

Министерство образования и науки РФ
Смоленский государственный университет

Системы компьютерной математики и их приложения

*Материалы XVIII Международной научной конференции,
посвященной 70-летию В.И. Мунермана*

Выпуск 18

Смоленск
Издательство СмолГУ
2017

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета СмолГУ*

Редакционная коллегия: *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *И.Б. Болотин*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *С.А. Гомонов*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *Е.П. Емельченков*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Н.М. Тимофеева*, канд. пед. наук, доц.

Системы компьютерной математики и их приложения:
С 409 материалы XVIII Международной научной конференции, посвященной 70-летию В.И. Мунемана. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. – Вып. 18. – 275 с.
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XVIII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 19–21 мая 2017 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

© Авторы, 2017
© Издательство СмолГУ, 2017

ПРОИЗВОДСТВЕННИК, УЧЕНЫЙ И ПЕДАГОГ К 70-летию Виктора Иосифовича Мунермана

17 января 2017 года исполнилось 70 лет известному специалисту в области математического моделирования данных и архитектур программно-аппаратных комплексов, реализующих массовую обработку данных, кандидату технических наук, ведущему доценту кафедры информатики Смоленского государственного университета (СмолГУ) Виктору Иосифович Мунерману.

В.И. Мунерман родился 17 января 1947 г. в городе Киеве в семье врачей. Среди его родных было много научных работников, что во многом определило его будущее. Тяга к научной работе проявилась еще в годы учебы в Смоленском государственном педагогическом институте (ныне СмолГУ) благодаря влиянию профессора М.Б. Балка и доцента Р.Е. Кристаллинского, под руководством которых В.И. Мунерман сделал свои первые шаги в науку. Именно в студенческие годы у него завязались первые связи с производством, и он приступил к решению некоторых оптимизационных задач управления производством для Смоленского авиационного завода (САЗ). По окончании института в 1968 году В.И. Мунерман работал учителем математики в Касплянской средней школе, где он успешно руководил выпускным 10-м классом. Во время работы в школе В.И. Мунерман получил приглашение в только что созданный вычислительный центр САЗ, но счел возможным приступить к работе программистом только после завершения учебного года. Это был первый вычислительный центр (ВЦ) в Смоленской области, так что В.И. Мунерман был в числе первых программистов Смоленщины.



САЗ оказался прекрасной школой для начинающего программиста, в результате чего уже в 1973 году В.И. Мунерман продолжил свою деятельность начальником бюро программирования на Смоленском производственном объединении «Аналитприбор». Там началась его активная научно-практическая деятельность, завершившаяся поступлением в 1981 году в аспирантуру на базовую кафедру Института электронных управляющих машин (ИНЭУМ) в Московском институте радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА). Научным руководителем В.И. Мунермана был выдающийся ученый профессор Н.А. Левин. В годы работы над кандидатской диссертацией В.И. Мунерман тесно сотрудничал с Киевским институтом кибернетики.

САЗ оказался прекрасной школой для начинающего программиста, в результате чего уже в 1973 году В.И. Мунерман продолжил свою деятельность начальником бюро программирования на Смоленском производственном объединении «Аналитприбор». Там началась его активная научно-практическая деятельность, завершившаяся поступлением в 1981 году в аспирантуру на базовую кафедру Института электронных управляющих машин (ИНЭУМ) в Московском институте радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА). Научным руководителем В.И. Мунермана был выдающийся ученый профессор Н.А. Левин. В годы работы над кандидатской диссертацией В.И. Мунерман тесно сотрудничал с Киевским институтом кибернетики.

В своей диссертации В.И. Мунерман одним из первых в мире применил алгебру многомерных матриц для построения моделей данных и проектирования программно-аппаратных комплексов. Диссертация была успешно защищена в 1985 году. В это время кафедра, аспирантом которой был В.И. Мунерман, уже являлась базовой кафедрой вновь созданного Института проблем информатики АН СССР (впоследствии ИПИ РАН).

С 1987 по 1992 год В.И. Мунерман работал в СКБ счетных машин на Смоленском производственном объединении «Искра». Здесь под его руководством было разработано несколько проектов, самый интересный из которых – локальная вычислительная сеть «Искра-0,5». Этот проект был реализован совместно с Киевским институтом кибернетики и явился одной из первых промышленных реализаций архитектуры «маркерная шина с арбитром». Сегодня это самая распространенная архитектура ЛВС.

С 1992 года В.И. Мунерман работает доцентом кафедры информатики Смоленского государственного педагогического института (ныне СмолГУ). Он успешно ведет различные курсы программирования, руководит курсовыми и дипломными работами студентов.

Как уже было отмечено выше, основной круг научных интересов В.И. Мунермана лежит в области математического моделирования данных и архитектур программно-аппаратных комплексов, реализующих массовую обработку данных. Им разработаны две оригинальные модели данных: многомерно-матричная и файловая (теоретико-множественная). Для решения задач повышения эффективности параллельной обработки В.И. Мунерман предложил принцип симметричного горизонтального распределения данных. Результаты научных работ Виктора Иосифовича публикуются в таких ведущих научных журналах, как «Системы высокой доступности», «Современные информационные технологии и ИТ-образование» и др. Он активно участвует в различных международных научных конференциях.

На протяжении последних 10 лет В.И. Мунерман является одним из организаторов проходящей при СмолГУ ежегодной Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», в рамках которой руководит секцией «Параллельное программирование и многоядерные процессоры».

В настоящее время В.И. Мунерман продолжает активно заниматься научной и педагогической работой. Пожелаем Виктору Иосифовичу крепкого здоровья и новых успехов в научно-педагогической деятельности.

*Председатель Оргкомитета СКМП-2017,
профессор К.М. Расулов*

СЕКЦИЯ 1

Системы компьютерной математики

МОДЕЛЬ КОММУНИКАЦИОННОГО КОМПОНЕНТА ВНУТРИОФИСНОЙ СЕТИ

В.М. ВИКУЛОВ¹, А.А. ПАРАМОНОВ²

МТУ МИРЭА, г. Москва

e-mail: ¹vulfgaar@list.ru, ²paramonov@mirea.ru

УДК 621.396.44

Ключевые слова: *видеоимпульс, меандр, спектр, сигнал, модуляция.*

В докладе показан возможный способ организации внутриофисной сети передачи данных. Особенность коммуникационного компонента состоит в том, что для передачи информации используются не традиционные радиосигналы в виде модулированной синусоиды, а непосредственно цифровые сигналы, циркулирующие в компьютере. Проведено математическое моделирование возможности организации такой передачи.

В современных системах беспроводной связи для организации коммуникационного компонента в небольших помещениях с малым количеством абонентов давно доминируют широко распространённые стандарты связи, такие как WI-FI, WI-MAX и т.д. Несмотря на это, регулярно появляются альтернативные способы связи для подобных условий. Это связано с поиском оптимального по энергетическим и спектральным характеристикам стандарта связи. В данном докладе изложен один из возможных способов решения подобной задачи для помещения (офиса) с некоторым количеством ПК. Анализ возможности передачи сигналов проводился на базе математической модели.

Сегодня уровни частот в интерфейсах передачи цифровых данных в компьютерах дошли до сотен мегагерц. Идея организации коммуникационного компонента сети строится на использовании высокочастотных сигналов интерфейсов как несущего колебания, а информационным потоком задаётся манипуляция данных сигналов.

На рисунке 1 приведена общая схема подобного канала связи.

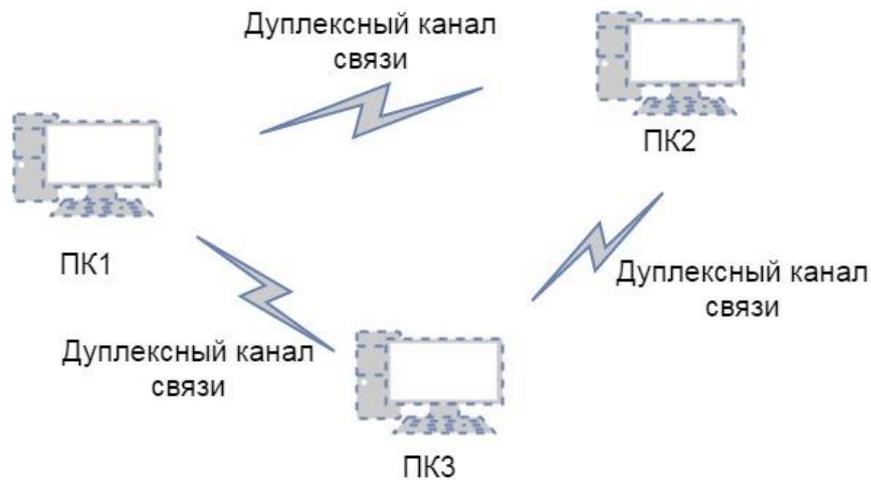


Рис. 1. Схема канала связи

При таком способе связи в каждом компьютере стоит приёмо-передающая система в виде платы, на которой располагается микросхема генерации и обработки сигналов (сигнальный процессор) и рамочная антенна [1]. Размеры подобной платы не будут превышать размеры стандартов крепления в корпусе ПК.

Основным вопросом исследования является реальная мощность, снимаемая с антенны, и, как следствие, дальность передачи. Так как задающим сигналом будут потоки видеоимпульсов с бесконечным спектром, а антенны, реализуемые в подобных условиях, имеют узкую амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), то для оценки мощностных характеристик была построена математическая модель [2]. На рисунке 2 изображены временные диаграммы видеоимпульсов.

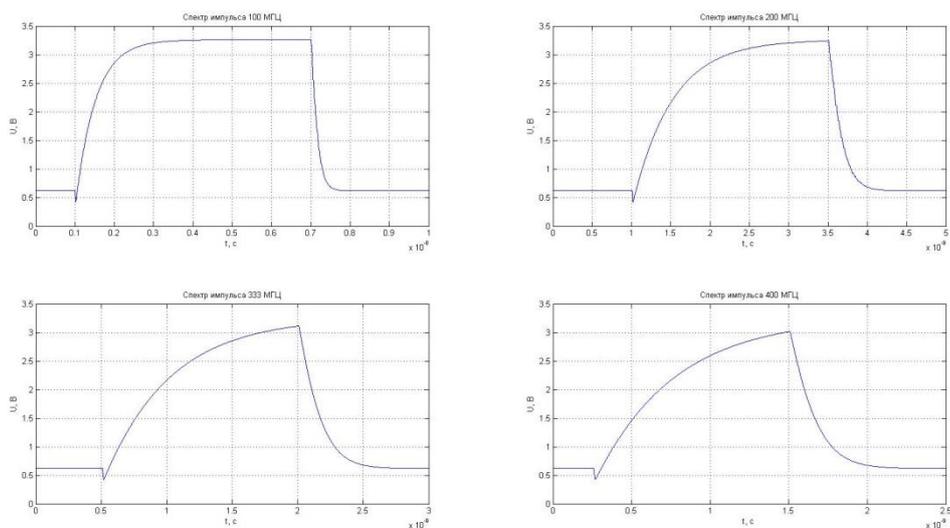


Рис. 2. Виды импульсов видео интерфейсов

На рисунке 3 в одной системе координат приведён амплитудный спектр пачки видеоимпульсов и АЧХ антенны.

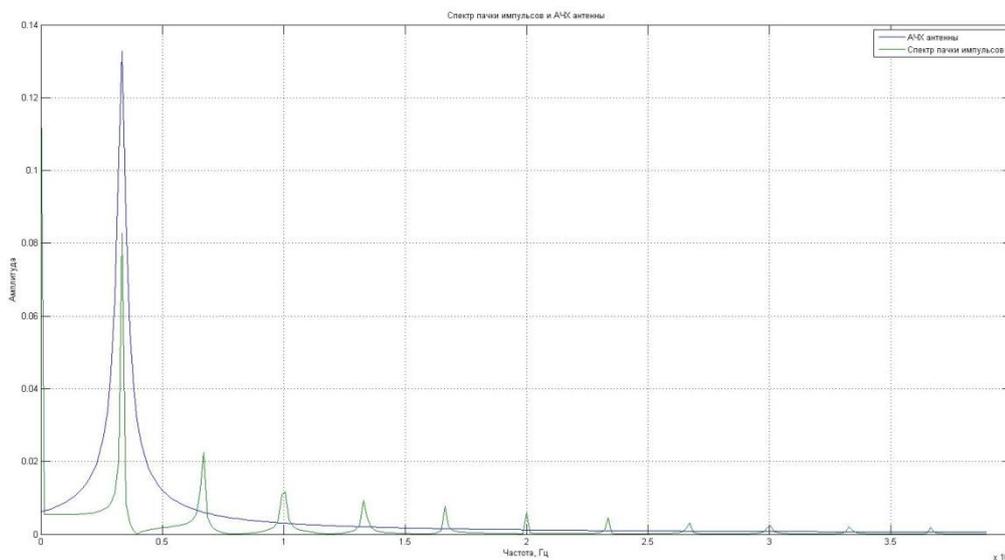


Рис. 3. Спектр пачки импульсов и АЧХ антенны

Из рисунка видно, что при подобных антеннах только часть мощности сигнала уйдёт в эфир.

Модельный эксперимент показал, что порядка 20-25 % подаваемой мощности при таких антеннах реально передать в эфир, что при типовых уровнях токов и напряжений сигналов распространённых интерфейсов (LVDS, TTL и т.д.) хватает, чтобы принять сигнал на расстоянии, сопоставимом с размерами офиса или любого другого рабочего помещения.

Литература

1. Balanis K. Antenna Theory. Analysis and Design. 2nd ed. Wiley, 2001.
2. Тихонова О.В. Комбинированные методы моделирования радиотехнических систем // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной научной конференции. Смоленск, 2014. Вып. 15, С. 56–58.

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИГНАЛА SOQPSK В КОСМИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ СВЯЗИ

В.М. ВИКУЛОВ¹, О.А. ГЕВОРГЯН², А.А. ПАРАМОНОВ³

МТУ МИРЭА, г. Москва

e-mail: ¹janik9309@mail.ru, ²vulfgaar@list.ru, ³paramonov@mirea.ru

УДК 621.396.94

Ключевые слова: сигнал OQPSK, модуляция, демодуляция, алгоритм Витерби, компьютерное моделирование.

В докладе рассматриваются вопросы применения сигнала OQPSK в космических линиях связи. Рассмотрены упрощения демодулятора, с помощью компьютерного моделирования оценена помехоустойчивость приема.

Космические линии связи играют определяющую роль при организации дальней магистральной связи, построении систем космического мониторинга земной поверхности и т.д. Одним из важнейших вопросов при построении аппаратуры передачи данных для подобных линий является выбор вида сигнала. К сигналам в космических линиях связи предъявляются очень высокие требования по уровню внеполосных излучений, энергетической эффективности и, что очень важно, к постоянству огибающей.

Любой цифровой сигнал с постоянной огибающей может быть записан в следующей общей форме:

$$s(t, \mathbf{A}_k) = U_0 \cos \{ \omega_0 t + \Phi(\mathbf{A}_k, t) + \varphi_0 \}, t \in (k-1)T, kT], \quad (1)$$

где U_0 – амплитуда сигнала; $\omega_0 = 2\pi f_0$ – несущая частота; φ_0 – начальная фаза в момент времени $t = 0$.

В выражение (1) входит $\Phi(\mathbf{A}_k, t)$ – функция передаваемых символов, определяющая закон угловой модуляции.

К настоящему времени исследование подобных сигналов продвинулись далеко вперед. Некоторые удачные форматы получили всеобщее признание и вошли в ряд стандартов передачи цифровой информации. Один из таких форматов – SOQPSK, расшифровываемый как Shaped Offset Quadrature Phase Shift Keying – сигнал ФМ-4 со сдвигом квадратур, подвергнутых дополнительной фильтрации [1–3].

При разработке формата SOQPSK были использованы три приема, способствующие сужению спектра. Во-первых, предусмотрено специальное кодирование первичного потока данных. Во-вторых, передача происходит в двух квадратурных каналах. И, наконец, применяется дополнительная фильтрация информационного потока, приводящая к более плавному изменению фазы сигнала.

Первичный поток данных $\dots d_{i-1}, d_i, d_{i+1} \dots$ подвергается троичному решетчатому кодированию в соответствии с правилом

$$\alpha_i = (-1)^{i+1} \frac{d_{i-1}(d_i - d_{i+1})}{2}. \quad (2)$$

Полученная таким путем последовательность используется в дальнейшем как модулирующая.

В результате такого перекодирования элементы последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ принимают значения -1, 0, 1, причем на соседних тактовых

интервалах никогда не происходит смена символа -1 на символ 1 и наоборот, а доля нулей в этой последовательности составляет 50%.

Формат сигнала SOQPSK предусматривает передачу информации в двух квадратурных каналах, сдвинутых друг относительно друга на один тактовый интервал T (T – длительность одного информационного символа d_i). Таким образом, длительность каждого символа в синфазном и квадратурном каналах удваивается. В дальнейшем будем ее обозначать как T_s .

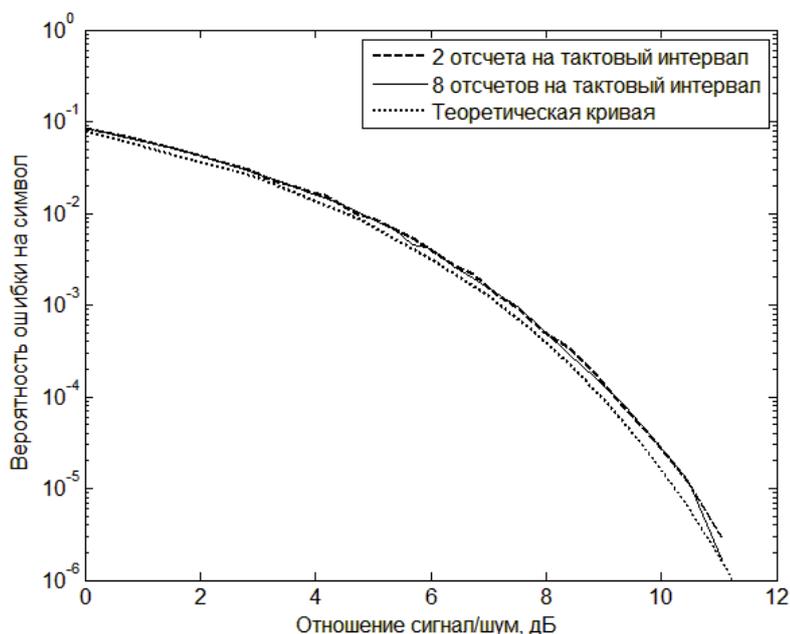
Из выражения (2) видно, что каждый символ α_i сконструирован из трех символов d_{i-1}, d_i, d_{i+1} первичного алфавита, причем знак символа α_i зависит от того, четным или нечетным оказывается номер символа i .

Для максимального сужения спектра сигнала SOQPSK предусмотрено сглаживание его фазовых траекторий. С этой целью использована функция в виде приподнятого косинуса и дополнительно применено сглаживание в окне специальной формы.

Рассмотрим прием сигнала SOQPSK в присутствии белого гауссовского шума. Особенность этого сигнала состоит в том, что длина фазового импульса сигнала $L = 8$. Количество информационных символов, которые определяют форму сигнала на одном тактовом интервале $L' = 10$, что обусловлено наличием предварительного кодера информационных символов (2). Очевидно, что формирование вектора символов α происходит по 10 информационным символам d_i , то есть возможное количество состояний сигнала $M = 2^{10} = 1024$. Кроме того, поведение фазы сигнала определяется четностью тактового интервала, что еще удваивает количество возможных состояний сигнала.

Из сказанного следует, что напрямую реализовать алгоритм приема по максимуму правдоподобия (что требует одновременного вычисления огромного количества корреляционных интегралов и их сравнения) практически невозможно. При практической реализации демодулятора необходимо упрощение алгоритма его работы. С тем, чтобы этот алгоритм имел не зависящую от номера принимаемого символа сложность, необходимо использование алгоритма Витерби. Объем массива опорных колебаний может быть сокращен вдвое за счет учета того факта, что половина опорных колебаний является инверсией другой половины. Перспективен подход, связанный с заменой точных опорных колебаний длиной $L' = 10$ на укороченные. Однако применение подобных подходов возможно лишь после оценки их влияния на помехоустойчивость приема. В силу сложности задач соответствующие результаты могут быть получены только методами компьютерного моделирования [4]. Имеется еще целый ряд вопросов, нуждающихся в моделировании: оценка влияния систем синхронизации на

помехоустойчивость приема, разрядность обрабатываемых данных и т.д. В докладе представлены полученные результаты. Один из них – кривые помехоустойчивости приема сигнала SOQPSK при двух частотах дискретизации обрабатываемых сигналов (приведен на рисунке).



Литература

1. CCSDS report concerning bandwidth-efficient modulations. CCSDS 413.0-G-1, April 2003.
2. Hill T. Enhanced Constant Envelope, Interoperable Shaped Offset QPSK (SOQPSK) Waveform for Improved Spectral Efficiency // Proceedings of the 2000 International Telemetry Conference. 2000. P. 127–135.
3. Geoghegan M. Bandwidth and Power Efficiency Tradeoffs of SOQPSK // Proceedings of the 2002 International Telemetry Conference. 2002.
4. Тихонова О.В. Комбинированные методы моделирования радиотехнических систем // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной научной конференции. Смоленск, 2014. Вып. 15. С. 56–58.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА GRETL ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ ДЕМОГРАФИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ В СМОЛЕНСКОЙ ОБЛАСТИ

О.С. ГАБЕЛОК

Смоленский государственный университет
e-mail: osgabelok@gmail.com

УДК 519.25

Ключевые слова: пакет *Gretl*, тренд временного ряда, множественная регрессия, демографическая ситуация, прогноз.

В статье представлена прогностическая модель для определения демографической ситуации Смоленской области, построенная на основе анализа некоторого набора данных за 2000–2016 годы.

Задачи анализа и прогнозирования реальных временных рядов возникают во всех аспектах человеческой деятельности (в экономике, медицине, энергетике, промышленности и т.д.).

Современные методы статистического прогнозирования позволяют с высокой точностью прогнозировать практически все возможные показатели. Однако надо помнить, что не существует универсальных методов прогнозирования на все случаи жизни. Выбор метода прогнозирования и его эффективность зависят от многих условий, и в частности от требуемой длины или времени прогнозирования.

На данный момент для прогнозирования данных уже разработаны десятки программных продуктов. Различные по объему и качеству реализованных методов, области возможного применения, пользовательскому интерфейсу, цене, требованиям к оборудованию и т.п., они отражают многообразие потребностей обработки данных в различных областях человеческой деятельности. Большинство таких программ предназначены непосредственно для статистической обработки табличных данных и реализуют стандартные методы статистического анализа данных.

Демографическая проблема – одна из самых часто обсуждаемых проблем. К сожалению, научный уровень обсуждения демографических вопросов не всегда достаточно высок. Между тем сегодня назрела острая необходимость общественного управления демографическими процессами. Именно общественного, а не только государственного.

В работе представлены результаты построения прогностической модели демографической ситуации Смоленской области до 2036 года. При этом анализировались следующие данные за 2000–2016 годы: население Смоленской области (D1); естественный прирост (D2); стоимость доллара в рублях (D3); среднедушевой доход населения (D4); инфляция (D5); средняя стоимость 1 кв.м. общей площади квартир на рынках жилья по Смоленской области (D6); стоимость минимального набора продуктов питания (D7); индексы потребительских цен по регионам ЦФО РФ (D8). Уровень значимости полученных результатов равен 0,05.

Необходимые расчеты в пакете Gretl. Gretl (GNU Regression, Econometrics and Time-series Library – библиотека для регрессий, эконометрики и временных рядов) – прикладной программный пакет для эконометрического моделирования, часть проекта GNU [3]. Важным является то, что GRETL – это свободное бесплатное программное обеспечение с открытым исходным кодом. Наличие простого

интуитивного интерфейса на различных языках мира, в том числе и на русском, делает этот пакет особенно привлекательным для пользователей. Он позволяет получать большинство описательных статистик, строить графики, создавать скрипты. Данные для обработки можно создавать как в самом пакете, так и импортировать, например, из SPSS или Excel.

Принципиальное преимущество: благодаря встроенному языку имеется возможность писать собственные программы. Gretl интенсивно развивается благодаря бесплатности продукта и возможности пополнения библиотеки собственным кодом. В перспективе может составить достойную конкуренцию дорогостоящему программному обеспечению (типа Matlab, Statistica и т.д.).

Из обозначенных выше данных были построены две модели: первая модель на основе выделения тренда временного ряда D1 и вторая – линейная модель регрессии с поправкой на гетероскедастичность.

В первой модели производится сглаживание при помощи простого скользящего среднего, либо используется для этой цели экспоненциальное скользящее среднее. Он приводит к линейному тренду, уравнение которого получено с использованием традиционной техники метода наименьших квадратов:

$$D1 = -8,18307 \cdot x + 1087,65.$$

В качестве переменной x взят уровень ряда; коэффициент при x имеет уровень значимости $-2,866$ и уровень значимости свободного члена равен $0,000$.

Рассмотрим построение модели множественной линейной регрессии, в которой зависимая переменная D1 и регрессоры D2 – D8. Большое число регрессоров, для сравнительно небольшого числа наблюдений, и наличие гетероскедастичности приводит к тому, что ее коэффициенты на выбранном уровне значимости нужно считать равными 0.

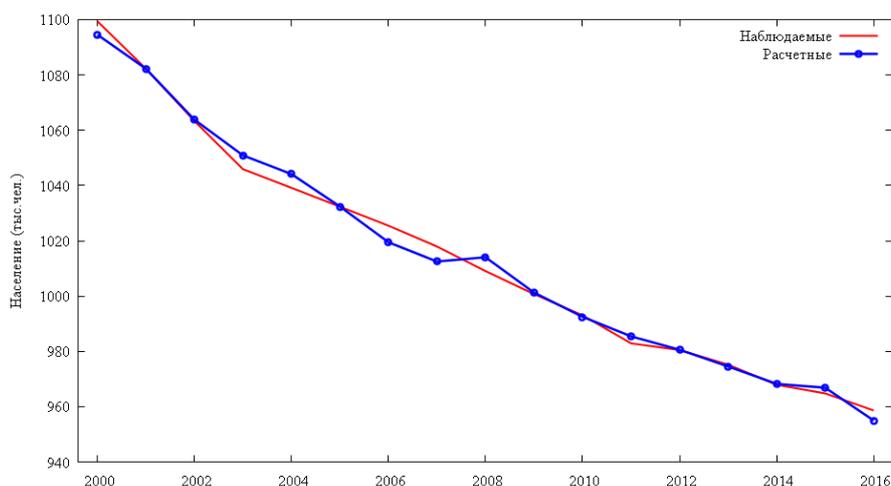


Рис. 1. Линейная модель регрессии с поправкой на гетероскедастичность

Модель (на основе рассмотрения различных комбинаций D2 – D8 и процедуры последовательного исключения переменных с использованием двухстороннего значения уровня значимости) с регрессорами D3 – D5 и применение поправок на гетероскедастичность дает уравнение:

$$D1 = 971,985 + 0,116 D3 - 0,0019 D4 + 5,85714 D5.$$

В этом уравнении уровень значимости свободного члена и коэффициентов при D3, D4 и D5 равны, соответственно, -16,28; 0,7314; 0,0085 и 0,0001.

Сумма квадратов остатков 1033,428 в первой и 7424,148 во второй моделях. Можно сделать вывод, что модель на основе выделения тренда временного ряда D1 является более адекватной по отношению к исходному ряду D1, чем линейная модель регрессии с поправкой на гетероскедастичность. Составим прогноз по первой модели (рис. 2)

Для 95% доверительных интервалов, $z(0,025) = 1,96$

	D1	Предсказание	Ст. ошибка	95% доверительный интервал	
2015	964,8	956,6			
2016	958,6	948,4			
2017		940,2	9,31	922,0	958,5
2018		932,1	9,48	913,5	950,6
2019		923,9	9,67	904,9	942,8
2020		915,7	9,87	896,3	935,0
2021		907,5	10,08	887,7	927,2
2022		899,3	10,30	879,1	919,5
2023		891,1	10,54	870,4	911,7
2024		882,9	10,79	861,7	904,0
2025		874,7	11,04	853,0	896,3
2026		866,5	11,31	844,3	888,7
2027		858,3	11,58	835,6	881,0
2028		850,1	11,86	826,8	873,3
2029		841,9	12,15	818,1	865,7
2030		833,7	12,45	809,3	858,1
2031		825,5	12,75	800,5	850,5
2032		817,3	13,06	791,7	842,9
2033		809,1	13,38	782,9	835,3
2034		800,9	13,70	774,1	827,8
2035		792,7	14,02	765,2	820,2
2036		784,5	14,35	756,4	812,7

Рис. 2. Прогноз демографической ситуации в Смоленской области по модели на основе выделения тренда временного ряда D1

Стоит отметить, что прогнозирование на основании построенных моделей имеет практическую значимость только на ближайший период (что видно из рисунка 2) и только при условии отсутствия значительных скачков в значениях переменных D3 – D5.

Литература

1. GMDH Shell: Forecasting Software & Services // URL: <https://www.gmdhshell.com> (дата обращения: 06.12.2016).
2. Борисов В. А. Демография. М.: Издательский дом NOTABENE, 1999, 2001. 272 с.
3. Куфель Т. Эконометрика. Решение задач с применением пакета программ GRETL. М.: Горячая линия, 2007. 200 с.
4. Мхитарян В.С. Коллектив авторов. Демографическая статистика: учебник – М.: КНОРУС, 2010. 480 с.

5. Туктамышева Л.М., Седова Е.Н. Проверка гипотезы о характере тренда: тестирование на TS/DS ряды: методические указания. Оренбург: ОГУ, 2014. 56 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Н.В. ЗАЙЦЕВА¹, Г.А. РАХИМОВА²

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

e-mail: ¹n.v.zaiceva@yandex.ru, ²guzelya35@mail.ru

УДК 517.95:004.9

Ключевые слова: *краевая задача, гиперболическое уравнение, эллиптическое уравнение, параболическое уравнение, оператор Бесселя, система компьютерной математики Maple.*

В работе рассматриваются краевые задачи для гиперболического, эллиптического и параболического уравнений с оператором Бесселя, решения которых получены с помощью программы Maple.

Одним из важнейших разделов современной теории уравнений математической физики является теория вырождающихся уравнений, что обусловлено ее многочисленными приложениями во многих областях науки и техники. Особое место в этой теории занимают уравнения, содержащие дифференциальный оператор Бесселя.

Мы исследовали на основании работ [1; 2] краевые задачи с классическими начальными и граничными данными в прямоугольной области $D=\{0<x<a, 0<y<b\}$ для следующих уравнений второго порядка, содержащих по одной из пространственных переменных оператора Бесселя:

$$\text{>eq1:=diff(u(x,y),y$2)-diff(u(x,y),x$2)-k/x*diff(u(x,y),x)=0;$$

$$\text{>eq2:=diff(u(x,y),y$2)+diff(u(x,y),x$2)+k/x*diff(u(x,y),x)=0;$$

$$\text{>eq3:=diff(u(x,y),y)-diff(u(x,y),x$2)-k/x*diff(u(x,y),x)=0.$$

Одним из наиболее распространенных методов решения уравнений в частных производных является метод Фурье или метод разделения переменных, который приводит к решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений. А относительно пространственной переменной x мы получаем соответствующие спектральные задачи на отыскание собственных значений и собственных функций.

Система компьютерной математики Maple в наших исследованиях оказалась незаменимым помощником при решении большого класса задач для указанных уравнений при различных начальных и граничных

условиях. Применяя метод Фурье, согласно [3], мы построили решения задач в явном виде – в виде рядов Фурье-Бесселя, вычислили с использованием цикла значительные массивы характеристических корней спектральных задач, нашли коэффициенты указанных рядов и построили схематические графики решений задач. При решении подобных задач можно использовать и другие математические пакеты, например Mathematica, MathCad, Matlab, но мы остановились на выборе пакета Maple.

Литература

1. Зайцева Н.В. Математическое моделирование краевой задачи для эллиптического уравнения с оператором Бесселя в системе компьютерной математики Maple // Фундаментальные исследования. 2016. № 4, Ч. 1. С. 41–46.
2. Зайцева Н.В. Применение СКМ Maple при решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения с оператором Бесселя // Математическое моделирование процессов и систем: сборник V Всероссийской научно-практической конференции, приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова. Стерлитамак, 2016. Ч. 2. С. 223–226.
3. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: учебник для вузов. СПб.: Питер, 2004. 539 с.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ В-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н.В. ЗАЙЦЕВА¹, Е.С. УЛЬЯНОВА²

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
e-mail: ¹n.v.zaiceva@yandex.ru, ²smeshinka193@mail.ru

УДК 517.95:004.9

Ключевые слова: *нелокальная задача, интегральное условие первого рода, гиперболическое уравнение, оператор Бесселя, система компьютерной математики Maple.*

В работе рассматривается нелокальная краевая задача для гиперболического уравнения с оператором Бесселя, решение которой получено с помощью программы Maple.

Система компьютерной математики Maple, разработанная в 1980 году канадскими исследователями, является неоценимым помощником при решении многих математических задач, в том числе и при решении задач математической физики для уравнений в частных производных. Данная программа позволяет избавиться от рутинных математических

вычислений и широко используется во многих учебных заведениях мира, в том числе и в России.

Рассмотрим на плоскости прямоугольную область $D=\{0<x<1,0<t<2\}$. Постановка задачи: требуется найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую гиперболическому уравнению с оператором Бесселя:

```
>restart;
>eq:=diff(u(x,t),t$2)=diff(u(x,t),x$2)+k/x*diff(u(x,t),x);
```

где коэффициент $k>0$; начальным условиям:

$u(x,0)=f(x)$, $\text{diff}(u(x,t),t)=g(x)$ при $t=0$;

граничным условиям: $u(0,t)=0$, $\text{diff}(u(x,t),x)=0$ при $x=1$.

Следует отметить [1], что второе граничное условие является эквивалентным интегральному условию первого рода в пределах от 0 до 1, где в качестве подынтегральной функции является искомая функция $u(x,t)$ с весом x^k .

При значении $k=1$, которое выберем для дальнейшей визуализации решения, единственное решение задачи определяется рядом:

```
>u(x,t)=Sum((a_n*cos(lambda_n*t)+b_n*sin(lambda_n*t))*BesselJ(0,lambda_n*x),n=1..infinity).
```

Здесь λ_n – положительные вещественные корни трансцендентного уравнения $BesselJ(1,\lambda)=0$, где $BesselJ(1,\lambda)$ – функция Бесселя первого рода порядка, равного единице, а коэффициенты ряда определяются по формулам:

```
>a_n=2/((BesselJ(0,lambda_n))^2*int(x*f(x)*BesselJ(0,lambda_n*x),
x=0..1));
>b_n=2/(lambda_n*(BesselJ(0,lambda_n))^2*int(x*g(x)*BesselJ(0,lambda_n*x),x=0..1)).
```

Для определенности выберем такие функции: $f(x)=-2x+1$ (при $0<x<=0.5$) и $f(x)=2x-3+1/x$ (при $0.5<x<1$), $g(x)=0$. Если $g(x)=0$, то $b_n=0$.

Для построения графика поверхности – решения задачи ограничимся первыми тремя корнями уравнения $BesselJ(1,\lambda)=0$, что, конечно, дает большую погрешность. Выпишем эти корни из таблицы VII [2]: 3.8317060, 7.0155867, 10.1734681. Теперь вычислим коэффициенты ряда:

```
>a_11:=2/((BesselJ(0,3.8317060))^2*int(x*(-2*x+1)*
BesselJ(0,3.8317060*x),x=0..0.5)+int(x*(2*x-3+1/x)*
BesselJ(0,3.8317060*x),x=0.5..1));
>a_12:=2/((BesselJ(0,7.0155867))^2*int(x*(-2*x+1)*
BesselJ(0,7.0155867*x),x=0..0.5)+int(x*(2*x-3+1/x)*
```

```
BesselJ(0, 7.0155867*x),x=0.5..1);  
>a_13:=2/((BesselJ(0, 10.1734681))^2)*int(x*(-2*x+1)*  
BesselJ(0, 10.1734681*x),x=0..0.5)+int(x*(2*x-3+1/x)*  
BesselJ(0,10.1734681*x),x=0.5..1).
```

График поверхности построим с помощью команды:

```
>plot3d(0.4810319216*cos(3.8317060*t)*BesselJ(0,3.8317060*x)+  
0.4035770546*cos(7.0155867*t)*BesselJ(0,7.0155867*x) -  
0.08132189684*cos(10.1734681*t)*BesselJ(0,10.1734681*x),x=0..1, t=0..2).
```

В результате выполнения данной команды программа построит график поверхности, являющейся приближительным решением задачи.

Литература

1. Зайцева Н.В. Смешанная задача для одного В-гиперболического уравнения с интегральным условием первого рода // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 2. 2012. С. 39-50.
2. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. Ч. 2. М.: И.Л., 1949. – 220 с.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕЧЕТКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ В РАМКАХ CALS-ТЕХНОЛОГИИ

В. Р. КРИСТАЛИНСКИЙ¹, А.А. БЕРЕСТНЕВА²

Смоленский государственный университет,
e-mail: ¹kristvr@rambler.ru, ²Nastyaskorpion@mail.ru

УДК 330.46

Ключевые слова: *нечеткая логика, модернизация, CALS-технология.*

В докладе рассматривается построение нечеткой модели прогнозирования экономической эффективности выпуска продукции в рамках CALS –технологии.

Одной из современных концепций организации промышленного производства является так называемая CALS-технология (в русскоязычной литературе Информационная Поддержка процессов жизненного цикла Изделий (ИПИ)) (см. [1]). Основная идея этой технологии состоит в создании единой интегрированной базы данных, содержащей все сведения об изделии на протяжении всего жизненного цикла, начиная от разработки и заканчивая выводением из эксплуатации. Поскольку один и тот же вид изделий, как правило, многократно

модернизируется, то как один из элементов этой базы естественно хранить модель, описывающую влияние степени модернизации тех или иных элементов на стоимость модернизированного изделия, а также влияние изменений конъюнктуры рынка на экономическую эффективность выпуска модернизированного изделия.

После принятия решения об очередной модернизации из базы извлекается данная модель, и с помощью какой-либо системы, реализующей нечеткий вывод (MatLab или какой-либо другой), проводится исследование: в модель вводятся данные о различных вариантах модернизации изделия и выбирается тот вариант, который дает наибольшую отдачу: при максимальной степени модернизации минимальную стоимость производственного процесса и, следовательно, максимальную эффективность. Поскольку зависимость между степенью модернизации и стоимостью производства очень сложна и кроме модернизации на производственный процесс влияет еще большое число факторов, для формирования и развития указанной модели целесообразно, на наш взгляд, использовать математический аппарат нечеткой логики (см. [2]). Именно этот аппарат в наибольшей степени приближен к ходу рассуждений эксперта и позволяет наилучшим образом моделировать «расплывчатые» зависимости, подобные рассматриваемой в данной работе.

Как известно (см. [3]), основным элементом подобной модели (система нечеткого вывода) является база правил, описывающая связь между входными и выходными параметрами модели на языке, близком к естественному. Возникает вопрос о методах построения этой базы. Ранее в подобных случаях предлагалось использовать исключительно экспертные методы. Однако в настоящее время появилась возможность действовать по-иному: использовать при построении базы правил не только знания экспертов, но и информацию об аналогичных изделиях, получаемую из сети Internet или из других источников. Таким образом, мы можем сделать наши правила более обоснованными, что сделает предлагаемую нами методику более эффективной.

При построении базы правил нужно проанализировать все доступные данные о модернизации аналогичной продукции и о том, как модернизация ее элементов влияет на ее стоимость. Здесь нужно использовать методы обработки, характерные для работы с большими данными (Big Data). Одним из таких методов является технология машинного обучения (Machine Learning). Располагая данными о модернизации аналогичной продукции, мы можем загрузить их в модель и, «обучив» ее на имеющихся данных, получить картину реакции стоимости на модернизацию тех или иных элементов изделия. Затем эксперт на основании своего опыта и данных, полученных в ходе использования Machine Learning, построит нужную систему правил.

Именно эти правила и будут храниться в интегрированной базе данных об изделии.

Еще легче будет получить данные о влиянии рыночной конъюнктуры на рациональную цену изделия, поскольку информация такого рода об аналогичных изделиях может быть извлечена на основе анализа большого количества имеющихся в открытом доступе данных. База правил для второго этапа (формирования цены изделия и вообще стратегии его размещения на рынке) также будет помещена в интегрированную базу.

Использование данной методики в рамках CALS-технологии может оказаться значительно более эффективным, чем само по себе, поскольку при работе с единой базой данных мы легко сможем получить требуемую при планировании модернизации информацию (например, о наличии, стоимости и качестве требуемых для модернизации комплектующих), которая может быть использована при уточнении и реализации модели.

Литература

1. Судов Е.В., Левин А.И. Концепция развития CALS-технологий в промышленности России / НИЦ CALS-технологий «Прикладная логистика». М., 2002.
2. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.
3. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 736 с.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Р.Е. КРИСТАЛИНСКИЙ
ВА ВПВО ВС РФ,
e-mail: kristalinskiyy-roman@rambler.ru

УДК 517.5

Ключевые слова: *математический анализ, системы компьютерной математики.*

В докладе рассматриваются возможности системы Wolfram Mathematica по повышению эффективности преподавания вузовского курса математического анализа.

Решение задачи прикладной математики обычно состоит из двух частей:

- 1) построения расчётной формулы;
- 2) вычислений по расчётной формуле.

Построение расчётной формулы может осуществлять только сам исследователь. Вычисления по расчётной формуле обычно выполняются при помощи средств компьютерной математики.

Применение систем компьютерной математики (СКМ) существенно расширяет наши возможности при выполнении вычислений. Многие операции, которые раньше выполнялись вручную, сейчас выполняет компьютер. Например, вычисление производных, вычисление интегралов, решение дифференциальных уравнений, построение графиков функций, вычисление сумм числовых рядов. В последние годы круг задач, которые решаются с помощью СКМ, существенно расширился. Естественно, для использования тех или иных СКМ мы должны хорошо знать возможности используемой системы.

Рассмотрим применение системы Mathematica для решения некоторых задач математического анализа.

Задача 1. Дана функция

$$f[x]=x^3\text{Sin}[x] + \text{Exp}[-x] - \text{Exp}[-x^2] + \int_0^x \frac{\text{Exp}[-t]}{1 + \text{Sin}[t]^4} dt.$$

На отрезке $[0, 10]$ найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума рассматриваемой функции и построить её график.

Решение. Находим производную рассматриваемой функции и строим её график.

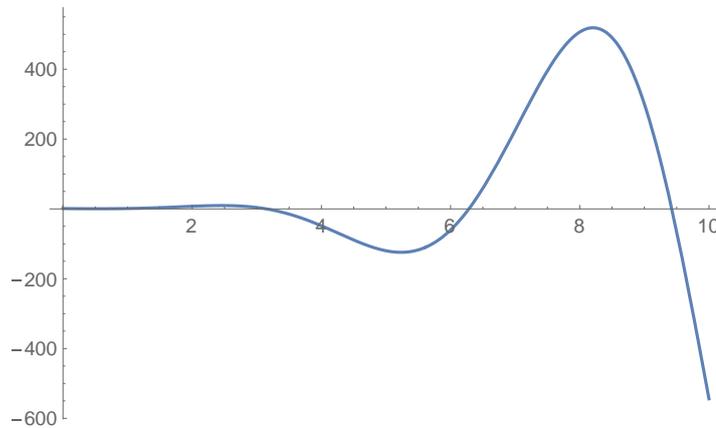
$$f1[x_] = D[x^3\text{Sin}[x] + \text{Exp}[-x] - \text{Exp}[-x^2],x] + \frac{\text{Exp}[-x]}{1 + \text{Sin}[x]^4};$$

`Plot[f1[x],{x,0,10}].`

Находим координаты точек пересечения графика с осью абсцисс.

```
r1=FindRoot[f1[x]==0,{x,2.6}]
{x->3.14436}
x1=Rationalize[x/.r1[[1]],0.0001]
283/90
r2=FindRoot[f1[x]==0,{x,6}]
{x->6.28317}
x2=Rationalize[x/.r2[[1]],0.0001]
710/113
r3=FindRoot[f1[x]==0,{x,10}]
{x->9.42478}
```

$x3 = \text{Rationalize}[x/.r3[[1]], 0.0001]$
 1065/113



На промежутке $[0, x_1]$ производная положительна, функция возрастает; на промежутке $[x_1, x_2]$ – производная отрицательна, функция убывает; на промежутке $[x_2, x_3]$ – производная отрицательна, функция убывает.

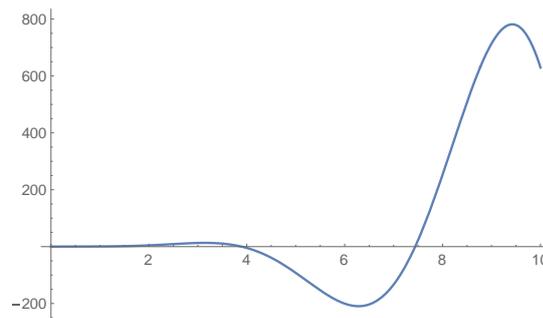
x_1 – точка максимума, x_2 – точка минимума, x_3 – точка максимума.

Построим график функции $f[x]$. Эта функция является первообразной для функции $f1[x]$ и в точке 0 равна нулю. Следовательно, она является решением дифференциального уравнения

$$y'[x] == f1[x], y[0] == 0.$$

$y1 = \text{NDSolveValue}[\{y'[x] == f1[x], y[0] == 0\}, y, \{x, 0, 10\}];$

$\text{Plot}[y1[x], \{x, 0, 10\}]$



В курсах математического анализа обычно доказывается существование некоторых объектов, но не приводится конкретных алгоритмов их построения. Например, доказывается теорема: *если функция монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$, $c = f(a)$, $d = f(b)$, то на отрезке $[c, d]$ определена функция, обратная заданной*. Примеры построения такой функции примитивны. Используя средства компьютерной математики, решить задачу о построении функции, обратной данной, удаётся в общих случаях.

Задача 2. На отрезке $[0, 4]$ задана функция

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2 e^{-t}}{\sqrt{1+t^4}} dt.$$

Так как на отрезке $[0, 4]$ подынтегральная функция положительна, то функция $f(x)$ на этом отрезке монотонно возрастает. Требуется найти обратную функцию и одну из её первообразных.

Решение. Вводим заданную функцию.

$$f[x_] = \int_0^x \frac{t^2 \text{Exp}[-t]}{\sqrt{1+t^4}} dt.$$

Легко видеть, что эта функция является решением следующего дифференциального уравнения:

$$y'[x] = \frac{x^2 \text{Exp}[-x]}{\sqrt{1+x^4}}$$

с начальным условием

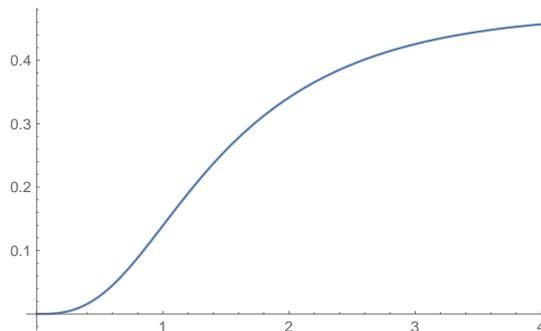
$$y[0] = 0.$$

Находим это решение на отрезке $[0, 4]$.

$$y1 = \text{NDSolveValue}[\{y'[x] = \frac{x^2 \text{Exp}[-x]}{\sqrt{1+x^4}}, y[0] == 0\}, y, \{x, 0, 4\}].$$

Строим график полученного решения.

`Plot [y1[x], {x, 0, 4}]`



Строим функцию, обратную к заданной.

`h=4/100;`

`T1=Table[k h, {h,0,100}];`

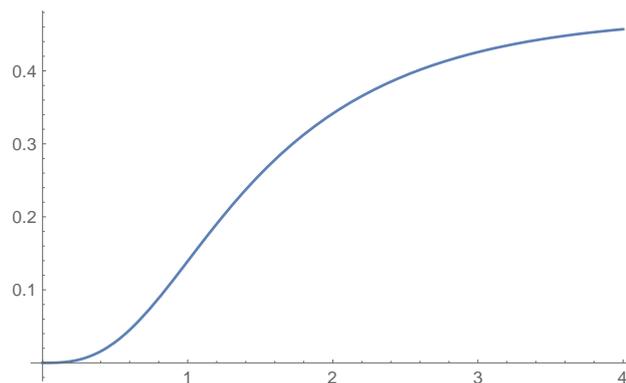
`T2=Table[y1[k h], {k,0,100}];`

`T=Table[{T2[[k]], T1[[k]]}, {k,1,101}];`

`x1=Interpolation[T].`

Строим график обратной функции.

`Plot[x1[y], {y,0,Max[T2]}]`



Находим первообразную обратной функции.

```
z1=NDSolveValue[{z'[y]==x1[y],z[0]==0},z,{y,0,Max[T2]};
z1[0.12]
35.8947
```

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ УРОВЕНЬ ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ В СУБЪЕКТАХ ЦФО РФ

Р.С. КУЗЕНКОВ

Смоленский государственный университет
e-mail: alphasromeo7@mail.ru

УДК 519.25

Ключевые слова: *уровень жизни населения, прикладная статистика, факторный анализ.*

В статье представлен анализ основных социально-экономических показателей, оказывающих влияние на уровень жизни населения. Выделены факторы, позволяющие установить структуру данных и взаимосвязь рассматриваемых показателей.

Социальные и экономические объекты обычно характеризуются довольно обширным количеством параметров, образующих многомерные векторы. Важнейшее значение в социально-экономических исследованиях имеют задачи изучения взаимосвязей между компонентами этих векторов, и эти взаимосвязи требуется выявить, основываясь на небольшом количестве наблюдений. Данное исследование посвящено изучению взаимосвязи показателей уровня жизни населения в ЦФО РФ.

Для достижения целей исследования была проведена процедура факторного анализа в пакете статистических программ STATISTICA.

Для определения оптимального количества факторов использовался критерий «каменистой осыпи», предложенный Кэттелем. В соответствии с этим критерием было принято решение оставить 3 фактора (рис. 1).

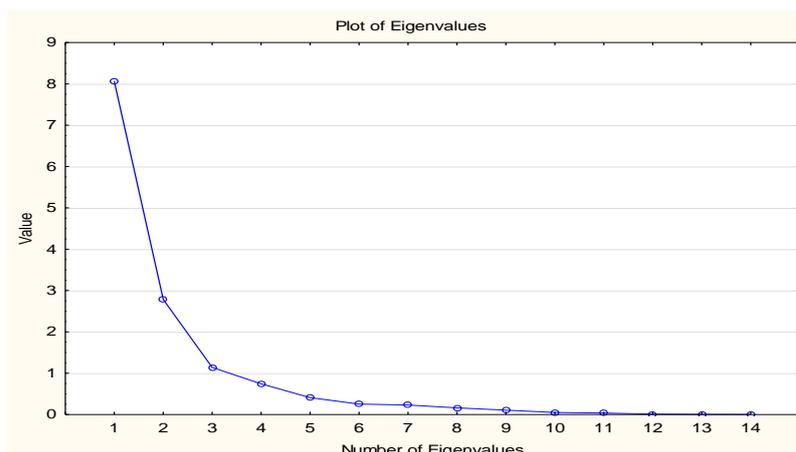


Рис. 1. График собственных значений

Полученные главные компоненты на 85% объясняют вариацию исходного признакового пространства (табл. 1).

Для наилучшей интерпретации факторов было произведен поворот осей методом варимакс.

По матрице факторных нагрузок (рис. 2) были сделаны следующие выводы.

В фактор 1 с нагрузкой более 57% вошли показатели среднедушевых денежных доходов населения, среднемесячной заработной платы, размера пенсий, площади жилых помещений, а также:

- текущие затраты на охрану окружающей среды, млн. руб.;
- коэффициент естественного прироста населения, %;
- уровень занятости населения, %;
- уровень безработицы, %;
- величина прожиточного минимума, руб./мес.;
- объем работ, выполненных по виду экономической деятельности «Строительство».

Показатель	Фактор1	Фактор2	Фактор3
X1	0,969532	0,147684	0,005677
X2	0,973327	-0,005701	0,081966
X3	0,818832	-0,308113	0,403570
X4	-0,687540	0,225643	0,580809
X5	0,097386	0,136840	0,816518
X6	0,869753	0,268124	0,301792
X7	0,878710	0,070371	0,052384
X8	0,813827	-0,141096	0,107399
X9	-0,901057	-0,166550	-0,051223
X11	0,882415	-0,230956	-0,095762
X12	0,378432	0,627844	0,503381
X13	-0,250987	0,903353	-0,006774
X14	0,127103	0,914277	0,187307
X15	0,973689	0,073027	-0,015444

Рис. 2. Факторные нагрузки по исходным переменным

Исходя из природы данных показателей, первый фактор назовем «Социально-экономическое развитие региона».

Второй фактор составили показатели, объясняющие 24% дисперсии:

- потребление мяса и мясопродуктов на душу населения, кг;
- потребление молока и молочных продуктов на душу населения, кг;
- потребление сахара, кг.

Второй фактор был назван «Уровень потребления продовольствия».

В третий фактор попал один показатель – это число легковых автомобилей на 1000 человек.

Таким образом, третий фактор – «Обеспеченность транспортом».

ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНО-ПЕРЕСАДОЧНЫХ УЗЛОВ

М.Г. ЛЫСИКОВ

ОАО «НИИАС», г. Москва

e-mail: m.lysikov@vniias.ru

УДК 004.942+656.2

Ключевые слова: *имитационное моделирование, транспортно-пересадочный узел, расписание.*

В докладе представлены основные системные предпосылки построения моделей транспортно-пересадочных узлов в среде имитационного моделирования «AnyLogic», дан анализ ключевых результатов.

Пассажирские перевозки своей целью имеют перемещение пассажира из точки отправления в точку прибытия за время, с качеством услуг и стоимостью, удовлетворяющими его. При этом во многих случаях пассажир перемещается различными видами транспорта. Комфорт пассажира при этом зависит не только от уровня сервиса при перемещении в транспорте, но и в значительной мере от удовлетворенности услугами на транспортно-пересадочных узлах.

Под транспортно-пересадочным узлом (ТПУ) мы понимаем комплекс инфраструктурных сооружений для обслуживания двух и более видов пассажирского транспорта и технологических (бизнес) цепочек, организованных для пассажиров.

В каждом транспортно-пересадочном узле несколько стоков и источников перемещаемых объектов (пассажиров). Каждый источник (сток) имеет интенсивность, меняющуюся во времени. Интенсивность

поступления объектов может иметь расписание. Расписание может иметь разную степень устойчивости. Например, расписание отправления и прибытия поездов более устойчивое, чем самолетов или автобусов.

Всех пассажиров можно разделить по классам в зависимости от характеристик их аттракторов (точек притяжения на маршруте проследования через ТПУ (это может быть, например, туалет либо бар)).

Целью исследования транспортно-пересадочного узла в нашем случае является определение предельных пассажиропотоков для него, взаимоувязка расписаний различных видов транспорта, определение «узких мест» инфраструктуры и выдача рекомендаций по их устранению. При этом решаются задачи, представленные на рисунке 1.



Рис. 1. Схема процесса исследования

Следует отметить, что подобные задачи нередки в области управления эксплуатацией различных видов транспорта. Чаще всего в настоящее время для изучения таких систем используется имитационное моделирование [1– 4].

Впервые ОАО «НИИАС» эта задача решалась по требованиям экспертов Международного олимпийского комитета для пяти транспортно-пересадочных узлов на период XXII зимних Олимпийских игр в Сочи.

В настоящее время перед нами поставлена задача исследования пассажиропотоков 31 остановочного пункта Московского центрального кольца в связи с его увеличением.

Для каждого ТПУ были собраны первичные корреспонденции пассажиропотоков между источниками (двери лифтов, павильонов, оголовки тоннелей и пр.) и стоками (двери электропоездов) как в прямом, так и в обратном направлении.

Далее формировалась имитационная модель в среде «AnyLogic Professional v. 7.3.6.» и формировались сценарии серий экспериментов.

Сценарии отличались объемами пассажиропотоков, составностью электропоездов и величиной межпоездного интервала (времени от момента отправления одного поезда до отправления следующего по тому же пути).

В целом по результатам моделирования большого количества остановочных пунктов был получен интересный вывод: при уменьшении интервала между поездами для выдерживания строгого заранее положенного расписания требуется увеличение стоянки на отдельных пунктах, что приводит к увеличению времени хода и, как следствие, увеличению количества составов в обороте. Если же стоянки оставить минимальными, то при интервале менее 4 минут выдержать расписание без сбоев практически невозможно. В этом случае необходимо переходить на вариант работы метро (отсутствие строгого расписания, целевая функция управления движением – соблюдение интервала между поездами).

Литература

1. Лысиков М.Г., Степанов А.В. Автоматизированная система расчета параметров работы станций графоаналитическим методом PlanGraph 2007: учеб. пособие. М.: МИИТ. – 2010.

2. Тарасов А.С., Лысиков М.Г., Апатцев В.И. Существующие подходы к моделированию функционирования железнодорожных станций // Современные методы, принципы и системы автоматизации управления на транспорте: сборник материалов Международной научно-практической конференции. М.: МГУПС, 2016. С. 205–222.

3. Апатцев В.И., Лысиков М.Г., Ольшанский А.М. О новом подходе к разработке графика движения поездов на сети железных дорог // Современные подходы к управлению на транспорте и в логистике: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. М.: МГУПС, 2016. С. 6–8.

4. Апатцев В.И., Лысиков М.Г., Ольшанский А.М. Особенности применения нейронных сетей при моделировании перевозочного процесса // Наука и техника транспорта. – 2014. №. 3. С. 52– 55.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ КРИВЫХ В СКМ MAPLE

А.М. НИГМЕДЗЯНОВА, Л.Р. АХМАДИЕВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

e-mail: aigmani23@rambler.ru; _leila.ahmadieva@mail.ru

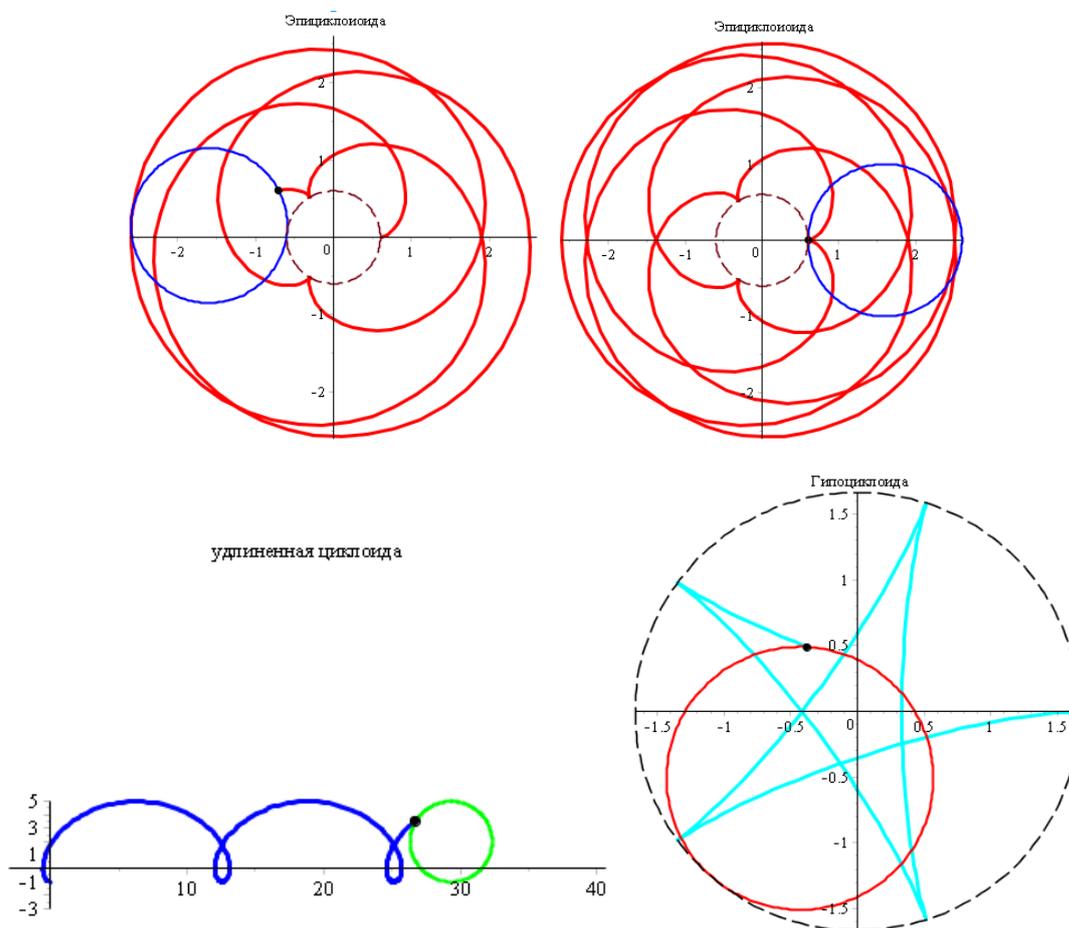
УДК 004.94, 514.7

Ключевые слова: *математическое моделирование, системы компьютерной математики, дифференциальная геометрия, замечательные кривые, визуализация построения кривых по их механическим свойствам.*

Работа посвящена визуализации построения графиков замечательных кривых по их механическим свойствам в СКМ Maple.

Замечательные кривые на протяжении многих лет являлись предметом изучения для ученых математиков. Их исследование продолжается и в настоящее время [1]. Особый интерес вызывают механические свойства данных кривых, с которыми связан ряд значительных теоретических открытий. Механические свойства этих кривых нашли практическое применение в различных устройствах и механизмах, которые используются в жизни человека.

В век информационных технологий для наглядного представления и усвоения данной темы необходима визуализация построения графиков замечательных кривых.



В статьях одного из авторов [2-9] построено немало моделей, помогающих наглядно визуализировать ряд непростых задач, связанных с преподаванием высшей математики. В данной работе авторы написали процедуры программ, позволяющие визуализировать построение замечательных кривых по их механическим свойствам, то есть с учетом их механического смысла, что делает материал доступным и

интересным для обучающихся. Данная разработка может использоваться при изучении соответствующей темы в разделе «Дифференциальная геометрия кривых» (студентами вузов), а также может быть применен на элективных курсах в школах.

Визуализация графического построения данных кривых осуществлялась в СКМ MAPLE с помощью процедуры **proc()** и таких пакетов, как **plots**, **plottools**. Вид кривых меняется при изменении соответствующих параметров. Написание программ вытекает из определения данных кривых и связано с их механическим смыслом.

Подобные анимации построены для ряда других замечательных кривых: строфоида, циссоида Диоклеса, верзьера Аньези и т.д.

Литература

1. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения: справочное руководство. М.: Изд-во физ.-мат.лит., 1960. 293 с.

2. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация задач математической физики // Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН-2012: материалы конференции и труды семинара. Казань, 2012. С. 127–121.

3. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построений сечений многогранников // Международный научный семинар «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии» и Российская школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений». Казань, 2013. С. 151–157.

4. Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построения точки по ее координатам на проективной прямой // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 36–38.

5. Нигмедзянова А.М.. Динамическая визуализация построения точки в пространстве по ее проективным координатам // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики». Казань: Изд-во «Фолиант», 2014. С. 236–239.

6. Нигмедзянова А.М. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16. С. 30–32.

7. Нигмедзянова А.М. Классификация поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple // Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН-2015». Казань: КГУ, 2015. С. 160–162.

8. Нигмедзянова А.М. Приведение поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ Maple // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 17-19.

9. Нигмедзянова А.М. Оснащенная визуализация приведения поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью метода инвариантов в СКМ

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ЧАСТИЦ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

А.В. ПОДороГА

ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: anastasiapodoroga@gmail.com

УДК 517.956.35+519.63

Ключевые слова: *квазилинейное уравнение дорожного движения, численные методы, метод частиц.*

Представлена компьютерная программа, реализующая численный метод частиц для квазилинейного уравнения дорожного движения.

При математическом моделировании дорожного движения часто используют макроскопический подход, в рамках которого транспортный поток трактуют как специфический поток сплошной среды со своими особыми свойствами (см. [1]). Основными характеристиками потока в точке x в момент времени t считают его плотность $\rho = \rho(x, t)$, скорость $v = v(x, t)$ и интенсивность $q = q(x, t)$. Величины ρ , v , q связаны стандартной формулой потока

$$q(x, t) = \rho(x, t) v(x, t).$$

Специфику транспортных задач выражает закон безопасного движения: при увеличении плотности потока машин водители снижают скорость, чтобы избежать аварийных ситуаций. Таким образом, скорость является ограниченной, монотонно убывающей функцией плотности

$$v = V(\rho) \downarrow, \quad 0 < \rho \leq \rho_{\max}, \quad V(0+) = v_{\max}, \quad V(\rho_{\max}) = 0.$$

С учетом формулы потока получаем зависимость интенсивности от плотности, называемую фундаментальной диаграммой

$$q = Q(\rho) = \rho V(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, \quad Q(0) = Q(\rho_{\max}) = 0.$$

Закон сохранения автомобилей, как аналог уравнения неразрывности, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V(\rho))}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t).$$

Это квазилинейное уравнение дорожного движения, представляющее главный интерес при моделировании. Для его решений $\rho(x, t)$ характерно возникновение сильных разрывов даже при выборе гладких

начальных условий $\rho(x,0)$. Известные разностные схемы для квазилинейных уравнений (см., например, [2, с. 527]) часто искажают форму решений, давая в точках сильных разрывов особые нарастающие «осцилляции».

В докладе будет представлен численный *метод частиц* (см. [3]), модернизированный специально под транспортную задачу. Его применение позволяет весьма точно восстанавливать решения квазилинейных гиперболических уравнений, в том числе и при появлении сильных разрывов.

Основная идея метода частиц заключается в том, чтобы представить эволюцию плотности $\rho(x,t)$ в виде движения набора условных *частиц*

$$P_1, P_2, \dots, P_N,$$

упорядоченно расположенных на оси координат. Каждая частица P_k представляет собой объект, наделенный координатой x_k , массой m_k и протяженностью Δ_k . Высота частицы соответствует значению плотности ρ_k , существующей в точке x_k в текущий момент времени t . Справедлива формула

$$\rho_k = \frac{m_k}{\Delta_k}.$$

Таким образом, зная параметры частиц в момент времени t , можно построить сеточную функцию $\rho_k = \rho_k(x_k, t)$.

Для изучаемого квазилинейного уравнения скорость движения частицы регулируется правилом (ср. с [3])

$$x'_k(t) = V(\rho(x_k(t), t)).$$

Координата частицы x_k отождествляется с координатой ее левого края (при том, что движение частиц происходит слева направо).

Опишем теперь формальный алгоритм метода частиц, использованный в нашей программе. Пусть состояние k -й частицы на j -й итерации выражается параметрами

$$x_k^j, m_k, \rho_k^j,$$

с никогда не меняемым значением m_k . Дальнейшая эволюция происходит так.

1. В зависимости от состояния набора $P_1^j, P_2^j, \dots, P_N^j$ выбирают шаг по времени τ на текущей итерации. Он должен быть таким, чтобы не возникало слишком сильных разрывов и наездов частиц.
2. Осуществляется сдвиг частиц по формуле $x_k^{j+1} = x_k^j + \tau V(\rho_k^j)$. Образуется массив новых координат для всех частиц.

3. Протяженности частиц пересчитываются по формуле $\Delta_k^{j+1} = x_{k+1}^{j+1} - x_k^{j+1}$. Особо отслеживается неотрицательность получаемых значений.

4. Вычисляют новые плотности частиц

$$\rho_k^{j+1} = \frac{m_k}{\Delta_k^{j+1}}, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

5. После того, как все параметры набора $\Pi_1^{j+1}, \Pi_2^{j+1}, \dots, \Pi_N^{j+1}$ найдены, увеличиваем номер временного слоя на единицу, прибавляем величину τ к значению текущего времени и возвращаемся к шагу 1.

Чтобы обеспечить правильное построение решения, требуется выбирать значение τ из подходящего промежутка. Если брать τ слишком малым, то решение может неоправданно сглаживаться, а если брать τ слишком большим, то возможно появление отдельных «перехлестов» частиц. На каждой итерации желательно выбирать τ , проводя проверку двух условий: а) если $\rho_k^j < \rho_{k+1}^j$, то $\rho_k^{j+1} \leq \rho_{k+1}^{j+1}$; б) если $\rho_k^j > \rho_{k+1}^j$, то $\rho_k^{j+1} \geq \rho_{k+1}^{j+1}$.

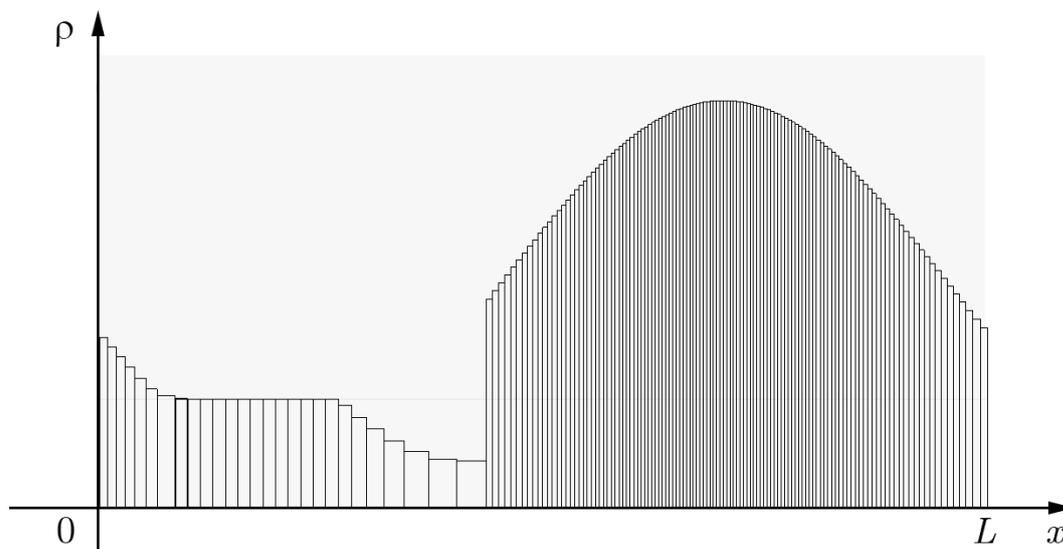


Рис. 1. Скриншот программы, реализующий метод частиц

На рисунке 1 показан скриншот программы, реализующей метод частиц для квазилинейного уравнения дорожного движения. Основная зависимость $V(\rho)$ взята в соответствии с моделью Нагеля-Шрекенберга (см. [4; 5]). В качестве краевого условия задано условие периодичности по x с периодом $L > 0$. Для такого случая характерна стабилизация решений с течением времени в виде прямой или обратной волны (см. [6]), что и подтверждается численными экспериментами. Дополнительное удобство состоит в том, что при изменении модели

достаточно заменить лишь функцию $V(\rho)$, не внося других изменений в «тело» программы. Результаты расчетов хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями.

Автор выражает благодарность С. В. Богомолу за указание на метод частиц и консультации, а также И. В. Тихонову и Г. А. Парафейникову за полезные обсуждения.

Литература

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие/ А.В. Гасников [и др.] // под ред. А.В. Гасникова Изд. 2-е. М.: МЦНМО, 2013.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.
3. Богомол С. В., Замараева А. А., Карабелли Х., Кузнецов К. В. Консервативный метод частиц для квазилинейного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 9. С. 1602–1607.
4. Nagel K, Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic // Journal de Physique I France. 1992. Vol. 2. № 12. P. 2221–2229.
5. Подорога А. В., Тихонов И. В. Квазилинейное уравнение дорожного движения и компьютерное моделирование // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015: материалы научной конференции, 13-17 апреля 2015 г. СПб: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 209–213.
6. Подорога А. В., Тихонов И. В. О предельных состояниях замкнутых транспортных потоков на кольцевой автодороге // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016: материалы научной конференции, 11-15 апреля 2016 г. СПб: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2016. С. 222–228.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Е.А. РОВБА¹, К.А. СМОТРИЦКИЙ²

Гродненский государственный университет, г. Гродно, Беларусь
e-mail: ¹rovba.ea@gmail.com; ²k_smotritski@mail.ru

УДК 517.5

Ключевые слова: *рациональная аппроксимация, квадратурные формулы, дроби Чебышёва – Маркова, MathCad, Maple.*

В докладе рассматриваются рациональные квадратурные формулы интерполяционного типа на отрезке. Описываются особенности применения указанных формул для вычисления интегралов в системах компьютерной математики.

Одним из важнейших направлений в развитии теории приближений является построение квадратурных формул, в частности интерполяционных. В полиномиальном случае этот вопрос достаточно хорошо изучен (см., например, [1]). С точки зрения вычислительной математики рациональные функции являются немногим более сложным аппаратом, чем полиномы. Поэтому естественным образом возникает следующий вопрос. Можно ли за счет перехода к рациональному случаю добиться существенного выигрыша в качестве построенных формул? Положительный ответ на это вопрос дан в работах многих авторов [2; 3]. Приведем примеры построения таких квадратурных формул.

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условиям: 1) $a_1 = 0$; 2) если $a_k \in \mathbf{R}$, то $|a_k| < 1$; 3) если $a_k \in \mathbf{C}$, то среди указанных чисел есть такое число a_l , что $a_l = \overline{a_k}$.

Рассмотрим синус-дробь Чебышёва–Маркова:

$$N_n(x) = \frac{\sin \mu_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1; 1],$$

где $\mu_n(x) = \sum_{k=1}^n \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}$, причем

$$\mu_n'(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Функция N_n имеет на отрезке $[-1; 1]$ $n-1$ различных вещественных нулей:

$$-1 < x_{n-1} < x_{n-2} < \dots < x_1 < 1, \quad N_n(x_k) = 0, \quad \mu_n(x_k) = k\pi, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Если $f(x)$ – произвольная непрерывная на отрезке $[-1; 1]$ функция, то, используя рациональную интерполяционную функцию Лагранжа с узлами в точках x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , в работе [2] построена следующая квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx \pi \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-x_k^2}{\lambda_n(x_k)} f(x_k).$$

Если же кроме чисел x_1, x_2, \dots, x_{n-1} использовать еще концы отрезка интегрирования $x_0 = 1$, $x_n = -1$, то соответствующая квадратурная формула будет иметь вид [4]

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \pi \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\lambda_n(x_k)},$$

где два штриха после знака суммы означают, что первое и последнее слагаемое следует разделить на 2.

