

Министерство науки и высшего образования РФ
Смоленский государственный университет

**Системы
компьютерной
математики
и их приложения**

Выпуск 24

Смоленск
Издательство СмолГУ
2023

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета СмолГУ*

Редакционная коллегия

К.М. Расулов, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор)
Н.М. Тимофеева, канд. пед. наук, доц. (отв. секретарь)
В.В. Борисов, д-р техн. наук, проф. (Смоленск, Россия)
Ю.М. Вувуникян, д-р физ.-мат. наук, проф. (Гродно, Республика Беларусь)
Л.Г. Гагарина, д-р техн. наук, проф. (Зеленоград, Россия)
С.А. Гомонов, канд. физ.-мат. наук, доц. (Смоленск, Россия)
А.П. Карпенко, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)
А.Б. Костин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)
В.И. Мунерман, канд. техн. наук, доц. (Смоленск, Россия)
Г.Е. Сенькина, д-р пед. наук, проф. (Смоленск, Россия)
И.В. Тихонов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)
В.Б. Шерстюков, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва, Россия)

С 409 **Системы компьютерной математики и их приложения:**
межвузовский сборник научных трудов. Смоленск: Изд-во
СмолГУ, 2023. Вып. 24. 451 с.
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В настоящем выпуске сборника публикуются расширенные тексты научных докладов, представленных на XXIV Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 26–27 мая 2023 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

© Авторы, 2023
© Издательство СмолГУ, 2023

РАЗДЕЛ 1

Системы компьютерной математики

Андрун Абед, О.В. Тихонова

Российский технологический университет – МИРЭА

УДК 621.396, 621.371, 621.372

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СОТОВЫХ СИСТЕМ 5G: ВСЕСТОРОННИЙ ОБЗОР

Ключевые слова: *5G, математические модели, сетевые связи, компьютерная математика, алгоритмы модуляции и кодирования.*

Эффективное и успешное проектирование, оптимизация и эксплуатация сотовых систем 5G стали возможны благодаря компьютерной математике. В данной работе дается общий обзор сотовых систем 5G и их основных характеристик и рассказывается о том, как компьютерная математика может быть использована для оптимизации ряда различных процессов, включая моделирование каналов, формирование луча и распределение ресурсов. Кроме того, в статье приводятся конкретные примеры применения компьютерной математики для совершенствования сотовых сетей 5G, а также подчеркивается решающая роль компьютерной математики в оптимизации сетевых ресурсов и обеспечении надежной связи в различных условиях канала.

1. Введение

Компьютерная математика – это раздел математики, который использует компьютеры для выполнения вычислений и анализа данных. Он охватывает широкий спектр математических областей, включая численный анализ, вычислительную геометрию и математическое моделирование. В последние годы компьютерная математика становится все более актуальной в области телекоммуникаций, поскольку она предлагает мощные инструменты для оптимизации работы сети и повышения качества обслуживания. Одним из основных способов применения компьютерной математики в телекоммуникациях является использование математических моделей. Математические модели – это абстрактные представления сложных систем, таких как беспроводные

сети или распространение сигналов, которые можно использовать для прогнозирования и оптимизации работы системы. Эти модели могут применяться для имитации поведения сети в различных условиях, что позволяет инженерам выявлять потенциальные недостатки, оптимизировать архитектуру сети и улучшать общую производительность системы. На рисунке 1 показана блок-схема «Компьютерная математическая модель».

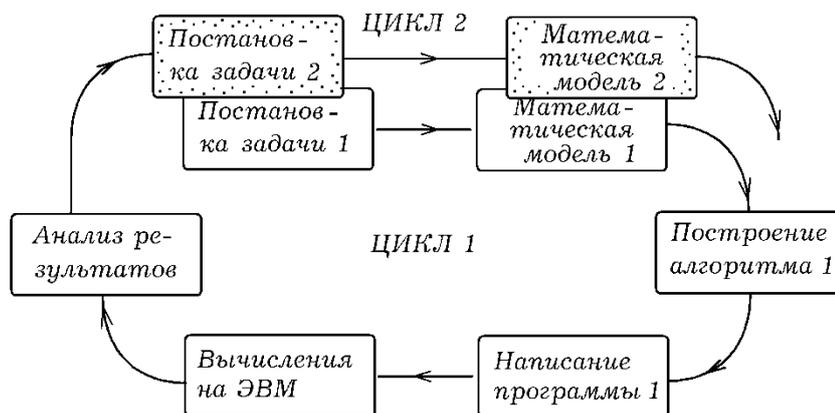


Рис. 1. Блок-схема «Компьютерная математическая модель»

Обработка сигналов – это область электротехники, которая занимается анализом, изменением и извлечением информации из сигналов. В телекоммуникациях обработка сигналов используется для повышения качества и надёжности беспроводных передач. Вычислительная математика играет важную роль в обработке сигналов, предлагая бесценные инструменты для их анализа. Поскольку телекоммуникационная отрасль продолжает развиваться и расти, вполне вероятно, что вычислительная математика будет все более востребована в формировании будущих телекоммуникационных технологий.

2. Обзор систем сотовой связи 5G и их основных характеристик

Пятое поколение технологий сотовых сетей, 5G, призвано обеспечить более высокую скорость загрузки и выгрузки данных, меньшую задержку и большую ёмкость для поддержки растущего числа подключённых устройств и новых приложений, таких как виртуальная реальность и Интернет вещей (IoT). Одной из основных характеристик сетей 5G является использование более высоких частотных диапазонов, таких как миллиметровые волны (mmWave), которые обеспечивают большую ёмкость и более высокую скорость передачи данных. Эти более высокочастотные диапазоны ранее не использовались в сотовых сетях и требуют применения современных антенных технологий и методов обработки сигналов для обеспечения надёжной и эффективной связи. На рисунке 2 показана основная особенность систем 5G.

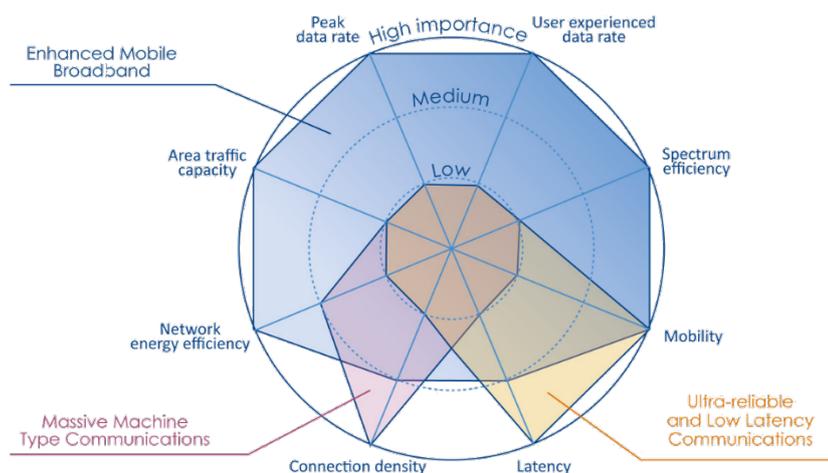


Рис. 2. Основная особенность систем 5G

Ещё одним важным элементом сетей 5G является использование сегментации сети, которая позволяет создавать множество виртуальных сетей в рамках одной физической сети. Сегментация сети дает возможность сетевым операторам назначать сетевые ресурсы конкретным приложениям или вариантам использования, повышая гибкость и эффективность управления сетью. Это особенно важно для обеспечения различных вариантов сценариев использования с различными требованиями к производительности сети, таких как автономные автомобили, промышленная автоматизация и удалённое здравоохранение. Кроме того, сети 5G содержат другие технологии, такие как массовый MIMO (множественный вход, несколько выходов) и формирование луча, которые позволяют более эффективно использовать ресурсы сети и улучшать покрытие в густонаселённых городских районах.

3. Роль компьютерной математической модели в оптимизации систем сотовой связи 5G

Роль компьютерной математики в оптимизации сотовых систем 5G имеет решающее значение, поскольку она предлагает мощные инструменты для анализа, моделирования и оптимизации производительности системы. Компьютерная математика может использоваться для оптимизации различных аспектов сотовых систем 5G, включая обработку сигналов, сетевую архитектуру, распределение ресурсов и прогнозирование производительности.

Математические модели применяют для имитации поведения сети в различных условиях, что позволяет инженерам выявлять потенциальные узкие места, оптимизировать архитектуру сети и повышать общую производительность системы. Компьютерная математика может

использоваться для разработки математических моделей беспроводных каналов, которые можно использовать для моделирования распространения электромагнитных волн в различных средах. Компьютерная математика может быть использована для оптимизации распределения ресурсов в сотовых системах 5G. Распределение ресурсов относится к процессу выделения сетевых ресурсов, таких как пропускная способность и мощность, различным пользователям и приложениям. Компьютерная математика используется для оптимизации архитектуры сотовых систем 5G, включая размещение базовых станций, проектирование сетевых топологий и выбор сетевых протоколов. Алгоритмы оптимизации помогают при определении оптимального местоположения базовых станций с учётом таких факторов, как покрытие сети, пропускная способность и помехи. С помощью компьютерной математики разрабатываются математические модели качества канала, которые можно использовать для прогнозирования оптимальной схемы модуляции и кодирования для заданного состояния канала. Эти модели могут учитывать такие факторы, как отношение сигнал/шум (SNR), замирание канала и помехи, и могут использоваться при оптимизации адаптивного алгоритма модуляции и кодирования (АМК) для достижения максимально возможной пропускной способности и надёжности, а также в целях оптимизации компромисса между пропускной способностью и надёжностью в схемах АМК. Например, если целью является максимизация пропускной способности, алгоритм АМС можно оптимизировать для выбора схемы модуляции и кодирования, обеспечивающей максимально возможную скорость передачи данных, даже если это приводит к более высокой частоте ошибок. С другой стороны, если целью является максимизация надёжности, алгоритм АМК можно оптимизировать для выбора схемы модуляции и кодирования, обеспечивающей минимально возможную частоту ошибок, даже если это приводит к снижению скорости передачи данных.

4. Применение компьютерной математики в сотовых системах 5G

Компьютерная математика играет решающую роль в нескольких приложениях сотовых систем 5G, включая моделирование каналов, формирование луча и распределение ресурсов.

Моделирование канала – процесс разработки математических моделей, точно отображающих поведение беспроводного канала между передатчиком и приёмником. Эти модели можно использовать для оптимизации производительности беспроводных систем путём прогнозирования условий канала и соответствующей оптимизации параметров системы. Компьютерная математика необходима для разработки точных моделей каналов, которые учитывают такие

факторы, как распространение сигнала, потери на пути, затухание и помехи.

Формирование луча – это метод, используемый в беспроводной связи для улучшения мощности и качества сигнала путём фокусировки передачи в определённом направлении. Он включает в себя оптимизацию фазы и амплитуды нескольких антенн для передачи сигналов в направлении приёмника при минимизации помех в других направлениях. Компьютерная математика используется для разработки алгоритмов формирования луча, которые оптимизируют передачу на основе условий канала и расположения приёмника.

Распределение ресурсов – процесс распределения сетевых ресурсов, таких как полоса пропускания, мощность и время передачи, между пользователями для оптимизации производительности системы. Это имеет решающее значение в сотовых системах 5G, где есть множество пользователей и устройств с различными скоростями передачи данных и требованиями (QoS). Использование компьютерной математики в таких приложениях позволяет разрабатывать эффективные и действенные алгоритмы, оптимизирующие производительность системы, что делает сотовые системы 5G реальностью.

5. Ограничения использования компьютерной математики в сотовых системах 5G

Хотя компьютерная математика необходима для разработки и совершенствования сотовых систем 5G, ее применение сопряжено с определёнными проблемами и ограничениями, которые нельзя игнорировать. Одним из наиболее существенных ограничений является сложность используемых моделей. Сотовые системы 5G очень сложны, имеют многоуровневую сетевую архитектуру и огромное количество взаимосвязанных устройств. В результате математические модели, используемые для проектирования и оптимизации этих систем, могут быть чрезвычайно сложными, что затрудняет их эффективное применение. Кроме того, беспроводные каналы в реальном мире очень изменчивы и непредсказуемы, с многочисленными источниками помех, шумов и замираний. Разработка математических моделей, которые точно фиксируют эту изменчивость и могут использоваться для оптимизации производительности системы, представляет собой серьёзную проблему. Сотовые системы 5G работают в переполненном радиочастотном спектре, где множество пользователей и приложений конкурируют за ограниченные ресурсы. Использование компьютерной математики для оптимизации распределения ресурсов и подавления помех может быть сложной задачей, поскольку требует решения сложных оптимизационных проблем с множеством противоречивых целей.

В целом, хотя использование компьютерной математики играет важную роль в проектировании и оптимизации сотовых систем 5G, важно осознавать проблемы и ограничения, связанные с этим. Решение указанных проблем требует сочетания междисциплинарного опыта, инновационных математических методов и глубокого понимания реальной изменчивости и ограничений сотовых систем 5G. Чтобы преодолеть эти проблемы и ограничения, исследователи разрабатывают новые математические модели, алгоритмы и методы оптимизации, которые могут справиться со сложностью, неопределённостью и требованиями к производительности в реальном времени сотовых систем 5G. К ним относятся использование машинного обучения, искусственного интеллекта и передовых методов оптимизации, таких как теория игр и выпуклая оптимизация.

6. Заключение

Развитие сотовых систем 5G – непрерывный процесс, и постоянно разрабатываются новые технологии и приложения. Таким образом, роль компьютерной математики в оптимизации этих систем будет по-прежнему решающей в будущем. Оптимизация сотовых систем 5G требует междисциплинарного подхода с привлечением экспертов из различных областей, таких как математика, инженерия и информатика. Потенциальные преимущества сотовых систем 5G, такие как улучшенная связь, увеличенная пропускная способность и снижение задержки, огромны, и компьютерная математика является важнейшим фактором, обеспечивающим эти преимущества. Таким образом, дальнейшие исследования и разработки в данной области необходимы для реализации всего потенциала сотовых систем 5G.

Литература

1. Zhang Q., Cheng L., Boutaba R. Network slicing for 5G networks: challenges and opportunities // IEEE Communications Magazine. 2018. 56(10). P. 32-37.
2. Li, L., Liang Y. Resource allocation for 5G wireless networks. Springer. 2017.
3. Zhang J., Ma X., Jiang Y. An overview of optimization techniques for 5G wireless communication networks // IEEE Network. 2019. 33(1). P. 176-181.
4. Tirkkonen O., Zheng F. Adaptive modulation and coding in 5G systems: from theory to practice // IEEE Communications Magazine. 2017. 55(3). P. 180-186.
5. Wang C.X., Haider F. 5G wireless: From just another G to a true revolution // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2016. 34(3). P. 329-337.
6. Rappaport T. et al. Overview of millimeter wave communications for fifth-generation (5G) wireless networks - with a focus on propagation models // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2017. Vol. 65, No. 12. P. 6213-6230.
7. Al-Sadoon M. et al. Beamforming in 5G wireless communications: An overview // IEEE Communications Magazine. 2018. Vol. 56, No. 3. P. 102-108.

Abed Androon, O.V. Tikhonova
Russian Technological University – MIREA

Keywords: 5G, mathematical models, communication network, computer mathematics, modulation and coding algorithms

Abstract. *Computer mathematics plays a critical role in enabling the efficient and effective design, optimization, and operation of 5G cellular systems. In this article, we provide an overview of 5G cellular systems and their key features, and discuss the role of computer mathematics in optimizing various aspects such as channel modeling, beamforming, and resource allocation. We also present specific examples of how computer mathematics can be used to optimize 5G cellular systems. This article emphasizes the crucial role of computer mathematics in optimizing network resources and ensuring reliable communication in varying channel conditions*

А.А. Бондарь

Российский технологический университет – МИРЭА

УДК 621.391

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ С ГИБКИМ ВЫБОРОМ КОРРЕКТИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ

Ключевые слова: *системы цифровой связи, помехоустойчивое кодирование, блочное кодирование, код Хэмминга, декодирование стираний, декодирование стираний с выбором, алгоритм декодирования Чейза, отношение сигнал / шум.*

В статье рассматривается модель системы связи, которая, ориентируясь на текущее значение отношения сигнал / шум в канале передачи, использует наиболее подходящий корректирующий алгоритм.

Введение

Обеспечение бесперебойной помехоустойчивой передачи информации является одной из приоритетных задач в радиотехнике. Обычно помехоустойчивость систем связи повышают либо за счёт увеличения мощности сигнала, либо применяя помехоустойчивое кодирование. Помехоустойчивое кодирование предполагает добавление к информационным битам сообщения проверочных битов. Наличие проверочных битов в сообщении позволяет на принимающей стороне произвести проверку принятых данных и, в случае необходимости, исправить возникшие ошибки. Такой способ является программным, не требует увеличения мощности передатчика и поэтому может быть проще реализован. Однако при кодировании требуется дополнительное время на формирование проверочных битов и проверку сообщения. Это

создает нагрузку на вычислительную часть системы, которая должна непрерывно вести обработку данных. Существует множество алгоритмов кодирования и декодирования разной степени сложности. Чем сложнее алгоритм декодирования, тем больше ошибок в сообщении он может исправить, но тем больше вычислительной мощности он будет требовать. Целью работы было создать математическую модель системы, которая сможет осуществлять выбор оптимальных с точки зрения исправляющей способности и вычислительных мощностей алгоритмов декодирования.

Алгоритмы кодирования и декодирования

В модели используются несколько алгоритмов декодирования, которые опираются на код Хэмминга. Код Хэмминга – линейный блочный код, который добавляет проверочные символы к исходному сообщению путём перемножения информационного вектора на порождающую матрицу. Декодирование кода Хэмминга в самом простом случае осуществляется перемножением принятого кодового слова на проверочную матрицу. Результатом такого перемножения является вектор синдрома, показывающий наличие либо отсутствие ошибок в сообщении. Если синдром нулевой, то сообщение было принято без ошибки, если синдром не нулевой, то по его значению можно однозначно определить бит, содержащий ошибку. Алгоритм декодирования Хэмминга является наиболее простым по вычислительной сложности из используемых в модели. Он может исправлять одиночные и фиксировать двойные ошибки.

Алгоритм декодирования стираний опирается на код Хэмминга и при исправлении ошибок использует свойство линейности и цикличности этого кода. Алгоритм стираний выбирает наименее надёжные биты в принятом сообщении и отмечает их как стёртые. Далее на основании того, что сумма по модулю двух битов на позициях, соответствующих ненулевым коэффициентам проверочного полинома, равна нулю, стёртые биты, оказавшиеся на проверяемых позициях, восстанавливаются. Путём циклического сдвига принятого вектора исправляются все стёртые биты в сообщении. Такой алгоритм способен исправить две ошибки в кодовом слове, однако требует немного больше вычислений, чем алгоритм Хэмминга.

