ рациональна. В частности, *n-контуром* не является эллипс, отличный от окружности, а также любой многоугольник.

Следующая теорема принадлежит К.Ю. Федоровскому [1, гл. 2].

Теорема 2. *Если Γ - n-контур, то существует непрерывная функция на Γ , которая для любого фиксированного n не может быть равномерно приближена на Γ с любой степенью точности полианалитическими многочленами порядка n . Если Γ не является n-контуром, то множество бианалитических многочленов плотно в пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных функций.*

Следующее утверждение – частный случай теоремы 5.5 из [1].

Теорема 3. *Пусть Ω - область, ограниченная n-контуром Γ . Тогда существует непостоянная бианалитическая функция $f(z) = f_1(z) + \bar{z}f_2(z)$ (где f_1 и f_2 аналитические в Ω), равная нулю на Γ .*

Доказательство. Из теоремы 2 и теоремы Хана-Банаха следует существование ненулевой меры μ на Γ , ортогональной пространству бианалитических многочленов. Рассмотрим свертку $f = \mu^*(\bar{z}/z)$. Очевидно, это непостоянная функция, бианалитическая в области Ω и всюду вне замыкания Ω . В силу теоремы Ф. и М. Риссов мера μ не имеет атомов, и, следовательно, функция f непрерывна при всех z . Из формулы Тейлора следует, что мера μ также ортогональна функциям вида $(z - z_0)^{-1}$ и $\bar{z}(z - z_0)^{-1}$ при всех z_0 с достаточно большим $|z_0|$. Но тогда в силу внутренней теоремы единственности аналитических

функций и непрерывности f имеем $f(z) \equiv 0$ вне Ω (в частности, на Γ). Таким образом, функция f искомая. *Теорема доказана.*

С учетом приложений n -областей, естественно возникает вопрос о том, насколько широк их класс, и, в частности, существуют ли неспрямляемые n -контуры. Последний вопрос в явном виде ставился с 2001 года (см. [1, задача 3.2; 2, задача 2.10]). Несмотря на существенные усилия, этот вопрос оставался без ответа; пример «самого плохого» (спрямляемого) n -контура был построен в [3].

В настоящей статье анонсируется пример неспрямляемого n -контура, недавно построенный одним из авторов. Работа будет опубликована в 2015 г. в журнале «Алгебра и анализ». В силу теоремы 3 область, ограниченная этим контуром – область неединственности для задачи Дирихле в классе бианалитических функций.

Литература

1. Кармона Х.Х., Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций // Математический сборник. 2002. Т.193, №10. С. 75-98.
2. Федоровский К.Ю. Аппроксимация и граничные свойства полианалитических функций // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2001. Т. 235. С. 262-271.
3. Баранов А.Д., Федоровский К.Ю. Регулярность границ неванлинновских областей и однолистные функции в модельных подпространствах // Математический сборник. 2011. Т.202, №12. С. 3-22.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ БИОФИЗИКИ

А.Н. ПЕРМИНА

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
e-mail: a.permina@yandex.ru

УДК 519.6:574:539.1.04

Ключевые слова: *система интегральных уравнений Вольтерра первого рода, однозначная разрешимость системы интегральных уравнений.*

В работе исследуется система двух нелинейных интегральных уравнений. Рассмотрены некоторые ограничения на параметры для линеаризованной системы, обеспечивающие однозначную разрешимость последней.

Анализ результатов прижизненного измерения содержания ^{90}Sr в эмали передних зубов позволяет ретроспективно восстанавливать динамику поступления радионуклидов в организм человека в результате внутреннего облучения [1; 2].

Восстановление динамики поступления ^{90}Sr в организм человека на основе измерения зубным детектором $Y(T)$ -поверхностной β -активности эмали передних постоянных зубов, использует известную связь между показаниями счетчика β -частиц и характеристиками процесса обмена ^{90}Sr [1]:

$$Y(T) = \beta \int_{t_0}^{t_u} \alpha(t-U+10, t)x(t)k(t-T)R(t-T, t_u-t)dt, \quad T_{\min} \leq T \leq T_{\max}. \quad (1)$$

После некоторых несложных преобразований ([2]) уравнение (1) может быть сведено к системе уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(U) = \int_0^U \alpha(t-U+10, t)k(t-U+10)z(t)dt, & 0 \leq U \leq 10, \\ \phi(U) = \int_0^U \alpha(t, t-V+10)k(t)z(t-V+10)dt, & 0 \leq V \leq 10, \\ k(0) = 1, \end{cases} \quad (2)$$

исследование которой и есть основная задача настоящей работы.

Используя модифицированный метод Ньютона [4], линеаризуем систему (2), сведя её к системе двух уравнений Вольтерра первого рода:

$$\begin{cases} \varphi_1(s) = \int_a^s [K_{11}(s, t)x_1(t) + K_{12}(s, t)x_2(t)]dt, \\ \varphi_2(s) = \int_a^s [K_{21}(s, t)x_1(t) + K_{22}(s, t)x_2(t)]dt, \\ x_1(0) = 0, \quad a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \quad (3)$$

для которой доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия.

1. Все рассматриваемые функции непрерывны на $[a, b]$, причем функции $\varphi_1(s), \varphi_2(s), K_{11}(s, t), K_{12}(s, t), K_{21}(s, t), K_{22}(s, t)$ p раз дифференцируемы (где p - некоторое натуральное число).

2. $\varphi_1(a) = 0, \varphi_2(a) = 0$.

3. $\min_{s \in [a, b]} \{ \|K_{11}(s, s)\|_{L_2}, \|K_{12}(s, s)\|_{L_2}, \|K_{21}(s, s)\|_{L_2}, \|K_{22}(s, s)\|_{L_2} \} = k \neq 0$.

4. $\|\varphi_1(s)\|_{L_2} \leq k_1, \|\varphi_2(s)\|_{L_2} \leq k_2$.

5. $c'_{11} \leq \|K_{11}\|_{L_2} \leq c_{11}, \|K_{12}\|_{L_2} \leq c_{12}, c'_{22} \leq \|K_{22}\|_{L_2} \leq c_{22}, \|K_{21}\|_{L_2} \leq c_{21}$, причем $c_{12}, c_{21} < c'_{11}, c'_{22} \leq c_{11}, c_{22}$.

Тогда система (3) разрешима единственным образом.

Оценка погрешности при решении линеаризованной системы может быть произведена стандартными методами (например, [3]).

Литература

1. Degteva M. [et all]. The Techa river dozimetry system // Health Phys. 2000. Vol. 79, № 1. P. 24 -35.
2. Zalyapin V.I., Krivoschapov V.A., Degteva M.O. Numerical solution of an applied biophysics inverse problem // Inverse problem in Science&Engineering. 2004. Vol.12, № 4. P.379-392.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения. Методы, алгоритмы, программы. Киев, 1986. С.19 -137.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

ТОЧНЫЙ ЗАКОН РЕГУЛЯРНОГО ПОПАРНОГО СОВПАДЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ОТРЕЗКЕ

М.А. ПЕТРОСОВА, И.В. ТИХОНОВ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ
МПГУ, НИЯУ МИФИ, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва,
e-mail: petrosova05@mail.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

УДК 517.518.82

Ключевые слова: *полиномы Бернштейна, правило склеивания.*

Указано точное правило регулярного попарного совпадения для полиномов Бернштейна, взятых от кусочно линейной функции на отрезке $[a, b]$ с целыми значениями a, b .

Известно, что в последовательности полиномов Бернштейна для кусочно линейной функции могут возникать регулярно совпадающие пары, образующие бесконечную цепочку склеиваний (см. [1 - 4]). В недавней публикации [4] было отмечено, что склеивание полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1, 1]$ подчинено более сложным закономерностям, чем те, что действуют на стандартном отрезке $[0, 1]$. В настоящем сообщении представим обобщенное правило, пригодное для кусочно линейной функции, заданной на произвольном отрезке $[a, b]$ с целыми значениями a, b .

Для функции $f \in C[a, b]$ полиномы Бернштейна определяются формулой

$$B_n(f, x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{(b-a)k}{n} + a\right) C_n^k (x-a)^k (b-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Здесь x – вещественная переменная, а C_n^k – биномиальные коэффициенты.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно линейна на отрезке $[a, b]$ с целыми значениями a, b . Предположим, что абсциссы точек излома рациональны и записаны в виде несократимых дробей

$$x_j = \frac{p_j}{q_j}, \quad p_j \in \mathbf{Z}, \quad q_j \in \mathbf{N}, \quad aq_j < p_j < bq_j, \quad j=1, \dots, r.$$

Пусть $l = b - a$ и q – наименьшее общее кратное знаменателей q_1, \dots, q_r . Определим число

$$\nu = \frac{lq}{\text{НОД}(l, p_1 - aq_1, \dots, p_r - aq_r)}.$$

Тогда

$$B_{\nu m}(f, x) = B_{\nu m+1}(f, x), \quad m \in \mathbf{N}.$$

Из общей теоремы 1 легко извлекается прежний результат [4], относящийся к симметричному отрезку $[-1, 1]$. В этом случае

$$\nu = \frac{2q}{\text{НОД}(2, p_1 + q_1, \dots, p_r + q_r)}.$$

Если все числа p_j, q_j ($j=1, \dots, r$) являются нечетными, то $\nu = q$. Если же среди чисел p_j, q_j ($j=1, \dots, r$), образующих несократимые дроби p_j/q_j , есть хотя бы одно четное число, то $\nu = 2q$. В итоге получаем такое правило, отмеченное в [4].

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно линейна на $[-1, 1]$ с конечным числом точек излома, абсциссы которых рациональны и представлены в виде несократимых дробей $x_j = p_j/q_j$, $j=1, \dots, r$. Здесь $p_j \in \mathbf{Z}$, $q_j \in \mathbf{N}$, $|p_j| < q_j$, $j=1, \dots, r$. Пусть q – наименьшее общее кратное знаменателей q_1, \dots, q_r . Тогда если все числа p_j, q_j ($j=1, \dots, r$) являются нечетными, то

$$B_{qm}(f, x) = B_{qm+1}(f, x), \quad m \in \mathbf{N}.$$

Если же среди чисел p_j, q_j ($j=1, \dots, r$) есть хотя бы одно четное число, то $B_{2qm}(f, x) = B_{2qm+1}(f, x)$, $m \in \mathbf{N}$.

Аналогично разбираются примеры на других конкретных отрезках $[a, b]$ с целыми значениями a, b .

Отметим, что доказательство универсальной теоремы 1 основано на сведении общей ситуации к случаю стандартного отрезка $[0, 1]$, где действует простое правило склеивания, указанное в [3] (см. также [2]). Кроме того, важную роль играет следующая элементарная лемма.

Лемма. Для системы дробей

$$\frac{\alpha_1}{l\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_r}{l\beta_r},$$

где $l \in \mathbf{N}$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{N}$, $\text{НОД}(\alpha_j, \beta_j) = 1$, $\alpha_j < l\beta_j$, $j = 1, \dots, r$, наименьший общий знаменатель $\nu \in \mathbf{N}$ находится по формуле

$$\nu = \frac{l}{\text{НОД}(l, \alpha_1, \dots, \alpha_r)} \text{НОК}(\beta_1, \dots, \beta_r).$$

Литература

1. Passow E. Deficient Bernstein polynomials // Journal of Approximation Theory. 1989. V. 59, No. 3. -P. 282–285.
2. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Том 8. Часть 1. Исследования по математическому анализу (Итоги науки. Юг России). Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А. 2014. С. 126–175.
3. Петухова Н.Ю., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. Свойство склеивания полиномов Бернштейна для кусочно-линейных непрерывных функций // Математика, информатика, физика в науке и образовании: сборник научных трудов к 140-летию МПГУ. М.: Прометей, 2012. С. 81–82.
4. Петросова М.А., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. Правило попарного склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции: ВЗМШ. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. С. 98–99.

ПРИМЕНЕНИЕ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА В ИССЛЕДОВАНИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ РЕГИОНОВ РОССИИ

И.С. ПУШКОВ

ООО «Некст Медиа», г. Москва

e-mail: pasman.exe@list.ru

УДК 314

Ключевые слова: *кластерный анализ, дифференциация регионов, уровень жизни.*

В статье представлено применение кластерного анализа для объединения регионов в группы на основе разнородных социально-экономических показателей и осуществлён анализ полученных данных.

Основным вопросом данного исследования является задача выделения групп регионов России по различным социально-экономическим показателям. Выделение подобных групп является типичной задачей кластерного анализа. В качестве показателей были выбраны различные показатели, характеризующие благосостояние населения, уровень развития инфраструктуры и качества жизни в целом, основные из которых:

- среднедушевые денежные доходы населения (в месяц; рублей);
- среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций (рублей);
- средний размер назначенных пенсий (рублей);
- величина прожиточного минимума, установленная в субъектах Российской Федерации за IV квартал 2013 г.;
- потребительские расходы в среднем на душу населения (в месяц; рублей);
- благоустройство жилищного фонда в 2013 г.;
- ожидаемая продолжительность жизни при рождении;
- стоимость фиксированного набора потребительских товаров и услуг;
- число зарегистрированных преступлений на 100 000 человек населения;
- уровень безработицы в процентах;
- заболеваемость на 1000 человек населения;
- валовой региональный продукт на душу населения (рублей).

Для решения задачи кластеризации был использован пакет SPSS Statistics. Методом кластеризации был выбран метод Уорда (Ward's method), так как он построен для оптимизации минимальной дисперсии внутри кластера. Обработка данных показала наличие пяти кластеров, так как при уменьшении их количества стал наблюдаться скачок коэффициента расстояния между кластерами (коэффициент увеличивался более чем в два раза). Затем на основании кластерной принадлежности региона была проведена обработка средних значений, характеризующих кластер в целом. Результаты анализа средних показателей позволили составить профиль для каждого кластера.

В четвертый и пятый кластеры вошло по два региона. Четвертый кластер состоит из г. Москвы и Чукотского АО. Этому кластеру соответствуют самые большие доходы населения (заработная плата, размер пенсий), расходы и стоимость товаров и услуг. Также для кластера характерны высокий валовой региональный продукт (второе место) и, что вполне ожидаемо, самый высокий коэффициент миграционного прироста, наивысший показатель количества трудоспособного населения и самый низкий уровень безработицы и заболеваемости.

Для пятого кластера, состоящего из Сахалинской и Тюменской областей, характерны первое место по валовому продукту на душу населения и числу населения моложе трудоспособного возраста и второе место по доходам, расходам и стоимости товаров и услуг. Что

интересно, здесь наблюдается самое большое число зарегистрированных преступлений.

Среднее положение по рассмотренным показателям занимает первый кластер из пятнадцати регионов. Это третье место по большинству рассмотренных показателей, среди них доходы, заработная плата, потребительские расходы, валовой региональный продукт. Однако кластер занимает второе место по ожидаемой продолжительности жизни и первое по потреблению мясомолочных продуктов, что может быть объяснено географическим положением и структурой промышленности.

Второй и третий кластеры включают в себя наибольшее количество регионов (37 и 24 соответственно). Причем второй кластер, самый многочисленный, занимает последнее место по большинству рассмотренных показателей, исключение – ожидаемая продолжительность жизни (1 место) и минимальный уровень преступности, а третий кластер характеризуется вторым по величине количеством преступлений и занимает четвертое место по исследуемым показателям.

О НЕТЕРОВОСТИ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ ТРИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.В. РАСТОРГУЕВА, И.Б. БОЛОТИН

Смоленский государственный университет,
e-mail: avrastorgueva@yandex.ru, IBBolotin@smolgu.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *трианалитическая функция, краевая задача Римана, разрывные коэффициенты.*

Работа посвящена изучению второй основной краевой задачи типа Римана с разрывными коэффициентами в классе трианалитических функций в случае полуплоскости. В ходе исследования установлена нетеровость рассматриваемой задачи.

Пусть $L = \{t \mid \text{Im} t = 0\}$, $D^+ = \{z \mid \text{Im} z > 0\}$ и $D^- = \bar{C} \setminus (D^+ \cup L)$. В дальнейшем в основном будем использовать термины и обозначения принятые в [1]. Пусть $G_k(t)$ – заданные на L функции класса $H_0^{(4-k)}$, причем $G_k(t) \neq 0$ всюду на L ($k = 0, 1, 2$). Следуя Н.И. Мусхелишвили,

точки разрыва функций $G_0(t)$, $G_1(t)$ и их производных будем относить к узлам контура L . Все остальные точки контура L будем считать обыкновенными.

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все трианалитические функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$, принадлежащие классу $A_3(D^\pm) \cap I^{(4)}(L)$ [2], ограниченные вблизи узлов контура L , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие во всех обыкновенных точках L следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) = G_0(t)F^-(t) + g_0(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} = -G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + ig_1(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 F^+(t)}{\partial n_+^2} = -G_2(t) \frac{\partial^2 F^-(t)}{\partial n_-^2} - g_2(t), \quad (3)$$

где $G_k(t)$, $g_k(t)$ – заданные на L функции класса $H_0^{(4-k)}$ ($k = 0,1,2$), причем $G_k(t) \neq 0$ всюду на L , $\frac{\partial}{\partial n_+} \left(\frac{\partial}{\partial n_-} \right)$ – производная по внутренней (внешней) нормали к контуру L . Здесь множители (-1) при $G_1(t)$, $G_2(t)$ и множитель i^k при $g_k(t)$ соответственно введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу будем называть *второй основной краевой задачей типа Римана с разрывными коэффициентами для трианалитических функций в случае полуплоскости* или задачей $R_{2,3}$ в случае полуплоскости, а соответствующую однородную задачу ($g_0(t) \equiv g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) назовем задачей $R_{2,3}^0$ в случае полуплоскости.

Конструктивный метод решения поставленной задачи получен авторами в работах [2, 3]. А именно, установлено, что решение задачи $R_{2,3}$ в случае полуплоскости сводится к последовательному решению трех краевых задач Римана с разрывными коэффициентами в классах аналитических функций. Таким образом, картина разрешимости задачи $R_{2,3}$ будет складываться из картин разрешимости вспомогательных краевых задач.

Для полного исследования картины разрешимости задачи $R_{2,3}$ в случае полуплоскости требуется рассмотреть 27 случаев.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *В случае полуплоскости краевая задача $R_{2,3}$ нормально разрешима и количество p условий ее разрешимости, а также число l линейно независимых решений соответствующей однородной задачи*

$R_{2,3}^0$ конечны, то есть задача $R_{1,3}$ в случае полуплоскости является нетривиальной.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998.

2. Болотин И.Б., Расторгуева А.В. О решении основной краевой задачи типа Римана с разрывными коэффициентами для трианалитических функций в случае полуплоскости // Материалы 4-й Международной (заочной) научно-практической конференции «Теоретические и прикладные аспекты современной науки». Белгород, 2014.

3. Болотин И.Б., Расторгуева А.В. Об одной краевой задаче типа Римана с разрывными коэффициентами для трианалитических функций в случае полуплоскости // Материалы 5-й Международной (заочной) научно-практической конференции «Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики». Ульяновск: Изд-во SIMJET, 2015. С. 137–142.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: kahrیمانr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, квазигармоническая функция, краевая задача типа Римана, единичный круг.

В работе рассматривается краевая задача типа задачи Римана в классах кусочно квазигармонических функций произвольного рода n ($n > 1$) с линией скачков L . Устанавливается, что в случае, когда L – единичная окружность, решение рассматриваемой краевой задачи сводится к последовательному решению обычной скалярной задачи Римана для аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений n -го порядка.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная гладким замкнутым контуром L , а $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$. Для определенности будем считать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ .

Напомним [1], что *квазигармоническими функциями рода n в области T^+* называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, а n – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1] - [4], что всякую квазигармоническую функцию рода n в области T^+ можно представить в виде

$$W^+(z) = \sum_{k=0}^n A_k \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z) \in A(T^+)$, т.е. $\varphi^+(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W^+(z)$.

Определение 1. Функцию $W(z)$ будем называть *кусочно квазигармонической рода n с линией скачков L* , если она в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях T^+ и T^- определяется выражениями $W^+(z)$ и $W^-(z)$:

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z), & z \in T^+, \\ W^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (3)$$

где $W^+(z)$ определяется по формуле (2), а

$$W^-(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k}, \quad \varphi^-(z) \in A(T^-), \quad (4)$$

причем в каждой точке $t \in L$ существуют пределы: $\lim_{z \rightarrow t} W^\pm(z)$.

Всюду в дальнейшем будем говорить, что кусочно квазигармоническая функция $W(z)$ *ограничена (исчезает) на бесконечности*, если аналитическая функция $\varphi^-(z)$ в представлении (4) *ограничена (исчезает) на бесконечности*.

Наконец, будем говорить, что кусочно квазигармоническая рода n ($n \geq 1$) функция $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ с линией скачков L принадлежит классу $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(m)}(L)$, если в представлении (2) аналитическая компонента $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т.е. аналитическая функция $\varphi^+(z)$

непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число), а в представлении (4) функция $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(m)}(L)$.

Одной из основных краевых задач в классах кусочно квазигармонических функций рода n ($n \geq 1$) является следующая **задача R_n** : требуется найти все кусочно квазигармонические функции $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ рода n ($n \geq 1$) с линией скачков L , принадлежащие классу $Q_n(T^\pm) \cap H^{(n)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$W^+(t) = W^-(t)G(t) + g(t), \quad (5)$$

где $G(t)$, $g(t)$ – заданные на L комплексные функции, причем $G(t) \neq 0$ на L .

В дальнейшем сформулированную выше задачу R_n будем называть *задачей типа Римана для квазигармонических функций рода n* . Соответствующую R_n однородную задачу ($g(t) \equiv 0$) назовем *задачей R_n^0* .

Сразу заметим, что в силу представлений (2) и (4) краевое условие (5) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} = G(t) \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k} + g(t), \quad t \in L. \quad (6)$$

Но равенство (6) есть краевое условие хорошо известной (см., например, [5, с. 365]) *обобщенной (дифференциальной) краевой задачи типа задачи Римана* относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$.

Таким образом, по сути, задача R_n равносильна дифференциальной задаче типа Римана (6) относительно кусочно аналитической функции $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$.

Известны различные подходы к решению краевых задач вида (6) (см., например, [1; 5; 6]), которые в общем случае состоят в том, что решение обобщенной (дифференциальной) задачи Римана вида (6) приводится к решению определенного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

В настоящем сообщении в случае круга $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $n=1$ предлагается эффективный метод решения задачи R_1 , суть которого состоит в сведении решения этой задачи к решению *обычной* краевой

задачи Римана (задачи сопряжения) в классе аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Расулов К.М. Видоизмененная краевая задача Дирихле для квазигармонических функций третьего рода // Известия СмолГУ. 2013. № 3(23). С. 387 -393.
3. Расулов К.М. О решении краевой задачи Дирихле в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ. 2014. № 1(25). С. 402 -409.
4. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math/ Schrften 23 (1965).
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГИЛЬБЕРТА В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ, А.П. АНДРЕЕНКОВ
Смоленский государственный университет,
e-mail: kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *метааналитические функции, краевая задача типа Гильберта, линия скачков, приближенные методы.*

Рассматривается одна из основных краевых задач типа Гильберта в классах метааналитических функций. Предлагается алгоритм для приближенного метода решения рассматриваемой задачи.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром L .

В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Напомним [1, с. 139], что метааналитическими функциями в области T^+ называются решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 F^+(z)}{\partial \bar{z}^2} + a_1 \frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} + a_0 F^+(z) = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ - дифференциальный оператор Коши-Римана, a_k ($k=0,1$) – произвольные комплексные постоянные.

Пусть λ_0 и λ_1 – корни характеристического уравнения

$$\Lambda^2 + a_1 \Lambda + a_0 = 0. \quad (2)$$

Известно [1], что всякую метааналитическую в T^+ функцию можно задавать в виде

$$F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] \exp\{\lambda \bar{z}\}, \quad z \in T^+, \text{ если } \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda \quad (3)$$

или

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_0 \bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_1 \bar{z}\}, \quad z \in T^+, \text{ если } \lambda_0 \neq \lambda_1, \quad (4)$$

где $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ – произвольные аналитические в T^+ функции.

Обычно функцию $F^+(z)$, задаваемую формулой (3), называют *метааналитической в T^+ функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулой (4), – *метааналитической в T^+ функцией второго типа*.

Будем говорить, что метааналитическая в области T^+ функция $F(z)$ принадлежит классу $M_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_k^+(z)$ ($k=0,1$) непрерывно продолжаются на границу L вместе со своими производными $\frac{\partial \varphi_k^+(z)}{\partial z}$ ($k=0,1$), причем так, что граничные значения функций $\varphi_k^+(z)$ ($k=0,1$) и указанных производных удовлетворяют на L условию Гёльдера.

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все метааналитические функции $F^+(z)$ класса $M_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$\operatorname{Re}\{\lambda_0(t)F^+(t)\} = q_0(t), \quad (5)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\lambda_1(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial n}\right\} = q_1(t), \quad (6)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внутренней нормали к L , $\lambda_k(t) = a_k(t) + ib_k(t)$, $q_k(t)$ ($k=0,1$) – заданные на L функции класса $H^{(1+k)}(L)$, причем $\lambda_k(t) = a_k(t) + ib_k(t) \neq 0$ ($k=0,1$).

Ради краткости сформулированную краевую задачу назовем *задачей $\Gamma_{2,M}$* .