Естественным образом возникает вопрос о применении подобных квадратурных формул для вычисления интегралов. Для этого использовались системы компьютерной математики MathCad и Maple.

Следует заметить, если параметры $\{a_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяют лишь вышеприведенным условиям, то вычисление нулей $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ синус-дробей Чебышёва – Маркова представляет собой отдельную, довольно трудоемкую численную задачу. Это факт существенным образом замедляет вычисления с помощью рассматриваемых квадратурных формул. Однако можно применить следующий подход. В работах многих авторов описаны достаточно широкие классы непрерывных функций, отражающих особенности рациональной аппроксимации. Кроме того, указаны выборы параметров (в настоящей работе они обозначены $\{a_k\}_{k=1}^n$), определяющих приближающие функции. Считая параметры $\{a_k\}_{k=1}^n$ известными, можно вычислить узлы интерполирования $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$, что, в свою очередь, позволяет эффективно применять построенные квадратурные формулы для любых функций из рассматриваемых классов.

С другой стороны, накладывая на параметры $\{a_k\}_{k=1}^n$ дополнительные условия, можно найти аналитическое представление узлов $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$. В таких случаях время, затрачиваемое на вычисление интегралов, значительно снижается, а эффективность соответствующих квадратурных формул остается достаточно высокой.

Литература

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
2. Ровба Е.А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно: ГрГУ, 2001.
3. Deckers K., Bultheel A., Perdomo-Pio F. Rational Gauss-Radau and Szego-Lobatto quadrature on the interval and the unit circle respectively // *Jaen J. Approx.*, 2011. 3(1), P. 15–66.
4. Ровба Е.А. Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышёва – Маркова // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 5. С. 11–15.

РЕАЛИЗАЦИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫБОРА ОБЪЕКТА НЕДВИЖИМОСТИ МЕТОДАМИ НЕЧЕТКОЙ МАТЕМАТИКИ В ПАКЕТЕ MATLAB

А.В. РУБЦОВА ¹, В.Р. КРИСТАЛИНСКИЙ ²

Смоленский государственный университет
e-mail: ¹409223@gmail.com; ²kristvr@rambler.ru

УДК 004.42

Ключевые слова: *нечеткая математика, прогнозирование, система нечеткого вывода, пакет MatLab.*

В докладе обсуждается реализация решения задачи прогнозирования методами нечеткой математики. Представлен пример системы нечеткого вывода, осуществляющей автоматическое консультирование покупателей и экспертов недвижимости. Описано тестирование системы нечеткого вывода в системе MatLab.

Нечеткое моделирование в среде MATLAB осуществляется с использованием пакета расширения Fuzzy Logic Toolbox, в котором реализованы десятки функций нечёткой логики и нечёткого вывода. Основную часть окна системы MATLAB занимает окно команд, которое предназначено для взаимодействия с системой в режиме командной строки. Однако следует признать, что с каждой новой версией увеличивается количество специальных графических средств, позволяющих реализовывать интерактивное взаимодействие пользователя с системой в более удобной форме.

При записи правил в форме текста для создания законченных предложений используются служебные слова if, then, is, AND, OR и т.д. При записи правил в символической форме эти служебные слова заменяются символами соответствующих операций. Например, правило “If (A is A) and (B is B) then (C is C)” преобразуется к виду:

“A == A) & (B == B) => ((C is C))”.

Полученные после изменения значения входных переменных непосредственно отображаются в верхней части прямоугольников после имени входных переменных и в поле ввода с меткой Input. Более того, система MatLab реагирует на каждое изменение значения отдельной входной переменной выполнением процедуры нечёткого вывода, получением и отображением результирующих значений выходных переменных.

В рассматриваемом проекте предлагается выбор квартиры в районах: Ленинский, Промышленный и Заднепровский. Ключевыми параметрами являются следующие:

- 1) наличие газа;
- 2) наличие отдельного санузла;
- 3) наличие лифта;
- 4) наличие индивидуального отопления;
- 5) наличие свободной автопарковки;
- 6) наличие развитой инфраструктуры;
- 7) наличие остановки автотранспорта.

Вводимые значения клиентом (покупателем) программой трактуются следующим образом (при выборе в Ленинском районе): ЕСЛИ НАЛИЧИЕ ГАЗА высокое; НАЛИЧИЕ СВОБОДНОЙ ПАРКОВКИ среднее; НАЛИЧИЕ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ОТОПЛЕНИЯ, ТО РЕКОМЕНДАЦИЯ средняя.

Клиент, изменяя предпочтительные параметры выбора жилья, может формировать полнейшее представление о рынке на момент времени. Графическая интерпретация позволяет упростить работу эксперта на подбор максимально эффективного числа вариантов объектов недвижимости для клиента. Данное представление формально дает возможность как для клиента, так и для эксперта выполнять поиск жилья в более сжатые временные рамки.

Литература

1. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 736 с.

ТРЕХКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ В СИСТЕМЕ MATHCAD

А.Г. СУХАНОВА

Смоленский государственный университет
e-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru

УДК 519.688

Ключевые слова: нечеткие множества, трехкритериальная оптимизация портфеля ценных бумаг, система нечеткого вывода, ликвидность портфеля.

Разработана экспертная система нечеткого вывода для проведения трехкритериальной оптимизации портфеля ценных бумаг. Для построения математических моделей была использована система Mathcad.

Применение теории нечетких множеств позволяет решать многие задачи, что сделано, в частности, в работах [1; 2].

В данной работе автором была проведена трехкритериальная оптимизация портфеля ценных бумаг в результате расширения созданной экспертной системы нечеткого вывода. В качестве инструментальной среды разработки использована система Mathcad. Разработанная ранее автором экспертная система двухкритериальной оптимизации портфеля ценных бумаг представлена в [3].

В качестве выходного параметра системы нечеткого вывода рассмотрена нечеткая лингвистическая переменная (ЛП) «Портфель ценных бумаг». В качестве входных параметров выбраны три нечеткие лингвистические переменные: «Доходность портфеля», «Риск портфеля», «Ликвидность портфеля».

Формулы для расчета ликвидности ценных бумаг приведены в [4].

$$I_i = \frac{F_{i1}}{F_1^{max}} + \frac{F_{i2}}{F_2^{max}} + \frac{F_{i3}}{F_3^{max}} + \frac{F_{i4}}{F_4^{max}}, \quad (1)$$

где i – номер ценной бумаги;

F_{i1} – количество торговых дней, в которые заключались сделки с i -ой ценной бумагой в течение отчетного периода;

F_{i2} – количество сделок с i -ой ценной бумагой в течение отчетного периода;

F_{i3} – объем торгов по i -ой ценной бумаге в течение отчетного периода;

F_{i4} – количество участников организованного фондового рынка, заключивших сделки с i -ой ценной бумагой в течение отчетного периода;

$F_{1..4}$ – максимальные значения соответствующих показателей.

Экспертные знания о данной проблемной области могут быть представлены в виде следующих правил.

1) если доходность портфеля низкая, риск портфеля критический и ликвидность портфеля небольшая, то такой портфель не является инвестиционно привлекательным;

2) если доходность портфеля средняя, риск повышенный и ликвидность портфеля небольшая, то это соответствует низкому уровню инвестиционной привлекательности портфеля;

3) если доходность портфеля средняя, риск портфеля повышенный, ликвидность портфеля большая, то такой портфель имеет удовлетворительный уровень инвестиционной привлекательности;

4) если доходность портфеля средняя, риск портфеля минимальный, ликвидность портфеля большая, то это соответствует хорошему уровню инвестиционной привлекательности портфеля;

5) если доходность портфеля высокая, риск портфеля минимальный, ликвидность портфеля большая, то это соответствует высокому уровню инвестиционной привлекательности портфеля.

Незначительная ликвидность

$$y := 35..60$$

$$a := 25 \quad b := 30 \quad c := 40 \quad d := 45$$

$$Ft1(y) := 1 - \frac{b - y}{b - a} \quad Ft2(y) := 1 - \frac{y - c}{d - c}$$

$$BF(y) := \begin{cases} Ft1(y) & \text{if } a \leq y \leq b \\ 1 & \text{if } b \leq y \leq c \\ Ft2(y) & \text{if } c \leq y \leq d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

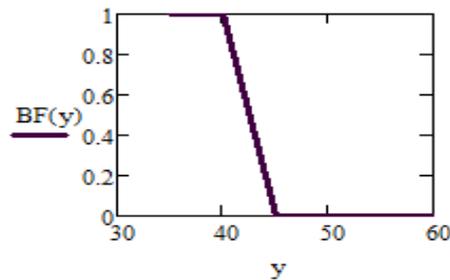


Рис. 1. Задание функций принадлежности для термов входной переменной «Ликвидность портфеля»

На рисунке 1 показано задание трапециевидных функций принадлежности для термов входной переменной «Ликвидность портфеля» в системе Mathcad.

Результат нечеткого вывода представлен на рисунках 2 и 3 при «четких значениях» входных переменных, равных 90, 40, 52.

$$x := 90 \quad y := 40 \quad k := 52$$

Вычисляем значения функций принадлежности, соответствующие значениям входных переменных

$$AF(x) = 0 \quad AY(x) = 0 \quad AZ(x) = 0.5 \quad BY(k) = 0.4 \quad BF(k) = 0$$

$$QF(y) = 0.4 \quad QY(y) = 0 \quad QZ(y) = 0$$

Находим уровни отсечения функции принадлежности выходной переменной

$$\alpha1 := \min(AF(x), QF(y), BF(k)) \quad \alpha1 = 0 \quad \alpha2 := \min(AY(x), QY(y), BF(k)) \quad \alpha2 = 0$$

$$\alpha3 := \min(AY(x), QY(y), BY(k)) \quad \alpha3 = 0 \quad \alpha4 := \min(AY(x), QZ(y), BY(k)) \quad \alpha4 = 0$$

$$\alpha5 := \min(AZ(x), QF(y), BY(k)) \quad \alpha5 = 0.4$$

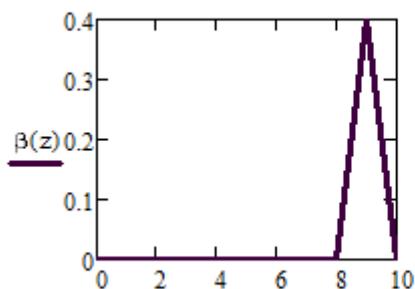
Находим объединение усеченных функций принадлежности $z := 0..10$

$$C1(z) := \min(\alpha1, CF(z)) \quad C2(z) := \min(\alpha2, CY(z)) \quad C3(z) := \min(\alpha3, CZ(z))$$

$$C4(z) := \min(\alpha4, CM(z)) \quad C5(z) := \min(\alpha5, CR(z))$$

$$\beta(z) := \max(C1(z), C2(z), C3(z), C4(z), C5(z))$$

Рис. 2. Результат нечеткого вывода при значениях входных переменных [90, 40, 52] в системе Mathcad



Находим "четкое" значение переменной вывода центроидным методом

$$z = \frac{0 \cdot \beta(0) + 10 \cdot \beta(10) + \sum_{i=1}^{10} (i \cdot \beta(i))}{\sum_{i=1}^{10} \beta(i)} = 9$$

Рис. 3. Результат нечеткого вывода при значениях входных переменных [90, 40, 52] в системе Mathcad (продолжение)

Из рисунке 3 видно, что если задать первой входной переменной значение 90, что будет соответствовать высокой доходности портфеля, второй переменной значение 40, что соответствует минимальному уровню риска портфеля ценных бумаг, третьей входной переменной значение 52, что соответствует значительной ликвидности портфеля, то мы получаем «четкое значение» выходной переменной, равное 9, что соответствует пятой группе инвестиционной привлекательности портфеля, то есть у такого портфеля высокий уровень инвестиционной привлекательности.

Разработанная экспертная система позволяет по введенным конкретным значениям входных показателей получать оценку портфеля ценных бумаг. Данную экспертную систему можно и дальше расширять, включая новые входные переменные для оптимизации портфеля ценных бумаг.

Литература

1. Ратушняк Г. Я., Суханова А. Г. Нечеткая оценка характера рынка ценных бумаг // Вестник МГИМО Университета. 2015. № 2 (41). С. 259–264.
2. Бабенко Е. Р., Абраменко О. С., Седова Н. А. Реализация в MATLAB элементов теории нечетких множеств // Международная научная школа «Парадигма». Лето-2015: сборник научных статей в 8 томах. 2015. С. 52–56.
3. Суханова А. Г. Нечетко-множественный подход к выбору инвестиционного портфеля в системе Mathcad // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ. 2015. Вып. 16. С. 38–41.

4. Соловьев П.Ю. Биржевой рынок производных финансовых инструментов: система управления рисками и ликвидностью: дис. ... канд. экон. наук. М., 2004. 287 с.

ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ЛИЦ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ ПРИ ПОМОЩИ МАШИНЫ ОПОРНЫХ ВЕКТОРОВ

М. И. ТИХОНОВА

МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва

e-mail: m_tikhonova94@mail.ru

УДК 519.710.24+519.68:681.513.7

Ключевые слова: *машинное обучение, детектирование лиц, машина опорных векторов, SVM, гистограмма ориентированных градиентов, метод скользящего окна.*

Обсуждаются современные подходы к задаче о детектировании лиц на изображениях. Подробно рассмотрен эффективный алгоритм, основанный на методах машинного обучения и компьютерного зрения.

Детектирование лиц на изображениях – весьма актуальная и достаточно хорошо изученная задача в области автоматической обработки изображений. В настоящей работе рассматривается детектор, основанный на технике скользящего окна, методе опорных векторов и гистограмме ориентированных градиентов. Основные использованные идеи подробно изложены в [1–3].

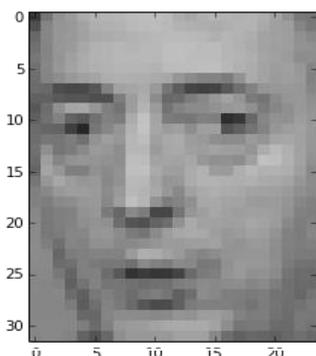


Рис. 1. Пример изображения лица из обучающей выборки.

Для обучения модели подбирались черно-белые фотографии размера 24 x 32 пикселя, для каждой из которых имелась метка, изображено ли на ней лицо или нет. Совокупность таких фотографий называют *обучающей выборкой*.

На первом этапе для каждого изображения из обучающей выборки вычислялись гистограммы ориентированных градиентов — так называемые *HOG-дескрипторы*. В основе данного метода лежит предположение о том, что по виду распределения градиентов интенсивности изображения можно достаточно точно определить наличие и форму имеющихся объектов. При описании изображения оно разбивается на фрагменты, в каждом из которых для внутренних точек вычисляются гистограммы направленных градиентов. После чего все гистограммы объединяются в одну общую гистограмму.

На следующем этапе полученные HOG-дескрипторы используются как признаки для обучения классификатора. В качестве классификатора была взята машина опорных векторов, известная в научной литературе как *support vector machine* (SVM). Это одна из наиболее популярных методологий машинного обучения по прецедентам, хорошо зарекомендовавшая себя в области компьютерного зрения и распознавания образов. Основная идея алгоритма – переход в пространство более высокой размерности и поиск оптимальной гиперплоскости с максимальным зазором в данном пространстве.

После обучения на тестовой выборке данный классификатор для каждого черно-белого изображения размера 24 x 32 пикселя по извлеченным из него HOG-дескрипторам находит вероятность того, что на данной фотографии изображено лицо.

Последний этап представляет собой непосредственное детектирование лиц на изображениях с помощью техники *скользящего окна*. А именно: для исходного изображения, переведенного в черно-белый формат, выделяются всевозможные фрагменты 24 x 32 пикселя (это и есть скользящее окно), а затем для каждого такого фрагмента подсчитываются HOG-дескрипторы и с помощью машины опорных векторов определяется вероятность того, что внутри фрагмента попало лицо. Затем из всех фрагментов, для которых значение вероятности получается больше некоторого порога, выбирается фрагмент с максимальной вероятностью, в котором, как считается, и будет находиться предсказанное алгоритмом изображение лица.

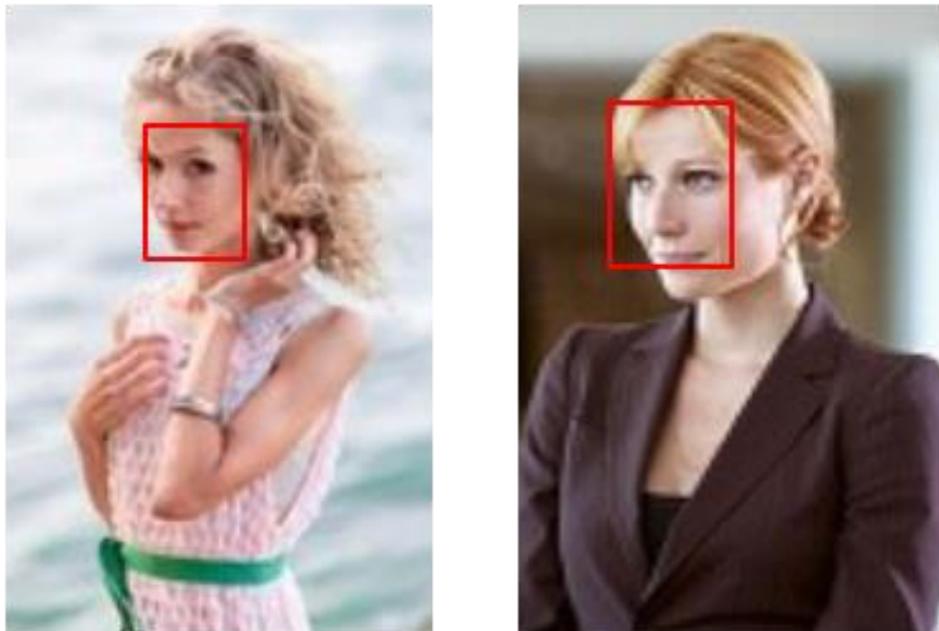


Рис. 2. Примеры детектирования лиц на фотографиях

Многочисленные эксперименты подтверждают высокую надежность работы алгоритма.

Литература

1. Вьюгин В. Математические основы машинного обучения и прогнозирования. М.: МЦМНО, 2014.
2. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2006.
3. Форсайт Д., Понс Ж. Компьютерное зрение. Современный подход. Вильямс, 2004.

АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ

О.В. ТИХОНОВА

Московский технологический университет МИРЭА, г. Москва
e-mail: o_tikhonova@inbox.ru

УДК 519.71+519.876+623. 4.01

Ключевые слова: *математическое моделирование, имитационное моделирование, сложные системы.*

При анализе сложных систем наряду с точными имитационными моделями целесообразно использовать также упрощенные модели. Последние создаются намного легче, а получаемые на их основе результаты часто бывают весьма точны.

Прежде чем использовать математическую модель для описания сложной системы, необходимо провести верификацию, то есть получить положительный ответ на вопрос о соответствии поведения сложной системы и ее математической модели. В более общем виде верификация означает подтверждение правильности отражения реальной действительности в выбранной математической модели. Только после такой проверки можно переносить результаты, полученные из численных экспериментов, на изучаемую сложную систему.

Имея в виду будущую верификацию, для большего соответствия модели и системы можно пойти по пути «полномасштабного» моделирования, имитируя все детали поведения системы, даже самые несущественные. Чем больше данных о реальной системе будет содержать модель, тем точнее будет степень соответствия. Существовавшие ранее ограничения на размерность модели из-за возможностей прежней вычислительной техники становятся сейчас менее актуальны. Однако опыт разработки имитационных моделей

показывает, что есть ограничения субъективного характера, заключенные в сложности создания «полномасштабных» моделей и трудностях с интерпретацией получаемых результатов. Предложенный автором метод многоуровневого моделирования [1], предполагающий создание иерархического ряда моделей и поэтапное исследование поведения системы переходом «от частного к общему» в какой-то мере решает проблему большой размерности. Но трудоемкость создания «многоуровневых» моделей тоже весьма велика.

В общем случае сложная система, представленная на рисунке 1, функционирует под влиянием управляющих или входных воздействий $X_{ВХ}$, которые считаем известными. Наряду с этим имеются еще и стохастические возмущения δ . К ним относятся внешние условия функционирования, а также разбросы внутренних параметров. Поскольку величины δ имеют случайный характер, то можно лишь выдвигать гипотезы об их статистических характеристиках. В результате функционирования системы формируются выходные данные $Y_{ВЫХ}$.

Интуитивно ясно, что при математическом моделировании сложной системы учет влияния всех возмущающих воздействий невозможен (да и не нужен). Сохранив необязательные параметры из δ , мы приходим к увеличению объема модели без улучшения качества получаемой информации. Отбросив же существенные параметры, можем вообще не добиться результата. Вопрос о выборе из множества всех возмущающих воздействий только те, что оказывают существенное влияние на систему, – это вопрос опыта и знаний разработчиков.

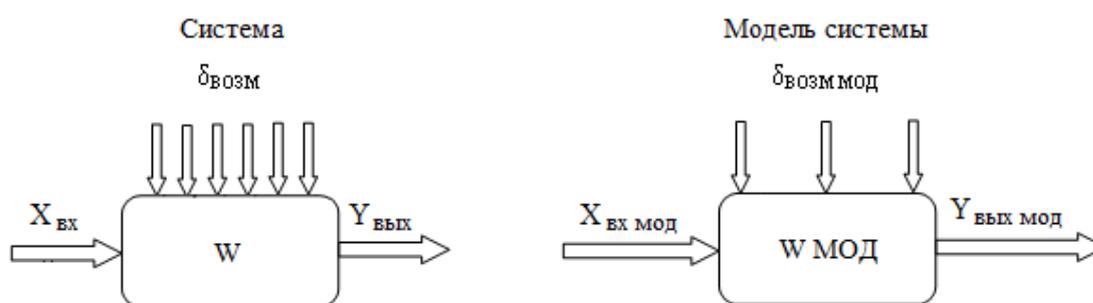


Рис. 1. Формальная схема системы и ее модели.

Проанализировав ряд математических моделей, применяемых при разработке сложных систем современной техники, автор пришла к парадоксальному на первый взгляд результату: основную информацию о поведении сложной системы, получаемую с помощью «полномасштабных» или «многоуровневых» моделей, можно извлекать из сильно облегченных моделей, учитывающих лишь главные особенности процесса. Проиллюстрируем данный тезис на примерах.

Поведение одного сложного динамического объекта и его системы управления исследовалось с помощью комплексной имитационной модели (КИМ). Последняя была создана коллективом разработчиков с максимально возможной на то время степенью детализации как самого объекта, так и тонкостей системы управления. Для примера: число строк кода в модели объекта достигало многих тысяч. Модель использовалась для оценки эффективности, то есть степени выполнения объектом поставленных задач. Предварительно была проделана работа по верификации модели.

Наряду с КИМ была разработана скромных размеров модель, в которой отражались лишь основные данные о системе. Модель динамического объекта представляла собой колебательное звено второго порядка. Первоначально модель создавалась в учебных целях [2], но найденные с ее помощью оценки эффективности неожиданно совпали с результатами, полученными на КИМ. Следует отметить, что сами результаты не были тривиальными, а действительно отражали внутренние свойства системы.

Еще один пример связан с разработкой модели системы массового обслуживания. Созданный комплексный имитационный моделирующий стенд (КИМС) этой системы [3] состоял из десятка соединенных в сеть компьютеров, моделирующих работу разных элементов системы. Более того, для имитации работы операторов были созданы специальные рабочие места, на которых в процессе моделирования работали реальные люди. Этот КИМС создавался группой квалифицированных разработчиков в течение многих месяцев, и одной из задач была оценка эффективности работы системы.

В то же время была создана (первоначально также с учебными целями) другая модель, в которой воспроизводились лишь основные характеристики работы элементов, а работу операторов имитировали просто случайными задержками [2]. Результаты, полученные на двух моделях, совпали.

Имеются и другие примеры. Упомянем здесь Simulink-модель системы цифровой передачи данных, а также модель передачи данных по специальному каналу связи [4].

Итак, можно утверждать, что результаты, полученные на «облегченных» или «прикидочных» моделях, полезно использовать на разных этапах изучения сложных систем. Трудоемкость разработки моделей уменьшается на порядки, а качество получаемой информации вполне сопоставимо с тем, что дают «полномасштабные» модели.

Не призывая отказываться от полноценного имитационного моделирования, отметим, что «облегченные» модели могут быть использованы не только для обучения, но и для практической деятельности при анализе сложных систем, особенно на начальных этапах исследования.

Литература

1. Тихонова О. В. Многоуровневое моделирование сложных технических систем // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIII международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2012. С. 216–217.

2. Тихонова О. В. Математическое моделирование радиоэлектронных систем: учебное пособие. М.: ОАО МНИИРЭ «Альтаир», 2009.

3. Коротков А. А. Построение частных моделей для использования в комплексной интерактивной математической имитационной модели // тезисы докладов на юбилейной научно-технич. конференции «Морские комплексы и системы»: Ч. 1. М.: ОАО МНИИРЭ «Альтаир», 2008. С. 36–37.

4. Пак А. А., Парамонов А. А. Моделирование системы передачи цифровой информации с применением технологий распараллеливания вычислений // Состояние, проблемы и перспективы создания корабельных информационно-управляющих комплексов: тезисы докладов. М.: ОАО «Концерн Моринформсистема «Агат», 2011. С. 103–107.

О НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ СООТНОШЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НУЛЕЙ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Д. Г. ЦВЕТКОВИЧ

МПГУ, г. Москва

e-mail: dianacve@inbox.ru

УДК 517.518.82+519.677

Ключевые слова: *полиномы Бернштейна, распределение нулей, компьютерная математика.*

Изучается задача о поведении нулей классических полиномов Бернштейна. Средствами компьютерной математики установлены численные соотношения в распределении нулей для кусочно линейных порождающих функций типа модуля.

Для функции $f \in C[0,1]$ полиномы Бернштейна переменной $z \in \mathbb{C}$ вводят формулой

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Здесь C_n^k – стандартные биномиальные коэффициенты. Основные результаты из теории полиномов Бернштейна представлены в [1–3].

Значительный интерес представляет проблема распределения нулей полиномов Бернштейна в плоскости \mathbb{C} . Недавно замечено (см. [4–6]), что для кусочно линейных порождающих функций $f \in C[0,1]$ большинство нулей полиномов (1) при $n \rightarrow \infty$ стягивается к некоторым специальным подмножествам в \mathbb{C} . Эти подмножества (*аттракторы нулей*) тесно связаны с областью сходимости полиномов Бернштейна и состоят (в основном) из фрагментов лемнискат и дуг специальных окружностей.

В связи с исследованиями [4–6] возникла задача о выявлении точных пропорций в распределении нулей полиномов (1), тяготеющих к различным частям аттрактора. Средствами компьютерной математики можно устанавливать требуемые соотношения.

Рассмотрим, например, кусочно линейную порождающую функцию типа модуля

$$f(x) = |qx - p|, \quad x \in [0,1], \quad (2)$$

с единственным изломом в точке $x = c$, где

$$c \equiv \frac{p}{q} \in (0,1). \quad (3)$$

Тогда для полиномов (1) от функции (2) действует следующее *правило склеивания* (подробнее см. [3])

$$B_{qm+1}(f, z) = B_{qm}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Согласно классической теореме Канторовича (см. [2], гл. IV) для порождающей функции вида (2), сходимость полиномов (1) распространяется в комплексную область на компакт, ограниченный лемнискатой

$$\left| \frac{z}{c} \right|^c \left| \frac{1-z}{1-c} \right|^{1-c} = 1, \quad (5)$$

со значением c из формулы (3). Численные эксперименты показывают, что при $n \rightarrow \infty$ большинство нулей полиномов (1) будет стягиваться снаружи к лемнискате (5). При некоторых номерах $n \in \mathbb{N}$ встречаются единичные *девиантные нули*, ведущие себя по особым правилам.

Для конкретного полинома $B_n(f, z)$ с порождающей функцией $f(x)$ из формулы (2) введем обозначения:

α_n – количество нулей, тяготеющее к левой петле лемнискаты (5);
 β_n – количество нулей, тяготеющее к правой петле лемнискаты (5);
 γ_n – количество девиантных нулей, не стягивающихся к аттрактору.

Примем соглашение, что пару нулей, тяготеющих к точке самопересечения лемнискаты (5), будем разделять пополам между значениями α_n и β_n .

Большая серия компьютерных экспериментов, проведенных на различных примерах функций вида (2), показала, что в распределении введенных значений α_n , β_n , γ_n действуют строгие правила. Точный закон формулируется так

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{p}{q-p}, \quad \gamma_n \in \{0, 1\}, \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (6)$$

Поясним происходящее на простом примере.

Пусть

$$f(x) = |5x-2|, \quad x \in [0, 1], \quad (7)$$

с единственным изломом в точке $x = 2/5$. Полиномы Бернштейна для функции (7) склеиваются по правилу

$$B_{5m+1}(f, z) = B_{5m}(f, z), \quad m \in \mathbf{N}. \quad (8)$$

Лемниската (5), порожденная значением $c = 2/5$, имеет вид

$$\left| \frac{3125}{108} z^2 (1-z)^3 \right| = 1. \quad (9)$$

Множество нулей полинома $B_{200}(f, z)$ для функции (7) и лемниската (9) представлены на рисунке 1.

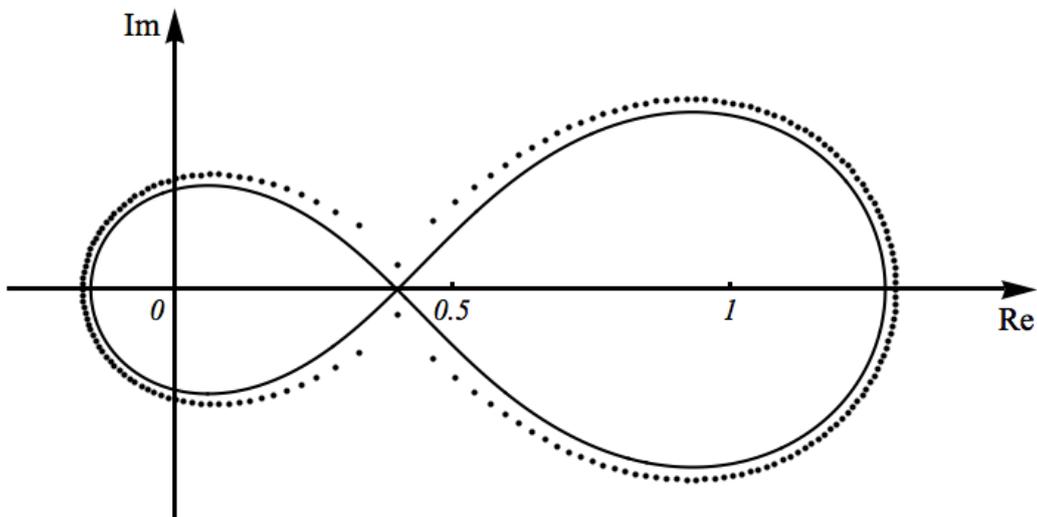


Рис. 1. Распределение нулей полинома $B_{200}(f, z)$ в примере (7) и лемниската (9)

Приведем фрагмент таблицы значений α_n , β_n , γ_n для примера (7).

Таблица 1.

Значения величин α_n , β_n , γ_n для $B_n(f, z)$, где $n = 100, 101, \dots, 129$

n	α_n	β_n	γ_n	n	α_n	β_n	γ_n
100	40	60	0	115	46	69	0
101	40	60	0	116	46	69	0
102	40	61	1 (слева)	117	46	70	1 (слева)
103	41	61	1 (справа)	118	47	70	1 (справа)
104	41	62	1 (слева)	119	47	71	1 (слева)
105	42	63	0	120	48	72	0
106	42	63	0	121	48	72	0
107	42	64	1 (слева)	122	48	73	1 (слева)
108	43	64	1 (справа)	123	49	73	1 (справа)
109	43	65	1 (слева)	124	49	74	1 (слева)
110	44	66	0	125	50	75	0
111	44	66	0	126	50	75	0
112	44	67	1 (слева)	127	50	76	1 (слева)
113	45	67	1 (справа)	128	51	76	1 (справа)
114	45	68	1 (слева)	129	51	77	1 (слева)

Полученные данные согласуются с общим законом (6) при выборе значений $p = 2$, $q = 5$, $q - p = 3$. Из таблицы видно, что на номерах

$$n = 100, 101, 105, 106, 110, 111, 115, 116, 120, 121, 125, 126,$$

входящих в цепочку склеиваний (8), пропорция $\alpha_n/\beta_n = 2/3$ реализуется не приближенно, а точным образом.

Выражаю благодарность моему научному руководителю И. В. Тихонову, а также В. Б. Шерстюкову за постановку столь интересной задачи и большую помощь в исследовании.

Литература

1. Виденский В. С. Многочлены Бернштейна: учебное пособие к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.
2. Lorentz G. G. Bernstein Polynomials. – Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. x+130 p.
3. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8, Ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ: ЮМИ ВЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.
4. Новиков И. Я. Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. 2002. Т. 71, вып. 2. С. 239–253.

5. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016: материалы научной конференции, 11–15 апреля 2016 г. СПб: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. С. 139–145.

6. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Компьютерная классификация аттракторов для нулей полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 224–227.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MAPLE К РЕШЕНИЮ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ РИТЦА

А.С. ШЕВЧЕНКО

Рубцовский институт (филиал) Алтайского государственного университета
e-mail: ibragimova.a.s@mail.ru

УДК 517.9

Ключевые слова: *математический пакет Maple, вариационные задачи, прямые методы, Метод Ритца.*

Рассматривается применение математического пакета Maple к решению вариационных задач методом Ритца.

Математические пакеты существенным образом меняют мир образования и науки. Они облегчают решение сложных математических задач; снимают психологический барьер у учащихся при изучении математических дисциплин, делая их интересными, достаточно простыми и доступными для понимания; повышают интерес к процессу обучения и интенсивность практических занятий; расширяют спектр возможностей преподавателя и круг решаемых задач практического содержания.

Применение математического пакета Maple к решению задач вариационного исчисления с неподвижными границами можно изучить в работе [1], с подвижными границами в работах [2–3], на условный экстремум в [4–5].

В данной же статье рассмотрим применение пакета Maple к решению вариационных задач методом Ритца.

Методом Ритца найдите приближенное решение задачи о минимуме функционала $J[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 - y^2 + 2yx] dx$, $y(0) = y(1) = 0$ и сравните с точным решением.

1. Производим полную очистку памяти:

```

> restart;
#Метод Рунге
> method_Ritsa:=proc(n,F) local i,W,y_pr,alpha,dy_pr,J_pr,dJ_pr,sys,rez,k;
#Задаем систему координатных функций W[i]:
W:=Vector(n);
for i from 1 by 1 to n do W[i]:=(1-x)*x^i: od;
#Составляем функцию y_pr:
y_pr:=0: for i from 1 by 1 to n do y_pr:=y_pr+alpha[i]*W[i]: od: y_pr;
#Находим производную от функции y_pr:
dy_pr:=diff(y_pr,x);
#Подставляем функцию y_pr и ее производную в функционал:
J_pr:=int(F(x,y_pr,dy_pr),x=x0..x1);
#Составляем систему уравнений, чтобы найти неизвестные коэффициенты:
for i from 1 by 1 to n do dJ_pr[i]:={diff(J_pr,alpha[i])=0}; od;
sys:=dJ_pr[1]: for i from 1 by 1 to n do sys:=sys union dJ_pr[i]: od: sys;
#Решаем полученную систему уравнений:
rez:=solve(sys); evalf(rez);
#Запишем приближенное решение:
y_it(x):=subs(rez,y_pr);
#Вычисляем функционал:
k:=subs(rez,J_pr): J_pr:=evalf(k);
return J_pr;
end proc;
#Точное решение функционала
> method_Solution:=proc(F) local eq, eq1, tk, rez, k, J;
eq:=diff(F(x,Y,DY),Y)-diff(diff(F(x,Y,DY),x),DY)-
diff(diff(F(x,Y,DY),Y),DY)*DY-diff(F(x,Y,DY),DY$2)*D2Y=0;
eq1:=subs(Y=y(x),DY=diff(y(x),x),D2Y=diff(y(x),x$2),eq);
tk:={eq1,y(x0)=y0,y(x1)=y1};
rez:=dsolve(tk,y(x));assign(rez):y(x):
k:=int(F(x,y(x),diff(y(x),x)),x=x0..x1): J:=evalf(k);
return J;
end proc;

```

2. Задаем подинтегральную функцию и краевые условия:

```

> F:=(x,Y,DY)->DY^2-Y^2+2*Y*x; x0:=0; x1:=1; y0:=0; y1:=0;

```

3. Задаем n:

```

> n:=3;

```

4. Находим приближенное решение функционала, используя метод Рунге

```

> J_pr:=method_Ritsa(n,F);

```

J_pr := -0.0245740091;

5. Находим точное решение функционала:

```

> J:= method_Solution(F);

```

J := -0.0245740510

6. Вычисляем абсолютную и относительную погрешности:

```

> Absolut_pogr:=abs(J-J_pr);

```

Absolut_pogr := 4.194 10⁻⁸

```

> Otnosit_pogr:=Absolut_pogr/abs(J_pr)*100;

```

Otnosit_pogr := 0.000170668122

7. Строим график приближенного и точного решения:

```
> plot({y_it(x),y(x)}, x=x0..x1, title='Приближенное и точное решение',
axes=NORMAL, titlefont=[TIMES,BOLD,12], labels=[' x', 'y'],
labelfont=[TIMES,ITALIC,14],color=[red,green], thickness=1,
font=[TIMES,BOLD,12], xtickmarks=6, ytickmarks=6);
```

Применение математического пакета Maple при решении вариационных задач методом Ритца может быть полезно при изучении дисциплины «Вариационное исчисление» и представлять интерес не только для студентов и аспирантов, но и для преподавателей вузов, инженеров и научных работников.

Литература

1. Лелянов Б.Н., Хмара В.Н. Автоматизированное решение задач вариационного исчисления // Ученые заметки ТОГУ. 2013, Т. 4, № 4, С. 919–925. URL: http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2013/TGU_4_181.pdf.
2. Шевченко А.С. Применение математического пакета Maple к решению вариационных задач // Молодой ученый. 2015. №22. С. 33–37.
3. Шевченко А.С. Применение математического пакета Maple к решению вариационных задач с подвижными границами // Ученые заметки ТОГУ. 2016. Т. 7, № 1. С. 313–323. URL: http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2016/TGU_7_52.pdf.
4. Шевченко А.С. Автоматизированное решение вариационных задач на условный экстремум // Современная наука: проблемы и пути их решения: сборник материалов Международной научно-практической конференции. Кемерово: КузГТУ. 2015. Т. 2. С. 325–328.
5. Шевченко А.С. Применение математического пакета Maple к решению вариационных задач на условный экстремум // Ученые заметки ТОГУ. 2016. Т. 7, № 2. С. 246–260. URL: http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2016/TGU_7_91.pdf.

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ ЗНАЧЕНИЙ ИНДЕКСА РТС В СИСТЕМЕ MATHCAD

Е.В. ШЕМЕТОВ

ООО «ЭДИСОФТ ДЕВЕЛОПМЕНТ», г. Смоленск
e-mail: egorshemetov67@gmail.com

УДК 519.688

Ключевые слова: экономическое прогнозирование, интерполяция, экстраполяция, сплайн, Mathcad.

В работе рассматриваются методы экономического прогнозирования: экстраполяция временных рядов, в частности, экстраполяция сплайнами применительно к прогнозированию значений индекса РТС. В качестве инструментальной среды разработки использована система Mathcad.

Прогнозирование – это важное звено между теорией и практикой во всех областях жизни общества. Одним из важных направлений прогнозирования общественного развития, является экономическое прогнозирование.

Прогнозирование соотносится с более широким понятием – предсказание, как опережающего отображения действительности.

Существует множество видов экстраполяции, которые характеризуются различными показателями сложности вычислений и быстродействием.

Между точками значений строится полином n-ой степени. Такой кусочно-непрерывный интерполяционный полином называется сплайном [1].

Таблица 1

Индекс РТС за 2014–2015 годы, усредненный по месяцам

Месяц	Значения 2014	Значения 2015	Месяц	Значения 2014	Значения 2015
январь	1489,03	1604,16	июль	1463,59	1636,41
февраль	1485,53	1776,74	август	1415,05	1699,30
март	1340,24	1776,74	сентябрь	1455,59	1704,95
апрель	1349,80	1690,60	октябрь	1408,28	1711,52
май	1403,43	1690,55	ноябрь	1525,76	1797,00
июнь	1493,90	1660,51	декабрь	1503,51	1758,34

```
s := cspline(x,y)
m := 24 j := 0..m
Aj := interp(s,x,y,j)
B := predict(A,24,10) n := 10 i := 0..n+m
```

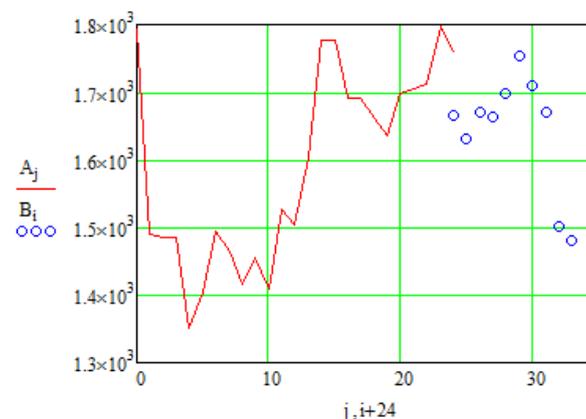


Рис. 1. Экстраполяция кубическим сплайном в системе Mathcad

Кубическая сплайн экстраполяция представляет собой быстрый и устойчивый способ экстраполяции функций. В основе экстраполяции лежит принцип разбиения заданного интервала на небольшие отрезки, на каждом из которых функция задается полиномом. Данный принцип заимствован из интерполяции сплайнами.

Пример кубической сплайн-экстраполяции в системе Mathcad приведен на рисунке 1. В качестве данных используется усредненное по месяцам максимальное значение индекса РТС за 2014–2015 годы. Линией изображены значения за 2014–2015 годы, а точками предсказанные значения.

Экстраполяция применяется для решения широкого круга задач, начиная от предсказания показаний датчиков в электронике, заканчивая построением гипотез о поведении экономических процессов [2].

Литература

1. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж, 2001. 1296 с., ил.
2. <http://radiomaster.ru/cad/mc12>. Справочники и руководства по проектированию.

АНАЛИЗ ХЕШИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПОИСКА ФИБОНАЧЧИ

М.Ю. ЯСТРЕБОВ, Р.А. БЕБНЕВ, А.Д. ФЕДОСОВ

Государственный университет морского и речного
флота имени адмирала С.О.Макарова, г. Санкт-Петербург
e-mail: rectorat@gma.ru

УДК 004.424.47

Ключевые слова: *анализ алгоритмов, хеширование, поиск Фибоначчи.*

Предложены показатели эффективности эвристических процедур хеширования. Приведены данные экспериментального анализа метода хеширования на основе поиска Фибоначчи.

В [1] предложен метод хеширования упорядоченного массива, при котором на основе поиска Фибоначчи строится кортеж в трёхсимвольном алфавите, задающий блуждание при поиске. Затем по кортежу вычисляется хеш-адрес. Размер исходного массива 3^k , размер хеш-массива $F_{k+1} - 1$, где F_{k+1} – число Фибоначчи.

Для экспериментальной оценки эффективности метода путём хеширования случайно вырабатываемого адреса исходного массива

использованы следующие показатели (наряду с которыми могут, разумеется, использоваться и альтернативные показатели, например, предложенные в [2]):

n – количество итераций (актов хеширования);

f – частота коллизий;

l – средняя длина непустых цепочек, возникающих при коллизиях;

e – эффективность использования пространства хеш-массива – отношение средней длины цепочки к средней длине пустого сегмента в хеш-массиве;

d – дисперсия средней длины (показатель равномерности появления коллизий).

n	1300	2600	3900	5200	6500	$k=8$
f	0.031	0.016	0.011	0.008	0.006	
l	32.5	63.4	95.1	126.8	158.5	
e	6.4	25.2	56.6	100.1	156.9	
d	457	1905	4296	7441	11501	
n	11500	23000	34500	46000	57500	$k=10$
f	0.009	0.005	0.003	0.002	0.002	
l	107.4	211.0	316.54	422.0	527.5	
e	2.1	82.1	185.1	329.7	512.2	
d	6141	24860	555003	98800	154645	
n	105000	210000	315000	420000	525000	$k=12$
f	0.003	0.001	0.001	0.001	0.001	
l	365.854	731.7	1097.6	1463.4	1829.3	
e	72.3	289.2	649.4	1152.3	1811.2	
d	90607	363610	819839	1461065	2275063	
n	955000	1910000	2865000	3820000	4775000	$k=14$
f	0.0008	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	
l	1269.9	2539.9	3804.8	5073.0	6341.3	
e	253.5	1015.9	2278.3	4058.4	6341.3	
d	1324853	5303221	11942382	21224046	33130231	

Наряду с характеристиками процедур хеширования, предложенными в [2], показатели F , l , e , d позволяют с необходимой полнотой сравнивать конкурирующие процедуры хеширования в технологическом ключе (криптографические аспекты заслуживают отдельного анализа и обсуждения).

Литература

1. Ястребов М.Ю. Поиск Фибоначчи — обоснование, система счисления и хеширование // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2013, № 3 (174). С. 53–58.
2. Ястребов М.Ю. Хеширование на основе поиска Фибоначчи // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. С. 238.
3. Communications of the Association for Computing Machinery. 1971, Vol. 14. P. 228–239.

СЕКЦИЯ 2

Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

МЕТОД ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ

Т.А. АГАСИЕВ¹, А.П. КАРПЕНКО²
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва
e-mail: , ¹agtaleh@mail.ru, ²apkarpenko@mail.ru

УДК 519.6

Ключевые слова: *задача оптимизации, целевая функция, показатели зашумленности, ландшафтный анализ.*

Представлена модификация метода Information Content, предназначенного для вычисления показателей, характеризующих зашумленность и мульти-модальность ландшафта целевой функции оптимизационной задачи. Приведены результаты применения предложенной модификации.

Методы ландшафтного анализа широко используют для вычисления значений показателей, характеризующих степень зашумленности, выпуклости и мульти-модальности целевых функций (ЦФ) с целью их последующей классификации. Метод *Information Content* позволяет оценить энтропию значений ЦФ в области поиска [1]. На первом этапе метода вычисляют перепады значений ЦФ между соседними точками выборки с учетом расстояния между ними в пространстве варьируемых параметров. Затем ландшафт ЦФ представляют в виде последовательности символов, в которых закодированы положительные, отрицательные и «нейтральные» изменения значений ЦФ в области поиска. Параметр ε_{min} метода задает максимальное значение «нейтрального» изменения, тем самым определяя чувствительность метода. Полученную последовательность символов используют для вычисления значений характеристических показателей исследуемого ландшафта. Эффективность метод *Information Content* иллюстрирует рисунок 1. Здесь и далее приняты следующие обозначения: ackley, rastrigin, rosenbrock – известные тестовые функции Экли, Растригина и Розенброка соответственно.

Ландшафтный анализ ЦФ особенно актуален в контексте проблемы мета-оптимизации алгоритмов поисковой оптимизации, то есть

проблемы разработки методов оптимизации значений свободных параметров этих алгоритмов в процессе эксплуатации соответствующего программного обеспечения.

Авторами предложена модификация метода *Information Content*, которая расширяет перечень определяемых показателей ландшафта с целью более глубокого анализа особенностей поведения ЦФ. Введение ограничения сверху ε_{max} для перепадов значений ЦФ путем изменения правил формирования символьной последовательности [1] позволяет получить новые функции от ε , графики которых представлены на рисунке 2.

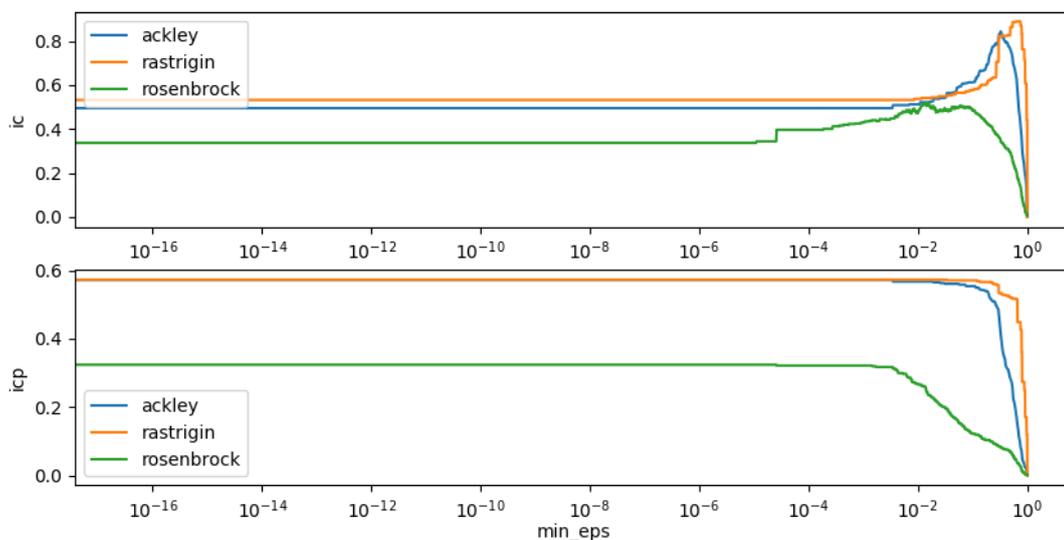


Рис. 1. Показатели зашумленности $ic(\varepsilon_{min})$ и мульти-модальности $icp(\varepsilon_{min})$

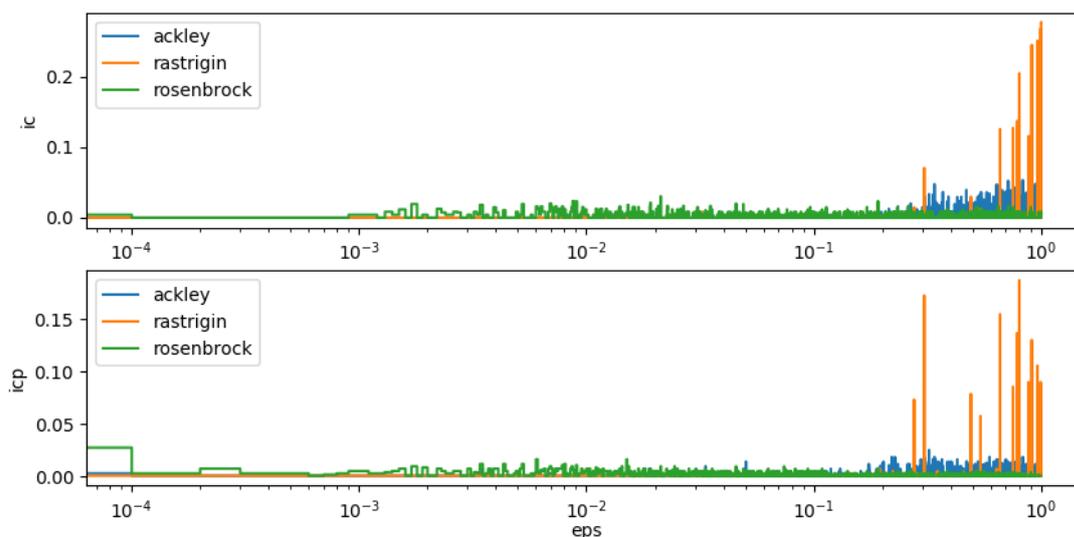


Рис. 2. Показатели зашумленности $ic(\varepsilon)$ и мульти-модальности $icp(\varepsilon)$

Рисунки 1, 2 показывают, что предложенная авторами модификация метода *Information Content* позволяет вычислить показатели

зашумленности и мульти-модальности ландшафта ЦФ в малых диапазонах значений параметра ε . При варьировании значения ε_{min} ландшафты ЦФ Экли и Растригина оказываются слабо различимыми (рис. 1). Напротив, модифицированный метод позволяет выявить значительные отличия ландшафтов этих функций (рис. 2).

Литература

1. Muñoz M.A., Kirley M., Halgamuge S.K. Exploratory landscape analysis of continuous space optimization problems using information content // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2015. Vol. 19(1). P. 74–87.

АНАЛИЗ И ВЫБОР СРЕДСТВ РАЗРАБОТКИ МОБИЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

В.В. АФАНАСЬЕВ

Смоленский государственный университет
e-mail: ¹wladaf@mail.ru

УДК 004.031.42

Ключевые слова: *мобильные приложения, iOS, информационные системы*

В статье проведен анализ методов разработки мобильных информационных систем. Показано, что для систем, работающих с базами данных со сложной структурой, целесообразно использовать мобильные приложения.

С развитием технологий, позволяющих создавать мобильные устройства, появилась возможность разработки мобильных информационных систем (МИС). Существует три основных метода реализации МИС: мобильное приложение, мобильный web-сайт и мобильное приложение с компонентом браузера [1].

Мобильное приложение – программное обеспечение, разработанное под мобильную платформу (iOS, Android, Windows Phone), предназначенное для работы на смартфонах, планшетах и других мобильных устройствах.

Мобильный web-сайт – специализированный сайт, адаптированный для функционирования на мобильных устройствах. Сайт, включающий в себя интерактивные компоненты с использованием JavaScript или HTML5, называется web-приложением.

Мобильное приложение, содержащее компонент браузера, отображающий web-страницы. В таком случае часть мобильного приложения используется для навигации, а компонент браузера для отображения информации.

Сравнение рассмотренных методов представлено в таблице 1.

Таблица 1

Свойства методов разработки мобильных ИС

	Мобильное приложение	Мобильное приложение с компонентом браузера	Мобильный web-сайт
Производительность	высокая	средняя	низкая
Интеграция с устройством	высокая	средняя	низкая
Интерфейс	близкий к ОС	близкий к ОС	качественный
Сложность разработки	платформозависимая	платформозависимый интерфейс	кроссплатформенная

Выбор метода разработки и реализации МИС существенно зависит от характеристик решаемых ею задач. Далее рассматривается задача, суть которой состоит в том, чтобы максимально эффективно отображать на мобильном устройстве данные, хранящиеся в полуструктурированной (в стандарте JSON) базы данных. В базе могут храниться разнотипные данные: изображения, аудио, видео, тексты, числа. В качестве СУБД в таком случае целесообразно использование таких СУБД, как Firebird. Данные обычно представлены разделами, которые пользователь может просматривать по отдельности.

Для таких МИС целесообразен выбор метода мобильного приложения, так как он позволяет в максимальной степени уравнивать функции мобильного устройства с функциями стационарного компьютера, получить высокую производительность и скорость работы. Это позволяет обеспечить наибольшее удобство пользователя за счет отзывчивого и приближенного к ОС интерфейса. Кроме того, пользователь имеет возможность работать с приложением при отсутствии подключения к интернету, используя последние полученные данные.

Литература

1. <https://habrahabr.ru/post/168843/>.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ СРЕДСТВАМИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Е.А. БОЖИНСКИЙ, Т.А. САМОЙЛОВА

Смоленский государственный университет
e-mail: egor.bozhinsky@gmail.com; tatsam@hotbox.ru.

УДК 004:8

Ключевые слова: *временной ряд, модель прогнозирования, генетический алгоритм, оценки погрешности, вычислительный эксперимент, accord-framework.net.*

Рассматривается применение генетического алгоритма для разработки модели прогнозирования временных рядов. Описаны этапы построения модели. Приводятся результаты вычислительного эксперимента ее реализации средствами открытого фреймворка Accord.NET. Выполнены оценки погрешности модели на примере конкретной предметной области.

Развитие теории машинного обучения [1] в последние десятилетия привело к разработке многих новых методов построения прогнозов. Перспективные подходы к прогнозированию временных рядов возникают в области искусственного интеллекта, где наблюдается тенденция заимствования идеи у природы. В частности, исследования нервной системы и биологическая эволюция повлияли на разработку таких мощных инструментов, как генетические алгоритмы (ГА). Предлагаемый метод прогнозирования базируется на ГА, исходная идея которого предложена в [2]. Результатом работы ГА для поставленной задачи будет набор хромосом – множество правил, согласно которому будет строиться прогноз.

Этапы прогнозирования на основе генетического алгоритма для временного ряда следующие.

1. Задание исходных данных: значений временного ряда; размера окна (количество прошлых образцов, используемых в прогнозировании будущего значения); размер обучающей выборки. Задается также число прогнозируемых значений и массив констант для использования в качестве дополнительных параметров генетического выражения.

2. Обучение – построение базы правил, направленное на выявление существенных зависимостей во временном ряду на основе использования генетического алгоритма. Состоит из нескольких шагов. Основные из них: создание исходной популяции с заданными параметрами, смена поколения (сопровождается мутациями), выбор хромосомы, которая дает наилучший результат.

3. Прогнозирование. На данном этапе строится прогноз на основе исходных данных и полученной хромосомы.

Для иллюстрации прогнозирования на базе ГА разработана программа GeneticExperiment. В качестве выборки для анализа взяты данные о численности населения за период 1997 – 2016 годов с сайта Федеральной службы государственной статистики. Хромосома в реализуемом ГА представляет собой последовательность чисел. Каждый член данной последовательности (ген) показывает, какой базисной функцией покрывается соответствующая вершина временного ряда. Для решения задачи отбора лучших хромосом, которые будут наиболее достоверно описывать временной ряд, использовалась библиотека Accord.Genetic. Построение модели прогнозирования выполнено на

основе популяции, созданной с помощью класса Population этой библиотеки с приведенными в таблице 1 параметрами.

Таблица 1

Значения параметров генетического алгоритма

Параметр	Значение
Размер популяции	100
Число пережитых эпох	250
Размер окна	5
Размер прогноза	1
Алгоритм отбора	EliteSelection()

Метод EliteSelection() выбирает лучших представителей текущего поколения для переноса их в следующее. Результаты работы ГА для вычисления краткосрочного прогноза численности населения в 2017 году представлены на рисунке 1.

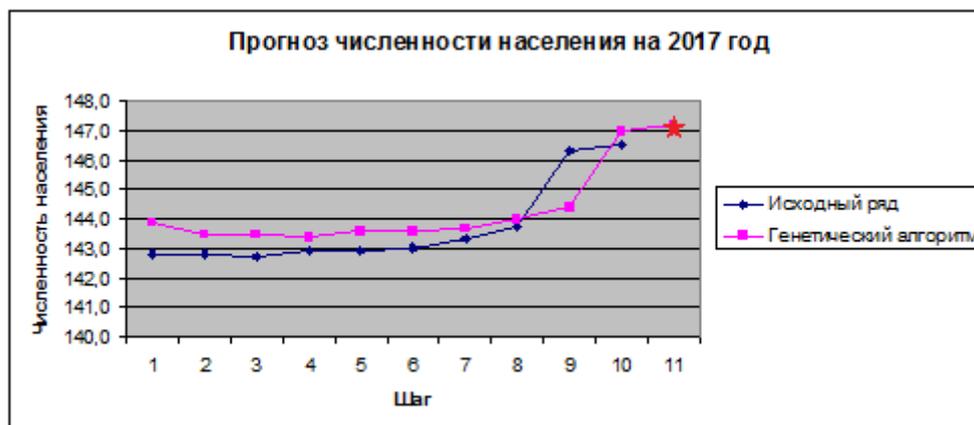


Рис. 1. Прогноз численности населения на 2017 год

Как видно из этого рисунка, разработанная программа позволяет выполнить прогноз (большая звездочка в правом верхнем углу) численности населения на 2017 год в размере 147,178 млн. человек. На сайте Госкомстата есть данные о прогнозе численности населения до 2030 года, где значение, соответствующее модели, составляет 147, 034 млн. человек. Таким образом, полученный результат моделирования довольно близок к реальному. Для оценки его погрешности воспользуемся известными критериями MPE, MAPE [4]:

$$MPE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{Q_t - F_t}{F_t} \times 100\%,$$

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left| \frac{Q_t - F_t}{F_t} \right| \times 100\%,$$

где Q_t – спрогнозированное значение, F_t – фактическое значение, N – количество точек для сравнения (обычно – имеющийся временной ряд), t – момент времени, $t = \overline{1, N}$. Для нашего эксперимента значения данных параметров равны:

$$MPE = 0,1729\%; \quad MAPE = 0,3892\%.$$

Таким образом, разработанная модель прогнозирования временного ряда обеспечивает получение высокой точности прогноза, что делает ее особенно привлекательной для проведения прогнозов в разных предметных областях. Применение генетического алгоритма позволяет значительно сократить время выявления существенных зависимостей во временном ряду, повышая быстродействие и производительность модели.

Литература

1. Machine Learning.ru. Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных. <http://machinelearning.ru/>.
2. Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Генетические алгоритмы. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 320 с.
3. URL: <http://accord-framework.net/>.
4. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_absolute_percentage_error.

РАСПОЗНАВАНИЕ РУКОПИСНОЙ ПОДПИСИ МЕТОДОМ ОПОРНЫХ ВЕКТОРОВ

А.С. БУШИНСКИЙ, Т.А. САМОЙЛОВА

Смоленский государственный университет
e-mail: andrewbushinsky@gmail.com; tatsam@hotmail.com

УДК:004:8

Ключевые слова: *рукописная подпись, распознавание, классификатор, машинное обучение, метод опорных векторов, нейронная сеть, язык Python.*

В статье рассмотрена методика распознавания рукописной подписи на основе метода опорных векторов. Приведены результаты Python-программы распознавания средствами машинного обучения. Выполнено сравнение моделей для алгоритмов обучения методом опорных векторов и алгоритма обучения нейронной сети методом обратного распространения ошибки.

Биометрия играет значительную роль в современной повседневной жизни. В ближайшем будущем России она будет широко использоваться в качестве средства личной идентификации, основанного на распознавании рукописной подписи. В настоящее время не существует программного обеспечения, которое хорошо решает данную задачу.

Рукописные подписи имеют сложную структуру и мелкую детализацию, что представляет проблемы решения задачи

распознавания математическими методами и требует больших вычислительных затрат. Существующие способы сравнения изображений подписи с целью их идентификации чаще всего основаны на применении нейронной сети и алгоритме ее обучения методом обратного распространения ошибки. Недостатки метода [1]: возможная медленная сходимость; в данном алгоритме присутствует проблема переобучения сети; имеет место застревание в локальных минимумах. Этим недостаткам лишен метод опорных векторов (Support Vector Machine – SVM), разработанный отечественными математиками В.Н. Вапником и А.Я. Червоненкисом [2]. Суть предложенного ими алгоритма обучения для задачи классификации можно описать следующим образом. Машина опорных векторов отображает входной вектор в пространство более высокой размерности и находит разделяющую поверхность с максимальным зазором между точками разных классов. Такие точки называют опорными векторами. Это отображение осуществляется с помощью нелинейной функции ядра (kernel trick), заменяя которую, можно менять характеристики классификатора. Функция, соответствующая в исходном пространстве оптимальной разделяющей гиперплоскости, также будет нелинейной.

Для исследования модели распознавания рукописной подписи алгоритмом SVM и сравнения его с алгоритмом нейронной сети были разработаны программы, реализующие каждый из этих алгоритмов. Использовалась библиотека машинного обучения scikit-learn языка Python [3]. Обучающая выборка подписей хранилась в базе данных изображений, каждое из которых преобразовывалось в одномерный двоичный массив (рис. 1), размер которого соответствовал площади изображения в пикселях.

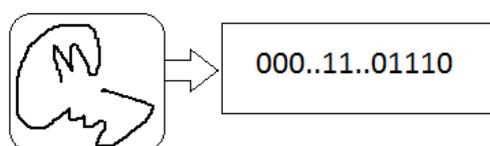


Рис. 1. Преобразование подписи в массив {0,1}

В качестве ядра алгоритма SVM выбрана полиномиальная функция

$$k(x, y) = (1 + xy)^d,$$

так как она показала наилучшие результаты в сравнении с остальными ядрами. В этом случае для идентификации подписи алгоритм ищет оптимальную полиномиальную разделяющую поверхность. Обучение нейронной сети выполнялось алгоритмом обратного распространения

ошибки. На рисунке 2 приведены значения времени распознавания подписи для моделей, основанных на нейронной сети (NN) и SVM.

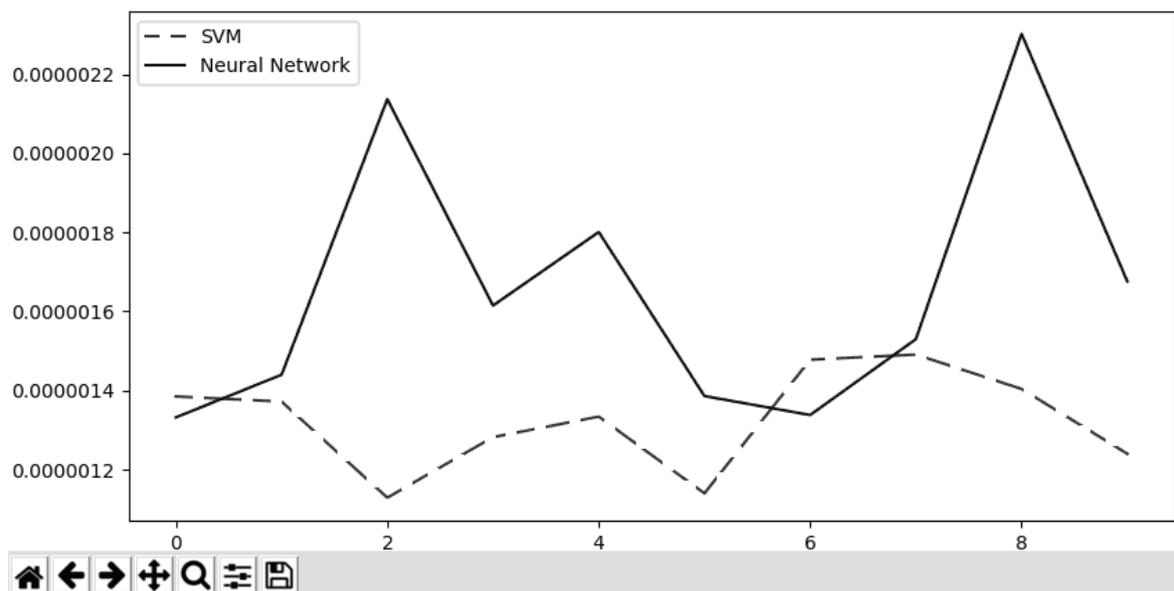


Рис. 2. Время распознавания подписи средствами NN и SVM

В таблице 1 приведены полученные оценки качества обеих моделей.

Таблица 1

Сравнение моделей, основанных на нейронной сети и SVM

Модель	Аккуратность	Точность	Полнота	F-мера
NN	0.92	0.7	0.86	0.77
SVM	1	1	1	1

Из таблицы 1 видно, что при одинаковых обучающих выборках метод опорных векторов имеет лучшие оценки качества, чем нейронная сеть.

Разработанное программное обеспечение показало хорошие результаты распознавания рукописной подписи. Являясь универсальным инструментом, метод опорных векторов с успехом может применяться как для решения задачи верификации подписи, так и для решения многих других задач распознавания образов.

Литература

1. Новиков А.С., Ежов А.А. Многослойная нейронная сеть Розенблатта и ее применение для решения задачи распознавания подписей. // Известия ТулГУ. Технические науки. 2016, Вып.2.
2. Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов. Статистические проблемы обучения. М.: Наука, 1974. 416 с.
3. URL: <http://scikit-learn.org/stable/>.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕАЛИЗАЦИИ ОПЕРАЦИИ JOIN НА КОМПЛЕКСАХ С SMP И MPP СТРУКТУРАХ

Е.И. ДАНИЛЮК¹, В.И. МУНЕРМАН²

Смоленский государственный университет
e-mail: ¹lovingcn@mail.ru, ²vimoon@gmail.com

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы.*

В работе проведен анализ алгоритма параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов. Для анализа были сконструированы программно-аппаратные комплексы на основе SMP-архитектуры и MPP-архитектуры. Приведены экспериментальные данные, подтверждающие эффективность предложенных алгоритма и архитектуры.

В статье [1] были описаны принципы операции слияния нестрого упорядоченных файлов, приведены результаты эксперимента в SMP-архитектуре. Этот алгоритм по сравнению со стандартным алгоритмом операции Join показал 2,2-кратное ускорение при малой длине классов эквивалентности и 6,7-кратное ускорение при максимальной длине классов эквивалентности.

В данной работе рассматривается аналогичный эксперимент при реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов в MPP-архитектуре. Эксперимент проводился на пяти компьютерах, соединенных локальной сетью. Один компьютер выполнял роль хост-машины, он запускал работу на всех остальных компьютерах и обрабатывал результаты. Число компьютеров для обработки было равно четырем, так как в эксперименте SMP-архитектуры использовалось четыре ядра процессора. В роли файлов выступали таблицы в базах данных СУБД Microsoft SQL Server. Таблицы содержали фиксированное число строк, но различные (увеличивающиеся на каждом этапе эксперимента) размеры классов эквивалентности. Результаты эксперимента представлены на рисунке 1.

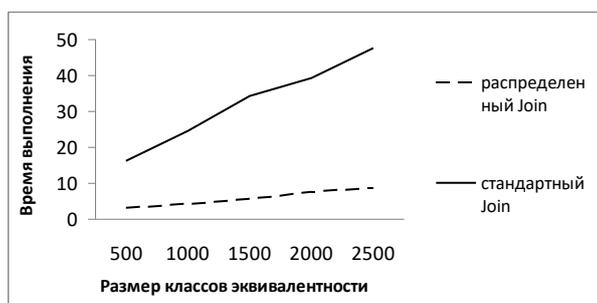


Рис. 1. График зависимости операции от размеров классов эквивалентности для стандартного Join на одной машине и стандартного Join в MPP-архитектуре

Из рисунка 1 видно, что распараллеленный таким образом алгоритм дает в среднем в 5,6-кратное ускорение.

Далее рассматриваются результаты в MPP-архитектуре Join стандартного и распараллеленного с помощью алгоритма параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов. Результаты эксперимента представлены на рисунке 2.

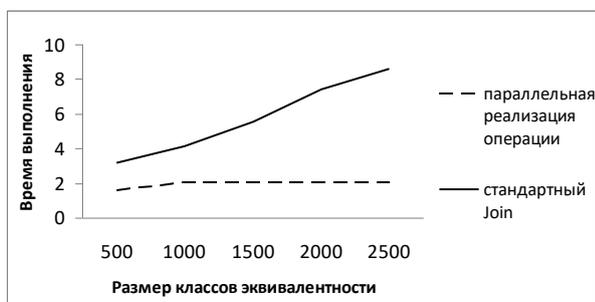


Рис. 2. График зависимости операции от размеров классов эквивалентности для MPP архитектуры

Исходя из этого, алгоритм параллельной реализации данных дает 2-кратное ускорение при малой длине классов эквивалентности и 4,1-кратное при максимальной длине классов эквивалентности.

В заключение рассматриваются результаты операции Join, распараллеленную с помощью алгоритма параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов в MPP-архитектуре и SMP-архитектуре. Результаты эксперимента представлены на рисунке 3.

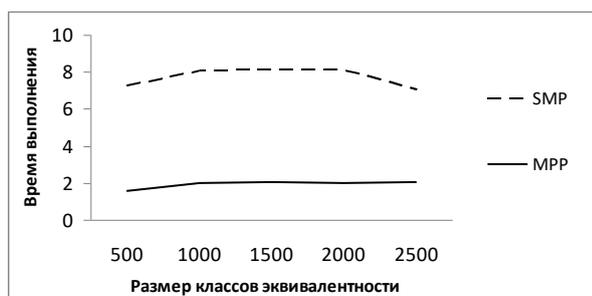


Рис. 3. График зависимости операции в MPP- и SMP - архитектурах

Получаем, что MPP-архитектура позволяет алгоритму параллельной реализации операции слияния нестрого упорядоченных файлов получить 4-кратное ускорение по сравнению с SMP-архитектурой.

Литература

1. Данилюк Е. И., Мунерман В.И. Анализ параллельного алгоритма слияния нестрого упорядоченных файлов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 44–47.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА РАСПРЕДЕЛЁННЫХ БАЗ ДАННЫХ В СУБД PostgreSQL

О.Е. ДИЕВ¹, В.И. МУНЕРМАН²

Смоленский государственный университет
e-mail: ¹defar6@yandex.ru, ²vymoon@gmail.com

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы, PostgreSQL.*

В докладе рассматривается проблема оптимизации массовой обработки данных средствами СУБД PostgreSQL. Рассмотрен известный алгоритм распараллеливания запросов в базах данных и проведен его анализ на вычислительной системе с SMP архитектурой и СУБД PostgreSQL. Приведены результаты эксперимента, подтверждающие эффективность предложенного метода.

В работе рассмотрено решение проблемы повышения эффективности массовой обработки больших объемов данных средствами свободно распространяемого программного обеспечения для управления базами данных. В качестве базовой СУБД была выбрана PostgreSQL [1]. Это свободно распространяемая объектно-реляционная система управления базами данных (ORDBMS). Как и все современные СУБД, PostgreSQL имеет:

- процедурный язык манипулирования данными PL/pgSQL, который используется для написания хранимых процедур и функций, в том числе и триггеров;
- возможность разработки хранимых процедур и функций на языках программирования, таких как C/C++;
- возможность добавлять собственные типы данных, методы преобразования типов, системные функции, в том числе агрегатные, которые реализуют групповые операции,
- возможность использовать методы индексирования данных, отличные от встроенных в ядро СУБД;
- возможность разрабатывать собственные операторы и переопределять существующие.