Алгоритм декодирования стираний с выбором работает как стандартный алгоритм стираний, но способен исправлять три ошибки в принятом слове. Отличает его от стандартного алгоритма стираний то, что выбирается не два, а три наименее надёжных бита. Далее рассматриваются два случая: в первом в один из ненадёжных битов записывается единица, во втором в этот же бит записывается нуль. Два получившихся предполагаемых слова проходят процедуру стандартного декодирования стираний, после чего из них выбирается то, которое

оказывается наиболее близким к принятому сообщению. Таким образом, алгоритм декодирования стираний с выбором, опираясь на код Хэмминга, способен исправлять до трёх ошибок в принятом векторе. При этом по вычислительной сложности он практически сопоставим с обычными стираниями, незначительно превосходя их [1].

Алгоритм декодирования стираний с выбором и синдромом является дальнейшим развитием алгоритма декодирования стираний. Отличие этого алгоритма от стираний с выбором заключается в том, что количество стёртых битов можно увеличить до пяти. При этом резко возрастёт количество предполагаемых слов, что увеличит вычислительную нагрузку. Однако помимо обычной для стираний проверки суммы битов на определённых позициях в данном алгоритме у каждого предполагаемого слова определяется синдром. Это позволяет исключить предполагаемые слова с ненулевым синдромом из дальнейшего сравнения с принятым вектором и сократить количество предполагаемых слов. Данный алгоритм обладает гораздо большей исправляющей способностью, чем вышерассмотренные алгоритмы, но при этом требует существенно большего количества вычислительных операций, что делает его довольно громоздким с точки зрения вычислительной сложности [2].

Алгоритм декодирования Чейза – самый сложный по вычислительной способности из всех использованных в модели алгоритмов, но при этом обладающий лучшей исправляющей способностью. Принцип его заключается в том, что в стёртые биты записываются все возможные комбинации нулей и единиц, а затем каждое предполагаемое слово проходит процедуру стандартного декодирования Хэмминга. После этого происходит определение предполагаемого слова, наиболее близкого к принятому вектору. Алгоритм Чейза, исправляющий три ошибки, требует более чем в семь раз больше вычислительных операций, чем обычный алгоритм Хэмминга.

Модель системы связи

Структурная схема модели представлена на рисунке 1 и состоит из двух групп: группа определения качества связи и группа передачи данных.

В группу определения качества связи входят передатчик М-последовательности и блок определения отношения сигнал / шум. Задача этой группы – определять текущее отношение сигнал / шум в канале связи. Для определения этого отношения используется динамический способ оценки качества системы цифровой связи. Передатчик М-последовательности генерирует псевдослучайную последовательность битов по определённому правилу. Эта последовательность передаётся на блок определения отношения

сигнал / шум. В ходе передачи последовательность подвергается воздействию помех, приходящих от генератора шума. На блоке определения С/Ш известно правило формирования М-последовательности. Сравнивая полученные биты и биты, вычисленные в самом блоке, можно посчитать вероятность битовой ошибки, а от вероятности битовой ошибки перейти к отношению сигнал / шум в канале связи [3]. Текущее значение отношения сигнал / шум является выходным параметром группы определения качества связи.

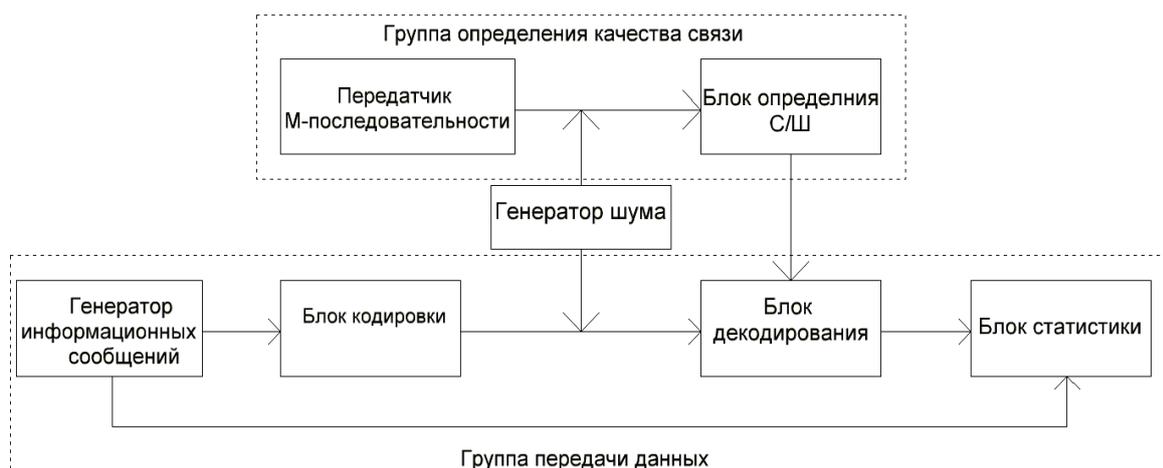


Рис. 1. Структурная схема модели

Группа передачи данных включает в себя генератор информационных сообщений, блок кодировки, блок декодирования и блок статистики. Генератор информационных сообщений формирует исходные данные, которые поступают в блок кодировки и в блок статистики. Блок кодировки осуществляет кодирование исходных данных кодом Хэмминга (в модели использован код Хэмминга (15,11)), после чего передаёт их дальше на блок декодирования. При передаче на кодовые слова оказывают воздействия помехи, создаваемые генератором шума. Следует отметить, что уровень помех и вероятность ошибки должны быть одинаковы для группы оценки качества связи и группы передачи данных. Блок декодирования принимает помимо передаваемых от кодера данных текущее значение отношения сигнал / шум, которое было вычислено группой определения качества связи. В зависимости от отношения сигнал / шум в блоке декодирования происходит выбор наиболее подходящего алгоритма декодирования. Если отношение сигнал / шум велико, то есть вероятность ошибки крайне мала, то целесообразно выбрать алгоритм декодирования Хэмминга как самый простой и быстрый. Если отношение сигнал / шум начинает уменьшаться, то по мере ухудшения качества связи будет выбираться всё более и более сложный корректирующий алгоритм, обеспечивающий исправление большего количества ошибок.

Рассмотренный в статье вариант системы цифровой связи позволит оптимально использовать вычислительную мощность приёмной аппаратуры в зависимости от текущего качества связи. Достоинство такого подхода в том, что при большом отношении сигнал / шум, когда уровень помех слабый, не используемая для декодирования вычислительная мощность может быть потрачена на увеличение скорости передачи данных или, в самом простом случае на экономию энергии, что важно, если речь идёт о мобильных устройствах. В случае, если уровень шума в канале высокий, для обеспечения помехоустойчивости будут использованы более сложные алгоритмы, что повлечёт за собой увеличение вычислительных затрат и, как следствие, падение скорости передачи данных либо повышение энергопотребления. Таким образом, использование гибкого выбора корректирующих алгоритмов приводит к более рациональному использованию вычислительных мощностей аппаратуры при сохранении помехоустойчивости на относительно постоянном уровне.

С помощью математической модели проверяются основные принципы работы предложенной системы связи и проводятся исследования разных алгоритмов декодирования на предмет оптимального их использования в зависимости от условий передачи данных. Дальнейшее развитие модели будет направлено на исследование цифровой системы связи с гибким выбором корректирующих алгоритмов в составе сети из нескольких приёмопередатчиков, где помимо такого параметра, как отношение сигнал / шум, на выбор алгоритма декодирования будут влиять количество ретрансляций сообщения и расположение абонентов в сети.

Все составляющие блоки рассмотренной математической модели, а также алгоритмы декодирования были реализованы в среде программирования C++. Каждый блок представляет собой отдельную подпрограмму, что позволяет использовать составные части модели в других проектах и обеспечивает возможность быстрого и простого добавления новых алгоритмов и подпрограмм. Таким образом модель может быть легко изменена и подстроена под исследование конкретного явления или определённых условий передачи информации.

Литература

1. Бондарь А.А. Исследование алгоритма декодирования стираний с выбором // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 11–19.
2. Бондарь А.А. Исследование различных алгоритмов декодирования стираний для повышения помехоустойчивости цифровой системы связи // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2021. Вып. 22. С. 37–42.

3. Тихонова О.В., Бондарь А.А. Динамический способ оценки качества системы цифровой связи: моделирование и исследование // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. Вып. 23. С. 40–45.

A.A. Bondar

Russian Technological University – MIREA

A MODEL OF A DIGITAL COMMUNICATION SYSTEM WITH FLEXIBLE SELECTION OF ERROR-CORRECTING ALGORITHMS

Keywords: *digital communication systems, noise-resistant coding, block coding, Hamming code, erasure decoding, erasure decoding with a choice, Chase decoding algorithm, signal-to-noise ratio.*

Abstract. *This article discusses a communication system model that, based on the current signal-to-noise ratio in the transmission channel, uses the most appropriate corrective algorithm.*

А.С. Волков, Е.М. Портнов, В.В. Кокин

Московский институт электронной техники

УДК 004.93

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КООРДИНАТ ОБЪЕКТОВ, ДВИЖУЩИХСЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Ключевые слова: *математическая модель, 3D-координаты, целевой объект, БПЛА, детектирование, прогнозирование.*

В статье рассмотрены некоторые наиболее актуальные вопросы применения и разработки модели прогнозирования координат объектов, движущихся по поверхности Земли, обнаружения и прогнозирования возникновения опасных ситуаций с использованием вычисленных 3D-координат детектируемых объектов.

Многие объекты (например, люди, автомобили, мотоциклы, велосипеды) не могут совершать движения во всех трех измерениях (как самолеты, вертолеты или БПЛА), а двигаются только в рамках некоторой поверхности. Этот факт может быть использован для

уменьшения области поиска целевого объекта, если известны его 3D-координаты P_{i-1}^w , вычисленные для предыдущего видеокadra.

Локальная окрестность точки P_{i-1}^w незначительно отличается от плоскости, и в текущий момент времени объект находится в этой плоскости и имеет пока неизвестные координаты в точке P_i^w , которая от точки P_{i-1}^w лежит на расстоянии не более чем $S_{max} = V_{max}^{obj} \Delta t_{i-1}^i$.

Переведем координаты точки P_{i-1}^w в геодезическую систему координат $(lon_{i-1}, lat_{i-1}, alt_{i-1})$, далее рассмотрим точку $\hat{P}_{i-1}^w = (lon_{i-1}, lat_{i-1}, alt_{i-1} + \Delta alt)$, где Δalt – некоторое положительное число. Рассмотрим вектор $\hat{P}_{i-1}^w P_{i-1}^w$, нормируем его и обозначим как \mathbf{n}_1 . Физический смысл этого вектора состоит в том, что он является нормалью к поверхности Земли, направленной из точки P_{i-1}^w . Привяжем к точке P_{i-1}^w начало некоторой системы координат, у которой направление оси OZ совпадает с направлением вектора \mathbf{n}_1 , а две другие оси лежат в касательной плоскости, проходящей через точку P_{i-1}^w . Чтобы полностью определить систему координат, осталось определить направления двух других векторов (\mathbf{n}_2 и \mathbf{n}_3) – единичные орты.

Для вычисления вектора \mathbf{n}_2 примем, что он должен быть единичной длины и перпендикулярен вектору \mathbf{n}_1 , что порождает следующую систему уравнений:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ n_{2z} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} n_{2x}^2 + n_{2y}^2 + n_{2z}^2 = 1 \\ n_{1x}n_{2x} + n_{1y}n_{2y} + n_{1z}n_{2z} = 0 \end{cases}$$

Перпендикулярность определяется свойством скалярного произведения двух векторов. Как видим, количество неизвестных на единицу больше количества уравнений. Положим $n_{2x} = 0$, решим полученную систему уравнений. Вектор \mathbf{n}_3 можно вычислить, используя свойство векторного произведения; результатом этой операции является вектор, перпендикулярный двум исходным, а его длина равна произведению длин исходных векторов, умноженная на синус угла между ними. В итоге получаем:

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm \frac{n_{1z}}{\sqrt{n_{1y}^2 + n_{1z}^2}} \\ \mp \frac{n_{1y}}{\sqrt{n_{1y}^2 + n_{1z}^2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \mp \sqrt{n_{1y}^2 + n_{1z}^2} \\ \pm \frac{n_{1x}n_{1y}}{\sqrt{n_{1y}^2 + n_{1z}^2}} \\ \pm \frac{n_{1x}n_{1z}}{\sqrt{n_{1y}^2 + n_{1z}^2}} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Из столбцов векторов \mathbf{n}_2 , \mathbf{n}_3 и \mathbf{n}_1 можно составить ортонормированную матрицу R_p , которая определяет ориентацию системы координат, привязанной к точке P_{i-1}^w .

На рисунке 1 представлена область поиска целевого объекта, движущегося по плоскости. Область радиуса S_{\max} вокруг точки P_{i-1}^w вписана в квадрат. Символом G обозначена касательная плоскость.

Как видно, четыре вершины квадрата имеют следующие координаты:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} +S_{\max} \\ -S_{\max} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} +S_{\max} \\ +S_{\max} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} -S_{\max} \\ +S_{\max} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_4 = \begin{bmatrix} -S_{\max} \\ -S_{\max} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

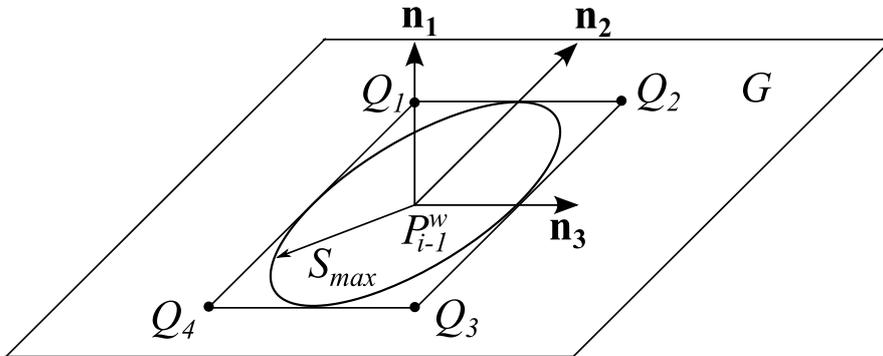


Рис. 1. Область поиска целевого объекта, движущегося по плоскости

Вычислим 3D-координаты каждой из точек Q_j в глобальной системе координат: $\tilde{Q}_j = R_p Q_j + P_{i-1}^w$, а также координаты этих точек в системе координат камеры: $\hat{Q}_j = R_i^w \tilde{Q}_j + T_i^w$. Проецируя точки на плоскость изображения камеры, находим на изображении ограничивающий прямоугольник для четырех полученных точек – это и будет область поиска целевого объекта на текущем кадре с камеры на БПЛА [1].

Рассмотрим следующие примеры.

Случай точечных объектов

Ситуация первая: объект находится слишком близко к БПЛА и может столкнуться с ним. Эту ситуацию можно формализовать следующим образом:

- расстояние от БПЛА до объекта в определенный момент стало меньше некоторого порогового значения;
- на протяжении определенного промежутка времени расстояние от БПЛА до объекта не превосходит некоторого порога. Для обнаружения подобной ситуации необходимо рассмотреть количество измерений 3D-координат объекта, соответствующих этому промежутку времени, и убедиться, что для всех таких измерений расстояние между камерой и объектом меньше порога.

Ситуация вторая: два целевых объекта находятся слишком близко друг к другу и могут спровоцировать столкновение друг с другом. Эту ситуацию можно формализовать следующим образом:

- расстояние между парой объектов в определенный момент стало меньше некоторого порогового значения. При этом перебираем все пары объектов, наблюдаемых на текущем кадре, и вычисляем евклидово расстояние между ними [2];
- на протяжении определенного промежутка времени расстояние от БПЛА до объекта не превосходит некоторого порога. Для обнаружения подобной ситуации необходимо рассмотреть количество измерений 3D-координат некоторой пары объектов, соответствующих этому промежутку времени, и убедиться, что для всех таких измерений расстояние между объектами меньше порога.

Случай протяженных объектов (регионов)

Под регионом здесь понимается целевой объект, который не имеет определенных географических координат, а занимает на поверхности Земли определенную площадь, причем площадь объекта может меняться с течением времени. Распространение пожара, разлив нефтепродуктов на водоеме – примеры подобных объектов, для которых необходим экологический мониторинг. Такой мониторинг может осуществляться с помощью сенсоров, установленных на БПЛА.

Для решения задач обнаружения загрязнений нефтепродуктами (над поверхностью воды), как показал анализ литературы, целесообразно использование инфракрасного диапазона LWIR с длиной волны 8–14 мкм. Во всех случаях результатом вычислений являются координаты габаритных прямоугольников, каждый из которых ограничивает обнаруженный на изображении целевой объект. Обозначим такой габаритный прямоугольник через $(x_{rect}, y_{rect}, w_{rect}, h_{rect})$.

Предположим, что известна текущая высота полета БПЛА над земной поверхностью (в метрах), ее выдает установленный на БПЛА баровысотомер, обозначим высоту как h^b . Условимся, что GPS-модуль и

баровысотометр установлены на БПЛА рядом, поэтому можно считать, что h^b равна высоте, на которой располагается GPS-модуль над поверхностью Земли.

Примем, что БПЛА совершает свои полеты на относительно небольшой высоте, поэтому на каждом снимке с БПЛА запечатлена территория небольшой площади, на которой перепады высот, скорее всего, будут незначительными. Шарообразностью Земли в этом случае можно пренебречь. То есть наблюдаемую территорию можно аппроксимировать плоскостью. Представим ее уравнение в глобальной системе координат.

Поскольку GPS-сенсор в данный момент времени имеет координаты $P_0 = (lon_i, lat_i, alt_i)$ в геодезической системе координат и располагается на высоте h^b над поверхностью, то точка поверхности, над которой располагается сенсор, имеет координаты $P_1 = (lon_i, lat_i, alt_i - h^b)$. Далее, восстанавливаем положение и ориентацию GPS-сенсора в геоцентрической системе координат по следующим формулам из ГОСТ Р 51794-2008:

$$\begin{aligned} X &= (N + alt_i) \cos(lat_i) \cos(lon_i), \\ Y &= (N + alt_i) \cos(lat_i) \sin(lon_i), \\ Z &= \left[(1 - e^2) N + alt_i \right] \sin(lat_i), \\ N &= \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(lat_i)}}, \\ \varepsilon &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \end{aligned} \tag{4}$$

здесь a – экваториальный радиус Земли, b – полярный радиус (берутся из модели WGS-84). Аналогично вычисляем геоцентрические координаты для точки P_1 . Обозначим координаты этих двух точек в геоцентрической системе координат как $\tilde{P}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ и $\tilde{P}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$. Уравнение плоскости можно задать в виде $(\vec{n}, P) + d = 0$, где $\vec{n} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ – нормаль к плоскости, P – точка, принадлежащая плоскости, оператор (\cdot) задает скалярное произведение. Вектор $\tilde{P}_1 - \tilde{P}_0 = (X_1 - X_0, Y_1 - Y_0, Z_1 - Z_0)$ как раз и будет этой нормалью, а $d = -(\vec{n}, \tilde{P}_1)$.