Впервые в классах бианалитических функций задача $\Gamma_{2,M}$ была поставлена и исследована в работе В.С. Рогожина [2]. Интерес к задаче

$\Gamma_{2,M}$ в классах бианалитических и метааналитических функций, в первую очередь, вызван тем, что она тесно связана с основными задачами плоской теории упругости [3].

В работах К.М. Расулова (см. [1] и имеющуюся там библиографию) были разработаны точные (аналитические) методы решения задачи $\Gamma_{2,M}$ в классах полианалитических и метааналитических функций. В прошлом десятилетии В.Р. Кристалинский (см., например, [4]) получил эффективные алгоритмы приближенного решения задачи $\Gamma_{2,M}$ в классах бианалитических функций.

В настоящем сообщении предлагается эффективный метод приближенного решения задачи $\Gamma_{2,M}$ в классах метааналитических функций в круге $T^+ = \{t : |t| < 1\}$.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
2. Рогожин В.С. Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения // Учен. зап. Казанск. ун-та. 1950. Т. 110., кн. 3. С. 71 -93.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. Кристалинский В.Р. Приближенные методы решения краевых задач типа Гильберта и типа Римана для бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Смоленск, 2001. 113 с.

ОБ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТИПА РИМАНА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ, Д.А. КЛИМЕНКО

Смоленский государственный университет,
e-mail: kahrimanr@yandex.ru, dn.klimenko@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *кусочно метааналитическая функция, краевая задача Римана, разрывные коэффициенты.*

Работа посвящена постановке основных краевых задач типа Римана с разрывными коэффициентами в классе метааналитических функций.

Пусть T^+ – конечная $(p+1)$ -связная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная гладким контуром

$L = \bigcup_{j=0}^p L_j$, а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$. В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1].

Будем считать, что $G_k(t)$ ($k \geq 1$) – конечная совокупность заданных на L кусочно-непрерывных функций, причем $G_k(t) \neq 0$ всюду на L . Обозначим через c_1, c_2, \dots, c_p все точки, которые будем называть в дальнейшем *узлами*, в которых претерпевает разрыв хотя бы одна из функций $G_k(t)$ этой совокупности. Все остальные точки контура L будем называть *обыкновенными*.

Напомним (см., например, [1, с. 140]), что *кусочно метааналитической функцией с линией скачков L* называется функция $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$, которая в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях T^+ и T^- определяется следующим образом:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = (\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)) e^{\lambda_0 \bar{z}}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = (\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)) e^{\frac{\lambda_0 \bar{z}}{z^m}}, & z \in T^- \end{cases} \quad (1)$$

или

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} + \varphi_1^+(z) e^{\lambda_2 \bar{z}}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) e^{\frac{\lambda_1 \bar{z}}{z^m}} + \varphi_1^-(z) e^{\frac{\lambda_2 \bar{z}}{z^m}}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi_k^+(z) \in A(T^+)$, $\varphi_k^-(z) \in A(T^-)$, $k = 0, 1$, а $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ – некоторые постоянные ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), $m \in N$ и $m \geq 2$, причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t). \quad (3)$$

Обычно функцию $F(z)$, задаваемую формулой (1), называют *кусочно метааналитической функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулами (2), – *кусочно метааналитической функцией второго типа*.

При этом кусочно метааналитическую функцию $F(z)$, задаваемую формулой (1) (или формулой (2)), назовем *исчезающей на бесконечности*, если $\Pi\{\varphi_k^-; \infty\} \geq 1+k$ (или $\Pi\{\varphi_k^-; \infty\} \geq 1$), где $k = 0, 1$.

Будем говорить, что кусочно метааналитическая функция $F(z)$ принадлежит классу $M_n(T^\pm) \cap H^{(2n-2)}(L)$, если она непрерывно продолжается на границу L вместе со своими частными производными $\frac{\partial^{p+q} F^\pm(z)}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}$ ($p = 0, 1, \dots, n-1$; $q = 0, 1, \dots, n-1$), причем так, что граничные значения этой функции и всех указанных производных удовлетворяют по z условию Гёльдера.

Наконец, будем говорить, что кусочно метааналитическая функция $F(z)$ принадлежит классу $M_n(T^\pm) \cap I^{(2n-2)}(L)$, если она непрерывно продолжается на границу L вместе со своими частными производными $\frac{\partial^{p+q} F^\pm(z)}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}$ ($p=0, 1, \dots, n-1$; $q=0, 1, \dots, n-1$), причем так, что граничные значения этой функции и всех указанных производных удовлетворяют по z условию Гёльдера всюду, кроме, быть может, узлов, причем при $p+q < n$ в узлах контура L возможно обращение в бесконечность не выше интегрируемого порядка.

Рассмотрим следующие две краевые задачи.

Задача 1. Пусть $L \in C_\mu^{2n-2}$. Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$, принадлежащие классу $M_n(T^\pm) \cap I^{(2n-2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие во всех обыкновенных точках L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial^{n-1} F^+(t)}{\partial x^{n-k} \partial y^{k-1}} = G_k(t) \frac{\partial^{n-1} F^-(t)}{\partial x^{n-k} \partial y^{k-1}} + i^{k-1} g_k(t), \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где $G_k(t)$, $g_k(t)$ – заданные на L функции, причем $G_k(t) \in H_0^{(2n-k-1)}(L)$, $g_k(t) \in H_0^{(n-1)}(L)$, $G_k(t) \neq 0$, $g_k(t) = (t-c)^{\gamma_c^k} g_k^*(t)$, c – любой из узлов c_1, c_2, \dots, c_p ; $\gamma_c^k > 0$ – вполне определенные числа. Здесь в равенствах (4) множители i^{k-1} при $g_k(t)$ введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу будем называть *первой основной краевой задачей типа Римана с разрывными коэффициентами для метааналитических функций*, или задачей $R_{1,M}$, а соответствующую однородную задачу ($g_k(t) \equiv 0$) назовем задачей $R_{1,M}^0$.

Задача 2. Пусть $L \in C_\mu^{2n-2}$. Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$, принадлежащие классу $M_n(T^\pm) \cap I^{(2n-2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие во всех обыкновенных точках L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial^k F^+(t)}{\partial n_+^k} = (-1)^k G_k(t) \frac{\partial^k F^-(t)}{\partial n_-^k} + (it')^k g_k(t), \quad t' = \frac{dt}{ds}, \quad k=0, 1, \dots, n-1, \quad (5)$$

где $\partial/\partial n_+$ ($\partial/\partial n_-$) – производная по внутренней (внешней) нормали к контуру L , $G_k(t)$, $g_k(t)$ – заданные на L функции, причем $G_k(t) \in H_0^{(2n-k-2)}(L)$, $g_k(t) \in H_0^{(n-k)}(L)$, $G_k(t) \neq 0$, $g_k(t) = (t-c)^{\gamma_c^k} g_k^*(t)$, c – любой из узлов c_1, c_2, \dots, c_p ; $\gamma_c^k > 0$ – вполне определенные числа. Здесь в

равенствах (5) множители $(-1)^k$ и $(it')^k$ при $G_k(t)$ и $g_k(t)$ соответственно введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу будем называть *второй основной краевой задачей типа Римана с разрывными коэффициентами для метааналитических функций*, или задачей $R_{2,M}$, а соответствующую однородную задачу ($g_k(t) \equiv 0$) назовем задачей $R_{2,M}^0$.

Отметим, что задачи $R_{1,M}$ и $R_{2,M}$ в классе $M_n(T^\pm) \cap H^{(2n-2)}(L)$ (т.е. при *непрерывной постановке*) для произвольных гладких замкнутых контуров при $n=2$ и $m=1$ были подробно исследованы в работах К.М. Расулова (см. [1] и имеющуюся там библиографию). В приведенной выше кусочно-непрерывной постановке задачи $R_{1,M}$ и $R_{2,M}$ до сих пор оставались неисследованными.

Основной целью настоящего сообщения является разработка конструктивных методов решения краевой задачи $R_{1,M}$ в классах кусочно-метааналитических функций первого типа в кусочно-непрерывной постановке в случае $n=2$ с линией скачков $L = \{t \mid |t|=1\}$.

Теорема 1. *Решение задачи $R_{1,M}$ в классах кусочно-метааналитических функций первого типа в случае $n=2$ с линией скачков $L = \{t \mid |t|=1\}$ сводится к последовательному решению обобщенной задачи Римана с разрывными коэффициентами относительно кусочно-аналитических функций и дифференциальной задачи Римана с разрывными коэффициентами относительно кусочно-аналитических функций.*

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: СГПУ, 1998. 344 с.

О НАИЛУЧШЕЙ СХОДИМОСТИ

А.И. РУБИНШТЕЙН
НИЯУ (МИФИ), г. Москва,
e-mail: rv777@mail.ru

УДК 517.518

Ключевые слова: *наилучшая сходимость, тригонометрические ряды, ряды Уолша, система $\varphi(nx)$.*

В работе изучается наилучшая сходимость по системам $\varphi(nx)$, где φ есть сумма тригонометрических, или Уолша, функций.

В работе [1], С.Н. Бернштейн показал, что условие $n(k+1) = (2p(k)+1)n(k)$, где $p(k)$ – натуральное, гарантирует, что частичные суммы ряда Фурье непрерывной функции $f(x)$ вида $\sum_k \rho(k) \cos(n(k)x + \alpha(k))$, $\rho(k) > 0$, $\alpha(k)$ – действительное, являются многочленами наилучшего приближения $f(x)$ в чебышевской метрике. Для синус-рядов наилучшая сходимость гарантируется условием $n(k+1) = q(k)n(k)$, натуральное $q(k) > 1$.

В [2] автор установил, что условия Бернштейна достаточны для наилучшей сходимости во всех пространствах L_p , $1 \leq p \leq \infty$. Если Бернштейн использует наличие чебышевского альтернанса, то в [2] основой является критерий наилучшего приближения Никольского [3] – Зингера [4]. Наилучшая сходимость по тригонометрической системе изучалась автором в работе [5], а по системе Уолша – [6], [7].

В настоящей работе формулируются следующие результаты.

Предложение 1. Пусть $\varphi(x) = (\sum_1^{m(0)} a(m) \cos mx) \sin(2m(0)+1)x$, где первый сомножитель всюду положителен, $n(k) = (2p(1)+1) \dots (2p(k-1)+1)$, причем $p(0) = 1, p(k)$ – натуральные, $n(k+1) - p(k) > m(0)$. Тогда ряд $\sum_1^\infty A(k) \varphi(n(k)x)$ при условии $\sum_1^\infty |A(k)| < \infty$ наилучше сходится во всех $L_p, 1 \leq p \leq \infty$.

Предложение 2. Пусть $\varphi(x) = (\sum_1^{2^{m(0)}-1} a(m) w_m(x))$, где $\{w_m(x)\}$ – система Уолша-Пэли, удовлетворяет условию $\varphi(2^{-1}+t) = -\varphi(2^{-1}-t)$ при $0 \leq t \leq 2^{-1}$, $n(k+1) - n(k) > m(0), n(0) = 1$. Если $\sum_1^\infty |A(k)| < \infty$, то ряд $\sum_1^\infty A(k) \varphi(2^{n(k-1)} x)$ наилучше сходится во всех $L_p, 1 \leq p \leq \infty$.

Справедливы и другие результаты о наилучшей сходимости по системам $\{\varphi(nx)\}$.

Литература

1. Бернштейн С.Н. О периодических функциях, для которых наилучше сходящимся рядом является ряд Фурье // Труды индустриального института, раздел физ.-матем. 1936. 10:3. С. 3 -8.
2. Рубинштейн А.И. О наилучше сходящихся рядах // Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И.Н. Векуа (Тбилиси). 1985. Т. 1, № 2. С. 114 -117.
3. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими рядами в среднем // Известия АН СССР. Серия: матем. 1946. Т. 10. С. 207 -250.
4. Zinger I. Caracterisation des elements d'une meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque // Acta Sci. Math. Szeged. 1956. Vol.17, № 3-4. P. 181 -194.
5. Рубинштейн А.И. О наилучше сходящихся в $L_p[0,2\pi]$ рядах // Матем. заметки. 1992. Т. 52, № 6. С. 100–108.
6. Рубинштейн А.Н. О модулях непрерывности и наилучших приближениях в L_p функций, представимых лакунарными рядами Уолша // Известия Вузов. Математика. 1963. № 5. С. 61–68.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЧЕТЫРЁХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.М. ТИМОТИН

ООО «Конкорд», г. Смоленск

e-mail: antej82@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: краевая задача, бианалитическая функция, сдвиг Карлемана, краевая задача Римана, контур Ляпунова.

Статья посвящена нахождению некоторых достаточных условий разрешимости одной четырехэлементной краевой задачи типа Римана со сдвигом Карлемана для бианалитических функций.

1. Постановка задачи. Будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в монографиях [1] и [2].

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L , а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Требуется найти все кусочно бианалитические функции класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L условиям:

$$A_1(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + B_1(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} + C_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + D_1(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial x} = g_1(t), \quad (1.1)$$

$$A_2(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial y} + B_2(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} + C_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + D_2(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial y} = ig_2(t), \quad (1.2)$$

где i – мнимая единица, взятая для удобства в дальнейших обозначениях, а $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $g_k(t)$ ($k=1,2$) – заданные на L функции класса Гельдера, $\alpha(t)$ – сдвиг контура L , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t. \quad (1.3)$$

Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что выполняется следующее начальное условие:

$$F^+(0) = 0. \quad (1.4)$$

Сформулированную задачу будем называть первой краевой задачей со сдвигом Карлемана в классах бианалитических функций, или, короче GK_{41} , а соответствующую ей однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) - задачей GK_{41}^0 .

Примем несколько дополнительных ограничений на коэффициенты краевых условий (1.1) и (1.2):

$$\Delta_k(t) = B_k(t)D_k[\alpha(t)] - A_k[\alpha(t)]C_k(t) \neq 0, \quad (1.5)$$

$$V_k(t) = B_k(t)C_k[\alpha(t)] - A_k[\alpha(t)]D_k(t) \equiv 0, \quad (1.6)$$

$$A_k(t) \neq 0, B_k(t) \neq 0, C_k(t) \neq 0, D_k(t) \neq 0, \quad (1.7)$$

где $k=1,2$.

Как известно (см., например, [4, с. 199 -205]), при выполнении условий (1.5)-(1.7) краевая задача GK_{41} сводится к последовательному решению двух краевых задач Римана без сдвига для бианалитических функций. Используя указанные результаты [4], можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Задача GK_{41} при выполнении условий (1.5) - (1.7) равносильна системе из обычной и обобщенной задач Римана*

$$\Phi_0^+(t) = G_1(t)\Phi_0^-(t) + \tilde{Q}_1(t), \quad (1.8)$$

$$\varphi_1^+(t) - \tilde{G}_2(t)\tilde{\varphi}_1^-(t) + \int_L A_{11}(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \int_L B_{11}(t,\tau)\tilde{\varphi}_1^-(\tau)d\tau = Q_2(t) \quad (1.9)$$

относительно неизвестных кусочно аналитических функций $\Phi_0(t) = \{\Phi_0^+(t), \Phi_0^-(t)\}$, $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \tilde{\varphi}_1^-(z)\}$ соответственно.

Ради полноты исследования, изучим картину разрешимости задачи GK_{41} при выполнении условий (1.5)-(1.7).

2. Исследование картины разрешимости задачи GK_{41} .

Будем называть числа $\tilde{\chi}_k = \chi_k - 1$ ($k=1,2$), где $\chi_k = \text{Ind}G_k(t)$, приведёнными частными индексами задачи GK_{41} , а величину $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2$ - её суммарным приведённым индексом.

1) Пусть $\tilde{\chi}_1 \geq 0$ и $\tilde{\chi}_2 \geq 0$. Согласно теореме 1, условия разрешимости задачи GK_{41} состоят из совокупности условий разрешимости обобщённой задачи Римана (1.9) и обычной задачи Римана (1.8) Как известно (см. [1, с. 49 -50]) обобщённая задача Римана (1.9) при $\tilde{\chi}_2 \geq 0$ эквивалентна в смысле разрешимости) интегральному уравнению Фредгольма следующего вида:

$$(K\mu)(t) \equiv \mu(t) + \int_L K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = Q_2(t) - \sum_{k=0}^{\tilde{\chi}_2-1} \alpha_{1k}q_{1k}(t), \quad (2.1)$$

где ядро $(K\mu)(t)$ выражается через $G_1(t)$, $G_2(t)$ (см. [1, с. 94]), $\alpha_{10}, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1\tilde{\chi}_2-1}$ - произвольные комплексные постоянные, а

$$q_{1k}(t) = t^k + \int_L A_{11}(t,\tau)\tau^k d\tau.$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$(K'\omega)(t) \equiv \omega(t) + \int_L K(t, \tau)\omega(\tau)d\tau = 0, \quad (2.2)$$

союзное с

$$(K\mu)(t) = 0. \quad (2.3)$$

Поскольку $\tilde{\chi}_1 \geq 0$, то обычная задача Римана (1.8) разрешима при любом свободном члене $\tilde{Q}_1(t)$. Следовательно, для разрешимости задачи GK_{41} необходимо и достаточно, чтобы было разрешимо интегральное уравнение (2.1), т.е. чтобы выполнялись условия:

$$\int_L Q_2(t)\tilde{\omega}_j(t)d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu_2 - r_2, \quad (2.4)$$

где $\tilde{\omega}_1(t), \dots, \tilde{\omega}_{\nu_2 - r_2}(t)$ – некоторые линейно независимые решения интегрального уравнения (2.2), ν_2 – число линейно независимых решений уравнения (2.3), а r_2 – ранг определённой матрицы, причём $r_2 \leq \min(\nu_2, \tilde{\chi}_2)$.

Более того, при выполнении условий (2.4), общее решение неоднородной задачи GK_{41} линейно зависит не менее чем от $\tilde{\chi}$ произвольных комплексных постоянных (см. [1, с. 95]). То есть

$$l \geq \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2,$$

где l – число линейно независимых решений однородной задачи GK_{41}^0 .

2) Пусть $\tilde{\chi}_1 \leq 0$ и $\tilde{\chi}_2 \leq 0$. В этом случае для разрешимости обобщенной задачи Римана (1.9) необходимо и достаточно выполнение следующих условий

$$\int_L Q_2(t)\tilde{\omega}_j(t)d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu_2,$$

где $\omega_1(t), \dots, \omega_{\nu_2}(t)$ – полная система линейно независимых (над полем \mathbb{C}) решений однородного уравнения (2.2). При выполнении этих условий общее решение задачи (1.9) линейно зависит от $l_1 = \max(0, \nu_2 - |\tilde{\chi}_2|)$ произвольных комплексных постоянных.

В свою очередь, при $\tilde{\chi}_1 \leq 0$ обычная задача Римана (1.8) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются – $\tilde{\chi}_1$ условий

$$\int_L \frac{\tilde{Q}_1(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\tilde{\chi}_1. \quad (2.5)$$

Учитывая, что в выражение $\tilde{Q}_1(t)$ входят граничные значения решений задачи (1.9), в данном случае имеем:

$$0 \leq l \leq \max(0, \nu_2 - |\tilde{\chi}_2|). \quad (2.6)$$

3) Допустим, что $\tilde{\chi}_1 \geq 0$, $\tilde{\chi}_2 \leq 0$. Тогда, для разрешимости задачи GK_{41}^0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.5). Так как в данном случае в выражение $\tilde{Q}_1(t)$ линейно входят $\tilde{\chi}_1$ произвольных комплексных параметров $C_0, C_1, \dots, C_{\tilde{\chi}_1-1}$, то выполнение равенств (2.5) равносильно разрешимости определенной системы из ν_2 линейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{\chi}_1$ неизвестных параметров $C_0, C_1, \dots, C_{\tilde{\chi}_1-1}$. Следовательно, среди этих параметров ровно r_1 линейно выражаются через остальные $\tilde{\chi}_1 - r_1$, где r_1 – ранг определенной матрицы, причем $0 \leq r_1 \leq \min(\nu_2, \tilde{\chi}_1)$. Итак, в этом случае имеем:

$$0 \leq l \leq \tilde{\chi}_1 + l_1, \quad (2.7)$$

где $l_1 \leq \max(0, \nu_2 - |\tilde{\chi}_2|)$.

4) Пусть, наконец, $\tilde{\chi}_1 \leq 0$, $\tilde{\chi}_2 \geq 0$. В данном случае для разрешимости задачи GK_{41}^0 необходимо и достаточно, чтобы последовательно выполнялись условия (2.4) и (2.5). Поскольку при выполнении условий (2.4), общее решение задачи (1.9) линейно зависит от $l_1 = \tilde{\chi}_2 + \nu_2 - r_2$ произвольных комплексных параметров $\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{l_1}$, то в выражение $\tilde{Q}_1(t)$ входят эти параметры (см. [1, с. 96]). Следовательно, выполнение равенств (2.5) равносильно разрешимости определенной системы из $-\tilde{\chi}_1$ линейных алгебраических уравнений относительно $\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{l_1}$. Поэтому среди параметров $\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{l_1}$ ровно \tilde{r}_2 линейно выражаются через остальные $l_1 - \tilde{r}_2$ где \tilde{r}_2 – ранг определенной матрицы, причем $0 \leq \tilde{r}_2 \leq \min(l_1 - \tilde{\chi}_1)$. Итак, при $\tilde{\chi}_1 \leq 0$, $\tilde{\chi}_2 \geq 0$, с учетом $\nu_2 \geq r_2$, имеем:

$$0 \leq l \leq \tilde{\chi}_2 + \nu_2 - r_2. \quad (2.8)$$

Из приведенных выше результатов следует, что при любых значениях индексов $\tilde{\chi}_1$, $\tilde{\chi}_2$ число l линейно независимых (над полем \mathbb{C}) решений однородной задачи GK_{41}^0 и число q условий разрешимости неоднородной задачи GK_{41} конечны, т.е. задача GK_{41} при выполнении условий (1.5) - (1.7) является нетеровой.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: СГПУ, 1998. 343 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
3. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
4. Тимотин А.М. О решении четырёхэлементной краевой задачи со сдвигом карлемана для бианалитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. науч. конф. Смоленск: СмолГУ, 2014. С. 199 -205.

ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

И.В. ТИХОНОВ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

МГУ им. М.В. Ломоносова, НИЯУ МИФИ, г. Москва
e-mail: ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

УДК 517.518.82

Ключевые слова: *полиномы Бернштейна, степенная функция, комбинаторика, числа Стирлинга, числа Эйлера.*

Обсуждаются вопросы, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна для степенной функции на симметричном отрезке.

Некоторое время назад при написании обзора [1] авторы заинтересовались вопросом о явной алгебраической записи полиномов Бернштейна для простой степенной функции $f_p(x) = x^p$ с произвольным показателем $p \in \mathbf{N}$. Эта, казалось бы, элементарная задача в общем виде отнюдь не тривиальна – для ее решения приходится привлекать ряд неожиданных комбинаторных соображений. Интересно, что полный ответ для стандартного отрезка $[0, 1]$ был получен совсем недавно; он представлен в серии работ [2 - 4] (см. также [1]). Для записи ответа нужны специальные числа Стирлинга, теорию которых можно найти в [5].

Другое неожиданное обстоятельство связано с тем, что при переходе к симметричному отрезку $[-1, 1]$ картина принципиально меняется. Строго говоря, одинаковое выражение $f_p(x) = x^p$ на $[0, 1]$ и на $[-1, 1]$ определяет качественно разные функции, поскольку на симметричном отрезке центральную роль играют соображения четности и нечетности. Формулы, возникающие на $[-1, 1]$, отличаются особой спецификой. В настоящем кратком сообщении мы изложим свои подготовительные соображения, связанные с полиномами Бернштейна для степеней на $[-1, 1]$. Ранее, по видимому, такой вопрос не ставился и задача не исследовалась.

Полиномы Бернштейна для функции $f \in C[-1, 1]$ вводят по правилу

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Здесь x – вещественная переменная, а C_n^k – биномиальные коэффициенты. Понятно, что полином $B_n(f, x)$ имеет степень $\leq n$, но равенство $\deg B_n(f, x) = n$ совсем не обязательно. Например, если $f_0(x) \equiv 1$, то $B_n(f_0, x) \equiv 1$ и $\deg B_n(f_0, x) = 0$ при любом $n \in \mathbf{N}$. Полиномы Бернштейна для константы не интересны.

Пусть $f_p(x) = x^p$ на $[-1, 1]$ с показателем $p \in \mathbf{N}$. Согласно общему определению имеем

$$B_n(f_p, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{2k}{n} - 1 \right)^p C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Легко проверяется, что свойство четности или нечетности порождающей функции $f \in C[-1, 1]$ наследуется ее полиномами Бернштейна. Поэтому при четных показателях p полиномы $B_n(f_p, x)$ содержат в своей записи только четные степени переменной x , а при нечетных p – только нечетные степени x . Непосредственные вычисления, быстро усложняясь с ростом p , дают при $n \in \mathbf{N}$ выражения

$$B_n(f_1, x) = x,$$

$$B_n(f_2, x) = \left(1 - \frac{1}{n} \right) x^2 + \frac{1}{n},$$

$$B_n(f_3, x) = \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right) x^3 + \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} \right) x,$$

$$B_n(f_4, x) = \left(1 - \frac{6}{n} + \frac{11}{n^2} - \frac{6}{n^3} \right) x^4 + \left(\frac{6}{n} - \frac{14}{n^2} + \frac{8}{n^3} \right) x^2 + \left(\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3} \right),$$

$$B_n(f_5, x) = \left(1 - \frac{10}{n} + \frac{35}{n^2} - \frac{50}{n^3} + \frac{24}{n^4} \right) x^5 + \left(\frac{10}{n} - \frac{50}{n^2} + \frac{80}{n^3} - \frac{40}{n^4} \right) x^3 + \left(\frac{15}{n^2} - \frac{30}{n^3} + \frac{16}{n^4} \right) x.$$

Даже беглый анализ полученных формул выявляет интересные закономерности, регулирующие вид коэффициентов. Например, числа в «старшей» скобке образуют таблицу

1
1 -1
1 -3 2
1 -6 11 -6
1 -10 35 -50 24.