В основу параллельной реализации операции Join в СУБД PostgreSQL заложен принцип симметричного горизонтального распределения данных [2]. Для оценки эффективности использованного метода распараллеливания обработки данных в этой СУБД был проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого в основной базе данных последовательно создавались таблицы, над которыми должна была

выполняться операция Join. На каждом этапе эксперимента таблицы содержали фиксированное число строк. Это число увеличивалось в ходе эксперимента от этапа к этапу. Размеры классов эквивалентности таблиц, соответствующие фиксированным значениям ключа в управляющем операцией Join предикате, формировались случайным образом. Основная БД разбивалась на четыре фрагмента, каждый из которых содержал таблицы-фрагменты таблиц основной БД. Разбиение производилось алгоритмом бустрофедона [3]. Объем каждой таблицы-фрагмента был равен примерно четверти объема таблицы основной БД. В качестве аппаратного обеспечения использовалась вычислительная система с SMP архитектурой. Число вычислителей, реализующих обработку фрагментов БД, равнялось четырем. Базы данных хранились на одном диске.

Результаты эксперимента приведены в таблице 1 и на рисунке 1.

Таблица 1

Зависимость времени выполнения от объема БД

Количество строк (тыс.)	Время параллельной обработки фрагментов БД (сек)	Время последовательной обработки основной БД (сек)
200	77	118
300	170	265
400	299	456

Результаты, приведенные в таблице, подтверждают эффективность параллельной реализации операции Join.

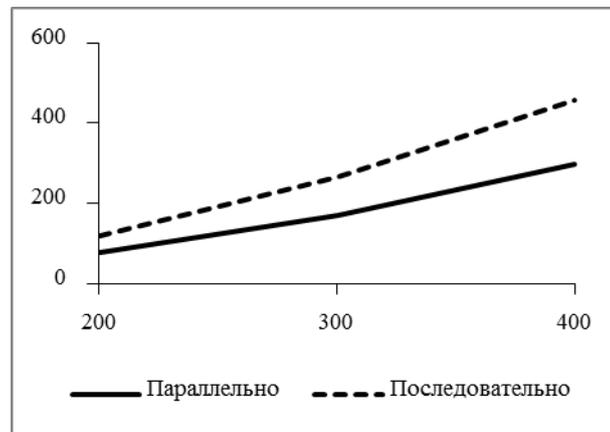


Рис. 1. Зависимость времени выполнения от объема БД

График, приведенный на рисунке 1, показывает, что время параллельного выполнения операции Join меньше времени ее последовательного выполнения не менее чем в 1,6 раза.

Из сказанного можно сделать вывод о том, что предложенный способ распараллеливания операции Join эффективен для СУБД PostgreSQL. Дальнейшие экспериментальные исследования

предполагается направить в сторону анализа параллельной реализации операции Join на вычислительных системах с MPP архитектурой, а также на системах, относящихся к классу in-memory database [4].

Литература

1. <https://www.postgresql.org/docs/9.3/static/index.html>.
2. Левин Н.А., Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности. 2013. Т. 9, № 1, С. 35–43.
3. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т.10, № 4. С. 3–16.
4. www.oracle.com/technetwork/database/in-memory/overview/index.html.

УНИФИКАЦИЯ ИНТЕРФЕЙСА ПРОГРАММНО-АППАРАТНОГО КОМПЛЕКСА «УМНЫХ» СРЕД

А.А. ЖАРКОВ

Смоленский государственный университет

e-mail: christofer.cadavercian@ya.ru

УДК 004.9

Ключевые слова: *интерфейс, интернет вещей, умная среда, программно-аппаратный комплекс, JSON, Microsoft Azure.*

Рассмотрена возможность решения проблемы контроля и управления умными средами средствами универсального интерфейса программирования её элементов. Описана вариация принципиальной схемы решения. Разработаны JSON наборы абстракций для реализации данной задачи.

Умная среда – это программно-аппаратный комплекс, организованный для автоматизации и контроля процессов в среде любого вида (помещения, аграрные комплексы и им подобные).

В настоящее время существует проблема отсутствия универсальной системы контроля и управления элементами такой системы с возможностями быстрого масштабирования.

Для решения данного вопроса создается универсальный интерфейс программирования элементов умной среды, который позволит создать интегрированную среду разработки такого комплекса. В связи с тем, что каждое устройство уникально (имеет свой набор функций и управляющей информации), представленная ниже принципиальная схема (рис. 1) является универсальной. Особенность данной схемы состоит в оптимизации вычислительных мощностей и сетевых нагрузок

за счёт аккумуляции данных и возможности предобработки информации на локальном сервере с помощью распределения вычислительной работы между элементами умной среды. Такое решение возможно благодаря оптимизированности поточной обработки данных и простоты работы в облачной системе Microsoft Azure.

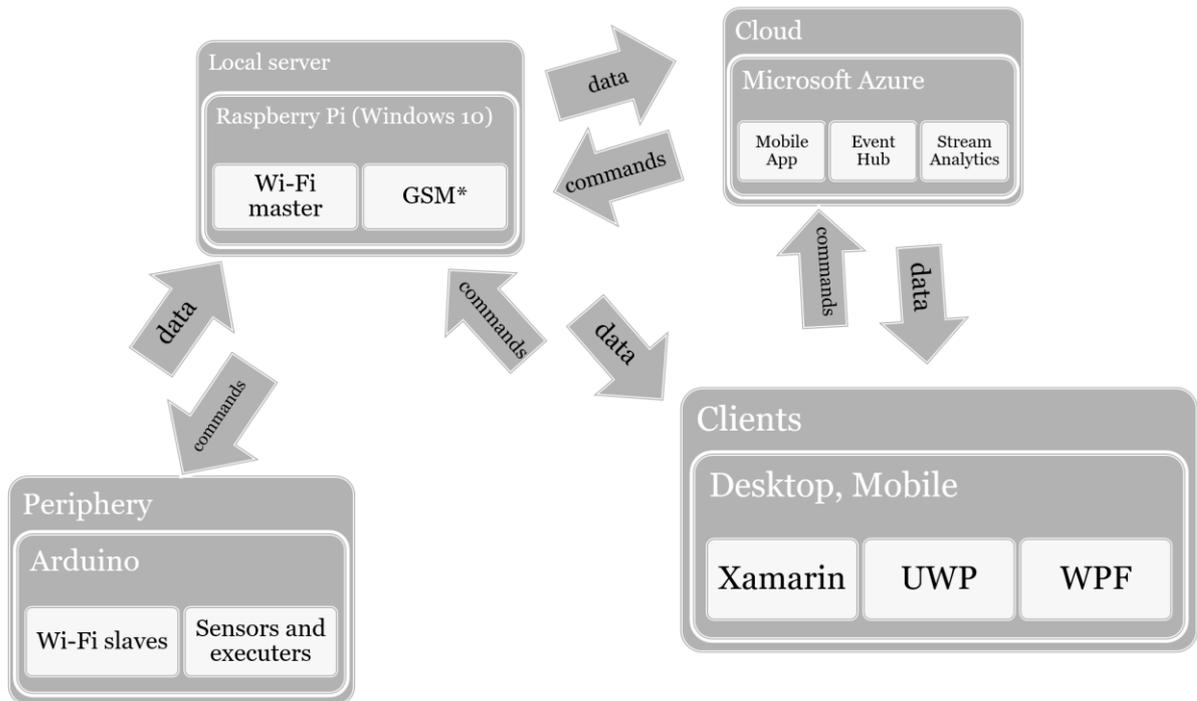


Рис. 1. Принципиальная схема системы оптимизации программно-аппаратного комплекса

Данная схема предполагает абстракции на программном уровне модели OSI, которые можно представить в виде JSON наборов данных. Они позволят на каждом этапе контролировать все действия периферийных устройств и собирать с них данные.

Листинг 1. JSON «знакомств»

```
{
  "properties":
  [
    {
      "type": "тип1",
      "name": "имя_свойства_1",
      "description": "описание"
    },
  ],
  "methods" :
  [
    {
      "name": "имя_метода_1",
      "description": "описание"
    },
  ],
}
```

Листинг 2. JSON изменений.

```
{
  "changeset":
  [
    {
      "name" : "имя_свойства1",
      "value" : "новое_значение1",
      "type" : "для_перепроверки1"
    },
    {
      "name" : "имя_свойства2",
      "value" : "новое_значение2",
      "type" : "для_перепроверки2"
    }
  ]
}
```

Предложенный универсальный интерфейс позволит упростить процесс создания умных сред любых сортов и создать единую систему контроля и управления «умными» средами.

Литература

1. The Internet of Everything for Cities: Connecting People, Process, Data, and Things To Improve the 'Livability' of Cities and Communities / Shane M. [et al.] // Cisco Systems. 2014. 10 July.

ОСНОВНЫЕ ПОЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НАПРАВЛЕНИЙ РАЗВИТИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В РОССИИ И РОЛЬ ФИЦ ИУ РАН В ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

В.Н. ЗАХАРОВ

ФИЦ ИУ РАН, г. Москва
e-mail: vzakharov@ipiran.ru

УДК 004

Ключевые слова: *стратегия научно-технологического развития, цифровая экономика, критические технологии, науки с интенсивным использованием данных.*

В докладе рассматриваются основные положения документов, определяющих развитие исследований и разработок в области информационных технологий в России. Приводится информация о роли и месте ФИЦ ИУ РАН в проведении научных исследований в данной области.

Указом Президента РФ от 1 декабря 2016 г. № 642 утверждена Стратегия научно-технологического развития Российской Федерации, являющаяся в настоящее время главным документом, определяющим направления научных исследований и разработок.

В Стратегии в числе наиболее значимых с точки зрения научно-технологического развития Российской Федерации больших вызовов было названо исчерпание возможностей экономического роста России, основанного на экстенсивной эксплуатации сырьевых ресурсов, на фоне формирования **цифровой экономики** и появления ограниченной группы стран-лидеров, обладающих новыми производственными технологиями и ориентированных на использование возобновляемых ресурсов.

Приоритеты научно-технологического развития Российской Федерации – это важнейшие направления научно-технологического развития государства, в рамках которых создаются и используются технологии, реализуются решения, наиболее эффективно отвечающие на большие вызовы, и которые обеспечиваются в первоочередном порядке кадровыми, инфраструктурными, информационными, финансовыми и иными ресурсами.

Согласно Стратегии, «... в ближайшие 10–15 лет приоритетами научно-технологического развития Российской Федерации следует считать те направления, которые позволят получить научные и научно-технические результаты и создать технологии, являющиеся основой инновационного развития внутреннего рынка продуктов и услуг, устойчивого положения России на внешнем рынке, и обеспечат:

а) переход к передовым цифровым, интеллектуальным производственным технологиям, роботизированным системам, новым материалам и способам конструирования, создание систем обработки больших объемов данных, машинного обучения и искусственного интеллекта».

Именно комплекс вопросов, относящихся к информационным технологиям, поставлен в Стратегии на первое место среди семи результатов, которые планируется получить в ходе реализации этой Стратегии.

В послании Президента РФ Федеральному Собранию, 1 декабря 2016 года было сказано: «Предлагаю запустить масштабную системную программу развития экономики нового технологического поколения, так называемой **цифровой экономики**. В её реализации будем опираться именно на российские компании, научные, исследовательские и инжиниринговые центры страны. Это вопрос национальной безопасности и технологической независимости России, в полном смысле этого слова – нашего будущего».

25 января 2017 года, выступая на заседании попечительского совета МГУ, Президент РФ поручил МГУ и ФИЦ ИУ РАН организовать Национальный центр компетенции в области **цифровой экономики** для научных исследований и подготовки кадров.

Говоря о цифровой экономике, можно прежде всего выделить следующие основные технологические тренды в сфере цифровой трансформации промышленности:

- 1) массовое внедрение интеллектуальных датчиков в оборудование;
- 2) переход на безлюдное производство и массовое внедрение роботизированных технологий;
- 3) переход на хранение информации и проведение вычислений с собственных мощностей на распределенные ресурсы («облачные технологии»);

4) сквозная автоматизация и интеграция производственных и управленческих процессов в единую информационную систему («от оборудования до министерства»);

5) использование всей массы собираемых данных (структурированной и неструктурированной информации) для формирования аналитики (технологии «больших» данных);

6) переход на обязательную оцифрованную техническую документацию и электронный документооборот («безбумажные» технологии);

7) цифровое проектирование и моделирование технологических процессов, объектов, изделий на всем жизненном цикле от идеи до эксплуатации (применение инженерного программного обеспечения);

8) применение технологий наращивания материалов взамен среза («аддитивные» технологии, 3D-принтинг);

9) применение сервисов по автоматическому заказу расходных материалов и сырья;

10) применение беспилотных технологий в транспортных системах;

11) применение мобильных технологий;

12) переход на реализацию промышленных товаров через Интернет.

Для реализации Стратегии научно-технологического развития на первом этапе (2017–2019 годы):

а) создаются организационные, финансовые и законодательные механизмы, обеспечивающие гармонизацию научной, научно-технической, инновационной, промышленной, экономической и социальной политики и готовность Российской Федерации к большим вызовам;

б) осуществляется запуск научных проектов, которые направлены на получение новых фундаментальных знаний, необходимых для долгосрочного развития, и основаны в том числе на конвергенции различных направлений исследований, включая гуманитарные и социальные;

в) начинается реализация научно-технических проектов в рамках приоритетов научно-технологического развития Российской Федерации, определенных в настоящей Стратегии;

г) формируется целостная система устойчивого воспроизводства и привлечения кадров для научно-технологического развития страны.

Для достижения результатов по приоритетам научно-технологического развития Российской Федерации, установленных Стратегией, Правительством Российской Федерации по согласованию с Советом при Президенте Российской Федерации по науке и образованию формируются и утверждаются комплексные научно-технические программы и проекты, включающие в себя все этапы инновационного цикла: от получения новых фундаментальных знаний

до их практического использования, создания технологий, продуктов и услуг и их выхода на рынок.

Для выявления, отбора и формирования наиболее перспективных проектов и программ создаются советы по приоритетным направлениям научно-технологического развития Российской Федерации, которые осуществляют экспертное и аналитическое обеспечение реализации приоритетов научно-технологического развития страны. Координацию деятельности советов по приоритетным направлениям научно-технологического развития Российской Федерации осуществляет президиум Совета при Президенте Российской Федерации по науке и образованию.

Возможно, Совет по перспективному направлению, связанному с развитием информационных технологий, будет формироваться на базе ФИЦ ИУ РАН.

В настоящее время одним из восьми приоритетных направлений развития науки, технологий и техники в российской Федерации, утвержденных Указом Президента Российской Федерации от 7 июля 2011 г. № 899, является направление «Информационно-телекоммуникационные системы».

А в перечень технологий, имеющих важное социально-экономическое значение или важное значение для обороны страны и безопасности государства (критических технологий, утвержденных распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 июня 2013 г. № 1059-р), входят в том числе:

- нано-, био-, информационные, когнитивные технологии;
- технологии доступа к широкополосным мультимедийным услугам;
- технологии информационных, управляющих, навигационных систем;
- технологии поиска, сбора, хранения, обработки, предоставления, распространения и защиты информации;
- технологии и программное обеспечение распределенных и высокопроизводительных систем;
- технологии компьютерного моделирования технически сложных изделий и систем, а также объектов промышленной инфраструктуры.

Развитие информационных технологий в настоящее время определяется тремя группами факторов:

- 1) объективная потребность в обеспечении глобальной информационной доступности (Интернет, интернет вещей, мобильные сети, социальные сети, информационные услуги широкого класса и др.);
- 2) необходимость обеспечения не только информационной, но и национальной безопасности в условиях резко возросшего перечня угроз в информационной сфере;

3) широкое применение информационных технологий в сфере производства (САПР, системы ERP, АСУ производством, АСУ предприятиями, математическое моделирование, мотивация высококвалифицированных кадров в области ИТ); на повестке дня - цифровая экономика.

Рассматривая современные парадигмы научных исследований, необходимо отметить, что в настоящее время выделяют четыре парадигмы, приводящие к выдающимся научным результатам и открытиям:

- эмпирические науки, позволяющие описывать природные явления (например, законы Ньютона);
- теоретические науки, использующие модели, позволяющие делать обобщения (например, теорема Котельникова или теорема Шеннона);
- вычислительные науки, обеспечивающие моделирование (симуляцию) сложных явлений;
- науки с интенсивным использованием данных, объединяющие наблюдения (эксперимент), теорию и моделирование для извлечения знаний из данных.

В соответствии с новой, четвертой, парадигмой проведение исследований, основанных на сборе, систематизации больших объемов знаний, их анализе с целью извлечения знаний, становится неотъемлемой частью различных областей науки, экономики, бизнеса (Data intensive domains – DID).

Новая парадигма получения научных знаний отлична от эмпирической, теоретической парадигм, от парадигмы, основанной на исследованиях при помощи вычислительных моделей. Полный набор данных о предметной области становится ее моделью, предназначенной для анализа и получения новых знаний.

Часто различные области научного знания в науках с интенсивным использованием данных (НИИД) называют «Х-информатикой» (например, биоинформатика, геоинформатика, астроинформатика, нейроинформатика, медицинская информатика и др.).

Большие объёмы данных накоплены в астрономии, физике высоких энергий, биоинформатике, мониторинге и моделировании климата в геонауках, в исследованиях на основе численного моделирования, и др.

Именно на основе новых подходов сегодня сформирована программа научных исследований Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН). ФИЦ ИУ РАН – научная организация, которая создана путем преобразования Института проблем информатики РАН с присоединением к нему Вычислительного центра РАН им. академика А.А. Дородницына и Института системного анализа РАН на основании

приказа ФАНО от 31.12.2014 г. № 1421.

Целью деятельности Центра являются:

- выполнение **фундаментальных, поисковых и прикладных научных исследований** и разработок в области вычислительной и прикладной математики, системного анализа, математического моделирования, теоретической информатики, информационных, интеллектуальных и когнитивных технологий;
- **применение результатов** исследований для создания информационно-телекоммуникационной инфраструктуры страны и регионов, информатизации общества;
- укрепление связей **между наукой и образованием.**

Программа развития ФИЦ ИУ РАН предусматривает проведение исследований и разработок в рамках десяти научных направлений:

1. Математические методы анализа данных и прогнозирования (академик Ю.И. Журавлев).
2. Математическое моделирование сложных физических и технических систем (чл.-кор. РАН Ю.А. Флеров).
3. Моделирование социальных, экономических и экологических процессов (чл.-кор. РАН И.Г. Поспелов).
4. Системный анализ и управление (чл.-кор. РАН Ю.С. Попков).
5. Системы искусственного интеллекта, извлечение знаний и анализ текстов (д. ф-м. н. Г.С.Осипов).
6. Информационные, управляющие и телекоммуникационные системы (д.т.н. А.А. Зацаринный).
7. Информационная безопасность (д. ф-м. н. А.А.Грушо).
8. Теоретико-вероятностные методы моделирования (д. ф-м. н. С.Я. Шоргин).
9. Методы и программные средства накопления и обработки больших данных (д.т.н. В.И. Будзко).
10. Образовательная информатика (акад. А.Л. Семенов).

МЕТАКОМПЕТЕНЦИИ УЧАЩИХСЯ И ИХ КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДАННЫХ, ИЗВЛЕЧЕННЫХ ИЗ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

М.А. ЗАХАРОВ¹, А.П. КАРПЕНКО², Е.В. СМИРНОВА³, А.П. СОКОЛОВ⁴

МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва

e-mail: ¹inststud@mail.ru, ²apkarpenk@mail.ru, ³bmstu.smirnova@gmail.com,

⁴alsokolo@bmstu.ru

УДК 619.21

Ключевые слова: *метакомпетенция, социальная сеть, стиль учения, способ мышления, вид мышления, тип поведения, обработка больших массивов данных.*

Рассматриваем проблему оценки метапредметных, метакреативных и метакогнитивных (мета) компетенций учащихся на основе анализа их поведения в социальных сетях. Используем прямые и косвенные данные об учащихся. Представляем разработанную авторами программную систему МЕТА-3, которая реализует извлечение из социальных сетей указанной информации и оценку на этой основе метакомпетенций учащихся.

Различают метапредметные, метакреативные и метакогнитивные (мета) компетенции учащегося [1]. Под метапредметными компетенциями понимают освоенные учащимися *метапредметные понятия и универсальные учебные действия* (регулятивные, познавательные, коммуникативные). Метакогнитивные компетенции определяют как индивидуальные знания учащегося, касающиеся собственных когнитивных процессов и результатов собственной познавательной деятельности. Метакреативностью называют интегральное качество учащегося, обеспечивающее не только возможность выхода его за рамки «стимульной» ситуации, но и способность осознавать, как этот выход осуществляется, выбирать наиболее адекватные стратегии для этого.

Работа посвящена оценке указанных метакомпетенций (МК) учащихся на основе анализа их поведения в таких социальных сетях, как *Twitter, Facebook, Vkontakte, Odnoklassniki, LinkedIn*. Используем как прямые (личные данные, высказывания, комментарии и др.), так и косвенные данные (подписанные группы, события, места и пр.) учащегося. Разработана программная система МЕТА-3, которая реализует извлечение указанных данных из социальных сетей и оценку на их основе МК учащихся.

Используем *расширенную матричную математическую модель* (МММ) для количественной оценки метакомпетенций (табл. 1). Здесь приняты следующие обозначения: МП – метапредметность; МКг – метакогнитивность; МКр – метакреативность; СубМК – субметакомпетенция; $M = (m_i, i \in [1:3])$ – рассматриваемые МК; $S_i = (s_{i,j}, j \in [1:|S_i|])$, $i \in [1:3]$ – набор субМК МК m_i ; $F_i = F_i(f_{i,j}, j \in [1:|S_i|])$, $i \in [1:3]$ – набор интегральных оценок уровня МК m_i , где $f_{i,j}$ – оценка уровня субМК $s_{i,j}$; $A_{i,j} = (a_{i,j,k}, k = [1:|A_{i,j}|])$,

$i = [1:3], j \in [1:|s_{i,j}|]$ – вектор характерных признаков (ВХП), определяющих уровень субМК $s_{i,j}$; $|X|$ – мощность X .

Таблица 1

Расширенная МММ для количественной оценки метакомпетенций учащихся

МК	Уровень	СубМК	Уровень	ВХП
МП, m_1	F_1	$s_{1,1}$	$f_{1,1}$	$A_{1,1}$
	
		$s_{1,K}, K = S_1 $	$f_{1,K}, K = S_1 $	$A_{1,K}, K = S_1 $
МКГ, m_2	F_2	$s_{2,1}$	$f_{2,1}$	$A_{2,1}$
	
		$s_{2,K}, K = S_2 $	$f_{2,K}, K = S_2 $	$A_{2,K}, K = S_2 $
МКр, m_3	F_3	$s_{3,1}$	$f_{3,1}$	$A_{3,1}$
	
		$s_{3,K}, K = S_3 $	$f_{3,K}, K = S_3 $	$A_{3,K}, K = S_3 $

Программная система МЕТА-3 имеет клиент-серверную архитектуру. В состав клиентской части входят модули администрирования, пользовательского интерфейса учащихся и преподавателей. Состав серверной части образуют модули настройки, сбора данных, анализа данных, оценки умений и навыков учащихся, хранения больших объемов обучающих выборок, а также дополнительных данных. Серверная часть системы функционирует под управлением операционной системы *CentOS*. Клиентская часть системы обеспечивает доступ к функциям системы посредством *Web*-браузера. В качестве СУБД используется *PostgreSQL*.

Литература

1. Гаврилина Е.А., Захаров М.А., Карпенко А.П. Количественная оценка метакомпетенций учащихся на основе методов машинного обучения // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/764221.html>.

АНАЛИЗ РЕАЛИЗАЦИИ ОПЕРАЦИИ JOIN НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СИММЕТРИЧНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАННЫХ

М.С. ИВАНОВ¹, В.И. МУНЕРМАН²

Смоленский государственный университет
e-mail: ¹m_iv_1996@mail.ru; ²vimoon@gmail.com

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы.*

В работе рассматривается проблема оптимизации массовой обработки данных. Рассмотрен известный алгоритм распараллеливания запросов в базах данных и проведен его анализ на вычислительной системе с SMP архитектурой. Приведены результаты эксперимента, подтверждающие эффективность предложенного метода.

В настоящее время решение задачи оптимизации алгоритмов массовой обработки больших структурированных данных становится все более востребованной. Быстро развивающееся направление обработки больших данных, получившее название machine learning, требует существенного повышения скорости выполнения запросов к базам данных, из которых добывается информация для решения аналитических задач. Очень часто такие базы данных расположены на серверах, которые построены на основе SMP-архитектуры.

В основу экспериментального исследования была положена идея повышения производительности стандартных средств СУБД при выполнении операции Join за счет применения принципа симметричного горизонтального распределения данных [1]. Использовалась СУБД Microsoft SQL-Server, проведен анализ запросов вида SELECT ... FROM T1 Inner Join T2 ON T1.K=T2.K (K – общий ключ таблиц T1 и T2). Запросы спроектированы как хранимые процедуры, что обеспечивало наибольшую эффективность их реализации за счет средств СУБД [2]. В качестве аппаратных средств использована вычислительная система с SMP-архитектурой на базе 8-ядерного процессора. Результаты эксперимента представлены в таблице 1 и на рисунке 1.

Время выполнения запроса на разных объемах данных

Количество строк в каждой таблице	Время выполнения операции Join		
	Параллельно		Последовательно
	4 потока	8 потоков	
800000	0:00:42	0:00:18	0:01:04
1000000	0:00:45	0:00:27	0:01:40
1200000	0:01:12	0:00:38	0:02:43
1400000	0:01:31	0:00:50	0:03:45
1600000	0:01:49	0:01:04	0:04:04
1800000	0:02:32	0:01:20	0:06:13
2000000	0:03:18	0:01:40	0:06:15

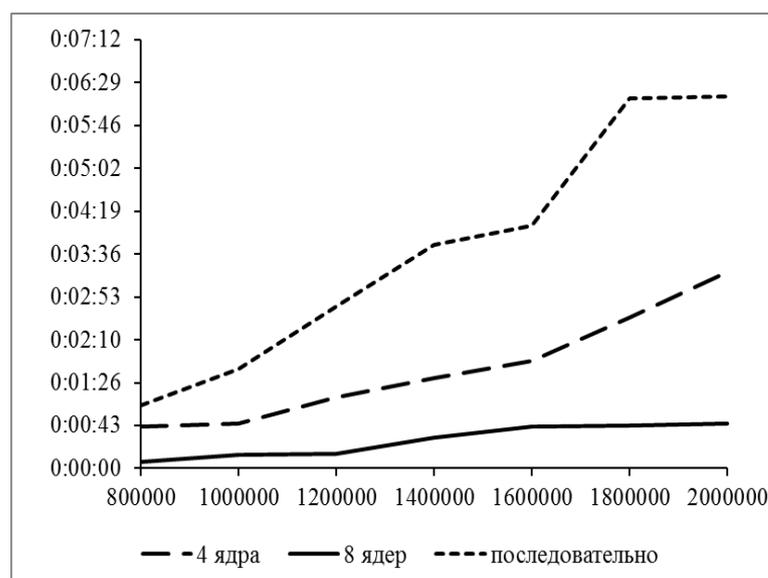


Рис. 1. Результаты работы последовательной и параллельной реализаций запроса

Как видно из таблицы и рисунка, при увеличении числа параллельно выполняемых потоков время реализации запроса уменьшается. При этом в случае многопоточной реализации время выполнения запроса по сравнению с его последовательной реализацией уменьшается в несколько раз. Ускорение существенно зависит от объема данных, чем он больше, тем выше эффективность параллельной реализации на основе симметричного горизонтального распределения. Увеличение числа потоков повышает производительность во столько раз, во сколько раз увеличилось число потоков.

Литература

1. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т.10, № 4. С. 3–16.

2. Макаров Д.И., Мунерман В.И. Параллельная реализация операции соединения для массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2012. Т.8, № 3. С. 26–28.

ОДНОВРЕМЕННОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВУХ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ СИГНАЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА ДВИЖЕНИЯ

А.В. ИГНАТЕНКОВ

Самарская государственная академия путей сообщения, г. Самара
e-mail: a.ignatenkov@gmail.com

УДК 656.222.4+519.673

Ключевые слова: *расписание движения, нейронная сеть, комплекс программ, переменное распространение сигнала.*

В работе иллюстрируется применение специализированного комплекса программ на основе многослойных ИНС с переменной проводимостью сигнала к разработке расписания движения поездов на однопутных и двухпутных участках.

В [1] показано применение многослойной искусственной нейронной сети с переменной проводимостью сигнала для построения графика движения поездов. Представленные ИНС позволяют строить график движения как на однопутном, так и на двухпутном участках.

Для этих целей автором разработан соответствующий комплекс программ, который функционирует следующим образом.

1. Происходит инициализация двух многослойных сетей (для чётного и нечётного прохождения сигнала) с помощью двукратного вызова процедуры `InitLayer()`. Значение веса связи выбирается случайным образом в интервале $(0;0,1)$ (процедура `InitLayer()`).

2. Затем процедурами `InitTrainPass()` и `GetNetPower()` происходит ввод данных о временах появления на участке пассажирских поездов и первоначальный расчёт сети. Далее идёт последовательный расчёт и обучение каждой из двух сетей, причём расчёт производится независимо от другой сети, а при обучении происходит исследование возникающих конфликтов.

3. При отсутствии ошибок происходит ввод данных о временах появления на участке грузовых поездов и первоначальный расчёт сети с учётом уже проложенных пассажирских поездов.

Для двухпутного участка вводятся новые процедуры (обучающие сеть для двух случаев: прибытие сигнала раньше или позже заданного времени).

Для упрощения возможности анализа работы кода, так как при очередном запуске программы в процедуре инициализации веса связей между нейронами задаются заново случайными числами, была добавлена возможность работы программы в двух режимах – debug и release.

В режиме debug есть возможность сохранить все параметры весов и состояний нейронов в файле формата xml (процедура `Serialization()`). Эта процедура может быть вызвана как после инициализации сети, так и в любой точке выполнения алгоритмов.

В режиме release в процедуре инициализации значения весов связей берутся из файлов, созданных процедурой, указанной выше. Этот приём полезен как для поиска ошибок в программе, так и для анализа поведения сети.

Рассмотрим сложный однопутно-двухпутный участок, на котором двухпутные фрагменты расположены по краям, а однопутный — в центре. Так как однопутный участок является лимитирующим с точки зрения пропускной способности, то построение графика движения поездов следует начинать именно с него.

Для этой цели используем однопутную ИНС, представленную в комплексе программ. Так как однопутная ИНС использует прием мутации входных данных, то график, выдаваемый однопутной ИНС, может несколько отличаться от ожидаемого пользователем.

После этого моменты отправления (прибытия) поездов с (на) пограничных станций становятся исходными данными для работы сетей на двухпутных участках. Две двухпутные ИНС строят график в процессе одновременного построения. В случае удачного завершения программы получившиеся данные сохраняются в формате lgx для просмотра их программой «АРМ инженера-графиста» (процедура `SaveLgx()`).

Последней операцией выполняется сложение фрагментов графиков для каждого из трех участков.

Литература

1. Игнатенков А.В., Ольшанский А.М. Применение искусственной нейронной сети для построения расписаний процессов на примере графика движения поездов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2, №. 11. С. 50–55.

2. Сирота А. А. Компьютерное моделирование и оценка эффективности сложных систем. М.: Техносфера, 2006. 280 с.

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СКОРИНГОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Д.А. КЛИМЕНКО¹, И.В. МУНЕРМАН²

Смоленский государственный университет

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва

e-mail: ¹ dn.klimenko@yandex.ru; ²ivm@munerman.ru

УДК 004.93'14: 004.891.2

Ключевые слова: *скоринговые модели, индекс должной осмотрительности, большие данные, статистические модели.*

В работе рассматриваются аспекты формирования выборок и построения скоринговых моделей на основе базы данных Oracle и среды компьютерной математики MATLAB, иллюстрируется развитие моделей во времени и говорится об их перспективах. Рассматриваются преимущества и недостатки отдельных методов. В качестве иллюстрации используется индекс должной осмотрительности.

Сегодня, с появлением индустрии больших данных, скоринговые модели в финансах играют крайне важную роль (см., например, [1; 2] и имеющуюся там библиографию). Существует иерархия скоринговых моделей. На первом месте стоит fraud score (индекс должной осмотрительности, ИДО) – скоринговая модель, выявляющая недобросовестного контрагента, мошенническую компанию, фирму, занимающуюся отмыванием денег. Второй уровень скорингов – это failure score (индекс финансового риска, ИФР), который рассчитывает вероятность банкротства компании. Третий уровень иерархии – это credit score (кредитный скоринг), который состоит из трех компонентов: максимальный кредитный лимит, ставка и срок предоставления кредита данному контрагенту.

Нами производится расчет ИДО, ИФР и кредитного лимита для Системы Профессионального Анализа рынков и Компаний (СПАРК), являющейся продуктом Международной информационной группы Интерфакс.

Наша позиция состоит в том, чтобы для проведения финансового анализа российских компаний активно использовать инструментарий распознавания образов. Имея на руках объективно распознанные данные о субъектах предпринимательской деятельности и событиях, которые с ними происходят, мы можем попытаться построить прогнозы тех или иных событий, которые важны для принятия нами обоснованных и беспристрастных экономических решений [3]. Данная практика позволяет существенно повысить качество аналитической работы,

избавить ее от человеческого фактора, а также существенно удешевить, что особенно актуально в условиях кризиса.

Следует отметить, что формальные результаты такой аналитики представляют собой данные, которые в режиме онлайн могут подаваться на вход корпоративной системы принятия решений, например кредитного конвейера, и также в режиме онлайн получать информацию, позволяющую нам оценивать релевантность существующей модели и при необходимости оперативно адаптировать ее под вновь открывшиеся обстоятельства.

В настоящее время СПАРК является уникальной системой, которая объединяет в себе колоссальные объемы информации, удовлетворяющие критериям, позволяющим называть ее провайдером больших данных. Сегодня в СПАРКе объединена информация обо всех юридических лицах России, а благодаря сотрудничеству с D&V существует возможность протягивать нити связей от 10 миллионов российских компаний к четверти миллиарда компаний со всего мира. Примерно для двух миллионов компаний мы можем анализировать финансовую отчетность. Одновременно с этим мы можем анализировать все государственные и коммерческие закупки на всех государственных и корпоративных электронных торговых площадках. Для анализа доступны судебные решения, причём не только в части их наличия / отсутствия, но и в части качественного анализа предмета судебного спора. Мы знаем про доменные имена, проверки контрольных органов, лицензии, наличие налоговой задолженности, объекты интеллектуальной собственности (патенты, товарные знаки), также доступна информация об исполнительных производствах в отношении компании, наличии заложенного имущества и многое другое.

Еще больше информации мы знаем об эмитентах: котировки акций, отчеты, МСФО, существенные факты, данные об облигациях. Модуль финансового анализа в СПАРКе позволяет рассчитывать финансовые коэффициенты, сравнивать их со среднеотраслевыми значениями, проводить горизонтальный и вертикальный анализ.

Важнейшим элементом информационной системы внутри СПАРКа является Индекс платежной дисциплины, который позволяет анализировать своевременность оплаты счетов компанией.

Поскольку большинство из этих данных охватывает всю информацию об объектах, то мы можем говорить о больших данных, особенность которых состоит в том, что мы анализируем генеральную совокупность, а не выборки из нее, что существенно повышает качество аналитических результатов. Сегодня в СПАРКе мы можем найти информацию обо всех российских компаниях и большинство их характеристик. Кроме того, используемые Интерфаксом инструментарию управления базой данных и моделирования являются

полноценными элементами глобальной инфраструктуры BigData (Oracle, Matlab). Архитектура базы данных и принципы моделирования также строятся в соответствии с международными стандартами, принятыми в данной отрасли (D&B).

Таблица 1

Показатели	ИДО 2011/2012	ИДО 2013	ИДО 2014	ИДО 2015	ИДО 2016
Выборка	1 000 неблагонадежных, 1 000 благонадежных (ручной отбор)	208 684 неблагонадежных, 27 360 благонадежных (автоматизированный отбор)	170 000 неблагонадежных, 30 000 благонадежных (полуавтоматический отбор)	134 516 неблагонадежных, 304 486 благонадежных компаний (полуавтоматический отбор)	39 549 неблагонадежных, 145 535 благонадежных (полуавтоматический отбор)
Факторы	9 (4 для компаний без финансовой отчетности)	20 (10 для компаний без финансовой отчетности)	Стало меньше финансовых факторов, добавились новые (существенные факты, отрасль, регион)	Около 40 факторов, включая новые	Около 50 факторов, включая новые
Модель	Декомпозиция трех моделей (CART, логистическая регрессия, гибридная нейронечеткая сеть)	Логистическая нейросеть на 61 или 100 нейронах	Логистическая регрессия	Декомпозиция трех моделей (CART, логистическая регрессия, нечеткая логика)	Декомпозиция двух моделей (логистическая регрессия, нечеткая логика)
Точность	88%-81%	95%-93%	97%-95%	98%-97%	98%-97%

В России по-прежнему огромное число юридических лиц не занимается производством товаров и услуг. Многие компании осуществляют странную деятельность, не поддающуюся адекватному экономическому анализу. Среди них ключевую роль играют так называемые «помойки» различных уровней, цель деятельности которых состоит в минимизации налогов различными способами, начиная от абсолютно криминальной «обналички» и заканчивая более высокоорганизованными схемами. Эти компании крайне токсичны, так как включение их в схему товарооборота немедленно создает риск налоговой проверки, тем более с учетом введенных новых правил учета счетов фактур. Не существует легальных способов минимизации косвенных налогов, наличие «помойки» в цепочке контрагентов легко вычисляется налоговыми органами, и только ограниченность количества сотрудников не позволяет провести выездные проверки по всем фактам топорной налоговой оптимизации. Тем не менее их количество неуклонно снижается. Еще около пять лет назад можно было найти массу недобросовестных контрагентов по одному адресу, сегодня этот адрес уже наверняка содержится в базе ФНС. Такие признаки типичной «помойки», как неработающий телефон, массовый адрес, массовые учредители и директора, уже в прошлом, именно поэтому мы и занимаемся постоянным совершенствованием индекса и обучением

нашей модели распознавания образов выявлять новые виды проблемных компаний и данных [4; 5].

В таблице 1 приведено развитие Индекса должной осмотрительности СПАРК-Интерфакс.

Несмотря на высокую эффективность CART-алгоритма, от него было принято решение отказаться ввиду высокой вычислительной сложности. Нейронные сети используются для повышения не только эффективности распознавания недобросовестных компаний, но и взломоустойчивости полученных результатов.

Литература

1. Hernandez J.R., Groot T. Corporate Fraud: Preventive Controls which Lower Fraud Risk – ARCA Amsterdam Research Center in Accounting, 2007. – 56 p. (Цит. по URL: http://www.academia.edu/27246846/Corporate_Fraud_Preventive_Controls_which_Lower_Fraud_Risk).

2. Lin J.W., Hwang M.I., Becker J.D. A fuzzy neural network for assessing the risk of fraudulent financial reporting // Managerial Auditing Journal. 2003. № 18/8. P. 657–665.

3. Мунерман И.В. Фондовый рынок и фактор однодневности: практический эксперимент по повышению прозрачности российской экономики // Рынок ценных бумаг. 2012. № 5. С. 18–23.

4. Мунерман И.В. Ускользящие однодневки. Новые реалии «должной осмотрительности» // Ваш Интерфакс. 2015. № 17. С. 8–12. URL: http://group.interfax.ru/ftproot/files/Vash_01_2015_INT_17.pdf.

5. Мунерман И.В., Лаба Р.М. Портрет контрагента через призму big data // Директор по безопасности. 2016. № 3. (Цит. по URL: <https://www.spark-interfax.ru/promo/ru/articles/33-portrait.html>).

РАСПОЗНАВАНИЕ ЛИЦ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ВИОЛЫ-ДЖОНСА И SURF

В.В. КРАВЧЕНКОВ

Смоленский государственный университет

e-mail: mr.kravchenkov@mail.ru

УДК: 004.93'1

Ключевые слова: *распознавание лиц, метод Виолы-Джонса, метод SURF, EmguCV.*

В данной работе рассмотрен подход комплексного применения методов Виолы-Джонса и SURF для распознавания лиц на изображениях и видеопоследовательностях в режиме реального времени. Описан алгоритм, разработано программное обеспечение с использованием библиотеки EmguCV.

Задача обнаружения лица человека в различной обстановке и последующей идентификации всегда находилась в ряду самых приоритетных задач для исследователей в области систем машинного зрения. Проблемой, стоящей перед системами компьютерного зрения, является большая изменчивость визуальных образов, связанная с изменениями освещенности, контрастности изображения, поворота объекта и его размера. Один из возможных подходов – это использование комплексного применения метода Виолы-Джонса и SURF.

Сам процесс распознавания можно разбить на два этапа: локализация лица на изображении и сравнение текущего лица с лицами в базе данных.

1. Метод Виолы-Джонса.

В настоящее время метод, предложенный 2001 году Полом Виолой и Майклом Джонсом, является самым эффективным методом для поиска области лица на изображении из-за высокой скорости и эффективности [1; 2]. Данный метод основан на трех принципах: интегральное представление изображения, построение классификатора на основе бустинга, объединение классификаторов в каскадную группу.

1.1. Интегральное представление изображения.

Интегральное представление позволяет быстро рассчитать суммарную яркость произвольного прямоугольника на данном изображении, причем время расчёта не зависит от размеров прямоугольника. Интегральное представление – это матрица, совпадающая по размерам с исходным изображением. В каждом ее элементе хранится сумма интенсивности всех пикселей, находящихся левее и выше данного элемента. Элементы матрицы рассчитываются по формуле:

$$I(x, y) = \sum_{x' \leq x, y' \leq y} i(x', y') \quad (1)$$

где $I(x, y)$ – значение точки (x, y) интегрального изображения; $i(x, y)$ – значение интенсивности исходного изображения. Каждый элемент матрицы $I(x, y)$ представляет собой сумму пикселей в прямоугольнике от $i(0,0)$ до $i(x, y)$, то есть значение каждого элемента $I(x, y)$ равно сумме значений всех пикселей левее и выше данного пикселя $i(x, y)$. Расчет матрицы занимает линейное время, пропорциональное числу пикселей в изображении, поэтому интегральное изображение просчитывается за один проход и он возможен по формуле:

$$I(x, y) = i(x, y) - I(x - 1, y - 1) + I(x, y - 1) + I(x - 1, y). \quad (2)$$

1.2. Признаки Хаара.

Признак – отображение $f: X \rightarrow D_f$, где D_f – множество допустимых значений признака. Если заданы признаки f_1, f_2, \dots, f_n , то вектор признаков $x = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ называется признаковым описанием объекта $x \in X$. Признаковые описания допустимо отождествлять с самими объектами. При этом множество $X = D_{f_1} \times D_{f_2} \times \dots \times D_{f_n}$ называют признаковым пространством [1].

В стандартном методе Виолы–Джонса используются прямоугольные признаки (рис. 1). Данные признаки называют примитивами Хаара.

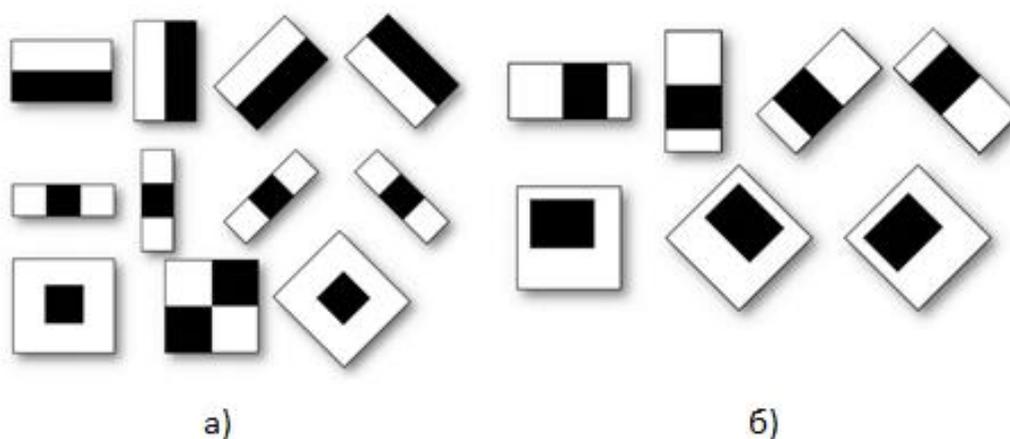


Рис. 1. Признаки Хаара: а) примитивы; б) дополнительные признаки

1.3. Метод построение классификатора на основе алгоритма бустинга.

Бустинг – совокупность методов, повышающих точность аналитических моделей. Понятие *бустинг* (от англ. boosting – повышение, усиление, улучшение) означает «усиление» «слабых» моделей – это процедура последовательного построения композиции алгоритмов машинного обучения, когда каждый следующий алгоритм стремится компенсировать недостатки композиции всех предыдущих алгоритмов [4]. Идея бустинга была предложена Робертом Шапиром в конце 90-х годов [3], когда надо было найти решение вопроса о том, чтобы, имея множество плохих (незначительно отличающихся от случайных) алгоритмов обучения, получить один хороший. В основе такой идеи лежит построение цепочки классификаторов [3; 4], которые называется каскадом, каждый из которых (кроме первого) обучается на ошибках предыдущего. Бустинг представляет собой *жадный алгоритм* построения композиции алгоритмов (greedy algorithm) — это алгоритм, который на каждом шагу делает локально наилучший выбор в надежде, что итоговое решение будет оптимальным [4].

2. Метод SURF(Speeded-Up Robust Features).

Данный метод включает две важные задачи: поиск особых точек изображения и создание их дескрипторов [5].

2.1. Особые точки.

Особая точка – это точка, имеющая существенные признаки, отличающие ее от других. Например, резкие перепады освещенности. Особые точки ищутся путем анализа определителя матрицы Гессе для каждого пикселя изображения по формуле (3):

$$\det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2. \quad (3)$$

Если значение определителя превысило специально установленный порог, то считается, что найдена особая точка. Такая операция выполняется для каждого пикселя изображения.

2.2. Нахождение ориентации ключевых точек.

Для каждой найденной особой точки в ее окрестности ищется направление вектора максимального перепада функции интенсивности изображения с использованием примитивов Хаара.

2.3. Построение дескриптора.

Вокруг особой точки описывается прямоугольная область. Эта область разбивается на регионы размером 4×4. Прямоугольная область затем поворачивается в соответствии с ориентацией ключевой точки. На следующем шаге считаются оценки для каждого из регионов с помощью примитивов Хаара.

Схема комплексного использования рассмотренных методов представлена на рисунке 2.

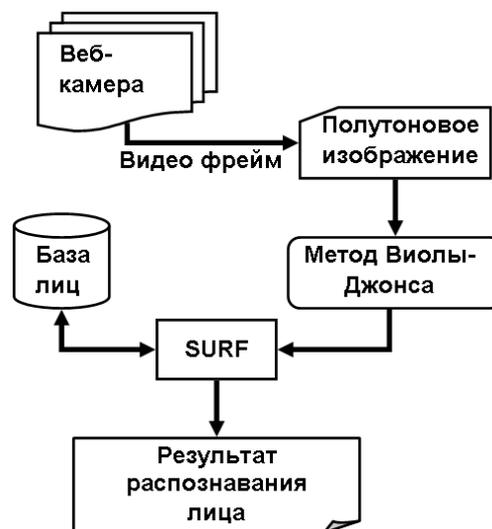


Рис. 2. Гибридное решение

В статье предложен и рассмотрен один из подходов для решения задачи распознавания образов.

Литература

1. Viola P., Jones M.J. Rapid object detection using a boosted cascade of simple features // IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Kauai, Hawaii, USA, 2001. V. 1. P. 511–518.
2. Viola P., Jones M.J. Robust real-time face detection // International Journal of Computer Vision. 2004. Vol. 57, No. 2. P.137–154.
3. Freund Y., Schapire R.E. A Short Introduction to Boosting // Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence. 1999. V. 14, № 5. P. 771–780.
4. Sochman J., Matas J. AdaBoost with totally corrective updates for fast face detection // Center for Machine Perception, Czech Techniical University, Prague. 2004.
5. Bay H., Tuytelaars T., Van Gool L. SURF: Speeded Up Robust Features // Journal Computer Vision and Image Understanding. 2008. Vol. 110, Is. 3. P. 346–359.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ШИФРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ

А.И. МАКАРОВ

Смоленский государственный университет
e-mail: al.makarov8@gmail.com

УДК 003.29

Ключевые слова: *цифровая стеганография, шифрование информации, цветовая палитра, цифровой водяной знак.*

В статье рассматривается один из простейших методов шифрования информации с помощью изображений. Приведен алгоритм для шифрования путём наложения цветового водяного знака и для его дешифрования.

Цифровая стеганография – направление классической стеганографии, основанное на сокрытии или внедрении дополнительной информации в цифровые объекты, вызывая при этом некоторые искажения этих объектов. Как правило, данные объекты являются мультимедиа-объектами (изображения, видео, аудио, текстуры 3D-объектов) и внесение искажений, которые находятся ниже порога чувствительности среднестатистического человека, не приводит к заметным изменениям этих объектов [1].

Самым известным является алгоритм LSB (Least Significant Bit) и группа алгоритмов на его основе, работающих с цифровым сигналом. Его суть заключается в том, что младшие биты цветовых компонент палитры можно задействовать для передачи информации. В силу простоты алгоритма для компьютера его защищенность практически нулевая – компьютер может легко перебрать количество используемых младших битов и считывать только их. Преимуществом же является то,

что человек не может различить информативное изображение от неинформативного и без помощи компьютера информация недостижима.

Другая группа опирается на особенности форматов файлов. Основой их функционирования является дописывание в метафайлы дополнительных блоков информации, к которым основные программы для работы с файлами не получают доступ, ограничиваясь достаточной служебной информацией. Он абсолютно незаметен для человека: изображения не теряют цветов, так как никаких изменений в них не вносится. Но увеличивается объем метаданных, следовательно, и самого файла-носителя. Защищенность данных так же, как и в методах, работающих с цифровым сигналом, нулевая. Машине достаточно просто проверить файл на наличие скрытой информации, и она станет доступна.

Третья крупная группа – алгоритмы «впаивания» информации. Информация преобразуется в цветовой водяной знак (ЦВЗ) либо в другой формат, подходящий для наложения на исходный файл.

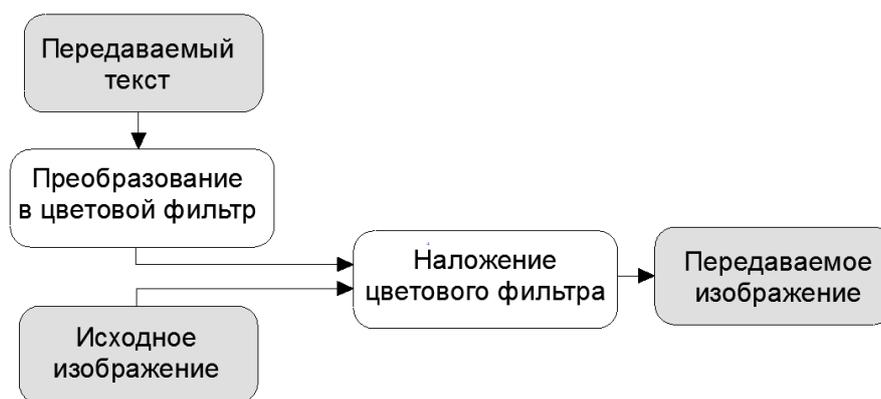


Рис. 1. Алгоритм шифрования методом превращения текста в цветовую маску и наложения на исходное изображение

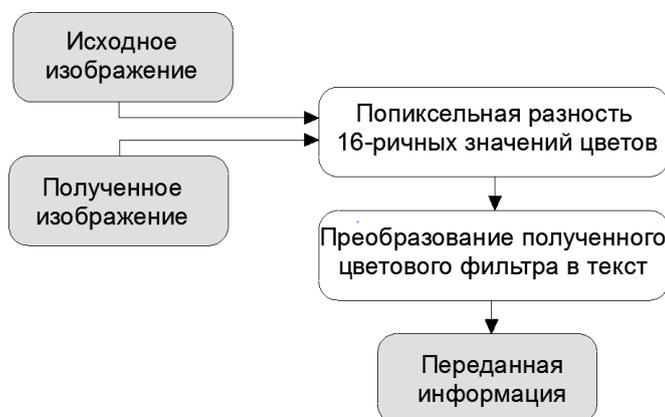


Рис. 2. Алгоритм дешифрования методом получения ЦВЗ, с использованием двух изображений и преобразования его в текст

Рассмотрим более внимательно один из алгоритмов «впаивания» информации. Метод заключается в шифровании информации путём сдвига 16-ричного значения цвета каждого пикселя на значение, соответствующее коду символа. Преимущество метода состоит в том, что машина без исходного изображения не может получить зашифрованную информацию, однако метод имеет и весомый недостаток – для человеческого глаза изменения изображения очень заметны, так как на исходный файл накладывается определенный цветовой фильтр. Алгоритм для шифрования информации этого метода представлен на рисунке 1. Алгоритм для дешифрования информации этого метода представлен на рисунке 2.

Путем опытов на различных изображениях и текстах получено, что возможно подобрать такое исходное изображение, что при наложении ЦВЗ изменение изображения для человека будет неочевидным. Наименее подходящими для этого алгоритма оказались изображения, содержащие светлые участки, так как чем светлее участок, тем заметнее цветовой фильтр. Наиболее подходящие – изображения в темно-синей, темно-фиолетовой и темно-зеленой гаммах.

Важным моментом является то, что, при использовании одного исходного изображения более трех раз даже с различной информацией, защищенность этого алгоритма снижается, так как компьютером может быть вычислено среднее значение по фильтрам и на его основе получена информация со всех переданных изображений даже без наличия исходного.

Поэтому в данной статье и рассмотрен алгоритм наиболее отдаленный, с точки зрения человека, от классической стеганографии, но с машинной точки зрения являющийся основным.

Литература

1. Грибунин В.Г., Оков И.Н., Туринцев И.В. Цифровая стеганография. М.: Изд-во «Солон-Пресс», 2002. 272 с.

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В СРЕДЕ РАЗРАБОТКИ 1С: ПРЕДПРИЯТИЕ

Д.М. МАКСИМОВСКИЙ
Смоленский государственный университет
e-mail: rusmailuser@yandex.ru

УДК 004.623

Ключевые слова: *1С: Предприятие, база данных, параллельное программирование, фоновое задание, электронный документ.*

В докладе рассматриваются перспективы использования механизмов параллельной обработки данных в среде разработки, реализующейся с помощью платформы 1С: Предприятие. В качестве примера рассмотрена актуальная задача загрузки / выгрузки электронных документов в базу данных.

На территории России фирма 1С является бесспорным лидером в области разработки программного обеспечения для автоматизации учета на предприятиях. Уже трудно представить компанию, которая не использует в работе конфигурации 1С (Управление торговлей, Бухгалтерия предприятия, Зарплата и кадры и др.). Функционал предоставляемых 1С продуктов настолько разнообразен и сложен, что на территории России существуют более 5000 сертифицированных франчайзинговых компаний, на базе которых происходит продажа и обслуживание конфигураций.

Весь процесс разработки новых и доработки существующих конфигураций 1С базируется на использовании инструментов технологической платформы 1С: Предприятие 8. Высокий уровень зарплат 1С-программистов и серьезные требования, предъявляемые к знаниям экономической стороны предметной области, способствуют тому, что дорабатывают конфигурации под требования заказчика часто не профессиональные разработчики. В свою очередь, это становится серьезной преградой для продвижения новых технологий разработки. Примером такой неоправданной задержки можно считать позднее внедрение инструментов по разработке параллельных алгоритмов. К сожалению, в подавляющем большинстве программного кода типовых конфигураций 1С не задействован потенциал многопроцессорных вычислительных машин.

Разумеется, разработка параллельных программ значительно сложнее чем последовательных: программисту постоянно приходится грамотно разделять и синхронизировать данные, предвидеть и исключать взаимные блокировки ресурсов. Но на практике часто возникают критичные по времени задачи, лишенные перечисленных трудностей. В качестве примера такой задачи может служить выгрузка / загрузка электронных документов в базу 1С.

Загрузка данных может быть проведена из файлов с расширениями .txt, .xls, .docx и др. Чтобы документы, добавляемые в базу из файла, были заполнены корректно, необходимо чтобы файл был заполнен по специальному шаблону (рис. 1).

Сама же реализация алгоритма параллельной обработки данных была осуществлена с помощью недавно появившегося в 1С механизма фоновых заданий: данные были разделены на одинаковые порции между ядрами, каждая из которых может обрабатываться по отдельности.

Записи в базе хранятся таким образом, что, даже несмотря на постоянное обращение к жесткому диску, можно рассчитывать на серьезное ускорение от применения параллелизма. Для анализа результата было произведено сравнение затрачиваемого времени от числа задействованных ядер процессора и объема данных.

	A	B	C	D	E
1	Артикул		Товар	валюта	Цена
2	17 123		Принтер документов FPrint-55 для ЕНВД. Белый. RS+USB.	руб.	10 900,00
3					
4					
5	20 131		Принтер документов FPrint-22 для ЕНВД. Черный. RS+USB.	руб.	11 400,00
6	14 249		Принтер документов FPrint-5200 для ЕНВД. Белый. RS+USB.	руб.	12 500,00
7	14 262		Принтер документов FPrint-5200 для ЕНВД. Черный. RS+USB.	руб.	12 500,00
8					
9	14 251		Принтер документов FPrint-02 для ЕНВД. Белый. RS+USB.	руб.	15 800,00
10	14 263		Принтер документов FPrint-02 для ЕНВД. Черный. RS+USB.	руб.	15 800,00
11	14 250		Принтер документов FPrint-03 для ЕНВД. Белый. RS.	руб.	8 500,00
12	14 261		Принтер документов FPrint-03 для ЕНВД. Черный. RS.	руб.	8 500,00

Рис. 1. Пример заполнения файла Excel

В итоге, механизм фоновых заданий является важным нововведением платформы 1С: Предприятие. Он позволяет разработчику более эффективно использовать вычислительные ресурсы системы, применяя новые подходы для оптимизации существующего программного кода, а также имеет большой потенциал для дальнейшего развития и совершенствования.

Литература

1. Радченко М.Г., Хрусталева Е.Ю. 1С: Предприятие 8.3: практическое пособие разработчика, 2013.

ОБНАРУЖЕНИЕ СЕТЕВЫХ ВТОРЖЕНИЙ МЕТОДОМ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Д.Ю. МОТОРИН, Т.А. САМОЙЛОВА

Смоленский государственный университет

e-mail: sovsemsmolenskiy@gmail.com; tatsam@hotmail.ru

УДК 004.8

Ключевые слова: сетевые угрозы, обнаружение вторжений, анализ сетевого трафика, машинное обучение, метод ближайшего соседа, классификатор.

В статье рассмотрена возможность использования метода машинного обучения для обнаружения сетевых вторжений. Предлагается программная система обнаружения атак, основанная на методе k-ближайших соседей. Приводятся оценки точности классификатора атак.

Пугающие цифры утечек данных за последние несколько лет говорят о том, что организациям становится все труднее справляться с растущим числом угроз. Одной из проблем является разработка программных систем обнаружения нежелательного трафика. Такие системы используются не только в частных или коммерческих целях, но и в критически важных инфраструктурах государственного значения, вывод из строя которых в результате успешно выполненной атаки может привести к значительным материальным, финансовым и даже политическим потерям. Решением данной проблемы может стать разработка программных систем защиты, основанная на алгоритмах машинного обучения [1]. Эти алгоритмы искусственного интеллекта можно применить для построения и обучения моделей классификаторов, способных анализировать сети, выявлять их особенности, распознавать аномалии и таким образом защищать предприятия от атак. При этом в качестве источника данных для обнаружения аномальной активности используются журналы регистрации и текущая деятельность пользователя.

В рамках данной работы разработана программная система, представляющая собой классификатор сетевых вторжений, построенный средствами машинного обучения. Задача, поставленная перед системой, сводится к мультиклассовой классификации с предварительным обучением на соответствующей выборке. В качестве обучающего алгоритма был выбран метод "k-ближайших соседей". Данный метод ("k-nearest neighbors") относится к классу методов, работа которых основывается на хранении данных в памяти для сравнения с новыми элементами. Основной его принцип – это присваивание объекту того класса, который является наиболее распространенным среди соседей данного объекта. Преимущества метода: простота использования полученных результатов; решения не уникальны для конкретной ситуации, их использование возможно для других случаев; целью поиска является не гарантированно верное решение, а лучшее из всех возможных.

Программная система разрабатывалась на языке C# с использованием относительно нового фреймворка Accord.NET [2], содержащего большой набор алгоритмов искусственного интеллекта в библиотеке Accord.MachineLearning. В качестве обучающей выборки для анализа использовалась таблица базы данных из 125 946 записей. Содержание полей таблицы: длительность соединения (секунды); число байт, переданных от источника к получателю; число байт, переданных от получателя к источнику; число соединений с совпадающим хостом; число соединений с совпадающим сервисом; % соединения с ошибкой "SVN"; SRV % соединения с ошибкой "SVN". Соединение представляет собой последовательность пакетов, начинающуюся и заканчивающуюся

в определенные моменты времени, между которыми потоки данных передаются от IP-адреса источника к IP-адресу получателя по определенному протоколу. Каждое соединение обозначено как нормальное либо как тип атаки одной из четырех категорий: отказ в обслуживании (Denial of Service, DoS), несанкционированное получение прав пользователя (Remote to Local, R2L), несанкционированное повышение прав пользователя до суперпользователя (User to Root, U2R) и зондирование (Probe).

В таблице 1 представлены результаты оценки качества разработанного классификатора в зависимости от значения атрибута k метода ближайших соседей. По стандартным метрикам вычислены значения аккуратности, точности, полноты и F-меры. Объем тестовой выборки – 6711 записей.

Таблица 1

Оценки качества разработанного классификатора сетевых вторжений

Значение атрибута k	Аккуратность (Accuracy)	Точность (Precision)	Полнота (Recall)	F-мера (F-measure)
1	0,9754135	0,957281	0,9369996	0,9470205
2	0,9739234	0,9625182	0,9197898	0,9406691
3	0,9737744	0,9556686	0,9298959	0,9426061
4	0,9740724	0,9605271	0,9270604	0,9434971
5	0,9730294	0,9576159	0,9256517	0,9413626

Представленные результаты показывают высокий уровень качества разработанной модели классификатора сетевых вторжений, что позволит с высокой точностью фильтровать трафик и выполнять защиту http-серверов.

Литература

1. Воронцов К.В. Машинное обучение (курс лекций) // URL:<http://www.machinelearning.ru>.
2. URL: <http://accord-framework.net/>.

ОДИН МЕТОД РЕАЛИЗАЦИИ СИММЕТРИЧНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАННЫХ

В.И. МУНЕРМАН, Д.В. МУНЕРМАН

Смоленский государственный университет
e-mail: vimoon@gmail.com; danvmoon@gmail.com

УДК 004.657

Ключевые слова: *массовая обработка данных, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы, WebAPI.*

В работе рассмотрен подход к построению программно-аппаратных комплексов для реализации симметричного горизонтального распределения таблиц в реляционных базах данных. Для решения поставленной задачи предложено использовать стандартные технологии разработки сетевого программного обеспечения.

Для параллельной реализации операции Join (слияние нестрого упорядоченных файлов) необходимо специальным образом распределить таблицы между процессорами, выполняющими операцию над фрагментами таблиц. Для этой цели используется принцип симметричного горизонтального распределения данных, подробно рассмотренный в [1]. Для реализации этого принципа исходные данные – таблицы-операнды должны быть представлены как индексно-последовательные. Это означает, что каждой таблице соответствует **индекс**, каждая запись которого содержит: значение ключа, задающего сравнение строк таблиц-операндов при выполнении Join; номер первой строки с таким значением ключа; количество строк с этим значением ключа. Из **индексов** обеих таблиц строится **индекс распределения** как пересечение **индексов** таблиц-операндов, каждая строка которого содержит данные соответствующих строк обоих индексов. На основе **индекса распределения** производится распределение данных таблиц-операндов между фрагмент-процессорами, выполняющими операцию Join над фрагментами таблиц операндов. Для этого используется один из оптимизационных алгоритмов [1; 2], например, мультипликативный рюкзак (Multiple Knapsack) или бустрофедон.

Для параллельной реализации операции Join может быть использован программно-аппаратный комплекс на основе вычислительной сети: локальная сеть, интранет, Интернет. Архитектура такого комплекса (схема передачи данных между вычислительными узлами) показана на рисунке 1. В этом случае самую важную роль играет выбор архитектуры и технологии разработки программного обеспечения, задача которого состоит в передаче данных между основной БД и ее фрагментами. Одно из решений состоит в выборе архитектуры (WEB API)-приложения, которая позволяет, как правило, независимо от платформы, использовать средства разработки, подобные ASP.NET Framework и паттерны технологии программирования MVC [3].

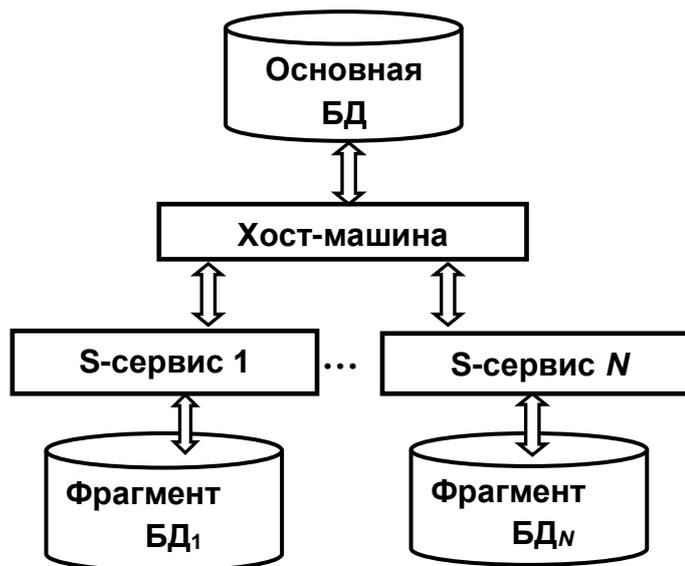


Рис. 1. Программно-аппаратный комплекс для обработки симметрично горизонтально распределенных данных

В этой архитектуре несколько изменена идея клиент-серверной архитектуры. Основная БД располагается на узле-клиенте (хост-машине), который взаимодействует по данным и управлению с узлами-серверами, реализующими обработку фрагментов WEB-сервисами (на рисунке они названы S-сервисами). S-сервис содержит необходимые для работы API-контроллеры, обрабатывающие GET и POST запросы от клиента (хост-машины). Реализованы API-контроллеры трех типов, со следующими функциями:

Тип 1. Инициализации фрагмента БД.

Тип 2. Прием, распаковка и добавление в принятого по сети блока.

Тип 3. Выполнение операции Join над таблицами-операндами БД-фрагмента.

По завершении всех действий, связанных с выполнением операции Join, хост-машина принимает результаты от всех S-сервисов.

При разработке программного обеспечения пришлось отказаться от применения всех возможностей технологии MVC, в частности, от функций, связанных с моделью данных, что могло бы упростить разработку. При использовании этих функций возникли бы большие потери ресурсов, в частности времени, из-за необходимости преобразования таблиц-операндов в JSON-формат и обратно и значительного увеличения объема передаваемых по сети данных.

Разработанная архитектура была реализована на локальной сети. Экспериментальный анализ показал, что время симметричного горизонтального распределения двух таблиц-операндов большого объема незначительно (не более чем на 5%) увеличивает время параллельного выполнения операции Join, которое в разы меньше времени ее последовательного выполнения.

Литература

1. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, № 4. С. 3–16.
2. Martello S., Toth P. Knapsack problems: algorithms and computer implementations. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1990. P. 306.
3. Клири С. Введение в async/await в ASP.NET. <https://msdn.microsoft.com/ru-ru/magazine/dn802603.aspx>.

АНАЛИЗ УМНОЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ НА ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫХ КОМПЛЕКСАХ С SMP АРХИТЕКТУРОЙ

В.И. МУНЕРМАН, Н.В. ПАРФЕНОВ

Смоленский государственный университет
e-mail: vimoona@gmail.com; npzxcf@gmail.com

УДК 004.657

Ключевые слова: *многомерные матрицы, параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы.*

В работе дано описание вычислительного эксперимента, который проводился на различных программно-аппаратных комплексах с SMP архитектурой для оценки алгоритма умножения матриц с различным числом измерений. Приведены результаты эксперимента, проведен их анализ.

При параллельной реализации операции умножения многомерных матриц на программно-аппаратных комплексах с SMP архитектурой особую роль играет соотношение между количеством обрабатываемых блоков матриц-операндов, которое определяет число параллельно выполняемых потоков, и количеством процессоров (ядер), на которых эти потоки выполняются. Это объясняется тем, что в указанной архитектуре данные (блоки матриц) не перемещаются в памяти, а потоки получают к ним доступ посредством пересчета индексов (адресов блоков). Для дальнейшего изложения существенно определение операции умножения многомерных матриц. Матрица $C = \|c_{lsm}\|$, элементы которой вычисляются по формуле

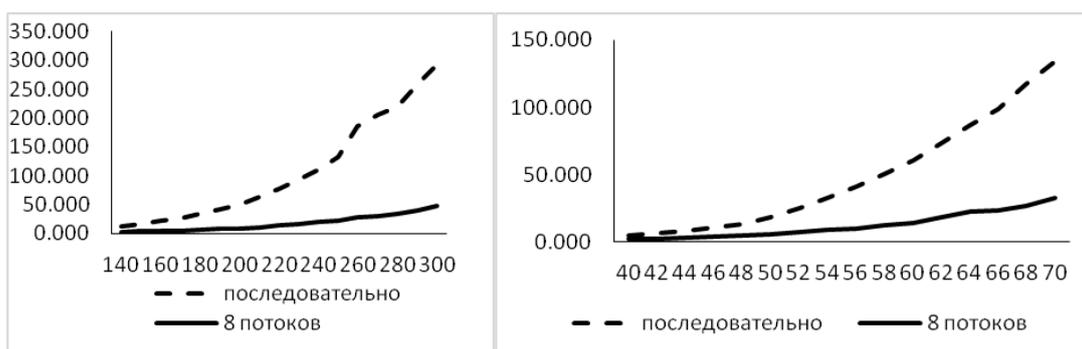
$c_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} \times b_{scm}$, называется (λ, μ) -свернутым произведением матриц

A и B и обозначается ${}^{\lambda, \mu}(A \times B)$. Индексы разбиений c – кэлиевы, s – скоттовы, m и l , – свободные [1].

Для умножения использовался блочный параллельный алгоритм умножения многомерных матриц, описание которого приведено в [2; 3]. Эксперимент проводился для трехмерных (A_{lsc}, B_{scm}) и четырехмерных ($A_{l_1s_2c}, B_{s_1s_2cm}$) числовых матриц. Это объяснялось тем, что количество скоттовых индексов определяет размерность блоков матриц-операндов и размерность матрицы-результата. Все индексы трехмерных матриц принимали значения от 10 до 300 с шагом 10, а четырехмерных – 10 до 70 с шагом 2.

На каждом шаге эксперимента выполнялись последовательное и параллельное (8 и 27 потоков) умножение многомерных матриц. Таким образом, для трехмерных матриц выполнялось (1, 1)-свернутое произведение, а для четырехмерных – (2, 1)-свернутое произведение. Программно-аппаратные комплексы создавались как виртуальные машины Microsoft Azure на основе процессора Xeon E5. Использовались конфигурации с восьмью и шестнадцатью ядрами.

Результаты эксперимента, приведенные на рисунке 1, показывают, что с увеличением размерности индексов возрастает эффективность параллельного алгоритма.



А) трехмерные матрицы

Б) четырехмерные матрицы

Рис. 1. Зависимость производительности алгоритма от размерности индексов

Результаты этого этапа эксперимента позволяют утверждать, что предложенный алгоритм обеспечивает высокую производительность при умножении многомерных матриц. То есть независимо от размерности матрицы и при фиксированном числе потоков, меньшим или равным числу ядер производительность программно-аппаратного комплекса возрастает.

На втором этапе эксперимента производилось сравнение соотношения числа потоков и числа ядер. На рисунке 2 приведены результаты этого анализа.

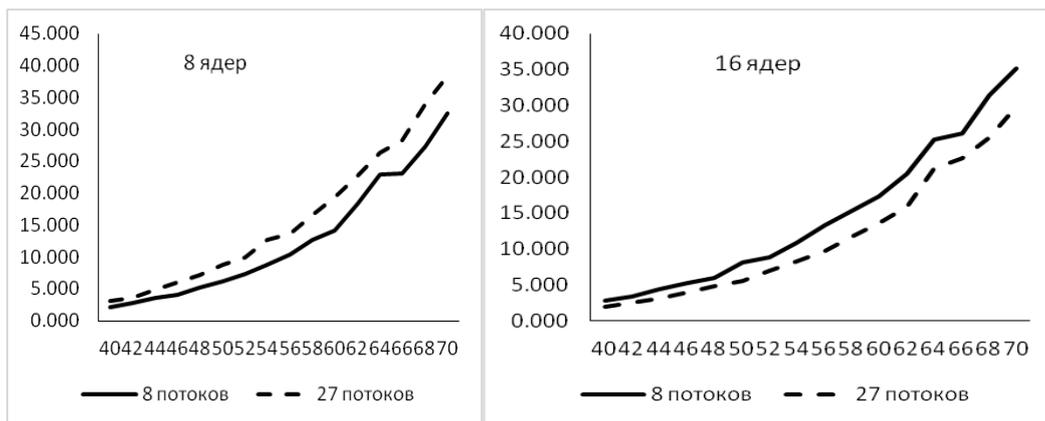


Рис. 2. Зависимость производительности алгоритма от числа вычислителей

Как можно заметить, графики различаются. Разделение на 8 потоков более эффективно на восьмиядерной машине, а разделение на двадцать семь потоков более эффективно на шестнадцатиядерной машине. Из этого можно сделать вывод о том, что эффективность параллельного алгоритма умножения многомерных матриц существенно зависит от соотношения количества потоков и ядер. Алгоритм тем эффективнее, чем ближе число потоков к числу ядер.