Далее, по координатам габаритного прямоугольника, который ограничивает на изображении детектированный целевой объект,

требуется восстановить 3D-координаты четырех точек на поверхности Земли, которые проецируются в угловые точки данного прямоугольника. Эти точки на поверхности будут задавать выпуклый четырехугольник. В системе координат камеры точки будут иметь следующие 2D-координаты:

$$q_1 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} w-0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}, q_3 = \begin{bmatrix} w-0,5 \\ h-0,5 \end{bmatrix}, q_4 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ h-0,5 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь w и h – ширина и высота изображения в пикселях. Чтобы найти 3D-координаты тех точек поверхности, которые проецируются в каждую из точек q_j , требуется найти пересечения плоскости $(\vec{n}, P) + d = 0$ с четырьмя прямыми, каждая из которых проходит через две точки: начало системы координат, привязанных к видеокамере (обозначим ее как Q_0^C), и точку пространства, соответствующую положению точки q_j на светочувствительной матрице камеры (то есть на плоскости изображения камеры), обозначим 3D-координаты второй точки как Q_j^C :

$$Q_0^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_j^C = M^{-1}q_j = M^{-1} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Переведем координаты точек Q_0^C и Q_j^C в глобальную (геоцентрическую) систему координат:

$$\begin{aligned} Q_0^G &= (R_i^w)^t (Q_0^C - T_i^w), \\ Q_j^G &= (R_i^w)^t (Q_j^C - T_i^w). \end{aligned} \quad (7)$$

Вычисляем уравнение прямой, проходящей через точки Q_0^G и Q_j^G , находим пересечение прямой с плоскостью, которая аппроксимирует земную поверхность, точку пересечения обозначим как \hat{Q}_j^G , ее координаты заданы в геоцентрической системе координат. В результате имеем 3D-координаты четырех точек выпуклого четырехугольника, он соответствует протяженному целевому объекту (региону) на земной поверхности. Поскольку, например, площадь пожара или нефтяного загрязнения может не помещаться целиком в один кадр с видеокамеры на БПЛА, необходимо объединить информацию с нескольких кадров: найти объединение всех вычисленных четырехугольников, в результате получим выпуклый многоугольник. Условимся, что для полного

исследования территории (съемки всей территории пожара или нефтяного загрязнения) беспилотному аппарату требуется относительно небольшой промежуток времени: ситуация существенным образом не меняется между первым и последним кадром. Далее, поскольку районов чрезвычайной ситуации может быть несколько и они могут между собой не пересекаться (например, несколько отдельных площадей возгораний), вышеуказанных выпуклых многоугольников также может получиться несколько [3].

Рассмотрим отдельно каждый из таких многоугольников, построенных по результатам облета территории в момент времени i . Найдем центр тяжести получившегося многоугольника и выпустим из него N радиальных линий, угол между соседними линиями будет равным $\frac{360^\circ}{N}$ (рис. 2, в данном случае $N = 16$) [4].

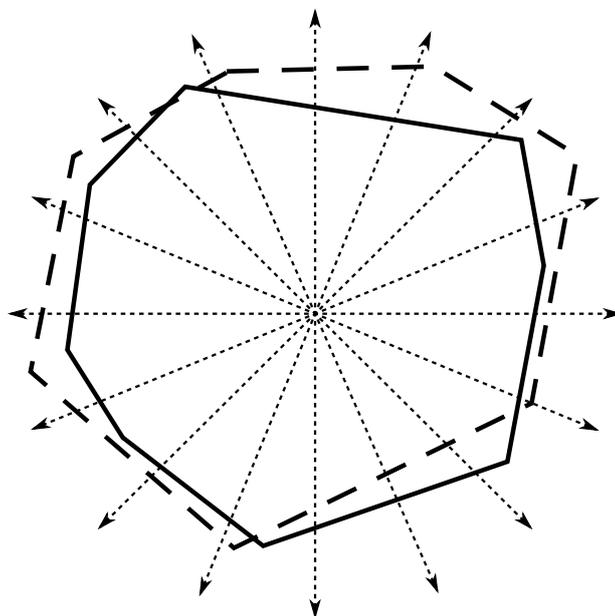


Рис. 2. Иллюстрация к предложенному способу прогнозирования состояния протяженных целевых объектов (регионов)

Вычислим координаты пересечения этих линий с многоугольником, обозначим эти координаты как P_i^k , $k = 1 \dots N$. Многоугольник обозначен сплошной замкнутой линией. Для момента времени $i+1$ также построим соответствующий многоугольник и найдем точки его пересечения с радиальными линиями, выпущенными из центра тяжести предыдущего многоугольника (для момента времени i), этот многоугольник обозначен на рисунке 2 прерывистой линией. В результате имеем множество координат P_{i+1}^k , $k = 1 \dots N$. Таким образом, множество пар (P_i^k, P_{i+1}^k) задают вектора, характеризующие изменения протяженного целевого объекта (региона) по каждому из N направлений. Пара точек позволяет построить линейную модель прогнозирования ситуации в последующие

моменты времени, при необходимости модель может быть построена по большему количеству точек (наблюдений).

Заключение

Исходными данными для разработанной методики являются данные с установленных на БПЛА сенсоров: в первую очередь видеокамеры, а также показания спутниково-инерциальной навигационной системы и высотомера (для оценки 3D-координат наблюдаемых целевых объектов). Сами же целевые объекты могут быть двух видов:

- протяженные природные объекты: разливы нефтепродуктов на водной поверхности или на суше, пожары и очаги возгораний на поверхности Земли (леса, поля, антропогенные территории) или на водной поверхности. Подобные ситуации оказывают непосредственное влияние на экологическую ситуацию на территории, для которой выполняется мониторинг;

- точечные объекты: человеческие фигуры и различные виды транспорта. Хотя подобные объекты не оказывают непосредственного влияния на состояние природных объектов и на экологическую ситуацию, попавший в кадр человек может оказаться, к примеру, одним из виновников возникновения пожара или разлива нефтепродуктов, или же может попасть в число пострадавших от возникшей форс-мажорной ситуации. Аналогично в транспортном средстве могут находиться злоумышленники либо случайно оказавшиеся на проблемной территории лица, которые также могут попасть в число пострадавших. Кроме того, и само транспортное средство может пострадать от форс-мажорной ситуации и даже стать катализатором, при наличии которого ситуация еще более накалится (например, огонь от пожара подходит к транспортным средствам, перевозящим горючие или взрывоопасные материалы).

Трехмерные координаты наблюдаемых целевых объектов, которые могут быть вычислены с помощью вышеизложенной методики, можно использовать для решения задач обнаружения и прогнозирования возникновения опасных ситуаций с участием этих объектов.

Литература

1. Portnov E.M., Kyaw Myo A., Kokin V.V., Kasimov R.A., Tsymbalov S.V. Development of a Method for Accelerating the Processing of Streaming Video Received from UAVs// Proceedings of the 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, ElConRus 2021. P. 2217–2221.
2. Khachumov V.M., Portnov E.M., Fedorov P.A., Kasimov R.A., Linn A.N. Development of an Accelerated Method for Calculating Streaming Video Data Obtained from UAVs // 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus).

3. Хейн Хтет Зо, Портнов Е.М., Хачумов В.М., Баин А.М. Разработка математической модели решения задачи классификации данных обработки потокового видео//Перспективы науки, 2022, №11. С. 22-27.

4. Хейн Хтет Зо, Е.М. Портнов, Хачумов В.М. Разработка способа ускоренной обработки потокового видео с беспилотных летательных аппаратов// Перспективы науки, 2022, №11. С. 27-32.

A.S. Volkov, E.M. Portnov, V.V. Kokin
Moscow Institute of Electronic Technology

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR PREDICTING THE COORDINATES OF OBJECTS MOVING ON THE EARTH'S SURFACE

Keywords: *mathematical model, 3D coordinates, object observations, UAV, detection, forecasting.*

Abstract. *The article discusses some of the most pressing issues of application and development of a model for predicting the coordinates of objects moving on the Earth's surface, detecting and predicting the occurrence of dangerous situations using the calculated 3D coordinates of detected objects.*

Г.С. Евдокимова, В.И. Усачев
Смоленский государственный университет

УДК 519.688

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПАКЕТ JAMOVI: НОВЫЙ УРОВЕНЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С R

Ключевые слова: *Jamovi, R, интеграция с R, дополнительные модули, Base R, Editor to run R, ввод данных, линейная регрессионная модель, ARIMA модель временного ряда, табличный редактор данных, RStudio.*

Jamovi – статистический пакет, созданный как некое расширение JASP и способный предоставить возможность работы с R пользователям, далеким от программирования. В данной работе приводятся четыре варианта интеграции jamovi с языком R. Основные выводы проиллюстрированы на конкретном примере.

Продолжим исследование по применению свободно распространяемого программного обеспечения в стохастике [1; 2].

Стартовая страница проекта jamovi содержит три рекламных пункта.

1. **Статистика выполняется просто.** Это новая программа «третьего поколения», и она может служить привлекательной альтернативой для дорогостоящих пакетов SPSS и SAS.

2. **Интеграция с R.** Jamovi выстраивается над R, доставляя при этом доступ к кодам R и лучшим способам статистической обработки данных.

3. **Пакет свободный и открытый.** Это одна из основных ценностей разработчиков, потому что jamovi создается научным сообществом для научного сообщества.

Заявления пунктов второго и третьего вполне соответствуют представленной программе. Интеграция с R в jamovi весьма хорошая.

Получить этот статистический пакет можно по ссылке <https://www.jamovi.org/download.html>. Выбор варианта загрузки *.zip, пожалуй, предпочтительней. Мы получаем после распаковки версию, не требующую инсталляции и работающую в том числе и со сменных носителей. Запускающий файл (jamovi.exe) находится в папке bin [3; 4].

При запуске открывается окно следующего вида (см. рис. 1). И первая приятная неожиданность – пакет русифицирован. Подхватываются языковые системные значения по умолчанию. Если этого не произошло, то следует нажать на значок в виде трех вертикально расположенных точек в верхнем правом углу (настройки программы) и выбрать русский язык. Однако заметим, что перевод неполный и его качество часто желает лучшего.

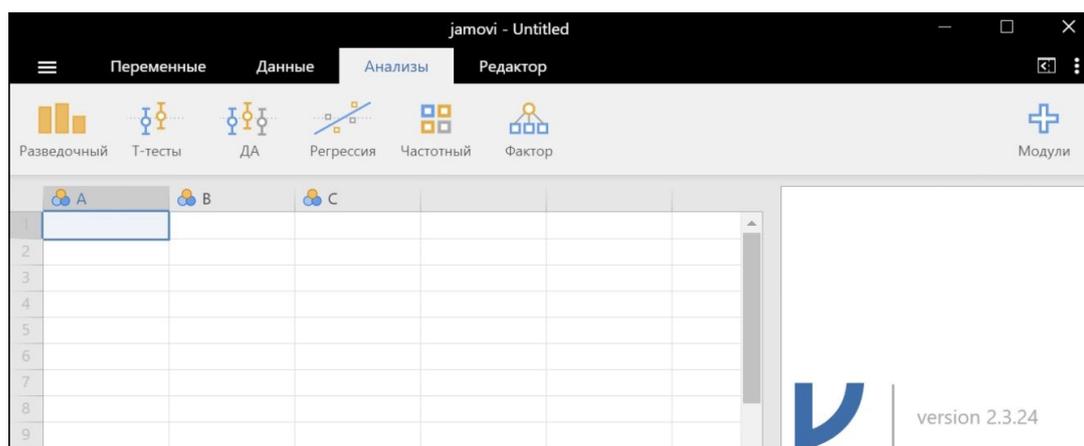


Рис. 1. Стартовое окно программы jamovi

На вкладке меню «Анализ» шесть модулей (блоков), содержащих начальный набор из 45 (зависит от версии) методов статистической обработки.

Базовый функционал jamovi можно существенно увеличить за счет установки дополнительных модулей – около 50. Особый интерес для интеграции с R представляют два модуля: jmvbaseR – **Base R** и Rj - Editor to run R code inside jamovi – **R** (см. А и В, рис. 2).

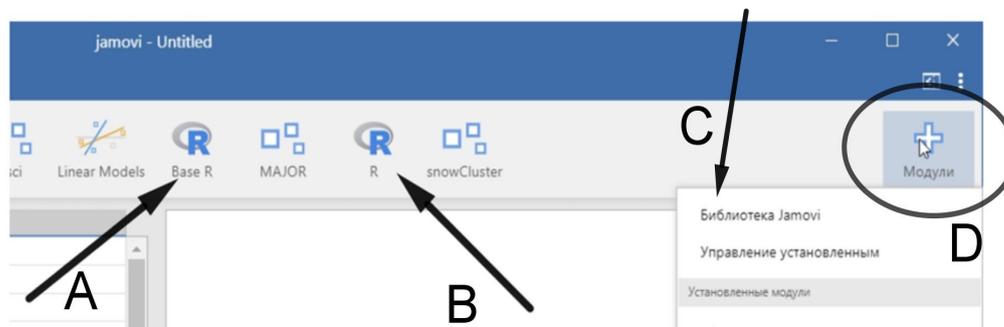


Рис. 2. Установка дополнительных модулей

Вместе с модулем **R** устанавливается и пакет языка R – «внутренний» для jamovi, позволяющий использовать R независимо от наличия его установки на компьютере. К этому «внутреннему» R прилагается (в этой же установке) большая библиотека написанных дополнительных пакетов (libraries) по различным разделам статистики и её приложениям. Некоторые из этих библиотек особенно интересны. Например – stats. Она содержит более 300 действий (в R-кодах): регрессионные модели, временные ряды, кластерный анализ k -средних и многое другое.

Ввод данных для анализа удобен и вариабелен.

Первый способ. В отличие от JASP, ввод данных можно осуществлять вручную, через внутренний редактор – обычную электронную таблицу. Десятичная часть отделяется от целой точкой.

Второй способ. Можно воспользоваться буфером обмена, если в качестве разделителя в исходной электронной таблице используется точка.

Третий способ. Импортировать данные из файлов с расширениями *.omv, *.omt, *.csv, *.txt, *.ods (Libre Office), *.xlsx, *.JSON (может использоваться в любом языке программирования), *.sav(SPSS), *.RData(R), *.dta(Stata), *.xpt(SAS), *.jasp(JASP).

Далее кратко опишем синергию R и jamovi в четырех пунктах. Третий и четвертый, как представляется авторам, являются наиболее важными. Для иллюстрации проводимых действий загружен файл с данными в метрической шкале.

Пункт первый. Если в *настройках* поставить галочку в квадратике рядом со строчкой «Синтаксический режим», то в окне «Результаты» вывод представляется в формате языка R. Это указывает на использование R в фоновом режиме. Например, получим линейную

регрессионную модель зависимости веса (переменная *ves*) от роста (переменная *rost*) и некоторые показатели качества модели (см. рис. 3).

Линейная регрессия

```

jmv::linReg(
  data = data,
  dep = ves,
  covs = rost,
  blocks = list(
    list(
      "rost"
    ),
    refLevels = list(),
    r2Adj = TRUE,
    modelTest = TRUE)
)
  
```

Показатели соответствия модели

Модель	R	R ²	Скорректированный R ²	Тест всеобъемлющей модели			
				F	df1	df2	p
1	0.802	0.644	0.640	177	1	98	<.001

Коэффициенты модели - ves

Предиктор	Вес	SE	t	p
Константа	-92.660	11.4294	-8.11	<.001
rost	0.917	0.0689	13.30	<.001

Рис. 3. Линейная модель регрессии в jamovi

Представленный вариант обработки в jamovi дает понимание использования синтаксиса R и его особенностей в этой программе.

Если запустить, например, RStudio, в которой установлен пакет jmv (The 'jamovi' Analyses), то, загрузив данные того же примера и вставив набор тех же команд, получим аналогичный вывод (см. рис. 4).

Пункт второй. Использовать модуль **Base R** (+ включить и «Синтаксический режим»). Сравнение с пунктом первым – скорее всего, хуже. Выбор вида анализа производится из меню этого модуля, которое меньше по содержанию, чем без его включения. В R-кодах будет виден только результат.

Пункт третий. Выбираем модуль **R** и в нем **Rj Editor**. Этот вариант позволяет использовать максимум возможностей встроенного языка R за счет подключения функций из пакетов установленной в jamovi библиотеки дополнений для R.

Приведем пример. Необходимо построить две ARIMA модели временного ряда (столбец *ts* в загруженном файле для иллюстрации действий в jamovi). Количество членов авторегрессии – в первой и второй 3, количество дифференцирований исходного временного ряда – в первой 0 и 1 во второй, величина лага скользящей средней – в первой и второй 2. Методы подгонки CSS и ML (см. рис. 5).

Пункт четвертый. При помощи описываемой ниже процедуры можно превратить jamovi в табличный редактор данных для установленного на компьютере варианта языка R.

```

1 jmv::linReg(
2   data = dataset,
3   dep = ves,
4   covs = rost,
5   blocks = list(
6     list(
7       "rost")),
8   refLevels = list(),
9   r2Adj = TRUE,
10  modelTest = TRUE)

```

LINEAR REGRESSION

Model Fit Measures

Model	R	R ²	Adjusted R ²	F	df1	df2	p
1	0.8022110	0.6435424	0.6399051	176.9275	1	98	< .0000001

MODEL SPECIFIC RESULTS

MODEL 1

Model Coefficients - ves

Predictor	Estimate	SE	t	p
Intercept	-92.6596753	11.42943551	-8.107109	< .0000001
rost	0.9171044	0.06894791	13.301411	< .0000001

Рис. 4. Линейная модель регрессии в RStudio

Rj Editor

```

1 library(stats)
2 tt = c(data$ts)
3 arima(tt, order = c(3,0,2), method = "CSS")
4 arima(tt, order = c(3,1,2), method = "ML")
5

```

Результаты

Rj Editor

Call:
arima(x = tt, order = c(3, 0, 2), method = "CSS")

Coefficients:

	ar1	ar2	ar3	ma1	ma2	intercept
	1.138	0.546	-0.680	0.085	-0.248	-2443.0
s.e.	0.099	0.202	0.104	0.141	0.121	441.8

sigma² estimated as 93.4: part log likelihood = -368.7

Call:
arima(x = tt, order = c(3, 1, 2), method = "ML")

Coefficients:

	ar1	ar2	ar3	ma1	ma2
	0.254	0.497	0.249	-0.091	-0.032
s.e.	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN

sigma² estimated as 98.4: log likelihood = -368.5, aic = 748.9

Рис. 5. Построение ARIMA моделей

Запускаем, например, RStudio и устанавливаем два пакета – 'jmvconnect' и 'jmvcore'. Подключаем их, поставив галочки в списке доступных пакетов (правое нижнее окно, вкладка 'Packages'). Затем открываем jmvовi и загружаем файл данных для анализа. С помощью команды *read* ('имя загруженного файла') данные становятся

доступными в RStudio в виде (структуре) 'data.frame'. Если произвести какие-либо изменения, используя рабочую электронную таблицу окна jamovi, то надо повторно применить команду *read*.