Строки таблицы состоят из знакопеременных чисел Стирлинга первого рода, записанных «в обратном порядке» (ср. с [5, с. 289]).

Желательно понять точные правила, которым подчиняются коэффициенты полиномов $B_n(f_p, x)$ при явной алгебраической записи. Оказывается, справедливо такое утверждение.

Теорема 1. Для функции $f_p(x) = x^p$ с показателем $p \in \mathbf{N}$, заданной на $[-1, 1]$, полиномы Бернштейна представимы в виде

$$B_n(f_p, x) = \sum_{k=0}^{[p/2]} b_{n,p-2k}^{(p)} x^{p-2k}, \quad n \in \mathbf{N},$$

причем при последовательном увеличении показателя p коэффициенты полиномов можно вычислять по следующим правилам. Для старших коэффициентов верны соотношения

$$b_{n,1}^{(1)} = 1, \quad b_{n,p+1}^{(p+1)} = \frac{n-p}{n} b_{n,p}^{(p)}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad p \in \mathbf{N},$$

откуда

$$b_{n,p}^{(p)} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{n^p}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad p \in \mathbf{N}, \quad p \geq 2.$$

Для младших коэффициентов верны соотношения

$$nb_{n,0}^{(2)} = b_{n,1}^{(1)} = 1, \quad nb_{n,0}^{(2q+2)} = b_{n,1}^{(2q+1)} = \frac{1}{n} (2b_{n,2}^{(2q)} + nb_{n,0}^{(2q)}), \quad n \in \mathbf{N}, \quad q \in \mathbf{N}.$$

Для остальных коэффициентов действует общее рекуррентное правило

$$b_{n,m}^{(p+1)} = \frac{1}{n} ((m+1)b_{n,m+1}^{(p)} + (n-(m-1))b_{n,m-1}^{(p)}), \quad n \in \mathbf{N}, \quad p \in \mathbf{N}, \quad p \geq 3,$$

при всех $m = p+1-2k$, где $k = 1, \dots, [(p+1)/2] - 1$.

Идея доказательства теоремы 1 основана на переходе от исходного комбинаторно-алгебраического определения полиномов $B_n(f_p, x)$ к новой аналитической записи (ср. с [6, гл. VII, § 3, решение задачи 3.21]). Воспользуемся элементарным соотношением

$$\left(\frac{2k}{n} - 1\right)^p = \frac{1}{n^p} (2k-n)^p = \frac{1}{n^p} \frac{d^p}{dz^p} e^{(2k-n)z} \Big|_{z=0}.$$

После его подстановки в определение полиномов $B_n(f_p, x)$ и несложных подсчетов с выделением возникшего бинорма устанавливаем следующий неожиданный результат.

Теорема 2. Для функции $f_p(x) = x^p$ с показателем $p \in \mathbf{N}$, заданной на $[-1, 1]$, полиномы Бернштейна представимы в виде

$$B_n(f_p, x) = \frac{1}{n^p} \frac{d^p}{dz^p} \left((\operatorname{ch} z + x \operatorname{sh} z)^n \right) \Big|_{z=0}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

При разворачивании образовавшегося бинорма получаем запись

$$B_n(f_p, x) = \sum_{m=0}^n a_{n,m}^{(p)} x^m, \quad n \in \mathbf{N},$$

с коэффициентами

$$a_{n,m}^{(p)} = \frac{1}{n^p} C_n^m \frac{d^p}{dz^p} \left((\operatorname{sh} z)^m (\operatorname{ch} z)^{n-m} \right) \Big|_{z=0}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

В указанной записи многие коэффициенты $a_{n,m}^{(p)}$ обращаются в нуль. Например, соотношение $a_{n,m}^{(p)} = 0$ заведомо выполнено, если $n > p$ и одновременно $m > p$. Кроме того, если значение p четное, то $a_{n,m}^{(p)} = 0$ при всех нечетных m , а если p нечетное, то $a_{n,m}^{(p)} = 0$ при всех четных m . Этот факт полностью соответствует прежним соображениям «четности» и «нечетности». При $p > n$ полезно «удлиннить» формулу для $B_n(f_p, x)$ из теоремы 2, продлив сумму по m до значения p с соглашением

$$a_{n,n+1}^{(p)} = \dots = a_{n,p}^{(p)} = 0.$$

Тогда представление полинома $B_n(f_p, x)$, данное в теореме 2, можно окончательно отождествить с представлением из теоремы 1, считая, что

$$b_{n, p-2k}^{(p)} = a_{n, p-2k}^{(p)}, \quad k = 0, 1, \dots, [p/2].$$

Теперь, используя формулы для $a_{n, m}^{(p)}$, указанные в теореме 2, несложно вывести все соотношения для коэффициентов $b_{n, p-2k}^{(p)}$, отмеченные в теореме 1.

Итак, записи, представленные в обеих теоремах, эквивалентны. Каждая из конструкций лучше приспособлена для своих целей. Например, формула для коэффициента $b_{n, p}^{(p)}$, данная в теореме 1, сразу объясняет появление в упоминавшейся «старшей» скобке чисел Стирлинга первого рода. Согласно [5, с. 293], они возникают из разложения

$$n(n-1) \dots (n-p+1) = \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \left[\begin{matrix} p \\ p-j \end{matrix} \right] n^{p-j}, \quad p \in \mathbf{N}, \quad p \geq 2,$$

где коэффициенты – знакопостоянные числа Стирлинга первого рода, записанные в обозначениях [5].

При анализе свободного коэффициента в полиномах $B_n(f_p, x)$ с четными значениями $p = 2q$ удобно взять представление из теоремы 2, согласно которому

$$b_{n, 0}^{(2q)} = a_{n, 0}^{(2q)} = \frac{1}{n^{2q}} \frac{d^{2q}}{dz^{2q}} \left((\operatorname{ch} z)^n \right) \Big|_{z=0}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Производные $\varphi_n^{(p)}(0)$ от трансцендентной целой функции $\varphi_n(z) \equiv (\operatorname{ch} z)^n$ совпадают с весьма экзотическими числами Эйлера $E_p^{(-n)}$ отрицательного порядка $(-n)$ (ср. с [7, с. 143]). Поэтому

$$b_{n, 0}^{(2q)} = \frac{1}{n^{2q}} E_{2q}^{(-n)}, \quad E_{2q}^{(-n)} = \varphi_n^{(2q)}(0), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Указанные значения можно вычислить так. Заметим, что

$$\varphi_1'(z) = \operatorname{sh} z, \quad \varphi_{n+1}'(z) = \frac{n+1}{n} \varphi_n'(z) \operatorname{ch} z, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Отсюда по индукции, используя гиперболические тождества, выводим представление

$$\varphi_n'(z) = \frac{n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} D_n^k \operatorname{sh}(n-2k)z, \quad n \in \mathbf{N},$$

с коэффициентами D_n^k , образующими «треугольник Паскаля» вида

				1,	$n = 1,$	
				1,	$n = 2,$	
			1	1,	$n = 3,$	
		1	2,		$n = 4,$	
	1	3	2,		$n = 5,$	$D_n^k = \frac{n-2k}{n} C_n^k.$
1	4	5,			$n = 6,$	
1	5	9	5,		$n = 7,$	
.....						

Проведя оставшиеся $(2q-1)$ дифференцирований и подставив $z=0$, получим окончательное выражение

$$b_{n,0}^{(2q)} = \frac{1}{n^{2q}} \varphi_n^{(2q)}(0) = \frac{1}{2^{n-1} n^{2q-1}} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} D_n^k (n-2k)^{2q-1}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad q \in \mathbf{N}.$$

Отметим еще закономерности, которым подчинены коэффициенты $b_{n,0}^{(2q)}$ при фиксированном номере $n \in \mathbf{N}$. Например, после элементарных подсчетов выясняется, что

$$b_{1,0}^{(2q)} = 1, \quad b_{2,0}^{(2q)} = \frac{1}{2}, \quad b_{3,0}^{(2q)} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3^{2q-1}} \right), \quad b_{4,0}^{(2q)} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{2^{2q-2}} \right), \quad b_{5,0}^{(2q)} = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{3^{2q} + 2}{5^{2q-1}} \right),$$

$$b_{6,0}^{(2q)} = \frac{1}{32} \left(1 + \frac{2^{2q+1} + 5}{3^{2q-1}} \right), \quad b_{7,0}^{(2q)} = \frac{1}{64} \left(1 + \frac{5^{2q} + 3^{2q+1} + 5}{7^{2q-1}} \right)$$

при всех $q \in \mathbf{N}$. Установленные факты допускают независимую проверку по формуле $b_{n,0}^{(2q)} = B_n(f_{2q}, 0)$, отнесенной прямо к определению полиномов $B_n(f_p, x)$. Но новый метод, основанный на теореме 2, выявляет интересную связь с числами Эйлера и гиперболическими функциями.

Подведем итог. На наш взгляд, обсуждаемые полиномы Бернштейна для степеней хотя и не имеют особого значения с точки зрения практических приближений, но все же представляют собой весьма любопытный объект. Это своеобразный «архив» комбинаторных формул и «полигон» для комбинаторных исследований.

Авторы благодарны М.А. Петросовой и Д.Г. Цветкович за ряд расчетов по теме работы.

Литература

1. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8. Ч. 1: Исследования по математическому анализу (Итоги науки. Юг России). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2014. С. 126–175.
2. Pop O.T., Farcaş M. About Bernstein polynomial and the Stirling's numbers of second type // Creative Mathematics and Informatics. 2005. -Vol. 14. P. 53–56.
3. Farcaş M. Approximation by linear operators of functions of one or several variables // Abstract of PHD Thesis. Scientific advisor: C.S.I Dr. Ion Păvăloiu. Baia Mare: 2008. 21 p.

4. Miclăuș D. On the approximation order and Voronovskaja's type theorem for certain linear positive operators // Abstract of PHD Thesis. Scientific advisor: S.R.I Dr. Ion Păvăloiu. Baia Mare: 2012. 60 p.

5. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. 2-е изд., испр. М.: Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 703 с.

6. Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. 624 с.

7. Nörlund N.E. Vorlesungen über Differenzenrechnung. Berlin: Springer Verlag, 1924. ix+551 p.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР К НЕЛИНЕЙНОМУ ЭВОЛЮЦИОННОМУ ОПЕРАТОРУ ВТОРОЙ КРАТНОСТИ

И.В. ТРИФОНОВА

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
г. Гродно, Республика Беларусь, e-mail: irinat@grsu.by

УДК 517.988

Ключевые слова: *эволюционный оператор второй кратности, обобщенная функция, пространство бесконечно дифференцируемых финитных слева функций, свертка, композиция операторов, асимптотически обратный оператор.*

Нелинейные эволюционные операторы позволяют исследовать нелинейные многомерные эволюционные системы с любым конечным количеством входных и выходных сигналов. Исследование нелинейных динамических систем можно связать с нахождением ее асимптотических решений. Теория нелинейных эволюционных операторов позволяет находить такие решения. В работе описан асимптотически обратный оператор к оператору второй кратности.

Нелинейный эволюционный оператор второй кратности – это оператор вида

$$Ax = \sum_{n_1, n_2} S_{n_1+n_2} \left(a_{n_1, n_2} * \left(x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2} \right) \right),$$

где суммирование проводится по неотрицательным целым n_1, n_2 , таким, что $n_1 + n_2 = n > 0$, a_{n_1, n_2} – финитная обобщенная двухкомпонентная вектор-функция с носителем на $[0; +\infty)^n$, $x_1, x_2 \in X$, $x = (x_1, x_2) \in X^2$, $S_{n_1+n_2}$ – оператор сокращения переменных n -го порядка, $*$ – операция свертки, \otimes – операция тензорного произведения.

Нелинейной эволюционной системе двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1^2 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_2^2 + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_2^2 + f_2(t), \end{cases}$$

соответствует нелинейный эволюционный оператор второго порядка.

Пусть оператор C – нелинейный оператор второй кратности, который является композицией двух нелинейных операторов второй кратности A и B , а оператор F – нелинейный оператор второй кратности, который является композицией двух нелинейных операторов второй кратности B и A .

Оператор B называется левым асимптотически обратным оператором к оператору A , если

$$C = B \circ A = I + \sum_{|\lambda| = |\lambda_1 + \lambda_2|}^{\infty} C_{\lambda}.$$

Оператор B называется правым асимптотически обратным оператором к оператору A , если

$$F = A \circ B = \sum_{|\lambda| = |\lambda_1 + \lambda_2|}^{\infty} B_{\lambda} + I.$$

Если оператор B является одновременно левым и правым асимптотически обратным оператором к оператору A , то он будет асимптотически обратным к оператору A .

Тогда решение указанной системы будет сводиться к нахождению асимптотически обратного нелинейного эволюционного оператора второй кратности.

Построение компонент асимптотически обратного оператора второй кратности связано с описанием компонент оператора композиции двух эволюционных операторов второй кратности.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

А.Л. УШАКОВ

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск,
e-mail: ushakov_al@inbox.ru

УДК 519.63

Ключевые слова: *итерационные факторизации, фиктивное продолжение.*

Рассматривается эллиптическое уравнение четвёртого порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях. Его численное решение с помощью итерационных факторизаций на фиктивном продолжении сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами, в которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более трёх.

Рассматривается эллиптическое дифференциальное уравнение четвёртого порядка в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат, на двух смежных сторонах прямоугольника заданы условия шарнирного опирания, а на остальной части границы условия симметрии. Дискретизация производится по методу конечных элементов на параболических восполнениях. Предлагается фиктивное продолжение дискретной задачи и итерационный процесс для её приближённого решения. Для дискретной фиктивно продолженной задачи приводится факторизованный переобуславливатель квадратно попеременно треугольного вида. Показывается, что для приближённого решения дискретной задачи требуется количество арифметических операций, имеющее порядок количества её неизвестных [1]. Исходная задача может быть получена в методах типа фиктивных компонент при решении эллиптических дифференциальных уравнений четвёртого порядка в плоских областях достаточно произвольного вида при однородных главных или естественных краевых условиях.

Литература

1. Ушаков А.Л. Итерационная факторизация на фиктивном продолжении для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. 2014. Т. 6, № 2. С. 17–22.

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ КЛАССАХ ТИПА ГЕРЦА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ ТИПА БЕРГМАНА-ГЕРЦА В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ НАД СИММЕТРИЧЕСКИМИ КОНУСАМИ¹

Р.Ф. ШАМОЯН, С.М. КУРИЛЕНКО

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского,
e-mail: rsham@mail.ru, SergKurilenko@gmail.ru

УДК 517.55

Ключевые слова: *симметрический конус, трубчатая область, аналитическая функция, пространства типа Бергмана, пространства типа Герца.*

Вводятся аналоги аналитических классов типа Герца в трубчатых областях над симметрическими конусами, и изучается действие интегральных операторов типа Бергмана в этих классах.

В работе продолжены наши исследования [1-4]. Вводятся аналоги так называемых аналитических классов типа Герца в трубчатых областях над симметрическими конусами, и изучается действие интегральных операторов типа Бергмана в этих классах.

Ранее классы подобного типа изучались только в единичном круге в работах Бласко, Павловича, Иевтича и соавторов. В трудах первого автора эти классы недавно подвергались исследованию в строго псевдовыпуклых областях с гладкой границей.

Мы решаем ряд задач в аналитических классах типа Герца в трубчатых областях над симметрическими конусами. Это аналитические классы функций с квазинормой типа

$$\int_{T_{\Omega}} \left(\int_{B(z,r)} |f(w)|^p \Delta^{\alpha}(\operatorname{Im} w) dv(w) \right)^{q/p} \Delta^{\beta}(\operatorname{Im} z) dv(z), \quad \alpha, \beta > -1, \quad p, q \in (1, \infty)$$

или их различные аналоги в $T_{\Omega}^m = T_{\Omega} \times \dots \times T_{\Omega}$, $m \geq 1$, где $B(z, r)$ - шар Бергмана в T_{Ω} , и где Ω есть симметрический конус в Евклидовом пространстве V , $T_{\Omega} = V + i\Omega$ - трубчатая область над этим конусом. Детерминант $\Delta^{\beta}(\operatorname{Im} z)$ в трубчатой области мы определяем, следуя стандартным определениям из [1].

Далее рассмотрены новые интегральные операторы типа Бергмана-Герца

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-97508) и Министерства образования и науки Российской Федерации (грант 1.1704.2014К).

$$(T_{\alpha,\beta}f)(z) = \int_{B(z,r)} \frac{f(w)\Delta^\beta(\operatorname{Im} w)}{\Delta^\alpha\left(\frac{z-\bar{w}}{i}\right)} dv(w), \quad z \in T_\Omega, \quad \alpha, \beta \geq 0,$$

$$(\tilde{T}_{\alpha,\beta,\gamma}f)(\tilde{w}) = \int_{T_\Omega} \left(\int_{B(z,r)} \frac{f(w)\Delta^\beta(\operatorname{Im} w)}{\Delta^\alpha\left(\frac{z-\bar{w}}{i}\right)} dv(w) \right) \Delta^\alpha(\operatorname{Im} z) dv(z), \quad \tilde{w} \in T_\Omega, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0,$$

и те или иные их аналоги. Изучается действие этих интегральных операторов типа Бергмана-Герца в классах типа Бергмана $A_\alpha^p(T_\Omega)$, в классах $A_\alpha^{\bar{p}}(T_\Omega^m)$, в весовых классах Харди $H_\alpha^p(T_\Omega)$. Изучается также действие этих операторов в классах типа Герца, что были введены нами выше, и их тех или иных аналогов.

Полученные результаты ранее были известны частично в единичном шаре в C^n и в полидиске (то есть в более простых многомерных областях).

Литература

1. Shamoyan R., Kurilenko S. A note on a distance function in Bergman-type analytic function spaces of several variables // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2015. Vol. 8(1). P. 75–85.
2. Shamoyan R., Kurilenko S. On extremal problems in tubular domains over symmetric cones // Issues of Analysis. 2014. Vol. 3(21), No. 1.
3. Shamoyan R., Povprits E., Sharp theorems on traces in analytic spaces in tube domains over symmetric cones // Журнал СФУ. Серия: Матем. и физ. 2013. Т. 6(4). С. 527–538.
4. Shamoyan R., Povprits E. Trace theorems in Bergman spaces in tubular domains over symmetric cones // Uzbek. Mathematical Journal. 2014. Vol. 1.

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ МНОГОЧЛЕНОВ В ВЕСОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ

Ф.А. ШАМОЯН

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского,
e-mail: shamoyanfa.@yandex.ru

УДК 517.53

Ключевые слова: *полнота, весовые пространства, поликруг, аналитическая функция, многочлен.*

В работе исследован вопрос полноты системы алгебраических многочленов от многих комплексных переменных в L^p пространствах аналитических в поликруге функций с аналитическим весом.

Пусть $U^n = \{z = (z_1 \dots z_n) \in \mathbb{C}^n: |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$ единичный поликруг в n -мерном комплексном пространстве \mathbb{C}^n .

$\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$ – вектор функция, заданная на $R^+ = [0, +\infty)$; $H(U^n)$ – множество всех голоморфных функций в U^n , $0 < p < +\infty$. Обозначим через $A^p(\varphi)$ следующее весовое пространство:

$$A^p(\varphi) = \{f \in H(U^n): \|f\|_{A^p(\varphi)} = \left(\int_{U^n} |f(z)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right) dm_{2n}(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\},$$

где $-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right) = \sum_{j=1}^n \varphi_j\left(\frac{1}{1-|z_j|}\right)$, $z = (z_1 \dots z_n) \in U^n$.

Если $f \in A^p(\varphi)$, то

$$A_f^p(\varphi) = \{g \in H(U^n): \|g\|_{A_f^p(\varphi)} = \|fg\|_{A^p(\varphi)} < +\infty\}.$$

В работе исследуется проблема полноты алгебраических многочленов $P_m(z) = P_m(z_1 \dots z_n)$ в пространстве $A_f^p(\varphi)$. Отметим, что при $n = 1$, $\varphi(x) \equiv 1$, задача о полноте многочленов в пространствах A_f^p исследовалась в классических работах М.В. Келдыша, С.Н. Мергеляна и других специалистов комплексного анализа (см. [1], [2]).

В работе получен следующий результат.

Теорема. Пусть $\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$, причем $\varphi_j \in C_{(R^+)}^{(2)}$, $f \in A_f^p$, $f(z) \neq 0$, $z \in U^n$, $1 < p < +\infty$.

Тогда множество алгебраических многочленов P от n переменных $z = (z_1 \dots z_n)$ всюду плотно в пространстве $A_f^q(\varphi)$ при всех $0 < q < p$, если выполняются условия

$$\int_0^1 \left(\frac{\varphi_j(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty, \quad (*)$$

$j = 1, 2, \dots, n$.

Обратно, если по крайней мере один из интегралов (*) сходится, то можно построить функцию $f \in A^p(\varphi)$, ($0 < p < +\infty$), так что в пространстве $A_f^q(\varphi)$ система многочленов не является полной при всех $0 < q < +\infty$.

Литература

1. Келдыш М.В. Sur l'approximation en moyenne par polynomes des fonctions d'une variable complexe // Мат. сб. 1945. Т. 16, № 1. С. 1–20.
2. Маргелян С.Н. Весовая приближения многочленами // Успехи мат. наук. 1956. Т. 9, № 5. С. 107–152.

ТЕРНАРНЫЕ КОЛЬЦА, КООРДИНАТИЗИРУЮЩИЕ АН-ПЛОСКОСТИ

Н.Л. ШАТОХИН

Смоленский государственный университет,
e-mail: nik-shatohin@jandex.ru

УДК 514.74

Ключевые слова: *кольцо с делителями нуля, тернарное кольцо, аффинная ельмслевова плоскость, АН-плоскость.*

В докладе рассматриваются тернарные кольца, позволяющие алгебраически описать аффинные ельмслевова плоскости (аффинные плоскости со смежными элементами) и указывается структурная зависимость между ними.

Наиболее эффективным методом изучения геометрических свойств АН-плоскостей ([1], [2]) является алгебраический подход, основанный на использовании их алгебраического описания (координатизации) с помощью соответствующих тернарных колец. Поэтому важно иметь представление о видах таких тернарных колец и их структурной взаимосвязи.

Введём следующие обозначения:

K_H – произвольное H -кольцо ([3]);

K_E – произвольное E -кольцо ([6]);

K_{LETR} – произвольное линейное тернарное кольцо Ельмслева ([5]);

K_{ETR} – произвольное тернарное кольцо Ельмслева ([5]);

K_{GHTR} – произвольное обобщенное тернарное кольцо Холла ([4]).

Справедливо следующее утверждение.

Между указанными выше кольцами существует связь, представленная на диаграмме

$$K_H \longrightarrow K_E \longrightarrow K_{LETR} \longrightarrow K_{ETR} \longrightarrow K_{GHTR},$$

в которой $K_A \longrightarrow K_B$ означает, что всякое кольцо K_A является кольцом K_B .

Литература

1. Hjelmslev J. Die naturliche Geometrie // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1923. № 2. P. 1–36.
2. Hjelmslev J. Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre // Danske Ved. Selsk., mat.-fys. Medd. 1929, 8:11; 1929, 10:1; 1942, 19:12; 1945, 22:6, 13; 1949, 25:10.
3. Klingenberg W. Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen // Math. Z. - 1954. Vol. 160. P. 384–406.
4. Шатохин Н.Л. Обобщенные тернарные и частичные тернарные кольца Холла со смежностью. // Известия Смоленского государственного университета. 2010. № 2(10). С. 166–174.
5. Шатохин Н.Л. Тернарные кольца Ельмслева // Известия Смоленского государственного университета. 2012. № 4(20). С. 403 – 411.
6. Шатохин Н.Л. Линейные AN -тернары над кольцами с делителями нуля // Известия Смоленского государственного университета. 2013. № 3(23). С. 395–402.

АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М.Ю. ЯСТРЕБОВ

Государственный университет морского и речного
флота имени адмирала С.О.Макарова, г. Санкт-Петербург,
e-mail: rectorat@gma.ru

УДК 519.24

Ключевые слова: *процессы с запаздыванием, распределённые лаги, статистические показатели инвестиционного процесса.*

На основе анализа статистической связи показателей процессов с существенным распределённым лагом предложены методы оценки лаговых коэффициентов в рамках экстремальной задачи.

Для инвестиционных процессов в больших экономических системах характерно запаздывание экономического эффекта, распределённое в ретроспективу. Характерным примером служит ввод основных производственных фондов как следствие предыдущих многолетних инвестиций. Указанное запаздывание находит своё выражение, в частности, в регрессионных моделях с распределённым лагом [1, 2, 3].