Литература

1. Мунерман В.И. Многомерно-матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2012. Т. 8, № 3. С. 19–22.
2. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Параллельная реализация обработки интенсивно используемых данных на основе алгебры многомерных матриц // Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных: XVII Международная конференция DAMDID/RCDL'2015 (Обнинск, 13 – 16 октября 2015 года, Россия): труды конференции. Обнинск: ИАТЭ НИЯУ МИФИ, 2015. С. 217–223.
3. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Параллельный алгоритм умножения многомерных матриц // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2, № 11. С. 384–391.
4. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, № 4. С. 3–16.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ СРЕДСТВАМИ MICROSOFT AZURE

В.И. МУНЕРМАН, О.С. СЛЕПЕНКОВА,
Смоленский государственный университет
e-mail: vimoona@gmail.com; olgaslepenkova1994@gmail.com

УДК 004.891

Ключевые слова: *параллельное программирование, программно-аппаратные комплексы, облачные системы.*

В работе проведен анализ алгоритма параллельной реализации операции Join на основе принципа симметричного горизонтального распределения данных. В облачной системе Microsoft Azure был сконструирован виртуальный программно-аппаратный комплекс на основе MPP-архитектуры. Приведены экспериментальные данные, подтверждающие эффективность предложенных алгоритма и архитектуры.

В работе приводится экспериментальное исследование, в основу которого была положена идея повышения производительности стандартных средств СУБД при выполнении операции Join за счет применения принципа симметричного горизонтального распределения данных [1]. В ходе эксперимента был проведен анализ запросов вида SELECT ... FROM T1 Inner Join T2 ON T1.K = T2.K (K – общий ключ таблиц T1 и T2). Запросы были спроектированы как хранимые процедуры, что обеспечивало наибольшую эффективность их реализации за счет средств СУБД. Была использована MPP архитектура программно-аппаратного комплекса (рис. 1), реализованного в облачной системе Microsoft Azure.

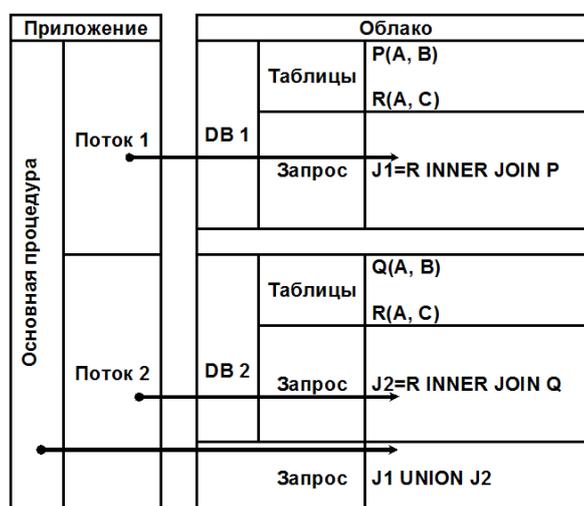


Рис. 1. Архитектура программно-аппаратного комплекса

Управляющее работой комплекса приложение размещалось на виртуальной машине серии F (Standard_F16s: 16 ядер, 32 Гб оперативной памяти и 64 Гб SSD) на основе процессора Intel Xeon E5-2673. Здесь создавались таблицы основной БД и производилось симметричное горизонтальное распределение их по четырем фрагментам,

расположенным в БД на различных облачных серверах. Обработка основной БД выполнялась на этой же виртуальной машине средствами установленной на ней СУБД Microsoft SQL-Server. Результаты эксперимента представлены в таблице 1 и на рисунке 2.

Таблица 1

Сравнение параллельной и последовательной реализации Join

Объем таблиц (тыс. записей)	Время выполнения операции Join (мин.)		Ускорение (раз)
	параллельно	последовательно	
500	1,035	4,386	4,24
750	1,363	12,181	8,94
1000	2,085	18,001	8,63
1250	2,421	27,051	11,17
1500	3,137	39,31	12,53
1750	3,462	48,006	13,87
2000	4,013	59,431	14,81

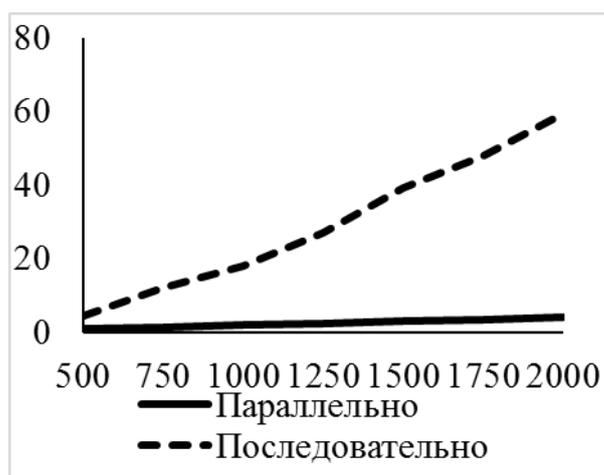


Рис. 2. Соотношение времени последовательной и параллельной реализации Join

Эксперимент подтвердил гипотезу об эффективности применения симметричного горизонтального распределения данных для параллельной обработки данных в облачных системах.

Литература

1. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, № 4. С. 3–16.

2. Munerman V.I. The experience of massive data processing in the cloud using Windows Azure (as an example) // Moscow: Highly available systems. 2014. Vol. 10, No 2. P. 3–8.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНТЕЙНЕРНОЙ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В.И. МУНЕРМАН¹, В.Д. ЧИКУНОВ²

Смоленский государственный университет
e-mail: ¹vimoon@gmail.com; ²valchikunov@gmail.com

УДК 004.659

Ключевые слова: *Grid-системы, контейнерный метод, контейнер.*

Статья посвящена контейнерному методу организации параллельных вычислений, который можно использовать для решения задач в распределённых вычислительных системах. Этот метод можно рассматривать как средство для создания частных grid-систем.

Решение задач массовой обработки данных требуют большого числа ресурсов. Последовательные методы для решения этих задач не эффективны из-за постоянно возрастающего времени их выполнения. Решение данной проблемы состоит в использовании одного или нескольких методов параллельной обработки данных. Далее рассматривается способ реализации распределённых вычислений на основе контейнерной технологии. Этот способ позволяет повысить производительность программно-аппаратного комплекса, предназначенного для параллельной реализации решения задач с высокой вычислительной сложностью. Кроме того, этот способ позволяет простое построение вычислительных комплексов, относящихся к классу grid-систем, которые в настоящее время широко распространены. grid-системы – это слабосвязанные, гетерогенные вычислительные системы [1]. Их достоинство заключается в высокой масштабируемости по сравнению с параллельной реализацией на одном вычислительном устройстве. Они представляют собой совокупность независимых вычислительных узлов, связанных общим программным обеспечением. Недостаток таких grid-систем состоит в том, что для их реализации необходимо использовать нестандартное программное обеспечение, например, BOINC, Hadoop, Condor [2 - 4]. То есть построение собственных grid-систем осложняется необходимостью приобретения (иногда и некоммерческого) соответствующего продукта. Кроме того, множество функций таких систем может быть избыточным для решения конкретной задачи. Далее предлагается контейнерный метод как средство построения локальных, ориентированных на конкретную задачу grid-систем.

Контейнерный метод состоит в использовании программного приложения без его установки на узел, который предоставляет вычислительные ресурсы. Для приложения создаётся свой собственный образ (контейнер), который представляет собой минимальную среду необходимую для работы этого приложения. Если узел располагает ресурсами, достаточными для решения задачи, реализованной в контейнере, его ОС выделяет эти ресурсы и запускает контейнерное приложение. Для проверки эффективности предложенного способа был проведён вычислительный эксперимент. В ходе эксперимента решалась задача параллельного умножения матриц алгоритмом Фокса [3].

Был реализован web-сервис, реализующий разбиение задачи на множество подзадач и предоставление этих подзадач вычислительным узлам. В качестве приложения-подзадачи для узла был использован Docker-контейнер со следующими характеристиками: 1 виртуальный процессор, 1 ГБ ОЗУ, 6 ГБ HDD.

Данный узел разворачивается на доступной машине пользователя и регистрируется на сервисе как свободный узел. Свободный узел обращается к сервису с целью получения задачи. Задача на сервисе отмечается как занятая до получения результата от узла. Узел в это время помечается как работающий. Эксперимент проводился для двумерных квадратных матриц. Для сравнения производились вычисления последовательно на одном ядре, параллельно на четырёх ядрах и распределено на четырёх узлах со скоростью передачи по сети 2Гбит/с.

Результаты эксперимента представлены в таблице 1.

Таблица 1

Сравнение времени умножения матриц

Размерность индексов	Последовательно	Параллельно	Распределено
100	0,11	0,35	0,68
900	5,86	2,84	2,93
1000	8,14	3,58	3,39
2000	78,23	26,53	28,29
3000	301,77	120,13	119,23
4000	792,34	238,95	224,32
5000	1555,61	706,51	732,76
6000	2710,75	936,52	944,21

Эксперимент показал, что параллельный и распределённый методы имеют примерно одинаковую вычислительную сложность. Поскольку распределённый метод более предпочтителен, чем параллельный, в силу его масштабируемости, можно утверждать, что его применение оправдано для построения частных вычислительных комплексов на основе grid-технологии.

Литература

1. The Grid, Blueprint for a New computing Infrastructure, Morgan Kaufmann Publishers / Ian Foster, Carl Kesselman (eds). Inc., 1998. The Grid 2: Blueprint for a New Computing Infrastructure / I. Foster and C. Kesselman (eds). Morgan Kaufmann Publishers, 2004.
2. <http://hadoop.apache.org/>.
3. <https://boinc.berkeley.edu>.
4. <http://research.cs.wisc.edu/htcondor>.
5. Fox G.C., Otto S.W., Hey A.J.G Matrix Algorithms on a Hypercube I: Matrix Multiplication // Parallel Computing. 1987. 4 Н. Р. 17–30.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОЦЕНКИ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

И.Ю. НОРИЦЫНА

Филиал ПАО «МРСК Центра»-«Смоленскэнерго», г. Смоленск,
irnori@gmail.com

УДК 004.8

Ключевые слова: *прогнозирование, задача классификации, индекс состояния оборудования, машинное обучение, Bigdata, нечеткая логика.*

Предложена методика прогнозирования оценки технического состояния электрооборудования, основанная на решении задачи классификации средствами машинного обучения. Приводятся классы индекса состояния оборудования. Рассмотрена возможность программной реализации модели средствами системы управления ресурсами предприятия на платформе SAP R/3.

В настоящее время электроэнергетические системы в большинстве стран модернизируются и развиваются на основе концепции глубокой интеграции электроэнергетических сетей (PowerGrid) и сетей компьютерных или как их называют, инфокоммуникационных (Network). При этом оба вида сетей не просто развиваются и обогащаются новыми функциональными элементами и протоколами взаимодействия, а порождают синергетический эффект, связанный с невиданными ранее возможностями анализа состояния целой огромной энергосистемы в реальном времени, прогнозирования процессов в ней, интерактивного взаимодействия с клиентами и управления оборудованием.

Целевые функции новой концепции отражены в документах Министерства энергетики РФ [1]. Согласно этим документам, одна из важнейших тенденций развития электроэнергетики – это определение сроков и вида воздействия на электрооборудование по результатам прогноза оценки его технического состояния. Учитывая износ

электрооборудования предприятий электрических сетей, ограниченность финансирования производственных программ, задача формирования такого прогноза особенно актуальна.

Для решения этой задачи предлагается методика построения модели оценки технического состояния электрооборудования, основанная на методах машинного обучения [2]. Обучение модели прогнозирования проводится на основании динамики изменения значений параметров за предыдущие периоды и с учетом анализа всех имеющихся «исторических» наборов данных с момента ввода оборудования в эксплуатацию. Сбор информации выполняется при мониторинге параметров и диагностике электрооборудования. Для качественной оценки технического состояния электрооборудования предлагается использовать индекс состояния (ИС) [1; 3], имеющий значения от 0 (наихудший) до 100 (наилучший). В качестве базовых алгоритмов модели используются методы многомерной классификации, определяющие, какому из predetermined классов принадлежит объект по вектору признаков. В таблице 1 приведены классы модели, соответствующие качественным оценкам состояния оборудования.

Таблица 1

Классы оценок индекса состояния оборудования

Качественная оценка индекса состояния оборудования	Диапазон значений индекса состояния
Критическое	0 – 25
Плохое	26 – 50
Удовлетворительное	51 – 70
Хорошее	71 – 84
Очень хорошее	85 – 100

Текстовая оценка ИС соответствует рекомендациям [1].

Программная реализация модели осуществляется средствами корпоративной информационной системы управления ресурсами предприятия (КИСУР) ERP (EnterpriseResourcePlanningSystem) на платформе SAPR/3. Это единая информационная среда, позволяющая встраивать новые модули прогнозирования непосредственно в среду СУБД Oracle. Ввиду исключительно больших объемов обрабатываемых данных, описывающих имеющееся электрооборудование энергосистемы, учитывая его разнородный характер, предлагаемая система прогнозирования технического состояния оборудования относится к категории Bigdata (больших данных) и может использоваться для прогнозирования индексов состояния, как отдельных единиц оборудования, так и сложных технических систем, состоящих из множества разнородных функциональных узлов. При этом для каждого типа оборудования создается отдельная модель по оценке его

технического состояния по набору параметров. Учитывая сроки эксплуатации электрооборудования, а также возможность потери части параметров либо их отсутствия в определенный момент времени, для более точной оценки ИС целесообразно применение аппарата нечеткой логики.

Таким образом, предлагаемая методика построения модели прогнозирования, основанная на алгоритмах машинного обучения, позволит пересмотреть сроки эксплуатации электроэнергетического оборудования, исходя из его реального технического состояния. Возможность обработки «Bigdata» позволит создавать надежные алгоритмы прогнозирования, от работы которых во многом зависит эффективность процесса управления активами предприятия, своевременное техобслуживание и ремонт электрооборудования. Данный подход к оценке состояния электрооборудования уменьшит количество отказов, повысит надежность энергоснабжения потребителей и оптимизирует финансовые затраты.

Литература

1. Проект Приказа Министерства энергетики РФ «Об утверждении Методических указаний по расчету оценки технического состояния основного технологического оборудования и линий электропередачи электрических станций и электрических сетей и определения оптимального вида, состава и стоимости технологического воздействия на оборудование / группы оборудования» (подготовлен Минэнерго России 14.12.2016). URL: <http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/56595825/#ixzz4cR4VDauL>.
2. Воронцов К.В. Машинное обучение: курс лекций // URL: <http://www.machinelearning.ru>.
3. Попов Г.В., Игнатьев Е.Б. Определение индекса технического состояния силовых трансформаторов в процессе их эксплуатации // Вестник ИГЭУ. 2014, Вып. 4.

ПРИМЕНЕНИЕ СКРИПТОВОГО ЯЗЫКА К ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ ОШИБКИ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

А.М. ОЛЬШАНСКИЙ
ОАО «НИИАС», г. Москва
e-mail: lexolshans@gmail.com

УДК 519.673

Ключевые слова: *сигнал ошибки, нейронная сеть, R, скрипт, программирование.*

В сообщении иллюстрируется применение скриптового языка R к обработке сигналов, порождаемых многослойными нейронными сетями с переменной проводимостью сигналов.

В процессе использования искусственных нейронных сетей с переменной проводимостью сигнала [1] возникает необходимость оперативной обработки и расшифровки сигналов ошибки сети для синтеза в дальнейшем управлении [2].

В этом случае необходимо разработать инструмент, который бы осуществлял достаточно быстрый по времени анализ сигнала. Такой инструмент должен в полной мере обладать свойством векторизации при обработке информации.

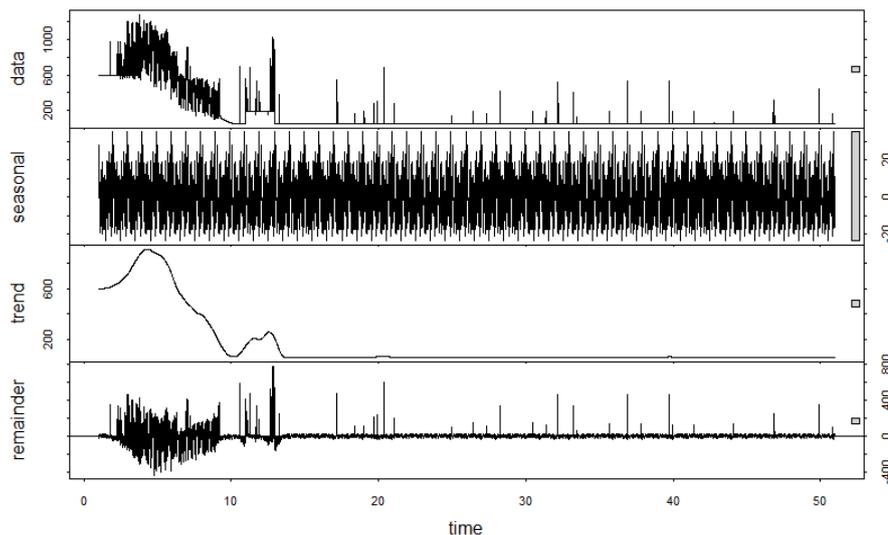


Рис. 1. Разложение сигнала ошибки ИНС с помощью метода «stl»

Например, пусть поведение ИНС задано обыкновенным временным рядом. Рассмотрим, как с помощью скрипта на *R* возможно получить информацию о поведении сигнала ошибки.

```
df<-read.csv2("720-15-15-10-0,006-log.csv", header = F)
opis<-summary(df)
otkl<-apply(df,2,sd)
nt1<-nonlinearityTest(df$V1,verbose = T)
```

Данными командами считываются данные из файла, проводится описание первичных параметров, а также выполняется набор тестов, говорящих о поведении ряда.

```
hist(df$V1)
spectrum(df$V1)
acf(df$V1, lag.max = 250)
```

Строится гистограмма ряда, его спектр и автокорреляционная функция.

Анализ данных функций свидетельствует о том, что поведение ошибки сети не описывается авторегрессионными процессами, также не может быть описано и регрессионными моделями.

Проводится разложение сигнала ошибки на тренд, остаток и циклический сигнал:

```
V1stl<-stl(ts(df$V1, frequency=100), s.window = 'per')
```

Берется трендовая компонента, содержащая желаемую траекторию изменения ошибки ИНС:

```
V1tr<-V1stl$time.series[,2]
```

Таким образом, полученный сигнал (trend на рис. 1) возможно использовать для синтеза управления ИНС в режиме реального времени. Все описанные команды заключаются в тело функции, на вход которой поступает сигнал ошибки сети. Получаемые иллюстрации легко сохраняются с помощью встроенных команд R или из графической оболочки “RStudio”.

Литература

1. Игнатенков А. В., Ольшанский А. М. Применение искусственной нейронной сети для построения расписаний процессов на примере графика движения поездов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2, № 11. С. 50–55.

2. Ольшанский А.М., Игнатенков А.В. О решении задачи управления искусственной нейронной сетью при квазипериодическом характере поведения сигнала ошибки // Перспективные информационные технологии: труды Международной научно-технической конференции. 2016. С. 635–638.

РАЗРАБОТКА АНАЛИТИЧЕСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ СРЕДСТВАМИ СОВРЕМЕННЫХ БАЗ ДАННЫХ

Т.А. САМОЙЛОВА

Смоленский государственный университет
e-mail:tatsam@hotmail.ru

УДК 004 048

Ключевые слова: *аналитические информационные системы, базы данных, Big Data, Advanced Analytics, машинное обучение, язык программирования R.*

В статье рассмотрена возможность разработки информационно-аналитических систем, предназначенных для обработки информации большого объема, на основе интеграции средств интеллектуального анализа и базы данных. Описаны методы, реализуемые в базах данных для ускорения и оптимизации такой обработки. Приведены примеры используемых для этого платформ от ведущих разработчиков СУБД: IBM, Oracle и Microsoft.

В настоящее время аналитические информационные системы (АИС) находят широкое применение в различных областях. Это не только банковская и финансовая сфера, где требуется на основании больших данных оценивать текущее состояние объектов и прогнозировать их дальнейшее развитие, но и управление производством и послепродажное сопровождение наукоемких изделий [1]. Аналитические возможности этих систем – это частный статистический анализ, моделирование с прогнозированием, интеллектуальный анализ данных, анализ текста, сущностный анализ, оптимизация, оценки риска в режиме реального времени, машинное обучение. Однако многие предприятия при разработке АИС сталкиваются с таким препятствием, как большой объем и высокая сложность данных. Практика использования распространенных пакетов аналитической обработки данных, например, таких как MATLAB (С-подобный язык MatLab), scikit-learn (Python), Dlib (C++), Accord.NET (C#) показала неэффективность их применения для полноценного анализа информации большого объема (задачи, связанные с направлением Big Data). Данные пакеты работают в однопоточном режиме и могут обрабатывать только те наборы данных, которые умещаются в оперативной памяти локальной машины. По умолчанию перед выполнением любого анализа эти пакеты загружают все данные в оперативную память. Такое ограничение становится критическим недостатком в условиях, когда растет объем данных или необходимо ускорить выполнение аналитических процессов. Решением проблемы может стать разработка АИС на основе интеграции средств анализа с СУБД, когда выполнение интеллектуальных функций происходит внутри самой СУБД на той же машине, где хранятся данные. Конкретные методы интеллектуальной обработки встраиваются непосредственно в запрос к базе данных и выполняются как собственные функции SQL. Сервер баз данных анализирует запрос и определяет наиболее эффективный метод получения запрашиваемых результатов. При этом СУБД исследует все аппаратные возможности своего сервера и оптимизирует использование ресурсов, задействуя SIMD-команды процессора на нескольких ядрах. Кроме того, применяемые по умолчанию усовершенствованные методы сжатия данных сокращают использование памяти и дискового пространства. Перемещение данных из БД не происходит, что приводит к отсутствию проблем с безопасностью. Встроенные в SQL средства анализа выполняются на той же машине, где хранятся данные и не могут получить доступ к Интернету.

В качестве главного инструмента построения аналитической модели внутри базы данных ведущие разработчики СУБД – IBM, Oracle и Microsoft – предлагают соединение языка программирования с

открытым исходным кодом R [2] с процедурными версиями языка SQL. Это направление, получившее название Advanced Analytics Platforms (передовые / современные аналитические платформы), использует различные способы организации данных. Это SQL- и NoSQL-системы управления базами данных, хранилища данных с различными архитектурами и основанные на технологиях MapReduce системы, подобные Hadoop.

Так, Oracle Advanced Analytics расширяет базу данных Oracle на комплексную аналитическую платформу через два основных компонента: Oracle R Enterprise и Oracle Data Mining. R-вычисления, встроенные в хранимые процедуры посредством data mining API и R API, транслируются и выполняются в Oracle Database или в хранилищах Hadoop и OBIEE.

Продукт IBM – DB2 with BLU Acceleration также имеет возможность реализации аналитических моделей средствами R. При трансляции R-моделей он исследует все аппаратные возможности своего сервера и оптимизирует использование ресурсов. Например, когда это возможно, DB2 задействует SIMD-команды процессора на нескольких ядрах. Кроме того, DB2 использует различные механизмы кэширования памяти для уменьшения количества чтений данных с диска. Такая оптимизация осуществляется автоматически. В настоящее время эта платформа доступна в облаке – в виде решения BLU Acceleration for Cloud.

Microsoft R Server – наиболее часто используемая версия R в семействе продуктов Microsoft, особенно для целей корпоративной аналитики. Пользователи R Services используют библиотеку алгоритмов [ScaleR](#) — набор функций, который предлагает эквиваленты для задач, выполняемых на языке R. Функции API ScaleR были разработаны компанией Revolution Analytics. После того как Microsoft приобрела эту компанию, API интегрированы в SQL Server. Они кроссплатформенны, то есть поддерживают не только SQL Server, но и другие платформы. Функции ScaleR, встраиваемые в Transact-SQL, масштабируемы для обработки большого количества (миллиардов) записей посредством параллельных вычислений. Это обеспечивает производительность, которой невозможно достичь при использовании распространенных пакетов с открытым исходным кодом.

Библиотеки R-средств предоставляют широкий спектр методов анализа: линейного и нелинейного моделирования, классические статистические тесты, анализ временных рядов, классификацию, кластеризацию. Будучи при этом очень расширяемым, они позволяют разработчику встраивать написанные им R-скрипты в хранимые на сервере процедуры.

Параллельная обработка данных в рассматриваемых СУБД реализуется по-разному. IBM и Oracle используют для этой цели свои машины баз данных – параллельные программно-аппаратные комплексы IBM Netezza Appliance и Oracle Exadata, которые гармонично сочетают свойства SMP и MPP архитектур. Microsoft предоставляет пользователю возможность использовать параллелизм СУБД SQL Server, а также позволяет создавать в облачной системе Microsoft Azure собственные параллельные программно-аппаратные комплексы, обеспечивающие распараллеливание наиболее сложных операций над данными. Таким образом, можно считать, что, несмотря на имеющиеся технические различия, все рассмотренные СУБД архитектурно близки друг к другу. Это позволяет при обучении [3] выбрать одну из них и на ее основе показать, как разрабатываются АИС.

В случае интеллектуальной обработки больших объемов информации целесообразен переход от традиционной обработки данных в пользовательских приложениях средствами пакетов машинного обучения и Data Mining к обработке внутри самой СУБД. Рассмотренная возможность интеграции средств интеллектуального анализа с СУБД – это одна из главных особенностей разработки современных АИС.

Литература

1. <http://www.klerk.ru/boss/articles/442444/>.
2. <http://www.r-project.org>.
3. Мунерман В.И., Самойлова Т.А. Обучение методам разработки информационно-аналитических систем на основе облачных технологий // Системы высокой доступности. 2016, № 4. С.3–11.

ОТБОР ИНФОРМАТИВНЫХ ПРИЗНАКОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМ КЛАССИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ ДЕРЕВЬЕВ РЕШЕНИЙ

Т.А. САМОЙЛОВА, М.К. ХМЫЗОВ

Смоленский государственный университет
e-mail:tatsam@hotmail.ru; matw.hmizov@yandex.ru

УДК 004. 855.5

Ключевые слова: *машинное обучение, классификация объектов, деревья решений, оптимизация, информативность, значимые признаки.*

Описана методика выбора оптимального набора информативных признаков на примере решения задачи классификации методом деревьев решений. Приведено описание разработанной программы классификации для конкретной предметной области. Представлены результаты, позволяющие уменьшить размерность входных данных.

На сегодняшний день такие области, как машинное обучение и классификация данных, составляют важнейшую часть разработки интеллектуальных систем [1; 2]. Ключевые моменты при построении систем классификации – это отбор оптимального набора признаков при реализации определенного алгоритма машинного обучения. Удачное решение данной задачи обеспечивает как снижение размерности вектора измерений, так и повышение эффективности системы классификации в целом.

Признаки, которые используются для обучения, имеют большое влияние на качество полученных результатов. Неинформативные признаки могут значительно понизить эффективность модели, ухудшая качество обучения. Но в то же время небольшое количество входных параметров в выборке также не обеспечивает качественную обучаемость классификатора. Поэтому для получения хороших результатов необходимо уметь правильно подбирать их оптимальное количество. С целью выявления из всех признаков наиболее информативных предлагается методом кросс-валидации построить зависимость качества классификации от их числа.

Для иллюстрации отбора информативных признаков на базе алгоритма деревьев решений была разработана программа классификации, основанная на машинном обучении. Был выбран алгоритм построения дерева решений C4.5. На первом шаге алгоритма исходное множество разбивается на подмножества путем выбора одного из атрибутов в качестве проверки. В результате разбиения создаются n (по числу значений атрибута) потомков корня, каждому из которых поставлено в соответствие свое подмножество, полученное при разбиении исходного. В качестве выборки для анализа использовались данные о ценах квартир в зависимости от 20 факторов. Содержание факторов: возраст дома, количество комнат, наличие ремонта, близость к метро и другие. Программа позволяет увидеть обучающую выборку и сравнить с результатами, полученными от классификатора, а также подсчитать различные характеристики качества обучения дерева решений. Для реализации алгоритмов машинного обучения использована библиотека Accord.NET Framework [3] – платформа для машинного обучения на языке C#. Средствами кросс-валидации

выполнена оценка качества классификации (табл. 1): аккуратность, точность, полнота и F-мера.

Таблица 1

Точность классификации для различного числа параметров выборки

Число параметров	Аккуратность	Точность	Полнота	F-мера
20	0.88	1	0.785	0.87
15	0.84	1	0.785	0.87
13	0.82	0.91	0.785	0.84
12	0.76	0.83	0.714	0.77
10	0.72	1	0.622	0.76
8	0.7	0.769	0.714	0.74
6	0.66	0.6	0.642	0.62
4	0.56	0.5	0.785	0.61
2	0.3	0.391	0.642	0.48

На рисунке 1 приведен график зависимости точности классификации от числа параметров, построенный для тестовой выборки алгоритма деревьев решений и диапазона параметров от 2 до 20.

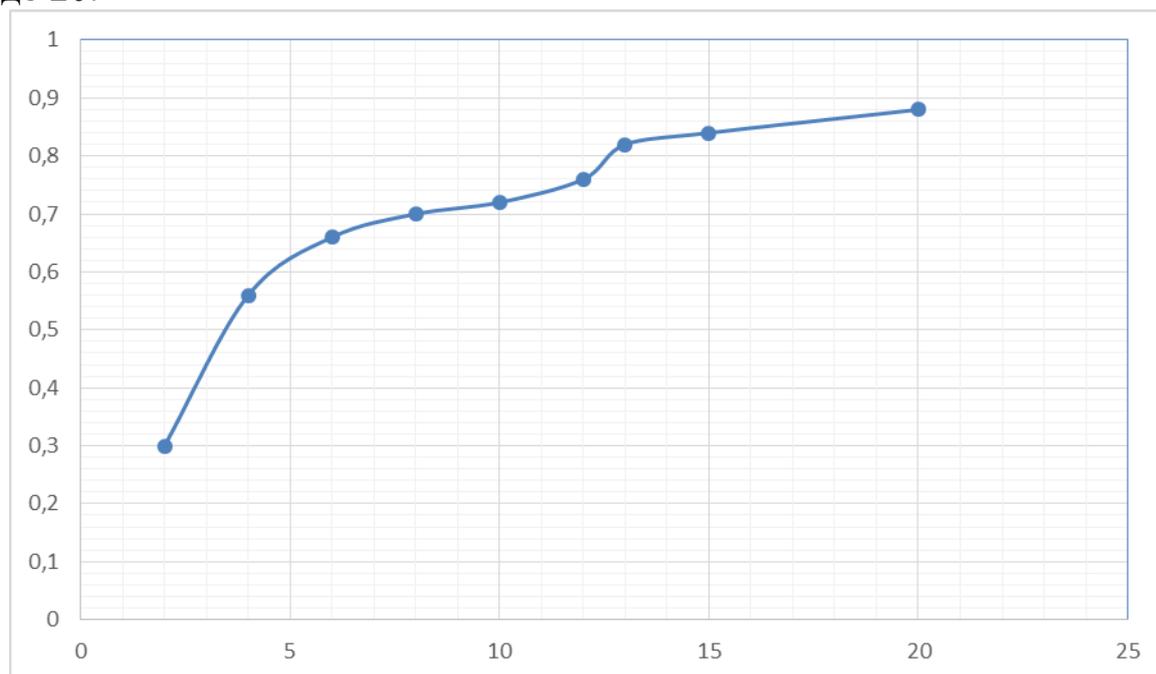


Рис. 1. Зависимость точности классификации от числа параметров

Полученные результаты показывают, что при уменьшении числа параметров в выборке снижаются значения аккуратности и F-меры. Также можно заметить и то, что уменьшение количества параметров до 15 и даже до 13 почти никак не сказывается на качестве обучения классификатора. Следовательно, число признаков в данной выборке можно сократить, что положительно скажется на результате обучения дерева решения.

Приведенные результаты подтверждают факт необходимости проведения анализа и оптимизации входных данных для обучения классификатора. Это позволит существенно сократить размерность моделей и выделить наиболее информативное сочетание признаков. Следует отметить, что предложенная методика позволит отбирать признаки не только для задач классификации, но и для проведения кластерного анализа.

Литература

1. Machine Learning.ru. Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных. <http://machinelearning.ru/>.
2. Загоруйко Н.Г. Когнитивный анализ данных. Новосибирск: Академическое изд-во «ГЕО», 2012. 203 с.
3. URL: <http://accord-framework.net/>.

ГРАФОВЫЕ МОДЕЛИ ГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССОРА

Е.Ю. СЕЛИВЕРСТОВ

НУК РК, МГТУ им. Баумана, г. Москва

e-mail: theirix@gmail.com

УДК 519.6

Ключевые слова: *графические процессоры, параллельные системы.*

В статье рассматривается подход к построению графовых моделей параллельной вычислительной системы на основе графических процессоров. Описываются свойства моделей и их применение.

Перспективным классом параллельных систем являются системы на основе графических процессоров, в том числе включающие несколько графических карт. Их отличительной особенностью является гибридность как по типу вычислительных устройств (на нижнем уровне – SIMD, а на верхнем уровне – MIMD), так и по типам памяти (иерархическая структура памяти, отличающаяся по коммуникационной сети, доступности памяти различным устройствам) [1].

Для моделирования вычислительной системы предлагается подход к комплексному представлению системы в виде взаимосвязанных графов: структурного, коммуникационного и графа памяти.

Вычислительная система, обозначаемая M , включает в себя следующие уровни вычислительных устройств.

- Уровень хост-системы H : хост-система парадигмы MIMD.
- Уровень ГПУ G : ГПУ, находящиеся в составе хост-системы.
- Уровень мультипроцессоров MP : отдельные мультипроцессоры.
- Уровень скалярных процессоров SP : вычислительные устройства, выполняющие инструкции SIMD/SIMT.

Графовая структурная модель отражает иерархическое устройство системы из отдельных вычислительных устройств. Структурная модель ГПУ GS имеет вид $GS = (VS, ES)$, где VS – множество вершин, соответствующих вычислительным устройствам; ES – множество ориентированных ребер, определяющих отношение включения вычислительных устройств. Граф GS является деревом. Задаем ортогональное разбиение X_{VS} множества вершин VS , определяемое перечислением подмножеств $X_{VS} = \langle VS_H, VS_G, VS_{MP}, VS_{SP} \rangle$. Здесь $VS_H = \{H\}$ – хост-система; $VS_G = \{G_i\}$ – графические процессоры; $VS_{MP} = \{MP_{ij}\}$ – мультипроцессоры; $VS_{SP} = \{SP_{ijk}\}$ – скалярные процессоры.

Графовую коммуникационную модель M представляем в виде невзвешенного неориентированного графа $GC = (VS, EC)$, где вершины VS описывают вычислительные устройства и эквивалентны множеству вершин графа GS ; ребра EC имеют смысл допустимых коммуникационных связей вычислительных устройств. Модель отличается от структурной модели GS тем, что содержит только вычислительные устройства и учитывает коммуникации между ними. Для обеспечения связности графа подмножество VS_{MP} считается пустым.

Определяем разбиение X_{VS} множества вершин VS графа GC :

$$X_{VS} = \langle VS_H, VS_G, VS_{SP} \rangle.$$

Множество ребер графа GC включает в себя только такие ребра (V_i, V_j) , для которых справедливо выражение

$$\exists k, m : V_i \in VS_k, V_j \in VS_m : k \leq m; k, m \in [1 : |VS|].$$

Другими словами, ребра в графе возможны только внутри подмножеств разбиения и между соседними подмножествами разбиения.

В отличие от графа GS в графе GC вершины из подмножества VS_{SP} образуют несколько компонент связности, каждая из которых является неориентированным полным графом. Коммуникации, соответствующие ребрам $e \in (SP_i, SP_j)$, происходят через общую память мультипроцессоров. Ребра (H, G_i) , (G_i, H) соответствуют коммуникациям между хост-системой и ГПУ при запуске и завершении вычислительных ядер.

Графовая модель памяти определяет доступность различных видов памяти для его функциональных устройств. Граф памяти имеет вид неориентированного двудольного графа $GM = (VM, EM)$.

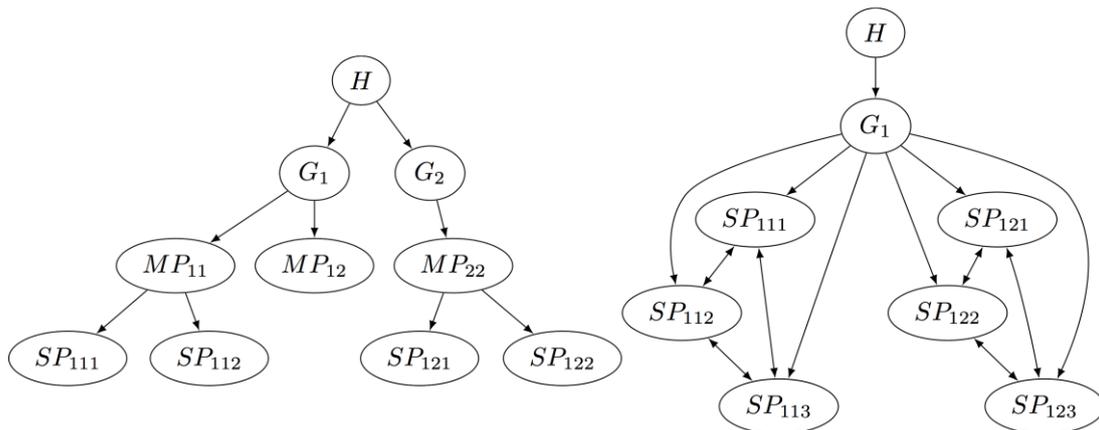


Рис. 1. Примеры структурного и коммуникационного графов некоторой вычислительной системы M

Множество вершин $VM = VMT \cup VMM$ состоит из множества вершин VMT , эквивалентного множеству вершин VS структурного графа GS и соответствующего функциональным устройствам, и множества вершин VMM , соответствующего устройствам памяти. Ребра EM имеют смысл доступности различных классов памяти из различных функциональных устройств. Множество вершин VMM состоит из пяти подмножеств вершин, соответствующих классам памяти:

- $REG = \{REG_i\}$ – регистры мультипроцессора i ;
- $SHM = \{SHM_i\}$ – общая память мультипроцессора i ;
- $LCACHE = \{LCACHE_i\}$ – локальный кэш выборки из глобальной памяти мультипроцессора i ;
- $GRAM = \{GRAM\}$ – глобальная память графического процессора;
- $RAM = \{RAM\}$ – глобальная память хост-системы.

Построение подобных графовых моделей параллельной системы особенно важно для решения задач оптимального отображения и планирования параллельных алгоритмов на архитектуру графических процессорных систем [2]. При представлении алгоритма в виде ациклического графа (DAG) становится возможным применять графотеоретические методы отображения графов алгоритмы и системы [3].

Литература

1. Architecture comparisons between Nvidia and ATI GPUs: Computation parallelism and data communications / Y. Zhang [et al.] // Workload Characterization (IISWC), 2011 IEEE International Symposium on IEEE. 2011. P. 205–215.
2. Sinnen O. Task scheduling for parallel systems. Wiley-Interscience, 2007.
3. Chaudhary V., Aggarwal J. A generalized scheme for mapping parallel algorithms // Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions on. 1993. Vol. 4, No. 3. P. 328–346.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА НА ОСНОВЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КАДРОВЫХ ЗАДАЧ

А.А. СИМАКОВА

Смоленский государственный университет
e-mail: bessimal3@yandex.ru

УДК 004 82

Ключевые слова: *искусственный интеллект, машинное обучение, нейронные сети, сети обратного распространения, обучение нейронной сети с учителем.*

В докладе рассматриваются основные проблемы проектирования рекрутинговых информационно-систем с использованием искусственных нейронных сетей.

Подбор персонала является неотъемлемой частью развития любой организации. Это очень важный кропотливый процесс, целью которого является выбор из огромного количества соискателей нужного сотрудника, характеристики которого подходят по всем параметрам. Для того чтобы принять человека на работу или сказать ему ещё на этапе рассмотрения его кандидатуры, что он не подходит на эту должность, важно учесть множество его особенностей: коммуникабельность, интеллектуальность, умение логически размышлять и т.п. Помимо особенности кандидата ещё нужно учесть, как профессиональные требования на ту или иную должность, так и особенности коллектива, в который будет помещён данный сотрудник. Часто этот процесс затягивается на 2-3 недели, прежде чем принять решение о трудоустройстве кандидата. Процесс подбора кадров можно автоматизировать и значительно ускорить, создав систему, способную выявить функциональную зависимость дальнейшего развития соискателя от его изначальных характеристик.

Выявлением функциональных зависимостей с возможностью переобучения системы занимается такой подраздел искусственного интеллекта, как машинное обучение. Для решения данной задачи была использована искусственная нейронная сеть. Располагая определенным багажом знаний, мы создали свою первую систему, способную обучаться на основе входных параметров кандидата, а также выявлять его принадлежность к данной профессии.

Одна из основных особенностей, с которой пришлось столкнуться при проектировании системы, – это наличие небольшой обучающей выборки. По этой причине нами были исследованы основные архитектуры нейронных сетей. В основу системы мы взяли сеть прямого распространения, а в качестве функции активации – сигмоидальную функцию.

Процесс функционирования нейронной сети зависит от величин синаптических связей, поэтому, задавшись определенной структурой

сети, необходимо найти оптимальные значения всех переменных весовых коэффициентов. Этот процесс и представляет собой этап обучения нейронной сети.

В своей работе мы использовали один из самых распространённых методов обучения – обучение с учителем, а именно алгоритм обратного распространения ошибки. На каждом шаге алгоритма на вход сети поочередно подаются все обучающие примеры, реальные выходные значения сети сравниваются с требуемыми значениями и вычисляется ошибка. В начале работы ошибка сети на обучающем и контрольном множествах – одинаковая, но по мере обучения сети ошибка обучения убывает, как и ошибка на контрольном множестве. Если же контрольная ошибка перестала убывать или даже стала расти – это указывает на то, что сеть начала слишком близко аппроксимировать данные (переобучилась) и обучение следует остановить. Если это случилось, то следует уменьшить число скрытых элементов или слоев, потому что сеть является слишком мощной для данной задачи. Если же обе ошибки (обучения и кросс проверки) не достигнут достаточно малого уровня, то переобучения не произошло, а сеть, напротив, является недостаточно мощной для моделирования имеющейся зависимости.

Описанные проблемы приводят к тому, что при практической работе с нейронными сетями приходится экспериментировать с большим числом различных сетей, порой обучая каждую из них по несколько раз и сравнивая полученные результаты. Главным показателем качества результата является здесь контрольная ошибка.

Также основной проблемой, с которой пришлось столкнуться, – это вычисление количества нейронов по обучающей выборке. В настоящее время нет формул для точного определения необходимого числа нейронов в сети по заданной обучающей выборке. Однако предложены способы настройки числа нейронов в процессе обучения, которые обеспечивают построение нейронной сети для решения задачи и дают возможность избежать избыточности. Эти способы настройки можно разделить на две группы *алгоритмы сокращения* и *конструктивные алгоритмы*.

Таким образом, при проектировании подобных систем нужно решить проблемы выбора архитектуры нейронной сети, подсчета количества нейронов, выбор функции активации нейронной сети. А также, если сеть уже обучена и нормально работает на тестовой выборке, но при похожих тестовых значениях показывает неадекватный ответ, то необходимо ещё решить проблему переобучения.

Литература

1. Круглов В.В., Борисов В.В. Искусственные нейронные сети. – М.: Горячая линия-Телеком, 2002.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ЯКОБИ И ВЕЙЕРШРАССА¹

И.Н. СИНИЦЫН, Э.Р. КОРЕПАНОВ

ФИЦ ИУ РАН, г. Москва,

email: sinitsin@dol.ru; ekorepanov@ipiran.ru

УДК 681.3

Ключевые слова: *аналитическое моделирование (АМ), метод нормальной аппроксимации (МНА), метод статистической линеаризации (МСЛ), стохастическая система (СтС), эллиптическая нелинейность Якоби и Вейерштрасса (ЭНЯ и ЭНВ), эллиптический осциллятор Якоби и Вейерштрасса (ЭОЯ и ЭОВ).*

Разработано алгоритмическое и инструментальное программное обеспечение в среде MATLAB для АМ нормальных процессов в многомерных СтС со сложными эллиптическими нелинейностями на основе МНА и МСЛ. В качестве тестового примера рассмотрена динамика эллиптического осциллятора в стохастической среде.

В [1; 2] опубликован цикл статей по методам и инструментальным программным средствам аналитического моделирования процессов в СтС со сложными нелинейностями, описываемыми такими специальными функциями, как Бесселевы целого и дробного порядка, а также связанными с ними функциями. В [3] рассмотрены типовые эллиптические нелинейности Якоби (ЭНЯ), МСЛ для ЭНЯ, МНА и МСЛ для СтС с ЭНЯ. В качестве тестового примера изучена динамика ЭОЯ в стохастической среде. В заключение сформулированы основные выводы и возможные обобщения. В основу синтеза алгоритмов МНА (МСЛ) положены тригонометрические разложения эллиптических функций по параметру Якоби [4; 5]. Особое внимание уделено асимптотическим выражениям для коэффициентов МНА (МСЛ) для типовых ЭНЯ применительно к перспективным средствам информатики и управления.

В докладе рассмотрены:

1) алгоритмы вычисления коэффициентов МНА (МСЛ) для ЭНЯ и ЭНВ, основанные на степенных и эрмитовых разложениях. Особое внимание уделено рекуррентным алгоритмам, основанным на преобразованиях Ландена;

2) развитие методического и инструментального программного обеспечения «StS.Analysis.CEJN»;

3) тестовые примеры для одно- и двумерных СтС с ЭНВ.

¹ Работа выполнена при поддержке программы П.3 Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН (№ 0063-2016-0018).

Приводятся результаты АМ нормальных процессов для ЭОЯ и ЭОВ в стохастической среде. Такими уравнениями описываются процессы для некоторых нанотехнологий. Сравнение с точным стационарным решением убеждает в достаточной точности МНА (МСЛ) в технических приложениях. Рассматриваются обобщения на случай других эллиптических нелинейностей.

Литература

1. Сеницын И. Н. Аналитическое моделирование процессов в динамических системах с цилиндрическими бесселевыми нелинейностями // Информатика и ее применения. 2015. Т. 9. Вып. 4. С. 37–47.
2. Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р., Белоусов В.В. Символьное аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными бесселевыми нелинейностями дробного порядка // Системы и средства информатики. 2016. Т. 26, № 2. С. 184-205.
3. Сеницын И. Н. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах с эллиптическими нелинейностями // Системы и средства информатики. 2017. Т. 27, №1 (в печати).
4. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовича и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.
5. Попов Б. А., Теслер Г. С. Вычисление функций на ЭВМ. – Справочник. Киев: Наукова Думка, 1984. 599 с.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИБРОУДАРОНАДЕЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО ОБОРУДОВАНИЯ

(англ. яз., 2-е изд., Уолд Сайентифик, 2017)

И.Н. СЕНИЦЫН, И.В. СЕРГЕЕВ, Э.Р. КОРЕПАНОВ,

Т.Д. КОНАШЕНКОВА

ФИЦ ИУ РАН, г. Москва,

e-mail: sinitsin@dol.ru; isergeev@ipiran.ru; ekorepanov@ipiran.ru;

tkonashenkova@ipiran.ru

УДК 681.3

Ключевые слова: *вибродарозащитное оборудование (ВУЗО), каноническое вейвлет разложение (КВЛР), каноническое разложение (КР); случайная функция (СФ), экспресс-моделирование.*

Рассматривается теория аналитического и численного синтеза вибродарозащитных средств компьютерного оборудования на основе стохастических канонических вейвлет разложений.

Как известно [1], стохастические КР СФ представляют собой выражения СФ через дискретный белый шум. КР удобны в первую

очередь для выполнения различных операций анализа над СФ, особенно линейных. Объясняется это тем, что в КР СФ её зависимость от аргумента выражается при помощи вполне определенных неслучайных координатных функций, что дает возможность свести выполнение различных линейных операций к соответствующим операциям над неслучайными координатными функциями.

Важное значение КР имеют для задач статистической обработки информации, стохастического системного анализа, идентификации и синтеза аналитического моделирования, комплексного решения задач, связанных с построением компьютерных моделей. Здесь КР СФ оказываются достаточно универсальными методами. Создание теории КР СФ связано с именами Лоэва, Колмогорова, Карунена, Пугачева и относится к 40–50-м годам XX века.

Как показано в [2; 3] КР СФ являются весьма эффективным аппаратом для аналитического с статистического моделирования и диагностики ВУЗО технических компьютерных систем.

Новые задачи, связанные с экспресс-диагностикой ВУЗО, требуют существенного снижения времени диагностики за счет использования КР СФ на базе вейвлетов первого и второго поколения [4].

В [5] изложены теоретические основы стохастических КВЛР для решения задач аналитического и статистического моделирования.

В докладе разработаны теоретические способы аналитического синтеза КВЛР для типовых ковариационных функций и численного синтеза для типовых ВУЗО в условиях стохастических воздействий.

Приводятся результаты аналитического моделирования по оценке потенциальных предельно достижимых характеристик ВУЗО.

Литература

1. Синицын И.Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. М.: Торус Пресс, 2009. 768 с.

2. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Агафонов Е.С. применение канонических представлений случайных функций в задачах расчета виброзащитных систем для компьютерного оборудования // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П. Дьяконова. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. Вып. 11. С. 239–241.

3. Синицын И.Н., Сергеев И.В. Методическое обеспечение измерения, контроля и испытаний вычислительного оборудования в условиях ударных воздействий // Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения (УКИ-2010): труды конференции. М.: ИПУ РАН, 2010. С. 47–56.

4. Rebert X. Gao, Ruqiang Yan. Wavelets Theory and Applications for manufacturing. Springer Science + Business Media, LLC 2011.

5. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Lectures on functional analysis and applications. World Scientific. Singapore. 2017, 2nd ed.

**О КНИГЕ В.С. ПУГАЧЕВА И И.Н. СИНИЦЫНА
«ЛЕКЦИИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И
ПРИЛОЖЕНИЯМ»¹**

(англ. яз., 2-е изд., Уолд Сайентифик, 2017)

И.Н. СИНИЦЫН, В.И. СИНИЦИН
ФИЦ ИУ РАН, г. Москва,
email: sinitsin@dol.ru; vsinitsin@ipiran.ru

УДК 519.257

Ключевые слова: *нелинейные и стохастические проблемы, функциональный анализ, численные методы и программные средства функционального анализа.*

Рассматриваются особенности изложения методов и компьютерных средств функционального анализа в первом и втором издании английской книги «Лекции по функциональному анализу и приложениям».

В 1999 году в издательстве «World Scientific» вышла книга V.S. Pugachev and I.N. Sinitsyn «Lectures on functional analysis and applications» и была признана бестселлером.

Книга написана на основе лекций, которые авторы читали в отечественных и зарубежных технических университетах. В отличие от многочисленных книг по функциональному анализу в нашей и зарубежной литературе предлагаемая книга адресована не математикам-профессионалам, а широким кругам специалистов в разных областях знаний, не имеющих основательной математической подготовки и нуждающихся в совершенствовании математических знаний для успешной работы в своих профессиональных областях и чтения соответствующей специальной литературы.

Многолетний опыт работы авторов в различных областях приложений математики позволил собрать и систематически изложить в одной книге практически весь материал по функциональному анализу, необходимый для приложений. Основное назначение книги определило и методику, и стиль изложения предмета. Книга написана простым, доступным языком, с наглядными иллюстрациями. Она практически совершенно свободна от сложных, чисто формальных построений, которыми изобилует современная математическая литература. Для усвоения написанного в книге от читателя требуется только обычная подготовка по линейной алгебре, математическому анализу и дифференциальным уравнениям, которую дают высшие технические учебные заведения.

¹ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 15-07-02244).

В первой главе определен предмет функционального анализа и даны общие понятия функции и пространства. Во второй главе излагаются элементы теории меры. Третья глава посвящена теории интеграла. Четвертая глава содержит элементы топологии и теории топологических пространств. Пятая глава посвящена пространствам операторов и функционалов. В шестой главе излагается общая теория линейных операторов. Седьмая глава содержит теорию линейных операторов в H -пространствах. В восьмой главе изложена спектральная теория линейных операторов. Девятая глава посвящена теории нелинейных операторов и функционалов. В последней, десятой, главе изложены приближенные методы функционального анализа. Для обеспечения усвоения излагаемой теории и для иллюстрации ее применений, а также для успешной самостоятельной работы читателя над курсом в книге приведено около трехсот примеров и свыше пятисот задач разной степени сложности.

С учетом современных тенденций компьютерной математики и новых приложений во втором издании переработаны и расширены глава 9 (в части нелинейных стохастических проблем) и глава 10 (в части элементов теории и программных средств численного функционального анализа. Увеличено число примеров и задач в главах 1–10. Добавлены три приложения, посвященные специальным функциям, интегральным преобразованиям и операционному исчислению. Расширен и переработан список литературы. Приведены библиографические замечания.

По своему назначению, отбору материала, включающего практически все, что может понадобиться из функционального анализа работающих в разных областях приложений математики, простоте и доступности изложения книга не имеет аналогов в мировой литературе.

ГИБРИДНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КЛАСТЕР ФИЛИАЛА НИУ «МЭИ» В СМОЛЕНСКЕ

А.С. ФЕДУЛОВ, В.В. БОРИСОВ, М.М. ЗЕРНОВ, К.А. ЯКУШЕВСКИЙ

Филиал ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске
e-mail: fedulov_a@mail.ru; vadim.v.borisov@mail.ru;
zmmioml@yandex.ru; jakushevskij@gmail.com

УДК 004.2

Ключевые слова: *гибридная вычислительная система, центральный процессор, графический процессор.*

Представлена архитектура гибридного вычислительного кластера филиала ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске. Проведена оценка его

максимальной теоретической производительности. Представлены результаты экспериментальных исследований характеристик кластера для выработки конкретных рекомендаций по оптимизации структурных решений и параметров. Полученные результаты являются основой для обобщения подхода к исследованию гибридных вычислительных систем, ориентированных на решение нечисловых и вычислительных задач, различающихся архитектурой и информационным обеспечением.

При лавинообразном возрастании объема информации, повышении сложности и интенсивности поисковых и аналитических задач актуальным является создание гибридных вычислительных систем, включающих в себя центральные (CPU) и графические (GPU) процессоры, характеризующихся потенциальной производительностью суперкомпьютеров. На рисунке 1 представлена общая схема гибридного вычислительного кластера (ГВК) филиала ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске [1].

Проведена оценка максимальной теоретической производительности. Выполнены оценки производительности на основе тестов.

Суммарная теоретическая производительность центральных процессоров вычислительных узлов ГВК в вычислениях с плавающей точкой одинарной точности составляет: 960 Гфлопс для каждого узла и 1920 Гфлопс в сумме.

Для вычислений двойной точности оценки теоретической производительности составляют: 480 Гфлопс для каждого узла и 960 Гфлопс в сумме.

Проведено тестирование и представлены результаты экспериментальных исследований характеристик гибридного вычислительного кластера для выработки конкретных рекомендаций по оптимизации структурных решений и параметров.

Так, в тесте LINPACK HPL 2.2 без оптимизации с использованием MKL получена наилучшая оценка 101,7 Гфлопс. А в тесте LINPACK HPL 2.2, оптимизированном для процессоров Intel с использованием библиотеки MKL, оценки производительности отдельных вычислительных узлов подтверждают рассчитанный теоретический максимум для вычислений с плавающей точкой двойной точности [2].

Теоретическая производительность графических процессоров вычислительных узлов ГВК в вычислениях с плавающей точкой одинарной точности составляет: 2×5645 Гфлопс для видеокарт узла 1 (графический процессор NVIDIA GK-110-B1) и 2×4384 Гфлопс для видеокарт узла 2 (графический процессор Tahiti XTL), 20058 Гфлопс в сумме для всего ГВК.

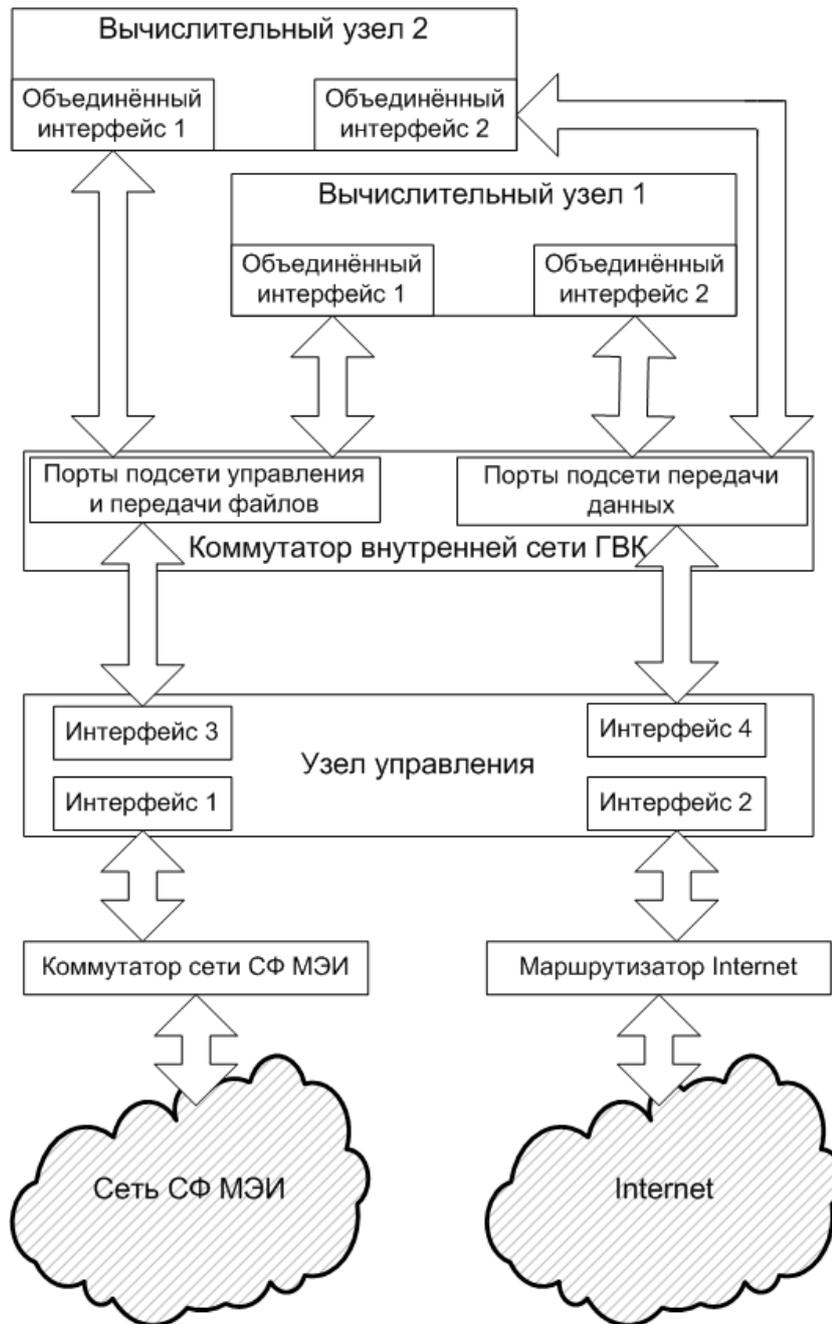


Рис. 1. Взаимосвязь основных компонентов кластера

Для вычислений двойной точности оценки теоретической производительности составляют: 2×1881 Гфлопс для видеокарт узла 1 (графический процессор NVIDIA GK-110-B1) и 2×1096 Гфлопс для видеокарт узла 2 (графический процессор Tahiti XTL), 5954 Гфлопс в сумме для всего ГVK.

В тесте SHOC 1.1.5 MaxFlops были получены следующие лучшие результаты: во-первых, 5202,83 Гфлопс в вычислениях с плавающей точкой одинарной точности и 255,55 Гфлопс в вычислениях двойной точности среди видеокарт узла 1; во-вторых, 4277,66 Гфлопс в

вычислениях с плавающей точкой одинарной точности и 1072,39 Гфлопс в вычислениях двойной точности среди видеокарт узла 2.

Полученные результаты являются основой для обобщения подхода к исследованию гибридных вычислительных систем, ориентированных на решение нечисловых и вычислительных задач и различающихся архитектурой и используемым информационным обеспечением.

Литература

1. Борисов В. В., Зернов М. М., Федулов А. С., Якушевский К. А. Исследование характеристик гибридного вычислительного кластера // Системы управления, связи и безопасности. 2016. № 4. С. 129–146. URL: <http://sccs.intelgr.com/archive/2016-04/07-Borisov.pdf> (дата обращения: 21.12.2016).

2. The LINPACK Benchmark: Past, Present, and Future. July 2002. Режим доступа: <http://www.netlib.org/utk/people/JackDongarra/PAPERS/hplpaper.pdf>, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ.

СЕКЦИЯ 3

Математика и её приложения

О Н.В. СТЕПАНОВЕ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОДУ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Г.А. БАНАРУ, М.Б. БАНАРУ

Смоленский государственный университет

e-mail: mihail.banaru@yahoo.com

УДК: 51(092); 514.763.8

Ключевые слова: *обыкновенное дифференциальное уравнение, расслоенное пространство со связностью, группы симметрий, метод внешних форм.*

В докладе рассматриваются основные достижения замечательного отечественного математика Н.В. Степанова в области геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В сентябре 2016 года исполнилось 90 лет со дня рождения известного советского геометра Николая Васильевича Степанова (1926 – 1991), профессора, доктора физико-математических наук. Последние 10 лет своей жизни Н.В. Степанов заведовал кафедрой геометрии Смоленского государственного педагогического института им. К. Маркса (ныне – Смоленского государственного университета).

Практически вся научная деятельность Н.В. Степанова связана с одним направлением – геометрической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Им опубликовано около 40 значительных работ по этой тематике. Наиболее полно его результаты представлены в двух обзорах [1; 2], которые чаще всего цитируются специалистами в данной области.

Достижениям Н.В. Степанова в геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений уделено значительное место в обзоре [3] выдающегося отечественного специалиста Л.Е. Евтушика.

Доклад посвящен основной проблематике исследований Н.В. Степанова, а также связи этих исследований с трудами других известных отечественных геометров. Некоторые построения и результаты Н.В. Степанова (например, о группах преобразований,

относительно которых уравнения инвариантны; о расслоенных пространствах со связностью, присоединенных к уравнениям) проиллюстрированы на примерах обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков [4–8].

Помимо этого, предпринимается попытка обсуждения перспектив, которые имеют дифференциально-геометрические построения Н.В. Степанова.

Литература

1. Степанов Н.В. Дифференциально-геометрическая теория уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1977. Т. 8. С. 47–66.
2. Степанов Н.В. Геометрия дифференциальных уравнений. – Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1981. Т. 12. С. 127–164.
3. Евтушик Л.Е. Геометрия обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследования в семинаре Лаптева–Васильева при Московском университете (1980–1992 гг.) // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2002. Т. 11. С. 24–81.
4. Банару Г.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения 3-го порядка с 6-мерной и 7-мерной группами точечных симметрий // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1994. № 3. С. 31–36.
5. Банару Г.А. О проективной связности, допускаемой обыкновенным дифференциальным уравнением пятого порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. 1996. № 2. С. 3–9.
6. Banaru G.A. A note on third-order ordinary differential equations // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2002. Т. 39, №2. С.65–70.
7. Banaru G.A. Some remarks on groups of pointwise symmetries of third-order ordinary differential equations // Studia Univ. Babeş-Bolyai. Math. 2002. V. 47, № 1. P. 3–10.
8. Банару Г.А. О Николае Васильевиче Степанове и его геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры (в печати).

СВОЙСТВА ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА

Е.В. БАНЮКЕВИЧ

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
Гродно (Республика Беларусь)
e-mail: cheb-alena@mail.ru

УДК 519.6

Ключевые слова: *вейвлет-преобразование, обобщенная функция экспоненциального роста, тензорное произведение, свертка.*

В работе рассматриваются свойства вейвлет-преобразования на пространстве обобщенных функций экспоненциального роста. Объектом исследования являются обобщенные функции экспоненциального роста, определенные на числовой оси. Предмет исследования – вейвлет-преобразование обобщенных функций экспоненциального роста. Целью данной работы является изучение свойств вейвлет-преобразования на пространстве обобщенных функций экспоненциального роста. Полученные результаты развивают теорию вейвлетов и находят свое применение не только в области теории вейвлет-преобразования, но и в теории обобщенных функций

Пусть E^a совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций f на пространстве \mathbb{P} , удовлетворяющих условию

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \exists C > 0 : |f^{(k)}(t)| \leq C e^{-at}, \forall t \in \mathbb{P}_+.$$

Очевидно, E^a является подпространством C^∞ – пространства всех бесконечно дифференцируемых функций на пространстве \mathbb{P} .

Объединив пространства E^a , для которых $a < c$, $a, c \in \mathbb{P}$, получим пространство $E_c = \bigcup_{a < c} E^a$.

Обобщенной функцией экспоненциального роста на \mathbb{P} степени c называется любой линейный непрерывный функционал на пространстве E_c , $c \in \mathbb{P}$. Совокупность всех обобщенных функций экспоненциального роста степени c образует сопряженное пространство E'_c .

Определим вейвлет-преобразование обобщенной функции экспоненциального роста степени c .

Вейвлет-преобразование обобщенной функции $f \in E'_c$ экспоненциального роста степени c называется функция $W_\psi f(a, b)$, определяемая равенством

$$W_\psi f(a, b) = \left(\hat{f}(\omega), e^{2\pi i a b} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \right),$$

где \hat{f} , $\hat{\psi}$ – преобразование Фурье соответственно функции $\psi \in D$ и функции $f \in E'_c$.

Для рассмотрения свойств вейвлет-преобразования напомним определения свертки и тензорного произведения обобщенных функций экспоненциального роста степени c .

Пусть функция $f_1 \in E'_c$ является финитной обобщенной функцией, а функция $f_2 \in E'_c$ имеет произвольный носитель, тогда $f_1 * f_2$ называется **сверткой обобщенных функций** и определяется следующим равенством

$$(f_1 * f_2)(\varphi) = (f_1(t) f_2(s), \varphi(t + s)),$$

где $\varphi \in D$.

Тензорным произведением обобщенных функций $f_1 \in E'_{c_1}$ и $f_2 \in E'_{c_2}$ экспоненциального роста степеней c_1 и c_2 называется функция $f_1 \otimes f_2 \in E'_{c_1+c_2}(\mathbb{P}^2)$, определяемая следующим равенством

$$(f_1 \otimes f_2)(\varphi) = (f_1(t), (f_2(s), \varphi(t, s))) = (f_2(t), (f_1(s), \varphi(t, s))),$$

где $\varphi \in E_{c_1+c_2}(\mathbb{P}^2)$.

Доказаны следующие свойства вейвлет-преобразования.

1. Вейвлет-преобразование производных обобщенной функции имеет вид

$$W_\psi(D^k f)(a, b) = (2\pi i \omega)^k W_\psi f(a, b).$$

2. Вейвлет-преобразование свертки двух обобщенных функций есть произведение вейвлет-преобразований этих обобщенных функций

$$W_\psi(f_1 * f_2)(a, b) = W_\psi f_1(a, b) W_\psi f_2(a, b).$$

3. Вейвлет-преобразование тензорного произведения двух обобщенных функций есть тензорное произведение вейвлет-преобразований этих обобщенных функций

$$W_\psi(f_1 \otimes f_2)(b_1, b_2) = W_\psi f_1(b_1) \otimes W_\psi f_2(b_2),$$

где коэффициент масштабирования a зафиксирован, $W_\psi f_1(b_1)$ и $W_\psi f_2(b_2)$ – частичные функции.

Литература

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: учебник для вузов. 2-е изд., стер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 400 с.
2. Вувуникян Ю.М., Шпак Д.С. Полиномиальные эволюционные операторы: монография. – Гродно: ГрГУ им. Я.Купалы, 2015. 277 с.

ВЕКТОРНОЗНАЧНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ю.М. ВУВУНИКЯН

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
Гродно (Беларусь)
e-mail: vuv64@mail.ru

УДК 517.98

Ключевые слова: эволюционный оператор, обобщенные функции с носителями на положительных гипероктантах, векторнозначные обобщенные импульсные характеристики, асимптотически обратные к эволюционному оператору, дельта-функция, композиция натурального числа, композиция натурального числа с ограничениями, свертка, тензорное произведение, тензорная степень.

В докладе рассматривается задача построения асимптотически обратного оператора в терминах векторнозначных обобщенных импульсных характеристик эволюционного оператора.

Будем рассматривать эволюционные операторы [1–3] кратности q . Введем понятие асимптотически обратного оператора к таким операторам.

Пусть A – эволюционный оператор кратности q :

$$Ax = \sum_{\alpha \neq 0} S_{|\alpha|} (a_\alpha * x^{\otimes \alpha}) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in X^q),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ – мульти-индекс с q компонентами, a_α – векторнозначные обобщенные характеристики, являющиеся векторнозначными размерности q обобщенными функциями на пространстве R^n ($n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q$) с носителями на положительных гипероктантах $[0; +\infty)^n$, B – полиномиальный эволюционный оператор кратности q степени r :

$$Bx = \sum_{|\beta|=1}^r S_{|\beta|} (b_\beta * x^{\otimes \beta}) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in X^q), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q).$$

И пусть C – эволюционный оператор кратности q , являющийся композицией операторов B и A , т.е. $C = B \circ A$, а F – эволюционный оператор кратности q , являющийся композицией операторов A и B , т.е. $F = A \circ B$.

Оператор B называется *левым асимптотически обратным* степени r к оператору A , если

$$\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha = I \quad \text{и} \quad C_\alpha = 0 \quad \text{при} \quad 2 \leq |\alpha| \leq r,$$

где δ – дельта-функция, а I – тождественный оператор, действующий из пространства X^q в это же пространство.

Пусть E – эволюционный оператор кратности q , являющийся композицией операторов A и B , т.е. $E = A \circ B$. Оператор B называется *правым асимптотически обратным* степени r к оператору A , если

$$\sum_{|\alpha|=1} E_\alpha = I \quad \text{и} \quad E_\alpha = 0 \quad \text{при} \quad 2 \leq |\alpha| \leq r.$$

Наконец, оператор B называется *асимптотически обратным* степени r к оператору A , если он одновременно является левым и правым асимптотически обратным степени r к оператору A .

Пусть (c_α) – система векторных обобщенных импульсных характеристик оператора C . Рассмотрим условие $\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha = \delta \otimes I$.

Так как $|\alpha|=1$, то $\alpha = \gamma_k$ ($k=1,2,\dots,q$), где γ_k – мультииндекс, k -я компонента которого равна 1, а все остальные компоненты равны 0.

Тогда условие $\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha = I$ равносильно условию $\sum_{k=1}^q C_{\gamma_k} = I$, т.е.

$$\sum_{k=1}^q c_{\gamma_k} * x = x \quad (x \in X^q). \quad (1)$$

Обозначим через $c_{\gamma_k, m}$ ($m=1,2,\dots,q$) m -ую компоненту обобщенной вектор-функции c_{γ_k} . Тогда условие (1) эквивалентно следующим условиям:

$$c_{\gamma_k, k} = \delta \quad (k=1,2,\dots,q), \quad c_{\gamma_k, m} = 0 \quad \text{при } k \neq m \quad (k, m=1,2,\dots,q). \quad (2)$$

Таким образом, оператор B является левым асимптотически обратным степени r к оператору A , если выполнены условие (2) и следующее условие:

$$c_\alpha = 0 \quad (2 \leq |\alpha| \leq r). \quad (3)$$

Полагая в общей формуле композиции $\alpha = \gamma_k$, учитывая, что $|\alpha| = |\gamma_k| = 1$ и, значит, $\bar{\alpha} = \alpha^1 = \alpha = \gamma_k$, получим

$$c_{\gamma_k} = \sum_{j=1}^q b_{\gamma_j} * a_{\gamma_k, j}. \quad (4)$$

Записывая полученное соотношение (4) покомпонентно, для любого $m = \overline{1; q}$ имеем:

$$c_{\gamma_k, m} = \sum_{j=1}^q b_{\gamma_j, m} * a_{\gamma_k, j}. \quad (5)$$

Таким образом, в силу условия (2) имеем систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^q b_{\gamma_j, k} * a_{\gamma_k, j} = \delta \quad (k=1,2,\dots,q), \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^q b_{\gamma_j, m} * a_{\gamma_k, j} = 0 \quad \text{при } k \neq m \quad (k, m=1,2,\dots,q). \quad (7)$$

Введем матрицы $\tilde{A} = (a_{\gamma_k, j})_{k, j=1}^q$, $\tilde{B} = (b_{\gamma_j, m})_{j, m=1}^q$.

Тогда система (6–7) запишется в матричном виде:

$$\tilde{B} * \tilde{A} = \delta \otimes \tilde{I}, \quad (8)$$

где \tilde{I} – единичная матрица размерности $q \times q$.

Из полученного соотношения (8) следует, что относительно операции свертки матрица \tilde{B} является левой обратной к матрице \tilde{A} . В

этом случае мы будем говорить, что матричная обобщенная функция \tilde{A} сверточно обратима слева.

Аналогично будем говорить, что матричная обобщенная функция \tilde{A} сверточно обратима справа, если существует такая матричная обобщенная функция \tilde{B} , что выполняется равенство

$$\tilde{A} * \tilde{B} = \delta \otimes \tilde{I}. \quad (9)$$

Наконец, будем говорить, что матричная обобщенная функция \tilde{A} сверточно обратима, если она сверточно обратима слева и справа.

Отметим, что если обобщенная матричная функция \tilde{A} сверточно обратима, то из системы (6–7) определяются все компоненты векторнозначных обобщенных импульсных характеристик b_β .

Литература

1. Вувуникян Ю.М. Композиция нелинейных системных операторов с обобщенными ядрами // ДАН БССР. 1987. Т.31, № 3. С. 209–212.
2. Вувуникян Ю.М. Общая теорема о спектральных характеристиках оператора композиции нелинейных эволюционных операторов // Весн. Гродз. дзярж. ун-та ім. Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2009. № 2(82). С. 53–58.
3. Вувуникян, Ю. М. Нелинейные эволюционные операторы с композиционно симметричными обобщенными характеристиками // Доклады НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 2. С. 5–11.