Литература

1. Евдокимова Г.С., Усачев В.И. Использование пакета прикладных программ JASP в процессе преподавания стохастики // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи. Киров, 2021. С. 75-83.
2. Евдокимова Г.С., Усачев В.И. Решение задач стохастики в пакете прикладных программ GRETЛ // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. Вып.23. С. 343-347.
3. Основы статистики для психологов. URL: https://handbook.mathpsy.com/?page_id=958 (дата обращения: 25.02. 2023).
4. Documentation for jamovi; <https://docs.jamovi.org/> (дата обращения: 25.02. 2023).

G.S. Evdokimova, V.I. Usachev
Smolensk State University

JAMOVI STATISTICAL PACKAGE: A NEW LEVEL OF INTERACTION WITH R

Keywords: *jamovi, R, integration with R, additional modules, Base, Editor to run R, data entry, linear regression model, ARIMA time series model, tabular data editor, RStudio.*

Abstract. *Jamovi is a statistical package created as a kind of extension of JASP and capable of providing an opportunity to work with R to people far from programming. This paper presents four options for integrating jamovi with the R language. The main conclusions are illustrated by a concrete example.*

В.О. Жилинский
*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»,
ФГУП «ВНИИФТРИ»*

УДК 004.85

СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ КОМПЕНСАЦИИ ОСТАТОЧНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПСЕВДОДАЛЬНОСТИ

Ключевые слова: *машинное обучение, алгоритмы, навигационная задача, гиперпараметры, ГЛОНАСС.*

В настоящее время проводятся работы по модернизации ГНСС систем и их эксплуатационных характеристик, включая точность, доступность, целостность и помехозащищенность. Несмотря на активное развитие ГНСС, постоянно растущие требования потребителей не могут быть удовлетворены в полном объеме. Повышение точности определения местоположения является одной из основных целей текущего этапа модернизации системы ГЛОНАСС. В статье описывается подход к расчету опорных измерений псевдодальности и остаточной погрешности определения псевдодальности, рассматривается процесс построения модели регрессии для прогнозирования остаточной погрешности, включая выбор признаков, и сравнивается эффективность работы моделей, построенных с использованием различных алгоритмов машинного обучения: Light GBM, CatBoost, XGBoost, Extra Trees, Random Forest и Neural Network. Измерения проводились для всех наблюдаемых навигационных космических аппаратов системы ГЛОНАСС. В результате экспериментов худшие результаты показали алгоритмы Extra Trees, Random Forest, Neural Network. Лучшие результаты продемонстрировали модели, построенные различными реализациями алгоритма градиентного бустинга с небольшим различием в оценках.

1. Постановка задачи

С момента официального ввода в эксплуатацию BeiDou и Galileo существует четыре полноценно функционирующие системы спутниковой навигации с глобальным покрытием, а для потребителей доступны сигналы более 100 спутников. Глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС) отличаются друг от друга как по реализации, так и по эксплуатационным характеристикам: качество услуг определения местоположения, навигации и синхронизации (PNT) различно для каждой системы, что также актуально для ГЛОНАСС из-за особенностей ее построения и метода множественного доступа с частотным разделением сигналов (FDMA). В настоящее время проводятся работы по модернизации системы ГЛОНАСС и улучшению её ключевых характеристик, включая точность, доступность, целостность, непрерывность и помехозащищенность. Повышение точности определения местоположения ГЛОНАСС является одной из основных целей текущего этапа модернизации, который включает в себя усовершенствование как наземного сегмента (сегмента управления), так и космического сегмента (спутниковой группировки). При этом на определение координат местоположения в навигационной аппаратуре потребителя (НАП) значительное влияние оказывают также выбранные навигационные алгоритмы и модели для компенсации составляющих

погрешности определения псевдодальности. В настоящее время многие потребители ГНСС требуют высокой точности, доступности и целостности. Точность ГНСС является одной из наиболее важных характеристик для различных типов потребителей, например, автономных транспортных средств [1], и зависит от рабочего созвездия навигационных космических аппаратов (НКА) (то есть тех сигналов НКА, которые будут приняты в обработку) и навигационных алгоритмов. Для достижения высокой точности необходимо компенсировать составляющие погрешности определения псевдодальности в соответствии с моделями и выбирать такие НКА, которые могут гарантировать низкое значение геометрического фактора ухудшения точности. Однако не все составляющие погрешности определения псевдодальности могут быть устранены известными математическими моделями, возникает остаточная погрешность определения псевдодальности. Эта погрешность может быть оценена с помощью модели машинного обучения и в дальнейшем устранена, после чего в решении используются скорректированные значения псевдодальности [2]. Существует множество алгоритмов машинного обучения, которые могут быть применены для построения модели машинного обучения: линейная регрессия, SVM, kNN, ElasticNet, дерево решений и многие другие [3], которые могут предсказать целевое значение по вектору независимых переменных. В статье представлено сравнение показателей следующих моделей: *Light GBM*, *CatBoost*, *XGBoost*, *Extra Trees*, *Random Forest* и *Neural Network*.

2. Построение модели регрессии

Прогнозирование остаточной погрешности определения псевдодальности можно рассматривать как задачу регрессии, когда необходимо найти связь между зависимой (целевой) переменной и одной или несколькими независимыми переменными (предикторами). Алгоритмы регрессии относятся к разделу машинного обучения «обучение с учителем» (Supervised learning) и оперируют совокупностью прецедентов – обучающей выборкой.

Для формирования обучающей выборки, то есть пар «объект, ответ», необходимо сначала разработать признаковое описание объекта и знать точный ответ – значение независимой переменной для фиксированных значений переменных вектора признаков. В качестве целевой переменной в задаче выступает остаточная погрешность определения псевдодальности. Уравнение псевдодальности имеет следующий вид [4]:

$$R_i = \rho_i + c(\delta t - \delta t_i) + G_i + T_i + I_i + b_i + M_i + \varepsilon_i, \quad (1)$$

где $\rho_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$ – геометрическая дальность между НКА и НАП; x_i, y_i, z_i и x, y, z – координаты i -го НКА и НАП

соответственно в прямоугольной геоцентрической системе координат; c – скорость света; δt_i – смещение шкалы времени НКА; δt – смещение шкалы времени НАП; G_i – погрешность из-за релятивистских и гравитационных эффектов; T_i – тропосферная погрешность; I_i – ионосферная погрешность; b_i – инструментальная погрешность НАП; M_i – задержка многолучевого распространения сигнала; ε_i – прочие составляющие погрешности.

Уравнение (1) может быть использовано для получения опорных измерений псевдодальности, если известны точные координаты местоположения НАП. Для этого антенна НАП размещается на геодезическом пункте. Из (1) также видно, что существует еще одна составляющая, которая может привести к ошибке в расчетах, – смещение шкалы времени НАП. Чтобы правильно учесть эту временную задержку, можно использовать высокостабильный стандарт частоты и времени, а затем аппроксимировать её полиномами.

Для вычисления остаточной погрешности определения псевдодальности необходимо измерить псевдодальности до видимых НКА и скорректировать их значения на моделируемые составляющие погрешности, для которых введем обозначение $Tm_i = G_i + T_i + I_i + b_i + M_i$, тогда (1) примет вид:

$$R_i = \rho_i + c\delta t - c\delta t_i + Tm_i + \varepsilon_i. \quad (2)$$

Тогда остаточную погрешность определения псевдодальности можно вычислить в соответствии с (3) – (5):

$$R_i^r = \rho_i^r + c\delta t^r - c\delta t_i + Tm_i^r + \varepsilon_i, \quad (3)$$

$$R_i^r - R_i = \Delta R = \Delta\rho_i + \Delta c\delta t + \Delta Tm_i, \quad (4)$$

$$\Delta R = (\rho_i^r - \rho_i) + c(\delta t^r - \delta t) + (Tm_i^r - Tm_i). \quad (5)$$

После построения модели машинного обучения измерение псевдодальности может быть скорректировано на прогнозное значение остаточной погрешности ($\Delta\hat{R}_i$):

$$R_i^c = \rho_i + c(\delta t - \delta t_i) + Tm_i + \Delta\hat{R}_i + \varepsilon_i. \quad (6)$$

Для разработки признакового описания можно воспользоваться данными из файла стандарта RINEX, формируемого многими производителями НАП. Если навигационный приемник поддерживает возможность одновременной работы на нескольких частотах, то для каждого диапазона частот имеется несколько наблюдений: псевдодальность, фаза несущей, доплеровский сигнал и уровень сигнала. Предположим, имеется двухчастотный ($L1$ и $L2$) приемник, тогда показатель отношения сигнал / шум для диапазонов $L1$ (snr1) и $L2$ (snr2) может быть использован в качестве входных данных для модели в

первую очередь. Решая навигационную задачу, можно получить дополнительные измерения, которые могут выступать в качестве элементов вектора признакового описания: угол возвышения НКА (el), невязки при решении уравнений методов наименьших квадратов (r) и геометрический фактор снижения точности (GDOP). Поэтому первый вектор признаков, который использовался в качестве входных данных модели, содержал только пять признаков ($N=5$):

$$x_1 = [snr1, snr2, el, r, GDOP]. \quad (7)$$

Обученная на векторе x_1 модель показала неудовлетворительные результаты. Для улучшения качества модели были отобраны и добавлены дополнительные признаки и создан новый вектор признаков x_2 , состоящий из восьми элементов ($N=8$) и включающий в себя: разность между показателями отношений сигнал/шум для двух диапазонов частот ($snrd$), норму вектора невязок после решения методом наименьших квадратов ($\|r\|$) и разницу между $\|r\|$ и r (обозначим как rd).

$$x_2 = [snr1, snr2, el, r, GDOP, \|r\|, rd, snrd]. \quad (8)$$

Добавление указанных трех признаков не смогло повлиять на качество модели, оценка осталась на прежнем уровне. Для дальнейшего улучшения работы модели были использованы другие параметры наблюдений, доступные в файле RINEX. Например, разница между скоростью изменения псевдодальности может быть определена с помощью производной псевдодальности по времени и с помощью доплеровского сдвига частоты для обоих диапазонов (обозначаемых как p_1 и p_2) и разницы между скоростью изменения между диапазонами частот ($pd = p_1 - p_2$). Эти параметры были добавлены для формирования вектора признаков x_3 ($N=11$).

$$x_3 = [snr1, snr2, el, r, GDOP, \|r\|, rd, snrd, p_1, p_2, pd]. \quad (9)$$

3. Результаты экспериментов

В первую очередь была обучена модель регрессии методом градиентного бустинга, который показывает высокое качество моделей в широком круге задач. Остаточные погрешности определения псевдодальности зависят от индивидуальных характеристик каждого НКА, поэтому целесообразно проводить обучение моделей отдельно. Сначала необходимо обучить базовую модель, чтобы увидеть ее производительность, а затем можно перейти к поиску её оптимальных гиперпараметров. Оценки базовых моделей градиентного бустинга для этапа валидации, полученные при использовании различного количества признаков ($N=5, 8, 11$), представлены в таблице 1. В качестве метрики оценки модели была выбрана среднеквадратичная ошибка (RMSE).

Таблица 1

Оценки моделей машинного обучения для разного количества признаков

НКА	Номер литеры	RMSE		
		N=5	N=8	N=11
R01	1	1.2	1.19	1.07
R02	-4	1.0	0.99	0.93
R03	5	1.18	1.18	1.07
R04	6	1.23	1.22	1.09
R05	1	1.11	1.10	1.0
R07	5	1.16	1.17	1.08
R08	6	1.24	1.23	1.10
R09	-2	1.06	1.07	0.96
R11	0	1.13	1.11	1.04
R12	-1	1.11	1.10	1.0
R13	-2	1.52	1.5	1.35
R14	-7	1.14	1.14	1.05
R15	0	1.13	1.12	1.03
R16	-1	1.29	1.26	1.15
R17	4	1.07	1.06	0.96
R18	-3	1.08	1.07	0.99
R19	3	1.55	1.48	1.32
R20	2	1.45	1.43	1.27
R21	4	1.29	1.29	1.15
R22	-3	1.65	1.66	1.45
R24	2	1.17	1.17	1.04

В то время как параметры модели могут быть оценены по обучающей выборке, гиперпараметры модели должны быть правильно выбраны и установлены до начала процесса обучения. Поэтому даже подходящая модель может показать низкое качество, если ее гиперпараметры были выбраны неправильно. Существует три широко распространенных метода оптимизации гиперпараметров [5].

Поиск по сетке определяет сетку гиперпараметров для пространства поиска и перебирает все комбинации значений гиперпараметров, пытаясь найти оптимальную комбинацию в заданных диапазонах значений, которая дает наименьшую ошибку. Основным недостатком поиска по сетке является высокая комбинаторная сложность.

Случайный поиск по сетке основан на той же идее, что и обычный поиск по сетке, только вместо последовательного перебора всех комбинаций алгоритм случайным образом выбирает комбинацию из заданного пространства поиска. Случайный поиск по сетке часто показывает результат лучше, чем обычный поиск, и не ограничен самой сеткой параметров.

Последовательная оптимизация на основе модели (SMBO) и ее модификации (например, Sequential Model-based Algorithm Configuration, SMAC) используются для настройки алгоритмов и могут отыскивать оптимальные гиперпараметры для модели на основе обучающей выборки.

Для всех НКА был проведен поиск оптимальных гиперпараметров тремя указанными алгоритмами для каждого типа моделей: Light GBM, CatBoost, XGBoost, Extra Trees, Random Forest и Neural Network [6–11]. Лучшие найденные гиперпараметры использовались для последующего обучения моделей, оценки которых приведены в таблице 2.

Таблица 2

Оценки моделей, обученных при использовании оптимальных гиперпараметров

НКА	LightGBM	CatBoost	XGBoost	Neural Network	Random Forest	Extra Trees
R01	1.06	1.06	1.06	1.10	1.11	1.10
R02	0.93	0.93	0.92	0.97	0.98	0.95
R03	0.98	0.97	0.97	1.01	1.02	1.01
R04	1.04	1.02	1.01	1.06	1.06	1.06
R05	0.96	0.95	0.95	1.00	1.00	1.00
R07	1.02	1.02	1.01	1.08	1.07	1.05
R08	1.02	1.01	1.00	1.08	1.06	1.06
R09	0.86	0.86	0.86	0.90	0.90	0.90
R11	0.97	0.97	0.96	1.02	1.01	1.01
R12	0.97	0.97	0.96	1.00	1.00	1.00
R13	1.22	1.22	1.22	1.24	1.25	1.24
R14	0.96	0.97	0.95	1.00	1.00	0.99
R15	0.96	0.97	0.96	1.00	1.00	0.99
R16	1.06	1.05	1.05	1.09	1.10	1.09
R17	0.93	0.93	0.92	0.98	0.99	0.98
R18	0.87	0.87	0.86	0.90	0.91	0.89
R19	1.21	1.21	1.20	1.25	1.24	1.23
R20	1.15	1.15	1.15	1.19	1.18	1.17
R21	1.01	1.01	1.01	1.06	1.06	1.05
R22	1.35	1.35	1.35	1.39	1.39	1.38
R24	0.93	0.93	0.92	0.98	0.98	0.96

В результате экспериментов удалось получить более высокое качество моделей при их обучении методом градиентного бустинга (реализации LightGBM, CatBoost, XGBoost) после нахождения оптимальных гиперпараметров, однако в некоторых случаях (например, для НКА R01, R02) оценка модели практически не изменилась. Такие модели как Neural Network, Random Forest, Extra Trees, показали результат хуже моделей, обученных методом градиентного бустинга,

несмотря на оптимизацию их гиперпараметров, но при этом их оценки практически для всех НКА лучше, чем для модели GBM с неоптимальными гиперпараметрами. Оптимизация гиперпараметров моделей для вектора признаков, состоящего из 11 элементов, позволила снизить среднеквадратичную ошибку моделей в среднем на 4%.

Литература

1. Joubert N., Reid T.G.R., Noble F. “Developments in modern GNSS and its impact on autonomous vehicle architectures”. 2020 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). Las Vegas, NV, IEEE, 2020, P. 2029–2036.
2. Жилинский В. О. Алгоритм компенсации остаточной погрешности определения псевдодальности при решении навигационной задачи в абсолютном режиме // Изв. вузов. Электроника. 2022. Т.27, №4. С. 539–549.
3. Caruana R., Niculescu-Mizil A. An empirical comparison of supervised learning algorithms In ICML, Association for Computing Machinery. NY, USA, 2006. P. 161–168.
4. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Радиотехника, 2010. 800 с.
5. Feurer M., Hutter F. Hyperparameter Optimization In: Hutter F., Kotthoff L., Vanschoren J. (eds) Automated Machine Learning. The Springer Series on Challenges in Machine Learning. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05318-5_1.
6. Guolin Ke, Qi Meng, Thomas Finley, Taifeng Wang, Wei Chen, Weidong Ma, Qiwei Ye, and Tie-Yan Liu. LightGBM: a highly efficient gradient boosting decision tree. In Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS'17). Curran Associates Inc., Red Hook, NY, USA. P. 3149–3157.
7. Dorogush A.V., Ershov V., Gulin A. CatBoost: gradient boosting with categorical features support. ArXiv, abs/1810.11363.
8. Chen Tianqi, Carlos Guestrin. Xgboost: A scalable tree boosting system. Proceedings of the 22nd acm sigkdd international conference on knowledge discovery and data mining. 2016.
9. Geurts P., Ernst D., Wehenkel L. Extremely randomized trees. 2006. Machine Learning. 63(1). P 3-42.
10. Breiman. Random Forests. 2001. Machine Learning. 45(1). P 5-32.
11. Glorot Xavier, Yoshua Bengio. Understanding the difficulty of training deep feedforward neural networks. International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. 2010.