Исходной моделью служит уравнение связи эффекта f_t , достигнутого в момент t дискретного времени, и фактора x_t :

$f_t = \sum_{j=0}^n \alpha_j x_{t-j}$ с лаговыми коэффициентами α_j . Существенная

автокорреляция динамических рядов $\{f_t\}$ и $\{x_t\}$ не позволяет получить удовлетворительные оценки для $\{\alpha_j\}$ традиционным методом наименьших квадратов.

Существенным для данной статистической задачи в случае инвестиционного процесса является балансовое соотношение типа

равенства $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$. Вместе с естественным условием

неотрицательности лагов коэффициентов это позволяет трактовать задачу их оценки как поиск экстремума во внутренней точке выпуклой области и использовать градиентные методы.

Другой альтернативой в практическом плане может служить перебор точек $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n -мерной решётки с некоторым дискретным шагом.

Литература

1. Седелев Б.В. Оценка распределенных лагов в экономических процессах. М.: Экономика, 1977. 191 с.
2. Шульгина Л.А., Ястребов М.Ю. Методы исследования инвестиционного процесса на речном транспорте // Труды ЛИВТ. 1982. Вып. 173. С. 47–51.
3. Бернд Э. Практика эконометрики: классика и современность. М.: ЮНИТИ, 2005. 848 с.

СЕКЦИЯ 4

Новые информационные и педагогические технологии в образовании

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИХ ТАРИРОВОЧНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ СКЛЕРОМЕТРА SILVER SCHMIDT С ПОМОЩЬЮ EXCEL

И.А. АРШИНЕНКО

Смоленский государственный университет,
e-mail: arshinenko@gmail.com

УДК 378.147.88

Ключевые слова: *прочность бетона, тарировочные кривые, склерометр Шмидта.*

В статье описывается лабораторная работа, предполагающая применение Excel для создания тарировочных кривых для склерометра Silver Schmidt.

Склерометр (молоток) Шмидта широко распространён в практике определения прочности бетона в железобетонных изделиях. Между прочностью бетона и значением ударного импульса существует определённая зависимость, которая графически выражается кривой линией, называемой тарировочной кривой. Для построения этой кривой требуется провести параллельные испытания бетонных образцов склерометром и разрушающим методом, т.е. на одном образце определяется величина ударного импульса и предел прочности на сжатие. По этим двум характеристикам получают семейство точек, и проведённая по ним средняя линия есть тарировочная кривая. Тарировочные кривые строят для конкретных производственных условий. Корреляция между коэффициентом отскока и прочностью на сжатие очень сильно зависит от смеси тестируемого бетона.

На кафедре физики и технических дисциплин СмолГУ разработана лабораторная работа по дисциплине «Обследование и испытание зданий и сооружений». Одной из целей лабораторной работы является обучение студентов строительных специальностей использованию Excel для построения пользовательских тарировочных кривых.

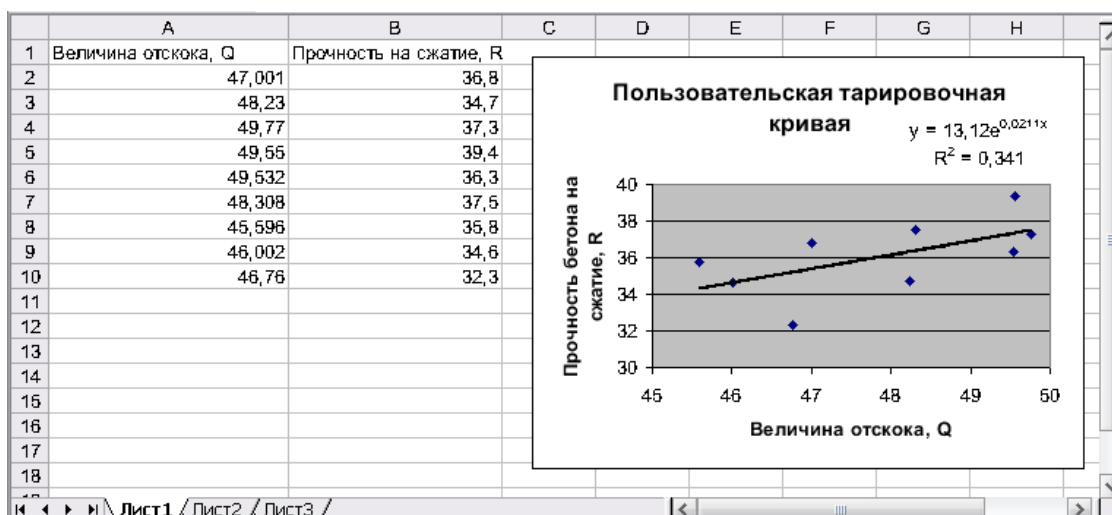


Рис. 1. Построение линии тренда по экспериментальным данным

Этап лабораторной работы, на котором студенты определяют параметры тарировочной кривой, состоит из следующих шагов.

1. Нанесение экспериментальных точек на диаграмму (см. рис. 1).
2. Добавление линии тренда. Функция Excel *Линия тренда* позволяет провести «наилучшую кривую» через экспериментальные точки и получить коэффициенты для полиномиальной или экспоненциальной функции, которые необходимо знать, чтобы запрограммировать пользовательскую тарировочную кривую в склерометр Silver-Schmidt.
3. Загрузка с помощью программного обеспечения Humberlink пользовательской тарировочной кривой в Silver Schmidt (рис. 2).

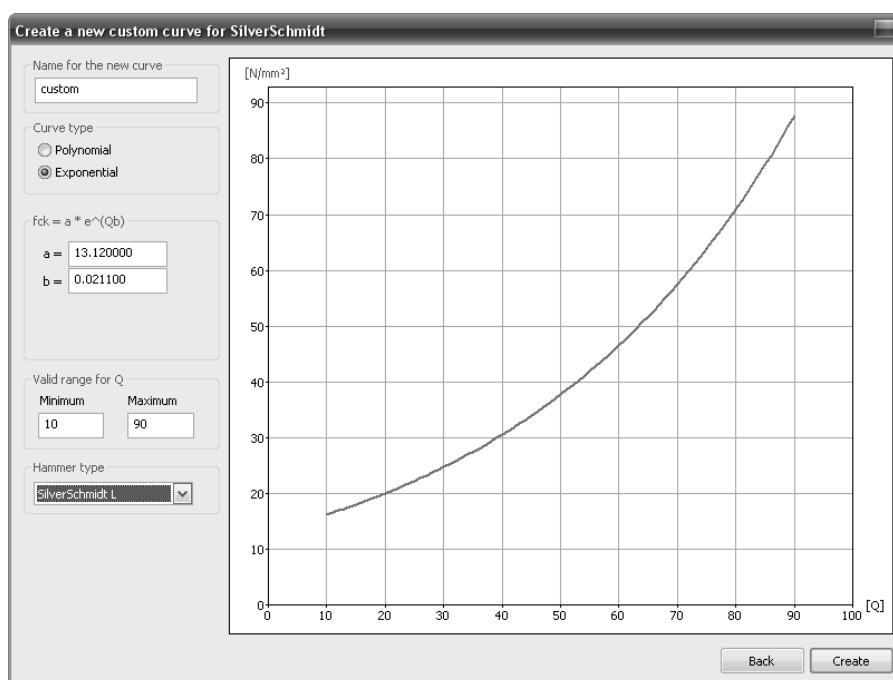


Рис. 2. Пользовательская тарировочная кривая

Выполнение поставленной лабораторной работы позволяет студентам не только изучить современный инструмент для испытания прочности бетона, но и научиться создавать пользовательские тарировочные кривые для него.

НЕКОТОРЫЕ МАНИПУЛЯТОРЫ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ ИНТЕРАКТИВНОСТИ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Н.В. АССОНОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: assonova@mail.ru

УДК 621.396.218

Ключевые слова: *электронный образовательный ресурс, интерактивность, граф, формат вычисляемых документов.*

В статье представлен составленный автором свободный электронный образовательный информационно-практический интерактивный ресурс для изучения некоторых вопросов дискретной математики русскоязычными студентами и старшими школьниками.

В работах [1; 2; 3] сообщается об опыте подбора на отечественных и зарубежных сайтах свободных электронных образовательных ресурсов (ЭОР) для использования в учебном процессе. В качестве одного из принципиальных критериев отбора ресурсов выступает наличие у них свойства интерактивности. В настоящей работе для свободного использования предлагается составленный автором интерактивный электронный образовательный ресурс информационно-практического характера «Изучаем графы». Его применение целесообразно для лучшего понимания некоторых вопросов дискретной математики, связанных с теорией графов. Предлагаемый ЭОР будет полезен в процессе обучения как студентов (в первую очередь гуманитарных направлений), так и школьников, рассматривающих вопросы, связанные с графами, включённые, например, в дополнительные и факультативные курсы.

Ресурс создан при помощи системы Mathematica, любезно предоставленной американской фирмой Wolfram Research [4]. Это одна из наиболее авторитетных компаний в мире по производству программного обеспечения для компьютеров, облачных вычислений и интернет-приложений, а также активный инноватор в области научных и технических разработок.

Основой для создания рассматриваемого ресурса послужили демонстрации, размещённые в свободном доступе на сайте Demonstrations Project [5]. На этом сайте, созданном и поддерживаемом фирмой Wolfram Research, представлены около 10 тысяч разбитых на рубрики CDF-демонстраций, снабжённых описанием и сведениями об авторах. CDF – это «вычисляемый» формат документа («Computable Document Format»), созданный компанией Wolfram Research, меняющий параметры визуализации в режиме реального времени при помощи специальных ползунков, о чём уже писалось в работе [3]. Просматривать CDF-демонстрации возможно с помощью бесплатно скачиваемого по адресу [6] CDF-проигрывателя.

Электронный образовательный ресурс «Изучаем графы», реализованный в свободно скачиваемом файле «GRAPHS.cdf», представлен публикацией «Информационно-практические электронные образовательные ресурсы. Интерактивная поддержка изучения элементов теории графов» осуществляется на сайте Русскоязычной поддержки Wolfram Mathematica [7] в разделе «Ресурсы», подразделе «Презентации». Там же можно найти и другой интерактивный информационно-практический ЭОР «Изучаем куб», составленный автором.

Для использования ресурса «Изучаем графы» (в том числе без подключения к Интернету) нужно скачать бесплатный CDF-проигрыватель [6] и установить его и затем запустить данный ресурс – предварительно свободно скачанный и сохранённый файл-презентацию GRAPHS.cdf.

ЭОР «Изучаем графы» носит информационно-практический характер, что означает возможность его использования при изучении нового материала как на этапе знакомства, так и на этапе закрепления. Ресурс реализован в виде презентации. После титульного слайда идёт слайд-содержание, позволяющий сразу переходить к одному из следующих разделов: «Описание графа», «Полные графы», «Графы и отношения», «Деревья», «Гамильтоновы цепи и пути», «Плоские и планарные графы». На следующем слайде описано управление манипуляторами – в частности, возможности настройки размеров рабочей области манипулятора, особенности перемещения ползунков манипуляторов. Управлять некоторыми демонстрациями можно при помощи различных устройств интерфейса, подключённых к компьютеру.

Перед каждой демонстрацией имеются рекомендации по работе с её содержимым.

Манипуляторы «Матрица смежности», «Гамильтонов путь», «Планарен ли граф?», вошедшие в представляемый настоящим докладом ресурс, были описаны в работе [2]. Помимо них, в ресурс

вошли демонстрации «Оргграф кругового турнира», «Полный граф», «Графы отношений», «Бинарное дерево», «Фрактальное дерево», «Гамильтонова цепь», «Непланарный граф K_5 », «Задача о трёх колодцах».

Например, манипулятор «Фрактальное дерево» позволяет глубже понять и усвоить строение дерева как вида графа. На рисунке 1 изображено дерево, в котором из каждой вершины (не считая корня)

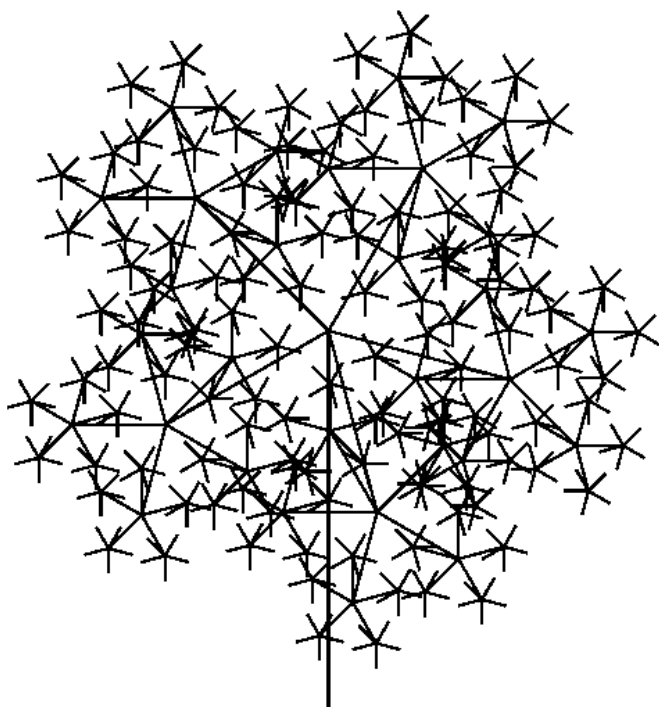


Рис. 1

исходит по 5 ветвей. «Поколений ветвей» выбрано 4. Кроме того, можно изменять толщину ветвей, угол поворота и длину, удивляясь каждый раз возникающим узорам.

Автор продолжает апробацию в учебном процессе предлагаемого ресурса, а также поиск и составление других подобных ресурсов, повышающих уровень интерактивности занятий по дискретной математике.

Литература

1. Ассонова Н.В. О проблемах математического контента некоторых свободных электронных образовательных ресурсов // Информатика и образование. 2014. № 4. С. 53-61.

2. Ассонова Н.В. Некоторые примеры интерактивных электронных образовательных ресурсов для изучения элементов теории графов будущими учителями начальных классов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV Международной научной конференции – Смоленск: СмолГУ, 2014. Вып.15. С. 237-239.

3. Ассонова Н.В. Использование динамических манипуляторов при изучении многогранников будущими учителями начальных классов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIV Международной научной конференции, посвящённой 90-летию профессора М.Б. Балка Смоленск: СмолГУ, 2013. Вып.14. С. 188 -190.

4. <http://www.wolfram.com>.

5. <http://demonstrations.wolfram.com>.

6. <http://www.wolfram.com/cdf-player> .

7. <http://wolframmathematica.ru/forum/main-category//другие ресурсы/презентации>.

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В РАЗВИТИИ РЕГИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ¹

Д.А. БОЯРИНОВ

Смоленский государственный университет

УДК 37.01:004

Ключевые слова: *дистанционное обучение, новые информационные технологии, телекоммуникационные технологии, информационное образовательное пространство.*

В статье рассматриваются современные телекоммуникационные технологии применительно к проблеме развития региональной системы образования. Выделяются наиболее распространенные системы Google Hangouts и Cisco TelePresence. Выявляются наиболее важные особенности систем применительно к организации региональной системы дистанционного образования.

Важным фактором развития системы общего образования является всё более широкое внедрение технологий дистанционного обучения [2; 3]. При этом:

- создаются условия для повышения качества образования и развития информационной компетентности учащихся, реализации творческих способностей одаренных детей;
- формируются условия для поэтапного перехода к новому уровню образования и новым формам управления образовательным учреждением с использованием новых информационных технологий;
- расширяются возможности для доступа школ к образовательным и информационным ресурсам глобальной информационной системы;
- повышается компетентность руководящего и преподавательского состава образовательных учреждений в области ИКТ;
- облегчается создание системы работы с одаренными детьми, в том числе в области информатики и программирования;
- создаются условия для внедрения дистанционных форм организации олимпиад и конкурсов среди школьников;
- создаётся система информационного и научно-методического обеспечения развития единой образовательной информационной среды [1].

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ и Администрации Смоленской области в рамках научного проекта №14-16-67012.

Широкое и эффективное внедрение технологий дистанционного обучения требует наличия ряда технических и технологических предпосылок [1]:

- современного технического оснащения;
- системы телекоммуникаций;
- автоматизированных рабочих мест;
- систем ввода и обработки информации и пр.

Необходимым условием разработки и внедрения технологий дистанционного обучения является выбор технологической базы, системы решений, на основе которых, собственно, и осуществляется дистанционное обучение.

Мы полагаем, что в современных условиях оптимальной стратегией (по отношению затрат к конечному эффекту) является использование готового решения профессиональной фирмы-разработчика. К наиболее распространенным решениям подобного рода относятся Google Hangouts и Cisco TelePresence.

Такие системы обладают рядом особенностей, упрощающих их практическое использование:

- простота планирования;
- удобство организации;
- понятные элементы управления;
- достаточно простые приложения для совместной работы;
- возможность подключения к совещанию участников, находящихся

в разных местах.

Отметим основные достоинства предлагаемого решения применительно к организации дистанционного обучения.

1. Системы Google Hangouts и Cisco TelePresence являются высоко адаптивными к различным условиям.

2. Использование современных телекоммуникационных технологий позволяет создать «эффект присутствия». Возможность видеть выражение лица собеседника по другую сторону «виртуального стола» психологически исключительно важна при организации дистанционного обучения.

3. Системы позволяют объединять в рамках одного совещания (сеанса дистанционного обучения) участников из различных географических пунктов, что создаёт особые возможности для объединения в учебном процессе учащихся сельских малокомплектных школ. Мы полагаем, что эта возможность особенно актуальна для нашего региона.

Таким образом, можно сделать вывод, что технологии Google Hangouts и Cisco TelePresence представляют собой готовые и очень удобные платформы для организации дистанционного обучения в рамках региона.

Литература

1. Бояринов Д.А. Информационное образовательное пространство личностного развития учащихся: монография. Смоленск; Изд-во СмолГУ, 2014. 144 с.
2. Интернет-образование: не миф, а реальность XXI века / Ж.Н. Зайцева [и др.]; под общей редакцией В.П. Тихомирова. М: Изд-во МЭСИ, 2000. 189 с.
3. Максимова Н.А. Проблемы проектирования региональных образовательных порталов. // Фундаментальные исследования. 2014. № 9-6. С. 1343 -1346.

ГОТОВНОСТЬ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ К ВНЕДРЕНИЮ ИНКЛЮЗИВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ: КРИТЕРИИ И ПОКАЗАТЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ

Е.Е. БУРЕНИНА, Г.Е. СЕНЬКИНА,

ГАУ ДПОС «СОИРО», г. Смоленск, Смоленский государственный университет,
e-mail: burenina.elena.68@mail.ru, gulzhan.senkina@gmail.com

УДК 37.01

Ключевые слова: *готовность, аксиологическая, организационно-педагогическая, материально-техническая, образовательная организация, инклюзивное образование, инклюзия, безбарьерная среда, дети с ограниченными возможностями здоровья, дети-инвалиды, учащиеся с ОВЗ, социально-педагогический анализ.*

Внедрение инклюзивного подхода в образовательную деятельность связано с длительным этапом адаптации образовательных условий под индивидуальные потребности детей с ограниченными возможностями здоровья. При оценке готовности того или иного образовательного учреждения к реализации инклюзии необходимо учитывать социальные, аксиологические, организационно-педагогические и материально-технические аспекты. Формирование системы комплексного социально-педагогического анализа готовности лежит в основе информационно-аналитического обеспечения принятия управленческих решений, направленных на реализацию инклюзивной практики и снижение рисков предполагаемых изменений.

Развитие инклюзивного подхода в современном образовании сталкивается не только с трудностями организации так называемой безбарьерной среды, но, прежде всего, с проблемами социального

свойства. Инклюзивное образование не будет успешным, если оно будет основано лишь на организационных изменениях. Это динамичный процесс, связанный с глубокими ценностными и содержательными изменениями [1]. Инклюзия – это процесс развития общего образования, который подразумевает доступность образования для всех в плане приспособления к различным нуждам всех детей. Инклюзия непосредственно касается всех учеников школы, а не только особенно уязвимых категорий, таких как дети с ограниченными возможностями здоровья. Инклюзия ориентирована на совершенствование школы не только для учеников, но и для учителей и ее работников. Российский опыт инклюзивной практики связан с длительным этапом экспериментального и проектного режима работы образовательных учреждений, адаптации образовательных условий под индивидуальные потребности детей с ограниченными возможностями здоровья. Остро встает вопрос качества самого процесса включения, профессиональной оценки его эффективности относительно различных категорий детей. В условиях нисходящей стратегии изменений важной становится оценка **готовности** того или иного образовательного учреждения к реализации инклюзивного подхода, работа с рисками, коррекция ошибок [1].

Рассматривая готовность как системообразующую установку к деятельности с позитивным результатом и стремлением к решению поставленных задач, необходимо учитывать, что:

- в основе инклюзивных подходов лежит такое изменение образовательной среды школы, которое позволяет в максимальной мере соответствовать образовательным потребностям любого учащегося, в том числе имеющего особые образовательные потребности;

- основным критерием эффективности инклюзивного образования является не только успешность освоения обучающимися академических знаний, но и главное - успешность социализации, введение в культуру, развитие социального опыта;

- в процессе реализации инклюзии должно формироваться позитивное взаимодействие между школами и обществом, в котором эти школы существуют и функционируют.

Следовательно, при оценке готовности образовательных организаций к внедрению инклюзивного образования необходимо учитывать социальные, аксиологические, организационно-педагогические и материально-технические аспекты.

Социальная готовность будет, в первую очередь, определяться наличием социального заказа на развитие инклюзивных процессов. Поэтому важно определить:

- количество семей, имеющих детей с ОВЗ, проживающих в районе школы;

- рекомендовано ли для детей с ОВЗ, проживающих в районе школы, инклюзивное образование, поскольку общие направления психолого-педагогического сопровождения ребенка в образовательных организациях задаются специалистами территориальной областной психолого-медико-педагогической комиссии в виде рекомендаций, написанных в заключении (оно указывает специалистам образовательных организаций основные направления и содержание коррекционно-развивающей работы, индивидуальных образовательных программ, определяет выбор психолого-методических средств, методов, приемов, форм работы, на основе которых разрабатываются критерии оценки, планируемые результаты) [4];

- согласны ли родители (законные представители) на осуществление обучения детей с ОВЗ в условиях массовой школы, так как именно родители играют важную, если не решающую, роль в образовании и поддержке учеников с особыми образовательными потребностями. В первую очередь, родители имеют все соответствующие этому статусу права и обязанности, но они также и источник информации, партнеры в разработке и реализации программ для детей и потребители предоставляемых образовательных услуг [4].

Аксиологическая готовность связана с нравственными отношениями, которые проявляются в «добровольном самодеятельном согласовании чувств, стремлений и действий конкретной личности с чувствами, стремлениями и действиями другого человека и общества в целом» [2]. С этой точки зрения при организации совместного (включенного) обучения детей с ОВЗ необходимо учитывать отношение в обществе к инклюзии как социальному явлению, поскольку трудность обучения «особого ребенка» в массовой школе обусловлена не столько отсутствием специальных условий (тифлотехнических приспособлений, пандусов, поручней и т.д.), сколько негативным отношением со стороны сверстников. Значимым фактором становится нежелание педагогов и родителей обучать нормально развивающихся детей вместе с детьми с ОВЗ [3]. Поэтому аксиологическая готовность будет определяться:

- пониманием роли инклюзивного образования в формировании подрастающего поколения, так как включенное образование способствует развитию у подростков нравственных качеств, определяющих психологическую готовность к построению конструктивного взаимодействия личности с другими людьми, отличающимися от нее социальной, культурной, конфессиональной принадлежностью, интересами, потребностями, мировоззрением;

- отношением к инклюзивному образованию как позитивному явлению в жизни общества, направленному на формирование личностно-значимых образцов бесконфликтного или компромиссного поведения;

- пониманием приоритетности инклюзивного образования, поскольку инклюзивно-ориентированные общеобразовательные школы – это «самый эффективный метод борьбы с дискриминацией в образовании, инструмент построения по-настоящему инклюзивного общества и предоставления образования для всех детей..» (Саламанкская декларация о принципах, политике и практической деятельности в сфере образования лиц с особыми потребностями).

Организационно-педагогическая готовность будет связана с профессиональной деятельностью учителей, специалистов сопровождения и администрации образовательной организации. В целом этот компонент ориентирован на полноценное и эффективное освоение образовательной программы всеми учащимися инклюзивной группы / класса. В первую очередь должно быть организовано привлечение специалистов психолого-педагогического сопровождения к участию в проектировании образовательного процесса – создание психолого-медико-педагогического консилиума, а также координация деятельности членов консилиума, членов территориальной ПМПк и педагогического коллектива образовательного учреждения в целом. В рамках создания организационно-педагогических условий должен быть сформирован адекватный запрос на методическую и психолого-педагогическую поддержку как со стороны специалистов школы, так и через организацию взаимодействия с родителями в духе сотрудничества и разделения ответственности. Обязательно применение адекватных возможностям и потребностям обучающихся современных технологий, методов, приемов, форм организации учебной работы, а также адаптация содержания учебного материала (в рамках разработки адаптированной образовательной программы) [5]. Поэтому при определении готовности необходимо учитывать:

- наличие в образовательной организации специалистов психолого-педагогического сопровождения;
- наличие в образовательной организации ПМПк;
- наличие системы взаимодействия и поддержки образовательной организации со стороны «внешних» партнеров – методического центра, ППМС-центра, общественных организаций;
- разработанность критериев, на основании которых ребенок включается в образовательное учреждение.