КОРРЕЛЯЦИЯ СЛОЖНОСТИ И ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ TSP

В.А. ГОЛОВЕШКИН¹, Г.Н. ЖУКОВА², М.В. УЛЬЯНОВ³, М.И. ФОМИЧЕВ⁴

Московский технологический университет¹, Институт прикладной механики РАН
Московский политехнический университет²

Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, ВМК МГУ
им. М.В. Ломоносова³

ФКН НИУ Высшая школа экономики⁴

e-mail: ¹ nikshevolog@yandex.ru; ² galinanzhukova@gmail.com; ³ muljanov@mail.ru;

⁴ michan94@yandex.ru

УДК 519.854.2

Ключевые слова: *задача коммивояжера, TSP, сложность индивидуальной задачи, метод ветвей и границ, V&V.*

В докладе рассматривается статистическая зависимость числа порожденных вершин дерева решений и физического времени работы программной реализации метода ветвей и границ для задачи коммивояжера (TSP). На основе результатов вычислительного эксперимента получено приближенное соотношение между числом

порожденных вершин (сложность индивидуальной TSP) и физическим временем. Предлагается использовать это эмпирическое соотношение для прогнозирования времени работы программы, решающей TSP с числом «городов» больше 40.

Задача коммивояжера (далее TSP) заключается в отыскании оптимального гамильтонова цикла в полном ориентированном графе. Граф задается матрицей стоимостей, внедиагональные элементы которой (неотрицательные числа) интерпретируются как расстояния между пунктами назначения или стоимости перевозок. Диагональные элементы матрицы стоимостей полагаются условно равными бесконечности, чтобы осуществить запрет петель.

Метод ветвей и границ (МВГ) состоит в построении и исследовании древовидной структуры пространства решений TSP [1]. Построение поискового дерева решений начинается с корня, который будет соответствовать множеству Ω «всех возможных туров», т.е. корень дерева представляет множество всех возможных туров в задаче с n городами. Ветви, выходящие из корня, отличаются наличием или отсутствием в турах одной дуги, например, $\{k, l\}$. Множество Ω делится на два класса: туры, содержащие дугу (k, l) , и туры, не содержащие эту дугу. Подробное поэтапное изложение метода см., например, в [1].

Генерация матриц стоимостей несимметричной TSP проводилась стандартным для языка C++ псевдослучайным генератором. Элементы матриц (размерности от 20 до 40) были псевдослучайными целыми числами с дискретным равномерным распределением на интервале от 1 до 10^6 . Был реализован алгоритм без предвычисления начального тура жадным алгоритмом, со структурой хранения поискового дерева решений в упорядоченном списке (массиве) [2; 3].

Для каждого фиксированного n выполнялась серия экспериментов из 10^4 запусков программы, решающей TSP классическим МВГ. Измерялось время, затраченное на поиск оптимального тура и число вершин порожденного дерева решений. Для каждой серии были построены диаграммы рассеяния «сложность – время», точки на них оказались расположены вблизи прямой, что свидетельствует о наличии стохастической линейной зависимости. Методом наименьших квадратов (МНК) для каждого n был найден параметр k уравнения прямой $y = kx$ линейной регрессии сложности (x) на физическое время (y). Зависимость k от n представляет собой возрастающую выпуклую вниз функцию, в качестве приближения использовалась квадратичная функция, ее коэффициенты были вычислены с помощью МНК. Получено эмпирическое приближенное выражение для зависимости физического времени от сложности:

$$t_n(A) \approx (0.22n^2 - 6.6n + 77)c_n(A). \quad (1)$$

Это приближение можно использовать для оценки физического времени работы программы, решающей TSP, если сложность известна или вычислена приближенно, как в [4]. Для оценки качества приближения были вычислены квантили уровня 25, 50, 75, 85 и 95 по исходным данным и по формуле (1), значения оказались достаточно близкими.

Литература

1. Dantzig, G.B., Fulkerson D.R., Johnson S.M. On a linear programming, combinatorial approach to the traveling-salesman problem // Operations Research. 1959. V. 7. P. 58–66.
2. Ульянов М.В., Фомичев М.И. Ресурсные характеристики способов организации дерева решений в методе ветвей и границ для задачи коммивояжера // Бизнес – информатика, 2015. № 4 (34). С. 38–46.
3. Головешкин В.А., Жукова Г.Н., Ульянов М.В., Фомичев М.И. Сравнение ресурсных характеристик традиционного и модифицированного метода ветвей и границ для TSP // Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2015. Т. 2, № 11. С. 151–159.
4. Головешкин В.А., Жукова Г.Н., Ульянов М.В., Фомичёв М.И. Распределение логарифма сложности индивидуальных задач коммивояжера при фиксированной длине входа // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12, № 3–2. С. 131–137.

О СТЕПЕНЯХ ПО z И \bar{z} НЕКОТОРЫХ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ С КОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ В ТОЧКЕ ∞

С.А. ГОМОНОВ

Смоленский государственный университет

УДК 517.54

Ключевые слова: *полианалитическая функция, предельное множество, полианалитический полином.*

В данной статье исследуется наличие зависимости между степенями по z и \bar{z} некоторых полианалитических полиномов, имеющих дополнительные ограничения на их предельные множества в точке ∞ .

1. Среди полианалитических функций [1] выделяются относительно простым способом задания и относительно несложным строением их предельных множеств в точке ∞ так называемые полианалитические полиномы (п.а. полиномы) [2; 3], образующие кольцо $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$.

Однако наличие конечного элемента в предельном множестве $C(p(z, \bar{z}), \infty)$ [2] такого п.а. полинома $p(z, \bar{z}) \in \mathbf{C}[z, \bar{z}] \setminus \mathbf{C}$ может определенным образом сказаться на его степени по z и по \bar{z} , то есть на $\deg_z p(z, \bar{z})$ и $\deg_{\bar{z}} p(z, \bar{z})$.

Так, например, если трианалитический полином (т.е. $\deg_{\bar{z}} p(z, \bar{z}) = 2$) имеет хотя бы один конечный элемент в $C(p(z, \bar{z}), \infty)$, но последнее множество отлично от прямой (пополненной точкой ∞) [2] плоскости $\bar{\mathbf{C}}$, то надеяться, что его $\deg_z p(z, \bar{z})$ может оказаться равной 1 совершенно напрасно, так как в противном случае многочлен $\overline{p(z, \bar{z})}$ будет бианалитическим (т.е. $\deg_{\bar{z}} \overline{p(z, \bar{z})} = 1$), однако множество $C(\overline{p(z, \bar{z})}, \infty) \setminus \{\infty\}$, имея конечные элементы, отнюдь не окажется прямой плоскости $\bar{\mathbf{C}}$ [2]–[3], но либо лучом, либо объединением пары несовпадающих прямых, либо параболой, что исключено для бианалитического полинома.

2. Однако для бианалитических полиномов, а значит, и для п.а. полиномов $p(z, \bar{z})$ со свойством

$$\min\{\deg_z p(z, \bar{z}), \deg_{\bar{z}} p(z, \bar{z})\} = 1$$

(и хотя бы одним конечным предельным значением в точке ∞), можно гарантировать, что каждый из них, имея одну из степеней (по z или \bar{z}), равную единице, может иметь в качестве другой степени любое натуральное число, точнее, имеет место следующий факт.

Теорема. Для любой прямой l (пополненной точкой ∞) плоскости $\bar{\mathbf{C}}$ и для любого натурального числа n существует такой п.а. полином $p(z, \bar{z})$, для которого выполняются условия:

$$\begin{aligned} C(p(z, \bar{z}), \infty) &= l, \\ \min\{\deg_z p(z, \bar{z}), \deg_{\bar{z}} p(z, \bar{z})\} &= 1, \text{ а} \\ \max\{\deg_z p(z, \bar{z}), \deg_{\bar{z}} p(z, \bar{z})\} &= n. \end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая, что для любого п.а. полинома $p(z, \bar{z})$ выполняются равенства ([2]–[3]):

а) $C(a \cdot p(z, \bar{z}) + b, \infty) = a \cdot C(p(z, \bar{z}), \infty) + b$ и $C(p(a z, \bar{a} \bar{z}), \infty) = C(p(z, \bar{z}), \infty)$, где $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, причем считаем, что $a \cdot \infty + b = \infty$, а также равенство

б) $\overline{C(p(z, \bar{z}), \infty)} = C(\overline{p(z, \bar{z})}, \infty)$, считая, что $\overline{\infty} = \infty$, то для доказательства теоремы достаточно рассмотреть бианалитические полиномы вида $p(z, \bar{z}) = z^m \cdot (z + \bar{z})$, где $m \in N_0$, и убедиться, что для любого из них множество $C(p(z, \bar{z}), \infty) \setminus \{\infty\}$ – прямая линия плоскости $\bar{\mathbf{C}}$ (ее вещественная или мнимая ось).

Проще всего это можно сделать, рассмотрев все последовательности вида

$$(z_n) = \left(\frac{t}{n^m} + i \cdot n \right),$$

где t – любое действительное число. Легко убедиться, что каждая из них порождает конечный элемент из

$$C(z^m(z + \bar{z}), \infty),$$

причем все эти предельные значения каждого п.а. полином указанного вида (в точке ∞) заполняют целую прямую плоскости \bar{C} (ее вещественную или мнимую ось).

Литература

1. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1991. Т. 85. С. 187–254.
2. Гомонов С.А. О структуре предельных множеств полианалитических функций в изолированных особых точках // *Mathematica Montisnigri*. Подгорица: ежегодник Черногорского университета. 1995. Vol. 5. С. 27–64.
3. Гомонов С.А. О применении алгебраических функций к исследованию предельных множеств в точке ∞ полианалитических полиномов // Некоторые вопросы теории полианалитических функций и их обобщений / СГПИ. Смоленск, 1991. С. 16–42.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО РОДА

О.Б. ДОЛГОПОЛОВА, Э.И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет,

e-mail: Zverovich@bsu.by; Dolgopolova@tut.by

УДК 517.948.32:517.544

Ключевые слова: эллиптические функции, мероморфные функции, римановы поверхности, краевые задачи, ядро типа Коши.

В докладе рассматривается задача нахождения двоякопериодических функций второго рода. Показано, что если двоякопериодическая функция второго рода не имеет полюсов, то она есть показательная функция, если же она имеет полюсы, то ее можно представить в виде произведения показательной функции и отношения произведений сигма-функций.

Пусть ω, ω' – заданные числа (полупериоды), подчиненные ограничению $\text{Im} \frac{\omega'}{\omega} > 0$. Двойкопериодическими функциями второго рода [1, с. 250] называются мероморфные функции, удовлетворяющие равенствам:

$$f(z + 2\omega) = \mu \cdot f(z), \quad f(z + 2\omega') = \mu' \cdot f(z), \quad (1)$$

где $\mu \neq 0, \mu' \neq 0$ – заданные числа. При $\mu = \mu' = 1$ имеем эллиптические функции. Поэтому интерес представляют лишь те случаи, когда хотя бы одно из чисел μ, μ' отлично от единицы. Здесь будет показано, что *если двойкопериодическая функция второго рода не имеет полюсов, то она есть показательная функция, если же она имеет полюсы, то ее можно представить в виде произведения показательной функции и отношения произведений сигма-функций*. Задачу нахождения таких функций можно рассматривать как задачу линейного сопряжения (Римана) на торе, реализованном в виде параллелограмма $\Pi = [0, 2\omega] \times [0, 2\omega']$, противоположные стороны которого отождествлены (рис.1).

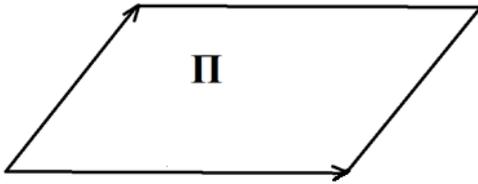


Рис. 1

Краевое условие задачи Римана [2] можно записать в виде:

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{\mu'} f(t + 2\omega'), & t \in (0, 2\omega), \\ f(t) = \frac{1}{\mu} f(t + 2\omega), & t \in (0, 2\omega'). \end{cases} \quad (2)$$

Станем сначала искать функции, не имеющие полюсов. Так как контур есть объединение замкнутых кривых на торе, а коэффициент задачи постоянный на каждой кривой, то индекс коэффициента задачи $\kappa = 0$. Взяв приращение $\text{Arg} f(t)$ вдоль края $\partial\Pi$, заключаем, что $\text{Arg} f(t)|_{\partial\Pi} = 0$. Отсюда в силу принципа аргумента заключаем, что если функция $f(z)$ не имеет в Π полюсов, то она не имеет в Π и нулей. Так как параллелограмм Π односвязен, то по теореме о монодромии существует однозначная в Π ветвь $\ln f(z)$ нетривиального решения

задачи (2). Поэтому, логарифмируя краевое условие (2), получим задачу «о скачке»:

$$\begin{cases} \ln f(t) - \ln f(t + 2\omega') = -\ln \mu', & t \in (0, 2\omega), \\ \ln f(t) - \ln f(t + 2\omega) = -\ln \mu, & t \in (0, 2\omega'). \end{cases} \quad (3)$$

Решение этой задачи будем искать в виде аналога интеграла типа Коши, ядром которого является дзета-функция Вейерштрасса $\zeta(\tau - z)$, построенная по основным периодам $2\omega, 2\omega'$:

$$\ln f(z) = -\frac{\ln \mu'}{2\pi i} \int_0^{2\omega} \zeta(\tau - z) d\tau - \frac{\ln \mu}{2\pi i} \int_0^{2\omega'} \zeta(\tau - z) d\tau + c, \quad z \in \Pi^0, \quad (4)$$

где c – произвольная постоянная. Чтобы найти ограничения, при которых формула (4) дает решение задачи (3) (здесь имеет место особый случай), применим к интегралу (4) формулы Сохоцкого:

$$\begin{aligned} \ln f(t) - \ln f(t + 2\omega') &= -\ln \mu' - \frac{\ln \mu'}{2\pi i} \int_0^{2\omega} [\zeta(\tau - t) - \zeta(\tau - t - 2\omega')] d\tau - \\ &- \frac{\ln \mu}{2\pi i} \int_0^{2\omega'} [\zeta(\tau - t) - \zeta(\tau - t - 2\omega')] d\tau = -\ln \mu' + \ln \mu' \frac{2\eta' \cdot 2\omega}{2\pi i} + \ln \mu \frac{2\eta' \cdot 2\omega'}{2\pi i} = \\ &= -\ln \mu' + \frac{2\eta'}{\pi i} (\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu), \quad t \in (0, 2\omega). \end{aligned}$$

Аналогично: $\ln f(t) - \ln f(t + 2\omega) = -\ln \mu + \frac{2\eta}{\pi i} (\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu), \quad t \in (0, 2\omega')$.

Здесь учтено, что $\zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\eta$, $\zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta'$, где $\eta = \zeta(\omega)$, $\eta' = \zeta(\omega')$. Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} \ln f(t) - \ln f(t + 2\omega') = -\ln \mu' + \frac{2\eta'}{\pi i} (\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu), & t \in (0, 2\omega), \\ \ln f(t) - \ln f(t + 2\omega) = -\ln \mu + \frac{2\eta}{\pi i} (\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu), & t \in (0, 2\omega'). \end{cases}$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (3), найдем условия того, что формула (4) дает решения задачи (2):

$$\begin{cases} \frac{2\eta'}{\pi i} (\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu) \equiv 0 \pmod{2\pi i}, \\ \frac{2\eta}{\pi i} (\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu) \equiv 0 \pmod{2\pi i}. \end{cases} \quad (5)$$

Учитывая известное [1, с. 53] равенство $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$, исключим из равенств (5) числа η и η' . Тогда получим уравнение

$$\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu = 2\pi i(n\omega + n'\omega'), \quad (6)$$

которое надо решить в целых числах n и n' . С этой целью разложим комплексное число $\frac{\omega \ln \mu + \omega' \ln \mu'}{2\pi i}$ по базису ω, ω' :

$$\frac{\omega \ln \mu + \omega' \ln \mu'}{2\pi i} = \alpha\omega + \alpha'\omega', \quad \text{где } \alpha, \alpha' \in R. \quad (7)$$

Таким образом, $n\omega + n'\omega' = \alpha\omega + \alpha'\omega'$, откуда находим $n = [\alpha]$, $n' = [\alpha']$, где [...] означает целую часть. Таким образом, задача (2) имеет ненулевое решение, если и только если коэффициенты α, α' разложения (7) – целые числа, и в этом случае

$$f(z) = e^c \cdot \exp\left\{-\frac{\ln \mu}{2\pi i} \int_0^{2\omega} \zeta(\tau - z) d\tau - \frac{\ln \mu'}{2\pi i} \int_0^{2\omega'} \zeta(\tau - z) d\tau\right\}, \quad z \in \Pi^0. \quad (8)$$

Учитывая равенство $\zeta(u) = \frac{d}{du} \ln \sigma(u)$ [1, с. 270], вычислим входящие в (8) интегралы:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^c \cdot \exp\left\{-\frac{\ln \mu'}{2\pi i} \ln \sigma(\tau - z) \Big|_0^{2\omega} - \frac{\ln \mu}{2\pi i} \ln \sigma(\tau - z) \Big|_0^{2\omega'}\right\} = \\ &= e^c \cdot \exp\left\{-\frac{\ln \mu'}{2\pi i} \ln \frac{\sigma(2\omega - z)}{\sigma(-z)} - \frac{\ln \mu}{2\pi i} \ln \frac{\sigma(2\omega' - z)}{\sigma(-z)}\right\} = e^c \cdot \exp\left\{-\frac{\ln \mu'}{2\pi i} \ln[-e^{2\eta(\omega-z)}] - \right. \\ &\left. - \frac{\ln \mu}{2\pi i} \ln[-e^{2\eta'(\omega'-z)}]\right\} = c_1 \cdot e^{\frac{\eta \ln \mu' + \eta' \ln \mu}{\pi i} z}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $c_1 \neq 0$ – произвольная постоянная. Учитывая равенства (5) и $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$, можно показать, что правая часть равенства (9) дает общее решение задачи (2).

Рассмотрим теперь ту же задачу (1) в классе мероморфных функций, имеющих в каждом из конгруэнтных параллелограммов периодов единственный простой полюс, причем все эти полюсы имеют вид $z_0 + 2m\omega + 2n\omega'$, где $m, n \in Z$, а $z_0 \in \Pi^0$. Эта задача равносильна краевой задаче (2) для параллелограмма Π в классе мероморфных в Π

функций, имеющих единственный простой полюс в точке $z_0 \in \Pi^0$. Эта задача разрешима безусловно, имеет одно линейно независимое решение, которое притом имеет единственный нуль в некоторой (пока неизвестной) точке $z_1 \in \Pi^0$. Решение задачи ищем в виде:

$$f(z) = e^c \cdot \exp \left\{ -\frac{\ln \mu'}{2\pi i} \int_0^{2\omega} \zeta(\tau - z) d\tau - \frac{\ln \mu}{2\pi i} \int_0^{2\omega'} \zeta(\tau - z) d\tau + \int_{z_0}^{z_1} \zeta(\tau - z) d\tau \right\} =$$

$$= e^c \cdot \exp \left\{ \frac{\ln \mu'}{2\pi i} \int_0^{2\omega} \zeta(z - \tau) d\tau + \frac{\ln \mu}{2\pi i} \int_0^{2\omega'} \zeta(z - \tau) d\tau - \int_{z_0}^{z_1} \zeta(z - \tau) d\tau \right\}, \quad (10)$$

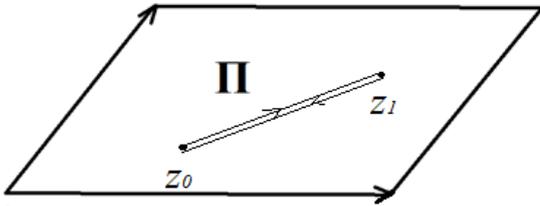


Рис. 2

К функции $\ln f(z)$ применим формулы Сохоцкого:

$$\ln f(t) - \ln f(t + 2\omega') = -\ln \mu' + \frac{2\eta'}{\pi i} (\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu) - 2\eta' \cdot (z_1 - z_0), \quad t \in (0, 2\omega),$$

$$\ln f(t) - \ln f(t + 2\omega) = -\ln \mu + \frac{2\eta}{\pi i} (\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu) - 2\eta \cdot (z_1 - z_0), \quad t \in (0, 2\omega').$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (3), получим:

$$\begin{cases} \frac{2\eta'}{\pi i} (\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu) - 2\eta' \cdot (z_1 - z_0) = 2\pi i n, \\ \frac{2\eta}{\pi i} (\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu) - 2\eta \cdot (z_1 - z_0) = 2\pi i m. \end{cases}$$

Умножим второе из этих равенств на ω' , а первое на ω и образуем их разность. Тогда получим:

$$\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu - \pi i \cdot (z_1 - z_0) = 2\pi i (n\omega + m\omega'), \text{ где } n, m -$$

неопределенные целые числа. Из последнего равенства находим:

$$z_1 = z_0 + \frac{\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu}{\pi i} + (n \cdot 2\omega + m \cdot 2\omega'). \quad (11)$$

Так как периоды 2ω и $2\omega'$ линейно независимы над полем R , то по ним можно разложить любое комплексное число. Учитывая это, заключаем, что существуют и единственны $\alpha, \beta \in R$ такие, что $z_0 + \frac{\omega \ln \mu' + \omega' \ln \mu}{\pi i} = \alpha \cdot 2\omega + \beta \cdot 2\omega'$. Подставив это в (10), найдем:

$$z_1 = (n + \alpha) \cdot 2\omega + (m + \beta) \cdot 2\omega' \in [0, 2\omega) \times [0, 2\omega')$$

при $0 \leq n + \alpha < 1$, $0 \leq m + \beta < 1$. Тем самым числа n и m однозначно определены, а формула (10) дает общее решение поставленной задачи. Преобразуем его к виду

$$f(z) = c_1 \cdot e^{\frac{\eta \ln \mu' + \eta' \ln \mu}{\pi i} z} \cdot \frac{\sigma(z_1 - z)}{\sigma(z_0 - z)},$$

где $c_1 \neq 0$ – произвольная постоянная.

Литература

1. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
2. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // УМН, 1971. Т. XXVI. Вып. 1 (157). С. 113–179.

МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ВТОРОГО РОДА НА ЗАМКНУТЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

О.Б. ДОЛГОПОЛОВА, Э.И. ЗВЕРОВИЧ
Белорусский государственный университет,
e-mail: Zverovich@bsu.by; Dolgopolova@tut.by

УДК 517.948.32:517.544

Ключевые слова: мероморфные функции, римановы поверхности, краевые задачи, ядро типа Коши, проблема обращения Якоби.

В докладе рассматривается задача нахождения мероморфных функций второго рода. Получены конкретные аналитические выражения для этих функций.

Пусть \mathfrak{R} – замкнутая риманова поверхность рода $h \geq 1$; $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_h, b_h$ – канонические сечения на ней с единственной общей точкой. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{R}}$ нормальный фундаментальный многоугольник, то есть односвязную риманову поверхность,

полученную разрезанием поверхности \mathfrak{R} вдоль канонических сечений (рис 1).

Край поверхности $\tilde{\mathfrak{R}}$ следующий:

$$\partial\tilde{\mathfrak{R}} = a_1 \cdot b_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b_1^{-1} \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot a_2^{-1} \cdot b_2^{-1} \cdot \dots \cdot a_h \cdot b_h \cdot a_h^{-1} \cdot b_h^{-1}.$$

Мероморфными функциями второго рода на \mathfrak{R} будем называть мероморфные на \mathfrak{R} функции, разрывные вдоль линий канонического рассечения, на которых должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} \Phi(t^+) = \frac{1}{\mu_k} \Phi(t^-), & t \in a_k, \quad k = 1, \dots, h, \\ \Phi(t^+) = \frac{1}{\mu'_k} \Phi(t^-), & t \in b_k, \quad k = 1, \dots, h, \end{cases} \quad (1)$$

где μ_k, μ'_k — заданные числа.

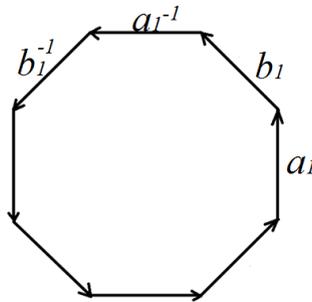


Рис. 1

Дифференцируя равенства (1) и деля полученные равенства на равенства (1), легко заключить, что логарифмические дифференциалы неизвестных функций — это всюду на \mathfrak{R} мероморфные (абелевы) дифференциалы. Значит, сами решения задачи (1) — это экспоненты абелевых интегралов. Нахождение для них конкретных аналитических выражений представляет собой проблему, которой и займемся.

С этой целью возьмем сначала комплексно — нормированный базис абелевых дифференциалов первого рода $dw_1(p), dw_2(p), \dots, dw_h(p)$, то есть такой базис, периоды которого $\int_{a_k} dw_j = \delta_{kj}, \int_{b_k} dw_j = B_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, h$

таковы, что δ_{kj} — символ Кронекера, а матрица $(B_{kj})_{k,j=1}^h$ — симметричная с положительно определенной мнимой частью. Кроме того будем использовать разрывный [1] по переменной $q \in \mathfrak{R}$ вдоль линий a_1, a_2, \dots, a_h аналог ядра Коши $d\hat{\omega}_{q_0}(p), d\hat{\omega}_{q_0 q_0}(p) \equiv 0$, удовлетворяющий условиям сопряжения:

$$d\hat{\omega}_{t^+ q_0}(p) - d\hat{\omega}_{t^- q_0}(p) = -2\pi i dw_j(p), \quad t \in a_j, j = 1, \dots, h. \quad (2)$$

По переменной p ядро $d\hat{\omega}_{qq_0}(p)$ имеет в точках q и q_0 простые полюсы с вычетами, равными соответственно $+1$ и -1 . Периоды его таковы:

$$\int_{a_k}^{\int} d\hat{\omega}_{qq_0}(t) = 0, \int_{b_k}^{\int} d\hat{\omega}_{qq_0}(t) = 2\pi i \int_{q_0}^{\int} dw_k(t), k = 1, \dots, h,$$

где штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования не пересекает линий канонического рассечения.

Так как контур в задаче (1) представляет собой объединение замкнутых кривых, на каждой из которых коэффициент задачи (1) постоянный, то индекс коэффициента задачи $\kappa = 0$.

Будем сначала отыскивать решения задачи (1), не имеющие полюсов. Применив к нетривиальному решению задачи (1) принцип аргумента, найдем число N его нулей:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathfrak{R}} d \ln \Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^h \left[\int_{a_k} d \ln \Phi(t^+) + \int_{b_k} d \ln \Phi(t^+) - \int_{a_k} d \ln \Phi(t^-) - \int_{b_k} d \ln \Phi(t^-) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^h \left[\int_{a_k} d \ln \frac{\Phi(t^+)}{\Phi(t^-)} + \int_{b_k} d \ln \frac{\Phi(t^+)}{\Phi(t^-)} \right] = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^h \left[\int_{a_k} d \ln \frac{1}{\mu_k} + \int_{b_k} d \ln \frac{1}{\mu'_k} \right] = 0, \end{aligned}$$

то есть нетривиальное решение задачи (1) нулей не имеет.

Найдем вспомогательную функцию $\chi(q) = e^{\Gamma(q)}$, где

$$\Gamma(q) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^h \left[\int_{a_k} \ln \frac{1}{\mu_k} \cdot d\hat{\omega}_{qq_0}(t) + \int_{b_k} \ln \frac{1}{\mu'_k} \cdot d\hat{\omega}_{qq_0}(t) \right].$$

Здесь оба интеграла вычисляются на основании равенств (3). Поэтому имеем:

$$\Gamma(q) = \sum_{k=1}^h w_k(q) \ln \frac{1}{\mu'_k}, \quad \text{где } w_k(q) = \int_{q_0}^{\int} dw_k(t),$$

$$\text{откуда } \chi(q) = \exp \left[\sum_{k=1}^h w_k(q) \ln \frac{1}{\mu'_k} \right].$$

В силу нормированности базиса $w_1(q), w_2(q), \dots, w_h(q)$ функция $\chi(q)$ удовлетворяет следующим условиям сопряжения:

$$\begin{cases} \chi(t^+) = \chi(t^-) \cdot \exp \left[- \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \right], & t \in a_j, j = 1, \dots, h, \\ \chi(t^+) = \frac{1}{\mu'_k} \chi(t^-), & t \in b_j, j = 1, \dots, h. \end{cases} \quad (4)$$

Введем новую неизвестную функцию $\hat{\phi}(q) = \frac{\Phi(q)}{\chi(q)}$. Из краевых условий

(3) и (4) имеем:

$$\begin{cases} \hat{\phi}(t^+) = \hat{\phi}(t^-) \cdot \frac{1}{\mu_j} \exp \left[\sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \right], & t \in a_j, j = 1, \dots, h, \\ \hat{\phi}(t^+) = \hat{\phi}(t^-), & t \in b_j, j = 1, \dots, h. \end{cases} \quad (5)$$

Второе из этих условий можно отбросить. Что касается первого из условий (5), то учтем, что функция $\hat{\phi}(q)$ не имеет на $\tilde{\mathfrak{R}}$ нулей и бесконечностей, а так как $\tilde{\mathfrak{R}}$ односвязная, то по теореме о монодромии на ней существует однозначная ветвь логарифма $\ln \hat{\phi}(q)$ нетривиального решения задачи (5). Поэтому, логарифмируя первое равенство (5), получим сравнение:

$$\ln \hat{\phi}(t^+) - \ln \hat{\phi}(t^-) \equiv \ln \frac{1}{\mu_j} + \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \pmod{2\pi i}, \quad t \in a_j, j = 1, \dots, h. \quad (6)$$

Условием разрешимости этой задачи является ортогональность правой части (6) базису $dw_1(t), dw_2(t), \dots, dw_h(t)$ дифференциалов первого рода. Учитывая, что $\int_{a_k} dw_j = \delta_{kj}$, заключаем, что задача (6) разрешима, если и

только если выполняются условия:

$$\ln \frac{1}{\mu_j} + \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \equiv 0 \pmod{2\pi i}, \quad j = 1, \dots, h. \quad (7)$$

При выполнении этих условий общее решение задачи (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} \ln \hat{\phi}(q) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^h \int_{a_j} \left(\ln \frac{1}{\mu_j} + \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \right) \cdot d\hat{\omega}_{q_0}(t) + C = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^h \left(\ln \frac{1}{\mu_j} + \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \right) \int_{a_j} d\hat{\omega}_{q_0}(t) + C = C, \end{aligned}$$

где C – произвольная постоянная. Таким образом, при выполнении условий (7) задача (1) имеет одно линейно независимое решение, равное

$$\Phi(q) = \exp \left[C + \sum_{k=1}^h w_k(q) \ln \frac{1}{\mu'_k} \right]. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь задачу нахождения решений задачи (1), кратных дивизору Δ^{-1} , где $\Delta = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s$, $p_\nu \in \tilde{\mathfrak{R}}$, $\nu = 1, \dots, s$. Сведем ее к задаче (5) $\hat{\phi}^+(t) = \hat{\phi}^-(t) \cdot \frac{1}{\mu_j} \exp \left[\sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \right]$, $t \in a_j, j = 1, \dots, h$, где искомая функция $\hat{\phi}(q)$ кратна дивизору Δ^{-1} . Учитывая, что индекс коэффициента задачи (5) равен нулю, заключаем, что любое ненулевое решение задачи (5) имеет на \mathfrak{R} s нулей. Введем новую неизвестную функцию:

$$\varphi(q) = \hat{\varphi}(q) \cdot \exp \left[\sum_{k=1}^s \int_{q_k}^{p_k} d\hat{\omega}_{qq_0}(p) \right], \quad (9)$$

где неизвестные точки q_1, q_2, \dots, q_s и пути интегрирования подберем так, чтобы функция $\varphi(q)$ стала всюду на \mathfrak{R} мероморфной. Для этого достаточно потребовать, чтобы было $\varphi^+(t) = \varphi^-(t)$, $t \in a_j$, $j = 1, \dots, h$. Подставив сюда значения из (9), найдем

$$\hat{\varphi}^+(t) \cdot \exp \left[\sum_{k=1}^s \int_{q_k}^{p_k} d\hat{\omega}_{t^+q_0}(p) \right] = \hat{\varphi}^-(t) \cdot \exp \left[\sum_{k=1}^s \int_{q_k}^{p_k} d\hat{\omega}_{t^-q_0}(p) \right], \quad t \in a_j, j = 1, \dots, h.$$

Отсюда находим:

$$\frac{1}{\mu_j} \exp \left[\sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \right] = \exp \left[\sum_{k=1}^s \int_{q_k}^{p_k} \left\{ d\hat{\omega}_{t^-q_0}(p) - d\hat{\omega}_{t^+q_0}(p) \right\} \right], \quad t \in a_j, j = 1, \dots, h.$$

Используя (2), запишем это в виде:

$$\exp \left[\ln \frac{1}{\mu_j} + \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \right] = \exp \left[2\pi i \sum_{k=1}^s \int_{q_k}^{p_k} dw_j(t) \right], \quad t \in a_j, j = 1, \dots, h.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\ln \frac{1}{\mu_j} + \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \right] = \sum_{k=1}^s w_j(p_k) - \sum_{k=1}^s w_j(q_k) + n_j + \sum_{k=1}^h m_k B_{kj}, \quad j = 1, \dots, h,$$

где n_j и m_k неопределенные целые числа. Обозначив

$$\sum_{k=1}^s w_j(p_k) - \frac{1}{2\pi i} \left[\ln \frac{1}{\mu_j} + \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln \frac{1}{\mu'_k} \right] = e_j - k_j, \quad \text{где } k_j \text{ — римановы константы}$$

[1], перепишем последние равенства в виде следующей системы

сравнений: $\sum_{k=1}^s w_j(p_k) \equiv e_j - k_j$, (по модулю периодов) $j = 1, \dots, h$. Это

обобщенная проблема обращения Якоби [1]. При $s \geq h$ она безусловно разрешима. Считая ее решенной, найдем общее решение задачи (1):

$$\Phi(q) = \varphi(q) \cdot \exp \left[\sum_{k=1}^h w_k(q) \ln \frac{1}{\mu'_k} - \sum_{k=1}^s \hat{\omega}_{qq_0}(p_k) + \sum_{k=1}^s \hat{\omega}_{qq_0}(q_k) \right],$$

где $\varphi(q)$ — произвольная всюду на \mathfrak{R} мероморфная функция, кратная дивизору $q_1^{-1} \cdot q_2^{-1} \cdot \dots \cdot q_s^{-1}$.

Литература

1. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гильдеровских классах на римановых поверхностях // УМН, 1971. Т. XXVI. Вып. 1 (157). С. 113–179.

ОДНОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА С ОЖИДАНИЕМ ПРИ УЧЕТЕ ВЫХОДА ПРИБОРА ИЗ СТРОЯ

Г.С. ЕВДОКИМОВА

Смоленский государственный университет

e-mail: kaf-matem @ smolgu.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: система с полками, входящий поток, ведущая мера, среднее значение интенсивности, порядок поступления, марковский процесс, эргодические свойства.

Рассматривается вопрос о распределении времени ожидания в произвольный момент времени для однолинейной системы с периодическим входящим потоком, в которой обслуживающий прибор выходит из строя, требуя ремонта.

Существуют системы массового обслуживания с периодическим входящим потоком и произвольным временем обслуживания, для которых при определенных условиях существует предельное распределение времени ожидания. Учитывая, что большую роль для практических приложений представляют системы массового обслуживания, в которых обслуживающий прибор выходит из строя, требуя ремонта, необходимо уметь также находить условия существования предельного распределения и различные характеристики обслуживания для ненадежных приборов [1].

Пусть в систему массового обслуживания, состоящую из одного обслуживающего прибора, поступает пуассоновский поток вызовов с ведущей мерой $\Lambda(\Delta) = \int_{\Delta} \lambda(u) du$, которая имеет период τ , иными словами,

для любого борелевского множества Δ на прямой $\Lambda(\Delta + \tau) = \Lambda(\Delta)$. При этом среднее значение интенсивности $\lambda(t)$ по периоду конечно, то есть

$\lambda = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \lambda(t) dt < \infty$. Вызов, заставший прибор свободным, немедленно

начинает обслуживаться, в противном случае – становится в очередь. Допускается неограниченная очередь. Длительности обслуживания $\{\xi_k\}$ – случайные величины с распределением $H(x) = P(\xi_k \leq x)$,

Допустим, что прибор может выйти из строя только тогда, он не занят обслуживанием требований. Если в момент t закончился период занятости прибора и до момента $t + x$ другие вызовы в систему не

поступали, то с определенной вероятностью прибор может выйти из строя. После выхода прибора из строя начинается его восстановление. Длительности восстановления $\{\eta_i\}$ – случайные величины с распределением $G(x) = P\{\eta_i \leq x\}$ и конечным математическим ожиданием. Длительности обслуживания вызовов, «жизни» и восстановления прибора – независимые случайные величины.

Практически важные характеристики обслуживания можно изучить, воспользовавшись соответствующим образом построенным марковским процессом $\zeta(t) = \{l(t), \gamma(t)\}$. Первая компонента этого процесса, т.е. $l(t)$ может принимать только два значения: 0 и 1. Если $l(t) = 0$, то это означает, что в момент t прибор находится в исправном состоянии и, кроме того, в этот момент в системе отсутствуют требования. Если же прибор в момент t находится в неисправном состоянии или занят обслуживанием требования, то $l(t) = 1$. Вторая компонента $\gamma(t)$ имеет различный физический смысл в зависимости от того, равна первая компонента 0 или 1. В первом случае $\gamma(t)$ – это время с момента t до того момента, когда прибор вышел бы из строя, если после t поток требований прекратится; во втором случае $\gamma(t)$ – это время с момента t до того момента, когда прибор начнет обслуживание требования, если бы это требование поступило в момент t . Обозначим $F_i(x, t) = P\{l(t) = i, \gamma(t) \leq x\}$.

Теорема. Если распределение $H(x)$ имеет конечный первый момент $0 < \mu = \int_0^{\infty} x dH(x) < \infty$ и $\lambda\mu < 1$, то

$$F_i(x, t) = A_i(x, t) + B_i(x, t),$$

где $A_i(x, t)$ является периодической функцией по t с периодом τ , а $B_i(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Если же $\lambda\mu \geq 1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} F_i(x, t) = 0$ при любом конечном x .

Доказательство теоремы разбивается на ряд лемм. Вопрос о нахождении функции $A_i(x, t)$ пока остается открытым, хотя имеются основания предполагать, что он решается в положительном смысле.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005. 400 с.

АЕ-СТРУКТУРЫ С ГОМОМОРФИЗМАМИ

Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ

Смоленский государственный университет

e-mail: ypy1101@gmail.com

УДК 514.14 + 514.16

Ключевые слова: *инцидентностная структура с параллельностью; АЕ-структура, АЕ-структуры с гомоморфизмами.*

Вводится понятие АЕН-структуры – инцидентностной структуры с параллельностью, допускающей гомоморфное отображение на АЕ-структуру. Это позволяет с единых позиций рассматривать такие инцидентностные структуры с гомоморфизмами, как: параллельные структуры, аффинные пространства Шпернера, аффинные плоскости Грозе, аффинные плоскости Сандлера, аффинные плоскости, аффинные плоскости Ельмслева, аффинные плоскости Клингенберга.

В работе рассматриваются АЕ-структуры с гомоморфизмами – инцидентностные структуры с параллельностью, допускающие координатизацию с помощью алгебр $\langle A; T, 0, I \rangle$ типа $\langle 3, 0, 0 \rangle$.

Определение 1. Инцидентностной структурой с параллельностью (короче AI-структурой) называется система

$$S = \langle P, L; I, \parallel \rangle,$$

где $\langle P, L; I \rangle$ – инцидентностная структура, \parallel – отношение эквивалентности на L такое, что для любой точки $p \in P$ и любой прямой $M \in L$ существует единственная прямая L такая, что $p \in L$ и $L \parallel M$. Отношение \parallel называется отношением *параллельности*.

Определение 2. Инцидентностной структурой с параллельностью и смежностью называется система

$$S = \langle P, L; I, \parallel, \sim \rangle,$$

где $\langle P, L; I, \parallel \rangle$ – инцидентностная структура с параллельностью, \sim – отношение эквивалентности на P . Отношение \sim называется отношением *смежности*.

Определение 3. Точка p называется смежной прямой L ($p \sim L$), если существует точка q такая, что $q \in L$ и $q \sim p$. Прямая M называется смежной прямой L ($M \sim L$), если каждая точка прямой M смежна прямой L и каждая точка прямой L смежна прямой M .

*Определение 4. Классы эквивалентности L / \parallel множества L по отношению \parallel называются *направлениями*. Направление, содержащее*

прямую L , обозначается Π_L . Прямая направления Π , которой инцидентна точка r , обозначается $r\Pi$.

Определение 5. Направление Π называется смежным направлению Π' ($\Pi \sim \Pi'$), если найдется такая пара прямых M и M' , что $M \in \Pi$, $M' \hat{I} \Pi'$ и $M \sim M'$.

Определение 6. Инцидентностная структура $S = \langle P, L; I, \parallel, \sim \rangle$ с параллельностью и смежностью называется *АЕ-структурой с гомоморфизмом* или *АЕН-структурой*, если выполняются следующие условия:

(АЕН1) Существует гомоморфизм φ АИ-структуры $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ на АИ-структуру $S^* = \langle P^*, L^*, I^*, \parallel^* \rangle$ такой, что

- 1) $\varphi(p) = \varphi(q) \Leftrightarrow p \sim q$;
- 2) $\varphi(L) = \varphi(M) \Leftrightarrow L \sim M$;
- 3) $L \parallel M \Rightarrow \varphi(L) \parallel^* \varphi(M)$, где через $M \cap L$ обозначено множество точек, инцидентных двум прямым M и L .

(АЕН2) Существуют три точки p_0, p_1, p_2 , попарно не смежные и не инцидентные одной прямой, однозначно определяющие три попарно не смежные направления Π_1, Π_2, Π_3 такие, что:

- 1) $L_1 = p_0p_1 \in \Pi_1, L_2 = p_0p_2 \in \Pi_2, p_3 = p_2\Pi_1 \cap p_1\Pi_2, L_3 = p_0p_3 \in \Pi_3, L_4 = p_2\Pi_1$ (рис. 1).

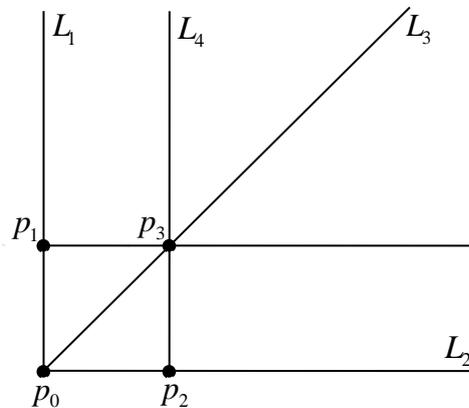


Рис. 1. Базовые элементы АЕН-структуры $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$

2) Для любой точки p существует единственная прямая L направления Π_1 , проходящая через точку p .

3) Любая прямая L направления Π_1 пересекает произвольную прямую M , не принадлежащую направлению смежному Π_1 , в единственной точке.

4) Любая прямая направления Π_2 пересекает прямую L_3 в единственной точке.

5) Любая прямая L , проходящая через точку p_0 и не принадлежащая направлению смежному Π_1 , пересекает прямую L_4 в единственной точке.

6) Через точку p_0 и любую точку p прямой L_4 проходит точно одна прямая.

7) Мощность множества точек на произвольной прямой, мощность любого из направлений и мощность множества всех направлений без направлений смежных Π_1 совпадают.

Теорема 1. Гомоморфный образ AEN -структуры является AE -структурой.

Доказательство состоит в проверке аксиом AE -структуры.

Для произвольной AEN -структуры $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ методом Холла строится EN -алгебра $A_S = \langle A; T, 0, I \rangle$ типа $\langle 3, 0, 0 \rangle$ с элементами нуль 0 и единица I такими, что:

$$\begin{aligned} ("a, b \hat{I} A) T(a, 0, b) = T(0, a, b) = b, \\ ("a \hat{I} A) T(a, I, 0) = T(I, a, 0) = a. \end{aligned}$$

С каждой E -алгеброй $A_S = \langle A; T, 0, I \rangle$ обычным способом связывается инцидентностная структура $S_A = \langle P, L; I, \parallel \rangle$. При этом структура S_A оказывается AEN -структурой. В этом смысле AEN -структуры являются наиболее общими аффинными инцидентностными структурами, допускающими координатизацию с помощью EN -алгебр.

Такие известные инцидентностные структуры, как аффинные пространства Шпернера, аффинные плоскости Грозе, аффинные плоскости Сандлера, аффинные плоскости, аффинные плоскости Ельмслева, аффинные плоскости Клингенберга являются AEN -структурами [1–6]. Введенные в работе понятия позволяют изучать все эти структуры с единых позиций.

Литература

1. Емельченков Е.П. Аффинные ельмслевовы псевдоплоскости и АНР-тернары. - 10 с. - Деп. в ВИНТИ 26.12.1978. № 3905.
2. Емельченков Е.П., Хубежты И.А. Об инцидентностных структурах. 266 с. Владикавказ: Северо-Осетинский гос. ун-т, 1998. 266 с.: ил. – Библиогр.: 240 назв. Деп. в ВИНТИ 16.1098, № 3015-B98
3. Емельченков Е.П., Хубежты И.А. Проективные плоскости и их обобщения: монография. Сев.Осетинский гос. ун-т. Владикавказ (Дзауджикау): Изд-во СОГУ, 2003. 345 с.
4. Barlotti A. Finite Sperner spaces constructed from projective and affine spaces / A. Barlotti, J. Cofman // Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1974. 40. P. 231–241.
5. Groze V. Asupta coordinatisarii si ocufundarii de incidenta // Stud. Univ. Babes-Bolyai. Ser. mat.-mech. 1971. 16, № 1. P. 37–47.
6. Sandler R. Pseudo planes and pseudo ternaries // J. Algebra. 1966. № 4:2. P. 300–316.

О ПОСТРОЕНИИ ИНЦИДЕНТНОСТНЫХ СТРУКТУР С ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬЮ

Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ, А.М. МАЯНОВ
Смоленский государственный университет
e-mail: ypy1101@gmail.com

УДК 514.14 + 514.16

Ключевые слова: *инцидентностная структура с параллельностью, АЕ-структура, АЕ-структуры с гомоморфизмами; распараллеливание процессов.*

Обсуждаются вопросы построения конечных инцидентностных структур с параллельностью с помощью ЭВМ.

В работе обсуждается алгоритм построения конечных инцидентностных структур с параллельностью. К классу упомянутых структур относятся такие известные структуры, как: параллельные структуры, аффинные пространства Шпернера, аффинные плоскости Грозе, аффинные плоскости Сандлера, аффинные плоскости, аффинные плоскости Ельмслева, аффинные плоскости Клингенберга [1–6].

Вопрос о существовании инцидентностных структур с определенным числом точек на прямой не исследован. Даже для аффинных плоскостей существуют лишь предположения о возможных значениях порядка. В частности, остаётся открытым вопрос: «Всегда ли порядок конечной плоскости является степенью простого числа?».

В 1949 году была доказана теорема Брука-Райзера, являющаяся по сей день наилучшим общим результатом в этом направлении. Из теоремы Брука-Райзера не для любого числа n можно сделать вывод о несуществовании аффинной плоскости порядка n . Наименьшим из таких чисел в 1949 году было число 10. Потребовалось 40 лет для доказательства несуществования конечной аффинной плоскости порядка 10. Результат был получен в 1989 году с помощью суперкомпьютера. Попытки провести вычисления на персональном компьютере закончились неудачей из-за нехватки ресурсов.

По теореме Брука-Райзера следующее наименьшее число, которое может не быть порядком конечной плоскости, – это 12. В настоящее время вопрос о существовании конечной аффинной плоскости порядка 12 остаётся открытым.

Определение 1. Инцидентностной структурой с параллельностью (короче AI-структурой) называется система

$$S = \langle P, L; I, \parallel \rangle,$$

где $\langle P, L; I \rangle$ – инцидентностная структура, \parallel – отношение эквивалентности на L такое, что для любой точки $p \in P$ и любой прямой

$M \in L$ существует единственная прямая L такая, что $p \perp L$ и $L \parallel M$. Отношение \parallel называется отношением *параллельности*.

Приведем пример, иллюстрирующий задание AI -структуры с помощью матрицы инцидентности.

Пример 1. Пусть $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ – конечная инцидентностная структура с параллельностью, где

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_{16}\},$$

$$L = \{L_1, L_2, \dots, L_{24}\},$$

отношение инцидентности I задано матрицей инцидентности (рис. 1).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	•		•						•		•						•		•					
2		•		•						•		•					•		•					
3	•		•							•		•						•		•				
4		•		•					•		•							•		•				
5					•		•						•		•		•			•				
6						•		•						•		•	•			•				
7					•		•							•		•		•	•					
8						•		•					•		•			•	•					
9	•			•										•	•						•		•	
10		•	•										•			•					•		•	
11	•			•									•			•						•		•
12		•	•											•	•							•		•
13					•			•	•			•									•			•
14						•	•			•	•										•			•
15					•			•		•	•											•	•	
16						•	•		•			•										•	•	

Рис. 1. Матрица инцидентности AI -структуры S

Отношение параллельности \parallel определяется разбиением множества L на классы:

$$\{L_1, L_2, L_5, L_6\}; \{L_3, L_4, L_7, L_8\}; \{L_9, L_{10}, L_{13}, L_{14}\}; \\ \{L_{11}, L_{12}, L_{15}, L_{16}\}; \{L_{17}, L_{18}, L_{21}, L_{22}\}; \{L_{19}, L_{20}, L_{23}, L_{24}\}.$$

Структура, приведенная в примере 1, является моделью аффинной евклидовой плоскости ($АН$ -плоскости) наименьшего порядка.

В работе для конкретных (заданных аксиоматически) AI -структур исследуются:

- а) вопрос существования таких структур порядка n ;
- б) вопрос о числе неизоморфных структур порядка n .

Для этих целей разработан алгоритм, предполагающий распараллеливание вычислений. В основу алгоритма положен метод перебора с возвратом (backtracking). В качестве языка программирования выбран язык Java, имеющий возможности многопоточного выполнения операций.

Литература

1. Емельченков Е.П. Аффинные ельмслевовы псевдоплоскости и АНР-тернары. - 10 с. - Деп. в ВИНТИ 26.12.1978. № 3905.
2. Емельченков Е.П., Хубежты И.А. Об инцидентностных структурах. 266 с. Владикавказ: Северо-Осетинский гос. ун-т, 1998. 266 с.: ил. – Библиогр.: 240 назв. Деп. в ВИНТИ 16.1098, № 3015-В98
3. Емельченков Е.П., Хубежты И.А. Проективные плоскости и их обобщения: монография. Сев.Осетинский гос. ун-т. Владикавказ (Дзауджикау): Изд-во СОГУ, 2003. 345 с.
4. Barlotti A. Finite Sperner spaces constructed from projective and affine spaces / A. Barlotti, J. Cofman // Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1974. 40. P. 231–241.
5. Groze V. Asupta coordinatisarii si ocufundarii de incidenta // Stud. Univ. Babes-Bolyai. Ser. mat.-mech. 1971. 16, № 1. P. 37–47.
6. Sandler R. Pseudo planes and pseudo ternaries // J. Algebra. 1966. № 4:2. P. 300–316.

ОЦЕНКА СУММЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ИЗ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ СРЕДНИХ РИССА

А.М. ЗУЕВ

Смоленский государственный университет
e-mail: zueandrej@yandex.ru

УДК 517.984.52

Ключевые слова: *корневые функции, средние Рисса, ранги собственных функций.*

В статье оценивается сумма специального вида, которая возникает при составлении средних Рисса спектрального разложения некоторой функции.

Рассмотрим на конечном интервале $G \subset R$ несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)u' + p_n(x)u. \quad (1)$$

Пусть $\{u_k\}$ – полная и минимальная в $L_2(G)$ система собственных и присоединенных (короче – корневых) функций оператора (1), $\{v_k\} \subset L_2(G)$ – биортогонально сопряженная к ней система (известно, что такая система существует и единственна).

Через μ_k обозначим определяемый специальным образом один из корней степени n комплексного собственного числа λ_k .

Считая, что числа μ_k не имеют конечных точек сгущения, занумеруем их в порядке неубывания $|\mu_k|$. Все соответствующие корневые функции u_k (отвечающие собственному значению λ_k) разобьем на цепочки, каждая из которых порождается собственной функцией и содержит отвечающие ей присоединенные, пронумерованные по возрастанию своего порядка. Если функции u_i и u_l принадлежат одной такой цепочке, будем писать: $u_i \propto u_l$. Общее число функций, входящих в данную цепочку, называют рангом собственной функции, порождающей цепочку. Будем считать, что ранги собственных функций в системе ограничены константой $M \geq 2$.

Пусть K – произвольный связный компакт из G .

Оценим сумму следующего вида, которая возникает, например, при составлении средних Рисса порядка s спектрального разложения некоторой функции в биортогональный ряд по системе $\{u_k\}$.

$$\sum_k \|v_k\|_{L_2(G)} \sum_{\substack{0 \leq j < s+1 \\ u_{m-j} \propto u_k}} \frac{|u_{k-j}(y)|}{|\mu_k|^{(n-1)j}} \mu^{\frac{1}{2}} \left| D_{R_0} \int_R^{+\infty} r^{j-s-\frac{1}{2}} J_{s+\frac{1}{2}}(\mu r) \cos(\mu_k r - j\frac{\pi}{2}) dr \right|. \quad (2)$$

(Здесь $y \in K$, $\mu > 1$ таково, что $|\mu - |\mu_k|| < \varepsilon$, D_{R_0} – усреднение функции,

зависящей от R , т.е. $D_{R_0} f(R) = \frac{2}{R_0} \int_{R_0/2}^{R_0} f dR$.)

Заметим, что необходимым условием базисности средних Рисса является существование постоянной $C(K)$ такой, что

$$\|u_k\|_{L_2(K)} \cdot \|v_k\|_{L_2(G)} \leq C(K) |\mu_k|^\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (3)$$

Будем использовать неравенства (3) и известное неравенство

$$\sum_{\substack{j \geq 0 \\ u_{k-j} \propto u_k}} \frac{|u_{k-j}(y)|}{|\mu_k|^{(n-1)j}} \leq C_1 \cdot \|u_k\|_{L_2(K')},$$

где K' – произвольный в G компакт, строго содержащий K .

Пусть сначала $s > M - 1$, тогда всегда будет выполнено: $j < s$. Как показано в [1], в этом случае модуль усреднения в (2) есть $\underline{O}(1) \cdot \mu^{\frac{1}{2}}$. Тогда выражение (2) есть

$$\underline{O}(1) \sum_{|\mu - |\mu_k|| < \varepsilon} \|v_k\|_{L_2(G)} \cdot \|u_k\|_{L_2(K')} = \underline{O}(1) \cdot \sum_{\mu - \varepsilon < |\mu_k| < \mu + \varepsilon} |\mu_k|^\alpha = \underline{O}(1) \cdot \mu^\alpha.$$

Пусть $\alpha < s < M - 1$. Как показано в [1], модуль усреднения в (2) есть $\underline{O}(1) \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\mu - |\mu_k|}$ при $\mu - \varepsilon < |\mu_k| < \mu$ и $\underline{O}(1)$ при $|\mu_k| \geq \mu$. Тогда выражение (2) есть

$$\begin{aligned} & \underline{O}(1) \cdot \sum_{\mu - \varepsilon < |\mu_k| < \mu} \|v_k\|_{L_2(G)} \cdot \|u_k\|_{L_2(K')} \cdot \frac{1}{\mu - |\mu_k|} + \underline{O}(1) \cdot \sum_{\mu \leq |\mu_k| < \mu + \varepsilon} \|v_k\|_{L_2(G)} \cdot \|u_k\|_{L_2(K')} = \\ & = \underline{O}(1) \left(\sum_{\mu - \varepsilon < |\mu_k| < \mu} \frac{|\mu_k|^\alpha}{\mu - |\mu_k|} + \sum_{\mu \leq |\mu_k| < \mu + \varepsilon} |\mu_k|^\alpha \right) = \underline{O}(1) \mu^\alpha \left(\sum_{\mu - \varepsilon < |\mu_k| < \mu} \frac{1}{\mu - |\mu_k|} + 1 \right). \end{aligned}$$

Итак, мы получили оценки для суммы (2) при $|\mu - |\mu_k|| < \varepsilon$.

Литература

1. Зувев А.М. Оценка несобственного интеграла I рода специального вида от бесселевых функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып.17. С. 142–144.

О НЕКОТОРЫХ ТОЖДЕСТВАХ НА СФЕРЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.В. КАРАЧИК

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: karachik@susu.ru

УДК 517.575

Ключевые слова: *полигармоническое уравнение, нормальные производные, тождества на сфере.*

В работе получены тождества на единичной сфере для нормальных производных полигармонических функций в единичном шаре.

Хорошо известно (см., например, [1]), что для гармонической в единичном шаре $S \subset \mathbf{R}^n$ функции $u \in C^m(\bar{S})$ верно равенство $\int_{\partial S} \frac{\partial^m u}{\partial \nu^m} = 0$, $m \in \mathbf{N}$. В настоящей работе выясняется, какие еще равенства такого вида

могут иметь место для нормальных производных от k -гармонических в S функций $u(x)$, т.е. таких функций, что $\Delta^k u = 0$ в S . В работе [2] исследовано свойство среднего для полигармонических функций и получены некоторые результаты, на основании которых выполнено настоящее исследование.

Пусть полиномы $P_n(t)$ находятся из следующего рекуррентного равенства $P_n(t) + (2n - 3)P_{n-1}(t) = t^2 P_{n-2}(t)$, $n \geq 2$, где следует считать, что $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = 1$.

Теорема. Для всякой m -гармонической в S функции $u \in C^k(\bar{S})$ при $k \geq m$ верны равенства

$$\int_{\partial S} P_{m-i} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \frac{\partial^{2i} u}{\partial \nu^{2i}} ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} ds_x = 0,$$

где $0 \leq i \leq m-1$ и $2m \leq j \leq k$ при $2m \leq k$.

Замечание. В работе [3] при исследовании арифметического треугольника, возникающего из условий разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения был получен арифметический треугольник, похожий на арифметический треугольник, который составляют коэффициенты полиномов $P_n(t)$.

Пример. Если k -гармоническая в S функция $u \in C^k(\bar{S})$ удовлетворяет на ∂S равенствам $\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} |_{\partial S} = \varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, k$, т.е. $u(x)$ – решение однородной задачи Неймана для полигармонического уравнения, то для функций $\varphi_j(x)$ необходимо выполнение условия [4; 5]

$$\int_{\partial S} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k} \binom{2k-j-1}{j-1} (2k-2j-1)!! \varphi_j(x) ds_x = 0.$$

Литература

1. Карачик В.В. О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // Математические труды. 2013. Т. 16, № 2. С. 69–88.
2. Karachik V.V. On the mean-value property for polyharmonic functions // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2013. Т. 6, № 3. С. 59–66.
3. Карачик В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 228–238.
4. Карачик В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. XVI, № 4 (56). С. 61–74.
5. Карачик В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 11. С. 1455–1461.

ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

А.В. КАРЕВ

Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: alexander.karev.30@gmail.com

УДК 517.589, 517.984.55

Ключевые слова: *W-функция Ламберта, спектральная задача с нелокальным условием.*

В работе изложены основные свойства W-функции Ламберта. Приведены примеры ее использования для решения трансцендентных уравнений. Показана связь W-функции Ламберта со спектральной задачей для дифференциального уравнения.

Несколько десятилетий назад была введена в активный оборот специальная W-функция Ламберта, встречающаяся еще в работах Ламберта и Эйлера. Формальное определение дается через функциональное уравнение:

$$W(z)e^{W(z)} = z, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Решением данного уравнения при различных $z \in \mathbf{C}$ является многозначная функция $W(z)$, которая называется *W-функцией Ламберта* или просто *функцией Ламберта* (см. [1; 2]). Введенная таким образом трансцендентная функция является многозначной и имеет счетное множество различных ветвей $W_k(z)$, $k \in \mathbf{Z}$. Основная ветвь $W_0(z)$ определена на всей комплексной плоскости с разрезом по действительной оси $(-\infty, -1/e)$. Остальные ветви $W_k(z)$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, определены на всей комплексной плоскости с разрезом по действительной оси $(-\infty, 0)$.

Ветви $W_0(z)$ и $W_{-1}(z)$ являются единственными, принимающими действительные значения при действительном аргументе. Кроме того, если требовать, чтобы $W(x) > -1$ при действительном аргументе $z = x$, то функция Ламберта однозначно определяется основной ветвью $W_0(z)$ и ее поведение на бесконечности эквивалентно поведению логарифмической функции.

Аналитические свойства основной ветви $W_0(z)$, связанные с производной, интегралом и разложением в ряд Тейлора, выглядят так:

$$\frac{d}{dz} W_0(z) = \frac{W_0(z)}{z(1+W_0(z))}, \quad W_0'(z) \rightarrow 1 \text{ при } z \rightarrow 0,$$
$$\int W_0(z) dz = z \left[W_0(z) - 1 + \frac{1}{W_0(z)} \right],$$

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} z^n}{n!}, \quad |z| < \frac{1}{e}.$$

Функция Ламберта не только обладает интересными математическими свойствами, но и активно используется в приложениях. Так, например, в [2] указано на связи с задачами по раскраске графов, с проблемой синтеза обобщенного гауссова шума, с задачами из теории кодирования, а также с различными задачами для дифференциальных уравнений. Подробнее остановимся на последнем.

Исторически функция Ламберта возникла при решении трансцендентного уравнения

$$ze^z = a, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Это трансцендентное уравнение является характеристическим для простейшего дифференциального уравнения с запаздыванием

$$y'(t) = ay(t-1).$$

Информация о расположении на комплексной плоскости корней указанного трансцендентного уравнения играет важную роль при изучении устойчивости дифференциальных уравнений с запаздыванием (см. [3]).

Приведем еще один известный (см. [4]) пример дифференциального уравнения, приводящего к функции Ламберта. Решение следующей задачи Коши

$$y' = ay^2(b-y), \quad y(0) = y_0,$$

возникающей при моделировании роста популяции, явно выражается через функцию Ламберта

$$y(x) = \frac{b}{1 + W\left(u e^{u-2abx}\right)}$$

со значением $u = (b/y_0) - 1$.

Также через функцию Ламберта выражаются решения многих других дифференциальных и трансцендентных уравнений, к которым приводят следующие физические задачи: расчет стационарного режима электрической цепи с полупроводниковыми диодами, распространение стационарной волны горения, задача о токе в электролите, зарядка конденсатора в режиме постоянной мощности. Подробнее смотри в [2].

Кроме того, несомненным достоинством функции Ламберта является ее реализация в самых популярных на сегодняшний день системах компьютерной математики: MAPLE, MATLAB и др. Например, в MATLAB команда `lambertw(k,x)` вычисляет значение k -ой ветви функции Ламберта в выбранной точке x .

Укажем новое интересное применение функции Ламберта к одной неклассической задаче математической физики. В процессе исследования [3] возникла спектральная задача

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + 1, & t \in [0,1], \\ y(0) = 0, & \int_0^1 y(t) dt = 0. \end{cases}$$

Необходимо определить такие значения $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых задача имеет решение $y \in C^1[0,1]$. Оказывается, при выполнении условия

$$\frac{e^\lambda - 1 - \lambda}{\lambda^2} = 0$$

или ему эквивалентного

$$-(\lambda + 1)e^{-(\lambda+1)} = -\frac{1}{e}, \quad \lambda \neq 0,$$

отмеченная спектральная задача будет разрешимой с решением

$$y(t) = \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda}.$$

Иные возможности отсутствуют. Поэтому собственные значения спектральной задачи выражаются формулой

$$\lambda_k = -1 - W_{-k-1}\left(-\frac{1}{e}\right), \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

С помощью известных математических пакетов, используя встроенную в них функцию Ламберта, можем вычислять значения λ_k с высокой точностью. Найденные значения λ_k применяются затем при исследовании одной обратной задачи для эволюционного уравнения в банаховом пространстве.

Литература

1. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function // *Advances Computational Maths*. 1996. Vol. 5. P. 329–359.
2. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006. 160 с.
3. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. 548 с.
4. Briggs K.M. W-ology or some exactly solvable growth models // unpublished notes. 1999. URL: <http://keithbriggs.info/W-ology.html>.
5. Карев А.В., Тихонов И.В. Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с нелокальным условием среднего по времени // *Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа, 2015*. С. 52–53.
6. Карев А.В., Тихонов И.В. О нахождении источника в эволюционном уравнении при помощи нелокального условия среднего по времени // *Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа, 2017*. С. 110–111.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА НЕРЕГУЛЯРНОМ ШАБЛОНЕ И ГЛОБАЛЬНОГО МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В.И. КИРЕЕВ¹, Т.К. БИРЮКОВА², М.М. ГЕРШКОВИЧ³

¹ НИТУ МИСиС, г. Москва

^{2,3} Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

e-mail: ¹Vladimir-Kireyev@mail.ru; ²yukonta@mail.ru; ³makmg@mail.ru

УДК 519.6

Ключевые слова: устойчивый алгоритм, численное интегрирование, квадратурная формула, численное дифференцирование, сплайн, сплайн-метод, интегродифференциальный, сеточная функция.

В докладе проведено исследование устойчивости предложенных авторами обобщенных квадратурных формул, построенных на нерегулярном шаблоне, и глобального метода численного дифференцирования.

В развитие исследований по построению квадратурных формул и формул численного дифференцирования на нерегулярной сетке (шаблоне), основанных на интегродифференциальных сплайнах (рассмотренных в докладах авторов на конференциях СКМП-2014 [1], СКМП-2016 [2]), в данной работе проведено доказательство устойчивости обобщенных квадратурных формул и глобального метода численного дифференцирования.

В вычислительной практике при решении широкого класса задач математического моделирования геометрических форм, задач математической физики и при обработке информационных массивов в общем случае многомерных данных используются квадратурные и кубатурные формулы численного интегрирования и формулы численного дифференцирования. Сложность современных моделируемых объектов предъявляет повышенные требования к точности аппроксимации или преобразования дискретных данных к глобальным математическим представлениям. К настоящему времени классические аппроксимационные одномерные и двумерные модели базируются в основном на операторах численного дифференцирования и интегрирования, построенных на регулярных сетках:

$$\Omega_{xy} = \{x_i = i \cdot h_x, y_j = j \cdot h_y \ (h_x = x_{i+1} - x_i = const; h_y = y_{j+1} - y_j = const; \\ i = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, m-1)\}. \quad (1)$$

Однако при построении алгоритмов аппроксимации кривых и поверхностей с выраженными особенностями или при использовании

аппроксимационных операторов в областях с неоднородной структурой исследуемых объектов классический подход не обеспечивает требуемую достаточно высокую точность аппроксимации. В связи с этим в работах [3–6] предложен и математически обоснован интегродифференциальный метод приближения функций алгебраическими многочленами, позволяющий проводить аппроксимацию исходных функций на неоднородной (переменной) сетке. На основе этого метода авторами построены обобщенные формулы численного интегрирования и дифференцирования данных, определенных на нерегулярных шаблонах.

В данной работе доказана устойчивость обобщенной на нерегулярный шаблон квадратурной формулы парабол, а также глобального метода численного дифференцирования. Проведено исследование устойчивости различных формул и алгоритмов численного дифференцирования.

Устойчивость одномерных квадратурных формул, построенных в общем случае на нерегулярном шаблоне.

В численных методах имеют широкое распространение одно- и многоинтервальные квадратурные формулы. При этом одноинтервальные формулы (формулы прямоугольников и трапеций) могут использоваться для численного интегрирования функций, заданных на неравномерной сетке (нерегулярном шаблоне). Однако они имеют локальный третий и глобальный второй порядок аппроксимации. Классическая формула парабол, наиболее широко применяемая в вычислительной практике, на регулярном шаблоне имеет глобальный четвертый порядок, однако равномерная сетка обуславливает ограничения в использовании.

Разработанный авторами интегродифференциальный метод позволил обобщить квадратурную формулу парабол на нерегулярный шаблон. Эта формула применительно к двойному частичному отрезку $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ с трехточечным шаблоном (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) ($h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, h_i = x_i - x_{i-1}$) имеет вид:

$$I_{i-1}^{i+1} = \frac{h_i(\delta_{i+1} + 1)}{6} \left[(2 - \delta_{i+1})f_{i-1} + \frac{(\delta_{i+1} + 1)^2}{\delta_{i+1}} f_i + (2 - \frac{1}{\delta_{i+1}})f_{i+1} \right]. \quad (2)$$

Здесь $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$ – параметр нерегулярности сетки.

Как и для классической квадратурной формулы

$$I_{i-1}^{i+1} = \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \quad (h = const), \quad (3)$$

сумма коэффициентов при значениях функций f_{i-1}, f_i, f_{i+1} равна $h_i + h_{i+1} = H_i^{i+1}$. Коэффициенты при значениях функций в точках трехточечного шаблона (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) в формуле (2) не являются постоянными значениями, как в формуле (3), а представляют собой функции шагов $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, h_i = x_i - x_{i-1}$, характеризующих шаблон. Данное свойство функциональной зависимости коэффициентов квадратурных формул от шагов выбранного шаблона присуще всем квадратурным формулам, записанным для неравномерной сетки. При переходе от нерегулярного шаблона к регулярному коэффициенты при значениях функций приводятся к виду $c_i h$, где c_i – числовые значения. Для устойчивости алгоритма интегрирования по формуле (2) требуется выполнение свойства положительности коэффициентов при f_{i-1}, f_i, f_{i+1} , то есть должны выполняться неравенства: $2 - \delta_{i+1} > 0$, $2 - \frac{1}{\delta_{i+1}} > 0$, следовательно, $\frac{1}{2} < \delta_{i+1} < 2$. Отсюда получается условие для соотношения шагов, при котором обеспечивается устойчивость алгоритма:

$$\frac{h_i}{2} < h_{i+1} < 2h_i. \quad (4)$$

Левое неравенство $h_{i+1} > \frac{h_i}{2}$ устанавливает условие, которое должно выполняться для сгущающейся вправо сетки, при этом шаг h_{i+1} уменьшается по сравнению с предыдущим h_i , но должен быть больше половины предыдущего шага. Правое неравенство $h_{i+1} < 2h_i$ регламентирует разбиение разрежающейся вправо сетки. В этом случае шаг h_{i+1} увеличивается по сравнению с предыдущим h_i , но должен быть меньше удвоенного предыдущего шага. Интеграл (2) на шаблоне (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} I_{i-1}^{i+1}(h_i, h_{i+1}, f) &= \frac{h_i}{6}(\delta_{i+1} + 1)(2 - \delta_{i+1})f_{i-1} + \frac{h_i}{6\delta_{i+1}}(\delta_{i+1} + 1)^3 f_i + \frac{h_i}{6}(\delta_{i+1} + 1)\left(2 - \frac{1}{\delta_{i+1}}\right)f_{i+1} = \\ &= \sum_{k=1}^3 c_k(h_i, h_{i+1})f_k, \end{aligned}$$

где $c_1 = \frac{h_i}{6}(\delta_{i+1} + 1)(2 - \delta_{i+1})$, $c_2 = \frac{h_i}{6\delta_{i+1}}(\delta_{i+1} + 1)^3$, $c_3 = \frac{h_i}{6}(\delta_{i+1} + 1)\left(2 - \frac{1}{\delta_{i+1}}\right)$, при этом $\sum_{k=1}^3 c_k(h_i, h_{i+1}) = h_i + h_{i+1} = h_i(1 + \delta_{i+1})$. При выполнении условий (4) $c_k \geq 0$ ($k = 1, 2, 3$).

Пусть возмущения $\delta f = \{(\delta f)_i, i=1, \dots, n\}$ для функции $f(x)$ по абсолютной величине не превосходят δ_0 , то есть $|(\delta f)_i| \leq \delta_0$. Тогда

$$|\delta I(h_i, h_{i+1}, f)| = |\bar{I}(h_i, h_{i+1}, (\delta f))| = \left| \sum_{k=1}^3 c_k (\delta f)_k \right| \leq \sum_{k=1}^3 c_k \delta_0 = (h_i + h_{i+1}) \delta_0.$$

На всем отрезке $[a, b]$ (рассматриваем четное число отрезков разбиения $[x_i, x_{i+1}]$, то есть нечетное n , поскольку интеграл вида (2) берется на двойном частичном отрезке):

$$I_a^b(a, b, f) = \sum_{i=1}^{2n-1} (c_{2i-1}(h_{2i}, h_{2i+1}) \cdot f_{2i-1} + c_{2i}(h_{2i}, h_{2i+1}) \cdot f_{2i} + c_{2i+1}(h_{2i}, h_{2i+1}) \cdot f_{2i+1}),$$

при этом $c_k \geq 0$ ($k=1, \dots, n$), $\sum_{k=1}^n c_k = b - a$.

Если $|(\delta f)_i| \leq \delta_0$, возмущение результата интегрирования можно оценить следующим образом:

$$|\delta I(a, b, f)| = |\bar{I}(a, b, \delta f)| = \left| \sum_{i=1}^{2n-1} (c_{2i-1}(\delta f)_{2i-1} + c_{2i}(\delta f)_{2i} + c_{2i+1}(\delta f)_{2i+1}) \right| \leq (b - a) \delta_0.$$

Таким образом, малое возмущение интегрируемой функции вызывает малое возмущение результата численного интегрирования, что свидетельствует об устойчивости процесса интегрирования по формуле (2).

Уменьшение влияния возмущений функции при вычислении производных путем применения интегральных формул численного дифференцирования.

Для исследования свойств устойчивости формул численного дифференцирования возьмем простейшую одностороннюю конечно-разностную аппроксимацию производной в некоторой точке x_k :

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}. \quad (5)$$

При этом будем считать, что некоторая сеточная функция $f(x_k)$ задана на равномерной сетке (1). Разложение функции по формуле Тейлора в точке x_k при условии, что $f(x) \in C^2$, дает первый порядок аппроксимации по шагу сетки h , то есть

$$\bar{f}'(x_k) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} + O(h).$$

Предположим, что исходная функция $f(x_k) = f_k$ задана не точно, а с некоторой погрешностью δ_k . Таким образом, пусть $f_k = \varphi_k + \delta_k$, где $\varphi_k = \varphi(x_k)$ – невозмущенная часть исходной функции, а $\delta_k = \delta(x_k)$ – ее погрешность, т.е. «возмущенная» часть.

Формулу (5) запишем в виде:

$$\bar{f}'_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{h}. \quad (6)$$

Раскладывая f_{k+1} по формуле Тейлора относительно точки x_k при условии $f(x) \in C^2$, из (6) получим:

$$\bar{f}'_k = \frac{1}{h}(f_k + h f'_k + \frac{h^2}{2} f''_k - f_k + O(h^3)) = f'_k + \frac{h}{2} f''_k + O(h^2).$$

(здесь $f'_k = f'(x_k)$, $f''_k = f''(x_k)$).