V.O. Zhilinskiy

National Research University of Electronic Technology,
FSUE «VNIIFTRI»

COMPARISON OF MACHINE LEARNING MODELS FOR COMPENSATING FOR RESIDUAL PSEUDORANGE ERROR

Keywords: *machine learning, algorithms, navigation equations, hyperparameters, GLONASS, GNSS.*

Abstract. *The modernization of GNSS systems and their operational characteristics, including accuracy, availability, integrity, and interference*

protection, is currently being addressed. Despite the active development of GNSS, the ever-growing demands of users cannot be completely met. Improving positioning accuracy is one of the main goals of the current stage of the GLONASS system modernization. The article describes the approach to calculating the reference pseudorange measurements and the pseudorange residual error, considers the process of regression model building to predict this error, including feature selection, and compares the performance of models built using different machine learning algorithms: Light GBM, CatBoost, XGBoost, Extra Trees, Random Forest and Neural Network. The measurements were carried out for all the observed GLONASS satellites. The Extra Trees, Random Forest, Neural Network algorithms showed the worst results as a result of the experiments. The best results were shown by models built by different implementations of the gradient boosting algorithm with a slight difference in the estimates.

С.А. Зайкова

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

УДК 004.6

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ

Ключевые слова: *интеллектуальный алгоритм, информация, данные, структура, система обработки, автоматизированная система, промышленное предприятие, ИТ-компания, программные средства, модель, инструменты аналитики, отношение Левенштейна, токен, паттерн, тестирование.*

Современные методы обработки данных напрямую связаны с применением алгоритмов искусственного интеллекта. Это существенно ускоряет все процедуры и является необходимым приоритетом для выхода автоматизированных систем обработки на качественно новый уровень. Одним из эффективных приемов обработки неструктурированной информации промышленных предприятий является применение искусственного интеллекта для предварительной подготовки заявок промышленных предприятий по закупке необходимых частей механизмов. Показано, что рассматриваемые программные средства позволяют эффективно решать поставленные перед специалистами ИТ-компаниями задачи по взаимодействию с потенциальными заказчиками. Целью данной работы является разработка новой автоматизированной системы и эффективного интеллектуального метода обработки неструктурированных данных.

По данным ведущих информационных компаний, ежедневный объем генерируемых и обрабатываемых данных к 2025 году возрастет до значений порядка 175 зеттабайт. Преобладающая часть информации, порядка восьмидесяти процентов, представляет собой неструктурированные данные. Большая часть специалистов ИТ-компаний заинтересована в подготовленных и структурированных данных с четкими характеристиками, определенными свойствами, а при удачной их предподготовке – с табличными данными со связанными строками и столбцами [1; 2].

В условиях рыночной экономики главным критерием, связанным с обеспечением как выживания, так и последующего развития предприятий и организаций в сфере нефти и газа, является непрерывность производства [4]. Они должны уделять большое внимание не только детальной проверке оборудования и преждевременному нахождению неисправностей, но и своевременному заполнению складов необходимыми деталями, чтобы процесс ремонта либо замены проходил в кратчайшие сроки. Для этого необходимо иметь структурированные технические данные [4].

В работе исследуется важная практическая задача, заключающаяся в проектировании новой интеллектуальной системы, которая улучшит и оптимизирует процесс перевода информации из неструктурированной в структурированную, позволит получить доступ к дополнительной информации о запчастях для промышленного заказчика, тем самым обеспечивая непрерывность производства [2].

Отметим, что структурированные данные требуют наличия модели данных – то есть того, как данные могут храниться, обрабатываться и как можно получать к ним доступ. Из-за модели данных каждое поле является дискретным и может быть доступно отдельно или вместе с данными из других полей. Это делает структурированные данные чрезвычайно мощными: можно быстро агрегировать данные из разных мест в базе данных [3].

Для структурированных данных существуют зрелые инструменты аналитики, но инструменты аналитики для анализа неструктурированных данных только зарождаются и развиваются. Пользователи могут выполнять простой поиск контента по текстовым неструктурированным данным. Однако отсутствие упорядоченной внутренней структуры противоречит целям традиционных инструментов интеллектуального анализа данных, и предприятие получает мало пользы от потенциально ценных источников данных, таких как мультимедиа, сети или веб-логи, взаимодействие с клиентами [4; 5].

Для разработки новой интеллектуальной системы был использован язык программирования Python и фреймворк для создания серверного приложения Flask [6]. Первый вид правил, встроенный в систему, – это

RegexRule. Данные правила подразумевают, что у пользователя есть регулярное выражение, позволяющее найти и извлечь значение нужного атрибута в токене вне зависимости от того, какой регистр встречается в токене.

Второй вид правил – IgnoreRule. Данный класс был разработан на основе предположения, что в любом описании детали могут присутствовать слова, не имеющие ценности с точки зрения создания структуры и являющиеся так называемым мусором. Таким образом, пользователь сможет быстро отфильтровать и оставить для анализа только те токены, которые действительно имеют пользу для клиента и содержат важные данные.

Третий вид правил – маркерные правила, предполагающие расширение регулярных выражений. На этом этапе обработки данных выполняется объединение нескольких похожих правил на основе регулярных выражений, различия в этих правилах заменяются на маркеры. Одно из допущений системы подразумевает, что данные приходят на вход уже классифицированными соответственно актуальной библиотеке классов, однако не всегда это возможно гарантировать.

Последний вид правил – правила маппинга. Одно из допущений новой системы подразумевает, что данные приходят на вход уже классифицированными соответственно актуальной библиотеке классов. Это стало причиной для введения правил, по которым можно назначить новый и более актуальный класс большому количеству данных сразу.

Предлагаемый в работе метод получает наиболее вероятное имя атрибута токена. Для этого токен необходимо преобразовать в определенную форму: некоторые символы следует заменить или удалить, а после проверить сходство токена с использованием отношения Левенштейна или критерия подстроки. Параметры: token – строка, полное или частичное описание предмета, class_name – имя класса предмета. Возвращает: atr_name_dict – словарь, keys – значения атрибутов, values – имена атрибутов, маска токена. Если токен не соответствует ни критерию Левенштейна, ни критерию подстроки, значение словаря равно –1. Таким образом, мы обеспечим выполнение всех требований для разрабатываемой системы по использованию методов искусственного интеллекта для обработки неструктурированной информации.

Для подготовки и обучения модели использовались программные средства от JupiterNotebook. Данная среда выполнения команд позволила максимально точно настроить систему. Для предобучения использовались данные одной из промышленных компаний, включая тестовый вариант системы на основе методов Inventory Hub. В рамках эксперимента было решено обучить модель с нуля под уже имеющиеся

данные, однако в дальнейшем возможно расширение и экономически обоснованное использование готовых моделей.

Класс CRF принадлежит пакету `sklearn_crfsuite` и позволяет использовать интерфейс подгонки / прогнозирования и утилиты выбора модели `scikit-learn` (перекрестная проверка и оптимизация гиперпараметров). Алгоритм *lbfgs* задает алгоритм обучения. В данном случае мы используем градиентный спуск с использованием метода L-BFGS, что означает корректировку параметров до тех пор, пока предыдущее и текущее значения функции стоимости не сравняются. Это значит, что локальный или глобальный минимум найден и дальше алгоритм не будет искать новое значение для оптимизации модели.

В проведенных исследованиях учтено, что на практике вводится предел сходимости. Основным критерием останковки итерации является то, что разность предыдущего и текущего значений меньше предела сходимости. В дальнейшем это значит, что минимум достигнут с нужной установленной точностью [4]. Следует учитывать, что дальнейшее повышение точности приводит к росту итераций алгоритма и большей загрузке вычислительных мощностей системы.

Новая модель учитывает класс и позицию значения по отношению к строке описания, чтобы извлекать нужные значения. На следующем этапе проводятся тренировки на соответствие значения самому атрибуту, что позволит при анализе токена максимально покрыть описание и в дальнейшем даст наилучший результат. Результатом работы модели станет новый датафрейм. Для обеспечения большей точности будем использовать только те результаты, где степень уверенности превосходит семидесятипроцентную вероятность.

Результаты работы модели можно импортировать в новую автоматизированную систему и использовать для помощи пользователю и специалисту по обработке предварительных заказов. Для достижения наибольшей эффективности нового программного решения необходимо присутствие в команде аналитиков данных специалиста с хорошими доменными знаниями. Специалист по анализу данных сможет быстро и наглядно отметить в отчетности, что и как было извлечено с помощью разметки, регулярных выражений (правил) и искусственного интеллекта.

Проведенные исследования могут быть полезны при выполнении курсовых и дипломных работ студентами специальности 1-40. 03, 01 «Искусственный интеллект», а также при разработке практикума в рамках спецдисциплин, таких как «Интеллектуальный анализ данных», «Модели решения задач в интеллектуальных системах».

Решена основная задача, поставленная перед разработчиком интеллектуального алгоритма, – облегчить пользователю системы перевод неструктурированной информации, которая содержится в описаниях технических деталей, в структурированную, где описание

разбирается на атрибуты, учитывая класс оборудования путем следующих инструментов: анализ похожих паттернов для создания и тестирования регулярных выражений, позволяющих быстрее охватить большой объем данных, ручная разметка данных, которая обеспечит высокое качество извлеченной информации, а также послужит поставщиком тренировочных данных для искусственного интеллекта. Предсказательные значения запрашиваемых полей с помощью алгоритма на основе искусственного интеллекта являются завершающей частью процесса обработки.

Разработанный метод позволяет эффективнее использовать время квалифицированных сотрудников и тратить меньше времени на поиск информации в дальнейшем.

Полученное решение подходит для интеграции в отдел закупок ИТ-компаний, а также в любой другой производственный отдел, работающий с неструктурированной информацией и нуждающийся в структурировании данных.

Литература

1. Маклаков С.В. Моделирование бизнес-процессов с BPwin 4.0. М.: Диалог МИФИ, 2015. 505 с.

2. Зайкова С.А., Ходаков А.Д. Особенности технологии и практическое применение обработки больших данных в сфере продаж // Управление информационными ресурсами: материалы XVI Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 26 февр. 2020 г. Минск: Академия управления при Президенте Респ. Беларусь, 2020. С. 249-251.

1. Зайкова С.А. Информационная система закупок и материального обеспечения ИТ-компаний // Управление информационными ресурсами: материалы XVIII Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 10 марта 2022 г. Минск: Академия управления при Президенте Респ. Беларусь, 2022. С. 365-366.

2. Володько К.Ю. Проектирование информационной системы для интеграции складских запасов промышленных компаний на международном рынке // Компьютерные технологии в моделировании, управлении и экономике: материалы XIII студенческой всероссийской научно-практической конференции с международным участием / под общ. Ред. А.В. Полянина. Орел, 2021. С. 94-96.

3. Амаева Л.А. Сравнительный анализ методов интеллектуального анализа данных. Инновационная наука. – 2017, 2(1). – С. 27–29.

4. Клишко Е.Г. Программно-алгоритмические средства интеллектуального анализа данных // Радиоэлектроника и информатика. 2001. Т. 3. С. 64–67.

S.A. Zaikova

Grodno State University

**INTELLIGENT ALGORITHMS FOR PROCESSING
UNSTRUCTURED DATA**

Keywords: *algorithm, information, data, structure, processing system, automatic system, industrial enterprise, IT company, software tools, model, analytics tools, Levenshtein relation, token, pattern, testing.*

Abstract. *Modern data processing methods are directly related to the use of artificial intelligence algorithms. This significantly speeds up all procedures and is a necessary priority for the release of automated processing systems to a qualitatively new level. One of the effective methods of processing unstructured information of industrial enterprises is the use of artificial intelligence for the preliminary preparation of requests from industrial enterprises for the purchase of the necessary parts of mechanisms. It is shown that the software tools under consideration make it possible to effectively solve the tasks assigned to the specialists of an IT company for interaction with potential customers. The purpose of this work is to develop a new automated system and an effective intelligent method for processing unstructured data.*

В.Р. Кристалинский

Смоленский государственный университет

Д.В. Кристалинская

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

УДК 519.688

РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ MATHEMATICA

Ключевые слова: *сетевая модель, система Wolfram Mathematica.*

В статье рассматриваются разработка и анализ сетевых моделей в системе Wolfram Mathematica. Как известно, сетевые модели широко используются при планировании различных процессов, в частности, процесса проектирования радиоэлектронных устройств. Показано, что, если процесс сложный, анализ соответствующего графа представляет собой непростую задачу, эффективность решения которой может быть повышена за счет использования системы Wolfram Mathematica.

Как известно, сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети, графическое изображение которой

называется сетевым графиком. Сетевой график представляет собой ориентированный граф, обладающий рядом специфических свойств. Отличительной особенностью сетевой модели является чёткое определение всех взаимосвязей предстоящих работ. Как показано, в частности, в работе [1], использование сетевого планирования при разработке инновационной продукции позволяет решить две задачи: сокращение до минимума длительности всего проекта и рациональное распределение трудовых и других ресурсов по всему времени исполнения проекта. В полной мере это относится к планированию разработки сложных радиоэлектронных устройств. Пример применения сетевого планирования к решению задачи создания радиолокационных станций дальнего обнаружения приведен в [2].

В случае, если сетевой график сложен, его исследование может быть сопряжено с большими вычислительными сложностями. Одним из эффективных средств, позволяющих решать задачу исследования сетевых графиков, является система Wolfram Mathematica. Таким образом, **целью** настоящего исследования является разработка методов исследования сетевых графиков с помощью системы Wolfram Mathematica.

Главными элементами сетевой модели являются **события** и **работы**.

Термин **работа** используется в широком смысле. Во-первых, это действительная работа – протяжённый во времени процесс, требующий затрат ресурсов (например, разработка компоненты устройства). Каждая действительная работа должна быть конкретной, чётко описанной и иметь ответственного исполнителя.

Во-вторых, это ожидание – протяжённый во времени процесс, не требующий затрат труда.

В-третьих, это зависимость, или фиктивная работа, – логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени. Она указывает, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов второй.

Событие – это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта. Событие может быть частным результатом отдельной работы или суммарным результатом нескольких работ. Событие может свершиться только тогда, когда закончатся все работы, ему предшествующие. Последующие работы могут начаться только тогда, когда событие свершится. Отсюда двойственный характер события: для всех непосредственно предшествующих ему работ оно является конечным, для всех непосредственно следующих за ним – начальным. *При этом предполагается, что событие не имеет продолжительности и*

совершается как бы мгновенно. Поэтому каждое событие, включаемое в сетевую модель, должно быть полно, точно и всесторонне определено, его формулировка должна включать в себя результат непосредственно предшествующих ему работ.

Среди событий сетевой модели выделяют исходное и завершающее событие. Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий, относящихся к представленному в модели комплексу работ. Завершающее событие не имеет последующих работ и событий.

События на сетевом графике изображаются кружками (вершинами графа), а работы – ориентированными дугами, показывающими связь между событиями.

На практике чаще всего встречаются сети, в которых заданы оценки продолжительности работ или других параметров. Эти оценки обычно задаются в виде так называемых весовых матриц.

Пусть при построении сетевого графика рассматривается n событий. Если некоторая работа имеет начало i и конец j , то элемент весовой матрицы $x_{i,j}$ полагается равным продолжительности этой работы, в противном случае $x_{i,j}$ полагается равным нулю.

При построении сетевого графика соблюдаются следующие правила.

1. *В сетевой модели не должно быть «тупиковых» событий, то есть событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.*

2. *В сетевом графике не должно быть «хвостовых» событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа.*

3. *В сети не должно быть замкнутых контуров или петель, то есть путей, соединяющих некоторые события с ними же самими.*

4. *Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой.*

Одно из важнейших событий сетевого графика – понятие пути.

Путь – любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.

Среди различных путей сетевого графика наибольший интерес представляет полный путь – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется критическим. Критическими называются также работы, расположенные на этом пути.

Особое значение критического пути связано с тем, что продолжительность критического пути определяет продолжительность выполнения всего комплекса работ. Задержка во времени любой

критической работы ведет к задержке всего проекта, поэтому на эти работы должны назначаться наиболее квалифицированные и ответственные исполнители.

Для построения критического пути с помощью системы Mathematica можно использовать два подхода.

Первый подход основан на встроенной в систему процедуре нахождения кратчайшего пути и том очевидном факте, что если в сетевом графике веса всех дуг умножить на -1 , то критический путь на исходном сетевом графике становится кратчайшим для полученного графа. В случае отрицательных весов дуг система Mathematica использует алгоритм Форда–Беллмана (см., например, [3]). Как известно, необходимым условием возможности применения алгоритма Форда–Беллмана является отсутствие в графе замкнутых контуров, что гарантируется правилом 3 построения сетевых графиков.

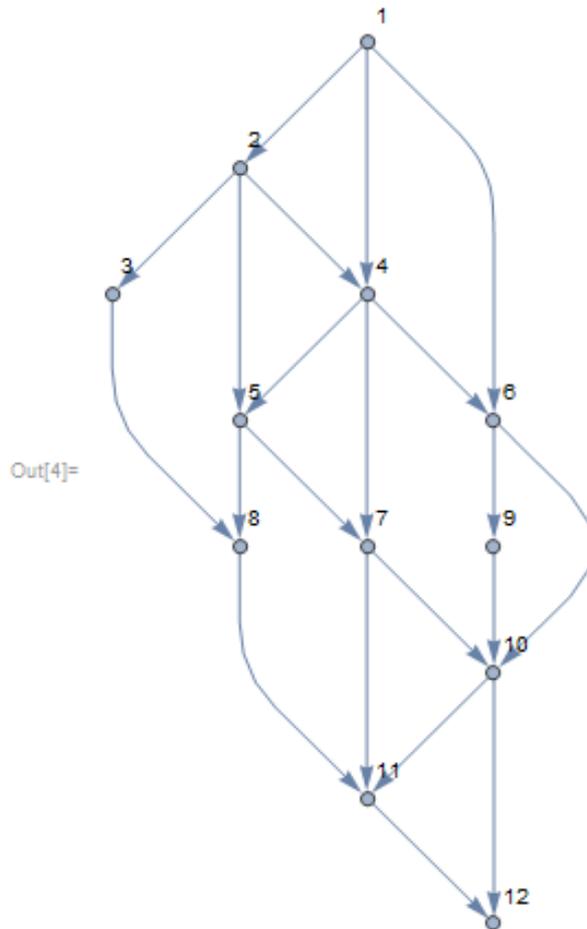
Рассмотрим пример. Пусть сетевой граф задан весовой матрицей.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 13 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 17 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Введем в систему граф, полученный из исходного сетевого графа умножением весов на -1 .

$$\text{In[4]: } g = \text{WeightedAdjacencyGraph} \left[\begin{pmatrix} \infty & -8 & \infty & -13 & \infty & -14 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & -9 & -5 & -10 & \infty \\ \infty & -7 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & -10 & -7 & -10 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -6 & -10 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & -17 & -12 & \infty & \infty \\ \infty & -13 & -10 & \infty \\ \infty & -15 & \infty \\ \infty & -5 & \infty & \infty \\ \infty & -6 & -19 \\ \infty & -13 \\ \infty & \infty \end{pmatrix}, \text{VertexLabels} \rightarrow \text{"Name"} \right]$$

[граф по матрице весов] [метки для вершин]



Найдем кратчайший путь из первой вершины в двенадцатую с помощью встроенной команды системы Mathematica.

```
FindShortestPath[g,1,12]
{1,4,5,7,10,12}
```

Таким образом, критический путь проходит через вершины 4,5,7,10. Определим длину критического пути.

```
GraphDistance[g,1,12]
-61
```

Итак, длина критического пути для данного сетевого графа равна 61.