Для определения организационно-педагогической готовности представляется важной оценка информационного и технологического компонентов готовности педагогов к реализации инклюзии. Информационный компонент отражает наличие предметно-специальных и нормативно-правовых знаний, позволяющих принимать эффективные решения в профессионально – педагогической деятельности. Технологический компонент содержит процессуальные характеристики,

формы, методы, средства. Включает педагогическое взаимодействие, организацию и управление процессом, без которых не может быть достигнут конечный результат.

При оценке организационно-педагогической готовности целесообразно учитывать следующие показатели:

- знание нормативно-правовых основ инклюзивного образования, которые являются юридической базой организации образовательного процесса;

- знание особенностей организации образовательного процесса в условиях инклюзии, которые отражают свойства, характерные как для обучения, так и для воспитания различных обучающихся, в том числе их направленность, взаимосвязь всех структурных элементов педагогической системы образовательного учреждения, особенности двустороннего взаимодействия ученика и учителя;

- знакомство с опытом инклюзивного образования в разных странах, в том числе ближнего зарубежья, в различных регионах России;

- знание условий эффективности реализации инклюзивного образования, т.е. условий, в которых обучающиеся с различной подготовкой, различными физиологическими возможностями и различными перспективами дальнейшего обучения могут получить качественное образование;

- наличие у педагогов необходимых профессиональных навыков для работы с детьми с ОВЗ, в том числе коммуникативных, методических, технических, информационных;

- умение осуществлять деятельность по преодолению негативного отношения к совместному образованию, поскольку, как показывает практика, одной из основных проблем инклюзии является выстраивание контактов детей с ОВЗ и здоровых детей;

- владение копинг-стратегиями по преодолению психологического барьера, возникающего при обучении детей с ОВЗ, поскольку появление в классе ребенка с ограниченными возможностями здоровья — это стресс не только для самого ребенка, но и для учителя, который испытывает дискомфорт, так как исчезает равновесие между индивидуальным восприятием запросов образовательной среды и профессиональных ресурсов, доступных для взаимодействия с этими запросами.

Материально-техническая готовность не является определяющей, но имеет большое значение при организации инклюзивного образовательного пространства для создания безбарьерной среды. Как важные условия материально-технического плана должны выступать обеспечение проведения массовых мероприятий, собраний, представлений с учетом потребностей детей с ОВЗ, обучающихся в

данном учреждении, а также безбарьерная (архитектурная) среда для организации их отдыха и питания.

Материально-техническое оснащение образовательного процесса должно обеспечивать возможность создания и использования информации с учетом потребностей детей с ОВЗ, обучающихся в данном учреждении (в том числе записи и обработки изображений и звука, выступлений с аудио-, видеосопровождением и графическим сопровождением, общения в сети Интернет и др.). При этом следует понимать, что для различных категорий детей с ОВЗ в зависимости от их особенностей необходимо создание специальных условий, обеспечивающих реализацию необходимого уровня и качества образования, а также необходимую социализацию этой категории детей. Поэтому нужно выделять общеспецифические и частноспецифические образовательные условия. Так, под общеспецифическими образовательными условиями следует рассматривать такие условия, которые должны обеспечивать создание и эффективное функционирование адаптивной образовательной среды для отдельных категорий детей с ОВЗ. К таким категориям относятся дети с вариантами дефицитарного развития – нарушениями слуха, зрения, опорно-двигательного аппарата, с различными соматическими заболеваниями, влекущими за собой необходимость создания необходимой адаптивной среды, а также дети с выраженными поведенческо-эмоциональными расстройствами, в том числе дети с расстройствами аутистического спектра различной степени выраженности [1].

В свою очередь, в качестве частноспецифических можно рассматривать условия, которые обеспечивают эффективную адаптивную среду для данного ребенка. При создании частноспецифических условий реализации образовательного процесса для конкретного ребенка с какими-либо ограниченными возможностями здоровья и особыми потребностями, «проявляется» вся общая спецификация специальных образовательных условий, которая каждый раз должна быть модифицирована, индивидуализирована в соответствии с возможностями и особенностями данного ребенка. Именно такой процесс варьирования, индивидуализации специальных условий должен лежать как в основе деятельности психолого-медико-педагогических комиссий – в их итоговом заключении, определяющем образовательный маршрут и условия его реализации, - так и в деятельности консилиума образовательного учреждения. Наиболее важно, чтобы подобным образом разрабатываемые условия были включены в индивидуальную образовательную программу (для детей дошкольного возраста – в индивидуальную программу развития) в качестве одного из ее компонентов. Точно так же важно, чтобы в процессе оценки эффективности реализации ИОП было уделено место оценке качества и

полноты создания для данного ребенка с ОВЗ условий полноценного включения его в образовательный процесс в соответствии с индивидуальными особенностями и возможностями.

В этой ситуации необходимо говорить не только об условиях, которые ПМПК определяет как необходимые для социальной адаптации и обучения конкретного ребенка с ОВЗ, но и о критериях, на основе которых ребенок включается в образовательное учреждение. Ведь очень многим детям с ограниченными возможностями здоровья не требуется создания специальных образовательных условий. С нашей точки зрения, при выработке этих критериев необходимо не опираться на нозологический принцип, а отталкиваться от особых образовательных потребностей детей и собственно специфических условий, необходимых для социальной и образовательной адаптации ребенка [1].

Следовательно, при оценке готовности образовательной организации к включению детей с ОВЗ в образовательное пространство необходимо учитывать соответствие материально-технической базы школы их особым образовательным потребностям, в том числе:

- наличие в образовательной организации условий для проведения массовых мероприятий с учетом потребностей детей с ОВЗ и детей-инвалидов, обучающихся в данном учреждении;

- наличие условий для организации отдыха и питания с учетом потребностей детей с ОВЗ и детей-инвалидов, обучающихся в данном учреждении;

- наличие общеспецифических образовательных условий для данной группы обучающихся с ОВЗ и детей-инвалидов;

- наличие частноспецифических образовательных условий для отдельных обучающихся с ОВЗ и детей-инвалидов.

Для получения необходимой информации об уровне готовности образовательной организации к внедрению инклюзивных процессов можно применять анкетирование, как в устной, так и в письменной форме. Применение метода заочного анкетирования, без непосредственного контакта интервьюера с респондентом, более целесообразно, так как позволяет опросить большое число респондентов за относительно короткое время, при этом у респондента есть время продумать ответы. Анкетирование носит выборочный характер с учетом репрезентативности выборки. Основным инструментом является анкета, состоящая из опросного листа и преамбульно-инструктивного раздела. Преамбула выполняет функцию мотивации респондента на заполнение анкеты, формирования его установки на искренность ответов. Инструктивный раздел содержит необходимые комментарии и инструкции по работе респондента с анкетой. Опросный лист разрабатывается не только на основе общих требований к опросу, но и с учетом системности, т.е. при анализе учитывается информация не

только по отдельным вопросам, но и та, которая обнаруживается при осмыслении всех вопросов как взаимодействующих структур, а всех ответов на них - как взаимодействующих элементов. Построение вопросников строится на принципе «от общего к частностям», при котором последующие вопросы могут играть роль контрольных по отношению к предыдущим.

Для обработки полученных данных и установления количественных характеристик различных аспектов готовности целесообразно применять математические и статистические методы анализа. Они помогают оценить результаты, повышают надежность выводов, дают основания для теоретических обобщений. Из математических методов используются регистрация и ранжирование, на основании которых формируется рейтинг. С помощью статистических методов определяются средние величины полученных показателей. Результаты, обработанные с помощью этих методов, позволяют представить количественные характеристики готовности в виде диаграмм и таблиц.

Анализируя отдельные факты, группируя и систематизируя их, мы устанавливаем общий уровень готовности, выявляем вид и уровень ресурсного дефицита в отдельных образовательных организациях и системе в целом. По результатам теоретического анализа составляется комплекс рекомендаций по подготовке образовательных организаций к включению детей с ОВЗ и детей-инвалидов в образовательное пространство, разрабатывается план мероприятий повышения квалификации и переподготовки педагогических кадров.

Формирование системы комплексного социально-педагогического анализа готовности образовательной организации к внедрению инклюзивного образования лежит в основе информационно-аналитического обеспечения принятия управленческих решений, направленных на реализацию инклюзивной практики и снижение рисков предполагаемых изменений.

Литература

1. Алехина С.В. О мониторинге инклюзивного процесса в образовании. Инклюзивное образование: методология, практика, технология: материалы международной научно-практической конференции 20–22 июня 2011 / отв. ред. С.В. Алехина. М.: МГППУ, 2011.

2. Москаленко И.В. К проблеме изучения нравственных ценностей: нравственные национальные ценности. Проблемы и перспективы развития образования в XXI веке: профессиональное становление личности (философские и психолого-педагогические аспекты): материалы международной научно-практической конференции. Пенза – Ереван – Прага: Научно-издательский центр «Социосфера», 2011. С. 63–69.

3. Толерантность – как процесс инклюзивного образования // РМО учителей начальных классов пушкинского района: URL: <http://rmo-msk.ru/metodicheskaya-kopilka/2013-01-09/tollerantnost-kak-protcess-inklyuzivnogo-obrazovaniya> (дата обращения: 17.10.2014).

4. Дементьева С.В. Сотрудничество с участниками образовательного процесса при реализации рекомендаций ПМПК. Инклюзивное образование: проблемы управления и технологии реализации: сб. материалов II Педагогических чтений им. Первого министра общего и профессионального образования Свердловской области Валерия Вениаминовича Нестерова. – Екатеринбург. СОПК, 2013. Ч 1. 122 с.

5. Семаго Н.Я. Об условиях реализации инклюзивного образования. Инклюзивное образование: практика, исследования, методология: материалы II международной научно-практической конференции / отв. ред. Алехина С.В. – М.: МГППУ, 2013.

ИЗУЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПК «SCAD Office»

А.В. ДЮНДИН

Смоленский государственный университет,
e-mail: avdyndin@yandex.ru

УДК 372.862

Ключевые слова: *строительная механика, вариация заданий, программный комплекс.*

В работе рассматривается вопрос об организации процесса обучения по дисциплине «Строительная механика» с использованием современных программ проектирования конструкций.

Переход на уровневую подготовку в высшем профессиональном образовании вызывает большое количество возмущений, споров и дебатов, однако практически все их участники едины в том, что необходимо обязательно сохранить традиции отечественной высшей школы.

В соответствии с новым образовательным стандартом по направлению подготовки «Строительство» [7] расширен перечень требований к подготовке бакалавра в области владения прикладными расчетными программами. Однако вместе с конкретизацией списка требований (компетенций) сокращается объем аудиторной нагрузки по основным дисциплинам, иногда снижение достигает 50–70% по сравнению с планами подготовки специалистов.

Одним из решений данной проблемы в рамках направления подготовки «Строительство» является использование более широкой,

чем ранее, интеграции дисциплин, составляющих базу предметной подготовки бакалавра, за счет раннего изучения прикладных расчетных программ, начиная с дисциплин «Сопротивление материалов», «Строительная механика» и др. Указания на возможность реализации подобного подхода присутствует в работах [1; 2] и еще у довольно большого числа авторов.

В процессе изучения дисциплины «Строительная механика» студенты выполняют задания поэтапно:

- «классический» ручной расчет;
- расчет с помощью прикладных расчетных программ;
- решение задач с варьированием условий.

Подобный подход позволяет сделать процесс обучения более интенсивным, интересным; увеличивает количество рассмотренных на занятии задач. При проведении практических занятий ручной расчет студенты выполняют самостоятельно по вариантам в качестве домашнего задания, на занятии проверяют решения с использованием программ и, по заданию преподавателя, варьируют условия, обращая внимание на их результаты.

В качестве базового элемента для реализации нашей системы выбран программный комплекс «SCAD Office». Причины данного выбора заключаются в следующем:

- хорошее методическое обеспечение, например [4–6];
- наличие импорта-экспорта данных из большого числа программ;
- большой пакет программ-сателлитов.

Специальные математические пакеты, использование которых описано, например, в [3], использовать в учебной практике неудобно, так как требуется значительное время на изучение самого пакета и способа представления данных в нем.

Раннее использование прикладных программ в процессе изучения дисциплины «Строительная механика» позволяет заранее изучить интерфейс комплекса, сформировать умение работать в нем, сократить затраты времени на создание расчетных схем в процессе изучения дисциплин «Металлические конструкции», «Железобетонные и каменные конструкции», «Основания и фундаменты».

Литература

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика : учебник для студентов строит. спец. вузов. СПб: Лань, 2010 . 655 с.
2. Константинов И.А., Лалин В.В., Лалина И.И.. Строительная механика: учебник М.: Проспект: Кнорус, 2010. 432 с.
3. Кристалинский Р.Е., Шапошников Н.Н. Решение вариационных задач строительной механики в системе МАТНЕМАТИСА: учеб. пособие. СПб: Лань, 2010. 240 с.

4. Семенов А.А., Габитов А.И. Проектно-вычислительный комплекс SCAD в учебном процессе. Ч. I: Статический счет: учебн. пособие М.: Издательство АСВ, 2005. 152 с.

5. Семенов А.А., Порываев И.А., Сафиуллин М.Н. Комплекс виртуальных лабораторных работ для студентов направления подготовки «Строительство» с применением ПК SCAD. // Строительство уникальных зданий и сооружений. - 2014. № 1(16). С.5–22.

6. Габитов А.И., Семенов А.А. Программный комплекс SCAD в учебном процессе. Ч. II: Применение при расчете железобетонных конструкций в курсовом и дипломном проектировании: учебн. пособие М.: Издательство СКАД СОФТ, 2011. 280 с.

7. ФГОС ВПО по направлению подготовки 270800 «Строительство» (квалификация (степень) «бакалавр»).

URL: <http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/12073380/> (Дата обращения: 11.03.2015).

РОЛЬ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ¹

Г.С. ЕВДОКИМОВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: evgalsema@gmail.ru

УДК 372.851

Ключевые слова: образование, профессиональные компетенции, научно-исследовательская деятельность, моделирование, компьютерные технологии, пакеты прикладных программ, статистический анализ данных.

Статья посвящена актуальной проблеме повышения эффективности учебного процесса в вузе с помощью компьютерных технологий. В ней представлена целесообразность использования статистических пакетов при организации научно-исследовательской работы студентов.

В рамках внедрения ФГОС современное содержание образования отличается от предшествующего своими компонентами, целями и заданными результатами. Оно направлено на получение высококлассного специалиста, компетентность которого определяется наличием знаний, опыта, необходимых для активной деятельности в заданной предметной области, а также совокупностью компетенций. Ключевыми компетенциями будущего специалиста являются, в частности, профессиональные компетенции, неотъемлемой частью развития которых является научно-исследовательская деятельность. Для организации научно-исследовательской деятельности студентов

¹ Публикация подготовлена в рамках поддержанного РГНФ и Администрацией Смоленской области научного проекта № 14-16-67009.

используются разнообразные средства, методы и технологии учебно-воспитательного процесса.

Необходимо, чтобы студенты при освоении курсов математики хорошо понимали сущность предмета, усваивали математический стиль мышления и могли в своей практической деятельности использовать математические методы и результаты. Программа перестройки современной системы образования выдвигает на один из первых планов использование компьютерных технологий. Очень важно в контексте компьютеризации учебного процесса в вузе научить будущего специалиста математическому моделированию для решения задачи, ясно выделяя три этапа работы: формализацию, т.е. переход от рассматриваемой реальной системы к построению адекватной математической модели; решение задачи внутри построенной модели на языке той теории, в рамках которой находится модель; интерпретацию полученного результата к исходной задаче, т.е. истолкование решения в терминах исходной реальной ситуации. Очевидно, наиболее плодотворными являются исследования, ведущиеся на стыке нескольких областей знаний. Особенность решения таких задач заключается не только в обработке большого объема информации, но и в необходимости выявления причинно-следственных связей, построения формализованных моделей для анализа и прогноза. Студентам, обучающимся по направлению «Педагогическое образование», можно предложить работу: исследовать уровень преступности среди подростков Центрального федерального округа. В качестве исходных данных следует использовать материалы из статистических ежегодных изданий Федеральной службы государственной статистики, а также данные, опубликованные на официальном сайте Федеральной службы государственной статистики. Имея большой цифровой материал, для получения достоверных результатов студенты должны достигнуть того, чтобы бесформенная масса чисел начала принимать характер видимых соотношений, связей между различными явлениями. Осуществить это можно, используя наиболее рациональные и совершенные приемы исследования, многомерные статистические методы (корреляционно-регрессионный анализ, кластерный анализ, факторный анализ и т.д.). Однако современный прикладной статистический анализ немислим без компьютера, а владение компьютерными методами анализа данных – это один из базовых элементов подготовки современного специалиста [1]. Рекомендуется использовать такие системы компьютерной математики, как: SPSS, STATISTICA, Statgraphics, Systat, SAS, R, BMDP, Stadia, Эвриста, Статистик-консультант, MedStat. Сюда надо добавить и пакеты, в которые возможность статистических расчетов входит как часть того, что с их помощью можно делать. Это Mathematica, Maple, MatLab и MathCad. Анализ статистических данных

можно производить и с помощью широко распространенного табличного редактора Excel и его аналогов. Заметим, что пакет STATISTICA в большинстве вузов России является базовым статистическим пакетом для обучения методам статистического анализа. Пакет STATISTICA – универсальная система анализа данных, разработанная компанией StatSoft, построенная по модульному принципу, каждый модуль выполняет определенный набор функций и может быть использован и автономно [2].

Литература

1. Евдокимова Г.С., Кристалинский Р.Е. Использование систем компьютерной математики как средства формирования профессиональной компетентности студента // Известия Смоленского государственного университета. 2013. № 4. С. 416–424.
2. Елизарова Н.И. Использование программных средств статистической обработки при формировании информационного обеспечения управления // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2009. Вып.3. С.1–5.

РЕАЛИЗАЦИЯ БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ НА ОСНОВЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ MAPLET С БАЗОЙ ДАННЫХ В ФОРМАТЕ EXCEL

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ¹, А.Р. САМИГУЛЛИНА²

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, г. Казань
e-mail: ¹ignatev_yu@rambler.ru, ²alsu_sam@mail.ru

УДК 004.94, 004.92

Ключевые слова: *excel, системы компьютерной математики, Maple, Maplet, балльно-рейтинговая система.*

Описана реализация балльно-рейтинговой системы оценки знаний в системе математического образования для нематематических специальностей на основе взаимодействия Maplet с базой данных в формате Excel.

В ряде предыдущих работ авторов [1–4] были сформулированы основные принципы и методы информатизации физико-математического образования на основе математического моделирования в системах компьютерной математики (СКМ). Для логического замыкания информатизации процесса обучения высшей математике необходимо автоматизировать на основе СКМ также и процесс контроля знаний, как промежуточный, так и основной, в форме

экзамена / зачета и встроить этот процесс в балльно-рейтинговую систему университета / института. Для этих целей разработан комплекс программ SRS в СКМ Maple, осуществляющий обмен данными из окна Maplet с рабочими листами Microsoft Excel, причем каждой академической группе соответствует отдельный лист, в таблицы которого производится запись / считывание СКМ Maple.

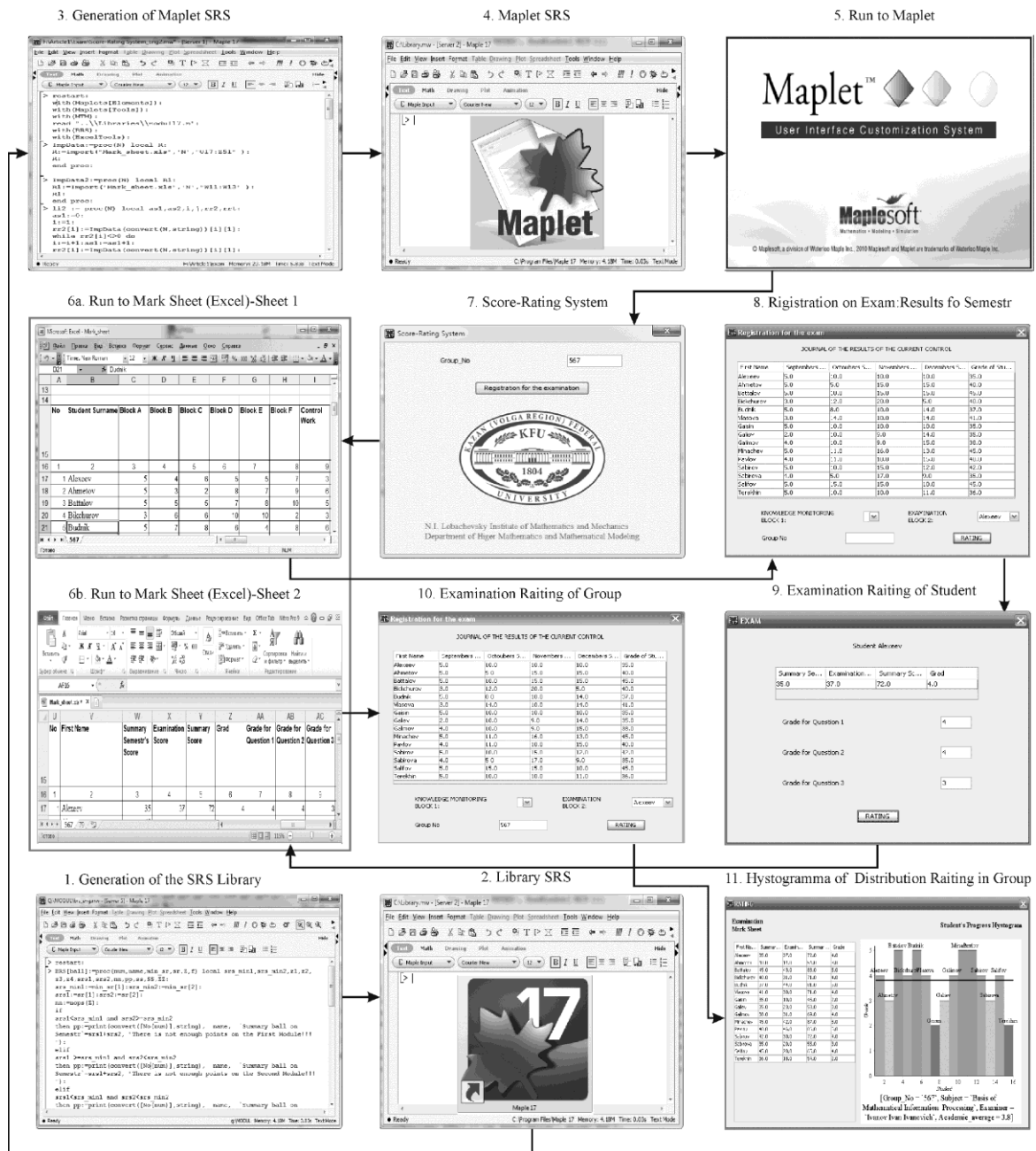


Рис. 1. Блок-схема программы экзаменационного тестирования SRS

Созданная программа экзаменационного тестирования имеет следующую структуру (см. рис. 1). Блок 1 (GenLib.mw) генерирует библиотеку программных процедур (BRS) подсчета баллов и

представления результатов сессии в виде гистограммы (файл Lib.m) (блок 2). Блок 3 использует библиотеку Lib.m, с помощью которой создает Maplelet (блок 4). Пользователь обращается к Maplelet – программе (блок 5), которая открывает окно тестирования (блок 7). При регистрации для входа на экзамен Maplelet обращается к листу Microsoft Excel с результатами прохождения учебных модулей в течение семестра (блок 6а, лист Microsoft Excel). При регистрации открывается окно, содержащее список студентов группы с информацией о допуске студентов к экзамену по каждому из учебных модулей. При выборе конкретного студента открывается окно Maplelet (блок 9), в котором преподаватель выставляет оценки по пятибалльной шкале за ответ на каждый вопрос экзаменационного билета. При нажатии кнопки «RATING» окончательные результаты экзамена с учетом баллов по модулям семестра выводятся в специальном окне по пятибалльной шкале и одновременно записываются в соответствующей таблице листа Microsoft Excel (блок 6б). Одновременно открывается следующее окно Maplelet с результатами сессии группы (блок 10), в котором после ввода номера группы и нажатия кнопки «RATING» в открывшемся окне Maplelet (блок 11) выводятся результаты сессии в академической группе, как в табличном виде, так и в виде гистограммы (гистограмма показана на рисунке 1).

Литература

1. Игнат'ев Ю.Г., Самигуллина А.Р., Агафонов А.А. Программный комплекс итоговой аттестации знаний, автоматизированного анализа и вывода результатов аттестации группы учащихся / студентов по балльно-рейтинговой системе (БРС) на основе прикладного математического пакета Maple, его приложения Maplelet и Microsoft Excel // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ РФ №2014661615. 2014. Бюл.: RU ОБПБТ, № 12(98).

2. Игнат'ев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программные процедуры итоговой аттестации знаний по балльно-рейтинговой системе на основе прикладного математического пакета Maple, его приложения Maplelet и Microsoft Excel. Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 48 / Казанское математическое общество // Лобачевские чтения – 2014: материалы Двенадцатой молодежной научной школы-конференции. Казань: Издательство Казанского математического общества, 2014. Т. 48. С. 86-87.

3. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. A Mathematical Modeling In Computer Algebra Systems (CAS) As A Base For A Development of The Mathematics Education // arXiv:1410.4456[physics.ed-ph].

4. Игнат'ев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Математическое моделирование в СКМ как основа развития математического образования // IV-й Международный семинар по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZKAS-2014. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZKAS-2014. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. С. 95–110.

ПРИМЕНЕНИЕ СКРИНКАСТОВ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ФИЗИКИ

В.И. КОНАШЕНКО

Смоленский государственный университет

УДК 378.147.88

Ключевые слова: *скринкаст, видеолекция, программы для создания скринкастов, применение компьютера в обучении, дистанционное обучение.*

Обсуждается возможность применения скринкастов в процессе изучения физики. Скринкаст предполагает запись с экрана компьютера всех действий при подготовке видеолекции и другого дидактического материала для студентов. Применение скринкаста открывает дополнительные возможности для организации самостоятельной работы студентов.

Поиск форм обучения, которые позволяют активизировать этот процесс, в настоящее время заставляет обратиться к технологии экранного видео. Зрительный, слуховой и моторный пути получения студентом информации можно активизировать, объединив их в видеолекции. Это позволит повысить качество и интенсивность процесса обучения, выведет студента на новый уровень понимания и усвоения изучаемого материала по физике. Ведь хорошо известно, что только услышанное усваивается студентом в объёме 12% информации, увиденное повышает уровень усвоения информации до 25%, а объединение услышанного и увиденного в рамках видеолекции повышает объём усвоения информации до 70%. Студенты имеют возможность просмотреть видеолекцию дома в свободное время и в комфортном для себя темпе. Для многих студентов компьютер стал привычным и основным источником получения информации. Имея под рукой видеоматериал, пропущенный в ходе семестра по разным причинам, студенты легко ликвидируют пробелы в знаниях.

Создание экранного видео, сопровождаемого голосовым комментарием, не такое простое дело, как может показаться с первого взгляда. От создателя этого видеоматериала требуется большая подготовительная работа по разработке сценария лекции, по подбору материала и, наконец, сама запись информации с экрана компьютера. Но и это ещё не всё. Этот материал необходимо оформить в учебный продукт, которым могут воспользоваться студенты. Для этого необходимо иметь определённое программное и техническое обеспечение процесса создания видеолекции, желание преодолевать возникающие многочисленные проблемы и не скупиться на затраты (в области не только финансов, но и времени).

В заключение хочется отметить, что данная технология может стать одним из эффективных способов повышения качества подготовки будущих специалистов, позволит улучшить организацию и руководство самостоятельной работой студентов и создать базу для организации дистанционного обучения.

**ПРАКТИЧЕСКИЕ И ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»**

И.В. ЛАНЕВА

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова, г. Санкт-Петербург,
e-mail: rectorat@gma.ru

УДК 519.8

Ключевые слова: *теория игр, исследование операций, оптимизационные задачи, программный пакет Maple.*

В работе рассматриваются тематика практических и лабораторных работ по дисциплине «Теория игр и исследование операций» и использование программных пакетов для реализации алгоритмов решения оптимизационных задач.

Опыт преподавания студентам семестровой дисциплины «Теория игр и исследование операций» показывает, что для лучшего усвоения курса необходимы (помимо лекций) как практические занятия, так и лабораторный практикум. Соотношение объема последних определяется тематикой программы. Представляется методически целесообразным формировать ее так, чтобы, во-первых, учитывалась отраслевая специфика вуза (в данном случае – водный транспорт), и во-вторых, было продемонстрировано разнообразие постановок оптимизационных задач и подходов к их решению.

Полученный методический опыт позволяет рекомендовать к включению в курс исследования операций следующие темы: задачи линейного программирования (графическое решение и симплекс-метод), транспортную задачу (метод потенциалов), задачу о назначениях, задачу о коммивояжере (метод Литтла), задачу о запасах, задачи динамического программирования. Также в данном

курсе изучаются основы теории графов, рассматриваются задачи нахождения кратчайшего и критического путей в графе, поиска остова минимального веса, поиска эйлерова цикла, топологической сортировки графа.

Завершается семестровый курс изложением основ теории игр; более подробно изучаются антагонистические матричные игры двух лиц с нулевой суммой.

Эти темы естественным образом увязываются с вопросами анализа сложности алгоритмов и способами представления данных, обеспечивая непрерывность математической подготовки и межпредметные связи.

На практических занятиях студентам предлагаются для решения типовые задачи, подробно на основе лекционного курса разбираются алгоритмы решения оптимизационных задач. Преподаватель обращает внимание студентов на различные трудности, возникающие при применении известных алгоритмов. Необходимо подчеркивать практическую значимость рассматриваемых задач и их решений.

На лабораторном практикуме студентам предлагается индивидуальный набор задач по всем пройденным темам. Студенты самостоятельно решают предлагаемые задачи. Кроме того, в ходе лабораторных практикумов студенты, используя компьютерную программу Excel или программный пакет Maple, учатся написанию алгоритмов решения данных задач. Таким образом, студенты детально знакомятся с алгоритмами решения оптимизационных задач и параллельно учатся программированию этих алгоритмов.

Опыт показывает, что изучение дисциплины «Теория игр и исследование операций» существенным образом сказывается на выборе студентами тем квалификационных работ.

Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр: учебник. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
2. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с.

О ЗАДАЧАХ НА МАТЕМАТИЧЕСКУЮ КОМПЕТЕНТНОСТЬ

В.А. ПЕТРОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: VAPetrov@smolgu.ru

УДК 372.851

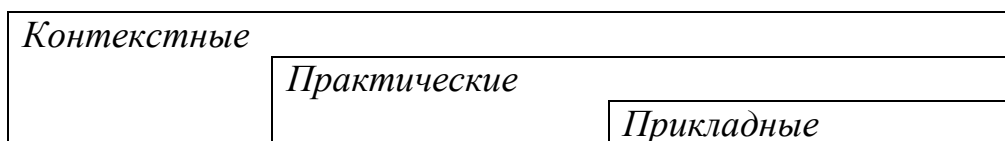
Ключевые слова: *математическая компетентность, прикладные, практические и контекстные задачи.*

В статье рассматривается многообразие названий задач, призванных формировать навыки практического применения математики и проверять математическую компетентность. Делается попытка их классификации. Приводятся требования,

которым, по мнению автора, должны удовлетворять прикладные задачи для школьников.

В связи с внедрением концепции компетенций в математическое образование оживился интерес к задачам практического содержания. Они активно внедряются в качестве оценочных средств в ГИА и ЕГЭ, используются в международном исследовании «математической грамотности» школьников PISA. При этом наблюдается богатый разноречивой в терминологии: прикладная, практическая, производственная задача; задача с практическим содержанием; реальная, быденная или жизненная задача; контекстная и практико-ориентированная задача. В публикациях критического характера в обиход вошли такие термины, как псевдоприкладная и псевдоматематическая задача, шпindelная математика. Различные авторы не только используют различные термины, но и высказывают разного рода требования к задачам такого типа (см., например, [1–3]).

Наш многолетний опыт исследования рассматриваемой темы приводит к выводу, что весь массив разноназываемых задач с претензиями на практическое содержание можно разделить на 3 класса, которые включаются друг в друга. Из всего многообразия терминов при этом целесообразно выделить наиболее употребительные: *прикладные*, *практические* и *контекстные* задачи (см. диаграмму).



Наиболее редки и трудно составляемы прикладные задачи, к которым мы относим задачи, возникающие в реальной практике людей различных профессий и решаемые путем их математизации. Прикладные задачи для школьников должны, на наш взгляд, удовлетворять следующим требованиям:

- 1) производственная реальность сюжета;
- 2) математическая существенность сюжета;
- 3) естественность вопроса задачи;
- 4) математическая содержательность;
- 5) терминологический лаконизм.

К практическим можно отнести большой пласт задач, которые удовлетворяют требованиям 2–4, но с реальной практикой связаны весьма условно. Чаще всего это более или менее правдоподобные «фантазии» методистов. К контекстным относят задачи, у которых контекст является существенной частью условия, оказывая влияние на решение и его интерпретацию (не исключается использование задач с гипотетическим условием, если оно не слишком отдалено от реальной ситуации).

Приведем выразительные примеры задач каждого из трех классов.

Прикладная задача. Найти углы продольного наклона и угол поперечного крена трактора, движущегося по склону с углом подъема α по траектории, отклоняющейся от продольного направления на угол β .

Практическая задача (ЕГЭ–2011). Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное количество билетов можно будет купить на 100 рублей после подорожания билета на 20% ?

Контекстная задача. Земной шар обтянут по экватору проволокой, которую удлиннили на 1 метр. Пролезет ли в образовавшуюся щель мышь?

Три выделенных класса задач вполне жизнеспособны, но для каждого из них должно быть свое назначение, место и время, а также и своя методика (подробнее об этом см. [2]).

Литература

1. Егупова М.В. Прикладная направленность обучения математике в историческом контексте // Математика в школе. 2007. № 2.
2. Петров В.А. Математика. 5 – 11 кл. Прикладные задачи. М.: Дрофа, 2010.
3. Тюменева Ю.А. Задания «на перенос» знаний: теория и практика // Математика в школе. 2014. № 10.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРА

Б.В. СЕЛЮК

Смоленский государственный университет,
e-mail: 654-998@mail.ru

УДК 37.016:531.3:004

Ключевые слова: *компьютерные лабораторные работы, техническая механика, MathCAD, «Живая физика».*

Описывается компьютерная лабораторная работа, выполняемая на базе MathCAD, «Живой физики» и Word, которая позволяет студентам специальности «Строительство» научиться производить расчеты кинематических величин, эффективно используя компьютер.

В курсе технической механики студенты должны научиться находить скорости и ускорения различных точек механизмов. Для успешного решения подобных задач недостаточно знаний основных положений теоретической механики – нужно овладеть методами преодоления возникающих при этом математических трудностей, в том числе и умело применять с этой целью компьютер.

Студентам предлагается компьютерная лабораторная работа «Кинематика шарнирного механизма». Решается следующая задача.

Задача. Определить скорость точек A, B, C, D и ускорение ползуна B стержневого механизма, изображенного на рисунке 1. Шарнир E неподвижен. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω . Длина кривошипа OA равна r , длина шатуна AB – L , длины стержней KC и CE равны l , $KB = L/3$, и $KD = L/3$. Положения шарнира E и направляющей ползуна B определяются параметрами S , H и d (в единицах системы СИ): $r = 1$, $L = 2.55$, $l = 1.55$, $d = 0.5$, $H = 1.5$, $S = 2.938$, $\omega = 1$.

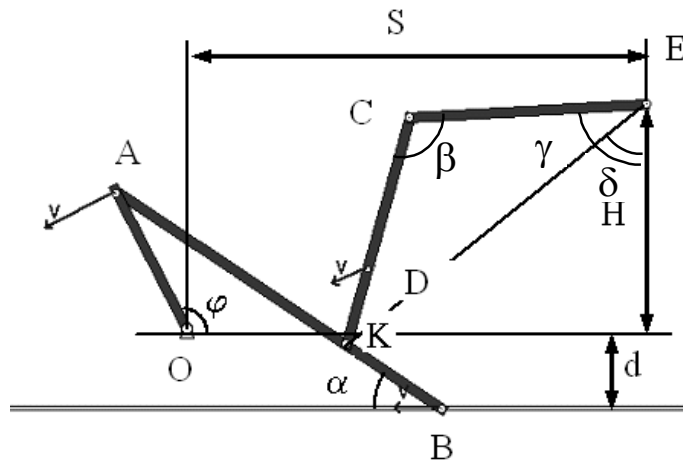
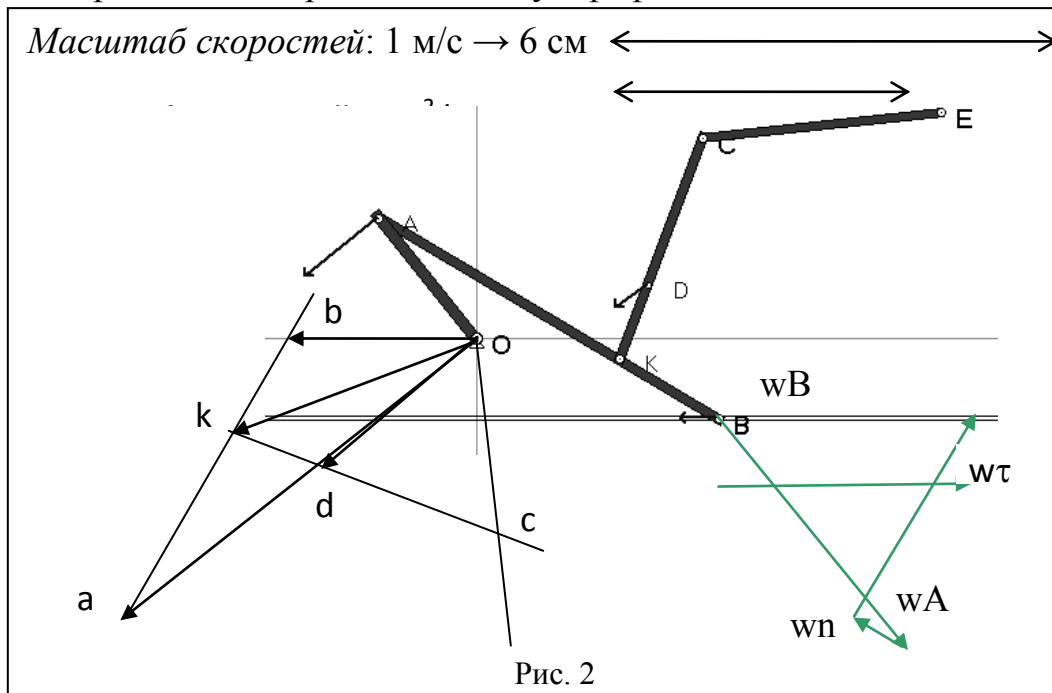


Рис. 1

Сначала решается задача для момента времени, когда угол $j = \pi/2$. Без математических сложностей в этом случае получается ответ в аналитическом виде:

$$v_A = v_B = v_K = \omega r, v_D = 2 \omega r / 3, w_B = \frac{\omega^2 r (r + d)}{\sqrt{L^2 - (r + d)^2}}.$$

Затем предлагается решить задачу графически для того положения



механизма, которое изображено на рисунке 1. Планы скоростей и ускорений строятся непосредственно в редакторе Word, естественно, с соблюдением масштабов (рис. 2).

Наконец, предлагается решить задачу для произвольного момента времени координатным способом. Задаются координаты указанных точек как функции зависящего от времени t угла $j = j(t)$, и дифференцированием в MathCAD находятся, а также представляются в виде графиков все величины.

Полученные разными способами результаты сравниваются с моделью, созданной в программе IP2000 (рис. 3). Небольшие расхождения обусловлены погрешностями длин стержней, допущенными при создании модели.

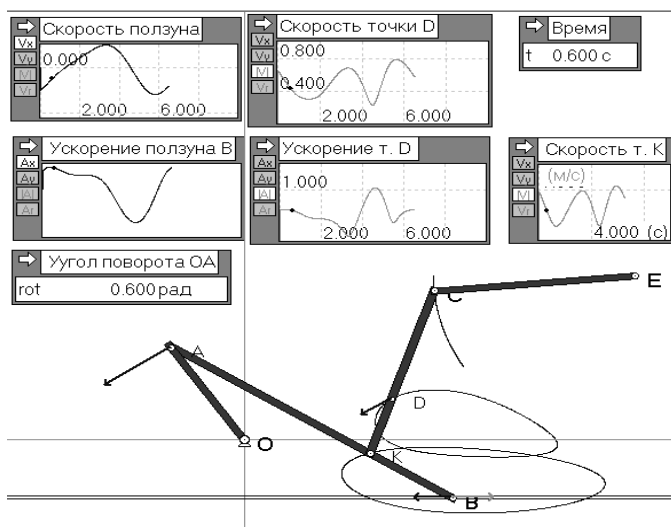


Рис. 3

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК ВАЖНЕЙШЕЕ СРЕДСТВО РОСТА ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ ВЫПУСКНИКОВ

В.И. САВЧЕНКОВ

Смоленский государственный университет,
e-mail: smolgreen@mail.ru

УДК 371.31

Ключевые слова: *профессиональная компетентность, оптимизация системы оценивания, информационные технологии, тестовые задания.*

В работе анализируются возможности оптимизации ряда направлений системы оценивания результатов работы вузовского преподавателя.

Ранее мы отмечали [1], что использование информационных технологий может резко повлиять на качество подготовки специалистов. Под качеством мы, в первую очередь, понимаем уровень профессиональной компетентности, т.е. умение прогнозировать результаты и возможные последствия разных вариантов решения, устанавливать причинно-следственные связи, находить, формулировать и решать проблемы и т.д. В последнее время важность компетентностного подхода многократно возрастает в связи с необходимостью импортозамещения в самых различных сферах.

Необходимо существенно оптимизировать ряд направлений системы оценивания результатов работы вузовского преподавателя.

С одной стороны, для школьников существует международная программа по оценке образовательных достижений учащихся PISA. Цель исследования, как отражено в документах проекта, оценить, обладают ли учащиеся, получившие общее обязательное образование, знаниями и умениями, необходимыми для полноценного функционирования в обществе. Даже на уровне области, участникам школьной олимпиады, например, по экологии, даются тестовые задания, выявляющие уровень компетентности. Например: на дне Балтийского моря покоятся суда с 300 000 тонн химических боеприпасов, залповый выброс которых может произойти в ближайшие пять лет. Российские ученые предлагают: а) поднять и перезахоронить суда в открытом океане; б) боеприпасы вывезти и уничтожить; в) накрыть суда саркофагами (как в Чернобыле); г) закачать в трюмы бетон. Немало учащихся приходило к правильному выводу, что три из предложенных способов связаны с неизбежным механическим воздействием на изъеденные ржавчиной корпуса боеприпасов, поэтому безопаснее накрыть суда саркофагами.

С другой стороны, тесты по техническим дисциплинам в сфере высшего образования, в том числе и в рамках ФЭПО (основном критерии результатов вузовской подготовки), переполнены вопросами «на запоминание». Например: систему В2 применяют в жилых домах: а) 9 и более этажей; б) более 5 этажей; в) 12 и более этажей и т.п. Слишком часты вопросы типа «как это называется». Мы провели ряд экспериментов в студенческих группах одинаковых специальностей вузов Смоленска, Иванова и Брянска. Различия были в том, что одни педагоги придерживались «классического стиля» преподавания; другие широко использовали информационные технологии в целях индивидуализации обучения, считали приоритетным проблемное обучение с использованием возможностей Интернета и т.д. Оказалось, что в рамках тестирования ФЭПО у приверженцев «классического стиля» преподавания результат в среднем в 1,4 раза выше, чем у «новаторов». Когда же перед студентами ставились творческие задания, результат был обратным. Например, студенты переносились на несколько веков назад («Мы из будущего») и должны были доходчиво, конкретно объяснить жителям погрязшего в грязи европейского городка, как и из чего сделать канализацию и водопровод (аналогичных заданий были десятки). В группах с «классическим стилем» преподавания доступную пониманию «инструкцию» дали не более двух-трех студентов; в то же время у «новаторов» около половины студентов смогли и объяснить, и ответить на каверзные вопросы. Вряд ли подобные эксперименты можно встроить в систему ФЭПО, но изменить

идеологию тестовых заданий необходимо. Небольшой коллектив креативных специалистов вполне в состоянии представить варианты ответов на тестовые задания в виде законченных и правдоподобных технических решений. Можно начать с наипростейшего: объяснить, почему квадратная крышка канализационного люка дешевле круглой. Безусловно, уровень компетентности зависит также от глубины и качества межпредметных связей, даже таких экзотических, как показано в [2].

Литература

1. Савченков В.И. Информационные технологии и качество подготовки специалистов. Практический аспект // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: СмолГУ, 2014. Вып. 15 - С.272–274.

2. Савченков В.И. Межпредметные связи с экологией как фактор роста естественнонаучной компетентности (на примере физики) // Образование и общество. 2011. -№ 5 (70). С. 41–44.

WEB-ПРОЕКТИРОВАНИЕ В РАМКАХ ЕЖЕГОДНОГО ОБЛАСТНОГО КОНКУРСА ПО WEB-ПРОЕКТАМ В СЕТИ ИНТЕРНЕТ

Т.И. ТИМОФЕЕВА, Н.М. ТИМОФЕЕВА

Смоленский государственный университет,
e-mail: nat.timopheeva@yandex.ru

УДК 37.02

Ключевые слова: *конкурсная деятельность, web-проектирование, ежегодный конкурс web-проектов в сети Интернет, конструктор сайтов Jimdo.*

В статье описывается опыт участия в Ежегодном областном конкурсе по web-проектам в сети Интернет, проводимом Администрацией Смоленской области, рассматриваются основные аспекты web-проектирования средствами конструктора сайтов Jimdo.

2014 год был юбилейным для основоположника российской научной фантастики Александра Романовича Беляева. Этому важному культурному событию был посвящен конкурсный проект «Творчество А.Р. Беляева» [1], представленный авторами на Ежегодном областном конкурсе по Web-проектам в сети Интернет.

Данный конкурс проводится Администрацией Смоленской области ежегодно с 1997 года. Его основными целями стали:

- содействие нравственному и патриотическому воспитанию молодежи;
- расширение информационного поля Смоленской области в сети Интернет;

- стимулирование внедрения информационных технологий в сфере образования и культуры и использование сети Интернет в указанной сфере;

- поддержка лучших молодежных проектов в области информационных технологий, творческого и интеллектуального потенциала молодежи;

- повышение интереса обучающихся общеобразовательных организаций, профессиональных образовательных организаций, образовательных организаций высшего образования, расположенных на территории Смоленской области, к углубленному изучению информатики, пропаганда компьютерной грамотности;

- развитие у обучающихся творческих способностей.

Основные критерии оценивания конкурсных проектов:

- соответствие конкурсного проекта теме и целям конкурса;

- информационное наполнение (содержание);

- интерактивность;

- эстетическое оформление и дизайн;

- применение современных технологий;

- оригинальность конкурсного проекта [2].

Тематика конкурсных работ утверждается и объявляется организаторами заранее (приблизительно за полгода). В 2014 году одним из тематических направлений стало направление «Смоленщина. Vivat, культура», в рамках которого был представлен авторский проект.

Web-проект «Творчество А.Р. Беляева» был реализован средствами конструктора сайтов Jimdo. Выбор ресурса был обусловлен следующими аспектами:

- простота и легкость в работе за счет широкой системы подсказок;

- для создания web-ресурса достаточно знаний языка HTML на начальном уровне;

- конструктор позволяет создавать индивидуальные и профессиональные проекты за счет большого количества настраиваемых шаблонов;

- разрабатываемый продукт сразу же размещается в Интернете;

- на Jimdo возможно бесплатное конструирование.

Для максимального удовлетворения критериям конкурса нами был проведен анализ произведений А.Р. Беляева, выявлены основные тематические направления в творчестве писателя, систематизированы его научно-фантастические произведения. На основе солидной базы источников были выделены и обозначены следующие научные проблемы, затрагиваемые в творчестве писателя:

- космическая тематика;

- медицинская проблематика;
- популяризация исторических и географических открытий;
- последствия научных открытий.

Авторами web-проекта подробно рассмотрены с точки зрения обозначенных тематических направлений следующие произведения А.Р. Беляева: «Звезда КЭЦ», «Голова профессора Доуэля», «Человек-амфибия», «Ариэль», «Человек, потерявший свое лицо», «Остров погибших кораблей», «Последний человек из Атлантиды», «Вечный хлеб», «Властелин мира».

Для повышения оригинальности конкурсного проекта все иллюстрации к рассматриваемым научно-фантастическим произведениям, представленные на сайте, сделаны автором web-проекта (Т.И. Тимофеевой).

По результатам конкурса за соответствие проекта теме и основным целям конкурса, дизайн, техническое исполнение, оригинальность способа подачи информации проект «Творчество А.Р. Беляева» награжден поощрительным призом Администрации Смоленской области.

Считаем, что конкурсы, подобные Ежегодному конкурсу по Web-проектам в сети Интернет популяризируют знания в области информатики, способствуют развитию интереса к научно-исследовательской деятельности, знакомят с профессиональным использованием информационных и коммуникационных технологий в различных областях.

Литература

1. <http://belyev.jimdo.com/> (дата обращения: 21.02.2015).
2. http://its.admin-smolensk.ru/meropriyatiya_i_konkursi/konkurs_po_web-proektam/ (дата обращения: 21.02.2015).

НАЧАЛО РАБОТЫ С ПАКЕТОМ RAPIDMINER¹

В.И. УСАЧЕВ

Смоленский государственный университет»,
e-mail: usa-vi@yandex.ru

УДК 004.422

Ключевые слова: *RapidMiner*, *бесплатная версия*, *RapidMiner Studio*, *начало работы с пакетом*, *уравнение множественной регрессии*, *корреляционная матрица*.

¹ Публикация подготовлена в рамках поддержанного РГНФ и Администрацией Смоленской области научного проекта №14-16-67009.

В статье показан один из вариантов начала работы с одним из ведущих (среди свободно распространяемых) пакетов статистической обработки данных RapidMiner.