Подставляя f_k в виде суммы $f_k = \varphi_k + \delta_k$ в аппроксимацию по формуле (6) и вводя обозначения $\bar{\varphi}'_k = \frac{1}{h}(\varphi_{k+1} - \varphi_k)$, $\bar{\delta}'_k = \frac{1}{h}(\delta_{k+1} - \delta_k)$, $\varphi''_k = \varphi''(x_k)$, получим:

$$\begin{aligned} \bar{f}'_k &= \frac{1}{h}(h \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{h} + h \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{h} + \frac{h^2}{2} \varphi''_k + O(h^3)) = \\ &= \bar{\varphi}'_k + \bar{\delta}'_k + \frac{h}{2} \varphi''_k + O(h^2) \end{aligned} \quad (7)$$

(здесь исследуется влияние случайного возмущения на производную первого порядка, поэтому δ''_k не учитывается).

Из формулы (7) следует, что основной вклад в величину производной \bar{f}'_k вносит сумма двух производных $\bar{\varphi}'_k$ и $\bar{\delta}'_k$. При этом производная φ''_k умножается на шаг сетки h , и в силу малости h второе слагаемое мало. Таким образом,

$$\bar{f}'_k \approx \bar{\varphi}'_k + \bar{\delta}'_k. \quad (8)$$

Для изучения влияния возмущения, следуя [7], примем для него модель случайного возмущения, имеющего колебательный характер, т.е. $\delta_k = \delta_0(-1)^k$. В этом случае для $\bar{\delta}'_k$ получим:

$$\bar{\delta}'_k = \frac{1}{h}((-1)^{k+1} \delta_0 - (-1)^k \delta_0) = \frac{2\delta_0(-1)^{k+1}}{h}. \quad (9)$$

Таким образом, из (9) следует, что с уменьшением шага сетки h влияние возмущения растет, и при очень малом шаге сетки второе слагаемое в формуле (8) будет иметь определяющее значение. Это свидетельствует о неустойчивости формулы численного дифференцирования (6).

Аналогичный эффект проявляется для всех конечно-разностных схем численного дифференцирования, которые основаны на аппроксимации производных по значениям функции в узлах сетки.

Исследуем теперь устойчивость конечно-разностной формулы, построенной на основе интегральной разности (см. [3–5]):

$$f'_k = \frac{I_k^{k+1} - I_{k-1}^k}{h^2}. \quad (10)$$

Используя классические квадратурные формулы, перейдем от разностей интегралов к разностям значений функций. При этом предположим, что интегралы по значениям заданной сеточной функции вычисляются по простейшей формуле трапеций, т.е. $I_k^{k+1} = \frac{h}{2}(f_{k+1} + f_k)$,

$$I_{k-1}^k = \frac{h}{2}(f_k + f_{k-1}).$$

Подставляя эти значения I_k^{k+1} и I_{k-1}^k в формулу (10) для производной, получим:

$$f'_k = \frac{h}{2h^2}(f_{k+1} + f_k - f_k - f_{k-1}) = \frac{1}{2h}(f_{k+1} - f_{k-1}). \quad (11)$$

Известно, что формула (11) соответствует центрально-разностной аппроксимации производной и имеет второй порядок аппроксимации относительно h . Из (11) следует, что при применении интегральной аппроксимационной формулы при постоянном шаге разностной сетки неустойчивость расчетов по формуле сохраняется. Однако можно отметить, что за счет того, что операция вычисления определенных интегралов является устойчивой, вычисление производной непосредственно по интегральной формуле в ряде случаев является более предпочтительным по сравнению с использованием конечно-разностных формул функционального типа. Действительно, например, вычисление интегралов по формуле трапеций устраняет случайное возмущение $(-1)^k \delta_0$, так как $\bar{\delta}_{k+1} + \bar{\delta}_k = (-1)^{k+1} \delta_0 + (-1)^k \delta_0 = 0$.

Вычисление интеграла по формуле парабол хотя и не устраняет возмущение, но уменьшает его: $\bar{\delta}_k = \frac{2}{3} \delta_0$.

Таким образом, можно сделать вывод, что интегральные формулы численного дифференцирования выполняют регуляризующую функцию.

Кроме того, при вычислении производных функций, имеющих какие-либо особенности (изломы, разрывы, резкие изменения и др.), применение интегральных формул позволяет добиться повышения точности вычисления производных [5].

Глобальный устойчивый алгоритм численного дифференцирования на основе интегродифференциальных сплайнов.

Из условий согласования и стыковки интегродифференциальных сплайнов [4] получается следующая трехдиагональная (в сочетании с граничными условиями) система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решаемая методом прогонки:

$$h_i \bar{f}'_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) \bar{f}'_i + h_{i+1} \bar{f}'_{i+1} = 6 \left(\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{I_{i-1}^i}{h_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (12)$$

Система (12) определяет устойчивый алгоритм глобального (т.е. на всей области определения функции) вычисления производных первого порядка (со вторым порядком аппроксимации) по значениям интегралов.

В качестве граничных условий можно применить соотношения:

$$\bar{f}'_0 = \frac{h_1 + h_2}{h_2} \bar{f}'_1 - \frac{h_1}{h_2} \bar{f}'_2, \quad \bar{f}'_n = \frac{h_{n-1} + h_n}{h_{n-1}} \bar{f}'_{n-1} - \frac{h_n}{h_{n-1}} \bar{f}'_{n-2}. \quad (13)$$

При этом значения $\bar{f}'_1, \bar{f}'_2, \bar{f}'_{n-1}, \bar{f}'_{n-2}$ в формулах (13) следует вычислять по лево- и правосторонним (но не крайним) аппроксимационным формулам для производных:

$$\begin{aligned} \bar{f}'_i &= \frac{2}{A} \left[\frac{h_i^2 - h_{i+1}^2}{h_{i+2}} I_{i+1}^{i+2} + \frac{3h_{i+1} H_{i+1}^{i+2} + (h_{i+2}^2 - h_i^2)}{h_{i+1}} I_i^{i+1} - \frac{H_{i+1}^{i+2} (H_{i+1}^{i+2} + h_{i+1})}{h_i} I_{i-1}^i \right], \\ \bar{f}'_{i+1} &= \frac{2}{A} \left[\frac{H_i^{i+1} (H_i^{i+1} + h_{i+1})}{h_{i+2}} I_{i+1}^{i+2} - \frac{3h_{i+1} H_i^{i+1} + (h_i^2 - h_{i+2}^2)}{h_{i+1}} I_i^{i+1} + \frac{h_{i+1}^2 - h_{i+2}^2}{h_i} I_{i-1}^i \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где $A = h_{i+1}^2 (2h_i + h_{i+1} + 2h_{i+2}) + h_{i+1} (h_{i+2}^2 + h_i^2) + h_i h_{i+2} (h_i + 3h_{i+1} + h_{i+2})$.

В случае равномерной сетки узлов можно использовать формулы:

$$\begin{aligned} \bar{f}'_0 &= \frac{1}{h^2} (-2I_0^1 + 3I_1^2 - I_2^3), \\ \bar{f}'_n &= \frac{1}{h^2} (I_{n-3}^{n-2} - 3I_{n-2}^{n-1} + 2I_{n-1}^n). \end{aligned} \quad (15)$$

Формулы (13)–(15) имеют второй порядок аппроксимации производных и приведены в [6].

В [8] указаны условия, выражающие диагональное преобладание коэффициентов СЛАУ, при выполнении которых вычисления по методу прогонки устойчивы. Для СЛАУ (12) – (14) (или (12),(15) – при постоянном шаге) эти условия выполнены, поскольку в (12) $h_i \neq 0$, $h_{i+1} \neq 0$, $h_i + h_{i+1} < 2(h_i + h_{i+1})$, а \bar{f}'_0, \bar{f}'_n вычисляются до применения рекуррентных формул прогонки.

Таким образом, приведенный глобальный алгоритм вычисления производных по известным или вычисленным заранее значениям определенных интегралов является устойчивым.

Литература

1. Киреев В.И., Бирюкова Т.К., Гершкович М.М. Квадратурные и кубатурные формулы на нерегулярном шаблоне // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2014): материалы XV международной научной конференции (Смоленск, 16–18 мая 2014). Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. Вып.15. С. 157–163.

2. Бирюкова Т.К., Киреев В.И., Гершкович М.М. Методы численного дифференцирования и восстановления сеточных функций по интегралам, основанные на интегродифференциальных сплайнах // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2016): материалы XVII международной научной конференции (Смоленск, 20–22 мая 2016). Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып.17. С. 106–113.

3. Киреев В.И. Интегральный метод приближения функций алгебраическими многочленами и биквадратными сплайнами // Вестник МАИ. 1994 Т. 1, № 1. С. 48–57.

4. Киреев В.И., Бирюкова Т.К. Полиномиальные интегродифференциальные одномерные и двумерные сплайны // Вычислительные технологии. Новосибирск: Изд-во ИВТ СО РАН, 1998. Т.3. № 36. С. 19-34.

5. Бирюкова Т.К. Интегродифференциальный консервативный метод приближения одномерных и двумерных функций алгебраическими многочленами и сплайнами: дис. канд. физ.-мат. наук. М., 1997.

6. Киреев В.И., Бирюкова Т.К. Интегродифференциальный метод обработки информации и его применение в численном анализе. М.: ИПИ РАН, 2014. 267 с.

7. Пасконов В.М., Полежаев В.М., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.

8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

ОБ ОДНОЙ МАЖОРАНТНОЙ ТЕОРЕМЕ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Д. КИРЬЯЦКИЙ, Е. КИРЬЯЦКИЙ, Э. КИРЬЯЦКИЙ
Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса
e-mail: Eduard.kiryatzkii@mail.ru

УДК 517.54

Ключевые слова: *аналитическая функция, коэффициенты, класс функций.*

В данной работе изучаются свойства аналитических в круге функций, коэффициенты которых мажорируются коэффициентами некоторой фиксированной аналитической в единичном круге функции.

Обозначим через $C_n(E_\rho)$ класс аналитических в круге E_ρ (т.е. в круге $|z| < \rho$) функций $F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1}$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\{F^{(n)}(z)\} > 0$ в круге E_ρ [1]. Зафиксируем аналитическую в единичном круге E (т.е. в круге $|z| < 1$) функцию $H(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_{k,n} z^{n+k-1}$, где $b_{k,n} \geq 0$ для любого $k \geq 2$. Обозначим через $V_n(H)$ множество всех аналитических в единичном круге E функций $F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1}$, с условием $|a_{k,n}| \leq |b_{k,n}|$,

$k = 2, 3, 4, \dots$. Очевидно, что функция $H(z)$ определяет множество $V_n(H)$ и сама принадлежит этому множеству. Так как $F^{(n)}(0) = n!$, то можно показать, что каждая функция из множества $V_n(H)$ принадлежит классу C_n , в некотором своем круге E_ρ . Мы находим такой наибольший круг, внутри которого любая функция из множества $V_n(H)$ принадлежит классу C_n . Обозначим радиус такого круга через $r[V_n(H)]$.

Теорема. Если уравнение $\frac{1}{n!}H^{(n)}(x) = 2$ имеет в интервале $0 < x < 1$ корень x_0 , то $r[V_n(H)] = x_0$. Если это уравнение не имеет корней в интервале $0 < x < 1$, то $r[V_n(H)] = 1$.

Литература

1. Кирьяцкий Э.Г. Многолистные функции и разделенные разности. Вильнюс: Техника. 1995.

О КОРНЯХ МНОГОЧЛЕНА В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

Е. КИРЬЯЦКИЙ, Э. КИРЬЯЦКИЙ

Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса
e-mail: Jevgenijus.kirjackis@vgtu.lt; Eduard.kiriyatzkii@mail.ru

УДК 517.54

Ключевые слова: симметрический многочлен, корни, угловая область.

В данной работе рассматривается поведение корней многочлена, коэффициенты которого являются однородными симметрическими многочленами.

Теорема. Введем однородный симметрический многочлен вида

$$\sigma_k(t_0, t_1, \dots, t_n) = \sum t_0^{j_0} t_1^{j_1} \dots t_n^{j_n},$$

где сумма распространена на все неотрицательные j_0, j_1, \dots, j_n , для которых $j_0 + j_1 + \dots + j_n = k$. Для любого набора неотрицательных чисел t_0, t_1, \dots, t_n многочлен $P_k(z) = \sum_{m=0}^k \sigma_m(t_0, t_1, \dots, t_n) z^m$ не имеет корней в угловой области $-\frac{2\pi}{k+1} < \arg z < \frac{2\pi}{k+1}$, т.е. в области, ограниченной двумя лучами, выходящими из начала координат.

Литература

1. Кирьяцкий Э.Г. Многолистные функции и разделенные разности. Вильнюс: Техника. 1995.

О СРЕДНЕМ ГАРМОНИЧЕСКОМ k -МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э. КИРЬЯЦКИЙ, Е. КИРЬЯЦКИЙ

Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса
e-mail: Eduard.kiriyatzkii@mail.ru; Jevgenijus.kirjackis@vgtu.lt

УДК 517.54

Ключевые слова: евклидовое пространство, среднее гармоническое, точки, расстояние.

Данный доклад посвящен изучению некоторых экстремальных свойств гармонического среднего в евклидовом пространстве.

Пусть $k \geq 2$ и M_1, \dots, M_n – произвольно фиксированные точки k -мерного открытого шара W_k радиуса R с центром в начале координат O , расположенного в k -мерном евклидовом пространстве с обычным расстоянием между точками и T_k – поверхность этого шара. Пусть \bar{G}_k – замкнутый k -мерный шар с центром в точке O , лежащий внутри шара W_k . Введем среднее гармоническое по формуле

$$\Omega_{-1}(M; M_1, \dots, M_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho^{-1}(M; M_i) \right)^{-1},$$

где $\rho(M; M_i)$ – обычное расстояние между точками $M(x_1, \dots, x_n)$ и $M_i(x_1^i, \dots, x_n^i)$. Заметим, что G_2, W_2 – открытые круги в плоскости.

Теорема 1. Пусть $k = 2$. Тогда

$$\max_{M_1, \dots, M_n \in \bar{G}_2} \min_{M \in T_2} \Omega_{-1}(M; M_1, \dots, M_n) = R, \quad \forall \bar{G}_2 \subset W_2. \quad (1)$$

Теорема 2. Пусть $k = 3$. Тогда

$$\max_{M_1, \dots, M_n \in \bar{G}_3} \min_{M \in T_3} \Omega_{-1}(M; M_1, \dots, M_n) = \min_{M_1, \dots, M_n \in \bar{G}_3} \max_{M \in T_3} \Omega_{-1}(M; M_1, \dots, M_n) = R, \quad \forall \bar{G}_3 \subset W_3. \quad (2)$$

Теорема 3. Пусть $k > 3$. Тогда

$$\min_{M_1, \dots, M_n \in \bar{G}_k} \max_{M \in T_k} \Omega_{-1}(M; M_1, \dots, M_n) = R, \quad \forall \bar{G}_k \subset W_k. \quad (3)$$

Знаки равенства в (1), (2), (3) реализуются тогда и только тогда, когда все точки M_1, \dots, M_n совпадают с центром O .

Замечание. Равенства

$$\min_{M_1, \dots, M_n \in \bar{G}_2} \max_{M \in T_2} \Omega_{-1}(M; M_1, \dots, M_n) = R,$$
$$\max_{M_1, \dots, M_n \in \bar{G}_k} \min_{M \in T_k} \Omega_{-1}(M; M_1, \dots, M_n) = R, \text{ где } k > 3,$$

справедливы не всегда.

Литература

1. Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литер. 1956. С. 141.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Э. КИРЬЯЦКИЙ, Е. КИРЬЯЦКИЙ, В. МАТЮХИН

Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса
e-mail: Eduard.kiriyatzkii@mail.ru; Jevgenijus.kirjackis@vgtu.lt;
valentin.matiuchin@mail.ru

УДК.517.54

Ключевые слова: *прямоугольный треугольник, тригонометрические уравнения.*

В данной заметке указан простой способ вычисления различных соотношений между двумя метрическими параметрами и острым углом в прямоугольном треугольнике.

Для прямоугольного треугольника ABC введем следующие обозначения: сторона CA (горизонтальный катет), AB (гипотенуза), BC (вертикальный катет), $\angle C$ – прямой угол, $\angle B$, $\angle A$ – острые углы, h_{AB} – высота, опущенная на гипотенузу, m_A , m_B , m_C – медианы, выходящие соответственно из вершин A , B , C ; l_A , l_B , l_C – биссектрисы, выходящие соответственно из вершин A , B , C ; P_{ABC} – периметр, p_{ABC} – полупериметр, r_{ABC} – радиус вписанной окружности, R_{ABC} – радиус описанной окружности. Пусть $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \pi/2$; $h_{AB} = h$; $m_A = m_1$, $m_B = m_2$, $m_C = m_3$; $l_A = l_3$, $l_B = l_2$, $l_C = l_1$; $P_{ABC} = 2p$; $r_{ABC} = r$; $R_{ABC} = R$; $S_{ABC} = S$. Под классическими параметрами треугольника мы будем понимать катеты, высоты, медианы, биссектрисы, периметр, полупериметр, радиус вписанной окружности, радиус описанной окружности, острые углы, площадь. Целью нашей работы является составление тригонометрических уравнений, связывающих между собой два параметра и острый угол. Кроме того, в данной работе мы выражаем отношение двух параметров через основные тригонометрические

функции. Таким образом, кроме классических отношений (основных функций)

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

имеющих определенные обозначения и названия, мы вводим другие отношения между двумя параметрами. Для решения такого рода задач пользуемся следующим методом. В треугольнике ABC фиксируются 13 пар:

$(a;\alpha)$, $(b;\alpha)$, $(c;\alpha)$, $(h;\alpha)$, $(m_1;\alpha)$, $(m_2;\alpha)$, $(m_3;\alpha)$, $(l_1;\alpha)$, $(l_2;\alpha)$, $(l_3;\alpha)$, $(p;\alpha)$, $(r;\alpha)$, $(R;\alpha)$. (Аналогично можно фиксировать пары $(a;\beta)$, $(b;\beta)$ и так далее).

Вычисляем 13 площадей треугольника ABC:

$S(a;\alpha)$, $S(b;\alpha)$, $S(c;\alpha)$, $S(h;\alpha)$, $S(m_1;\alpha)$, $S(m_2;\alpha)$, $S(m_3;\alpha)$, $S(l_1;\alpha)$, $S(l_2;\alpha)$, $S(l_3;\alpha)$, $S(p;\alpha)$, $S(r;\alpha)$, $S(R;\alpha)$. Например, $S(l_1;\alpha) = \frac{1}{4}(\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha)$.

Но все эти 13 площадей треугольника ABC равны между собой. Благодаря этому утверждению, можно составлять различные тригонометрические уравнения относительно α . Например, $S(l_1;\alpha) = S(l_2;\alpha)$. Максимальное количество таких тригонометрических уравнений будет 78. Из них 19 уравнений являются алгебраическими уравнениями выше второй степени относительно какой-нибудь основной функции. Нами решены все такие тригонометрические уравнения, за исключением двух: $(l_1;\alpha) = (l_3;\alpha)$ и $S(l_2;\alpha) = (l_3;\alpha)$.

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА В СИСТЕМЕ Mathematica

Р.Е. КРИСТАЛИНСКИЙ, А.М. ТИМОТИН

ООО «Конкорд», г. Смоленск

e-mail: antej82@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: краевая задача, интегральное уравнение Фредгольма второго рода, приближенный метод решений, формула Симпсона, краевая задача, система Mathematica.

Статья посвящена рассмотрению некоторых приближенных методов решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с помощью системы компьютерной математики Mathematica 11.

В статье будем придерживаться терминологии и пользоваться обозначениями, принятыми в монографиях [1] и [2].

Как известно многие краевые задачи удается свести к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода [см. 3, с. 176–177].

1. В некоторых случаях система Mathematica позволяет находить аналитические решения уравнений Фредгольма второго рода.

Пример 1

Найти решение интегрального уравнения

$$y(x) = x^2 + 2x + \int_0^2 \frac{xy(x)}{\sqrt{t-1}} dt.$$

Код программа решения в системе Mathematica 11 будет выглядеть следующим образом:

```
sol = ComplexExpand[DSolveValue[eng, y[x], x]]
```

$$\left(-\frac{33762}{13559} - \frac{8640I}{13559}\right)x + x^2.$$

2. Если система не позволяет получить точного решения рассматриваемого уравнения, то рассматриваются приближённые методы, основанные на использовании одной из квадратурных формул. В качестве такой формулы рассмотрим приближённую формулу Симпсона [см. 4 с. 97–98].

Рассмотрим интегральное уравнение:

$$y(x) = \int_a^b R(x,t)y(t)dt + f(x). \quad (1)$$

Для решения этого уравнения поступим следующим образом.

Отрезок $[a, b]$ делим на $2n$ равных частей. Положим $h = \frac{b-a}{2n}$.

Строим массив:

$$A = \text{Table}[a_i, \{i, 0, 2n\}].$$

Полагаем $a_0 = 1$, $a_{2n} = 1$, все остальные элементы с чётными индексами полагаем равными 4, а с нечётными полагаем равными 2.

Затем все элементы массива A умножаем на $\frac{h}{3}$.

Положим $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, 2n$ $x_j = a + jh$ $j = 0, 1, \dots, 2n$.

Заменив в соотношении (1) интеграл соответствующей квадратурной формулой, мы получим:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{2n} A_j R(x, t_j) y(t_j) + f(x)$$

Полагая в этом равенстве $x = x_i$ $i = 0, 1, \dots, 2n$, получаем систему из $2n+1$ уравнений с $2n+1$ неизвестными.

$$y(x_i) = \sum_{j=0}^{2n} A_j R(x_i, t_j) y(t_j) + f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, 2n.$$

Решив эту систему, мы можем затем в качестве приближенного значения для решения рассматриваемого интегрального уравнения взять соответствующую сплайн-функцию.

Пример 2

Найти приближённое решение интегрального уравнения:

$$y(x) = \int_0^{10} x^3(x+t)y(t)dt + \sqrt{x}.$$

Код программа решения в системе Mathematica 11 будет выглядеть следующим образом:

Вводим исходные данные.

$$a = 0; b = 10;$$

$$h = (b - a) / 200;$$

Строим массив A.

$$A = \text{Table}[a_i, \{i, 0, 2n\}];$$

$$A[[1]] = 1; A[[201]] = 1;$$

$$\text{Do}[A[[2k]] = 2, \{k, 1, 100\}];$$

$$\text{Do}[A[[2k + 1]] = 4, \{k, 1, 99\}];$$

$$A = \frac{Ah}{3};$$

Вводим ядро и свободный член уравнения.

$$R[x_, t_] = x^3(x+t); f[x_] = \sqrt{x};$$

Сводим решение интегрального уравнения к решению системы линейных уравнений.

$$X = \text{Table}[(i-1)h, \{i, 1, 201\}];$$

$$T = \text{Table}[Y[X[[i]]] == \sum_{j=1}^{201} A[[j]]R[X[[i]], X[[j]]Y[[j]] + f[X[[i]]], \{i, 1, 201\}];$$

Вводим вспомогательные неизвестные.

$$Z = \text{Table}[z_i, \{i, 1, 201\}];$$

Обозначим $Y[X[[i]]]$ через z_i . Записываем соответствующую систему линейных уравнений.

$$T1 = \text{Table}[z_i == \sum_{j=1}^{201} A[[j]]R[X[[i]], X[[j]]z_j + f[X[[i]]], \{i, 1, 201\}];$$

Находим решение полученной системы.

$$U = \text{Flatten}[NSolve[T1, Z]];$$

$$V = \text{Table}[0, \{i, 1, 201\}];$$

$$\text{Do}[V[[i]] = z_i / U[[i]], \{i, 1, 201\}];$$

Строим соответствующую сплайн-функцию.

$$TT = \text{Table}[X[[i]], V[[i]], \{i, 1, 201\}];$$

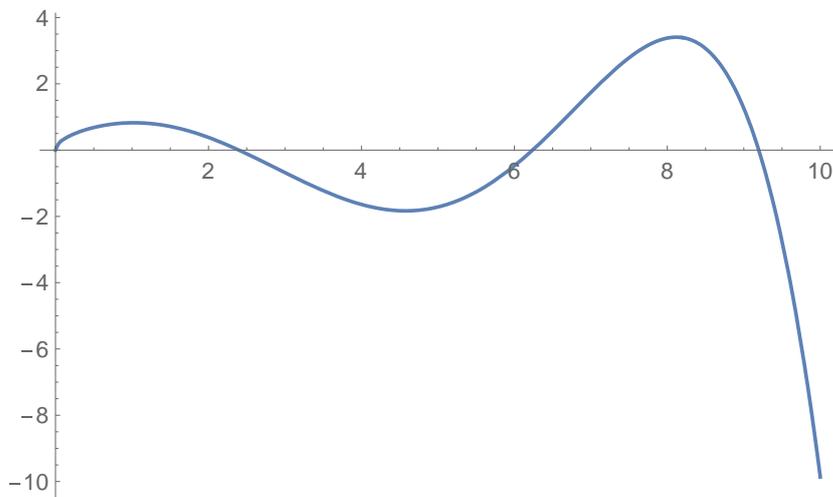
$$v = \text{Interpolation}[TT];$$

$$v[5.96]$$

-0.548859

Строим график найденной функции.

`Plot[v[x], {x,0,10}];`



3. Рассмотрим теперь решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода в том случае, когда ядро этого уравнения содержит особенности. Здесь целесообразно привести уравнение к следующему виду:

$$y(x)\left(1 - \int_a^b K(x,t) dt\right) = \int_a^b K(x,t)(y(t) - y(x)) dt + f(x).$$

Пример 3

Найти приближенное решение интегрального уравнения следующего вида:

$$y(x) = \int_0^{10} \frac{x \sin(t-x)}{t-x} y(t) dt + \sqrt{x} \cos x.$$

Преобразуем рассматриваемое уравнение к следующему виду:

$$y(x) \left(1 - \int_0^{10} \frac{x \sin(t-x)}{t-x} dt\right) = \int_0^{10} \frac{x \sin(t-x)}{t-x} (y(t) - y(x)) dt + \sqrt{x} \cos x.$$

Запишем программу для системы Mathematica 11 приближенного решения полученного уравнения.

Вводим исходные данные.

`a = 0; b = 10;`

`h = (b - a) / 200;`

Строим массив A.

`A = Table[ai, {i,0,2n}];`

`A[[1]] = 1; A[[201]] = 1;`

`Do[A[[2k]] = 2, {k,1,100}];`

`Do[A[[2k+1]] = 4, {k,1,99}];`

$$A = \frac{Ah}{3};$$

Вводим ядро и свободный член уравнения.

$$R[x_, t_] = \frac{x \sin[t-x]}{t-x}; \quad f[x_] = \sqrt{x} \cos[x];$$

$$U1 = \text{Table}[N\text{Integrate}[R[X[[i]], [t, 0, 10], \{i, 1, 201\}]]];$$

$$Z = \text{Table}[z_i, \{i, 1, 201\}];$$

$$B = \text{Table}[If[i == j, 0, A[[j]]R[X[[i]]], X[[j]](z_j - z_i)], \{i, 1, 201\} \{i, 1, 201\}];$$

$$T1 = \text{Table}[z_i(1 - U1[[i]]) == \sum_{j=1}^{201} B[[j, i]] + f[X[[i]]], \{i, 1, 201\}];$$

Находим решение полученной системы.

$$U = \text{Flatten}[N\text{Solve}[T1]];$$

$$V = \text{Table}[0, \{i, 1, 201\}];$$

$$\text{Do}[V[[i]] = z_i / U[[i]], \{i, 1, 201\}];$$

Строим соответствующую сплайн-функцию.

$$TT = \text{Table}[X[[i]], V[[i]], \{i, 1, 201\}];$$

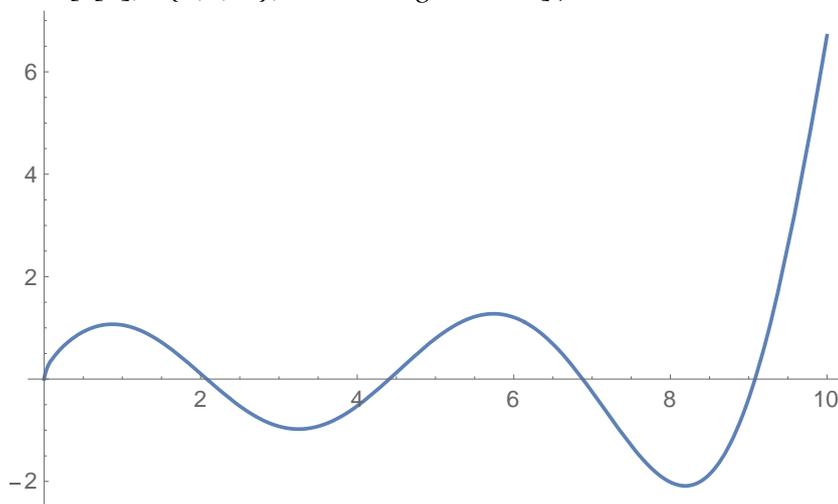
$$v = \text{Interpolation}[TT];$$

$$v[3.4]$$

$$-0.957515$$

Строим график найденной функции.

$$\text{Plot}[v[x], \{x, 0, 10\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}];$$



Итак, как мы видим, при решении разных краевых задач Римана, Гильберта и других типов, которые удаётся свести к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода система Mathematica позволяет эффективно решать поставленные задачи.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: СГПУ, 1998. 343 с.

2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006. 636 с.

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА

О.Н. КУПРИКОВА

Смоленский филиал МИИТ,
e-mail: onkuprikova@mail.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *квазигармоническая функция, краевая задача с производной, дифференциальное уравнение Эйлера, единичный круг.*

В статье разработан конструктивный алгоритм решения одной задачи с производной в краевых условиях в классах квазигармонических функций третьего рода в единичном круге.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – односвязная область на плоскости переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким контуром L . Напомним (см., например, [1]), *квазигармоническими функциями рода n в области T^+* называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, а n – некоторое фиксированное натуральное число.

Хорошо известно (см., например, [1–3]), что всякую квазигармоническую функцию рода n в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где $A_k = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W(z)$.

В дальнейшем будем говорить (см. также [1]), что квазигармоническая функция $W(z)$ рода n ($n \geq 1$) принадлежит классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, если в представлении (2) аналитическая компонента $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т.е. аналитическая функция $\varphi^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число). Рассматривается следующая краевая задача.

Задача A_n . Требуется найти все квазигармонические функции $W(z)$ рода n ($n \geq 1$), принадлежащие классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$\frac{\partial W(t)}{\partial \bar{t}} + G(t)\overline{W(t)} = g(t), \quad (3)$$

где $\frac{\partial W(t)}{\partial \bar{t}} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}}$, а $G(t)$ и $g(t)$ – заданные на L функции класса $H(L)$ (т.е. удовлетворяющие на L условию Гельдера), причем $G(t) \neq 0$.

Ранее в случаях $n=1$ и $n=2$ задача A_n в круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ была исследована в работах автора [4–5]. Основной целью настоящего сообщения является изложение конструктивного алгоритма решения задачи A_n в классах квазигармонических функций третьего рода в единичном круге, т.е. когда $n=3$, $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ и $L = \{t: |t| = 1\}$.

Основной результат, полученный в работе, можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема. Если $T^+ = \{z: |z| < 1\}$, $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ и $L = \{t: |t| = 1\}$, то решение задачи A_3 в классе квазигармонических функций третьего рода сводится к последовательному решению задачи Римана

$$\Phi^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t) + g_1(t), \quad t \in L, \quad (4)$$

относительно неизвестной кусочно аналитической функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$, линейного дифференциального уравнения Эйлера второго порядка относительно неизвестной аналитической функции $\varphi^+(z)$ из класса $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ и линейного дифференциального уравнения Эйлера третьего порядка относительно неизвестной аналитической функции $\varphi^-(z)$ из класса $A(T^-) \cap H^{(3)}(L)$, где $G_1(t) = -2t^7 G(t)$, $g_1(t) = -2t^2 g(t)$.

Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: СмолГУ, 2013. 189 с.

2. Расулов К.М. О краевой задаче типа Римана в классах квазигармонических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI междунар. научной конф. Смоленск, 2015. Вып. 16. С. 201–204.

3. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. 1965. Schriften 23.

4. Куприкова О.Н. Об одной краевой задаче в классах квазигармонических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI междунар. научной конф. Смоленск, 2015. Вып. 16. С. 183–186.

5. Куприкова О.Н. О решении дифференциальной краевой задачи в классах квазигармонических функций второго рода // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI междунар. научной конф. Смоленск, 2016. Вып. 17. С. 156–160.

О КАРТИНЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

С.Ю. КУРИЦЫН, К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет,
KuritsynSergey@me.com; kahrmanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *метааналитическая функция, обобщенная краевая задача типа Римана, интегральные члены, единичная окружность.*

В статье описана картина разрешимости одной из основных краевых задач типа Римана в классах метааналитических функций в случае, когда носителем краевых условий служит единичная окружность.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $L \in C^2_\mu$, а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Напомним (см., например, [1, с. 139] или [2]), *кусочно метааналитической функцией с линией скачков L* называют функцию $F(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, которая в двух дополняющих друг друга до расширенной комплексной плоскости областях T^+ и T^- определяется так:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)] \exp\{\lambda\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)] \exp\left\{\lambda \frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (1)$$

или

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_0 \bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_1 \bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) \exp\left\{\lambda_0 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\} + \varphi_1^-(z) \exp\left\{\lambda_1 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi_k^\pm(z) \in A(T^\pm)$, $k=0,1$, $m \in N, m \geq 2$ а $\lambda, \lambda_0, \lambda_1$ – некоторые постоянные ($\lambda_0 \neq \lambda_1$), причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

В дальнейшем функцию $F(z)$, задаваемую формулой (1), назовем *кусочно метааналитической функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулой (2), – *кусочно метааналитической функцией второго типа*.

Кроме того, кусочно метааналитическую функцию $F(z)$ вида (1) (или (2)) будем называть *исчезающей на бесконечности*, если $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq k+1$ (или $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1$), где $k=0,1$.

Наконец, будем говорить, что кусочно метааналитическая функция $F(z)$ с линией скачков L принадлежит классу $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_k^\pm(z)$ ($k=0,1$) непрерывно продолжаются на границу L вместе со своими производными $\frac{d\varphi_k^\pm(z)}{dz}$ ($k=0,1$), причем так, что граничные значения функций $\varphi_k^\pm(z)$ ($k=0,1$) и указанных производных удовлетворяют на L условию Гёльдера.

Рассматривается следующая краевая задача (см. также [2]). *Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) + G_1(t)F^-(t) + \int_L A_1(t, \tau)F^+(\tau)d\tau + \int_L B_1(t, \tau)F^-(\tau)d\tau = g_1(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} + G_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + \int_L A_2(t, \tau) \frac{\partial F^+(\tau)}{\partial n_+} d\tau + \int_L B_2(t, \tau) \frac{\partial F^-(\tau)}{\partial n_-} d\tau = ig_2(t), \quad (4)$$

где $G_k(t), g_k(t)$ ($k=1, 2$) – заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, причем $G_k(t) \neq 0$, а $A_k(t, \tau), B_k(t, \tau)$ ($k=1, 2$) – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(1)}(L \times L)$, $\frac{\partial}{\partial n_\pm}$ – производная по внутренней (внешней) нормали к контуру L .

Сформулированную выше краевую задачу будем называть *второй основной обобщенной краевой задачей типа Римана в классах метааналитических функций* или, короче, *задачей $GR_{2,M}$* , а соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) – *задачей $GR_{2,M}^0$* .

В работах авторов [2–3] были получены конструктивные алгоритмы решения задачи $GR_{2,M}$ в классах функций вида (1) и (2). Основной целью настоящего сообщения является описание картины разрешимости однородной задачи $GR_{2,M}^0$ в классе функций вида (1) в случае, когда носителем краевых условий (3) и (4) служит единичная окружность, т.е. когда $L = \{t : |t| = 1\}$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

2. Картина разрешимости однородной задачи $GR_{2,M}^0$ для метаналитических функций первого типа в случае, когда $L = \{t : |t| = 1\}$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

Будем искать решения задачи $GR_{2,M}^0$ в виде (1). Далее, вводя в рассмотрение вспомогательные аналитические функции вида

$$\Phi_1^+(z) = z\varphi_0^+(z) + \varphi_1^+(z), \quad z \in T^+$$

$$\Phi_1^-(z) = \varphi_0^-(z) + \frac{1}{z}\varphi_1^-(z), \quad z \in T^-,$$

$$\Phi_2^+(z) = \left(z^3 \frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + z^2 \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} \right) + \lambda z \cdot \varphi_0^+(z) + (z + \lambda) \cdot \varphi_1^+(z), \quad z \in T^+, \quad (5)$$

$$\Phi_2^-(z) = \left(z \frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} \right) - \frac{\lambda(1-m)}{z^{m+1}} \varphi_0^-(z) + \left(\frac{1}{z} + \frac{\lambda(1-m)}{z^{m+2}} \right) \varphi_1^-(z), \quad z \in T^-,$$

а также с учетом представлений (1) и того, что на окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ справедливы соотношения (см., например, [4, с. 37])

$$\bar{t} = \frac{1}{t}, \quad \frac{\partial F}{\partial n_{\pm}} = \mp \left(t \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial F}{\partial \bar{t}} \right), \quad (6)$$

краевые условия (3) и (4) (при выполнении условий $g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) можно переписать соответственно в следующей форме:

$$\Phi_k^+(t) + G_{kk}(t)\Phi_k^-(t) + \int_L A_{kk}(t, \tau)\Phi_k^+(\tau)d\tau + \int_L B_{kk}(t, \tau)\Phi_k^-(\tau)d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \quad (7)$$

где функции $G_{kk}(t)$ ($k = 1, 2$) и фредгольмовы ядра $A_{kk}(t, \tau)$, $B_{kk}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$) вполне определенным образом выражаются через коэффициенты $G_k(t)$, $A_k(t, \tau)$, $B_k(t, \tau)$ ($k = 1, 2$) краевых условий (3), (4).

Но равенства (7) представляют собой краевые условия двух хорошо изученных (см., например, [1, §2]) однородных обобщенных задач Римана относительно кусочно аналитических функций $\Phi_1(z) = \{\Phi_1^+(z), \Phi_1^-(z)\}$ и $\Phi_2(z) = \{\Phi_2^+(z), \Phi_2^-(z)\}$ соответственно.

В дальнейшем число $\chi = \chi_1 + \chi_2$, где $\chi_k = \text{Ind}G_{kk}(t)$ ($k=1, 2$), будем называть *суммарным индексом краевой задачи* $GR_{2,M}^0$, а числа χ_1 и χ_2 назовем *частными индексами* этой задачи.

Как известно (см., например, [1, с. 52]), если $\chi_k = \text{Ind}G_{kk}(t) \geq 0$ ($k=1, 2$), то общее решение соответствующей однородной задачи (7) (при каждом фиксированном значении параметра k) линейно зависит от $l_k = \chi_k + \nu_k - r_k$ произвольных комплексных постоянных, где ν_k – число линейно независимых (над полем \mathbb{C}) решений определенного однородного уравнения Фредгольма 2-го рода, а r_k – ранг определенной матрицы, причем $\nu_k \geq r_k$. Если же $\chi_k = \text{Ind}G_{kk}(t) < 0$ ($k=1, 2$), то общее решение соответствующей однородной задачи (7) (при каждом фиксированном значении параметра k) линейно зависит от $l_k = \max(0, \nu_k - |\chi_k|)$ произвольных комплексных постоянных.

Далее предположим, что однородные краевые задачи (7) (при каждом фиксированном значении параметра k) разрешимы и уже найдены их общие решения в виде (см. также, например, [1, с. 51]):

$$\Phi_k^\pm(z) = \sum_{j=1}^{l_k} \beta_{kj}^\pm d_{kj}^\pm(z), \quad z \in T^\pm, \quad (8)$$

где β_{kj}^\pm – произвольные комплексные постоянные, а $d_{kj}^\pm(z)$ – известные аналитические функции из класса $A(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$.

Покажем теперь, как по найденным функциям вида (8) можно определить аналитические компоненты $\varphi_k^\pm(z)$, $k=0, 1$, искомой кусочно метааналитической функции $F(z)$.

Нетрудно проверить, что в силу формул (5) будут справедливы следующие равенства:

$$\varphi_0^+(z) = \frac{1}{2z^2} \left((z + \lambda)\Phi_1^+(z) - \Phi_2^+(z) + z^2 \frac{d\Phi_1^+(z)}{dz} \right), \quad z \in T^+, \quad (9)$$

$$\varphi_1^+(z) = \Phi_1^+(z) - z\varphi_0^+(z), \quad z \in T^+, \quad (10)$$

$$\varphi_1^-(z) = \frac{z}{2}\Phi_2^-(z) - \frac{\lambda(1-m)}{2z^m}\Phi_1^-(z) - \frac{z^2}{2} \frac{d\Phi_1^-(z)}{dz}, \quad z \in T^-, \quad (11)$$

$$\varphi_0^-(z) = \Phi_1^-(z) - \frac{1}{z}\varphi_1^-(z), \quad z \in T^-. \quad (12)$$

Для того, чтобы функция $\varphi_0^+(z)$ была аналитической в круге, необходимо, чтобы функция $(\lambda + z)\Phi_1^+(z) - \Phi_2^+(z)$ имела нуль второго порядка в точке $z=0$, т.е. достаточно потребовать выполнение следующего условия

$$\int_L \frac{(\zeta + \lambda)\Phi_1^+(\zeta) - \Phi_2^+(\zeta)}{\zeta^p} d\zeta, \quad p = 1, 2. \quad (13)$$

Для того, чтобы функция $\varphi_1^-(z)$ имела нуль второго порядка, необходимо, чтобы функция $\Phi_2^-(z) - z \frac{d\Phi_1^-(z)}{dz}$ имела нуль третьего порядка в точке $z = \infty$, это можно обеспечить следующим условием:

$$\int_L (q\Phi_1^-(\zeta) + \Phi_2^-(\zeta))\zeta^{q-1} d\zeta, \quad q = 1, 2. \quad (14)$$

Установлен следующий основной результат.

Теорема 1. Если $L = \{t : |t| = 1\}$, то решение однородной задачи $GR_{2,M}^0$ в классе кусочно метааналитических функций первого типа сводится к решению двух обобщенных задач Римана вида (7) относительно неизвестных кусочно аналитических функций $\Phi_k(z) = \{\Phi_k^+(z), \Phi_k^-(z)\}$ ($k = 1, 2$). При этом общее решение задачи $GR_{2,M}^0$ будет линейно зависеть от $l = l_1 + l_2$ произвольных комплексных постоянных, где $l_k = \chi_k + \nu_k - r_k$, если $\chi_k = \text{Ind}G_{kk}(t) \geq 0$ ($k = 1, 2$), и $l_k = \max(0, \nu_k - |\chi_k|)$, если $\chi_k = \text{Ind}G_{kk}(t) < 0$ ($k = 1, 2$).

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
2. Курицын С.Ю., Расулов К.М. Обобщенная задача типа Римана для метааналитических функций в случае произвольных односвязных областей // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Смоленск, 2015. Вып. 16. С. 186–191.
3. Курицын С.Ю., Расулов К.М. Обобщенная краевая задача Римана для метааналитических функций второго типа // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Смоленск, 2016. Вып. 17. С. 161–163.
4. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.

О ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ С ε -КОНЕЧНЫМ БАЗИСОМ

В.И. МАТЮХИН

учитель-эксперт, Вильнюс (Литва)
e-mail: valentin.matiuchin@mail.ru

УДК 517.5

Ключевые слова: полупериодическая функция, равномерная ограниченность, компактность, метризуемое пространство, динамическая система.

Доказывается, что множество равномерно ограниченных функций равностепенно непрерывно, что образуемое ими пространство метризуемо и гомеоморфно некоторому множеству в гильбертовом кирпиче.

Настоящая статья примыкает к работе Альмухамедова М.И. [1]. Здесь также под полупериодической функцией понимается непрерывная на R функция $\varphi(x)$, которая по крайней мере одно свое значение принимает бесконечное число раз в каждом из интервалов $(-\infty, -\alpha)$, $(\alpha, +\infty)$ и только конечное число раз в интервале $(-\alpha, +\alpha)$, где α – любое действительное число.

Под ε -конечным базисом понимается базис полупериодической функции, если для любого $\varepsilon > 0$ элементы данного базиса представимы конечным числом связок g_1, g_2, \dots, g_s таких, что принадлежащие одной связке элементы имеют одно и то же основание и отличаются друг от друга не более чем на ε . Расстояние между звеньями p и g на (a, b) определяется формулой

$$\rho = (p, g) = \max_{a \leq x \leq b} |p(x) - g(x)|,$$

где $p(x)$ и $g(x)$ – характеристики звеньев p и g .

Назовем множеством C_δ совокупность всех равномерно ограниченных на (a, b) полупериодических функций, базисы которых содержатся в данном ε -конечном множестве δ .

Функции $C_m(x) \in C_\delta$ образуют по этому определению ε -конечное множество, представляющее собой компактное множество.

Теорема 1. *Множество функций C_δ равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Равностепенную непрерывность (определение см. в [2, с. 519]) функций C_n легко доказать, предполагая, что C_δ компактно. Поэтому докажем сначала последнее утверждение, а оно очевидно, так как следует из теоремы 1 в [1]. Переходим к доказательству равностепенной непрерывности. Предположим, что C_n не равностепенно непрерывны. Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ найдутся последовательности функций $\{C_n(x)\} \subset C_\delta$ и точек $\{a_n\}, \{b_n\} \subset (a, b)$ такие, что

$$b_n - a_n \rightarrow 0, |C_k(a_n) - C_k(b_n)| \geq \varepsilon_0. \quad (1)$$

Для $\{C_k(x)\}$ должны выполняться условия: 1) в $\{C_k(x)\}$ имеется бесконечно много различных элементов; 2) из $\{C_k(x)\}$ нельзя выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Действительно, предположим, что

мы все же выделили сходящуюся последовательность, которая сходится к $f(x)$. Без нарушения общности в качестве нее можно взять $\{C_k(x)\}$. Для указанного $\varepsilon_0 > 0$ существует δ такое, что при $|a'' - a'| < \delta$ будет $|f(a'') - f(a')| < \varepsilon_0$. В силу сходимости найдется такое n_0 , что для всех $n > n_0$ и $x \in (a, b)$ будет $|C_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$. Подберем такое $n > n_0$, чтобы было $|b_n - a_n| < \delta$. Для такого n имеем:

$$|C_k(a_n) - C_k(b_n)| \leq |C_k(a_n) - f(a_n)| + |f(a_n) - f(b_n)| + |f(b_n) - C_k(b_n)| < 3\varepsilon_0.$$

Это противоречит (1). Мы получили, что если отрицать равностепенную непрерывность функций из C_δ , то получается, что C_δ не является компактным. А так как ранее мы показали обратное, что функции из C_δ равностепенно непрерывны. Утверждение доказано.

Теорема 2. *Пространство C_δ полупериодических функций метризуемо.*

Доказательство. Топология в этом пространстве задается введением окрестностей (см. [3]). Воспользуемся второй основной теоремой П.С. Урысона (см. [4, т. 2, с. 942]). Она формулируется следующим образом.

Для того чтобы компактное пространство было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно имело счетную базу.

Ранее нами уже было отмечено, что множество C_δ компактно. Доказательство же существования счетной базы в C_δ без каких-либо существенных изменений повторяет теорему 4 в [4]. Следовательно, C_δ – компактное пространство со счетной базой, а потому метризуемо.

На основании теоремы 10 П.С. Урысона (см. [4, §26]) отсюда получаем следствие.

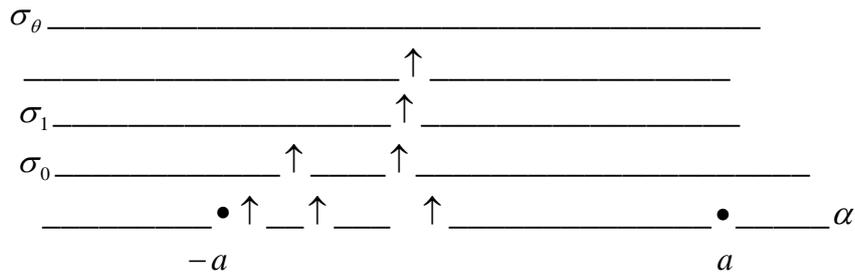
Следствие. *Пространство C_δ гомеоморфно некоторому множеству в гильбертовом киртиче.*

Систему функций C_δ , заданных на $(-\alpha, \alpha)$, можно толковать в двух интерполяциях.

А. Под C понимается отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in (-\alpha, \alpha)$ точку пространства, имеющую координаты $C_1(x), C_2(x), \dots, C_m(x), \dots$

Б. Под C понимается векторное поле, состоящее из векторов $C(x)$, отнесенных соответственно к точкам $x \in (-\alpha, \alpha)$ и имеющим компоненты $C_1(x), C_2(x), \dots, C_m(x), \dots$

Следовательно, исследование отображений можно понимать как исследование векторных полей.



За отображение C примем отображение, ставящее в соответствие каждому x точку $C(x)$ (конец вектора). Если некоторые функции C_k на $(-\alpha, \alpha)$ принимают различные значения, то концы векторов, соответствующих этим функциям, поместим на σ_0 , отстоящей от α на единицу длины. Если некоторые функции C_α принимают в каких-то точках $x_i, x_j \in (-\alpha, \alpha)$ равные значения, то концы векторов, соответствующее этим функциям, поместим на σ_1 , отстоящей от σ_0 на единицу. Продолжая это построение и дальше и учитывая, что по определению полупериодической функции на $(-\alpha, \alpha)$ имеется лишь конечное число точек, в которых значения функций совпадают, то, наконец, концы векторов, соответствующих функциям, принимающим максимальное число равных значений на $(-\alpha, \alpha)$, поместим на σ_θ , отстоящей от σ_0 на θ . Индекс θ , являющийся степенью отображения, назовем характеристикой векторного поля. Если теперь элементы векторного поля отобразить на элементы дискретной группы преобразований конечного порядка θ (группа преобразований называется дискретной, если в каждой конечной области находится лишь конечное множество точек, эквивалентных любой из точек по отношению к некоторой группе преобразований; меру этого множества мы примем за порядок дискретной группы преобразований), то полученное соответствие, очевидно, будет гомеоморфизмом (характеристика векторного поля равна порядку дискретной группы движений). Следовательно, изучая дискретные группы движений, получаемые результаты можно переносить на C_δ , и наоборот.

Пользуясь предложенным Л.С. Понтрягиным (см. [5]) методом построения динамической системы, можно провести аналогичное построение динамической системы для полупериодических функций. Под n -ой окрестностью функции C_m будем понимать множество, состоящее из всех $\varphi(m)$, для которых $\varphi(m) = C_m$, $m \leq n$. Полученное топологическое пространство Σ гомеоморфно канторову совершенному множеству (см. [5]) и поэтому метризуемо. Его метрика совпадает с метрикой канторова множества.

Зададим отображение ω пространства Σ на себя, при котором каждой функции $C_m(x)$ соответствует функция $\omega(C_m(x)) = C_m(x + \alpha)$, где $-a \leq x + \alpha \leq a$. Очевидно, что ω гомеоморфизм. Из Σ и отображения ω строим динамическую систему (рассуждения при этом повторяют аналогичные рассуждения в [5]). Пространство R динамической системы R_t получаем из топологического произведения $\Sigma \times [0; 1]$. Из компактности и наличия счетной базы у $\Sigma \times [0; 1]$ следует, что R – метризуемое компактное пространство (см. [4, т. 2]).

Для задания в R траектории достаточно указать одну из точек, через которую эта траектория проходит. Траекторию, проходящую через точку $C_m(x)$, назовем полупериодической.

Аналогично тому, как это сделано в [5], устанавливается, что в R (на $(-a; a)$) существует конечное множество (M) полупериодических траекторий. Множество (M) всюду плотно в R . Действительно, если $\varphi(m)$ – произвольная точка из R , то для любого n существует полупериодическая функция C_m такая, что $C_m = \varphi(m)$ для $m \leq n$, т.е. в n -ой окрестности $\varphi(m)$ проходит полупериодическая траектория. Это доказывает, что в Σ полупериодические траектории всюду плотны. А так как траектории возвращаются на Σ и R компактно, то полупериодические траектории будут плотны в R .

Легко доказать, что в R нет уходящих траекторий и что всякая траектория там полурекуррентная.

Литература

1. Альмухамедов М.И. Полупериодические функции с ε -конечным базисом // Известия вузов. Математика, № 5, 1959. С. 33–39.
2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
3. Александров П.С. Комбинаторная топология. М.: ГИТТЛ, 1947.
4. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики, Т. 1-2. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
5. Немыцкий В.В. Топологические вопросы теории динамических систем // Успехи математических наук. 1949. Т. 4, вып. 6(34). С. 91–154.

О ФЁДОРОВСКИХ ГРУППАХ ДВИЖЕНИЙ

В.И. МАТЮХИН

учитель-эксперт, Вильнюс (Литва)
e-mail: valentin.matiuchin@mail.ru

УДК 512.54

Ключевые слова: *фундаментальная область, фёдоровская группа движений, полупериодическая функция, метрическое пространство.*

Доказана метризуемость множества эквивалентных стрелок по отношению к фёдоровским группам движений.

Плоским движением называется отображение плоскости на себя, при котором конечное положение получается из начального непрерывным движением плоскости как твердого тела, причём траектории всех точек лежат в плоскости. Простейшим примером плоских движений является параллельный перенос, а также поворот. Из теоремы Брауэра (см. [2, с. 584]) следует, что при любом плоском движении, отличном от тождественного, можно указать не более одной точки, остающейся неподвижной.

Совокупность преобразований, для которых: 1) два преобразования, проведенные последовательно одно за другим, снова дают преобразование; 2) существует обратное преобразование, называется группой преобразований.

Говорят, что точки эквивалентны относительно данной группы преобразований, если одна точка получается из другой точки при помощи одного из преобразований данной группы преобразований.

Группы преобразований можно характеризовать при помощи фундаментальной области. Фундаментальной областью группы называется всякая связная область без эквивалентных точек и не допускающая расширения без того, чтобы последнее не нарушалось.

Если в конечной области находится лишь конечное множество точек, эквивалентных любой из точек по отношению к некоторой группе преобразований, то такая группа преобразований называется дискретной группой. Дискретные группы движений, приводящие к точечным системам, называются фёдоровскими (кристаллографическими) группами движений.

Рассмотрим фёдоровскую группу движений на плоскости, для которой $\varphi = 2\pi/3$ (см. [5, с. 82–86]). Эта группа имеет конечную фундаментальную область, эквивалентные точки для этой группы движений образуют фигуру, составленную из ромбов с одной общей стороной («пчелиные соты» или лебегово покрытие плоскости). Вершины представляют собой трехкратные центры поворотов, поэтому система эквивалентных стрелок, исходящих из центров поворотов, состоит из совокупности троек векторов, имеющих своими началами точки поворота с углами между векторами в 120 градусов.

Совокупность трёхкратных центров поворотов является счетным множеством.

Под полупериодической функцией будем понимать непрерывную на \mathbb{R} функцию $\varphi(x)$, которая по крайней мере одно свое значение принимает бесконечное число раз в каждом из интервалов $(-\infty, -\alpha)$,

$(\alpha, +\infty)$ и только конечное число раз в интервале $(-\alpha, \alpha)$, где α – любое положительное действительное число (см. [1]).

Под ε -конечным базисом понимается базис полупериодической функции, если для любого $\varepsilon > 0$ элементы данного базиса представимы конечным числом связок g_1, g_2, \dots, g_s таких, что принадлежащие одной связке элементы имеют одно и то же основание и отличаются друг от друга не более, чем на ε . Расстояние между звеньями p и g на (a, b) определяется формулой $\rho = (p, g) = \max_{a \leq x \leq b} |p(x) - g(x)|$, где $p(x)$ и $g(x)$ – характеристики звеньев p и g . Назовем множеством C_δ совокупность всех равномерно ограниченных на (a, b) полупериодических функций, базисы которых содержатся в данном ε -конечном множестве δ .

Если отобразить совокупность полупериодических функций с ε -конечным базисом C_δ на систему эквивалентных стрелок по отношению к фёдоровской группе преобразований с $\varphi = 2\pi/3$, то это отображение будет гомеоморфизмом: центру поворота A_1 ставим в соответствие функцию $C_1, A_2 \rightarrow C_2$ и т.д.

В работе [3, том 1, с. 124] было доказано, что метризуемость пространства сводится к его гомеоморфности метрическому пространству. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Множество эквивалентных стрелок по отношению к фёдоровской группе движений с $\varphi = 2\pi/3$ метризуемо.*

Обозначим множество наших векторов через H_β . Это множество нульмерно, так как оно замкнуто, $\bar{H}_\beta \subset H_\beta$, и вполне разрывно, поскольку не содержит никакого континуума, а поэтому для него имеет место теорема П.С. Урысона (см. [3, т.1, с. 278]).

Непосредственной проверкой можно убедиться в выполнении для H_β ряда теорем, доказанных П.С. Урысоном и П.С. Александровым в статье «О нульмерных множествах» (см. [3, т.2, с. 973]).

Существуют следующие фёдоровские группы движений.

1. Два переноса в непараллельных направлениях (поворот отсутствует).

2. Четыре группы, состоящие из двух переносов в непараллельных направлениях и поворота на углы $\varphi = \pi$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = 2\pi/3$, $\varphi = \pi/3$.

Группу с $\varphi = 2\pi/3$ мы рассмотрели. Очевидно, все те же рассуждения можно провести и для остальных групп, поэтому имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Множество эквивалентных стрелок по отношению к фёдоровским группам движений (H) метризуемо.*

Из теоремы П.С. Урысона о том, что пространство со счетной базой тогда и только тогда метризуемо, когда оно нормально, следует, что C_δ – нормальное пространство.

Учитывая, что размерность есть топологический инвариант (см. [2, с. 63]), заключаем, что S_6 – нульмерное пространство (как гомеоморфное H).

Так как гильбертов кирпич при всяком $\varepsilon > 0$ может быть ε -сдвигом отображен на полиэдр (см. [2, с. 204]), то S_6 при всяком $\varepsilon > 0$ может быть ε -отображено в полиэдр (о переходе от отображения в полиэдр к отображению на полиэдр см. [2, с. 205]).

Литература

1. Альмухамедов М.И. Полупериодические функции с ε -конечным базисом // Известия вузов. Математика. 1959. №5. С. 33–39.
2. Александров П.С. Комбинаторная топология. М.: ГИТТЛ, 1947.
3. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики. М. –Л.: ГИТТЛ, 1951. Т. 1-2.
4. Немыцкий В.В. Топологические вопросы теории динамических систем // Успехи математических наук. 1949. Т. 4, вып. 6(34). С. 91–154.
5. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ ВИРУСОМ ГРИППА А(Н1N1)pdm09 НА ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Т.Р. НАГОРНАЯ

Смоленский государственный университет
e-mail: tani7n@gmail.com

УДК 519.25

Ключевые слова: *спектральный анализ, грипп, прикладная статистика, пандемия, периодичность, программа Statistica, временные ряды.*

В статье рассматривается спектральный анализ временного ряда, демонстрирующий периодичность заболеваемости данным вирусом гриппа, реализованный в программном пакете Statistica. Демонстрируется актуальность воздействия пандемических штаммов вируса А(Н1N1) на территории РФ.

Вирусом гриппа называется острое вирусное инфекционное заболевание дыхательных путей, распространяющееся в виде эпидемий и пандемий [1]. В то время как эпидемии гриппа происходят ежегодно, пандемии встречаются гораздо реже, однако, наносят более тяжелый урон с медицинской и социальной точки зрения.

К первой пандемии XXI века относят распространение вируса гриппа А(Н1N1) в 2009 году – нового антигенного вируса свиней, имеющего способность не только инфицировать людей, но и передаваться от человека к человеку [2]. Впоследствии данный пандемический штамм вытеснил эпидемический вирус гриппа А(Н1N1).

В данной работе обосновывается наличие периодичности заболевания вирусом гриппа штамма А(Н1N1) pdm09 с помощью спектрального анализа в пакете программ Statistica.

На основании данных таблицы заболеваемости вирусом гриппа А(Н1N1) на территории РФ за период с 1 января 2007 по 13 февраля 2017 года, предоставленных Всемирной организацией здравоохранения, проведем одномерный спектральный анализ (Фурье). Для этого построим график зарегистрированных случаев заболевания вирусом гриппа А(Н1N1) pdm09.

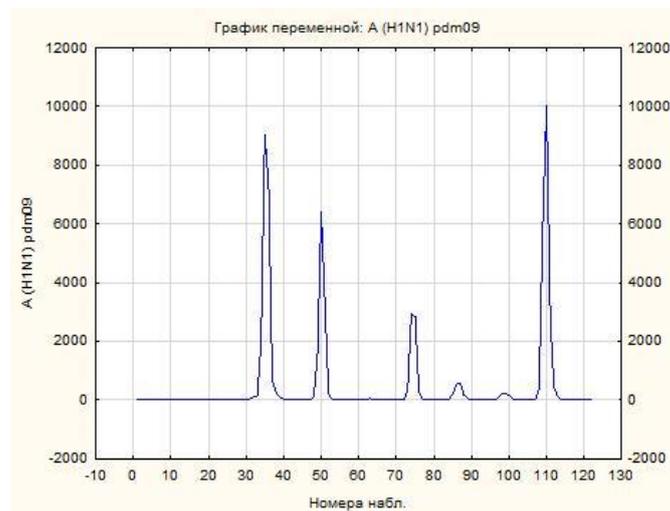


Рис. 1. График заболеваемости вирусом гриппа штамма А(Н1N1) pdm09

Количество заболеваемости данным вирусом подчинено циклической модели (рис. 1). Поскольку тренд не прослеживается, при преобразовании исходного временного ряда нет необходимости использовать опцию «Удалить линейный тренд». Вследствие того, что среднее ряда больше 0, отметим пункт «Вычесть среднее выбранной переменной» [3].

В программе Statistica выберем в представленном меню «Одномерный анализ Фурье» для переменной А(Н1N1) pdm09. В результате программа выдает значение пяти пиков, находящихся на соответственных частотах: (1)357E5: 0,0820 (2)271E5: 0,0656 (3)183E5: 0,1311 (4)182E5: 0,1475 (5)167E5: 0,0492.

В разделе результатов Одномерного спектрального анализа можно построить график периодограммы, который зависит от частоты появления интересующего нас события (рис.2).

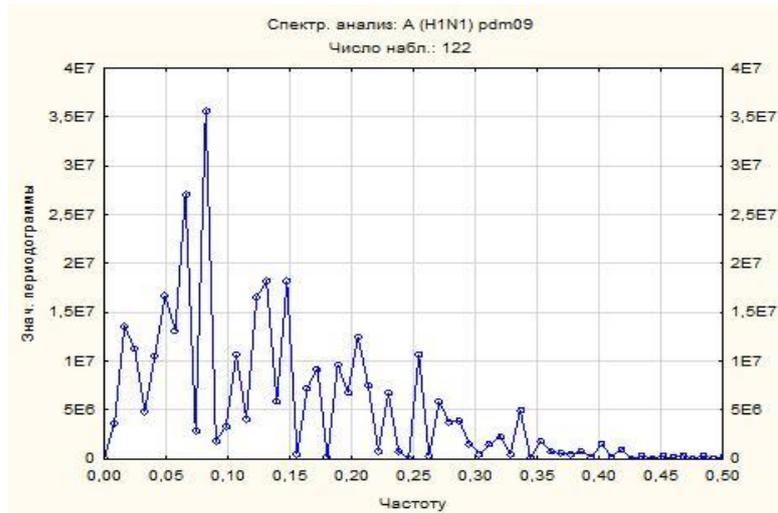


Рис. 2. Периодограмма для переменной A(H1N1) pdm09

На данном графике можно выделить несколько пиков, максимальный из которых принадлежит частоте 0,0820.

Также программа Statistica позволяет вызвать таблицу итогов Спектрального анализа, которая представляет возможность выявить все значения периодограммы и другие результаты. По данной таблице можно заключить, что частота 0,0820 соответствует значению периода, равному 11. Так как данные заболеваемости вирусом гриппа A(H1N1) pdm09 представлены в виде регистрации случаев по месяцам, то приходим к заключению о существовании ярко выраженного 11-месячного (вероятно немного длиннее, чем 11-месячного) цикла активности данного штамма.

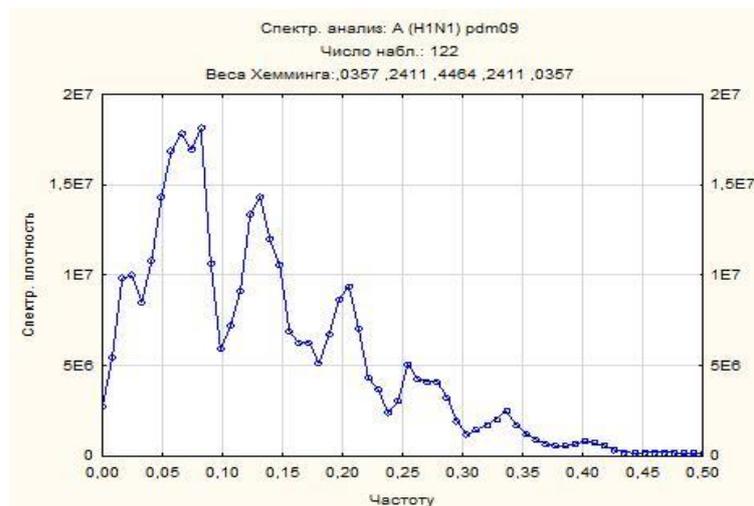


Рис. 3. Спектральная плотность переменной A(H1N1) pdm09 по частоте

После изучения периодограмм, построенных для переменной A(H1N1) pdm09, обратимся к следующей составляющей одномерного анализа Фурье – спектральной плотности. Для вычисления ее оценки необходимо убрать случайные колебания, сгладив функцию

периодограммы. Тип взвешенного скользящего среднего и ширина окна подбираются в разделе «Спектральные окна». Для нашей задачи оставим выбранное по умолчанию окно Хемминга ширины 5 и построим график спектральной плотности (по частоте) (рис. 3).

После реализации данной процедуры можно заметить четкое выделение 5 пиков. Посмотрим на значения спектральной плотности по периоду (рис. 4).

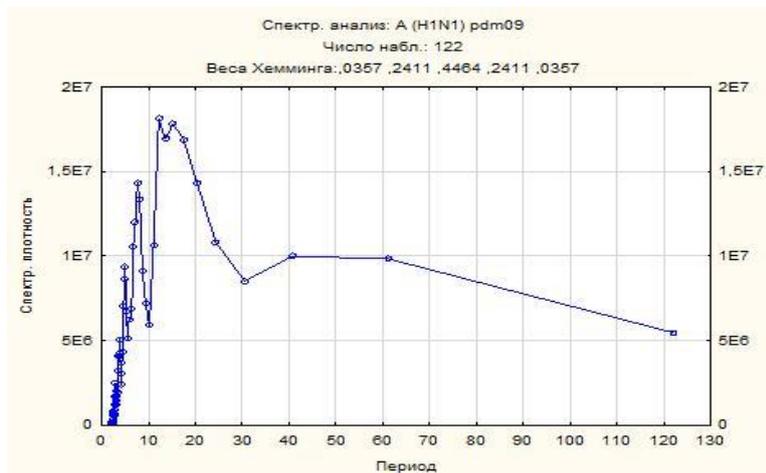


Рис. 4. Спектральная плотность переменной A(H1N1) pdm09 по периоду

График демонстрирует существование ярко выраженного 11-месячного цикла заболеваемости вирусом гриппа A(H1N1) pdm09. Более того, есть признаки существования более продолжительного, примерно 40–60-месячного цикла, что позволяет говорить о сохранении своей эпидемиологической актуальности на территории РФ пандемических штаммов вируса A(H1N1) pdm09.

Литература

1. Богомоллов Б.Н. Большая медицинская энциклопедия. М.: АСТ, 2007.
2. Киселев О.И. Геном пандемического вируса гриппа A/H1N1v-2009. М.: Димитрейд График Групп, 2011.
3. Халафян А.А. Statistica 6. Статистический анализ данных: учебник. 3-е изд. М.: ООО «Бином - Пресс», 2007.

О КАРТИНЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГИЛЬБЕРТА В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.В. ОСИПЯН, К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет
 e-mail: kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *метааналитическая функция, модельная краевая задача типа задачи Гильберта, картина разрешимости, единичный круг.*

В статье дается полное описание картины разрешимости однородной краевой задачи типа задачи Гильберта в классах метааналитических функций в единичном круге.

1. Постановка задачи. Пусть $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ – единичный круг на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, $L = \{t: |t| = 1\}$ – граница круга T^+ , а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Обычно (см., например, [1, с. 139] или [2]) метааналитическими функциями в круге T^+ называются регулярные решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + A_1 \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + A_0 F(z) = 0, \quad z \in T^+, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – дифференциальный оператор Коши-Римана, а A_0, A_1 – некоторые комплексные числа.

Как известно (см. [1–3]), если λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения $\lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0$, то всякую метааналитическую в круге T^+ функцию $F(z)$ можно представить в виде

$$F(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] e^{\lambda_0 \bar{z}}, \quad \text{если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \quad (2)$$

или

$$F(z) = \varphi_0^+(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} + \varphi_1^+(z) e^{\lambda_2 \bar{z}}, \quad \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (3)$$

где $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ – аналитические в T^+ функции, которые принято называть *аналитическими компонентами* метааналитической функции $F(z)$.

Следуя [1–4], функции вида (2) будем называть *метааналитическими функциями первого типа*, а функции вида (3) – *метааналитическими функциями второго типа*.

Наконец, будем говорить, что метааналитическая в T^+ функция $F(z)$ вида (2) или (3) принадлежит классу $M_2(T^+) \cap H(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур L (то есть функции $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ принадлежат классу $A(T^+) \cap H(L)$).

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все метааналитические в области T^+ функции $F(z)$ класса $M_2(T^+) \cap H(L)$, удовлетворяющие на L краевым условиям:*

$$\operatorname{Re} \{ \overline{h_0(t)} F^+(t) + \int_L M_0(t, \tau) F^+(\tau) d\tau \} = q_0(t), \quad (4)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{h_1(t)}\left(\frac{\partial F^+(t)}{\partial t} - \lambda F^+(t)\right) + \int_L M_1(t, \tau)\left(\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial \tau} - \lambda F^+(\tau)\right) d\tau\right\} = q_1(t), \quad (5)$$

где $F^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} F(z)$, $\frac{\partial F^+(t)}{\partial t} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial F(z)}{\partial z}$, λ – какой-нибудь корень характеристического уравнения $\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0$, а $h_k(t)$ и $q_k(t)$ ($k = 0, 1$) – заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем $|h_k(t)| = 1$, $t \in L$ ($k = 0, 1$); $M_k(t, \tau)$ ($k = 0, 1$) – заданные на $L \times L$ фредгольмовы ядра.

В дальнейшем сформулированную задачу будем называть модельной задачей типа Гильберта для метааналитических функций или, короче, задачей $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}$, а соответствующую однородную задачу ($q_k(t) \equiv 0, k = 0, 1$) – задачей $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}^0$. При этом число $\chi = \chi_1 + \chi_2$, где $\chi_k = \operatorname{Ind} h_k(t)$ ($k = 0, 1$), будем называть суммарным индексом краевой задачи $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}$, а числа $\chi_k = \operatorname{Ind} h_k(t)$ ($k = 0, 1$) назовем частными индексами этой задачи.

Отметим, что в частном случае, когда $\lambda = 0$ и $M_k(t, \tau) \equiv 0$ ($k = 0, 1$), задача $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}$ впервые была поставлена в работе В.И. Жегалова [5]. В работе авторов [4] был разработан общий конструктивный метод решения задачи $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}$ в случае, когда T^+ – произвольная односвязная область, границей которой служит кривая Ляпунова. Основной целью настоящего сообщения является полное описание картины разрешимости однородной задачи $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}^0$ в классе метааналитических функций первого типа в единичном круге в зависимости от значений частных индексов этой задачи.

2. Картина разрешимости задачи $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}^0$ в классе метааналитических функций первого типа. Будем искать решения задачи $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}^0$ в виде (2). Тогда краевые условия (4) и (5) в случае $q_k(t) \equiv 0$ ($k = 0, 1$) можно переписать соответственно в виде (см. также [4])

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)}[\varphi_0^+(t) + \bar{t}\varphi_1^+(t)]e^{\lambda_0 t} + \int_L M_0(t, \tau)[\varphi_0^+(\tau) + \bar{\tau}\varphi_1^+(\tau)]e^{\lambda_0 \bar{\tau}} d\tau\} = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{h_1(t)}\varphi_1^+(t)e^{\lambda_0 t} + \int_L M_1(t, \tau)\varphi_1^+(\tau)e^{\lambda_0 \bar{\tau}} d\tau\right\} = 0, \quad (7)$$

где

$$h_k(t) = a_k(t) + ib_k(t), \quad k = 0, 1. \quad (8)$$

Здесь равенство (7) есть краевое условие хорошо изученной (см., например, [1, с. 57]) обобщенной задачи Гильберта относительно

аналитической функции $\varphi_1^+(z)$.

Как известно (см, например, [1, с. 71, Лемма 3.4]), если $\chi_l = \text{Ind}h_l(t) \geq 0$, то однородная задача Гильберта (7) *всегда разрешима* и её общее решение линейно зависит от $l_l = 2\chi_l + \nu_l - r_l + 1$ произвольных действительных постоянных, где ν_l и r_l – некоторые неотрицательные целые числа, причем $\nu_l \geq r_l$. Если же $\chi_l = \text{Ind}h_l(t) < 0$, то общее решение однородной задачи Гильберта (7) линейно зависит от $l_l = \nu_l - 2|\chi_l| + 1$ произвольных действительных постоянных, где ν_l – некоторое неотрицательное целое число, причем $\nu_l \geq 2|\chi_l| - 1$.