Второй подход к нахождению критического пути на сетевом графе заключается в реализации следующего алгоритма.

1. Вводится весовая матрица сетевого графа.
2. Строится соответствующая матрица смежности.
3. Находятся все пути для рассматриваемой сети.
4. Находится критический путь.

Применим данный алгоритм к рассмотренному выше сетевому графу.

Вводим число событий.

w=12;

Вводим весовую матрицу.

Строим множество из всех подмножеств множества {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.

T=Table[i, {i,1,12}];

T1=Subsets[T];

Строим множество, элементами которого являются все множества событий, каждое из которых является множеством всех событий некоторого пути рассматриваемой сети.

Сначала строим множество T2, элементами которого являются элементы множества T1, содержащие {1} и {12}.

n = Length[T1];

T2 = {{1,12}};

Do[h = Boole[Length[T1[[i]] ∩ {1}] > 0 ∧ Length[T1[[i]] ∩ {12}] > 0];

If[h == 1, T2 = Append[T2, T1[[i]]], {i, 1, n}];

T2 = Union[T2];

n = Length[T2]

Строим множество T3, элементами которого являются множества событий полных путей рассматриваемой сети.

A = Table[0, {i,1,12}, {j,1,12}];

Do[If[X[[i,j]] > 0, A[[i,j]] = 1], {i,1,12}, {j,1,12}];

T3 = {};

Do[r = Length[T2[[j]]]; k = $\prod_{s=1}^{r-1} A[[T2[[j]][[s]], T2[[j]][[s+1]]]$;

If[k > 0, T3 = Append[T3, T2[[j]]], {j, 1, n}];

Строим множество T4, элементами которого являются длительности работ на каждом из полных путей.

n = Length[T3];

T4 = {};

Do[u = T3[[j]]; r = Length[u];

T4 = Append[T4, Table[X[[u[[s]], u[[s+1]]], {s, 1, r-1}], {j, 1, n}];

n = Length[T4];

Находим критический путь.

H = Table[Mean[T4[[j]]] Length[T4[[j]]], {j, 1, n}];

Y = Flatten[Position[H, Max[H]]][[1]];

T3[[Y]]

{1,4,5,7,10,12}

Указываем длительности работ критического пути.

```
T4[[Y]]
{13,10,6,13,19}
```

Находим длину критического пути.

```
Mean[T4[[Y]]Length[T4[[Y]]]]
61
```

Таким образом, результаты анализа сетевого графа на основе первого и второго подходов полностью совпали.

Первый подход, на наш взгляд, целесообразно использовать при решении конкретных прикладных задач. Второй подход может быть использован в ходе учебного процесса при изучении дисциплин, требующих рассмотрения вопросов, связанных с построением и исследованием сетевых графов. При его реализации виден сам процесс построения критического пути.

Таким образом, применение системы Wolfram Mathematica позволяет эффективно решать задачи, требующие построения и исследования сетевых графов как прикладные, так и учебные.

Литература

1. Гасанбеков С.К., Лубенец Н.А. Сетевое планирование как инструмент управления проектами // Известия МГТУ МАМИ. 2014. Т. 5, № 1(19). С. 21-25.
2. Применение сетевой модели на основе многовариантных графов с динамической структурой для формирования планов-графиков создания радиолокационных станций дальнего обнаружения / С.Ф. Боев [и др.] // Радиопромышленность. 2020. Т. 30, № 3. С. 8-20.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.

V.R. Kristalinskii

Smolensk State University

D.V. Kristalinskaya

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University

DEVELOPMENT AND ANALYSIS OF NETWORK MODELS IN THE MATHEMATICA SYSTEM

Keywords: *network model, Wolfram Mathematica system*

Abstract. *This paper discusses the development and analysis of network models in the Wolfram Mathematica system. As is known, network models are widely used in planning various processes, in particular, the design process of radio-electronic devices. It is shown that if the process is complex, the analysis of the corresponding graph is a difficult task, the effectiveness of which can be improved by using the Wolfram Mathematica system.*

АНАЛИЗ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MATLAB

Ключевые слова: помехоустойчивость, MATLAB, битовая вероятность ошибки, аддитивный гауссовский белый шум, фазовая манипуляция, частотная манипуляция.

В статье для исследования возможностей пакета MATLAB при анализе помехоустойчивости системы передачи данных мы будем рассматривать сигналы с некоторыми простыми манипуляциями при действии аддитивного гауссовского белого шума (AWGN). Например: бинарная фазовая манипуляция (2-PSK), 4-арная частотная манипуляция (4-FSK), 4-арная фазовая манипуляция (4-PSK).

Биты информации при цифровой передаче группируются символами. Каждый символ состоит из одного или нескольких битов. При фазовой манипуляции (PSK) фаза несущего сигнала меняется и каждый символ соответствует одной фазе несущего сигнала. При частотной манипуляции (FSK) частота несущего сигнала меняется и каждый символ соответствует одной частоте несущего сигнала. Для сигнала 2-PSK символ состоит из одного бита, а для сигналов 4-FSK и 4-PSK символ состоит из двух битов.

Сигнал PSK определяется выражением:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega t + \varphi_i). \quad (1)$$

Сигнал FSK определяется выражением:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i + \varphi), \quad (2)$$

где E – энергия символа, T – длительность символа, ω – несущая частота, φ_i – фаза сигнальной посылки, ω_i – частота несущего сигнала. Для сигнала 2-PSK $i=1,2$; для сигналов 4-PSK и 4-FSK $i=1,2,3,4$.

Шум (помеха) является аддитивным, поэтому на вход приемника поступает сигнал, равный сумме полезного сигнала и шума. Этот сигнал определяется следующим выражением:

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad (3)$$

где $r(t)$ – суммированный сигнал на вход приемника, $n(t)$ – аддитивный гауссовский белый шум (AWGN). Он имеет постоянную спектральную

плотность в частотном диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$ (это значение составляет $\frac{N_0}{2}$), $s(t)$ – полезный сигнал.

Для сигнала 2-PSK битовая вероятность ошибки определяется выражением [1]:

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right), \quad (4)$$

где $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$ – дополнительная функция ошибок.

Чтобы построить график зависимости битовой вероятности ошибки от отношения сигнал / шум, используется пакет MATLAB [2]. На рисунке 1 представлен способ построения графика.

```

: \ Users \ HAI \ Desktop
Editor - C:\Users\HAI\Desktop\BERBPSK1.m
BERBPSK1.m
1 - EbN0_dB = 0:0.1:10;
2 - EbN0 = 10.^(EbN0_dB/10);
3 - BER = 1/2.*erfc(sqrt(EbN0));
4 - semilogy(EbN0_dB, BER)
5 - grid on
6 - ylabel('BER')
7 - xlabel('E_b/N_0 (dB)')
8 - title('Битовая вероятность ошибки для сигнала 2-PSK')

```

Рис. 1. Построение графика зависимости битовой вероятности ошибки от отношения сигнал / шум

С помощью пакета MATLAB получен график, представленный на рисунке 2.

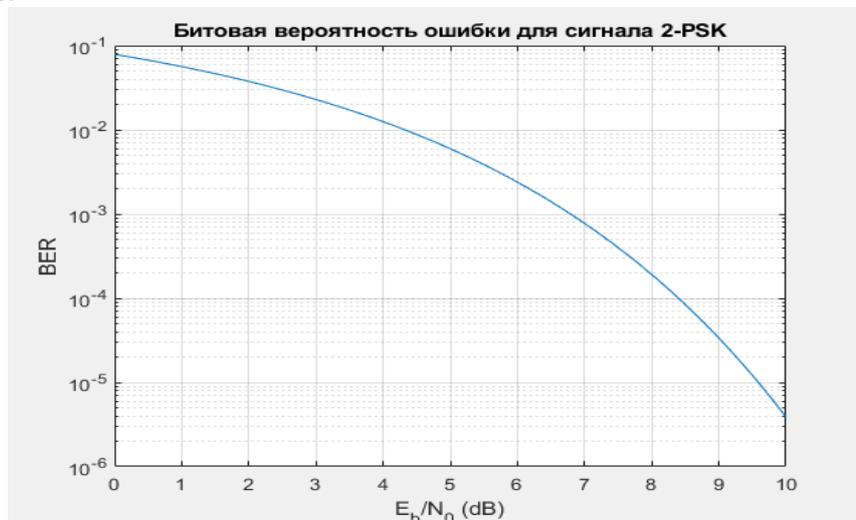


Рис. 2. График зависимости битовой вероятности ошибки от отношения сигнал / шум

В MATLAB установлены формулы битовой вероятности ошибки сигнала M-PSK и сигнала M-FSK для любой позиционности M. Эти формулы соответственно составляют:

$$\text{berMPSK} = \text{berawgn}(\text{EbNo}, \text{'psk'}, \text{M}, \text{'nondiff'}),$$

$$\text{berMFSK} = \text{berawgn}(\text{EbNo}, \text{'fsk'}, \text{M}, \text{'coherent'}).$$

Для построения графиков зависимости битовой вероятности ошибки от отношения сигнал / шум для сигнала M-PSK и сигнала M-FSK используется пакет MATLAB. Например, для M=4.

```

Editor - C:\Users\HAI\Desktop\BERQPSK.m
BERBPSK1.m x BER.m x BERQPSK.m x +
1 - EbNo = 0:0.1:10;
2 - M =4;
3 - berMPSK = berawgn(EbNo, 'psk', M, 'nondiff');
4 - berMFSK = berawgn(EbNo, 'fsk', M, 'coherent');
5 - semilogy(EbNo, [berMPSK berMFSK] )
6 - xlabel('Eb/No (dB)')
7 - ylabel('BER')
8 - legend('4PSK', '4FSK')
9 - title("Битовая вероятность ошибки для сигналов 4-PSK и 4-FSK")
10 - grid on

```

Рис. 3. Построение графиков зависимости битовой вероятности ошибки от отношения сигнал / шум для сигнала 4-PSK и сигнала 4-FSK

С помощью пакета MATLAB получены графики, представленные на рисунке 4.

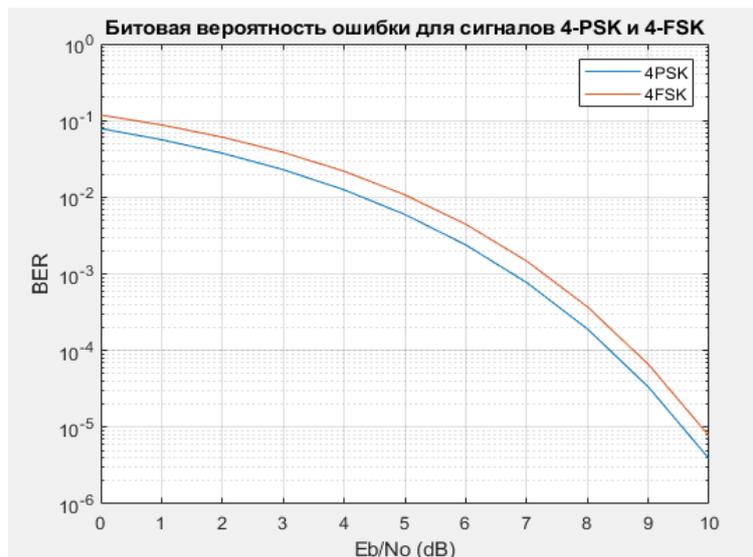


Рис. 4. Графики зависимости битовой вероятности ошибки от отношения сигнал / шум для сигнала 4-PSK и сигнала 4-FSK

Видно, что битовая вероятность ошибки сигнала 4-PSK меньше, чем сигнала 4-FSK. Значит, при действии AWGN передача данных

сигналом 4-PSK обладает большей помехоустойчивостью, чем передача сигналом 4-FSK.

Таким образом, с помощью пакета MATLAB можно строить несколько графиков одновременно, исходя из этого, сравнивать помехоустойчивость систем передачи данных при использовании разных способов манипуляций и выбирать наилучший способ манипуляций для системы при действии определенных помех.

Литература

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М., 2003. 1106 с.
2. Дьяконов В.П. MATLABR2007/2008/2009 для радиоинженеров. М.: ДМК Пресс, 2010. 976 с.

Nguyen Duc Hai

Russian Technological University – MIREA

ANALYSIS OF NOISE IMMUNITY OF A DATA TRANSMISSION SYSTEM USING THE MATLAB PACKAGE

Keywords: *noise immunity, MATLAB, bit error rate, additive Gaussian white noise, phase shift keying, frequency shift keying.*

Abstract. *In this paper, to explore the capabilities of the MATLAB package in analyzing the noise immunity of a data transmission system, we will consider signals with some simple manipulations under the action of additive Gaussian white noise (AWGN). For example: binary phase shift keying (2-PSK), 4-ary frequency shift keying (4-FSK), 4-ary phase shift keying (4-PSK).*

Х.Х. Нгуен

Российский технологический университет – МИРЭА

УДК 621.391

АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ СВЯЗИ ДЛЯ КОРОТКОВОЛНОВЫХ КАНАЛОВ

Ключевые слова: *КВ связь, радиосвязь, адаптивная система связи, передача информации.*

В работе рассмотрен вопрос построения адаптивной линии связи для повышения эффективности передачи цифровой информации по КВ радиоканалу. В линии связи имеется обратный канал, который используется для зондирования основного канала и передачи

информации о его состоянии передатчику, в котором реализуется процедура адаптации.

Введение

Радиосвязь имеет важное место при обеспечении передачи информации с подвижными и стационарными объектами. Несмотря на широкое использование метрового и дециметрового диапазонов волн (сотовая, спутниковая связь с высокой скоростью передачи данных и т.д.), КВ связь остаётся важным видом связи для силовых ведомств большинства стран мира. КВ радиосвязь позволяет обеспечить достаточно надёжную и экономичную дальнюю связь за пределами прямой видимости. Тем не менее КВ радиосвязь имеет ряд недостатков, таких как затухание сигнала на длинной трассе распространения, замирания сигнала из-за многолучевости распространения радиоволн в условиях флуктуаций параметров ионосферы, зависимость качества связи от физико-географических условий распространения волн, различные типы помех, воздействующих на канал, что сильно ограничивает скорость и достоверность передачи информации. Снизить влияние этих негативных факторов позволяет подход, рассмотренный в статье и заключающийся в применении адаптивных систем связи для КВ каналов. Этот подход заключается в оценке текущего качества связи, анализе параметров линии связи и изменении параметров адаптивной системы с целью текущей оптимизации эффективности КВ радиосвязи.

Адаптивная система радиосвязи

Адаптивная система радиосвязи – это система, обладающая свойством приспосабливаться к изменениям внешних условий функционирования и свойств входящих в неё радиоустройств (РУ) и обеспечивающая при этом заданные значения качественных показателей путём целенаправленного изменения параметров РУ и своей структуры [1].

Сущность адаптации заключается в целенаправленном изменении параметров линий радиосвязи в зависимости от сигнально-помеховой обстановки на приеме и условий распространения радиоволн в КВ диапазоне.

В зависимости от специфики систем передачи конечная цель процесса адаптации формулируется по-разному. Так, например, при обеспечении телефонной связи задачей является повышение качества передачи речи, то есть обеспечение достоверности принятых данных не хуже допустимой. При передаче цифровых сообщений задача заключается в повышении скорости передачи сообщений с достоверностью не ниже заданной. Среди регулируемых в процессе связи характеристик адаптивной радиолинии можно прежде всего выделить параметры радиосигналов: несущую (среднюю) частоту,

мощность, длительность (скорость манипуляции), форму сигнала. Также возможна многопараметрическая адаптация радиолинии по частоте, скорости передачи информации, мощности, виду модуляции, способу кодирования. Кроме того, адаптация может осуществляться изменением структуры (решающей схемы) приемника, выбором различных типов передающих и приемных антенн и изменением их характеристик, варьированием структуры кода сообщения и др. [2].

Модель адаптивной системы передачи данных

Обобщенная модель системы передачи данных с каналом обратной связи представлена на рисунке 1, где использованы обозначения:

УА – устройство анализа, предназначенное для анализа состояния канала, оценки качества связи, расчёта ожидаемой вероятности битовой ошибки и соответствия его заданным требованиям;

УУ – управляющее устройство, получающее информацию от УА через канал обратной связи и непосредственно формирующее команды на изменение какого-либо из параметров линии.

В этой схеме канал обратной связи используется для передачи анализируемой информации о качестве связи для конфигурации в передающей стороне. Поскольку нет необходимости обеспечения высокой скорости передачи данных в канале обратной связи, этот канал может быть хорошо защищён с помощью помехозащищённого кодирования и максимальной мощности передачи.

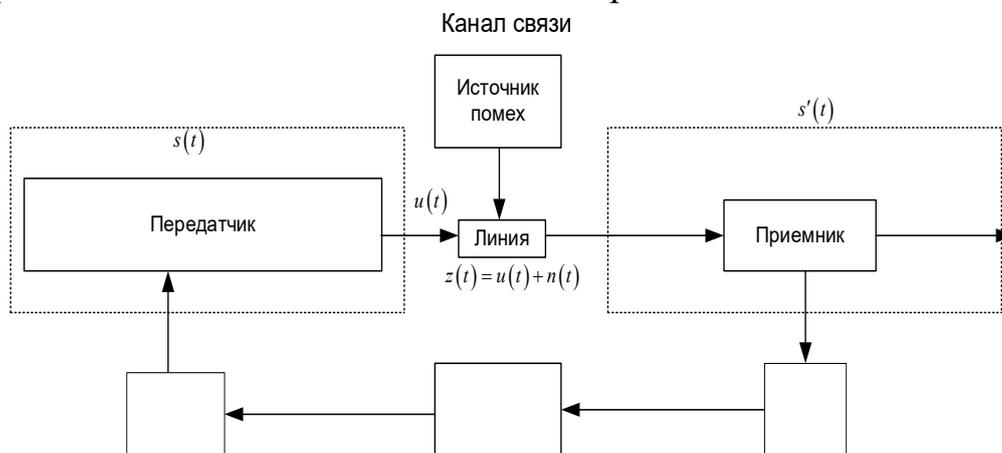


Рис. 1. Обобщенная схема адаптивной системы передачи информации с каналом обратной связи

Алгоритм управления параметрами радиолинии адаптивной системы связи. На рисунке 2 показаны взаимодействие и последовательность выполнения основных этапов функционирования радиолинии: оценка текущего качества связи, ведение связи, анализ параметров линии связи, изменение параметров адаптивной системы.