Пакет предназначен для статистической обработки данных, при которой, в основном, представлены методы, относящиеся к так называемому интеллектуальному анализу данных – Data Mining, а также добавлена возможность статистического анализа текстов [2; 3]. RapidMiner принадлежит к линейке систем с открытым исходным кодом. По результатам различных опросов он делит первое место среди конкурентов коммерческим программам аналогичного типа (Statistica, SPSS, SAS и др.) с языком R. Бесплатной является версия Community Edition (Enterprise Edition – это платная (!) версия, имеющая, в свою очередь, три градации: Small, Standard и Developer). Эта бесплатная версия существенно урезана по набору операторов и даже в способах введения данных для обработки.

Пакет имеет весьма своеобразный интерфейс, отличный от привычных последовательностей «меню – подменю – подподменю – ...», где на каждом шаге необходимо ответить на уточнение вопроса: «а что ты хочешь?». Процесс обработки предложенной информации представляется в виде набора блоков (операторов) обработки, соединяющихся между собой в нужной последовательности. Такое очень наглядное представление вычислений чем-то роднит RapidMiner с MathCad и особенно привлекательно для пользователей.

У RapidMiner есть еще одна особенность – слабая информационная обеспеченность. Поэтому в данной статье ставится задача описать несколько простейших начальных шагов в RapidMiner [4].

Работать с пакетом удобнее всего посредством оболочки RapidMiner Studio. Для ее установки перейдем на официальный сайт разработчиков <https://rapidminer.com/>. Зайдем в пункт меню PRODUCTS. Из списка предлагаемых для скачивания продуктов выбираем RapidMiner Studio. После перехода нажимаем на Download Now.

После чего откроется страница регистрации нового пользователя. Все поля этой страницы должны быть заполнены. После заполнения нужно нажать кнопку SingUp. Если данные были введены корректно, то система выведет сообщение о необходимости подтверждения регистрации через электронный почтовый ящик, указанный в анкете на предыдущем шаге.

Для подтверждения регистрации надо зайти в свой почтовый ящик и нажать на активную ссылку в тексте полученного письма. После нажатия на ссылку «подтверждение регистрации» откроется веб-страница, где вам предложат перейти в свой личный кабинет. На открывшейся странице личного кабинета выбираем установочный файл,

соответствующий имеющейся на персональном компьютере операционной системе, и получаем инсталлятор.

После окончания установки запускаем программу, соглашаемся (I Accept) с условиями использования и, если все пока идет хорошо, видим окно приветствия (Thank you for installin RapidMiner Studio). Для дальнейшего пользования программой необходимо получить лицензию. Для этого нажимаем «Get Free License» и откроется веб-страница вашего личного кабинета, где необходимо перейти на страницу получения лицензии и скопировать лицензионный ключ. Далее полученный ключ вставляем в программу, нажимаем Install license, и, если активация лицензии прошла успешно, программа сообщит о том, что ключ лицензии активен, и пожелает вам приятной работы. Не прячьте далеко копию лицензионного ключа! Его придется вводить при каждом запуске программы. Да, все мои попытки (на различных машинах) воспользоваться электронным учебником (Tutorials) закончились неудачей. Воспроизводятся 15% первого урока, и наступает «зависание», устраняемое только перезагрузкой. Подозреваю, что это особенность бесплатной версии.

Итак, программа запускается. Покажем, как в ней можно получить уравнение множественной регрессии и корреляционную матрицу для переменных, участвующих в образовании этого уравнения [2].

Нажав на New Process, мы попадаем в основное окно (Design), где, собственно говоря, и будет конструироваться вычислительный процесс. Самым первым шагом является создание нового хранилища данных (Repositories). Соответствующий ярлык для этого действия можно найти в левой части интерфейсного окна. Вам будет предложено выбрать место расположения – на сервере или на персональном компьютере. После того, как хранилище создано, приступим к заполнению его необходимыми для обработки данными.

Один из наиболее практичных способов сделать это – воспользоваться Excel. Нелишне напомнить, что в Excel без проблем импортируются данные из таких пакетов, как Statistica, SPSS, SAS и большинство других пакетов для статистической обработки. И еще одно: в RapidMiner десятичная часть числа отделяется точкой, но не стоит беспокоиться, если у вас использовалась для этого запятая, при переносе данных программа автоматически определит эту часть и сама проставит точки в нужных местах [1].

Демонстрационный файл был создан в Statistica 8, и там же, для сравнения, были получены ответы на поставленные вопросы. Этот файл представляет выборку из 50 объектов, на каждом из которых измерялись в метрической шкале три признака V1, V2 и V3. При этом признак V1 будет считаться зависимым от признаков V2 и V3.

Копируем (вместе с заголовками) данные в буфер обмена и вставляем копию в Excel (Excel 7). Сохраняем полученный файл. Дальше можно поступить так: в RapidMiner заходим в пункт меню File и выбираем Import Data. В появившемся подменю выбираем Import Excel Sheet... После этого вы увидите окно «Мастера импорта данных» (Data import wizard). Этот мастер за 5 шагов создаст файл данных RapidMiner и поместит его в созданное хранилище. Так как мы будем отвечать на два вопроса, нам потребуются два файла!

Создавая первый файл (prim1), на 4 шаге значение attribute у V1 надо поставить label (так отмечается выделение какой-либо переменной из остальных).

При создании второго файла (prim2, по нему найдем корреляционную матрицу) используем те же данные, только на 4 шаге заменим у всех переменных тип данных real на numeric.

Перетаскиваем файлы prim1 и prim2 из окна Repositories View на область окна Process View. Там они превращаются в «узлы» (Retrieve prim 1 и Retrieve prim 2), имеющие справа выходные порты. Добавляем, также перетаскиванием, из окна Operators View (содержит список операторов исполняемых процедур) операторы Linear Regression и Correlation Matrix. Кстати, если использовать оператор Vector Linear Regression, получим то же самое уравнение множественной линейной регрессии, но без вычисления таких характеристик, как p-Value, t-Stat, Tolerance и др., для коэффициентов уравнения регрессии. Остается соединить узлы вычислительного потока по представленной выше схеме. Затем нажимаем кнопку (треугольная) запуска процесса вычислений и автоматически оказываемся на вкладке (Perspective) просмотра результатов (Results).

Получаем окончательно уравнение регрессии

$$V1=1,006*V2 - 2,010*V3 + 20,725.$$

Корреляционная матрица имеет вид:



Attributes	Var1	Var2	Var3
Var1	1	0.351	-0.150
Var2	0.351	1	0.868
Var3	-0.150	0.868	1

Как очень большой минус надо отметить отсутствие значения уровней значимости для полученных коэффициентов корреляции.

При желании можно в полученных результатах посмотреть краткий список свойств данных (например: максимум, минимум, среднее арифметическое, исправленная выборочная дисперсия). Можно также

посмотреть графики рассеивания (Scatterplot) для пар V1 и V2, V1 и V3, V2 и V3 и получить некоторые другие добавочные сведения.

Литература

1. RapidMiner Studio Manual © 2014 by RapidMiner. All rights reserved. 110 с.
2. RapidMiner Data Mining Use Cases and Business Analytics Applications. Edited by Markus Hofmann & Ralf Klinkenberg, © 2014 by Taylor&Francis Group, LLC. 454 с.
3. Andrew Chisholm. Exploring Data with RapidMiner. Copyright © 2013 Packt Publishing. 148 с.
4. Дьяконов А.Г. Анализ данных, обучение по прецедентам, логические игры, системы WEKA, RapidMiner и MatLab (Практикум на ЭВМ кафедры математических методов прогнозирования): учебн. пособие. М.: Изд. отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010. 278 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА GRETL ПРИ АНАЛИЗЕ НЕОБХОДИМОГО КОЛИЧЕСТВА МЕСТ В ОБЩЕЖИТИИ ДЛЯ ПЕРВОКУРСНИКОВ СМОЛГУ

В.И. УСАЧЕВ¹, М.Г. ЧУЛАКОВА²

Смоленский государственный университет,
e-mail: ¹usa-vi@yandex.ru, ²nezna0049@inbox.ru

УДК 519.25

Ключевые слова: *пакет Gretl, тренд временного ряда, множественная регрессия, гетероскедастичность, места в общежитии, прогноз.*

В статье представлены две прогностические модели для определения необходимого количества мест в общежитии, построенные на основе анализа некоторого набора данных за 2003–2013 годы.

Каждый вуз, в котором учатся иногородние студенты, сталкивается с проблемой наличия достаточного количества мест для их проживания в общежитии. Обеспеченность такими местами в 2009 году удовлетворялась в различных регионах России в пределах от 60 до 85 процентов. На ее величину влияет не только число приезжающих на обучение, но и ряд других факторов: демографическая ситуация, возможность арендовать квартиру, объем строительства в городе и др.

В работе представлены результаты построения прогностической модели количества необходимых мест в общежитии для студентов первокурсников физико-математического факультета СмолГУ. При этом анализировались следующие данные за 2003–2013 годы: процент нуждающихся в общежитии (V1), стоимость доллара в рублях (V2), инфляция в процентах (V3), численность принятых в вузы на очное

отделение (V4), средняя стоимость 1 кв.м. общей площади (V5), баллы по математике (V6), математический прирост в процентах (V7), баллы по русскому языку (V8). Уровень значимости полученных результатов равен 0,05.

Необходимые расчеты выполнены в Excel и в пакете Gretl. Пакет Gretl (gretl.sourceforge.net) – это статистический пакет, относящийся к свободно распространяемым, предназначенный для эконометрического моделирования (регрессионный анализ, временные ряды). Он позволяет получать большинство описательных статистик, строить графики, создавать скрипты. Данные для обработки можно создавать как в самом пакете, так и импортировать, например, из SPSS или Excel. Имеет русскую локализацию (т.е. русифицирован).

Из представленных данных построены две модели: одна на основе выделения тренда временного ряда V1, вторая – как линейная модель регрессии с поправкой на гетероскедастичность.

В первой модели для выделения вида тренда в ряде V1 можно произвести сглаживание при помощи простого скользящего среднего либо использовать для этой цели экспоненциальное скользящее среднее. Оба варианта приводят к линейному тренду, уравнение которого получено с использованием традиционной техники метода наименьших квадратов и представлено ниже:

$$V1 = -1,17082 \cdot x + 53,11673,$$

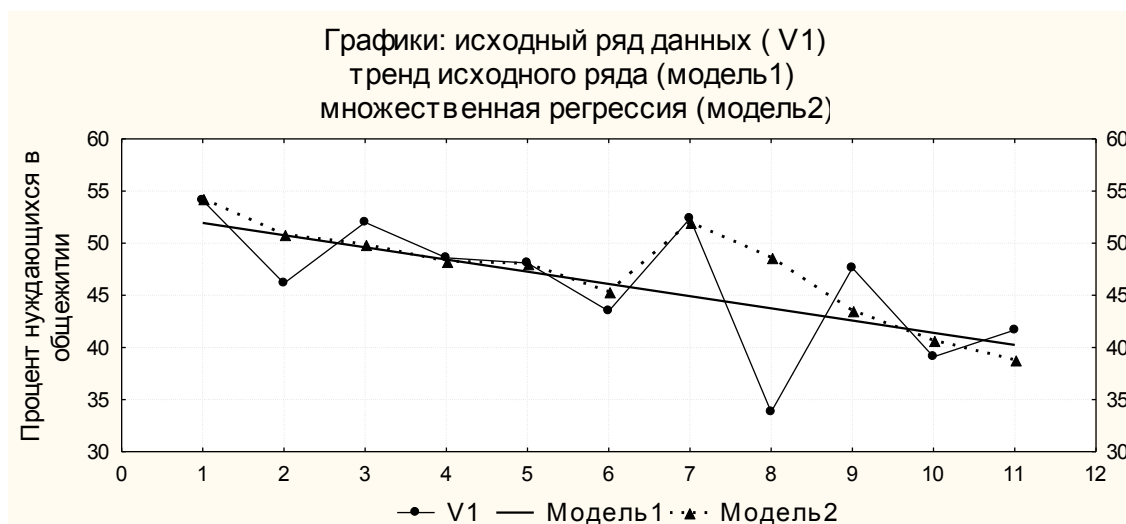
где в качестве переменной x взят уровень ряда, коэффициент при x имеет уровень значимости 0,037 и уровень значимости свободного члена равен 0,000.

Теперь рассмотрим построение модели множественной линейной регрессии, в которой зависимая переменная V1 и регрессоры V2–V8. Слишком большое число регрессоров для сравнительно небольшого числа наблюдений и наличие гетероскедастичности приводит к тому, что ее коэффициенты на выбранном уровне значимости нужно считать равными 0. Наличие гетероскедастичности можно увидеть даже на графике ряда V1, где периоды 2003–2008 и 2009–2013 различаются дисперсией возмущений.

Выбор модели (на основе рассмотрения различных комбинаций V2 – V8 и процедуры последовательного исключения переменных с использованием двухстороннего значения уровня значимости) с регрессорами V4–V6 и применение поправок на гетероскедастичность дают уравнение

$$V1 = 65,7 + 0,00557 \cdot V4 - 0,000450 \cdot V5 - 0,395 \cdot V6.$$

В этом уравнении уровень значимости свободного члена и коэффициентов при V4, V5 и V6 равны соответственно 0,0050; 0,0371; 0,0165 и 0,0807.



Сумма квадратов остатков в первой и во второй моделях соответственно равны 226,554 и 277,7446, т.е. первая модель является более адекватной по отношению к исходному ряду V1.

Не лишним будет отметить, что получение прогнозов на основании построенных моделей имеет практическую значимость только на год или два вперед и только при условии отсутствия значительных скачков в значениях переменных V4–V6.

Литература

1. Gretl User's Guide. Gnu Regression, Econometrics and Time-series Library. March 2015. URL: <http://ricardo.ecn.wfu.edu/pub/gretl/manual/en/gretl-guide.pdf> (дата обращения: 12.03.2015).
2. Туктамышева Л.М., Седова Е.Н. Проверка гипотезы о характере тренда: тестирование на TS/DS ряды. Оренбург: ОГУ, 2014. 56 с.
3. Верещагина Э.И. Основная проблематика и тенденции формирования студенческих общежитий. URL: <http://www.marhi.ru/AMIT/2012/2kvart12/index.php> (дата обращения: 12.03.2015).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММЫ MICROSOFT EXCEL ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ФИЗИКЕ

Е.А. ЦАРЕВА

Смоленский государственный университет,
 e-mail: elean@inbox.ru

УДК 681.3.06, 53.088

Ключевые слова: *Excel, статистические и математические расчеты, лабораторные работы по физике.*

В работе изучен вопрос использования Excel для обработки результатов измерений и расчетов погрешностей лабораторных работ по физике.

Одним из основных видов учебной деятельности по физике является выполнение лабораторного практикума. Наибольшие затруднения при выполнении эксперимента вызывает обработка результатов измерений и вычисление погрешностей полученного результата. В первую очередь это связано с необходимостью использования статистических расчетов. Редактор таблиц MS Excel, входящий в стандартный комплект поставки пакета программ MS Office, содержит в себе целый спектр возможностей, которые способны существенно облегчить обработку результатов физического эксперимента.

Рассмотрим некоторые наиболее простые функции программы, которые студенты-первокурсники легко освоят самостоятельно или под руководством преподавателя физики.

Редактор таблиц MS Excel позволяет проводить множество стандартных операций с числами, помещенными в ячейки столбцов на листе, и строить графики зависимостей величины, представленной в одном столбце, от величин, помещенных в другой столбец, подбирать аналитическое выражение, наилучшим образом описывающее полученную графическую зависимость. Рассмотрим некоторые из этих возможностей.

После того как экспериментальные данные загружены на стандартный лист MS Excel в виде таблицы, можно приступить к их обработке.

Статистическая функция **СЧЕТ** используется для определения числа значений. Диапазон ячеек указывается адресами первой и последней ячейки данных, записанными через двоеточие. Функция **СРЗНАЧ** рассчитывает среднее значение выборки.

Дисперсия – это средний квадрат отклонений, мера, характеризующая разброс данных вокруг среднего значения. Математическая формула дисперсии по генеральной совокупности имеет вид:

$$D = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n},$$

где D – дисперсия, x – анализируемые экспериментальные данные, \bar{x} – среднее значение, n – количество значений в анализируемой совокупности данных.

Excel также предлагает готовую функцию для расчета генеральной дисперсии **ДИСП.Г**.

При анализе выборочных данных нужно использовать выборочную дисперсию, так как генеральная оказывается смещенной в сторону занижения.

Математическая формула выборочной дисперсии имеет вид:

$$D_B = \frac{n}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1},$$

в Excel выборочная дисперсия рассчитывается через функцию **ДИСП.В**.

Выборочное среднееквадратическое отклонение – это корень из выборочной дисперсии.

Для расчета можно извлечь корень из формул дисперсии, указанных чуть выше, но в Excel есть и готовые функции:

- среднееквадратическое отклонение по генеральной совокупности

СТАНДОТКЛОН.Г

- среднееквадратическое отклонение по выборке

СТАНДОТКЛОН.В.

Именно среднееквадратичное отклонение по выборке и используется для оценки случайной погрешности нескольких измерений.

Для получения относительной меры разброса данных используют **коэффициент вариации**, который рассчитывается путем деления *среднееквадратического отклонения* на *среднее арифметическое значение экспериментальных данных*. Математическая формула такова:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

В Excel нет готовой функции для расчета коэффициента вариации, но это не проблема. Расчет можно произвести простым делением стандартного отклонения на среднее значение. Для этого в строке формул пишем:

=СТАНДОТКЛОН.В(диапазон)/СРЗНАЧ(диапазон).

В скобках должен быть указан диапазон данных. Коэффициент вариации обычно выражается в процентах, поэтому ячейку с формулой можно обрмить процентным форматом.

МУЛЬТИМЕДИА ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

А.М. ШИЛЯГИНА

Смоленский государственный университет,

e-mail: ypy1101@gmail.com

УДК 37.02

Ключевые слова: *средства обучения, средства коммуникации, средства мультимедиа, мультимедиа технологии, виртуальная среда, интерактивная образовательная среда, каналы восприятия информации.*

В статье рассматривается применение средств мультимедиа и мультимедиа технологий в учебном процессе, также уточняется сущность понятий «средства мультимедиа», «мультимедиа технологии», «виртуальная среда».

В конце XX – начале XXI века человек открыл микропроцессорные, коммуникационные, облачные и другие когнитивные технологии, что дало возможность создать новые средства коммуникации (сеть Internet и Intranet, образовательные сайты, САПР учителя и т.д.), а также новые, современные средства обучения (интерактивная доска, проектор, планшет, электронная книга, учебный тренажер и т.д.).

Использование при обучении новых средств позволило полностью изменить формы, методы, подходы и содержание образования. По мере того, как сложные средства обучения вытесняли простые, неинтерактивные средства обучения постепенно трансформировались в интерактивные. Универсальность персонального компьютера сделала нецелесообразным дальнейшее использование в учебном процессе многих традиционных средств обучения. Постепенно компьютер вытеснил из учебного процесса аудиовизуальные средства обучения, т.к. они потеряли свою актуальность.

Для удобства восприятия представим взаимосвязь, существующую между открытиями и изобретениями, средствами коммуникации и средствами обучения, в виде таблицы (табл. 1).

В настоящее время микропроцессорные, коммуникационные, мультимедиа и другие технологии широко используются в разных сферах человеческой деятельности, на них основана работа современных средств коммуникации (компьютерных сетей, интерактивных сред, учебных сайтов и т.д.). В результате открытия новых технологий образование получило новые средства обучения (интерактивные доски, планшеты, электронные книги, учебные тренажеры, образовательные роботы и т.д.).

В рамках нашего исследования считаем целесообразным рассмотреть возможности, которые дает использование в учебном процессе мультимедиа технологий. Мультимедиа технология – это еще одна технология, которая произвела революцию во многих сферах человеческой деятельности. Одной из самых широких областей ее применения стала область образования.

В переводе с английского «multimedia» – это многокомпонентная среда, которая позволяет использовать текст, графику, видео и мультипликацию в режиме диалога и тем самым расширяет области применения компьютера при обучении [1].

В начале XXI века мультимедиа технология стала одной из основных образовательных технологий. Важным качеством мультимедиа технологий является интерактивность, то есть зритель и слушатель мультимедиапродуктов не остается пассивным. Применение средств мультимедиа позволяет значительно повысить эффективность обучения, так как их использование способствует заинтересованности учащихся в предмете, повышению мотивации к анализу, синтезу, сравнению, моделированию, установлению причинно-следственных связей, использованию разных видов информации.

Таблица 1

Взаимосвязь изобретений, открытий, средств коммуникации и средств обучения



Для того, чтобы говорить об эффективности использования мультимедиа технологий в образовании, нам необходимо ответить на вопрос: какие каналы восприятия информации задействуются при использовании мультимедиа средств обучения?

Ранее мы рассмотрели, какие каналы восприятия информации задействованы при использовании аудиовизуальных средств обучения [2, с. 303–312]. Проанализировав это, мы пришли к выводу, что использование в учебном процессе аудиовизуальных средств обучения позволяло задействовать преимущественно комбинированный зрительно-слуховой канал восприятия, т.е. в основном были задействованы зрение и слух учащегося.

Наиболее современными средствами мультимедиа, которые сейчас широко используются в сфере образования, являются различные средства моделирования. Это средства, основанные на технологиях, получивших название «виртуальная реальность». Применение этих технологий дает возможность создавать эффект «вхождения» и «присутствия» в объемном виртуальном пространстве, перемещения в нем относительно объектов этого пространства в режиме реального времени.

В начале XXI века появилась возможность при помощи средств мультимедиа создавать виртуальную обучающую среду. Система «виртуальной реальности» способна обеспечить «непосредственный контакт» человека со средой. Наиболее совершенные из этих систем позволяют «дотронуться» рукой до объекта, существующего лишь в памяти компьютера, надев специальную перчатку. Можно «перевернуть» предмет, изображенный на экране, чтобы рассмотреть его со всех сторон. При помощи системы можно «шагнуть» в виртуальное пространство, используя для этого «информационный костюм», «информационный шлем», «информационные очки» или «информационную перчатку».

Вполне вероятно, что в ближайшем будущем появятся устройства для цифровой обработки запахов. Такие устройства тоже будут относиться к семейству мультимедиа средств [3, с. 325–335]. Все это дает основания говорить о том, что использование при обучении мультимедиа средств позволяет задействовать максимальное количество каналов восприятия: зрительный, слуховой и все сенсорные (тактильные) каналы. Достигается это благодаря мультимедиа технологиям, использование которых дает возможность формировать целостное представление об изучаемом объекте, явлении или процессе.

Итак, активное внедрение компьютера и мультимедиа технологий в образовательный процесс значительно увеличивает дидактические возможности интерактивных средств обучения, обеспечивая наглядность, видеоподдержку и контроль, что в целом способствует повышению качества образовательного процесса. Педагог, применяющий информационно-коммуникационные технологии на своих уроках и обладающий достаточным уровнем информационной культуры, всегда сможет заинтересовать учеников своим предметом.

Использование в обучении средств мультимедиа и мультимедиа технологий позволяет задействовать наибольшее количество каналов восприятия: зрительный, слуховой, все сенсорные (тактильные) каналы, что позволяет формировать виртуальную обучающую среду. Это должно усилить интерес учащихся к изучаемой дисциплине и, как следствие, повысить качество знаний.

Литература

1. Захарова И.Г. Информационные технологии в образовании: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. М.: Издательский центр «Академия», 2003. 192 с.
2. Шилягина А.М. Этапы развития технических средств обучения: от обеспечения моновосприятия до комбинированного восприятия информации в обучении // Известия СмолГУ. 2014. №3 (27). С. 303-312.
3. Кузнецова А.С., Корякина С.В. Мультимедийные средства обучения в школьном курсе биологии // Профессиональный дебют – 2012: сб. науч. ст. и практ. ориентир. материалов / ред. О.И. Чикунова. Шадринск: ШГПИ, 2012. С. 325–335.

РОЛЬ ИНТЕРАКТИВНЫХ СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ В ФОРМИРОВАНИИ ИНТЕРАКТИВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

А.М. ШИЛЯГИНА

Смоленский государственный университет,
e-mail: ypy1101@gmail.com

УДК 37.02

Ключевые слова: *информация, коммуникация, средства коммуникации, средства обучения, интерактивность, интерактивные средства обучения, информационно-образовательная среда, интерактивная образовательная среда.*

Рассматривается роль интерактивных средств обучения в формировании интерактивной образовательной среды. Уточнена сущность понятий «информация», «коммуникация», «средства коммуникации», «интерактивность», «интерактивные средства обучения», «интерактивная образовательная среда».

Средства обучения прошли долгий путь развития. На разных этапах эволюции общества и техники появлялись новые средства обучения. Хотя изобретения и открытия делаются не для сферы образования, исторический опыт показывает, что многие важные открытия и изобретения человечества находят свое применение в этой области.

По мнению В.М. Гордиевских и Д.В. Петухова, «история становления и развития средств обучения неразрывно связана с развитием системы средств массовой информации и коммуникации, а они, в свою очередь, связаны с открытиями в естествознании и изобретениями в технике» [1, с. 3].

Открытие в конце XX – начале XXI века микропроцессорных, коммуникационных, облачных и нанотехнологий привело к появлению совершенно новых средств коммуникации и средств обучения.