Предположим, что

$$\varphi_1^+(z) = \sum_{k=1}^{l_1} \gamma_k \varphi_{k0}(z), \quad z \in T^+, \quad (9)$$

есть общее решение однородной задачи Гильберта (7), где

$$l_1 = \begin{cases} 2\chi_1 + \nu_1 - r_1 + 1, & \text{если } \chi_1 \geq 0, \\ \nu_1 - 2|\chi_1| + 1, & \text{если } \chi_1 < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Далее, подставляя в краевое условие (6) вместо $\varphi_1^+(t)$ граничные значения найденной по формуле (9) аналитической функции $\varphi_1^+(z)$, получаем следующую скалярную обобщенную краевую задачу Гильберта относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi_0^+(z)$:

$$\text{Re} \left\{ \overline{h_0(t)} \varphi_0^+(t) e^{\lambda_0 t} + \int_L M_0(t, \tau) e^{\lambda_0 \bar{\tau}} \varphi_0^+(\tau) d\tau \right\} = q_{10}(t), \quad (11)$$

где

$$q_{10}(t) = -\text{Re} \{ \overline{h_0(t)} [\bar{t} \varphi_1^+(t)] e^{\lambda_0 t} + \int_L M_0(t, \tau) [\bar{\tau} \varphi_1^+(\tau)] e^{\lambda_0 \bar{\tau}} d\tau \}. \quad (12)$$

Пусть $\chi_0 = \text{Ind}h_0(t) \geq 0$. Тогда, как известно (см., например, §3 монографии [1]), для разрешимости задачи Гильберта (11) необходимо и достаточно выполнение $\nu_0 - r_0$ условий вида

$$\int_L q_{10}(t) \psi_j(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu_0 - r_0, \quad (13)$$

где $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{\nu_0 - r_0}(t)$ – некоторые линейно независимые (над полем \mathbf{R}) решения однородного уравнения Фредгольма

$$\psi(t) + \int_L N_0(\tau, t) \psi(\tau) d\tau = 0, \quad (14)$$

где $N_0(\tau, t)$ – фредгольмово ядро, которое определенным образом выражается через $h_0(t)$ и $M_0(t, \tau)$.

Замечание 1. Отметим, что некоторые из условий вида (13) можно удовлетворять за счет определенного выбора значений произвольных постоянных, входящих в выражение функции $q_{10}(t)$.

При выполнении условий (13) общее решение обобщенной задачи Гильберта (11) можно задавать в виде (см. [1, с. 73]):

$$\varphi_0^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_{10}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \int_L R_0(z, \tau) g_{10}(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_0} \delta_k \Omega_{k0}(z), \quad z \in T^+, \quad (15)$$

где $l_0 = 2\chi_0 + \nu_0 - r_0 + 1$, $g_{10}(\tau) = 2q_{10}(\tau)/\overline{h_0(\tau)}$, $R_0(z, \tau)$ – функция, которая определенным образом выражается через $h_0(t)$ и $M_0(t, \tau)$, причем $R_0(t, \tau) \in H_*(L \times L)$; здесь $\sum_{k=1}^{l_0} \delta_k \Omega_{k0}(z)$ – общее решение однородной задачи Гильберта, соответствующей неоднородной задаче (11).

Предположим теперь, что $\chi_0 = \text{Ind}h_0(t) < 0$. В этом случае (см. также [1, с. 74] для разрешимости неоднородной обобщенной задачи Гильберта (11) необходимо и достаточно выполнение ν_0 условий вида

$$\int_L q_{10}(t) \psi_j(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu_0, \quad (16)$$

где $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{\nu_0}(t)$ – полная система линейно независимых (над полем \mathbf{R}) решений однородного уравнения Фредгольма (14).

Замечание 2. Здесь важно отметить, что некоторые из условий вида (16) можно удовлетворять за счет определенного выбора значений произвольных постоянных, входящих в выражение функции $q_{10}(t)$.

При выполнении условий (16) общее решение обобщенной задачи Гильберта (11) можно также задавать формулой вида (12), где $l_0 = \nu_0 - 2|\chi_0| + 1$ (см. [1, с. 75]).

Поскольку в силу формул (9) и (12) выражение функции $q_{10}(t)$ содержит ровно l_1 произвольных постоянных, то (с учетом замечаний 1 и 2) общее решение обобщенной задачи Гильберта (11), задаваемое формулой (15), линейно зависит не более чем от $l = l_0 + l_1$ произвольных действительных постоянных.

Наконец, предположим, что обе краевые задачи (7) и (11) разрешимы, и уже найдены их общие решения по формулам (9) и (15) соответственно. Тогда общее решение исходной задачи $GF_{2,M}^0$ можно задавать формулой

$$F(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] e^{\lambda_0 \bar{z}}, \quad (17)$$

где $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ – общие решения краевых задач (7) и (11) соответственно.

Таким образом, из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. а) Если $\chi_m = \text{Ind}h_m(t) \geq 0$, $m = 0, 1$, то для разрешимости однородной задачи $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}^0$ в классе метааналитических функций первого типа необходимо и достаточно выполнение $v_0 - r_0$ условий вида (13). При выполнении этих условий общее решение задачи, задаваемое формулой (17), линейно зависит не более чем от $l = l_0 + l_1$ произвольных действительных постоянных, где $l_0 = 2\chi_0 + v_0 - r_0 + 1$, $l_1 = 2\chi_1 + v_1 - r_1 + 1$.

б) Если $\chi_m = \text{Ind}h_m(t) < 0$, $m = 0, 1$, то для разрешимости однородной задачи $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}^0$ в классе метааналитических функций первого типа необходимо и достаточно выполнение v_0 условий вида (16). При выполнении этих условий общее решение задачи, задаваемое формулой (17), линейно зависит не более чем от $l = l_0 + l_1$ произвольных действительных постоянных, где $l_0 = v_0 - 2|\chi_0| + 1$, $l_1 = v_1 - 2|\chi_1| + 1$.

в) Если $\chi_0 = \text{Ind}h_0(t) \geq 0$, $\chi_1 = \text{Ind}h_1(t) < 0$, то для разрешимости однородной задачи $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}^0$ в классе метааналитических функций первого типа необходимо и достаточно выполнение $v_0 - r_0$ условий вида (13). При выполнении этих условий общее решение задачи, задаваемое формулой (17), линейно зависит не более чем от $l = l_0 + l_1$ произвольных действительных постоянных, где $l_0 = 2\chi_0 + v_0 - r_0 + 1$, $l_1 = v_1 - 2|\chi_1| + 1$.

г) Если $\chi_0 = \text{Ind}h_0(t) < 0$, $\chi_1 = \text{Ind}h_1(t) \geq 0$, то для разрешимости однородной задачи $\mathbf{G}\Gamma_{2,M}^0$ в классе метааналитических функций первого типа необходимо и достаточно выполнение v_0 условий вида (16). При выполнении этих условий общее решение задачи, задаваемое формулой (17), линейно зависит не более чем от $l = l_0 + l_1$ произвольных действительных постоянных, где $l_0 = v_0 - 2|\chi_0| + 1$, $l_1 = 2\chi_1 + v_1 - r_1 + 1$.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
2. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ / Сер. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 85. М.:ВИНТИ, 1991. С. 187–246.
3. Расулов К.М. Об одной краевой задаче типа Дирихле для обобщенных метааналитических функций в круге // Известия СмолГУ, 2014. № 3(27). С. 305–311.
4. Осипян К.В., Расулов К.М. Об одной модельной краевой задаче типа задачи Гильберта в классах метааналитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Вып. 17. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. С. 170–175.

5. Жегалов В.И. О задачах с производными в краевых условиях // Труды Семинара по краевым задачам. Казанск. ун-т. 1973. Вып 10. С. 38–52.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.
7. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ЛОГИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

В.А. ПЕТРОВ

Смоленский государственный университет
e-mail: VAPetrov@smolgu.ru

УДК 517 (075.8)

Ключевые слова: *логистика, грузовая работа, средняя дальность ездки, двойной интеграл.*

В статье с помощью двойного интеграла предлагается общая формула для вычисления грузовой работы при транспортировке груза, равномерно распределенного по некоторой области. Находится средняя дальность ездки для различных конкретных ситуаций.

В литературе, посвященной транспортному процессу, активно работает понятие «средняя дальность ездки». Оно определяется следующим образом: пусть грузы массами m_1, \dots, m_n перевезли на расстояния r_1, \dots, r_n соответственно. Величину $A = \sum_{i=1}^n m_i r_i$ называют *грузовой работой*, а величину $\ell = \frac{A}{m}$ (m – суммарная масса грузов) – *средней дальностью ездки*. Эти величины служат технико-экономическими измерителями грузового транспортного процесса. Их можно рассчитать (по маршрутным листам) и в случае транспортировки груза, равномерно распределенного (или распределяемого) на некоторой площади. Но в логистике необходимо находить подобные величины теоретически, при планировании фронта работ.

Во многих книгах приводятся формулы грузовой работы и средней дальности ездки для различных областей и маршрутов, но ни в одной из известных нам книг нет вывода этих формул. Не могли объяснить их происхождение и авторы книг, к которым мы обращались.

На наш взгляд, искомые общие формулы можно получить с помощью стандартного перехода от сумм к интегралам. Пусть некоторый груз непрерывно и равномерно распределен по области D с плотностью k ($\text{кг}/\text{м}^2$). Обозначим через $F(x; y)$ расстояние от точки $(x; y)$ области D до пункта доставки груза. Разобьем область D на участки S_i ($i = 1, \dots, n$), с которых груз вывозится за один рейс. Дальность доставки

в этом случае равна $F(x_i; y_i)$, где $(x_i; y_i)$ – некоторая точка из D_i . Пусть ΔS_i – площадь деланки S_i . Тогда грузовую работу можно найти по формуле:

$$A = k \sum_{i=1}^n F(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i.$$

Получили интегральную сумму для двойного интеграла. Естественно предположить, что приближенное значение грузовой работы можно находить по формуле

$$A = k \iint_D F(x; y) dx dy. \quad (1)$$

Предлагаемая формула во всех известных нам из литературы конкретных ситуациях приводит к известным ответам. Приведем примеры.

1. Рассмотрим область, имеющую форму криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 0, y = f(x), x = a, x = b (y \geq 0)$. Если равномерно распределенный груз с этой области вывозится кратчайшим путем к дороге – оси абсцисс, то грузовая работа вычисляется по формуле

$$A = \frac{k}{2} \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2)$$

Обоснование. Данная формула получается из (1), если двойной интеграл свести к повторному; в этом случае $F(x; y) = y$.

2. Найти среднюю дальность ездки при вывозке урожая или сена с квадратного поля со стороной a а) к дороге, совпадающей с одной из сторон поля; б) кратчайшим путем к краю поля; в) к стогу, формируемому в центре поля; г) сначала по кратчайшему пути к дороге, окаймляющей поле, а затем по дороге к фиксированной вершине квадрата.

Решение. а) Можно воспользоваться формулой (2) при $a = 0, b = a, f(x) = a$. Суммарная масса груза $m = ka^2$. Ответ: $\ell = \frac{a}{2}$.

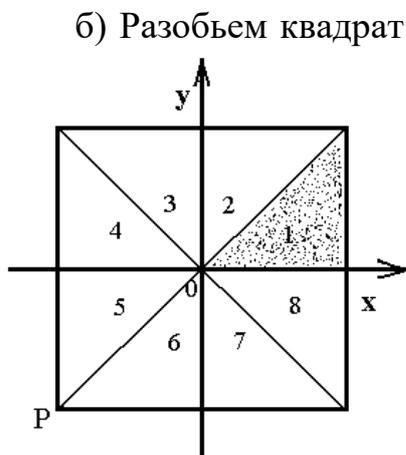


Рис. 1

б) Разобьем квадрат на 8 равных треугольников (рис. 1). Ясно, что средняя дальность ездки для всего поля будет такой же, как для одного треугольника. Рассмотрим первый треугольник. Работа по доставке грузов с него к катету – краю поля будет такой же, как к катету, лежащему на оси абсцисс. Поэтому можно воспользоваться формулой (2), где $f(x) = y, a = 0, b = \frac{a}{2}$. Ответ: $\ell = \frac{a}{6}$.

Грузовую работу для первого треугольника можно найти и по формуле (1).

В этом случае $F(x; y) = \frac{a}{2} - x$.

в) Достаточно найти искомую величину для первого треугольника.

В этом случае $m = \frac{ka^2}{8}$. Для отыскания грузовой работы перейдем к полярным координатам. По формуле (1) получаем:

$$A = k \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2\cos\varphi}} r^2 dr = \frac{ka^3}{48} \left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) \left(\varphi = \frac{\pi}{4} \right); \ell \approx 0,4 \cdot a.$$

г) Пусть груз свозится в вершину квадрата P (рис. 1). Для точки $(x; y)$ из треугольника (1) длина ездки будет такой $F_1(x; y) = 2a - x + y$. По формуле (1) находим грузовую работу A_1 . Ясно, что такой же будет величина A_2 . Аналогично находится работа для остальных трех пар треугольников. Ответ: $\ell = 14a$.

3. Найти среднюю дальность ездки при транспортировке сена с круглого поля радиуса R к стогу, формируемому в центре поля.

Решение. По формуле (1), переходя к полярным координатам, получаем:

$$A = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \pi k R^3, m = k \pi R^2, \ell = \frac{2}{3} R.$$

4. Прямоугольное поле ширины a и длины b окаймлено дорогой. Найти среднюю дальность ездки при вывозке урожая а) по кратчайшим путям к краю поля; б) сначала к краю поля, а затем по дороге к фиксированной вершине прямоугольника.

Ответ: а) $\ell = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{6b}$; б) $\ell = 9a + 6b - \frac{a^2}{b}$.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

А.Е. ПОПКОВ, К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет

e-mail: a.e.popkov@yandex.ru; kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, кусочно квазигармоническая функция, краевая задача Римана, исключительный случай, единичный круг.

В докладе излагается конструктивный алгоритм решения краевой задачи типа задачи Римана в классах кусочно квазигармонических функций первого рода в случае, когда носителем краевых условий

является окружность единичного радиуса, а коэффициент краевого условия в конечном числе точек контура обращается в нуль.

Пусть $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ – единичный круг на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, границей которого служит окружность $L = \{t: |t| = 1\}$, а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Напомним [1], что *квазигармоническими функциями рода n в круге T^+* называются функции, представимые в виде

$$W^+(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad z \in T^+, \quad (1)$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z) \in A(T^+)$, т.е. $\varphi^+(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W^+(z)$.

Определение 1. Функцию $W(z)$ будем называть *кусочно квазигармонической рода n с линией скачков L* , если она в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях T^+ и T^- определяется выражениями $W^+(z)$ и $W^-(z)$:

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z), & z \in T^+, \\ W^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где $W^+(z)$ определяется по формуле (1), а

$$W^-(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k}, \quad \varphi^-(z) \in A(T^-), \quad (3)$$

причем в каждой точке $t \in L$ существуют пределы: $\lim_{z \rightarrow t} W^\pm(z)$. При этом будем говорить, что кусочно квазигармоническая функция $W(z)$ *ограничена (исчезает) на бесконечности*, если аналитическая функция $\varphi^-(z)$ в представлении (3) *ограничена (исчезает) на бесконечности*.

Как обычно (см. [2–3]), будем говорить, что кусочно квазигармоническая функция рода n ($n \geq 1$) функция $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ с линией скачков L принадлежит классу $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(m)}(L)$, если в представлении (1) аналитическая компонента $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т.е. аналитическая функция $\varphi^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число), а в представлении (3) функция $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(m)}(L)$.

Рассматривается следующая задача R_n : требуется найти все кусочно квазигармонические функции $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ рода n ($n \geq 1$) с линией скачков L , принадлежащие классу $Q_n(T^\pm) \cap H^{(n)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$W^+(t) = G(t)W^-(t) + g(t), \quad (4)$$

где $G(t)$, $g(t)$ – заданные на L комплексные функции.

Следуя [2], сформулированную выше задачу R_n будем называть задачей типа Римана для квазигармонических функций рода n , а соответствующую R_n однородную задачу ($g(t) \equiv 0$) назовем задачей R_n^0 .

В дальнейшем для удобства примем следующую классификацию:

1) задачу R_n будем называть *нормальной*, если в краевом условии (4) функции $G(t)$, $g(t)$ принадлежат классу Гельдера (т.е. $G(t), g(t) \in H(L)$) и $G(t) \neq 0$ на L ;

2) задачу R_n назовем *вырожденной*, если в краевом условии (4) функция $g(t) \in H(L)$, а $G(t) \equiv 0$ на L ;

3) задачу R_n назовем *исключительной*, если в краевом условии (4) функция $G(t)$ имеет вид:

$$G(t) = G_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j}, \quad t, \beta_j \in L, \quad (5)$$

где $G_1(t) \in H(L)$ и $G_1(t) \neq 0$ на L ; β_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) – некоторые точки на L , которые будем называть *нулями* функции $G(t)$ на L , а ρ_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) – фиксированные натуральные числа.

В работах [2–3] одного из авторов в случае единичного круга $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ и произвольного n разработан эффективный метод решения задачи R_n , суть которого состоит в сведении решения этой задачи к решению *обычной* краевой задачи Римана (задачи сопряжения) в классе аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений n -го порядка. Основная цель настоящего сообщения – изложение конструктивного алгоритма решения краевой задачи R_n в *исключительном случае*.

Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Расулов К.М. Об одном методе решения краевой задачи типа Римана в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ, 2015. - №2/1. С. 159–167.
3. Расулов К.М. О краевой задаче типа Римана в классах квазигармонических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI междунар. научной конф. Смоленск, 2015. Вып. 16. С. 201–204.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет

e-mail: kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *кусочно аналитическая вектор-функция, векторно-матричная краевая задача Римана, интегральное уравнение Фредгольма.*

В статье разработан конструктивный метод решения двумерной векторно-матричной краевой задачи Римана для аналитических функций в случае, когда хотя бы один из элементов матрицы-коэффициента краевого условия не обращается в нуль на контуре.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная гладким замкнутым контуром L , а $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$. Для определенности будем считать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ .

Далее в основном будем придерживаться обозначений, принятых в книгах [1–2]. Рассматривается следующая задача. *Требуется найти кусочно аналитический вектор $\Phi^\pm(z) = \{\Phi_1^\pm(z), \Phi_2^\pm(z)\}$ с линией скачков L , исчезающий на бесконечности и удовлетворяющий на контуре L условию:*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (1)$$

где $G(t) = \|G_{kl}(t)\|_{k,l}^2$ – заданная на L квадратная матрица с элементами из класса $H(L)$, а $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ – заданная на L вектор-функция, причем $g_k(t) \in H(L)$, $k = 1, 2$.

В дальнейшем сформулированную выше задачу будем называть *двумерной векторно-матричной задачей Римана для аналитических функций* или, короче, *задачей $R_{2,2}$* .

В настоящее время в теории краевых задач комплексного анализа известны различные подходы к исследованию и решению задачи $R_{2,2}$ в так называемом *невырожденном* случае, т.е. когда $\det \|G_{kl}(t)\|_{k,l}^2 \neq 0$ на контуре L (см., например, [2–5] и имеющуюся там библиографию).

Основной целью настоящего сообщения является построение эффективного и конструктивного метода решения задачи $R_{2,2}$ лишь при

одном предположении: *хотя бы один элемент матрицы* $G(t) = \|G_{kl}(t)\|_{k,l}^2$ *не обращается в нуль на* L .

2. Метод решения задачи $R_{2,2}$ в случае $G_{11}(t) \neq 0$. Предположим, что в краевом условии (1) элемент $G_{11}(t)$ матрицы $G(t) = \|G_{kl}(t)\|_{k,l}^2$ не обращается в нуль на L и пусть $\chi_{11} = \text{Ind}G_{11}(t)$ – индекс Коши функции $G_{11}(t)$. Обозначим через $X_{11}^\pm(z)$ – канонические функции задачи скалярной однородной задачи Римана с коэффициентом $G_{11}(t)$, т.е.

$$X_{11}^+(z) = \exp\{\gamma_{11}^+(z)\} \quad \text{и} \quad X_{11}^-(z) = z^{-\chi} \exp\{\gamma_{11}^-(z)\}, \quad (2)$$

где

$$\gamma_{11}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\chi} G_{11}(\tau)]}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \gamma_{11}^+(z), & z \in T^+, \\ \gamma_{11}^-(z), & z \in T^-. \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку $G_{11}(t) = \frac{X_{11}^+(t)}{X_{11}^-(t)}$, то краевое условие (1) в развернутой форме можно переписать в виде

$$\begin{cases} \Psi_1^+(t) - \Psi_1^-(t) = Q_1(t), \\ \Psi_2^+(t) = \frac{G_{21}(t)}{G_{11}(t)} \Psi_1^-(t) + \frac{G_{22}(t)}{G_{11}(t)} \Psi_2^-(t) + \frac{g_2(t)}{X_{11}^+(t)}, \end{cases} \quad (4)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\Psi^\pm(t) = \frac{\Phi_k^\pm(t)}{X_{11}^\pm(t)}, \quad Q_1(t) = \frac{G_{12}(t)}{G_{11}(t)} \Psi_2^-(t) + \frac{g_1(t)}{X_{11}^+(t)}. \quad (5)$$

Отметим, что если $\chi_{11} = \text{Ind}G_{11}(t) \geq 0$, то функция $\Psi_k^-(z) = \frac{\Phi_k^-(z)}{X_{11}^-(z)}$ в окрестности точки $z = \infty$ будет удовлетворять условию

$$\left| \Psi_k^-(z) - \sum_{k=0}^{\chi} c_k z^k \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty; \quad (6)$$

если же $\chi_{11} = \text{Ind}G_{11}(t) < 0$, то для $\Psi_k^-(z) = \frac{\Phi_k^-(z)}{X_{11}^-(z)}$ в этой окрестности будем иметь соотношение:

$$\left| z^{-\chi+1} \cdot \Psi_k^-(z) \right| < \infty \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Далее, считая временно $Q_1(t)$ известной функцией и решая задачу о скачке

$$\Psi_1^+(t) - \Psi_1^-(t) = Q_1(t), \quad t \in L, \quad (8)$$

в случае $\chi_{11} \geq 0$ будем иметь (см., например, [1, с. 42]):

$$\Psi_1^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_1(\tau)}{\tau - z} d\tau + P_\chi(z), \quad z \in T^\pm, \quad (9)$$

где $P_{\chi-1}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{\chi} z^{\chi}$ – многочлен с произвольными комплексными коэффициентами.

Если же $\chi_{11} < 0$, то решение задачи о скачке (8) можно также задавать формулой (9), где нужно положить $P_{\chi}(z) \equiv 0$, лишь при выполнении следующих условий разрешимости:

$$\int_L Q_1(t) t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\chi. \quad (10)$$

Теперь, с учетом обозначений (5) и формул Сохоцкого-Племели (см., например, [3, с. 38]), из (9) получаем

$$\Psi_1^-(t) = -\frac{G_{12}(t)}{G_{11}(t)} \Psi_2^-(t) + \int_L K_1(t, \tau) \Psi_2^-(\tau) d\tau + f_1(t), \quad t \in L, \quad (11)$$

где

$$K_1(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{G_{12}(\tau)}{G_{11}(\tau)} - \frac{G_{12}(t)}{G_{11}(t)} \right\} \frac{1}{\tau - t}, \quad (12)$$

$$f_1(t) = -\frac{1}{2} \frac{g_1(t)}{X_{11}^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{X_{11}^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + P_{\chi}(t). \quad (13)$$

Наконец, подставив во второе уравнение системы (4) вместо $\Psi_1^-(t)$ её значение, найденное по формуле (11), будем иметь:

$$\Psi_2^+(t) = G_2(t) \Psi_2^-(t) + \int_L K_2(t, \tau) \Psi_2^-(\tau) d\tau + f_2(t), \quad t \in L, \quad (14)$$

где

$$G_2(t) = \frac{\det G(t)}{[G_{11}(t)]^2}, \quad K_2(t, \tau) = \frac{G_{21}(t)}{G_{11}(t)} K_1(t, \tau), \quad f_2(t) = \frac{G_{21}(t)}{G_{11}(t)} f_1(t) + \frac{g_2(t)}{X_{11}^+(t)}. \quad (15)$$

Приведенные выше рассуждения показывают, что справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если выполняется условие $G_{11}(t) \neq 0$, то решение векторно-матричной задачи Римана $\mathbf{R}_{2,2}$ сводится к последовательному решению обобщенной скалярной задачи Римана (14) и задачи о скачке (8).

Следствие. Векторно-матричная задача Римана $\mathbf{R}_{2,2}$ решается в замкнутой форме (в интегралах типа Коши) всякий раз, когда ядро $K_1(t, \tau)$, задаваемое формулой (12), является вырожденным.

Замечание. Важно отметить, что предложенный выше метод решения задачи $\mathbf{R}_{2,2}$ применим и в том случае, когда $\det \|G_{kl}(t)\|_{k,l}^2 \equiv 0$.

Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
5. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.

О ЗАВИСИМОСТИ КАРТИНЫ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ВЕЛИЧИНЫ РАДИУСА КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

К.М. РАСУЛОВ, Т.И. ТИМОФЕЕВА
Смоленский государственный университет
e-mail: kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, аналитическая функция, квазигармоническая функция, краевая задача Гильберта, круговые области.

В докладе устанавливается зависимость картины разрешимости однородной краевой задачи Гильберта в классах квазигармонических функций второго рода в круговых областях от величины радиуса искомой области.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L .

Напомним [1–4] что квазигармоническими функциями рода n в области T^+ называются функции, представимые в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad z \in T^+, \quad (1)$$

где $A_k = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W(z)$.

Определение 1. Будем говорить, что квазигармоническая функция $W(z)$ рода n ($n \geq 1$) принадлежит классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, если в

представлении (1) аналитическая компонента $\varphi(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т.е. аналитическая функция $\varphi(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача Γ_n^0 . Требуется найти все квазигармонические функции $W(z)$ рода n ($n \geq 1$), принадлежащие классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$\operatorname{Re}\{\overline{h(t)} \cdot W(t)\} = 0, \quad (2)$$

где $h(t) = a(t) + ib(t)$ – заданная на контуре L функция класса $H(L)$ (т.е. удовлетворяющая на L условию Гельдера).

Следуя [2], сформулированную выше задачу Γ_n^0 будем называть *однородной задачей Гильберта для квазигармонических функций рода n* .

Важно отметить, что в силу представления (1) краевое условие (2) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}\left(\overline{h(t)} \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k}\right) = 0, \quad t \in L. \quad (3)$$

В свою очередь, равенство (3) есть краевое условие хорошо известной (см., например, [5, с. 245]) *обобщенной (дифференциальной) краевой задачи типа Гильберта* относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi(z)$.

Таким образом, по сути, задача Γ_n^0 равносильна однородной дифференциальной задаче типа Гильберта (4) для аналитических функций. До сих пор краевые задачи вида (4) в основном решались методом интегральных уравнений (см., например, [1; 5]). Но этот метод не позволяет установить точные картины разрешимости обобщенных краевых задач Гильберта вида (4). Поэтому возникает необходимость отыскания новых подходов к решению обобщенных краевых задач вида (4), позволяющих точно описать картины разрешимости этих задач.

В работе [2] в случае единичного круга $T_1^+ = \{z: |z| < 1\}$ и произвольного n был предложен новый алгоритм решения этой задачи, позволяющий получить решение Γ_n^0 путем последовательного решения вспомогательной краевой задачи Гильберта в классе аналитических функций и одного линейного дифференциального уравнения Эйлера n -го порядка. Но оказалось, что картина разрешимости задачи Γ_n^0 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ существенным образом зависит от величины радиуса этого круга (в случае $n = 1$ ранее этот вопрос изучался в работах авторов

[3, 4]). Основной целью настоящего сообщения является анализ картины разрешимости краевой задачи Γ_n^0 в зависимости от радиуса круга $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ в случае, когда $n = 2$.

Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Расулов К.М. Краевая задача Гильберта в классах квазигармонических функций в круге // Известия СмолГУ, 2014, № 4(28). С. 395–401.
3. Расулов К.М., Тимофеева Т.И. О картине разрешимости однородной краевой задачи Гильберта для квазигармонических функций в круговых областях // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2016. Т. 8, № 4. С. 33–40.
4. Расулов К.М., Тимофеева Т.И. Краевая задача Гильберта для квазигармонических функций в круговых областях, отличных от единичного круга // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 207–211.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.

О КАРТИНЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

К.М. РАСУЛОВ, Ш.С. ХАНКИШИЕВА
Смоленский государственный университет
e-mail: kahrimanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, аналитическая функция, квазигармоническая функция, краевая задача Римана, круговые области.

В докладе устанавливается характер зависимости картины разрешимости краевой задачи Римана в классах квазигармонических функций второго рода в круговых областях от величины радиуса искомой области.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром L . Область, дополняющую $T^+ \cup L$ до полной плоскости, обозначим через T^- и будем считать, что начало координат находится в T^+ .

Напомним [1], что квазигармоническими функциями рода n в области T^+ называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, а n – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1–3], что всякую квазигармоническую функцию рода n в области T^+ можно представить в виде

$$W^+(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W^+(z)$.

Определение 1. Функцию $W(z)$ будем называть *кусочно квазигармонической рода n с линией скачков L* , если она в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях T^+ и T^- определяется выражениями $W^+(z)$ и $W^-(z)$:

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z), & z \in T^+ \\ W^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (3)$$

где $W^+(z)$ определяется по формуле (2), а

$$W^-(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k}. \quad (4)$$

При этом будем говорить, что кусочно квазигармоническая функция $W(z)$ *ограничена (исчезает) на бесконечности*, если аналитическая функция $\varphi^-(z)$ в представлении (4) *ограничена (исчезает) на бесконечности*.

Наконец, будем говорить, что кусочно квазигармоническая функция $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ рода n ($n \geq 1$) принадлежит классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, если в представлении (2) аналитическая компонента $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^m(L)$, т.е. аналитическая функция $\varphi^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число), а в представлении (4) функция $\varphi^-(z) \in A(T^-) \cap H^m(L)$.

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно квазигармонические функции*

$W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ с линией скачков L , принадлежащие классу $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(m)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$W^+(t) = W^-(t) \cdot G(t), \quad (5)$$

где $G(t)$ – заданная на L функция, удовлетворяющая условию Гельдера, причем $G(t) \neq 0$ на L .

Следуя [1–3], сформулированную задачу будем называть *однородной задачей типа Римана для квазигармонических функций рода n* или, короче, *задачей R_n^0* .

В работе авторов [3] было установлено, что картина разрешимости задачи R_n^0 в случае $n=1$ и $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ существенно зависит от величины радиуса r . Основной целью настоящего сообщения является анализ картины разрешимости краевой задачи R_n^0 в классах квазигармонических функций второго рода (т.е. при $n=2$) в зависимости от величины радиуса круга $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, где $r > 0$.

Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Расулов К.М. Об одном методе решения краевой задачи типа Римана в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ. 2015, №2/1. С. 159–167.
3. Расулов К.М., Ханкишиева Ш.С. О краевой задаче типа Римана в классах квазигармонических функций в круге не единичного радиуса // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 211–217.

МОДЕЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ, А.В. ШИРОКОВА

Смоленский государственный университет
e-mail: kahrmanr@yandex.ru

УДК 517.968.23

Ключевые слова: *комплексная плоскость, метааналитическая функция, модельная краевая задача, задача Гильберта, разрывные коэффициенты, единичный круг.*

В статье для одной модельной краевой задачи типа задачи Гильберта в классах метааналитических функций разработан

конструктивный алгоритм её решения в единичном круге в случае, когда коэффициенты краевых условий испытывают разрывы 1-го рода в конечном числе точек единичной окружности.

1. Постановка задачи. Пусть $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ – единичный круг на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, границей которого служит окружность $L = \{t: |t| = 1\}$, а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Напомним (см., например, [1, с. 139] или [2]), что метааналитическими функциями в области T^+ называются регулярные решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + A_1 \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + A_0 F(z) = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y})$ – дифференциальный оператор Коши-Римана, а A_0, A_1 – некоторые комплексные числа.

Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0. \quad (2)$$

Тогда, как известно (см. [1–3]), всякую метааналитическую в круге T^+ функцию $F(z)$ можно представить в виде

$$F(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] e^{\lambda_0 \bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \quad (3)$$

или

$$F(z) = \varphi_0^+(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} + \varphi_1^+(z) e^{\lambda_2 \bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (4)$$

где $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ – аналитические в T^+ функции, называемые *аналитическими компонентами* метааналитической функции $F(z)$.

Как обычно (см. [1–3]), функции вида (2) будем называть *метааналитическими функциями первого типа*, а функции вида (3) – *метааналитическими функциями второго типа*.

Следуя [6], обозначим через $H_*^\alpha(L)$ класс *кусочно-гельдеровых функций* $q(t)$, заданных на L и имеющих конечное число точек разрыва 1-го рода, а на замкнутых дугах с концами в этих точках удовлетворяющих условию Гельдера.

Определение 1. Будем говорить, что аналитическая в круге T^+ функция $\varphi(z)$ принадлежит классу $A(T^+) \cap h_m(L)$, если её граничные значения $\varphi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} \varphi(z)$ имеют в окрестности m точек $t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_m} \in L$ интегрируемые особенности, а в остальных точках ограничены.

Определение 2. Будем говорить, что метааналитическая функция $F(z)$ вида (3) (или (4)) принадлежит классу $M_2(T^+) \cap h_{|m|}(L)$, если в

представлении (3) (или (4)) аналитические компоненты $\varphi_j(z) \in A(T^+) \cap h_{m_j}(L)$ ($j = 0, 1$), где $|m| = m_0 + m_1$.

Рассмотрим следующую краевую задачу: *требуется найти все метааналитические в круге T^+ функции $F(z)$ класса $M_2(T^+) \cap h_{|m|}(L)$, удовлетворяющие на L следующим условиям:*

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)}F^+(t)\} = q_0(t), \quad (5)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{h_1(t)}\left(\frac{\partial F^+(t)}{\partial t} - \lambda F^+(t)\right)\right\} = q_1(t), \quad (6)$$

где λ – какой-нибудь корень характеристического уравнения $\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0$; $h_0(t) = a_0(t) + ib_0(t)$ и $h_1(t) = a_1(t) + ib_1(t)$ – заданные на L функции класса $H_*^\alpha(L)$, т.е. $h_0(t)$ и $h_1(t)$ удовлетворяют условию Гельдера соответственно на дугах $[\gamma_{k,0}, \gamma_{k+1,0}]$ и $[\gamma_{k,1}, \gamma_{k+1,1}]$ окружности L и имеют разрывы 1-го рода в точках $t_{k,j} = e^{i\gamma_{k,j}}$ ($j = 0, 1$; $k = \overline{1, n_j}$), причем $|\lambda_j(e^{i\gamma})| \neq 0$, $\gamma \in [0, 2\pi]$, а $q_0(t)$ и $q_1(t)$ – заданные на L функции класса $H_*^\alpha(L)$, которые не имеют точек разрыва, отличных от точек разрыва функций $h_0(t)$ и $h_1(t)$ соответственно.

В дальнейшем сформулированную задачу будем называть модельной кусочно-непрерывной краевой задачей типа задачи Гильберта для метааналитических функций в круге или, короче, задачей $\Gamma_{2,M}$, а соответствующую однородную задачу ($q_k(t) \equiv 0$, $k = 0, 1$) – задачей $\Gamma_{2,M}^0$.

Отметим, что в частном случае, когда $\lambda = 0$, задача $\Gamma_{2,M}$ впервые была поставлена в работе В.И. Жегалова [3]. В непрерывной постановке (т.е. когда $h_k(t)$ и $q_k(t)$ ($k = 0, 1$) – заданные на L функции, непрерывные в смысле Гельдера) задача $\Gamma_{2,M}$ впервые была исследована в работе [4] (см. также [5]). Основной целью настоящего сообщения является разработка общего метода решения задачи $\Gamma_{2,M}$ в классах метааналитических функций в кусочно-непрерывном случае.

2. Метод решения задачи $\Gamma_{2,M}$ в классе метааналитических функций первого типа. Будем искать решения задачи $\Gamma_{2,M}$ в виде (3). Ясно, что в данном случае в краевом условии (6) нужно положить $\lambda = \lambda_0$.

Так как справедливо соотношение

$$\frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} - \lambda_0 F^+(z) = \varphi_1^+(z) e^{\lambda_0 \bar{z}}, \quad z \in T^+,$$

то краевые условия (5) и (6) с учетом (3) можно переписать соответственно в виде

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)} \cdot e^{\lambda_0 \bar{t}} [\varphi_0^+(t) + \bar{t} \varphi_1^+(t)]\} = q_0(t), \quad t \in L, \quad (7)$$

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_1(t)} \cdot e^{\lambda_0 \bar{t}} \cdot \varphi_1^+(t)\} = q_1(t), \quad t \in L. \quad (8)$$

Нетрудно заметить, что равенство (8) представляет собой краевое условие известной задачи Гильберта относительно аналитической функции $\varphi_1^+(z)$ в круге T^+ в кусочно-непрерывной постановке (см., например, [6, с. 40] или [7, с. 466]).

Далее, решая задачу Гильберта (8), например, методом, предложенным в [6], находим (в случае разрешимости задачи (8)) аналитическую функцию $\varphi_1^+(z)$ класса $A(T^+) \cap h_{m_1}(L)$. Наконец, подставив в левую часть равенства (7) вместо $\varphi_1^+(t)$ граничные значения найденной аналитической функции $\varphi_1^+(z)$, получим

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)} \cdot \varphi_0^+(t)\} = Q_0(t), \quad t \in L, \quad (9)$$

где

$$Q_0(t) = q_0(t) - \operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)} \cdot \varphi_1^+(t)\}, \quad t \in L. \quad (10)$$

Но равенство (9) есть краевое условие задачи Гильберта относительно неизвестной аналитической в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\varphi_0^+(z)$ в кусочно-непрерывной постановке.

Теперь, решая задачу Гильберта (9), например, методом, предложенным в [6], находим (в случае её разрешимости) аналитическую функцию $\varphi_0^+(z)$ класса $A(T^+) \cap h_{m_0}(L)$.

Таким образом, в случае разрешимости обеих краевых задач Гильберта (8) и (9), решение исходной краевой задачи $\Gamma_{M,2}$ получаем по формуле (3), где $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_0^+(z)$ – решения задач Гильберта (8) и (9) соответственно.

Приведенные выше рассуждения устанавливают справедливость следующего результата.

Теорема 1. *Решение краевой задачи $\Gamma_{M,2}$ в классах $M_2(T^+) \cap h_{|m|}(L)$ бианалитических функций сводится к последовательному решению двух скалярных задач Гильберта (8) и (9) относительно неизвестных аналитических функций $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ соответственно. Для разрешимости задачи $\Gamma_{M,2}$ необходимо и достаточно, чтобы были одновременно разрешимы задачи Гильберта (8) и (9).*

3. О решения задачи $\Gamma_{2,M}$ в классе метааналитических функций второго типа. В данном случае будем искать решения задачи $\Gamma_{2,M}$ в виде (4). Тогда, полагая в краевом условии (6), например, $\lambda = \lambda_1$, и учитывая, что

$$\frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\varphi_0^+(z)e^{\lambda_1 \bar{z}} + \varphi_1^+(z)e^{\lambda_2 \bar{z}}] e^{\lambda_0 \bar{z}} = \lambda_1 \varphi_0^+(z)e^{\lambda_1 \bar{z}} + \lambda_2 \varphi_1^+(z)e^{\lambda_2 \bar{z}}, \quad (11)$$

краевые условия (5) и (6) можно переписать соответственно в виде

$$\operatorname{Re} \{ \overline{h_0(t)} [\varphi_0^+(t)e^{\lambda_1 \bar{t}} + \bar{t} \varphi_1^+(t)e^{\lambda_2 \bar{t}}] \} = q_0(t), \quad (12)$$

$$\operatorname{Re} \{ \overline{h_1(t)} (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_2 \bar{t}} \varphi_1^+(t) \} = q_1(t). \quad (13)$$

Далее, рассуждая точно так же, как и в предыдущем пункте, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Решение задачи $\Gamma_{2,M}$ в классе метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению относительно аналитических функций $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_0^+(z)$ соответственно следующих двух задач Гильберта: (13) и*

$$\operatorname{Re} \{ \overline{h_0(t)} \varphi_0^+(t) e^{\lambda_1 \bar{t}} \} = q_{20}(t), \quad (14)$$

где

$$q_{20}(t) = q_0(t) - \operatorname{Re} \{ \overline{h_0(t)} [\bar{t} \varphi_1^+(t)] e^{\lambda_2 \bar{t}} \}.$$

При этом задача $\Gamma_{2,M}$ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы задачи краевые Гильберта (13) и (14).

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
2. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ / Сер. Совр. пробл. матем. Фунд. напр Т.85.-М.:ВИНИТИ, 1991. С. 187–246.
3. Жегалов В.И. О задачах с производными в краевых условиях // Труды Семинара по краевым задачам. Казанск. ун-т. 1973. Вып 10. С. 38–52.
4. Расулов К.М., Шитиков Д.А. О краевой задаче типа Гильберта для метааналитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. Вып. 12. С. 238–241.
5. Осипян К.В., Расулов К.М. Об одной модельной краевой задаче типа задачи Гильберта в классах метааналитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 170–175.
6. Монахов В.Г. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 420 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ $|\sin x|$ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ФЕЙЕРА

Е.А. РОВБА¹, Н.Ю. КОЗЛОВСКАЯ²,
Ю.М. ВУВУНИКЯН

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
Гродно (Республика Беларусь)
e-mail: ¹rovba.ea@gmail.com, ²Kozlowskaya_Natalya@tut.by

УДК 513.51

Ключевые слова: *рациональные операторы Фейера, рациональная аппроксимация.*

В данной работе исследуются приближения функции $|\sin x|$ с помощью рациональных операторов Фейера. Получены некоторые оценки для таких приближений.

Рациональные приближения функции $|\sin x|$ изучались в работах [1; 2]. В этих работах показано, что равномерное приближение функции $|\sin x|$ частичными суммами рациональных рядов Фурье существенно лучше в смысле порядка, чем полиномиальное.

Пусть $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, 2n$ – действительные числа, которые удовлетворяют следующим условиям: $\alpha_{2n-k+1} = -\alpha_k, 0 \leq \alpha_k < 1, k = 1, \dots, n$.

$$\text{Обозначим } \lambda_{2n}(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - \alpha_k^4}{(1 + \alpha_k^2)^2 - 4\alpha_k^2 \cos^2 u}.$$

Для произвольной функции $f \in C_{2\pi}$ определим оператор Фейера

$$\Phi_{2n}(x, f) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_{2n}^2(t, x) dt}{\int_{-\pi}^{\pi} D_{2n}^2(t, x) dt}, \text{ где } D_{2n}(t, x) = \frac{\sin \int_x^t \left(\frac{1}{2} + \lambda_{2n}(u) \right) du}{\sin \frac{x-t}{2}}.$$

Введем обозначение $\varepsilon_{2n}(\alpha, x) = |\sin x| - \Phi_{2n}(x, |\sin x|), x \in \square$.

Теорема 1. *Для приближения функции $|\sin x|$ рациональными функциями Фейера справедливо представление*

$$\varepsilon_{2n}(\alpha, x) = \frac{2}{\pi \lambda_{2n}(x)} \cdot \int_{-1}^1 \left[\frac{(1 - \xi^2) \chi_{2n}(\xi)}{(\xi^2 - 2\xi \cos x + 1)^2} \cdot \left((\xi^2 \cos x - 2\xi + \cos x) \cos 2 \int_0^x \lambda_{2n}(u) du - \sin x (1 - \xi^2) \sin 2 \int_0^x \lambda_{2n}(u) du \right) - \frac{(1 - \xi^2)(\xi^2 \cos x - 2\xi + \cos x)}{\xi(\xi^2 - 2\xi \cos x + 1)^2} \right] d\xi,$$

где $\chi_{2n}(\xi) = \prod_{k=1}^{2n} \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \alpha_k \xi}$ – произведение Бляшке порядка $2n$.

Теорема 2. Пусть заданы числа $\alpha_k, \alpha_k \in [0, 1), k = 1, 2, \dots$, такие, что ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|)$ расходится. Тогда справедливо соотношение

$$\varepsilon_{2n}(\alpha, x) = \frac{4}{\pi \lambda_{2n}(x)} \left(1 + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \right) + o \left(\frac{1}{\lambda_{2n}(x)} \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

Заметим, что условие, которое накладывается на ряд, является необходимым и достаточным условием полноты соответствующей системы рациональных функций в пространстве C .

Теорема 3. Если $x=0$ или $x=\pi$, то выполняются следующие неравенства

$$\frac{4 \ln \lambda_{2n} \left(\frac{\pi}{2} \right)}{\pi \lambda_{2n}(0)} < \varepsilon_{2n}(\alpha, x) < \frac{4(1 + \ln(\pi \lambda_{2n}(0)))}{\lambda_{2n}(0)}.$$

Литература

1. Ровба Е.А. О приближении функции $|\sin x|$ рациональными рядами Фурье // Математические заметки. 1989. Т. 46. С. 52–59.
2. Микулич Е.Г. Точные оценки равномерных приближений функции $|\sin x|$ частными суммами рядов Фурье по рациональным функциям // Вестник БГУ. Серия 1. 2011. № 1. С. 84–90.

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

А.И. РУБИНШТЕЙН

МФ МГТУ им. Н. Э. Баумана и НИЯУ МИФИ, г. Москва
e-mail: rubinshtein_aleksandr@mail.ru

УДК 521.135

Ключевые слова: задача трех тел, законы Ньютона, закон Всемирного тяготения, законы Кеплера.

Приведено элементарное (неустойчивое) решение ограниченной плоской круговой задачи трех тел.

Задача двух тел решается законом Всемирного тяготения Ньютона (1687 г.)

$$\vec{F} = k m_1 m_2 \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}.$$

Здесь m_1, m_2 – точечные массы, \vec{R} – вектор, соединяющий данные массы, а k – постоянная Всемирного тяготения.

Задача трех тел, любые два из которых взаимодействуют по закону Всемирного тяготения, считается принципиально неразрешимой: решение требует нахождения положений и скоростей всех трех масс в любой сколь угодно большой момент времени. Невозможность получить решение в алгебраических функциях в общем случае показал Брунс (1887 г.), затем Пуанкаре показал, что решение невозможно и в терминах однозначных аналитических функций (1889 г.). Формальное решение предложил финский математик К. Зундман (1912 г.), но ряды по степеням специально введенной им функции столь медленно сходятся, что даже с использованием современных компьютеров указать ответ на достаточно длительный период времени не представляется возможным.

Вместе с тем еще в 1772 году Ж. Лагранж указал на устойчивое решение *ограниченной* (при $m_1 \gg m_2 \gg m_3$) *плоской круговой* (движение по окружностям) задачи трех тел, когда массы (планеты) вращаются по законам Кеплера вокруг общего центра масс, находясь в вершинах равностороннего треугольника со стороной, изменяющейся, вообще говоря, во времени. Несколько ранее (в 1767 году) Л. Эйлер указал решение задачи трех тел для конфигурации, расположенной на прямой. Но такое движение неустойчиво – конфигурация распадается при изменении параметров.

В 1907 году в обсерватории Гейдельберга был обнаружен астероид, затем еще восемь, вблизи орбиты Юпитера, впереди него на 60° . Их назвали «греками». Юпитер, «греки» и Солнце образуют равносторонний треугольник. Позже были найдены еще пять астероидов («тройяцы») на 60° позади Юпитера. Об этом см. [1].

Обсудим теперь другое решение ограниченной задачи трех тел. Пусть $m_1 \gg m_2 \gg m_3$ и m_3 столь мала, что ее влиянием на движение m_1, m_2 можно пренебречь. Пусть массы m_2, m_3 движутся по окружности радиуса R вокруг центра m_1 с постоянной угловой скоростью и периодом обращения T . Используя формулу абсолютного ускорения $|\vec{a}| = (2\pi/T)^2 R$, верную при равномерном круговом движении массы m_2 , получаем

$$m_2 \frac{4\pi^2 R}{T^2} = k \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

Пусть также расстояние между массами m_2 и m_3 (находящимися на одной окружности радиуса R с центром в m_1) постоянно и равно r .

Тогда масса m_3 относительно массы m_2 движется по окружности радиуса r , совершая полный оборот за тот же период T . Считаем, что r много меньше, чем R , и, следовательно, влияние массы m_1 на m_3 пренебрежимо мало по сравнению с влиянием более близкой массы m_2 . Но тогда

$$m_3 \frac{4\pi^2 r}{T^2} = k \frac{m_2 m_3}{r^2}.$$

Имеем

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{k m_1} = \frac{4\pi^2 r^3}{k m_2},$$

откуда

$$r = R \sqrt[3]{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Из этого соотношения следует неустойчивость возникающего движения.

В завершение приведем элементарный вывод закона Всемирного тяготения из второго закона Ньютона и законов Кеплера.

Рассмотрим круговое движение материальной точки массы m с постоянной угловой скоростью вокруг притягивающей массы $M \gg m$ (первый и второй законы Кеплера). Уравнения движения имеют вид

$$x = R \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad y = R \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

По второму закону Ньютона

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m \vec{v}) &= m \frac{d\vec{v}}{dt} = m R \frac{d}{dt} \left(-\frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t; \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t \right) = \\ &= -\frac{4\pi^2}{T^2} m \left(R \cos \frac{2\pi}{T} t; R \sin \frac{2\pi}{T} t \right) = -\frac{4\pi^2}{T^2} m \vec{R} = \vec{F}(t). \end{aligned}$$

Знак минус указывает, что сила приложена к массе m .

По третьему закону Кеплера $R^3/T^2 = C$ с постоянным значением C . Следовательно

$$\vec{F}(t) = -C 4\pi^2 m \frac{\vec{R}}{R^3}.$$

Значение C зависит только от M , т. е. $C = \lambda M$ с некоторым размерным коэффициентом λ . Поэтому

$$\vec{F} = - (4\pi^2 \lambda) m M \frac{\vec{R}}{R^3} = -k m M \frac{\vec{R}}{R^3},$$

где $(-\vec{R})$ – вектор, направленный из m в центр к массе M . Это и есть закон всемирного тяготения. В частности,

$$F = |\vec{F}(t)| = k \frac{mM}{R^2}.$$

Дополнительную информацию по затронутым темам см. в [2; 3].

Литература

1. Марков А.П. О задаче трех тел и ее точных решениях // Империя математики. Физико-математический журнал для юношества. – Ижевск: Удмуртский университет. 2000. № 1. С. 40–54.
2. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1964. 560 с.
3. Арнольд В.И. О классической теории возмущений в проблеме устойчивости планетных систем // ДАН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 487–490.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМОВ БЕРНУЛЛИ В НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.В. ТИХОНОВ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ, Ю.С. ЭЙДЕЛЬМАН
ВМК МГУ, НИЯУ МИФИ, г. Москва, Tel Aviv University, Israel
e-mail: ivtikh@mail.ru; shervb73@gmail.com; eideyu@post.tau.ac.il

УДК 517.518.82+517.986.7+517.983

Ключевые слова: *полиномы Бернулли, эволюционные уравнения, неклассические задачи математической физики.*

Показано, что полиномы Бернулли дают компактную запись решений в некоторых специальных задачах для эволюционных уравнений.

Полиномы Бернулли определим при помощи производящей функции

$$\frac{\lambda}{e^\lambda - 1} e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} \lambda^n \quad (1)$$

с комплексной переменной λ и вещественной переменной t . Разложение (1) сходится при $|\lambda| < 2\pi$. Коэффициенты $B_n(t)$ называются *полиномами Бернулли* и являются обычными полиномами степени n . Справедливо представление

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k t^{n-k}, \quad (2)$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты, а $B_k = B_k(0)$ суть *числа Бернулли*. Полиномы $B_n(t)$ обладают разнообразными свойствами (см. [1–5]). Особо выделим *свойство Анпеля*

$$\frac{d}{dt} \frac{B_n(t)}{n!} = \frac{B_{n-1}(t)}{(n-1)!} \quad (3)$$

и свойство нулевого среднего

$$\int_0^1 B_n(t) dt = 0. \quad (4)$$

Формула (2) действует при всех целых $n \geq 0$, а формулы (3), (4) – при $n \geq 1$. Несколько первых полиномов Бернулли имеют вид

$$\begin{aligned} B_0(t) &\equiv 1, & B_1(t) &= t - \frac{1}{2}, & B_2(t) &= t^2 - t + \frac{1}{6}, & B_3(t) &= t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t, \\ B_4(t) &= t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30}, & B_5(t) &= t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{6}t, & B_6(t) &= t^6 - 3t^5 + \frac{5}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Интересные факты, связанные с нулями полиномов Бернулли, см. в [6–8].

Обсудим сейчас новые приложения полиномов Бернулли, возникающие в математической физике.

В банаховом пространстве E рассмотрим нелокальную задачу для эволюционного уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^1 u(t) dt = \varphi. \quad (5)$$

Здесь A — линейный оператор в E с областью определения $D(A) \subset E$. Элемент φ задан в $D(A^\infty)$. Тогда ряд

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} A^n \varphi \quad (6)$$

на основании свойств (3), (4) формально удовлетворяет задаче (5).

Аналогично рассмотрим в E следующую обратную задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + g, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = \varphi, \quad (7)$$

с неизвестной функцией $u: [0, 1] \rightarrow E$ и неизвестным элементом $g \in E$. Тогда ряды

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}(t) - B_{n+1}}{(n+1)!} A^n \varphi, \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} A^n \varphi \quad (8)$$

формально удовлетворяют задаче (7). При проверке условия $u(1) = \varphi$ используется то, что $B_1(1) - B_1 = 1$ и $B_k(1) - B_k = 0$ при всех $k \geq 2$.

Возникает вопрос о том, когда формальные разложения (6), (8) сходятся по норме пространства E , определяя истинные решения для задач (5), (7) соответственно. Перечислим несколько типичных условий.

1. Оператор A линейный в E , элемент φ принадлежит $\text{Ker } A^m$ при некотором натуральном m . (В таком случае ряды (6), (8) перейдут в конечные суммы, удовлетворяющие задачам (5), (7) соответственно.)

2. Оператор A линейный замкнутый в E , элемент φ принадлежит $D(A^\infty)$, причем

$$\|A^n \varphi\| \leq M q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

с некоторыми константами $M > 0$ и $0 < q < 2\pi$. Условие (9) означает, что для оператора A элемент φ есть *целый вектор экспоненциального типа* $q < 2\pi$ (см. [9]).

3. Оператор A линейный ограниченный в E , причем

$$\|A\| < 2\pi. \quad (10)$$

Элемент φ – произвольный вектор из $E \equiv D(A^\infty)$.

4. Оператор A линейный ограниченный в E , причем его спектр попадает в открытый круг

$$|\lambda| < 2\pi. \quad (11)$$

Элемент φ – произвольный вектор из $E \equiv D(A^\infty)$.

При любом из перечисленных условий можно провести строгое обоснование формул (6), (8). Константа 2π , фигурирующая при формулировке требований (9) – (11), связана с радиусом сходимости ряда (1).

В частном случае конечномерного пространства E требование 4 означает, что все собственные значения матрицы A должны попадать в открытый круг (11). Несмотря на элементарность, этот «конечномерный» случай представляет особый интерес в приложениях.

Для иллюстрации дадим также простые «бесконечномерные» примеры. Рассмотрим нелокальную задачу для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad \int_0^1 u(x, t) dt = \varphi(x), \quad (12)$$

в полосе $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1]$. Если $\varphi(x)$ – полином переменной x некоторой степени N , то, согласно пункту 1 выше, решение нелокальной задачи (12) представимо в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{[N/2]} \frac{B_n(t)}{n!} \varphi^{(2n)}(x). \quad (13)$$

Например, для $\varphi(x) = x^5$ получаем

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^2 \frac{B_n(t)}{n!} \varphi^{(2n)}(x) = x^5 + 10(2t-1)x^3 + 10(6t^2 - 6t + 1)x$$

с учетом явного вида полиномов $B_0(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$. Нахождение подобных ответов на базе прежней теории [10] представляется весьма проблематичным.

Аналогично для обратной задачи

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + g(x), \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x^5, \quad (14)$$

исходя из представлений (8), получаем решение

$$u(x, t) = tx^5 + 10(t^2 - t)x^3 + 10(2t^3 - 3t^2 + t)x, \quad g(x) = x^5 - 10x^3 + 10x.$$

После записи ответа проверка соотношений (14) не представляет труда.

Предлагаемая методика позволяет решать подобные задачи теплопроводности в полосе $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1]$ для любой функции $\varphi(x)$, являющейся сужением на вещественную ось целой функции $\varphi(z)$ экспоненциального типа, меньшего, чем 2π . Ответы запишутся через сходящиеся ряды по системе полиномов Бернулли. Для квазиполиномов $\varphi(x)$ возникающие ряды допускают суммирование.

Отметим также, что формулы типа (6), (8) дают основу построения алгоритмов быстрых матричных вычислений в «неклассических» задачах для систем ОДУ. Это направление стал недавно развивать третий из авторов (Ю. С. Эйдельман) в совместных исследованиях с Паолой Бойто и Люкой Джамини (P. Voito, L. Gemignani).

Литература

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: ГИФМЛ, 1959.
2. Прасолов В.В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2014.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965.
4. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
5. Лихин В.В. Теория функций и чисел Бернулли и ее развитие в трудах отечественных математиков // Историко-математические исследования. Вып. XII. М.: Наука, 1967. С. 59–134.
6. Inkeri K. The real roots of Bernoulli polynomials // Annales Universitatis Turkuensis (Turku). 1959. Ser A1, No. 37. P. 3–19.
7. Efimov A.I. The asymptotics for the number of real roots of Bernoulli polynomials // Forum Mathematicum. 2008. Vol. 20, No. 2. P. 387–393.
8. Цветкович Д.Г. Численное подтверждение результатов Инкери о вещественных нулях полиномов Бернулли // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В. П. Дьяконова. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16. С. 48–51.
9. Радыно Я.В. Пространство векторов экспоненциального типа // Доклады АН БССР. 1983. Т. 27, № 9. С. 791–793.
10. Попов А.Ю., Тихонов И.В. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Математический сборник. 2005. Т. 196, № 9. С. 71–102.

О ПЕРИОДИЧНОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ НА ВСЕЙ ОСИ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

А.Б. ШАПУРОВ

Вильнюс (Литва). Центр информационных технологий просвещения
alxrs@ipc.lt

УДК517.54

Ключевые слова: *период, периодическая функция, сложная функция, правильная точка экстремума.*

В работе рассматривается вопрос об условиях периодичности сложной функции.

Зафиксируем произвольным образом действительное число T . Введем класс K функций, состоящий: 1) из всех непрерывных периодических функций; 2) из всех линейных функций $\lambda x + c$; из всех функций вида $g(x) = \lambda x + \varphi(x)$, где $\lambda \neq 0$ – постоянное, а $\varphi(x)$ – непрерывная на всей оси функция, имеющая период, равный целому кратному от T : λ .

Можно показать, что если функция $y = f(u)$ имеет период T и функция $u = g(x)$ принадлежит классу K , то и сложная функция $y = f(g(x))$ тоже является периодической. Возникает вопрос: может ли функция $y = f(g(x))$ оказаться периодической, если функция $y = f(u)$ имеет период T , а какая-нибудь непрерывная на всей оси функция $u = g(x)$ не принадлежит классу K ? Прежде чем сформулировать теорему, назовем точку u_0 правильной точкой экстремума для функции $y = f(u)$, если эта функция имеет в точке u_0 экстремум и существует положительное число δ такое, что функция $y = f(u)$ строго монотонна в интервалах $u_0 - \delta < u < u_0$ и $u_0 < u < u_0 + \delta$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если непрерывная на всей оси функция $y = f(u)$ имеет хотя бы одну правильную точку экстремума, то существует непрерывная на всей оси, не принадлежащая классу K функция $u = g(x)$ такая, что сложная функция $y = f(g(x))$ все равно будет периодической.*

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Н.А. ШЕРСТНЁВА

Смоленский государственный университет

УДК 517.518.36

Ключевые слова: *процесс ортогонализации; линейно независимая система функций; ортонормированная система функций.*

В статье получены формулы, выражающие элементы ортонормированной системы функций через элементы исходной линейно независимой системы функций, подвергшейся процессу ортогонализации.

Рассмотрим в евклидовом пространстве R линейно независимую систему функций $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$. Можно показать (см. [2]), что существует и притом единственная ортонормированная система функций $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$, составленная из линейных комбинаций данных элементов. Получим формулы, выражающие элементы ортонормированной системы функций через элементы линейно независимой системы функций, подвергшейся процессу ортогонализации.

Для этого построим сперва в R систему попарно ортогональных ненулевых элементов $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$, таких, что для любого номера n каждый из элементов $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ является линейной комбинацией элементов f_1, f_2, \dots, f_n , и наоборот, каждый из элементов f_1, f_2, \dots, f_n является линейной комбинацией элементов $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Система элементов $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ может быть последовательно определена с помощью соотношений (см. [1]):

$$\psi_1 = f_1, \quad \psi_n = \begin{vmatrix} (f_1, \psi_1) & (f_1, \psi_2) & \dots & (f_1, \psi_{n-1}) & f_1 \\ (f_2, \psi_1) & (f_2, \psi_2) & \dots & (f_2, \psi_{n-1}) & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_n, \psi_1) & (f_n, \psi_2) & \dots & (f_n, \psi_{n-1}) & f_n \end{vmatrix} \quad \text{при } n \geq 2.$$

Положив теперь для каждого номера n $\Phi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$, получим ортонормированную систему $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$. При этом:

$$1) \quad k=1, \quad \Phi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|} = \frac{f_1}{\|f_1\|}, \quad \Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} f_1 \quad (1).$$

$$2) \quad k \geq 2, \quad \Phi_k = \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|} = \frac{\psi_k}{\sqrt{(\psi_k, \psi_k)}},$$

$$\psi_k = \begin{vmatrix} (f_1, \psi_1) & (f_1, \psi_2) & \dots & (f_1, \psi_{k-1}) & f_1 \\ (f_2, \psi_1) & (f_2, \psi_2) & \dots & (f_2, \psi_{k-1}) & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, \psi_1) & (f_k, \psi_2) & \dots & (f_k, \psi_{k-1}) & f_k \end{vmatrix} = (\text{по } (*)) =$$

$$= \tilde{a}_{22}\tilde{a}_{33}\dots\tilde{a}_{k-1,k-1} \begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) & f_1 \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) & f_k \end{vmatrix}.$$

$$\Phi_k = \sqrt{\frac{\tilde{a}_{22}\tilde{a}_{33}\dots\tilde{a}_{k-1,k-1}}{\tilde{a}_{kk}}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) & f_1 \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) & f_k \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) & (f_2, f_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) & (f_k, f_k) \end{vmatrix}}}.$$

Найдем \tilde{a}_{kk} .

$$\psi_k = \tilde{a}_{k1}f_1 + \dots + \tilde{a}_{kk}f_k = \begin{vmatrix} (f_1, \psi_1) & (f_1, \psi_2) & \dots & (f_1, \psi_{k-1}) & f_1 \\ (f_2, \psi_1) & (f_2, \psi_2) & \dots & (f_2, \psi_{k-1}) & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, \psi_1) & (f_k, \psi_2) & \dots & (f_k, \psi_{k-1}) & f_k \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+k} \begin{vmatrix} (f_2, \psi_1) & (f_2, \psi_2) & \dots & (f_2, \psi_{k-1}) \\ (f_3, \psi_1) & (f_3, \psi_2) & \dots & (f_3, \psi_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, \psi_1) & (f_k, \psi_2) & \dots & (f_k, \psi_{k-1}) \end{vmatrix} f_1 + \dots +$$

$$+ (-1)^{k+k} \begin{vmatrix} (f_1, \psi_1) & (f_1, \psi_2) & \dots & (f_1, \psi_{k-1}) \\ (f_2, \psi_1) & (f_2, \psi_2) & \dots & (f_2, \psi_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k-1}, \psi_1) & (f_{k-1}, \psi_2) & \dots & (f_{k-1}, \psi_{k-1}) \end{vmatrix} f_k.$$

$$\tilde{a}_{kk} = (-1)^{k+k} \begin{vmatrix} (f_1, \psi_1) & (f_1, \psi_2) & \dots & (f_1, \psi_{k-1}) \\ (f_2, \psi_1) & (f_2, \psi_2) & \dots & (f_2, \psi_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k-1}, \psi_1) & (f_{k-1}, \psi_2) & \dots & (f_{k-1}, \psi_{k-1}) \end{vmatrix} = (\text{по } (*)) =$$

$$= (-1)^{k+k} \tilde{a}_{22} \tilde{a}_{33} \dots \tilde{a}_{k-1, k-1} \begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k-1}, f_1) & (f_{k-1}, f_2) & \dots & (f_{k-1}, f_{k-1}) \end{vmatrix}.$$

Тогда $\sqrt{\frac{\tilde{a}_{22} \tilde{a}_{33} \dots \tilde{a}_{k-1, k-1}}{\tilde{a}_{kk}}} = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k-1}, f_1) & (f_{k-1}, f_2) & \dots & (f_{k-1}, f_{k-1}) \end{vmatrix}}}.$

Значит,

$$\Phi_k = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k-1}, f_1) & (f_{k-1}, f_2) & \dots & (f_{k-1}, f_{k-1}) \end{vmatrix}}} \times \frac{\begin{vmatrix} (f_1, f_1)(f_1, f_2) \dots (f_1, f_{k-1}) f_1 \\ (f_2, f_1)(f_2, f_2) \dots (f_2, f_{k-1}) f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1)(f_k, f_2) \dots (f_k, f_{k-1}) f_k \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1)(f_1, f_2) \dots (f_1, f_{k-1})(f_1, f_k) \\ (f_2, f_1)(f_2, f_2) \dots (f_2, f_{k-1})(f_2, f_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1)(f_k, f_2) \dots (f_k, f_{k-1})(f_k, f_k) \end{vmatrix}}} =$$

$$= (-1)^{1+k} \frac{\begin{vmatrix} (f_2, f_1)(f_2, f_2) \dots (f_2, f_{k-1}) \\ (f_3, f_1)(f_3, f_2) \dots (f_3, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1)(f_k, f_2) \dots (f_k, f_{k-1}) \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k-1}, f_1) & (f_{k-1}, f_2) & \dots & (f_{k-1}, f_{k-1}) \end{vmatrix}} \sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1)(f_1, f_2) \dots (f_1, f_{k-1})(f_1, f_k) \\ (f_2, f_1)(f_2, f_2) \dots (f_2, f_{k-1})(f_2, f_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1)(f_k, f_2) \dots (f_k, f_{k-1})(f_k, f_k) \end{vmatrix}}} \cdot f_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{2+k} \frac{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) \\ (f_3, f_1) & (f_3, f_2) & \dots & (f_3, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k-1}, f_1) & (f_{k-1}, f_2) & \dots & (f_{k-1}, f_{k-1}) \end{vmatrix}} \sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) & (f_2, f_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) & (f_k, f_k) \end{vmatrix}}} \cdot f_2 + \\
& + \dots + \\
& + (-1)^{s+k} \frac{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{s-1}, f_1) & (f_{s-1}, f_2) & \dots & (f_{s-1}, f_{k-1}) \\ (f_{s+1}, f_1) & (f_{s+1}, f_2) & \dots & (f_{s+1}, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k-1}, f_1) & (f_{k-1}, f_2) & \dots & (f_{k-1}, f_{k-1}) \end{vmatrix}} \sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) & (f_2, f_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) & (f_k, f_k) \end{vmatrix}}} \cdot f_s + \\
& + \dots + \\
& + (-1)^{k+k} \frac{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_{k-1}, f_1) & (f_{k-1}, f_2) & \dots & (f_{k-1}, f_{k-1}) \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) & (f_2, f_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) & (f_k, f_k) \end{vmatrix}}} \cdot f_k \quad (k \geq 2) \quad (2).
\end{aligned}$$

Итак, получили явное выражение элементов ортонормированной системы функций через элементы исходной линейно независимой системы функций (формулы (1) и (2)).

Замечание. Используя свойства определителей, можно доказать

справедливость формулы:

$$= \begin{vmatrix} (f_1, \psi_1) & (f_1, \psi_2) & \dots & (f_1, \psi_{k-1}) & f_1 \\ (f_2, \psi_1) & (f_2, \psi_2) & \dots & (f_2, \psi_{k-1}) & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, \psi_1) & (f_k, \psi_2) & \dots & (f_k, \psi_{k-1}) & f_k \end{vmatrix} =$$

$$= \tilde{a}_{22} \tilde{a}_{33} \dots \tilde{a}_{k-1, k-1} \begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{k-1}) & f_1 \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_{k-1}) & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \dots & (f_k, f_{k-1}) & f_k \end{vmatrix} (*).$$

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.И. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 2004.
2. Шерстнёва Н.А. Построение ортонормированной системы функций по данной линейно независимой системе функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 231–236.

ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБРАТНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОЙ КРАТНОСТИ

**Д.С. ШПАК,
Ю.М. ВУВУНИКЯН**

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
Гродно (Беларусь)
e-mail: d.s.shpak@grsu.by

УДК 517.98

Ключевые слова: *импульсная характеристика, эволюционный оператор второй кратности, асимптотически обратный эволюционный оператор.*

В работе приведен пример построения импульсной характеристики первого порядка асимптотически обратного эволюционного оператора второй кратности.

Пусть X_a – пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на всей числовой оси с носителем на $[a; +\infty)$. Рассмотрим объединение пространств X_a ($a \in R$). Обозначим данное пространство X .

Отметим, что под эволюционным оператором второй кратности понимают оператор $A: X^2 \rightarrow X^2$, такой, что если носитель вектор-функции $(x(t), y(t))$ ($x, y \in X, t \in R$) содержится на $[t_0, +\infty)^2$, то и носитель вектор-функции $A(x, y)$ содержится на $[t_0, +\infty)^2$, где $t_0 \in R$ (см. [1]).

Приведем пример построения первой компоненты асимптотически обратного эволюционного оператора [2] к эволюционному оператору второй кратности, описывающему систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим частный случай системы нелинейных дифференциальных уравнений, представленной в [1]

$$\begin{cases} x' - y = 0, \\ y' - y - 2x + x^2 = \theta, \end{cases} \text{ где } (x, y) \in X^2, \theta - \text{функция Хевисайда.} \quad (1)$$

Системе (1) соответствует эволюционный оператор второй кратности A с импульсными характеристиками

$$a_1 = \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - \delta \end{pmatrix} \text{ и } a_2 = \begin{pmatrix} \delta^{\otimes 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [2]$$

Для нахождения первой компоненты асимптотически обратного эволюционного оператора для системы (1) применим алгоритм, указанный в [1], т.е. используем равенство $A_1 \circ B_1 = E$, где

$$A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b_1 * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{10}^1 & b_{01}^1 \\ b_{10}^2 & b_{01}^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad \text{Таким образом, справедливо равенство}$$

$$\begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{10}^1 & b_{01}^1 \\ b_{10}^2 & b_{01}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \text{ а после применения преобразования}$$

$$\text{Лапласа имеет место равенство } \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{b}_{10}^1 & \tilde{b}_{01}^1 \\ \tilde{b}_{10}^2 & \tilde{b}_{01}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (см. [1]).}$$

Составим систему, соответствующую последнему равенству,

$$\begin{cases} \lambda \tilde{b}_{10}^1 - \tilde{b}_{10}^2 = 1, \\ \lambda \tilde{b}_{01}^1 - \tilde{b}_{01}^2 = 0, \\ -2\tilde{b}_{10}^1 + (\lambda - 1)\tilde{b}_{10}^2 = 0, \\ -2\tilde{b}_{01}^1 + (\lambda - 1)\tilde{b}_{01}^2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \tilde{b}_{10}^1 - \tilde{b}_{10}^2 = 1, \\ -2\tilde{b}_{10}^1 + (\lambda - 1)\tilde{b}_{10}^2 = 0; \\ \lambda \tilde{b}_{01}^1 - \tilde{b}_{01}^2 = 0, \\ -2\tilde{b}_{01}^1 + (\lambda - 1)\tilde{b}_{01}^2 = 1. \end{cases}$$

Решив систему и воспользовавшись таблицей преобразований Лапласа, получили

$$\begin{cases} \tilde{b}_{10}^1 = \frac{\lambda - 1}{(\lambda + 1)(\lambda - 2)}; \tilde{b}_{10}^2 = \frac{2}{(\lambda + 1)(\lambda - 2)}; \\ \tilde{b}_{01}^1 = \frac{1}{(\lambda + 1)(\lambda - 2)}; \tilde{b}_{01}^2 = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)(\lambda - 2)}, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} b_{10}^1 = \frac{1}{3}e^{-t}(e^{3t} + 2); b_{10}^2 = \frac{2}{3}e^{-t}(e^{3t} - 1); \\ b_{01}^1 = \frac{1}{3}e^{-t}(e^{3t} - 1); b_{01}^2 = \frac{1}{3}e^{-t}(3e^{3t} + 1). \end{cases}$$

В итоге, первая компонента B_1 асимптотически обратного эволюционного оператора второй кратности для системы (1) имеет вид

$$B_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t}(e^{3t} + 2) & \frac{1}{3}e^{-t}(e^{3t} - 1) \\ \frac{2}{3}e^{-t}(e^{3t} - 1) & \frac{1}{3}e^{-t}(3e^{3t} + 1) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Шпак Д.С., Трифонова И.В. Метод применения нелинейных эволюционных операторов для решения динамических систем // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 3 (28). С. 66–70.
2. Вувуньякн Ю.М., Шпак Д.С. Об операторных компонентах асимптотически обратного эволюционного оператора, построенного для системы нелинейных дифференциальных уравнений // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2017. Т. 7, № 1. С. 62–68.

СЕКЦИЯ 4

Новые информационные и педагогические технологии в образовании

ОБ ОПЫТЕ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И МЕТОДИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ СТУДЕНТОВ – БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Н.В. АССОНОВА

Смоленский государственный университет
e-mail: assonova@mail.ru

УДК 378.147

Ключевые слова: *математическая и методическая компетентности, студент бакалавриата, начальная школа, математический конкурс «Кенгуру».*

В докладе рассматривается опыт формирования математической и методической компетентностей студентов бакалавриата – будущих учителей начальной школы на примере их участия в конкурсе «Кенгуру – школе».

Компетентностный подход, закреплённый в соответствующих образовательных стандартах, позволяет говорить о «математической компетентности» и «методической компетентности» учителя начальных классов. Можно считать, что их составляющими являются следующие:

1) владение теоретическими основами начального курса математики, включающими элементы таких разделов математики, как теория множеств, математическая логика, алгебра, теория чисел, теория величин, геометрия и др.;

2) умение выявлять связи между математическими объектами и методикой их преподавания в начальной школе;

3) умение преподносить математические знания детям.