Прямоугольником обозначены операции, а ромбом – условия перехода к ним.

Рассмотренный алгоритм управления адаптивной системой связи позволяет наиболее полно реализовать возможности адаптивных систем КВ диапазона. Он является достаточно общим и не отражает подробно всех особенностей каждой такой системы связи. Для конкретизации этого общего алгоритма необходимо задать критерий оценки текущего качества связи, а также параметры системы, которые будут изменяться в ходе адаптации.

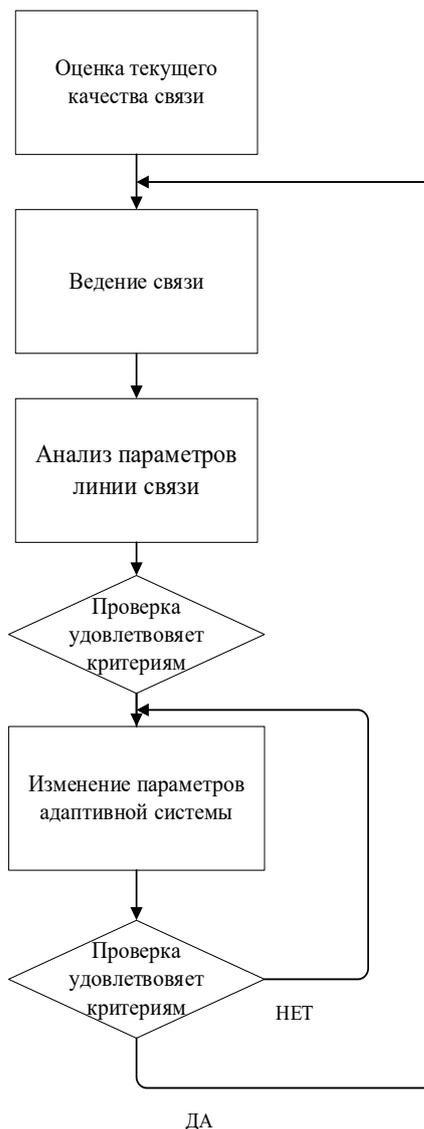


Рис. 2. Алгоритм управления адаптивной линией

Выводы

Рассмотренный подход к решению задачи повышения качества передачи информации КВ радиосвязи – адаптация параметров радиолинии под текущее состояние канала – позволяет более эффективно бороться с замираниями сигнала в КВ диапазоне, чем известные методы разнесения-сложения сигналов.

Результаты предыдущих исследований показывают, что замирания в КВ диапазоне имеют частотно-селективный характер, то есть каждая частотная составляющая сигнала передаётся через канал со своей амплитудой и сдвигом начальной фазы, а разброс по задержке соизмерим со значением $1/F$ (F – полоса частот передаваемого сигнала) или превышает его. В этом случае эффективна адаптация системы, заключающаяся в использовании частот передачи, для которых отношение сигнал/шум будет максимальным. При разработке и исследовании такой системы следует уделить особое внимание тому, как она организуется, какие частотные корреляции будут иметь место в конкретной модели замирания, а также вопросу достоверности канала обратной связи, поскольку ошибочная передача информации о состоянии канала приводит к систематическому нарушению работы адаптивной системы передачи данных в целом.

Литература

1. Служивый М.Н. Адаптивные системы радиосвязи // Вестник УлГТУ. 2000. №3.
2. Военные системы радиосвязи / под ред. В.В. Игнатова. Л.: ВАС, 1989.

H.Kh Nguyen

Russian Technological University – MIREA

ADAPTIVE COMMUNICATION SYSTEMS FOR HF CHANNELS

Keywords: *HF communication, radio communication, adaptive communication system, information transmission.*

Abstract. *The paper considers the issue of building an adaptive communication line to improve the efficiency of digital information transmission via HF radio channel. There is a feedback channel in the communication line, which is used to probe the main channel and transmit information about its state to the transmitter, where the adaptation procedure is implemented.*

Недаа Ибрагим

Российский технологический университет – МИРЭА

УДК 621.391

НЕОРТОГОНАЛЬНЫЙ МНОЖЕСТВЕННЫЙ ДОСТУП ДЛЯ СИСТЕМ 5G

Ключевые слова: *неортогональный множественный доступ, ортогональный множественный доступ.*

Неортогональный множественный доступ (NOMA) – это перспективный способ множественного доступа для сетей 5G. NOMA позволяет нескольким пользователям одновременно передавать и получать данные на одной и той же частоте. В обзоре на основе имеющихся публикаций объяснена концепция метода NOMA.

I. Введение

Как неортогональный множественный доступ (NOMA), так и ортогональный множественный доступ (OMA) представляют собой методы множественного доступа, в которых разделение сигналов происходит по мощности или в кодовой области, в области времени или частоты соответственно.

Все современные сотовые сети реализуют методы ортогонального множественного доступа (OMA), такие как множественный доступ с временным разделением каналов (TDMA), множественный доступ с частотным разделением каналов (FDMA) или множественный доступ с кодовым разделением каналов (CDMA). Однако ни один из этих методов не может в полной мере удовлетворить высокие требования будущих систем радиодоступа.

Благодаря своему потенциалу значительного повышения эффективности использования радиочастотного спектра неортогональный множественный доступ (NOMA) считается многообещающей технологией множественного доступа для сотовых систем пятого поколения (5G) и выше 5G (B5G) [1].

II. Состояние исследований технологии NOMA

В отличие от OMA, которая позволяет каждому пользователю получать доступ исключительно к выделенным частотно-временным ресурсам, NOMA позволяет нескольким пользователям одновременно использовать одни и те же частотно-временные ресурсы с разными уровнями мощности. Пропускная способность и задержка кооперативного NOMA с буфером обсуждались в [2]. Точность распознавания в решениях с поддержкой машинного обучения для решения проблемы кооперативного зондирования спектра (CSS) для NOMA исследовалась в [3]. В [4] предложен новый дизайн беспроводной сети Интернета вещей (IoT), основанный на принципе NOMA совместно с множественным доступом с временным разделением (TDMA), который может дополнительно повысить суммарную пропускную способность системы. Авторы в [5] использовали интересный подход для объективного сравнения NOMA и технологии множественного доступа с ретрансляцией (RAMA), там же представлены результаты моделирования для максимизации суммарной скорости. В [6] авторы рассмотрели более практичную систему с

ключевыми функциями адаптации канала радиointерфейса долгосрочной эволюции (LTE) и показали, что производительность системного уровня, достигаемая NOMA, превосходит производительность OMA. В [7] получены вероятность отказа и достижимая скорость передачи данных для восходящей и нисходящей линий NOMA в многосотовой однородной сети.

III. Ортогональный множественный доступ (OMA)

Характеристики схем OMA можно резюмировать следующим образом.

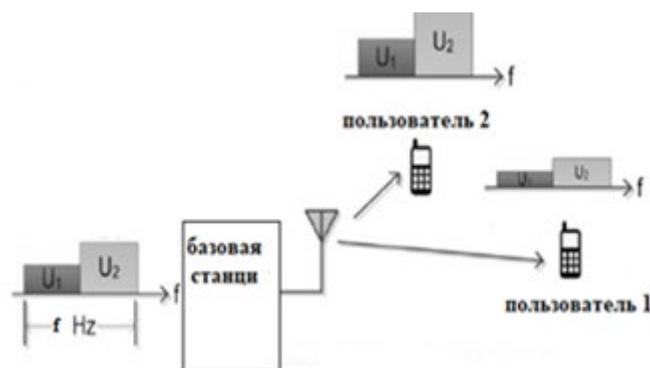


Рис. 1. Ортогональный множественный доступ

В TDMA информация для каждого пользователя отправляется в непересекающихся временных интервалах. В FDMA информация для каждого пользователя назначается подмножеству независимых поднесущих. CDMA использует коды для разделения пользователей, работающих по одному и тому же частотному каналу. В OMA частотная область используется пользователями совместно. Для примера на рисунке 1 показано, что часть частотного спектра U_1 выделяется пользователю 1, а часть U_2 – пользователю 2. NOMA принципиально отличается от этих схем множественного доступа, которые предоставляют пользователям ортогональный доступ во времени, частоте, коде или пространстве. В NOMA каждый пользователь работает в одном и том же диапазоне и в одно и то же время, сигналы пользователей различаются по уровню мощности.

IV. Неортогональный множественный доступ (NOMA)

В традиционных сетях 4G в качестве естественного расширения OFDM используется множественный доступ с ортогональным частотным разделением каналов (OFDMA), где информация для каждого пользователя назначается подмножеству поднесущих. При использовании технологии NOMA каждый пользователь может использовать все поднесущие. На рисунке 2 показано совместное использование спектра для OFDMA и NOMA для двух пользователей. Эта концепция применима для передачи как по восходящей, так и по нисходящей линии связи.

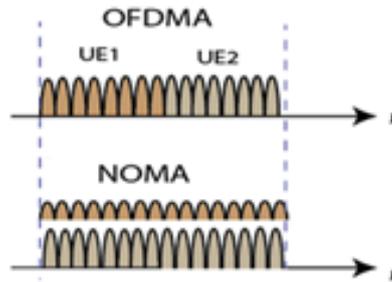


Рис. 2. Совместное использование спектра для OFDMA и NOMA

Основная причина внедрения NOMA в 5G связана с его способностью обслуживать нескольких пользователей, используя одни и те же временные и частотные ресурсы. Существует два основных метода NOMA, реализующихся в области мощности и в области кода. В области мощности NOMA для каждого пользователя устанавливается свой уровень мощности, обратно пропорциональный коэффициенту передачи канала, позволяет на приемниках пользователей применить последовательное подавление помех, обеспечивая хороший компромисс между пропускной способностью системы и равноправием пользователей [8]. NOMA в области кодирования обеспечивает мультиплексирование в области кода.

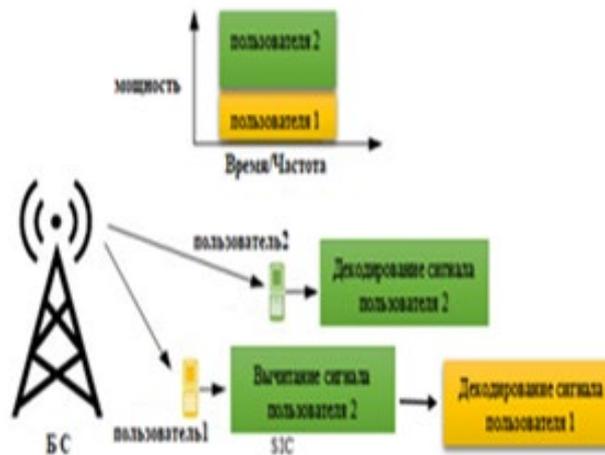


Рис. 3. Нисходящий NOMA в одной соте с одной БС и двумя пользователями

NOMA использует кодирование с наложением в передатчике и последовательное подавление помех (SIC) в приемнике, тем самым мультиплексируя пользователей в области мощности. Как показано на рисунке 3, базовая станция (БС) посылает наложенные сигналы двум пользователям, причем пользователь 1 имеет более высокое усиление канала, чем пользователь 2.

В NOMA пользователь с более высоким усилением канала и пользователь с меньшим усилением канала обычно называются сильным пользователем и слабым пользователем соответственно. Сильный

пользователь сначала вычитает сигнал слабого пользователя через последовательное подавление помех (SIC), а затем декодирует свой собственный сигнал; слабый пользователь воспринимает сигнал сильного пользователя как шум и напрямую обнаруживает свой собственный сигнал. При худшем усилении канала и больших помехах слабому пользователю назначается большая мощность в NOMA для обеспечения равного для всех пользователей качества передачи.

V. Сравнение OMA и NOMA

В следующей таблице приведены различия между NOMA и OMA.

Таблица 1

Различия между NOMA и OMA

Характеристики	NOMA	OMA
Сложность приемника	Высокая	Низкая
Потребление энергии	Больше	Меньше
Количество пользователей	Ниже	Выше
Пропускная способность системы	Больше	Меньше

VI. Преимущества NOMA

Из приведенной таблицы следует, что почти по всем показателям OMA лучше, чем NOMA. Однако NOMA оказывается лучше по пропускной способности и вследствие этого доминирует над обычным ортогональным множественным доступом (OMA) в нескольких аспектах:

1) достигается превосходная спектральная эффективность за счет одновременного обслуживания нескольких пользователей с использованием одного и того же частотного ресурса и ослабления помех с помощью SIC;

2) увеличивается количество одновременно обслуживаемых пользователей, и, таким образом, может поддерживаться массовое подключение, а следовательно, в перспективе с помощью NOMA может быть организована связь с «массивом пользователей»;

3) так как передача всеми пользователями происходит одновременно, пользователю не нужно ждать запланированного временного интервала для передачи своей информации, и, следовательно, он испытывает меньшую задержку;

4) NOMA может поддерживать одинаковое качество передачи для всех пользователей или, при необходимости, разное качество обслуживания за счет гибкого перераспределения мощности между сильными и слабыми пользователями;

5) поскольку слабому пользователю выделяется больше мощности, NOMA предлагает более высокую пропускную способность на границе

соты и, таким образом, улучшает взаимодействие с пользователем на границе соты.

VII. Заключение

Последние десятилетия показали, что быстрое развитие и растущие потребности пользователей беспроводной связи в каждом поколении изменяют выбранную технику множественного доступа. Сегодня неортогональный множественный доступ (NOMA) обещает удовлетворить растущие потребности в высокой спектральной и энергетической эффективности, высокой связности и низкой задержке передачи для будущих поколений мобильных систем, таких как 5G и выше.

Литература

1. Ali M.S., Hossain E., Al-Dweik A., Kim D.I. Downlink Power Allocation for CoMP-NOMA in Multi-Cell Networks. Dec. 2017, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1801.04981>.
2. Li J., Lei X., Diamantoulakis P.D., Zhou F., Sarigiannidis P., G.K. Karagiannidis G.K. Resource Allocation in Buffer-Aided Cooperative Non-Orthogonal Multiple Access Systems // IEEE Transactions on Communications. Vol. 68, No. 12. P. 7429–7445. doi: 10.1109/TCOMM.2020.3023458.
3. Shi Z., Gao W., Zhang S., Liu J., Kato N. Machine Learning-Enabled Cooperative Spectrum Sensing for Non-Orthogonal Multiple Access // IEEE Trans Wirel Commun. vol. 19, no. 9, pp. 5692–5702, Sep. 2020, doi: 10.1109/TWC.2020.2995594.
4. J. Wang, X. Kang, S. Sun, and Y. C. Liang, “Throughput Maximization for Peer-Assisted Wireless Powered IoT NOMA Networks,” IEEE Trans Wirel Commun, Vol. 19, No. 8. P. 5278–5291. doi: 10.1109/TWC.2020.2991400.
5. Nguyen H.V., Kim H.M., Kang G.M., Nguyen K.H., Bui V.P., Shin O.S. A survey on non-orthogonal multiple access: From the perspective of spectral efficiency and energy efficiency // Energies (Basel). Vol. 13, No. 15. doi: 10.3390/en13164106.
6. On the comparison of optimal NOMA and OMA in a paradigm. doi: 10.36227/techrxiv.18972947.v1.
7. Tian Y., Nix A.R., Beach M. On the Performance of Opportunistic NOMA in Downlink CoMP Networks // IEEE Communications Letters. Vol. 20, No. 5. P. 998–1001. doi: 10.1109/LCOMM.2016.2545672.
8. Kucur O., Karabulut Kurt G., Shakir M.Z., Ansari I.S. Nonorthogonal Multiple Access for 5G and beyond // Wireless Communications and Mobile Computing. Vol. 2018. Hindawi Limited, 2018. doi: 10.1155/2018/1907506.

Nedaa Ibrahim

Russian Technological University – MIREA

Keywords: *non-orthogonal multiple access, orthogonal multiple access.*

Abstract. *Non-orthogonal multiple access (NOMA) is a promising multiple access technique for 5G networks. NOMA allows multiple users to simultaneously transmit and receive data on the same frequency. The review explains the concept of the NOMA method based on available publications.*

МЕТОД КОНТРОЛЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ КООРДИНАТНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМИ МАШИНАМИ НА ПРИМЕРЕ СОТОВЫХ СТРУКТУР

Ключевые слова: *координатно-измерительная машина, базирование детали, плохо обусловленные поверхности.*

В данной работе ставится проблема корректного замера деталей на координатно-измерительных машинах в случае плохо обусловленной плоскости. Рассматривается пример детали, контроль которой необходимо произвести. Строится математическая модель поиска истинных точек плохо обусловленной плоскости.

Среди математических задач, возникающих при измерении геометрических объектов на координатно-измерительных машинах (КИМ), существует класс задач, решение которых неустойчиво к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что даже малые погрешности в исходных данных могут приводить к большим ошибкам в решении [1].

При этом бывают случаи, когда контролируемая поверхность на большей части технологического процесса производства сохраняет хорошую обусловленность, а на последних операциях происходит либо обрезка детали (обрезка технологических прибылей), либо обработка смежных поверхностей, после которой контролируемая поверхность становится плохо обусловленной. В ряде случаев возможен контроль на предыдущих операциях пооперационного контроля, что не исключает необходимости проверки готового изделия.

Самым сложным и в то же время самым интересным случаем замера таких деталей становится случай, когда плохо обусловленные поверхности являются базовыми и стоит необходимость выравнивания (привязки) деталей по этим поверхностям с последующим контролем остальных геометрических параметров от таких базовых элементов [2].

Примером подобной задачи может быть контроль геометрии сетчатой, решетчатой или сотовой поверхности в случае, когда контролируемая плоскость образована острыми кромками или отдельными малыми участками плоскости (рис. 1). Один из способов минимизировать погрешности измерений в таких случаях – использование щупа наибольшего диаметра. При этом данный метод не гарантирует отсутствия искажений при замерах, даже при подходе к измеряемой поверхности по нормали (рис. 2).