В XX веке широко использовалось понятие «информационно-образовательная среда». В начале XXI века в сфере образования вместо него чаще стало применяться понятие «интерактивная образовательная среда».

Формирование интерактивной образовательной среды произошло благодаря внедрению в учебный процесс интерактивных средств обучения. Создание такой среды позволило обеспечить взаимодействие всех участников образовательного процесса (учеников, учителей и т.д.). Важно отметить, что интерактивная образовательная среда предоставляет возможность обучаться в диалоговом режиме, при котором обеспечивается обратная связь (рис. 1).

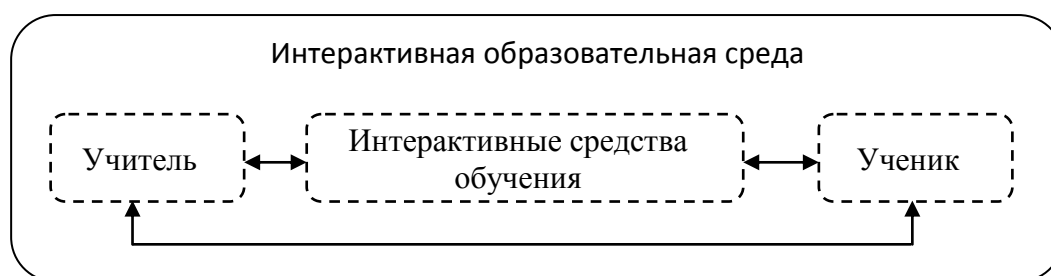


Рис. 1. Формирование интерактивной образовательной среды

Наряду с понятием «интерактивность» сейчас широко употребляются понятия «интерактивное обучение», «интерактивная среда», «интерактивное общение» и т.д. Один из исследователей интерактивных технологий обучения В.С. Дьяченко считает, что интерактивное обучение – это «способ познания, основанный на диалоге между всеми участниками образовательного процесса». В.С. Дьяченко рассматривает интерактивное обучение как занятие, при котором «все погружены в процесс общения, при этом все обучают каждого и каждый обучает всех» [2, с. 187].

Г.М. Коджаспирова полагает, что «интерактивная среда – это среда, в которой происходит интерактивное общение, а интерактивное общение – это выработка тактики и стратегии взаимодействия, т.е. организация совместной деятельности людей» [3, с. 105]. В качестве основных видов интерактивного общения Г.М. Коджаспирова рассматривает кооперацию и конкуренцию.

Для того чтобы понять, какая связь существует между средствами коммуникации и средствами обучения, обратимся к сущности понятий «коммуникация», «средства коммуникации», «средства обучения».

Слово «коммуникация» (от лат. «communicatio») первоначально означало «связываюсь», «общаюсь». В Большой советской

энциклопедии (1969–1978) понятие «коммуникация» рассматривается как «общение, передача *информации* от человека к человеку, специфическая форма взаимодействия людей в процессах их познавательно-трудовой деятельности, осуществляющаяся при помощи языка или других знаковых систем» [4].

В Педагогическом энциклопедическом словаре понятие «средства обучения» трактуется как «различные материальные объекты, созданные специально для учебных целей и вовлекаемые в воспитательно-образовательный процесс в качестве носителей учебной *информации* и инструмента деятельности педагога и учащихся» [5, с. 278–279].

Ключевым в этих определениях является слово «информация». Термин «информация» восходит корнями к латинскому слову «*informatio*». В переводе с латинского «*informatio*» означает «разъяснение, изложение». Изначально слово «информация» означало «сведения, передаваемые одними людьми другим людям, устным, письменным или другим способом, а также сам процесс передачи или получения этих сведений» [4].

Исходя из изложенного, сформулируем определение «средств коммуникации». Под средствами коммуникации будем понимать объекты, созданные человеком для передачи информации.

Проанализировав определения «коммуникация», «средства коммуникации», «средства обучения», мы приходим к выводу, что понятие «информация» связывает все эти определения между собой не только практически, но и теоретически.

Далее нам предстоит ответить на вопрос: какими средствами обучения обеспечивается интерактивность учебного процесса?

Трансформация информационно-образовательной среды в интерактивную среду стала возможна при активном внедрении в образовательный процесс компьютерных, информационных, коммуникационных и других видов технологий. Компьютер явился выдающимся изобретением XX века. Использование компьютера привело к коренному изменению образования. В начале XXI века компьютер стал важным средством обучения. Персональный компьютер предоставляет неограниченный потенциал для саморазвития. Интернет, связывающий компьютеры в единую глобальную сеть, формируя интерактивную среду, создает огромные возможности для образовательной деятельности.

Основываясь на этом, можно заключить, что еще одной важной особенностью информационного этапа является расширение образовательного пространства. Это, в свою очередь, приводит к расширению возможностей субъектов образования (учителей, учащихся, в том числе с особыми образовательными потребностями, а также тех, кто получает дополнительное образование, и т.д.). Интерактивные

средства обучения сделали образовательное пространство единым, образование при этом стало открытым и доступным.

В последние годы персональный компьютер вытеснил многие, ранее использовавшиеся технические средства обучения, так как в состоянии сам выполнять все функции, которые раньше обеспечивались при помощи нескольких аудиовизуальных средств обучения.

В конце XX – начале XXI века были разработаны нанотехнологии, микропроцессорные, коммуникационные, облачные и другие когнитивные технологии. В настоящее время эти технологии широко используются в разных сферах человеческой деятельности, на них основана работа современных средств коммуникации (сети Internet, интерактивных сред, учебных сайтов) и т.д. В результате открытия новых технологий образование получило новые средства обучения (интерактивная доска, планшет, электронная книга, учебный тренажер, образовательный робот и т.д.).

Таким образом, отвечая на поставленный ранее вопрос, можно сказать, что интерактивность учебного процесса обеспечивается за счет использования компьютера, информационных и коммуникационных технологий, которые с ним связаны.

В заключение отметим, что разработанные в конце XX – начале XXI века новые информационные технологии привели к появлению новых средств коммуникации. Новые средства коммуникации проникли в сферу образования, и, как результат, школа получила современные средства обучения, применение которых значительно повышает качество обучения.

Использование в образовательном процессе интерактивных средств обучения позволило информационно-образовательной среде трансформироваться в интерактивную образовательную среду. Результатом такой трансформации явилось расширение образовательного пространства, что в свою очередь, привело к увеличению возможностей субъектов образования (учителей, учащихся и т.д.). Образовательное пространство стало единым, а самообразование – открытым и доступным.

Литература

1. Гордиевских В.М., Петухов Д.В. Технические средства обучения: учеб. пособие. Шадринск: ШГПИ, 2006. 152 с.
2. Дьяченко В.К. Сотрудничество в обучении: О коллективном способе учебной работы: книга для учителя. М.: Просвещение, 1991. 192 с.
3. Коджаспирова Г.М. Словарь по педагогике М.: ИКЦ «МарТ», 2005. 448 с.
4. Большая Советская Энциклопедия: в 30 т. / гл. ред. А.М. Прохоров. 3-е изд. М.: Советская энциклопедия, 1969–1978.
5. Педагогический энциклопедический словарь / гл. ред. Б.М. Бим-Бад. М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. 528 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАПРОСОВ В SQL С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИКЛАДНОЙ БАЗЫ ДАННЫХ

О.А. ШИРОКОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
e-mail: oshirokova@mail.ru

УДК 378.147 + 519.682

Ключевые слова: *реляционные базы данных, язык программирования SQL, создание запросов, выборка и обработка данных.*

В работе рассматривается база данных из предметной области «Геобаза», которая используется в учебном процессе. Для применения SQL на практике предлагается ограничиться созданием запросов в СУБД MS Access.

SQL является инструментом, предназначенным для выборки и обработки информации, содержащейся в компьютерной базе данных. Как следует из названия, SQL является языком программирования, который применяется для организации взаимодействия пользователя с реляционными базами данных [1]. SQL представляет собой нечто большее, чем просто инструмент создания запросов. Сейчас этот язык используется для реализации всех функциональных возможностей, которые СУБД предоставляет пользователю. К ним относятся: организация, выборка и обработка данных; управление доступом; совместное использование данных; целостность данных. SQL позволяет наглядно продемонстрировать суть изучаемых понятий, при этом он позволяет продемонстрировать работу с СУБД «в чистом виде», не отягощенную множеством несущественных деталей.

На изучение SQL в курсе «Информационные системы» выделяется ограниченное количество времени. Студенты должны понять сам принцип создания запросов, а также приобрести навыки, необходимые для извлечения из БД нужной информации, например, в базе данных «Геобаза» – отдельно об эксплуатационных и нагнетательных скважинах. Применение SQL содействует интеграции знаний, развитию и профессионализации навыков работы с компьютером.

В данной работе рассматривается база данных из предметной области «Геобаза», которая используется в учебном процессе. Для применения SQL на практике предлагается ограничиться созданием запросов в СУБД MS Access. При выполнении заданий предполагается, что студент выполняет запрос в двух вариантах: с применением SQL и с использованием инструментов Access. Это позволяет проверить правильность построения каждого запроса.

Геологическая база данных формируется из двух таблиц (рис. 1): *Скважины* (КодСкважины, X, Y, ТипПороды, Н, m, К, Мв, Мн), *Дебиты* (ДатаЗамера, КодСкважины, ВидСкважины, Qнв, Qв, Стоимость).

Для связи таблиц Скважины и Дебиты - используется ключевое поле КодСкважины.

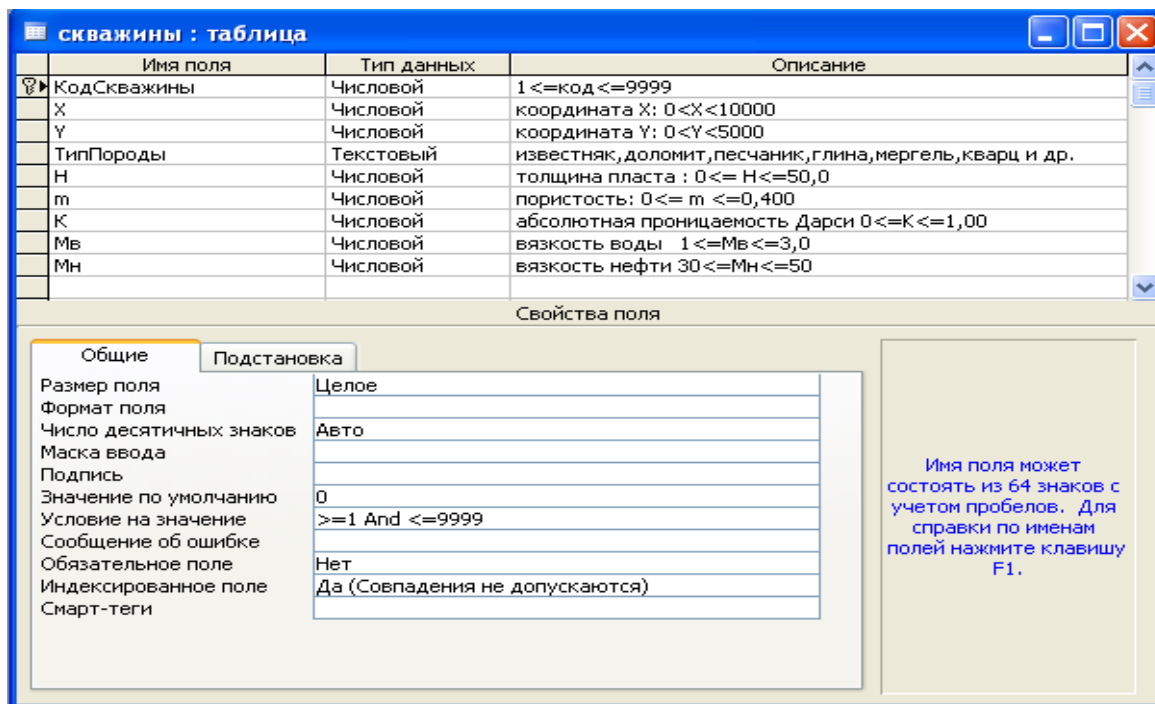


Рис.1 Таблица Скважины

Далее выполняются запросы сначала по нагнетательным скважинам, потом – по эксплуатационным. Приведем пример.

Нахождение общего количества отобранной нефти:

```
SELECT Sum(дебиты.Qнв) AS [Sum-Qнв], Sum(дебиты.Qв) AS [Sum-Qв], Sum(дебиты.Qнв)-Sum(дебиты.Qв) AS [Sum - Qн] FROM дебиты.
```

Таким образом, при работе с СУБД учащиеся закрепляют и используют знания, полученные при изучении базовых дисциплин. Применение SQL при взаимодействии с СУБД способствует преодолению предметной разобщенности и интеграции знаний учащихся.

Литература

1. MySQL. Справочник по языку / под редакцией Ю.Н. Артеменко: пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 432 с.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Расулов К.М.</i> Ученый и педагог: к 75-летию профессора Дьяконова Владимира Павловича	3
СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики	6
<i>Дедюхин А.А., Котельник О.В., Мендеров А.А.</i> Практическое приложение измерительных и аналитических возможностей современных цифровых осциллографов	6
<i>Дьяконов В.П.</i> Тенденции развития компьютерной математики	8
<i>Дьяконов В.П.</i> Научные микрокалькуляторы с сенсорным цветным графическим дисплеем	13
<i>Дьяконов В.П.</i> Интеграция СКМ MATLAB с измерительными приборами	19
<i>Зайцева Н.В., Ульянова Е.С.</i> Решение краевой задачи для гиперболического уравнения с оператором Бесселя в программе Maple	22
<i>Каспаров А.А., Конобеевский Е.С., Зувев С.В.</i> Математические методы разделения импульсов, вызванных нейтронами и гамма-квантами	24
<i>Кислякова Е.В.</i> Моделирование коронных разрядов в газовых средах средствами MathCad	26
<i>Кристалинский В.Р., Аникина Е.А.</i> О прогнозировании развития РЛС на основе анализа динамических рядов патентования с использованием системы Statistica	28
<i>Нигмедзянова А.М.</i> Приведение кривых второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple	30
<i>Петрова Е.В.</i> Построение регрессионных моделей в некоммерческих вычислительных системах	32
<i>Подорога А.В.</i> Моделирование идеального транспортного потока на кольцевой автодороге	35
<i>Суханова А.Г.</i> Нечетко-множественный подход к выбору инвестиционного портфеля в системе MathCad	38
<i>Тихонова О.В.</i> Специальные вопросы, возникающие при моделировании цифровой системы связи	41
<i>Харитонова Е.В.</i> Синтез модели динамических измерений	46
<i>Цветкович Д.Г.</i> Численное подтверждение результатов Инкери о вещественных нулях полиномов Бернулли	48

<i>Шепелин В.В., Степанов К.Г.</i> Методика повышения быстродействия системы массовой обработки данных с помощью Oracle Times Ten	51
СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры	58
<i>Авхимович В.В., Самойлова Т.А.</i> Решение задач корпусной лингвистики средствами баз данных	58
<i>Белоножкина Ю.Г.</i> Один подход к снижению затрат на IP-телефонию	61
<i>Борисов В.В.</i> Модели ассоциативной памяти в квазибиологических ассоциативных информационных системах	63
<i>Борисов В.В., Полячков А.В., Чандер А.П.</i> Проблемы интеграции средств ассоциативной обработки в технические информационные системы	67
<i>Васильев А.Н., Лазовская Т.В., Тархов Д.А.</i> Иерархические нейросетевые модели в случае вычислительных комплексов высокой производительности	70
<i>Денисенков М.А.</i> Обоснование типов нечетких ситуационных сетей для решения задач поддержки принятия решений	72
<i>Емельченков Е.П., Макаров А.И.</i> О некоторых задачах обработки сложноструктурированных данных	74
<i>Захаров В.Н., Мунерман В.И.</i> Синтез и оптимизация запросов в системах массовой обработки данных	77
<i>Ласточкин Г.Г., Самойлова Т.А.</i> Повышение производительности веб-сервисов методом сжатия	83
<i>Мунерман В.И., Мунерман Д.В., Синицын И.Н.</i> Архитектура вычислительных комплексов для реализации запросов в системах массовой обработки данных	85
<i>Мунерман В.И., Симакова А.А.</i> Преобразование семантики прикладной задачи в алгебру	88
<i>Мунерман В.И., Чикунов В.Д.</i> Параллельная реализация алгоритмов распознавания образов	91
<i>Мунерман В.И., Шпилецкий Е.В.</i> Реализация MPP-архитектуры вычислительных комплексов для баз данных средствами Windows Azure	93
<i>Мунерман В.И., Юлдашев Т.Д.</i> Реализация операции умножения многомерных матриц средствами баз данных	95
<i>Самойлова Т.А., Шашеро И.М.</i> Исследование проблем производительности кроссплатформенных сервис-ориентированных приложений	97

<i>Селезнева Г.А.</i> Решение задач дискретной математики средствами СУБД	99
<i>Сизов А.А.</i> Идентификация методов прогнозирования временных рядов с переменной структурой	101
<i>Соколов И.А., Будзко В.И., Калинин Л.А., Синицин И.Н., Ступников С.А.</i> Развитие работ в области «Больших данных» в Российской академии наук	103
<i>Чукляев И.И.</i> Управление рисками защищенности распределенных информационно-вычислительных систем	110
<i>Ширай А.Е.</i> Особенности структуры ядер в конвейерной микропроцессорной архитектуре \mathfrak{Z} (КСИ)	112
СЕКЦИЯ 3. Математика и её приложения	116
<i>Адуков В.М., Савельева А.А.</i> О теореме Пуанкаре для линейного разностного уравнения третьего порядка	116
<i>Адуков В.М., Фадеева А.С.</i> Об устойчивости частных индексов треугольной матрицы-функции второго порядка	118
<i>Адукова Н.В.</i> Дискретная модель оптимального планирования рекламного бюджета	119
<i>Антонова С.А., Евдокимова Г.С.</i> Методы прикладной статистики в спорте	122
<i>Астапчик О.В.</i> Статистический анализ влияния социально-экономических факторов на естественный прирост населения в регионах России	124
<i>Банару М.Б., Банару Г.А.</i> О почти контактных метрических гиперповерхностях шестимерной сферы	126
<i>Богданова Н.Н.</i> О разрешимости в замкнутой форме одной четырёхэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций	128
<i>Вувуникян Ю.М.</i> Тензорное произведение и композиция системных полиномиальных операторов	130
<i>Гомонов С.А.</i> О строении предельных множеств в точке ∞ полианалитических полиномов двучленного вида	132
<i>Гомонов С.А., Арзамасцев А.Л.</i> Использование свойств простых чисел в алгоритме RSA	134
<i>Гомонов С.А., Сологубов Н.Г.</i> О применении некоторых классических неравенств в решении систем уравнений	140
<i>Гулящих И.А.</i> О задаче Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре	144

<i>Долгополова О.Б., Зверович Э.И.</i> Новый пример краевой задачи Газемана, допускающей решение в замкнутой форме	146
<i>Евдокимова Г.С.</i> Оценка параметра экспоненциального распределения	148
<i>Емельченков Е.П.</i> АЕ-структуры с центральными коллинеациями с центрами на прямой $x = 0$ и Е-алгебры	150
<i>Зверович Э.И.</i> Построение сходящегося разложения интеграла типа Коши с целой плотностью	157
<i>Зуев А.М.</i> Интеграл от произведения функций Бесселя и его оценка	160
<i>Зуева И.М., Болотин И.Б.</i> О нетеровости второй основной краевой задачи типа Римана для трианалитических функций в плоскости со щелями	163
<i>Калинин А.И., Лавринович Л.И.</i> Асимптотика решений возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления	165
<i>Карачик В.В.</i> Задача Дирихле для полигармонического уравнения в шаре	167
<i>Киреев В.И., Бирюкова Т.К., Герикович М.М.</i> Непрерывно-дискретные сплайн-методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на нерегулярном шаблоне	169
<i>Кирьяцкис Е.</i> Три представления конечной разности n -ого порядка	175
<i>Кирьяцкис Е., Кирьяцкий Э.</i> О теоремах покрытия для некоторых классов функций	176
<i>Кирьяцкис Д., Кирьяцкий Э.</i> О некоторых системах Маркова	177
<i>Комиссарова Д.А.</i> Признаки устойчивости разностных уравнений с запаздыванием	177
<i>Конашенко А.В., Шерстнёва Н.А.</i> К вопросу о базисности системы корневых функций квадратного пучка дифференциальных операторов	179
<i>Кудрявцев К.Н., Стабулит И.С.</i> Сильно гарантированное равновесие в одной задаче пространственной конкуренции	181
<i>Куприкова О.Н.</i> Об одной краевой задаче в классах квазигармонических функций	183
<i>Курицын С.Ю., Расулов К.М.</i> Обобщенная задача типа Римана для метааналитических функций в случае произвольных односвязных областей	186
<i>Мазалов М.Я., Мотрошилова О.Д.</i> О неванлинновских областях с неспрямляемыми границами	191
<i>Пермина А.Н.</i> Интегральные уравнения обратной задачи прикладной биофизики	193

<i>Петросова М.А., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.</i> Точный закон регулярного попарного совпадения для полиномов Бернштейна на произвольном отрезке	195
<i>Пушков И.С.</i> Применение кластерного анализа в исследовании социально-экономического развития регионов России	197
<i>Расторгуева А.В., Болотин И.Б.</i> О нетеровости второй основной краевой задачи типа Римана с разрывными коэффициентами для трианалитических функций в случае полуплоскости	199
<i>Расулов К.М.</i> О краевой задаче типа Римана в классах квазигармонических функций	201
<i>Расулов К.М., Андреевков А.П.</i> О приближенном решении второй основной задачи типа Гильберта в классах метааналитических функций	204
<i>Расулов К.М., Клименко Д.А.</i> Об основных краевых задачах типа Римана с разрывными коэффициентами для метааналитических функций	206
<i>Рубинштейн А.И.</i> О наилучшей сходимости	209
<i>Тимотин А.М.</i> О разрешимости одной четырёхэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана для бианалитических функций	211
<i>Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.</i> Полиномы Бернштейна для степенной функции на симметричном отрезке	215
<i>Трифорова И.В.</i> Асимптотически обратный оператор к нелинейному эволюционному оператору второй кратности	220
<i>Ушаков А.Л.</i> Численное моделирование деформации прямоугольной пластины	222
<i>Шамоян Р.Ф., Куриленко С.М.</i> О некоторых новых классах типа Герца аналитических функций и интегральных операторах типа Бергмана-Герца в трубчатых областях над симметрическими конусами	223
<i>Шамоян Ф. А.</i> О полноте системы многочленов в весовых анизотропных пространствах аналитических в поликруге функций	224
<i>Шатохин Н.Л.</i> Тернарные кольца, координатизирующие АН-плоскости	226
<i>Ястребов М.Ю.</i> Анализ экономических процессов с дискретно распределенным запаздыванием	227
СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании	229
<i>Аршиненко И.А.</i> Определения параметров пользовательских тарифовочных кривых для склерометра Silver Schmidt с помощью Excel	229

<i>Ассонова Н.В.</i> Некоторые манипуляторы для повышения уровня интерактивности занятий по дискретной математике	231
<i>Бояринов Д.А.</i> Современные телекоммуникационные технологии в развитии региональной системы образования	234
<i>Буренина Е.Е., Сенькина Г.Е.</i> Готовность образовательных организаций к внедрению инклюзивного образования: критерии и показатели измерения	236
<i>Дюндин А.В.</i> Изучение дисциплины «строительная механика» с использованием ПК «SCAD Office»	244
<i>Евдокимова Г.С.</i> Роль статистических пакетов обработки данных в научно-исследовательской работе студентов	246
<i>Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р.</i> Реализация балльно-рейтинговой системы оценки знаний на основе взаимодействия Maple с базой данных в формате Excel	248
<i>Конашенко В.И.</i> Применение скринкастов в процессе изучения физики	251
<i>Ланева И.В.</i> Практические и лабораторные работы по дисциплине «Теория игр и исследование операций»	252
<i>Петров В.А.</i> О задачах на математическую компетентность	253
<i>Селюк Б.В.</i> Кинематический анализ шарнирного механизма с использованием компьютера	255
<i>Савченков В.И.</i> Информационные технологии как важнейшее средство роста профессиональной компетентности выпускников	257
<i>Тимофеева Т.И., Тимофеева Н.М.</i> Web-проектирование в рамках ежегодного областного конкурса по web-проектам в сети интернет	259
<i>Усачев В.И.</i> Начало работы с пакетом RapidMiner	261
<i>Усачев В.И., Чулакова М.Г.</i> Применение пакета Gretl при анализе необходимого количества мест в общежитии для первокурсников СмолГУ	265
<i>Царева Е.А.</i> Использование программы Microsoft Excel для обработки результатов лабораторных работ по физике	267
<i>Шилягина А.М.</i> Мультимедиа технологии в образовании	269
<i>Шилягина А.М.</i> Роль интерактивных средств обучения в формировании интерактивной образовательной среды	273
<i>Широкова О.А.</i> Организация запросов в SQL с учетом особенностей прикладной базы данных	277

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 16

Издательство Смоленского государственного
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко*

Подписано к печати 17.04.2015. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. п. л. 17,8. Уч.-изд. л. 17,8. Тираж 120 экз.
Заказ № 26

Отпечатано с оригинал-макета авторов в ИТЦ СмолГУ
214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4.