Формирование у студентов этих составляющих является непростой задачей. В настоящей статье рассказывается об опыте работы, значительно способствовавшей формированию математической и методической компетентностей будущих педагогов начальной школы. Таким опытом стало участие студентов бакалавриата в конкурсе «Кенгуру – школе».

Австралийский математик и педагог Питер Холлоран (1931–1994) в начале 80-х годов XX века предложил внести в традиционное проведение математической школьной олимпиады следующие

изменения: 1) задачи делятся на три категории сложности, причем простые задачи должны были быть решаемы всеми школьниками; 2) задания имеют форму теста с выбором ответов, что удобно для компьютерной обработки большого количества результатов; 3) задачи имеют занимательный характер. Новая форма олимпиады оказалась удачной. В середине 80-х годов в ней участвовало до полумиллиона австралийских школьников.

В 1991 году группой французских математиков было проведено аналогичное соревнование во Франции. Там оно получило название «Кенгуру» в честь австралийских коллег. За участие в конкурсе стала взиматься небольшая плата. Это сделало его независимым от спонсоров и помогло обеспечить значительную часть школьников призами.

Число французских школьников, участвующих в соревновании, быстро выросло до 600 тысяч [1].

В нашей стране конкурс «Кенгуру» впервые был проведён в 1994 году. С тех пор в нем приняли участие миллионы школьников. Задачи конкурса закрепились в рабочих материалах многих учителей. Есть школы, где это мероприятие превратилось в заметную и яркую деталь школьной жизни, перестав быть разовым мероприятием.

В связи с этим в России проводятся конкурсы для учителей: «Кенгуру-прогноз» и «Кенгуру – школе». Участники первого непростого конкурса предугадывают, какие ответы будут давать ученики разных возрастных категорий на вопросы «Кенгуру», какие из них окажутся самыми трудными. Участникам второго конкурса предлагается представить разработку урока или блока уроков по школьной программе, или описание работы кружка (элективного курса), или разового мероприятия развлекательного характера (школьного праздника, викторины или математической игры) соответственно в одной из трёх номинаций: 1. «„Кенгуру” на уроке», 2. «„Кенгуру” после уроков», 3. «„Кенгуру” на празднике».

Студенты 4 курса психолого-педагогического факультета Смоленского государственного университета профиля «Начальное образование и информатика» приняли в 2016 году участие в конкурсе «Кенгуру – школе». В номинации «„Кенгуру” после уроков» Иванова Ольга представила описание работы кружка «Математический калейдоскоп» для 3 класса, а Ивашкина Анна – математического кружка по подготовке к международному математическому конкурсу «Кенгуру» для 2 класса соответственно. Описание работы кружка содержит целеполагающую и методическую составляющие, календарно-тематическое планирование, а также конспект одного из занятий. Для 3 класса был представлен конспект занятия кружка на тему «Занимательные задачи по геометрии. Подготовка к международному математическому конкурсу „Кенгуру”», а для 2 класса – конспект

занятия математического кружка на тему: «Решение олимпиадных задач, связанных с нумерацией». Задания для конспектов отобраны из вариантов международного математического конкурса «Кенгуру» разных лет. К подробным конспектам приложены компьютерные презентации, облегчающие работу над задачами. Презентации содержат условия задач, ответы к ним (выводимые на слайды не одновременно с условиями), слайд для проведения «физминутки».

При выполнении работы студентки проявили заинтересованность и самостоятельность, что в значительной мере обуславливается занимательностью материалов конкурсов «Кенгуру». Увлечённые учителя, несомненно, смогут заинтересовать математикой своих учеников, а это – залог успеха в освоении непростого предмета.

Российский оргкомитет международного математического конкурса «Кенгуру» отметил работы конкурсанток дипломами второй и третьей степени. Материалы работ доступны для скачивания на Российской странице международного математического конкурса «Кенгуру» [2].

Литература

1. Международная статистика конкурса «Кенгуру» // URL: <http://www.aksf.org/statistics.xhtml#FR> (дата обращения: 09.03.2017).
2. Итоги конкурса для учителей «Кенгуру – школе» // URL: <https://mathkang.ru/page/school-contest> (дата обращения: 09.03.2017).

ГЕОМЕТРИЯ ТЕТРАЭДРА

Н.Н. БОГДАНОВА

Смоленский государственный университет
e-mail: nadingioia@yandex.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: *тетраэдр, длины рёбер, площади граней, объём, площадь поверхности тетраэдра, центр и радиус вписанного и описанного шара, система Mathematica.*

В сообщении рассматриваются возможности применения системы Mathematica для решения ряда задач аналитической геометрии, в частности связанные с тетраэдром.

Система Mathematica существенно упрощает решение геометрических задач на вычисление. Рассмотрим решение некоторых задач такого рода, связанных с тетраэдром.

Пусть тетраэдр задан координатами своих вершин: $A_1(1; 7; 4)$, $A_2(5; 4; -3)$, $A_3(-6; 3; 1)$, $A_4(3; 9; 5)$. Требуется найти: а) длины рёбер

тетраэдра; б) углы при вершине A_1 ; в) площади граней тетраэдра; г) объём тетраэдра, координаты центра и радиус описанного шара; д) площадь поверхности тетраэдра, координаты центра и радиус вписанного шара.

```
(*Введём координаты вершин тетраэдра*)
A1={1, 7, 4}; A2={5, 4, -3}; A3={-6, 3, 1}; A4={3, 9, 5};
Print["Длины рёбер тетраэдра
A1A2, A1A3, A1A4, A2A3, A2A4, A3A4 равны ", Norm[A1-
A2], "; ", Norm[A1-A3], "; ", Norm[A1-A4], "; ", Norm[A2-
A3], "; ", Norm[A2-A4], "; ", Norm[A3-A4], "
соответственно."]
Длины рёбер тетраэдра A1A2, A1A3, A1A4, A2A3, A2A4, A3A4
равны  $\sqrt{74}$ ; 3;  $\sqrt{138}$ ;  $\sqrt{93}$ ;  $\sqrt{133}$  соответственно.
Print[" $\angle A_2A_1A_3 =$ ", VectorAngle[A1-A2, A1-A3], ";
 $\angle A_2A_1A_4 =$ ", VectorAngle[A1-A2, A1-A4], ";  $\angle A_3A_1A_4$ 
=", VectorAngle[A1-A3, A1-A4]]
 $\angle A_2A_1A_3 = \text{ArcCos}\left[\frac{-5}{74}\right]$ ;  $\angle A_2A_1A_4 = \text{ArcCos}\left[\frac{-5}{3\sqrt{74}}\right]$ ;
 $\angle A_3A_1A_4 = \text{ArcCos}\left[\frac{25}{3\sqrt{74}}\right]$ 
(*Найдём площади граней тетраэдра*)
S1=RegionMeasure[Triangle[{A1, A2, A3}]]
 $\frac{\sqrt{5451}}{2}$ 
S2=RegionMeasure[Triangle[{A1, A3, A4}]]
 $\frac{\sqrt{641}}{2}$ 
S3=RegionMeasure[Triangle[{A2, A3, A4}]]
 $\frac{\sqrt{41}}{2}$ 
S4=RegionMeasure[Triangle[{A1, A2, A4}]]
 $\frac{\sqrt{10433}}{2}$ 
(*Найдём объём тетраэдра*)
R=Tetrahedron[{A1, A2, A3, A4}]; V=RegionMeasure[R]
 $\frac{47}{6}$ 
(*Найдём координаты центра описанного шара*)
O1=RegionCentroid[R]
 $\left\{\frac{3}{4}, \frac{23}{4}, \frac{7}{4}\right\}$ 
```

```

(*Найдём радиус описанного шара*)
Norm[O1-A1]

$$\frac{\sqrt{107}}{4}$$

(*Найдём площадь поверхности тетраэдра*)
G=RegionBoundary[R];S=RegionMeasure[G]

$$\frac{\sqrt{41}+\sqrt{641}+\sqrt{5451}+\sqrt{10433}}{2}$$

(*Найдём центр вписанного шара*)
O2=RegionCentroid[G]//N
{0.673009,5.28971,1.07534}
(*Найдём радиус вписанного шара*)
RegionDistance[G,O2]//N
0.0779497

```

Литература

1. Корбунов А.И., Дорогобед А.Н. Практическое руководство по изучению пакета Wolfram Mathematica (на примере решения некорректных задач). Ухта: УГТУ, 2015.

РЕАЛИЗАЦИЯ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Н.В. БРОВКА¹, Ф.Н. БРИШТАНЬ²

Механико-математический факультет БГУ, г. Минск
e-mail: ¹n_br@mail.ru, ²felisiriomotensis11@gmail.com

УДК 37.013.32

Ключевые слова: язык программирования Java, прием смысловых опор, математический анализ,

В докладе рассматриваются прием смысловых опор и наглядное моделирование (при использовании Java технологий), использующиеся для упрощения подачи материала в курсе математического анализа.

Международное измерение качества образования выдвигает требование сохранения в системе его содержания основных положений фундаментальных классических наук, к которым относится и курс математического анализа, играющий большую роль в профессиональной подготовке будущего учителя математики в университете. основополагающим фактором управления качеством подготовки

учителя или преподавателя математики в университете должно стать продуманное проектирование содержания обучения.

Математический анализ в программе вузовской подготовки занимает значительное место, поскольку его знание имеет мировоззренческую значимость. Это связано с тем, что математический аппарат и символичный язык этого учебного курса касаются в первую очередь исследования качественных характеристик изучаемых объектов – непрерывности, ограниченности, гладкости, сходимости и др. Установление этих свойств играет важную роль в исследовании свойств математических объектов и обосновании математических утверждений.

При чтении лекций учебный материал подается последовательно, формулировки определений сходимости, непрерывности, равномерной непрерывности и ряда других свойств повторяются в курсе математического анализа применительно к различным математическим объектам частично на первом, частично – на втором курсе обучения. Например, формулировки критерия О. Коши, сходимости и равномерной сходимости приводятся в курсе математического анализа шесть и более раз для различных математических объектов – числовых последовательностей, функций одной и многих переменных, числовых и функциональных рядов и несобственных интегралов, собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра. На основе использования приема смысловых опор можно установить общую структуру и выявить различия в формулировках одного и того же свойства для разных объектов. Этот прием состоит в разделении символической записи формулировки на части, каждая из которых несет свою смысловую нагрузку, а последовательность выстраивания этих частей отражает семантические связи определения [1].

В частности, в определении понятия «сходимость» нами выделены четыре фрагмента, которые однотипны, и с точки зрения их семантики, остаются неизменными и для функций, и для рядов, и для интегралов:

- первый – можно взять любое положительное число ε , с помощью которого будет производиться оценка динамики поведения математического объекта (функции, ряда, интеграла);
- второй – существование величины, которая определяет диапазон выбора переменной (или параметра);
- третий – конкретизация множества значений переменной или параметра (окрестности, области), для которых рассматриваемое далее условие должно выполняться;
- четвертый – ε -оценка рассматриваемых математических объектов.

Реализация этой идеи осуществляется средствами языка Java, возможности которого позволяют однотипные фрагменты в

формулировках сходимости для разных математических объектов выделить одним и тем же цветом. Различия в формулировках понятия «сходимость», связанные с переходом от одного объекта к другому (от последовательности – к функции или ряду), визуально отражаются на мониторе, не нарушая структуру формулировки и сохраняя цветовую палитру ее фрагментов. Кроме того, язык Java позволяет реализовать текстовые пояснения к каждой из частей формулировки, что весьма важно для повышения продуктивности усвоения материала. Визуализация при помощи Java технологий различий между формулировками поточечной и равномерной сходимости позволяет подчеркнуть, что существенно важным является порядок следования выделенных фрагментов.

Целесообразность выделения структурных частей определения и выявления их смысла для студентов математических специальностей способствует решению двуединой задачи: в отношении формирования академических компетенций – позволяет обеспечить установление внутридисциплинарных связей, реализовать рассредоточенное во времени повторение пройденного и установить преемственные связи известного материала с новым; в отношении формирования профессиональных компетенций – иллюстрирует важность осознанного обретения математических знаний и умений использовать компьютерные технологии для создания средств обучения, опирающихся на специфику математики как науки и учебного предмета [1].

Литература

1. Бровка Н.В. Интеграция теории и практики обучения математике как средство повышения качества подготовки студентов. Минск: БГУ, 2009. 243 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММ КОМПЛЕКСА «SCAD Office» В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

А.В. ДЮНДИН

Смоленский государственный университет
e-mail: avdyndin@yandex.ru

УДК 372.862

Ключевые слова: *строительная механика, сопротивление материалов, момент инерции сечения, момент сопротивления сечения, программный комплекс.*

В работе рассматривается вопрос об использовании в процессе изучения дисциплин «Сопротивление материалов» и «Строительная механика» программ из комплекса «SCAD Office».

В процессе решения задач сопротивления материалов и строительной механики в обязательном порядке проверяется выполнение первого предельного состояния, в соответствии с которым механические напряжения в материале конструкции не должны превышать предельных значений для данного материала $\sigma \geq \sigma_{\max}$ [3–5].

Максимальное значение механического напряжения в общем случае (при наличии растягивающих усилий и изгибающих моментов) можем найти по формуле $\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M}{W}$, где W – момент сопротивления сечения изгибу, а F – площадь сечения элемента, [1,8].

В общем случае момент сопротивления сечения W и связанный с ним момент инерции сечения J рассчитываются с помощью интегрирования (с учетом осей, относительно которых мы рассматриваем эти величины): $J_x = \int_F x^2 dF$, $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$. Для других осей записи выражений аналогичны.

До тех пор, пока на практических занятиях мы имеем дело с простыми сечениями (прямоугольными, круглыми и даже двутавровыми), студенты не испытывают затруднений с расчетами и потери времени на нахождение необходимых параметров минимальны. При переходе к расчету составных сечений, особенно состоящих из уголков или тавровых сечений, или сложных сквозных колонн расчеты значительно усложняются. Решение этой проблемы мы видим в применении пакетов специальных программ, учитывая, что новая редакция стандарта по направлению подготовки 08.03.01 Строительство [7] расширяет перечень требований к подготовке бакалавра в области владения прикладными расчетными программами.

Для подбора сечений мы используем программы «Конструктор сечений», «Консул», «Тонус» и «Сезам» из программного комплекса «SCAD Office» [2].

В процессе изучения соответствующих разделов дисциплин «Сопротивление материалов» и «Строительная механика» студенты выполняют задания в три этапа:

- «ручной» расчет и определение параметров сечения;
- программный подбор размеров сечения;
- программный подбор аналогичных по характеристикам сечений.

Подобный подход позволяет сделать процесс обучения более интенсивным, интересным; увеличивает количество рассмотренных на

занятия задач. При проведении практических занятий ручной расчет студенты выполняют самостоятельно в качестве домашнего задания, на занятии проверяют результаты с использованием компьютера и по заданию преподавателя варьируют условия, обращая внимание на изменения, нахождение более обоснованных экономически решений.

Специальные математические пакеты, использование которых описано, например, в [6], использовать в учебной практике не всегда удобно, так как требуется значительное время на изучение самого пакета и способа представления данных в нем.

Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: учебник для студентов вузов. М.: Высшая школа, 2009.
2. Вычислительный комплекс SCAD / В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, М.А. Микитавренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. М.: Изд-во «СКАД СОФТ», 2009.
3. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: учебник для студентов строит. спец. вузов. СПб.: Лань, 2010.
4. Каримов И.Ш. Строительная механика. [Электронный ресурс] URL: <http://www.stroitmech.ru/> (дата обращения 14.03.2017).
5. Константинов И.А., Лалин В.В., Лалина И.И. Строительная механика: учебник. М.: Проспект : Кнорус, 2010.
6. Кристалинский Р.Е., Шапошников Н.Н. Решение вариационных задач строительной механики в системе MATHEMATICA: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2010.
7. ФГОС ВО по направлению подготовки 08.03.01 Строительство. URL: <http://fgosvo.ru/news/5/1109> (дата обращения 14.03.2017).
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учебник для студентов машиностроит. вузов и технич. ун-тов по спец. "Приклад. механика" / В.И. Феодосьев ; К.С. Колесников (отв.ред.), Н.А. Алфутов, О.С. Нарайкин и др. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.

ПРЕПОДАВАНИЕ СОВРЕМЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ШКОЛЕ

Н.М. ИВАНОВА

МКОУ «Новодугинская СШ», с. Новодугино, Смоленская область
e-mail: shcool_2002@mail.ru

УДК 372.851: 372.862

Ключевые слова: *программирование в школе, объектно-ориентированная технология, Microsoft Visual Studio Community, объект, свойства.*

В работе поднимается проблема преподавания программирования в современной школе, вопрос о значимости объектно-ориентированного

программирования. Рассматриваются возможности Microsoft Visual Studio Community, подходы к понятию объекта и его свойств.

Развитие технологий программирования приводило к тому, что каждая следующая технология включала в себя все наилучшие качества предыдущей технологии, не отрицая их, а развивая и дополняя новыми средствами. С конца 80-х годов и по настоящее время основная технология программирования – это объектно-ориентированная, которая включает в себя методы модульной и структурной технологии. При этом будучи, соединенной с визуальной технологией, технологией .NET, технологией паттернов, она превратилась в мощный инструмент разработки программ.

Вопросы преподавания программирования в средней школе находятся в центре внимания с начала 60-х годов. В исследованиях, проведенных И.Н. Антиповым, Г.А. Бабушкиной, И.А. Звенигородским, В.Н. Касаткиным, М.П. Лапчиком, А.С. Лесневским, В.М. Монаховым, С.И. Шварцбурдом, М.В. Швециком и др., были рассмотрены вопросы структуры, содержания обучения программированию, выбора учебного языка и др. Технология программирования претерпевала изменения. Анализ учебных программ базового курса информатики средней школы позволяет сделать вывод о том, что объектно-ориентированное программирование (ООП) в этом курсе не нашло должного отражения. Обучение ООП в учебных программах представлено фрагментарно, а в рекомендованных для школ учебных пособиях полностью отсутствует. Наверное, единственный учебник, в котором уделялось внимание объектно-ориентированному программированию, был учебник для профильных классов автора Н.Д. Угриновича. Но и этот учебник Министерство образования исключило из списков допущенных и рекомендованных к преподаванию. Следует отметить, что на современном этапе развития школьной информатики статус объектно-ориентированного программирования в профильном курсе до сих пор не определен. К сожалению, в современном школьном курсе информатики преподавание программирования ведётся на уровне 70-х годов XX века, хотя уже наметилась тенденция к усилению линии алгоритмизации и программирования. Но программирование либо не преподаётся вообще, либо преподаётся в основном на примитивном уровне без учёта современных технологий. Вместе с тем мы обладаем мощным средством, которым является Microsoft Visual Studio Community. Это бесплатная полнофункциональная интегрированная среда разработки с мощными, эффективными возможностями для кодирования, инструментами кроссплатформенных разработок мобильных приложений для Windows, iOS и Android, веб- и облачных приложений, а также доступом к тысячам расширений. С помощью

Microsoft Visual Studio Community можно легко учить простейшим программам, совершать простейшие действия ввода данных, их обработки и вывода на экран, использовать основные базовые алгоритмы сортировки и поиска данных, выполнять некоторые простые численные алгоритмы, например, алгоритм Евклида.

Важно объяснить школьникам, что такое объект. Основные свойства объектов излагаются на очень сложном уровне, в то время как определение объекта, класса – это универсальная алгебраическая система. Такое определение не только легко воспринимается любым математиком, но и даёт толчок для создания простых методик объяснения значения объекта. Из этого следует, что любой объект должен обладать тремя основными свойствами: инкапсуляция, наследование и полиморфизм. О свойстве абстрагирования мы уже не говорим, так как универсальная алгебраическая система и есть абстракция. А перечисленные свойства являются свойствами любой алгебраической системы. В своей практике я знакомлю обучающихся с объектно-ориентированным программированием, придерживаясь мнения о преподавании нескольких языков программирования, использую Microsoft Visual Studio Community. С 2014 года мы участвуем во Всероссийской акции «Час кода», благодаря которой крупнейшие компании ИТ-отрасли объединились, поскольку понимают, как важно повышать технологическую грамотность школьников, рассказывать о доступности и простоте **современных** методов и инструментов программирования. Я надеюсь, что в программе средней школы этому будет уделено больше внимания и времени, так как считаю, что программирование – универсальный язык общения и будущее всех коммуникаций.

Литература

1. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений. Вильямс, 2008.

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ» ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»

О.М. КИСЕЛЕВА

Смоленский государственный университет
Foxy03@yandex.ru

УДК 519.683

Ключевые слова: *параллельное программирование, алгоритмы.*

Параллельное программирование является современным, развивающимся научным направлением, что не может не накладывать отпечаток на преподавание данной дисциплины для подготовки специальностей связанных, с прикладной информатикой. В данной статье рассмотрены некоторые из его особенностей.

Параллельные вычисления являются перспективной и привлекательной областью применения вычислительной техники и представляют собой сложную научно-техническую проблему. Тем самым знание современных тенденций развития ЭВМ и аппаратных средств для достижения параллелизма, умение разрабатывать модели, методы и программы параллельного решения задач обработки данных следует отнести к числу важных квалификационных характеристик современного специалиста по прикладной математике, информатике и вычислительной технике [1]. Это обстоятельство объясняет включение данной дисциплины в программу подготовки специальностей, связанных с прикладной информатикой.

Анализ современных систем программирования дает основания считать, что при преподавании дисциплины целесообразно в качестве ведущей технологии выбрать технологию потоков. А другие современные технологии, такие как OpenMP и MPI (Message Passing Interface), которая стала стандартом систем передачи сообщений между параллельно исполняемыми процессами, представить факультативно.

Одной из особенностей данного научного направления является его сравнительная молодость, можно сказать, его становление происходит «на наших глазах», что не может не сказываться на процессе преподавания данной дисциплины.

Так при предъявлении теоретических основ преподаватель имеет возможность не только приобщить студентов к уже существующим научным теориям, предоставляя базовые знания, но и познакомить с максимально современными разработками, новыми алгоритмами, которые можно почерпнуть в работах В.В. Воеводина [2], В.П. Гергеля [1; 3], М.А. Посыпкина [4; 5], В.И. Мунермана [6; 7], и др.

Поскольку рассматриваемое научное направление является не только востребованным, но и активно развивающимся, оно позволяет дать возможность студентам непосредственно самим окунуться в мир науки и возможно оставить в ней пусть небольшой, но собственный след. Это реализуется при предложении студентам тем курсовых и квалификационных работ по данному направлению.

Особенности дисциплины сказываются также на практической части курса. На наш взгляд, на лабораторных занятиях время должно уделяться не только программной реализации параллельных алгоритмов,

но и сравнительному анализу временных затрат параллельного и последовательного решения одних и тех же задач.

На лабораторных занятиях, на наш взгляд, необходимо рассматривать несколько групп задач:

- 1) простые вычислительные алгоритмы. Например, вычисление суммы элементов массива;
- 2) сложные вычислительные алгоритмы. Например, параллельные методы матричного умножения [7];
- 3) оптимизационные алгоритмы. Например, один из вариантов метода ветвей и границ, задача о ранце [5];
- 4) основы технологии построения параллельных систем баз данных.

Поскольку параллельное программирование практико-ориентированная дисциплина, желательно предлагать студентам практические задания в виде отвлеченных текстовых формулировок, в которых явно не указаны алгоритмы, на отработку которых они направлены. Для выпускников направления подготовки «Прикладная математика и информатика» умение узнавать, самостоятельно формулировать цели и пути их достижения является необходимым профессиональным навыком. Это позволит в дальнейшей, уже не в учебной, а трудовой деятельности «не изобретать велосипед», а осознанно пользоваться изученными алгоритмами или при необходимости их модифицировать.

Кроме того, дисциплина «параллельное программирование» имеет широкие межпредметные связи. Так, классификации и само понятие «параллельной архитектуры» целесообразно отнести к курсу «Архитектура компьютеров».

Таким образом, именно современность параллельного программирования как научного направления накладывает отпечаток на преподавание данной дисциплины.

Литература

1. Гергель В.П., Фурсов В.А. Лекции по параллельным вычислениям: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2009. 164 с.
2. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб: БХВ-Петербург, 2002. 608 с.
3. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений: учебное пособие М.: Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 423 с.
4. Посыпкин М.А. Верхняя оценка сложности одного из вариантов метода ветвей и границ для задачи о сумме подмножеств // Колпаков Р.М., Посыпкин М.А., Тант Син С.Т. International Journal of Open Information Technologies. 2016. Т. 4. № 2. С. 1–6.
5. Колпаков Р.М., Посыпкин М.А. Об оценках вычислительной сложности варианта параллельной реализации метода ветвей и границ для задачи о ранце //

Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2011. № 5. С. 74–82.

6. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Алгебраический подход к формализации параллелизма данных // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12. № 1. С. 72–79.

7. Мунерман В.И. Архитектура программно-аппаратного комплекса для массовой обработки данных на базе многомерно-матричной модели // Системы высокой доступности. 2015. Т. 11. № 2. С. 13–18.

КОМБИНАЦИЯ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

А.В. КОНАШЕНКО, Н.А. ШЕРСТНЁВА

Смоленский государственный университет

УДК 372.851

Ключевые слова: задачи с параметрами; методы решения параметрических задач.

В статье рассматриваются примеры решения задач с параметрами путём комбинации различных подходов (графический, функциональный, аналитический).

Задачи с параметрами вот уже многие годы не утрачивают своей актуальности в курсе элементарной математики; они входят в единый государственный экзамен, встречаются в различных олимпиадах; а умение их решать свидетельствует о высоком уровне предметной обученности школьников.

Можно выделить различные методы решения параметрических задач: аналитический, графический, функциональный и другие. При этом часто бывает полезно комбинировать несколько подходов при решении одной проблемы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1 (аналитический и функциональный подходы). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y + a = \log_3(y - 2a) - \log_3(x - a), \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} x - a + \log_3(x - a) = y - 2a + \log_3(y - 2a), \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t + \log_3 t$. Она монотонно возрастает на луче $(0; +\infty)$. Первое уравнение системы можно переписать как $f(x - a) = f(y - 2a)$. Тогда первое уравнение системы в силу монотонности функции сведётся к системе:
$$\begin{cases} x - a = y - 2a, \\ x - a > 0. \end{cases}$$

Таким образом получим систему:

$$\begin{cases} y = x + a, \\ x^2 - y^2 = 3, \\ x > a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + a, \\ x^2 - (x + a)^2 = 3, \\ x > a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + a, \\ -2ax - a^2 = 3, \\ x > a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + a, \\ x = -\frac{a^2+3}{2a}, \\ x > a, a \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a^2-3}{2a}, \\ x = -\frac{a^2+3}{2a} \end{cases}$$

$$-\frac{a^2+3}{2a} > a \Leftrightarrow a < 0.$$

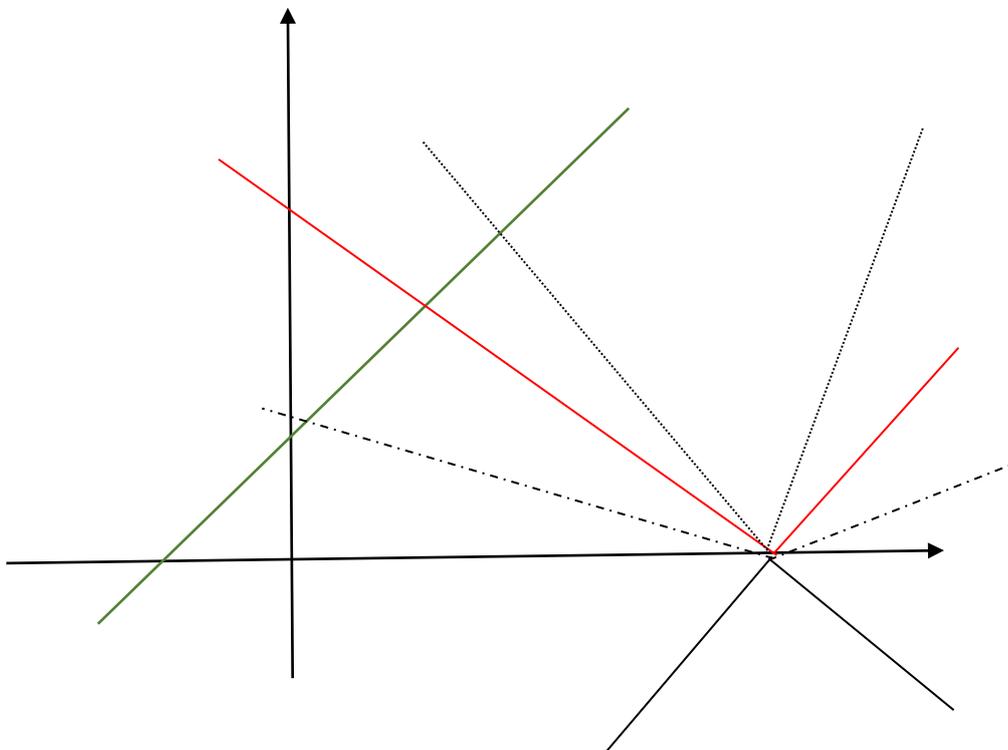
Ответ: при $a \geq 0$ нет решений;

$$\text{при } a < 0 \quad x = -\frac{a^2+3}{2a}, \quad y = \frac{a^2-3}{2a}.$$

Пример 2 (графический и аналитический подходы). Решить неравенство в зависимости от значений параметра m : $m \cdot |x-4| > x+1$.

Решение.

Построим в одной системе координат график правой части и ключевые графики левой части.



Аналитически найдём точки пересечения графиков:

$$(m \cdot (x-4) = x+1 \text{ или } m \cdot (4-x) = x+1) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x = (4m+1)/(m-1) \text{ при } m > 1 \text{ или } x = (4m-1)/(m+1) \text{ } m > -1).$$

Считываем ответ с рисунка, заменяя отношение «>» на равносильное понятие «график лежит выше».

Ответ: при $m \in (-\infty; -1]$ нет решений;

при $m \in (-1; 1]$ $x \in (-\infty; (4m-1)/(m+1))$;

при $m \in (1; +\infty)$ $x \in (-\infty; (4m-1)/(m+1)) \cup ((4m+1)/(m-1); +\infty)$.

Список задач можно, безусловно, расширить. Мы лишь хотели обратить внимание на то, что решение параметрических задач комбинированными методами эффективно и оказывает развивающее воздействие на обучающегося.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЕТЕНТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАНИЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ УЧАЩИХСЯ

В.С. КРИВОШЕЕВА

Смоленский государственный университет

e-mail: krivosheeva_viktoriya@mail.ru

УДК 372.851

Ключевые слова: *стохастика, компетентностно-ориентированные задания, Microsoft Office Excel, GeoGebra.*

В статье рассматривается применение на уроках компетентностно-ориентированных заданий, для формирования элементарного уровня стохастической компетентности учащихся. Приводятся иллюстрирующие примеры.

Модернизация основного общего образования в России, внедрение Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) ставят новые задачи перед современным образованием, которые заключаются в создании благоприятных условий для формирования различных компетентностей учащихся. Стохастическая линия математического образования, включающая элементы комбинаторики, теории вероятности и статистики, позволяет сформировать у учащихся представления о научной картине мира, о роли стохастики в современной науке и способствует развитию вероятностного мышления.

Для формирования необходимого уровня знаний, умений и навыков в области стохастики можно использовать компетентностно-ориентированные задания.

Компетентностно-ориентированные задания (КОЗ) принято определять как объединенную «дидактическую единицу содержания, технологии и мониторинга качества обучения» [1, с. 21]. Компетентностно-ориентированное задание – это задание, содержащее в себе практические элементы, направленные на формирование знаний, умений, навыков, а также тех качеств, которые способствуют выполнению самостоятельной познавательной деятельности. Целью выполнения компетентностно-ориентированных заданий является разрешение стандартных либо нестандартных ситуаций [1, с. 21].

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих вышесказанное.

1. Компетентностно-ориентированное задание «Лотерея» по теме «Элементы теории вероятности».

Вначале задания перечисляются формируемые в процессе разрешения задания компетенции. Следующими компонентами задания являются стимул и задачная формулировка.

Стимул: бланк для игры в лотерею содержит клетки, в которых проставлены числа от 1 до 49. Выигрышная комбинация состоит из 6 чисел и выбирается устроителями случайным образом.

Задачная формулировка: какова вероятность того, что в ней имеются два последовательных числа? Оцените порядок этой величины с помощью программы Microsoft Office Excel.

Данный стимул позволяет обучающимся вникнуть в контекст задания, моделирует реальную ситуацию, а также служит источником информации.

Задачная формулировка, максимально точно и кратко описывает ту деятельность, которая необходима для выполнения задания и получения результата.

Источник информации содержит в себе руководство к выполнению задания в программе Microsoft Office Excel, а также ту информацию, которая необходима для продуктивной деятельности обучающегося по реализации данного задания.

Инструмент оценивания предназначен для подсчитывания количества баллов за каждый этап работы и общий итог. В качестве инструмента проверки в данном задании используется модельный ответ, а также представлен перевод баллов в пятибалльную оценку.

Преимуществом такого компетентностно-ориентированного задания является не только получение необходимых знаний, умений, но и формирование практических навыков по работе в программе Microsoft Office Excel.

2. Компетентностно-ориентированное задание «Поражение истребителя» по теме: «Схема независимых испытаний Бернулли.

Стимул: Ракетная установка может за некоторое фиксированное время в своей зоне выпустить только одну ракету по воздушной цели. Вероятность попадания в истребитель при одиночном пуске ракеты любой из однотипных ракетных установок равна $1/3$. Считается, что для поражения современного истребителя требуется хотя бы одно попадание.

Задачная формулировка: определить наименьшее число ракетных установок, при котором вероятность поражения истребителя при одновременном пуске ракет из всех установок была бы больше $211/243$.

Источник информации: руководство к выполнению задания, инструкция по работе в GeoGebra. При решении задания учащиеся должны получить неравенство, решить которое решают с помощью пакета GeoGebra.

Учащиеся работают с полученным компетентностно-ориентированным заданием, изучают представленные источники информации.

Литература

1. Компетентностно-ориентированные задания в системе высшего образования / А.А. Шехонин, В.А. Тарлыков, И.В. Клещева, А.Ш. Багаутдинова, М.Б. Будько, М.Ю. Будько, А.О. Вознесенская, Л.А. Забодалова, Л.А. Надточий, О.Ю. Орлова. СПб.: НИУ ИТМО. 2014. 98 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

И.В. ЛАНЕВА

Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С.О. Макарова, г. Санкт-Петербург
e-mail: rectorat@gma.ru

УДК 519.8

Ключевые слова: *математический анализ, высшая алгебра, теория вероятностей и математическая статистика, программный пакет Maple.*

В докладе рассматривается тематика лабораторных работ по дисциплине «Математика» и использование программных пакетов для реализации алгоритмов решения математических задач.

В программе преподавания студентам бакалавриата факультета информационных технологий двухсеместровой дисциплины «Математика», а также дисциплины «Дополнительные главы математики», предусмотрены, помимо лекций и практических занятий, также и лабораторные работы. Представляется целесообразным лабораторный практикум по различным разделам математики проводить с использованием систем компьютерной математики, в частности с использованием программного пакета Maple.

При изучении курса линейной алгебры студентам предлагается в системе Maple проверить решение задач, рассматриваемых на практических занятиях: решить систему уравнений различными способами, вычислить собственные числа и собственные вектора матрицы и т.п. При решении задач аналитической геометрии с помощью графических команд пакета Maple студент может наглядно представить себе вид кривых, заданных явно и неявно в прямоугольной, полярной системах координат, заданных параметрически. Изображение различных поверхностей в пространстве при использовании математического пакета Maple также дает студенту ясное представление о виде этих поверхностей, позволяет проверить правильность определения типа поверхности по ее общему уравнению. Графическое представление в Maple различных областей на плоскости, тел и поверхностей в пространстве также помогает студенту при решении задач, связанных с вычислением кратных, криволинейных и поверхностных интегралов и с приложением интегралов к решению геометрических и физических задач.

В курсе математического анализа студенту предлагаются разнообразные задачи, которые он должен решить как самостоятельно, так и с использованием системы компьютерной математики Maple: вычисление пределов, применение производных, исследование сходимости рядов и другие. При оформлении отчета по лабораторной работе, например, при проведении полного исследования функции, от студента требуется не только представить написанную программу, но и описать смысл использования данных команд пакета Maple, сделать выводы и сравнить полученные результаты с графическим изображением. Поэтому требование правильного оформления отчета способствует повторению студентом основных теоретических положений курса и лучшему пониманию их применения к решению задач.

При изучении темы «Дифференциальные уравнения» студент не только осваивает различные методы решения дифференциальных уравнений, но и с помощью программного пакета Maple получает визуальное представление о виде интегральных кривых и поле направлений дифференциального уравнения.

Изучение различных разделов теории вероятностей и основ математической статистики требует специализированных пакетов подпрограмм в Maple. Их использование не только избавляет студента от рутинных вычислений, но и позволяет быстро и эффективно решать задачи, связанные с построением регрессионных моделей, со статистической обработкой результатов эксперимента, определением оценок числовых характеристик и параметров распределения, проверкой гипотез о законе распределения.

Полученный методический опыт позволяет рекомендовать изучение и использование систем компьютерной математики при проведении лабораторного практикума в программе преподавания дисциплины «Математика».

Литература

1. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2014. 800 с.
2. Ястребов М.Ю., Ланева И.В., Нырков А.П. Статистическая иллюстрация основных положений теории вероятностей. Методические указания. Л.: ЛИВТ 1989.

ВИБРИРУЮЩИЙ МАЯТНИК

Б.В. СЕЛЮК

Смоленский государственный университет
e-mail: 654-998@mail.ru

УДК 37.016:534:004

Ключевые слова: *учебно-исследовательская работа, колебания, MathCAD, «Живая физика».*

Описывается методическая разработка, созданная на базе Mathcad и «Живой физики», которая позволяет учащимся в процессе исследовательской работы за компьютером самостоятельно или под руководством преподавателя познакомиться с физическими явлениями, которые лежат в основе вибрационной техники.

Новые стандарты образования предполагают увеличение доли самостоятельных творческих учебных занятий. В вузе это выполнение отдельных творческих заданий и курсовые работы. Для обучения технологии творческой деятельности необходимы специальные занятия с преподавателем и методические разработки. Здесь рассказывается об одной из таких разработок. Она позволяет учащимся в процессе исследовательской работы за компьютером (самостоятельно или под руководством преподавателя) лучше усвоить тему «Колебания» и

познакомиться с необычным поведением маятника с вибрирующей точкой подвеса (вибрирующим маятником).

Учащиеся работают с документами Mathcad, содержащими всю необходимую для работы информацию и «живые» вычислительные блоки. Вычисления сопоставляются с результатами виртуального эксперимента на модели «Живой физики».

Студенты получают краткую информацию о параметрических колебаниях, о том, что при исследовании колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса П.Л. Капица обнаружил равновесное положение, при котором точка подвеса оказывается внизу (маятник Капицы).

Вначале студенты, работая с моделью «Живой физики», изучают колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса. Меняя частоту вибраций, не сильно отличающуюся от собственной частоты маятника, они обнаруживают знакомое явление резонанса.

Затем студентам предлагается получить динамическое уравнение движения маятника при вибрациях точки подвеса вдоль прямой, наклоненной к вертикали под некоторым углом. Получается весьма громоздкое дифференциальное уравнение второго порядка относительно угла отклонения j . Естественно, это уравнение в пределе принимает знакомый студентам по школьной программе вид.

Полученное динамическое уравнение решается численно при различных начальных условиях. Результаты решения выводятся в виде графиков, описываемые ими движения наблюдаются на модели. Студенты сопоставляют теорию и «эксперимент» и делают выводы.

П.Л. Капица доказал, что при выполнении условия $B^2 w^2 \geq 2 g l$, где B и w – амплитуда и циклическая частота осцилляций, l – длина маятника, имеет место необычное явление. Вертикальные осцилляции подвеса приводят к тому, что равновесным оказывается не только самое нижнее, но и самое верхнее положение маятника. Студенты убеждаются в этом, анализируя численные решения полученного динамического уравнения.

На рисунке 1 представлен график временной зависимости угла отклонения маятника при $w = 120 \text{ с}^{-1}$ и начальном угле отклонения $j_0 = 45^\circ$. На рисунке 2 – аналогичный график при $j_0 = 120^\circ$. Пунктиром показаны углы, соответствующие положениям равновесия. Видно, что в первом случае происходят затухающие колебания около нижнего положения равновесия ($j = 0$), а во втором – около верхнего ($j = 180^\circ$).

Исследуются и колебания при наклонных вибрациях точки подвеса. В курсе «Механика» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица приводится формула, определяющая положение равновесия при горизонтальных осцилляциях

точки подвеса: $j_1 = \arccos\left(\frac{2g_1}{B^2 \omega^2}\right)$. Справедливость этой формулы также

подтверждается решением динамического уравнения.

На рисунке 3 приведен график колебаний при горизонтальных колебаниях точки подвеса. Видно, что график согласуется с теоретическим значением $j_1 = 64.8^\circ$.

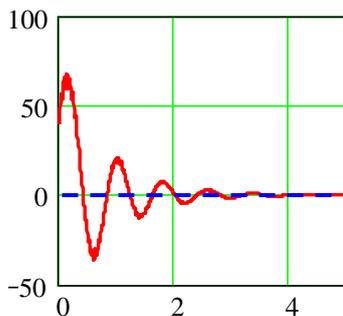


Рис. 1

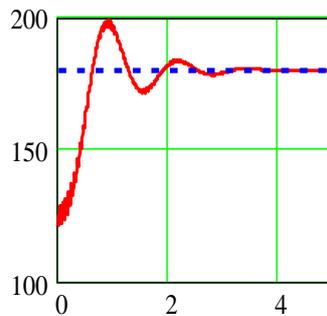


Рис. 2

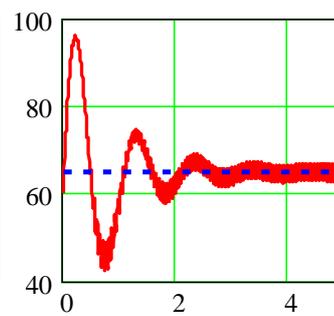


Рис. 3

Все изучаемые случаи колебаний наблюдаются на модели «Живой физики». Сравнение с моделью производится не только качественно, но и количественно.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В КУРСОВОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ПО МЕТОДИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

Н.М. ТИМОФЕЕВА

Смоленский государственный университет
e-mail: nat.timopheeva@yandex.ru

УДК 004.4'27

Ключевые слова: *информационно-коммуникационные технологии, курсовое проектирование, электронный учебно-методический комплекс.*

В статье рассматриваются возможности веб-ресурсов для создания педагогических средств.

Одной из организационных форм обучения в высшей школе является курсовое проектирование, представляющее собой самостоятельное решение студентом под руководством преподавателя определенного круга задач по дисциплине. Основная цель этой работы –

это закрепление, углубление и обобщение студентами полученных знаний, умений и навыков, а также выработка самостоятельности в их применении для решения конкретных практических задач.

Так, например, на физико-математическом факультете Смоленского государственного университета при подготовке бакалавров направления «Педагогическое образование» в учебный план восьмого семестра введено курсовое проектирование по дисциплине «Методика обучения информатике». Так как в следующем девятом семестре студентам предстоит пройти педагогическую практику в качестве школьного учителя информатики, то основным содержанием курсового проекта стала подготовка педагогических средств для предстоящей практики с использованием имеющихся у них навыков программирования, а также навыков работы с информационно-коммуникационными технологиями.

Проектное задание, предлагаемое студентам, состоит в подготовке электронного учебно-методического комплекса (УМК) по одной из основных содержательных линий базового этапа школьного курса информатики (информация и информационные процессы; системы счисления; логика; компьютер; формализация и моделирование; алгоритмизация; программирование; сети, телекоммуникации; текстовый процессор; электронные таблицы; базы данных). Электронный УМК должен содержать следующие разделы.

1. Пояснительная записка:

- а) название содержательной линии, которой посвящен программный продукт;
- б) цели изучения содержательной линии в школьном курсе информатики;
- в) обязательный минимум по данной содержательной линии;
- г) тематическое планирование;
- д) требования к знаниям, умениям и навыкам учащихся по данному разделу курса информатики.

2. Информационный блок:

- а) детализированный по разделам материал, отражающий содержание рассматриваемой содержательной линии;
- б) словарь-справочник по данной содержательной линии;
- в) биографический справочник;
- г) библиография.

3. Контрольный блок:

- а) задания для текущего контроля;

б) задания для итогового контроля по рассматриваемой содержательной линии.

4. *Методический блок:*

а) методические рекомендации по изучению рассматриваемой содержательной линии;

б) конспекты уроков различных типов по данной содержательной линии (не менее трех);

в) конспект внеклассного мероприятия по рассматриваемой содержательной линии.

При выполнении курсового проекта студенту необходимо выбрать тему проектного задания (содержательную линию, которой будет посвящен электронный УМК); составить план выполнения задания и утвердить его у преподавателя; выполнить задание; подготовить отчет по итогам выполнения проекта; защитить проект.

Для подготовки материалов информационного и методического блока электронного УМК возможно в качестве инструментария использовать различные сетевые сервисы и программные средства, такие как ленты времени, мультимедийные нелинейные презентации Prezi, интерактивные плакаты ThingLink, облачный офис Google Документы и т.д. Для создания контрольного блока – сервисы для создания интерактивных заданий Learningapps, разработки тестов и проведения онлайн-тестирования Master-test и другие. Итоговый вариант электронного УМК возможно представить в виде справочного файла, созданного в приложении Dr.Explain, пробная версия которого может быть использована бесплатно.

Курсовое проектирование играет определенную роль в развитии навыков самостоятельной работы студентов, прививает практические навыки творческого применения полученных в вузе знаний, умений и навыков для решения профессионально ориентированных задач.

Литература

1. Сенькина Г.Е., Самарина А.Е., Максимова Н.А., Тимофеева Н.М., Киселева М.П. Информационные технологии в сетевой и проектной деятельности: учебное пособие для преподавателей / отв. ред. Г.Е. Сенькина Г.Е. Смоленск: Изд-во «Универсум», 2015.

2. Максимова Н.А., Тимофеева Н.М. Теория и методика обучения информатике. Частная методика: учебно-методическое пособие. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2007. Ч. 2.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА КОНКРЕТНЫХ СИТУАЦИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ ИНФОРМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Н.М. ТИМОФЕЕВА

Смоленский государственный университет

e-mail: nat.timopheeva@yandex.ru

УДК 004.4'27

Ключевые слова: *метод анализа конкретных ситуаций, примеры кейс-заданий по информатике.*

Описываются примеры кейс-заданий практического и исследовательского типа по информатике.

Одним из эффективных и распространенных методов организации обучения учащихся является метод анализа конкретных ситуаций (case-метод). Появившись в двадцатом веке, первоначально он использовался для подготовки юристов и менеджеров путем обсуждения ситуаций из юридической и бизнес-практики. В настоящее время границы применения метода расширились, он активно используется в общеобразовательной школе и направлен на развитие способностей к анализу жизненных и производственных задач.

Метод характеризуется наличием производственной, социально-экономической проблемной ситуации, связанной с жизнью и необходимостью её решения.

Примером ситуаций-проблем, которые сочетают в себе факторы из реальной жизни и могут быть предложены школьникам в курсе информатики, служат следующие задания.

Тема «Текстовый редактор». Кейс-проблема: Вы дизайнер. Требуется выполнить заказ – создать макет визитки для директора школы Иванова Ивана Ивановича и представить проект заказчику.

Тема: «Моделирование и формализация». Кейс-проблема: сейчас в школе проводится сбор информации об учащихся. Администрация обратилась к Вам с просьбой о помощи в сборе сведений о Вашем классе для классного руководителя, медицинского кабинета, завуча по учебной работе.

Приведенные кейсы по содержанию являются практическими, так как по сути это жизненные ситуации, требующие применения знаний из области информатики.

Примером исследовательского кейса, который предполагает обращение к дополнительным источникам информации, стимулирует к приобретению новых знаний, развивает инициативность в решении, может послужить следующее задание.

Тема «Программирование». Кейс-проблема: Вы программист, путешествующий во времени. Планируете попасть в эпоху средневековья, где используется римская система счисления. Разработайте калькулятор для облегчения выполнения простейших арифметических операций.

Такие ситуационные задачи в отличие от стандартных, типовых не имеют четко сформулированного условия (что дано) и требования (что найти). Учащемуся самому приходится разбираться, в чем состоит проблема, что известно в задаче и каким образом её необходимо решать.

Методику работы над кейс-заданием возможно выстраивать в двух направлениях: *ролевое разыгрывание ситуации*, когда учащиеся становятся действующими лицами, пытающимися найти решение проблемы; *коллективное обсуждение вариантов решения проблемы*, что углубляет опыт учащихся, дает возможность ознакомиться с другими вариантами решения.

При всей трудоемкости предлагаемых в данном методе заданий их эффективность в практико-ориентированном обучении высока, так как они развивают аналитические способности учащихся и показывают применение изучаемых на уроке знаний, умений и навыков на практике.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Е.А. ЦАРЕВА

Смоленский государственный университет

e-mail: elean@inbox.ru

УДК 532.1, 372.016

Ключевые слова: физика, лабораторный практикум, инновационные подходы в образовании, информационные технологии, электронные образовательные продукты, моделирование экспериментов.

В докладе рассматриваются назревшие к настоящему времени проблемы, связанные с методикой обучения физике в вузе. Обсуждаются перспективные возможности информационных технологий в модернизации образовательного процесса по физике, а также в решении ряда методических проблем.

Физика является основной базовой дисциплиной в образовательном процессе студентов-бакалавров строительных направлений подготовки. Понимание сущности физических явлений, фундаментальных законов, объясняющих эти явления, составляет, во-первых, основу для освоения в

дальнейшем специальных дисциплин, а во-вторых формирует у будущих строителей умение мыслить.

При изучении физики большая роль отводится эксперименту, и в частности выполнению лабораторных работ, каждая из которых представляет маленькое экспериментальное исследование. При выполнении работы студенты с помощью измерительных приборов производят прямые и косвенные измерения различных физических величин, оформляют результаты эксперимента в виде отчета, который содержит еще вычисления и графики. При этом большая часть времени тратится на обработку результатов измерений и их оформление (заполнение таблиц и построение графиков). Времени на анализ полученных результатов очень часто остается мало или вообще не остается. Для ускорения процесса обработки полученных данных можно использовать Microsoft Excel [1].

С точки зрения доступности и навыков работы Microsoft Excel, в отличие от специализированных статистических пакетов, не вызывает сложностей у студентов даже после школьного курса информатики.

Широкая интеграция с другими программами от Microsoft, интуитивно-понятный интерфейс Microsoft Excel, подробная справка на русском языке делают освоение и использование Excel простым и удобным. В отличие от сложных профессиональных математических и физических пакетов, требующих длительного изучения, Excel осваивается за одно занятие и позволяет в дальнейшем заниматься исключительно физикой, не отвлекаясь на изучение самой программы.

Данное приложение экономит учебное время, так как с его помощью можно довольно быстро производить расчеты. Удобен он также для графического представления физических процессов, для анализа и сравнения полученных графиков.

В Microsoft Excel все экспериментальные значения представляются в виде электронной таблицы, в которой удобно применять формулы для описания связи между значениями различных ячеек. Расчет по заданным формулам выполняется автоматически. Изменение содержимого какой-либо ячейки приводит к пересчету значений всех ячеек, которые с ней связаны формульными отношениями, и тем самым – к обновлению всей таблицы в соответствии с изменившимися данными. В памяти компьютера можно сохранять заготовки отчетов лабораторных работ, таблицы измерительных приборов и результатов измерений. Обучение использованию электронных таблиц для оформления отчетов и обработки результатов эксперимента следует начинать с первой лабораторной работы, посвященной оценке погрешности прямых и косвенных измерений. Например, для определения погрешностей косвенных измерений плотности твердого тела цилиндрической формы.

Чтобы найти плотность тела, необходимо провести прямые измерения его массы, высоты и диаметра основания, занося результаты в соответствующие столбцы таблицы. Для каждой величины вычислить среднее арифметическое значение (СРЗНАЧ), среднеквадратичное отклонение (СТАНДОТКЛОН.В) и погрешности измерений. Используя эти значения, можно рассчитать плотность и погрешность ее измерения.

При выполнении работ «Проверка закона Гука и измерение модуля Юнга», «Определение коэффициента упругости пружины», «Проверка основного уравнения вращательного движения» с помощью Microsoft Excel отрабатывается применение метода наименьших квадратов для обработки совместных измерений и построения графика зависимости между измеряемыми величинами.

Благодаря этому в Excel можно заниматься физикой на компьютере, а не информатикой на примерах физики.

Таким образом, освоение компьютерной обработки физических процессов в Excel ведет к более глубокому пониманию этих процессов, а также физического и математического смысла используемых формул и моделей, повышает качество знаний студентов, обеспечивает условия для адаптации студентов в современном информационном обществе.

Литература

1. Царева Е.А. Использование компьютерных технологий на занятиях по теплогазоснабжению // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. С. 304–306.

ОСОБЕННОСТИ ВОСПРИЯТИЯ ИНФОРМАЦИИ НА РАЗНЫХ ЭТАПАХ РАЗВИТИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ

А.М. ШИЛЯГИНА

Смоленский государственный университет

E-mail: ypy1101@gmail.com

УДК 37.02

Ключевые слова: технические средства обучения; каналы восприятия информации; дидактические принципы обучения.

В статье анализируются основные этапы развития технических средств обучения с точки зрения задействованных каналов восприятия, а также с точки зрения реализации дидактических принципов обучения.

Понятия «информационное общество», «информатизация образования», «информационно-образовательная среда» появились в

конце XX века. В начале XXI века эти понятия уже прочно вошли в жизнь общества. В данной статье мы рассмотрим, каким образом развивались технические средства обучения в период с 1960 по 2000 год. Условно разделим указанный период на три этапа и проанализируем их с точки зрения задействованных каналов восприятия, а также с точки зрения реализации основных дидактических принципов обучения.

Первый этап, названный нами условно *этапом преимущественно моновосприятия*, длился с начала 60-х до конца 70-х годов XX века. В эти годы в учебный процесс активно внедрялись технические средства обучения, а вместе с ними и новые методы. Вопрос освоения этой техники и связанных с ее использованием новых методов преподавания стоял остро: педагоги должны были освоить формы и методы работы с различной аппаратурой. По решению Министерства просвещения СССР издательство «Просвещение» в 1972 выпустило учебное пособие «Технические средства обучения». Цель пособия – помочь будущему педагогу овладеть современными техническими средствами и методически правильно использовать их в обучении и воспитании подрастающего поколения [1].

Специфика человеческого восприятия информации определяется особенностями функционирования различных органов чувств: зрения, слуха, обоняния, осязания и т.д. При работе с современной компьютерной техникой информация в основном воспринимается зрением (зрительная информация) и слухом (слуховая информация). Информация, которая воспринимается одновременно зрением и слухом, называется зрительно-слуховой.

На первом месте по эффективности применения технических средств обучения находится комбинированный *зрительно-слуховой* канал восприятия, затем следует *зрительный* и, наконец, *слуховой*. Для успешного усвоения учебного материала важно, чтобы в процессе восприятия информации участвовало как можно больше каналов восприятия, так как одновременное воздействие целого комплекса раздражителей обладает большой силой, особой эмоциональностью [2].

На первом этапе комбинированный зрительно-слуховой канал восприятия был задействован у учащихся при демонстрации звукового диафильма или учебного кино. Осуществлялся показ при помощи диапроектора, кинопроектора, черно-белого телевидения и т.д. Зрительный канал восприятия был задействован у учащихся тогда, когда на уроке при помощи диапроектора или фильмоскопа им показывали диапозитивы, слайды, фотографии и т.д. При использовании на уроке радиоприемника, проигрывателя с целью прослушивания радиопостановки, музыкального произведения, поэзии и т.д. задействован был только слуховой канал восприятия.

В начале 70-х годов XX века образовательные учреждения стали оснащаться цветными телевизорами. Образ на экране телевизора становится цветным, что делает восприятие учебного материала более ярким и запоминающимся, при этом значительно повышается мотивация, так как возрастает интерес к изучению нового. Использование на уроках перечисленных технических средств обучения помогало создавать модель окружающего мира, науки и самой жизни, что позволяло видеть, слышать, наблюдать.

Использование разных технических средств обучения предоставляет возможность задействовать все каналы восприятия и реализовывать основные дидактические принципы. Одним из важнейших принципов дидактики является принцип наглядности. Применение принципа наглядности возможно только при задействовании зрительного канала. На первом этапе самым эффективным техническим средством обучения с точки зрения принципа наглядности было телевидение. Просматривая учебный фильм, учащиеся начинают мыслить, сопоставлять, анализировать, выделяя существенные признаки процессов и явлений, происходящих в окружающем мире.

Принцип систематичности заключается в соблюдении строгой последовательности в изложении учебного материала. Учебный фильм, радиопередача, музыкальное произведение должны занимать определенное место в системе урока, а также иметь логическую связь с учебным материалом всего урока.

Еще один принцип дидактики – это принцип научной достоверности в обучении. Очень важно, чтобы изучаемый материал соответствовал достижениям науки. Упрощение учебного материала не должно приводить к искажению научных фактов. В 1960-1970 годы реализовывался этот принцип при использовании диапроектора, фотоаппарата, кинопроектора и телевидения, что давало возможность наблюдать за процессами, происходящими в живой природе, в окружающем мире, на производстве.

Итак, мы видим, что на первом этапе реализация дидактических принципов осуществлялась при использовании технических средств, которые давали возможность задействовать одновременно только один канал: либо зрительный, либо слуховой.

Начало второго этапа развития средств обучения, который мы назвали этапом *преимущественно комбинированного восприятия*, мы условно соотнесли с началом 1980 года. В этот период образовательные учреждения стали оснащаться совершенно новыми средствами обучения. В школах появились видеоманитофоны, плееры, телевизионные комплексы, персональные компьютеры, принтеры, сканеры и т.д. Использование этих средств обучения оказывало более

эффективное воздействие на учащихся, так как при этом большей частью был задействован комбинированный зрительно-слуховой канал восприятия.

В 80-е и 90-е годы XX века вместе с новыми техническими средствами широко применялись и традиционные технические средства. Их использование в образовательном процессе давало хорошие результаты, «недостатком» являлось лишь то, что задействован при этом был какой-то один канал восприятия, либо зрительный, либо слуховой. Учитель должен был грамотно сочетать все имеющиеся в его распоряжении средства обучения, чтобы добиться максимального эффекта от их использования.

Итак, на втором этапе развития средств обучения в основном использовались технические средства, которые задействовали преимущественно комбинированный зрительно-слуховой канал восприятия. Большинство важных дидактических принципов реализовывались через комбинированный зрительно-слуховой канал восприятия.

Начало третьего этапа развития технических средств обучения, который мы условно назвали этапом *полностью комбинированного восприятия*, приходится на 2000-е годы. Учебные заведения стали активно оснащаться компьютерами, лингафонными лабораториями, появились интерактивные доски, принтеры, сканеры и другие аудиовизуальные средства на цифровой основе.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в указанный период времени все перечисленные дидактические принципы (принцип наглядности, доступности обучения, систематичности и последовательности, научной достоверности, дифференцированного обучения) реализовывались через комбинированный зрительно-слуховой канал восприятия.

В результате проведенного нами анализа мы обнаружили целый ряд закономерностей.

На первом этапе развития средств обучения в основном использовались такие технические средства, которые задействовали одновременно только один канал восприятия, либо зрительный, либо слуховой.

На втором этапе развития средств обучения в основном использовались технические средства, которые задействовали в основном комбинированный зрительно-слуховой канал восприятия.

На третьем этапе используются технические средства обучения, которые дают возможность задействовать комбинированный зрительно-слуховой канал восприятия.

Итак, проанализировав этапы развития технических средств обучения с точки зрения реализации дидактических принципов, а также

с точки зрения задействованных каналов восприятия, мы пришли к следующим выводам.

1. По мере появления новых технических средств обучения отпала необходимость в таких технических средствах обучения, при использовании которых был задействован либо зрительный, либо слуховой канал восприятия. С внедрением в учебный процесс новых информационных средств обучения, а именно компьютеров, интерактивных досок, лингафонного оборудования появилась возможность задействовать все важные каналы восприятия, что повышает интерес учащихся к изучаемому предмету и, как следствие, качество знаний у них повышается.

2. Проанализировав развитие технических средств обучения с 1960 года до настоящего времени, мы пришли к выводу, что сокращение технических средств обучения не уменьшило важности реализации в учебном процессе дидактических принципов. Наоборот, новые информационные технологии, изменившиеся требования к содержанию, формам и методам преподавания предполагают постоянное использование дидактических принципов обучения.

Литература

1. Карпов Г.В., Романин В.А. Технические средства обучения: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. № 2121 «Педагогика и методика начального обучения» и учащихся школьных отд-ний, педучилищ по спец. № 2001 «Преподавание в начальных классах общеобразовательной школы». Изд. 2-е, переработ. и доп. М.: Просвещение, 1972. 384 с.

2. Выготский Л.С. Педагогическая психология / под ред. В.В. Давыдова. М.: АСТ Астрель Хранитель, 2008. 671 с.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Расулов К.М.</i> Производственник, ученый и педагог. К 70-летию Виктора Иосифовича Мунермана	3
СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики	5
<i>Викулов В.М., Пармонов А.А.</i> Модель коммуникационного компонента внутриофисной сети	5
<i>Викулов В.М., Геворгян О.А., Пармонов А.А.</i> Оценка эффективности использования сигнала SOQPSK в космических линиях связи	7
<i>Габелок О.С.</i> Применение пакета GRETL при прогнозировании демографической ситуации в Смоленской области	10
<i>Зайцева Н.В., Рахимова Г.А.</i> Исследование краевых задач для классических уравнений математической физики в системах компьютерной математики	14
<i>Зайцева Н.В., Ульянова Е.С.</i> Визуализация решения нелокальной задачи с интегральным условием первого рода для В-гиперболического уравнения	15
<i>Кристалинский В.Р., Берестнева А.А.</i> Об использовании нечеткого моделирования при планировании производства продукции в рамках CALS-технологии	17
<i>Кристалинский Р.Е.</i> Об использовании систем компьютерной математики в курсе математического анализа	19
<i>Кузенков Р.С.</i> Факторный анализ показателей, характеризующих уровень жизни населения в субъектах ЦФО РФ	23
<i>Лысиков М.Г.</i> Применение имитационного моделирования для системного анализа функционирования транспортно-пересадочных узлов	25
<i>Нигмедзянова А.М., Ахмадиева Л.Р.</i> Визуализация построения графиков замечательных кривых в СКМ Maple	27
<i>Подорога А.В.</i> Модифицированный метод частиц для квазилинейного уравнения дорожного движения	30
<i>Ровба Е.А., Смотрицкий К.А.</i> Рациональные квадратурные формулы и их применение в системах компьютерной математики	33
<i>Рубцова А.В., Кристалинский В.Р.</i> Реализация и представление выбора объекта недвижимости методами нечеткой математики в пакете MatLab	36
<i>Суханова А.Г.</i> Трехкритериальная оптимизация портфеля ценных бумаг с использованием теории нечетких множеств в системе Mathcad	37
<i>Тихонова М.И.</i> Детектирование лиц на изображениях при помощи машины опорных векторов	41

<i>Тихонова О.В.</i> Анализ сложных систем при помощи простых моделей	43
<i>Цветкович Д.Г.</i> О некоторых численных соотношениях, связанных с распределением нулей полиномов Бернштейна	46
<i>Шевченко А.С.</i> Применение математического пакета Maple к решению вариационных задач методом Рунге	50
<i>Шеметов Е.В.</i> Экстраполяция сплайнами значений индекса РТС в системе Mathcad	52
<i>Ястребов М.Ю., Бебнев Р.А., Федосов А.Д.</i> Анализ хеширования на основе поиска Фибоначчи	54
СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры	57
<i>Агасиев Т.А., Карпенко А.П.</i> Метод оценки характеристических показателей целевой функции в задаче оптимизации	57
<i>Афанасьев В.В.</i> Анализ и выбор средств разработки мобильных информационных систем	59
<i>Божинский Е.А., Самойлова Т.А.</i> Прогнозирование временных рядов средствами обучающегося генетического алгоритма	60
<i>Бушинский А.С., Самойлова Т.А.</i> Распознавание рукописной подписи методом опорных векторов	63
<i>Данилюк Е.И., Мунерман В.И.</i> Сравнительный анализ реализации операции Join на комплексах с SMP и MPP структурах	66
<i>Диев О.Е., Мунерман В.И.</i> Параллельная обработка распределённых баз данных в СУБД PostgreSQL	68
<i>Жарков А.А.</i> Унификация интерфейса программно-аппаратного комплекса «умных» сред	70
<i>Захаров В.Н.</i> Основные политические решения относительно направлений развития информационных технологий в России и роль ФИЦ ИУ РАН в их реализации	72
<i>Захаров М.А., Карпенко А.П., Смирнова Е.В., Соколов А.П.</i> Метакомпетенции учащихся и их количественная оценка на основе анализа данных, извлеченных из социальных сетей	77
<i>Иванов М.С., Мунерман В.И.</i> Анализ реализации операции Join на основе принципа симметричного горизонтального распределения данных	80
<i>Игнатенков А.В.</i> Одновременное использование двух искусственных нейронных сетей с переменной проводимостью сигнала для решения задачи построения графика движения	82
<i>Клименко Д.А., Мунерман И.В.</i> Применение систем компьютерной математики для построения скоринговых моделей	84

<i>Кравченко В.В.</i> Распознавание лиц на основе применения методов Виолы-Джонса и SURF	87
<i>Макаров А.И.</i> Использование изображений для шифрования информации	91
<i>Максимовский Д.М.</i> Примеры использования механизмов параллельной обработки данных в среде разработки 1С: Предприятие	93
<i>Моторин Д.Ю., Самойлова Т.А.</i> Обнаружение сетевых вторжений методом машинного обучения	95
<i>Мунерман В.И., Мунерман Д.В.</i> Один метод реализации симметричного горизонтального распределения данных	97
<i>Мунерман В.И., Парфенов Н.В.</i> Анализ умножения многомерных матриц на программно-аппаратных комплексах с SMP архитектурой	100
<i>Мунерман В.И., Слепенкова О.С.</i> Параллельная обработка данных средствами Microsoft Azure	102
<i>Мунерман В.И., Чикунов В.Д.</i> Использование контейнерной технологии для повышения эффективности распределённых вычислений	105
<i>Норицына И.Ю.</i> Прогнозирование оценки технического состояния электрооборудования	107
<i>Ольшанский А.М.</i> Применение скриптового языка к обработке сигналов ошибки искусственной нейронной сети	109
<i>Самойлова Т.А.</i> Разработка аналитических информационных систем средствами современных баз данных	111
<i>Самойлова Т.А., Хмызов М.К.</i> Отбор информативных признаков при построении систем классификации на основе деревьев решений	114
<i>Селиверстов Е.Ю.</i> Графовые модели графического процессора	117
<i>Симакова А.А.</i> Аналитическая система на основе нейронной сети для решения кадровых задач	120
<i>Синицын И.Н., Корепанов Э.Р.</i> Аналитическое моделирование стохастических систем с эллиптическими нелинейностями Якоби и Вейерштрасса	122
<i>Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.</i> Стохастические канонические вейвлет разложения в задачах моделирования виброударонадежности компьютерного оборудования	123
<i>Синицын И.Н., Синицын В.И.</i> О книге В.С. Пугачева и И.Н. Синицына «Лекции по функциональному анализу и приложениям»	125
<i>Федулов А.С., Борисов В.В., Зернов М.М., Якушевский К.А.</i> Гибридный вычислительный кластер филиала НИУ «МЭИ» в Смоленске	126

СЕКЦИЯ 3. Математика и ее приложения	130
<i>Банару Г.А., Банару М.Б.</i> О Н.В. Степанове и его геометрической теории ОДУ произвольного порядка	130
<i>Банюкевич Е.В.</i> Свойства вейвлет-преобразования обобщенных функций экспоненциального роста	131
<i>Вувуникян Ю.М.</i> Векторнозначные импульсные характеристики асимптотически обратных операторов	133
<i>Головешкин В.А., Жукова Г.Н., Ульянов М.В., Фомичев М.И.</i> Корреляция сложности и времени решения TSP	136
<i>Гомонов С.А.</i> О степенях по z и \bar{z} некоторых полианалитических полиномов с конечными предельными значениями в точке ∞	138
<i>Долгополова О.Б., Зверович Э.И.</i> Аналитические выражения двоякопериодических функций второго рода	140
<i>Долгополова О.Б., Зверович Э.И.</i> Мероморфные функции второго рода на замкнутых римановых поверхностях	145
<i>Евдокимова Г.С.</i> Однолинейная система с ожиданием при учете выхода прибора из строя	150
<i>Емельченков Е.П.</i> АЕ-структуры с гомоморфизмами	152
<i>Емельченков Е.П., Маянов А.М.</i> О построении инцидентностных структур с параллельностью	155
<i>Зуев А.М.</i> Оценка суммы специального вида из задачи составления средних Рисса	157
<i>Карачик В.В.</i> О некоторых тождествах на сфере для полигармонических функций	159
<i>Карев А.В.</i> Функция Ламберта и ее применения в математической физике	161
<i>Киреев В.И., Бирюкова Т.К., Гершкович М.М.</i> Об устойчивости квадратурных формул на нерегулярном шаблоне и глобального метода численного дифференцирования	164
<i>Кирьяцкий Д., Кирьяцкий Е., Кирьяцкий Э.</i> Об одной мажорантной теореме в классе аналитических функций	171
<i>Кирьяцкий Е., Кирьяцкий Э.</i> О корнях многочлена в угловой области	172
<i>Кирьяцкий Э., Кирьяцкий Е.</i> О среднем гармоническом k -мерном евклидовом пространстве	173
<i>Кирьяцкий Э., Кирьяцкий Е., Матюхин В.</i> О тригонометрических уравнениях в прямоугольном треугольнике	174

<i>Кристалинский Р.Е., Тимотин А.М.</i> Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода в системе Mathematica	175
<i>Куприкова О.Н.</i> Об одной дифференциальной краевой задаче в классах квазигармонических функций третьего рода	180
<i>Курицын С.Ю., Расулов К.М.</i> О картине разрешимости одной краевой задачи типа Римана для метааналитических функций в круге	182
<i>Матюхин В.И.</i> О полупериодических функциях с ε – конечным базисом	186
<i>Матюхин В.И.</i> О фёдоровских группах движений	190
<i>Нагорная Т.Р.</i> Исследование заболеваемости вирусом гриппа A(H1N1)pdm09 на периодичность	193
<i>Осиян К.В., Расулов К.М.</i> О картине разрешимости одной модельной краевой задачи типа Гильберта в классах метааналитических функций	196
<i>Петров В.А.</i> Двойной интеграл в логистических задачах	202
<i>Попков А.Е., Расулов К.М.</i> О краевой задаче Римана для квазигармонических функций в исключительном случае	204
<i>Расулов К.М.</i> Об одном методе решения векторно-матричной краевой задачи Римана для аналитических функций	207
<i>Расулов К.М., Тимофеева Т.И.</i> О зависимости картины разрешимости однородной задачи Гильберта для квазигармонических функций от величины радиуса круговой области	210
<i>Расулов К.М., Ханкишиева Ш.С.</i> О картине разрешимости однородной задачи Римана для квазигармонических функций в круговых областях	212
<i>Расулов К.М., Широкова А.В.</i> Модельная краевая задача типа задачи Гильберта с разрывными коэффициентами в классах метааналитических функций	214
<i>Ровба Е.А., Козловская Н.Ю., Вувуникян Ю.М.</i> О приближении функции $ \sin x $ рациональными операторами Фейера	219
<i>Рубинштейн А.И.</i> Об одном частном решении задачи трех тел	220
<i>Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Эйдельман Ю.С.</i> Применение полиномов Бернулли в неклассических задачах математической физики	223
<i>Шапуров А.Б.</i> О периодичности непрерывной на всей оси сложной функции	227
<i>Шерстнева Н.А.</i> Ортогонализация линейно независимой системы функций евклидова пространства	227
<i>Шпак Д.С., Вувуникян Ю.М.</i> Импульсная характеристика первого порядка асимптотически обратного эволюционного оператора второй кратности	232

СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании	235
<i>Ассонова Н.В.</i> Об опыте формирования математической и методической компетентностей студентов - будущих учителей начальных классов	235
<i>Богданова Н.Н.</i> Геометрия тетраэдра	237
<i>Бровка Н.В., Бриштань Ф.Н.</i> Реализация взаимосвязей математических объектов с использованием компьютерных технологий	239
<i>Дюндин А.В.</i> Использование программ комплекса «SCAD OFFICE» в учебном процессе	241
<i>Иванова Н.М.</i> Преподавание современного программирования в школе	243
<i>Киселева О.М.</i> Особенности преподавания дисциплины «Параллельное программирование» для направления подготовки «Прикладная математика и информатика»	245
<i>Конашенко А.В, Шерстнева Н.А.</i> Комбинация различных методов при решении задач с параметрами	248
<i>Кривошеева В.С.</i> Использование компетентностно-ориентированных заданий при формировании стохастической компетентности учащихся	250
<i>Ланева И.В.</i> Использование системы компьютерной математики Maple при проведении лабораторных работ по дисциплине «Математика»	252
<i>Селюк Б.В.</i> Вибрирующий маятник	254
<i>Тимофеева Н.М.</i> Использование информационных технологий в курсовом проектировании по методическим дисциплинам	256
<i>Тимофеева Н.М.</i> Использование метода анализа конкретных ситуаций при обучении информатике в средней школе	259
<i>Царева Е.А.</i> Использование информационных технологий для обработки результатов физического эксперимента	260
<i>Шлягина А.М.</i> Особенности восприятия информации на разных этапах развития технических средств обучения	262

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 18

Издательство Смоленского государственного
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко*

Подписано к печати 17.04.2017. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. п. л. 17,25. Уч.-изд. л. 17,25. Тираж 120 экз.
Заказ №

Отпечатано с оригинал-макета авторов в ИТЦ СмолГУ
214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4.