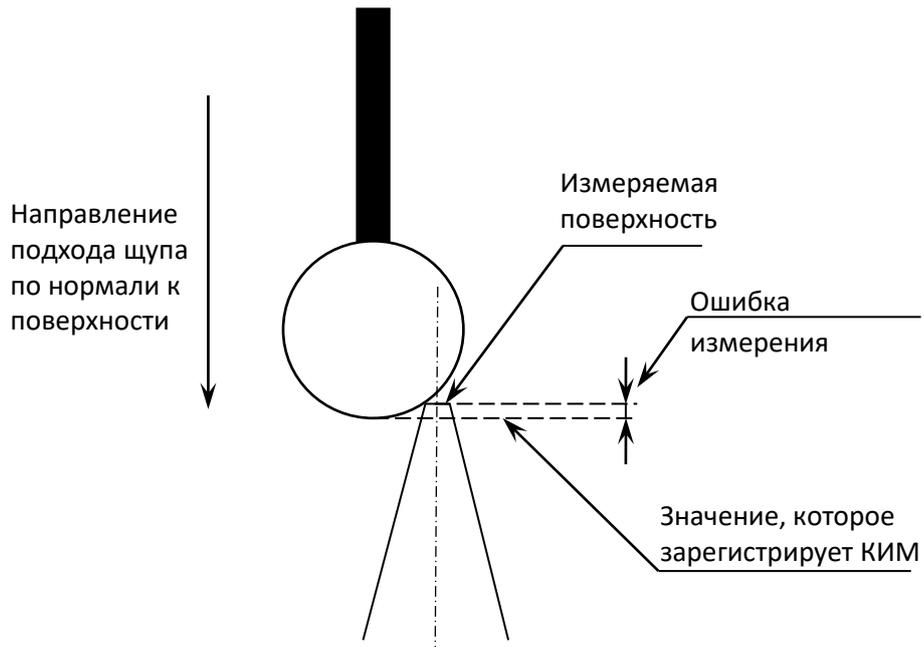


Рис. 1. Ошибка замеров острых кромок

Другим способом контроля может быть контроль детали по математической модели [3], но при этом отклонения ячеек в пределах допуска расположения могут вызывать большие погрешности результатов измерений. Таким образом, контроль геометрии сетчатой, решетчатой или сотовой поверхности подтверждает плохую устойчивость решений таких задач.

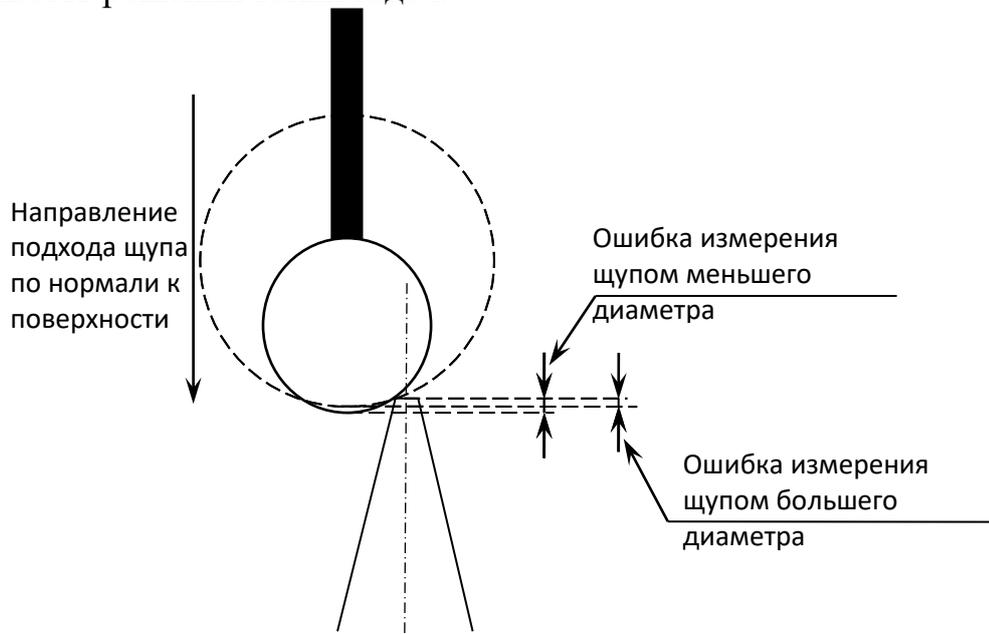


Рис. 2. Уменьшение ошибки щупом большего диаметра

В качестве примера рассмотрим сотовую структуру диагонального набора планов с симметричным профилем, образующие угол 45° с наружной рамой, в которой соты имеют квадратную форму. Необходимо произвести контроль плоскости, которая образована кромками планов толщиной 0,1– 0,4 мм (рис. 3). Будем придерживаться терминологии, принятой в [4].

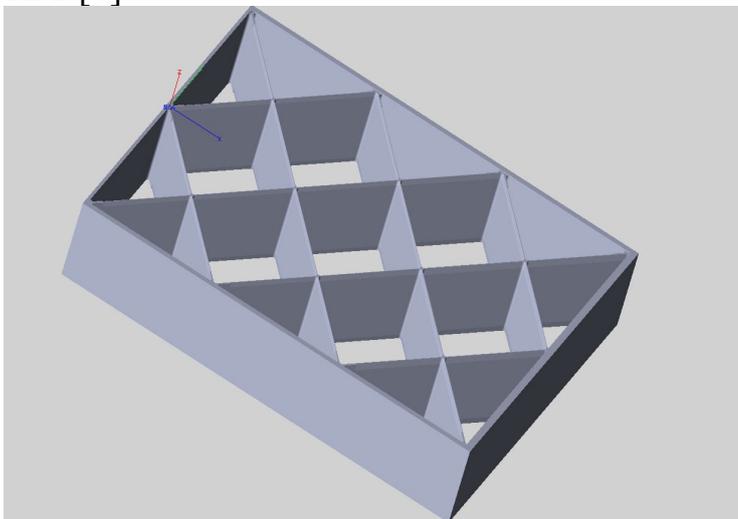


Рис. 3. Сотовая решетка

Расположим декартову прямоугольную систему координат $Oxuz$ следующим образом (рис. 3): ось Ox расположим в плоскости симметрии, ось Oy направим по внутренней стороне концевого плана, ось Oz направим вдоль хорды планов.

Решение задачи контроля геометрии сотовой структуры на КИМ можно разбить на составляющие:

- 1) черновая привязка (грубое выравнивание детали в ручном режиме);
- 2) предварительная привязка (выравнивание детали в режиме ЧПУ);
- 3) нахождение способов привязки к плохо обусловленным элементам;
- 4) чистовая (точная) привязка к плохо обусловленным элементам;
- 5) замер и контроль интересующих параметров.

1. Начальная черновая привязка детали делается в ручном режиме по плоским элементам планов и внутренним поверхностям боковин. Если ограничиться только такой привязкой и попытаться произвести контроль детали, это может привести к большим погрешностям замеров по причине малых баз по отношению к контролируемым параметрам (площадь единичных планов на порядок меньше контролируемой всей поверхности), и в таком случае мы будем иметь возрастающую погрешность базирования [5, с. 67].

2. Предварительная привязка позволяет более точно позиционировать деталь для последующего точного нахождения истинных точек плохо обусловленной поверхности.

3. В рассматриваемом примере искомые точки плохо обусловленной плоскости можно получить на пересечении средних плоскостей смежных планов с плоскостью Oxy .

Как известно, уравнение плоскости в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1)$$

В случае выбранной системы координат плоскости планов будут задаваться следующим образом:

$$x \pm y + D_i = 0, \quad (2)$$

где коэффициент при ординате зависит от направления угла, который образует план по отношению к оси симметрии решетки,

$$D_i = \pm\sqrt{2} \left((i-1)t \pm \frac{c_i}{2} \right); \quad (3)$$

здесь t – шаг решетки;

c_i – толщина плана;

$i = 1, \dots, n$, n число планов;

± 1 – зависит от направления подхода.

Средние плоскости планов аналитически будут задаваться уравнением:

$$x \pm y \pm (i-1)t\sqrt{2} = 0, \quad (4)$$

Таким образом, искомые точки должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} x + y + (i-1)t\sqrt{2} = 0, \\ x - y - (j-1)t\sqrt{2} = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $i, j = 1, \dots, n$.

Указанная система (5) справедлива в случае 3D-модели, выполненной с номинальными параметрами размеров. В фактически изготовленной детали всегда будут присутствовать какие-либо искажения, которые по факту мы должны оценить и, соответственно, сделать заключение о годности детали. Рассмотрим, какой вид примет наша система (5) в случае реальной детали.

Плоскости планов будут иметь уже более сложный вид:

$$A_i x \pm B_i y + C_i z + \tilde{D}_i = 0, \quad (2')$$

где отличие коэффициентов A_i и B_i от 1 указывает на отклонение угла плана от 45° к оси симметрии решетки. Отличие коэффициента C_i от 0 указывает на отклонение плана от параллельности оси Oz .

$$\tilde{D}_i = \pm\sqrt{2}\left((i-1)\tilde{t} \pm \frac{\tilde{c}_i}{2}\right), \quad (3')$$

где \tilde{t} – фактический шаг решетки $t_{\min} \leq \tilde{t} \leq t_{\max}$;

\tilde{c}_i – измеренная толщина плана $c_{i\min} \leq \tilde{c}_i \leq c_{i\max}$.

После замеров КИМ плоскостей планов можно построить средние плоскости планов, которые аналитически будут задаваться:

$$A_i x \pm B_i y + C_i z \pm (i-1)\tilde{t}\sqrt{2} = 0. \quad (4')$$

Таким образом, искомые точки должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} A_i x + B_i y + C_i z + (i-1)\tilde{t}\sqrt{2} = 0, \\ A_j x - B_j y + C_j z - (j-1)\tilde{t}\sqrt{2} = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (5')$$

где $i, j = 1, \dots, n$.

При этом $z = 0$ можно определить однозначно на КИМ как плоскость отсчёта.

4. Чистовую привязку и выравнивание детали сделаем по точкам, которые удовлетворяют системе (5'). Как известно, плоскость определяется тремя точками однозначно. Что касается практики, то трех точек вполне достаточно для построения идеальной плоскости, но при этом оценить её искажение от плоскостности не предоставляется возможным. Для того чтобы была возможность оценки плоскостности, необходимо не менее четырех точек, по которым уже можно смотреть разброс и оценить плоскостность поверхности с заданной точностью.

5. После выполнения чистовой привязки к плоскости, образованной кромками планов, осуществляется контроль следующих геометрических параметров:

- плоскостности всех планов;
- перпендикулярности смежных планов;
- перпендикулярности планов базовой поверхности (плоскость, образованная кромками планов);
- шага решетки;
- толщины планов.

Данный список контролируемых параметров можно расширять в зависимости от эксплуатационных, конструкторских и производственных задач.

Литература

1. Суслин В.П., Джунковский А.В., Холодов Д.А. Плохо обусловленные задачи в геометрических измерениях торовых поверхностей // Известия МГТУ «МАМИ». 2010. №1(9). С. 162-166.

2. Тимотин А.М. Принципы привязки (базирования) деталей при замере на КИМ в случае плохо обусловленных базовых элементов // Системы компьютерной

математики и их приложения: материалы науч. конф. Смоленск, 2022. Вып. 23. С. 33-40.

3. Суслин В.П. Джунковский А.В. Регуляризация плохо обусловленных задач в геометрических измерениях // Известия МГТУ «МАМИ». 2009. № 2(8). С. 214-219.

4. Белоцерковский С.М., Одновол Л.А. Сафрин Ю.З. Решетчатые крылья / под ред. С.М. Белоцерковского. М.: Машиностроение, 1985. 320 с., ил.

5. Михайлов Д. Погрешности измерения и рекомендации по их устранению: Координатно-измерительная машина (КИМ) [б.м]: Издательские решения, 2020. 80 с. ISBN 987-5-4496-2013-2.

A.M. Timotin

Smolensk State research and production enterprise «Gran»

METHOD OF CONTROL OF POORLY CONDITIONED PLANES BY COORDINATE MEASURING MACHINES ON THE EXAMPLE OF CELLULAR STRUCTURES

Keywords: *coordinate measuring machine, part basing, poorly conditioned surfaces.*

Abstract. *In this paper, the problem of correct measurement of parts on coordinate measuring machines in the case of an ill-conditioned plane is posed. An example of such a part is considered, the control of which must be carried out. A mathematical model is constructed for searching for true points of an ill-conditioned plane.*

Фам Тхань Туан, О.В. Тихонова

Российский технологический университет – МИРЭА

УДК 004.942

ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ПРИЕМА СИГНАЛОВ КВАДРАТУРНОЙ АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

Ключевые слова: *математическая модель, верификация модели, вероятность битовой ошибки, отношение сигнал / шум.*

В статье рассматривается пример верификации математической модели – подтверждения того факта, что модель правильно отражает реальные радиотехнические закономерности. Только после верификации результаты численных экспериментов можно использовать при проектировании реальных систем. Рассмотрена модель приема сигнала с 16-позиционной квадратурной амплитудной модуляцией.

Введение

В современных телекоммуникационных системах метрики оценки качества играют важную роль и являются неотъемлемой частью данных систем. Такого рода оценки возможно получать различными путями: теоретически, с применением аппарата теории оптимального приема сигналов и с помощью математического моделирования. Широкое распространение методов компьютерной математики и наличие специализированных приложений для радиотехники сделало второй путь, казалось бы, легче. Однако нельзя забывать про необходимый этап разработки математической модели – ее верификацию, или проверку ее соответствия реальным условиям, а для этого также необходимо использовать аппарат теории оптимального приема. Без верификации любая модель превращается только в игрушку. В статье приведена модель, определяющая возможную погрешность приема цифровых сигналов, и проведена ее верификация.

Рассматривается квадратичная амплитудная модуляция (КАМ), при которой модулируемые сигналы передаются изменением амплитуды и фазы высокочастотного сигнала. [1]. Задаваемые их величины принято визуализировать точками комплексной плоскости (сигнальное созвездие). В качестве основной характеристики качества системы связи используется BER – вероятность появления битовой ошибки в зависимости от качества сигнала (величины помех в канале передачи), что определяется отношением уровня сигнала к уровню шума – ОСШ.

Разработка модели в среде MATLAB

Математическая модель приема сигнала с модуляцией КАМ-16 разрабатывалась для получения оценок BER в условиях помех. В качестве среды моделирования для проведения практических исследований был выбран пакет прикладных программ Communication System Toolbox в MATLAB. Для построения модели были использованы следующие стандартные функции:

randi([0,1],x,y) генерирует матрицы размера x на y из равновероятных 1 и 0. Функция используется в качестве генератора информационного потока на входе модулятора;

Y = round(X) округляет каждый элемент массива X до ближайшего целого числа;

X = real(Z) возвращает действительную часть каждого элемента массива Z ;

Y = imag(Z) возвращает мнимую часть каждого элемента в массиве Z ;

n = norm(v) возвращает евклидову норму вектора v . Эта норма также называется 2-нормой, векторной величиной или евклидовой длиной;

Find(x1==A) находит позицию определенного числового значения в массиве A;

M = mean(A) возвращает среднее значение элементов массива A по первому индексу;

y = qfunc(x) возвращает результат функции Q для каждого элемента входных данных с действительным знаком. Функция Q имеет вид:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

[number, ratio] = biterr(x,y) сравнивает бинарное представление элементов в массивах x и y. Функция возвращает number – количество различных битов и ratio – отношение number к общему количеству битов.

Для формирования информационной последовательности модуляции в модели использовался генератор случайных чисел.

```
% исходные данные - случайная последовательность
L_data = 51200;% 200*4*64           % Длина данных
L_symbol = L_data/log2(M);          % Длина символа
data=randi([0 1],1,L_data);        % исходные данные
```

Сигнал модулируется с помощью предустановленных координат точек комплексной плоскости для КАМ-16 или соответствующих функций Communication System Toolbox. Позиции созвездия КАМ-16 установлены по принципу кода Грея (рис. 1).

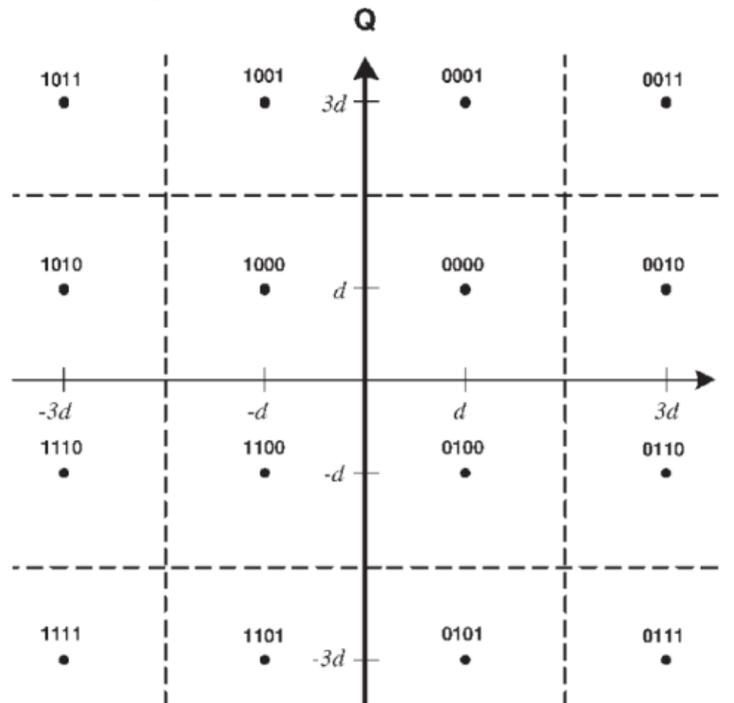


Рис. 1. Квадратное созвездие КАМ-16 по принципу кода Грея

```
%M=16 КАМ-16 модуляция
send = qammod(data.',M,'InputType','bit').');
```

В канале возникают помехи: шумовая помеха, гармоническая, фазоманипулированная, ретранслированная, сканирующая помеха. И на выходе канала связи полученный сигнал представляет собой сумму переданного сигнала и шума.

```
% Канал связи - шумовая помеха, N0 - энергия шума
noise = sqrt(N0(q)/2)*randn(1,L_symbol) +
1j*sqrt(N0(q)/2)*randn(1,L_symbol);
% Полученный сигнал
receive = (send +noise);
```

Процесс демодуляции производится вычислением расстояния полученного сигнала от всех точек созвездия. Затем в программе выполняется сравнение, определяется минимальное расстояние и соответствующий ему элемент созвездия (это есть демодулированный сигнал) и вычисляется ошибка его определения (в случае несовпадения переданного и демодулированного сигналов). Вероятность ошибки определяется как процент неправильно демодулированных символов.

```
%Демодуляция сигнала 16-КАМ
for t = 1:L_symbol
    for w = 1:M
        % расстояния сигнала от всех точек созвездия
        distance(w) = norm(receive(t) - send_set(w))^2;
    end
    % минимальное расстояние точек созвездия
    pos = find(distance == min(distance));
    % демодулирование символа
    detect(t) = send_set(pos);
    % Подсчет ошибки
    if (detect(t) ~= send(t))
        error(q) = error(q) + 1;
    end
end
% Вычисление вероятности ошибки
ser(q) = error(q)/L_symbol;
```

Блок-схема модели представлена на рисунке 2.

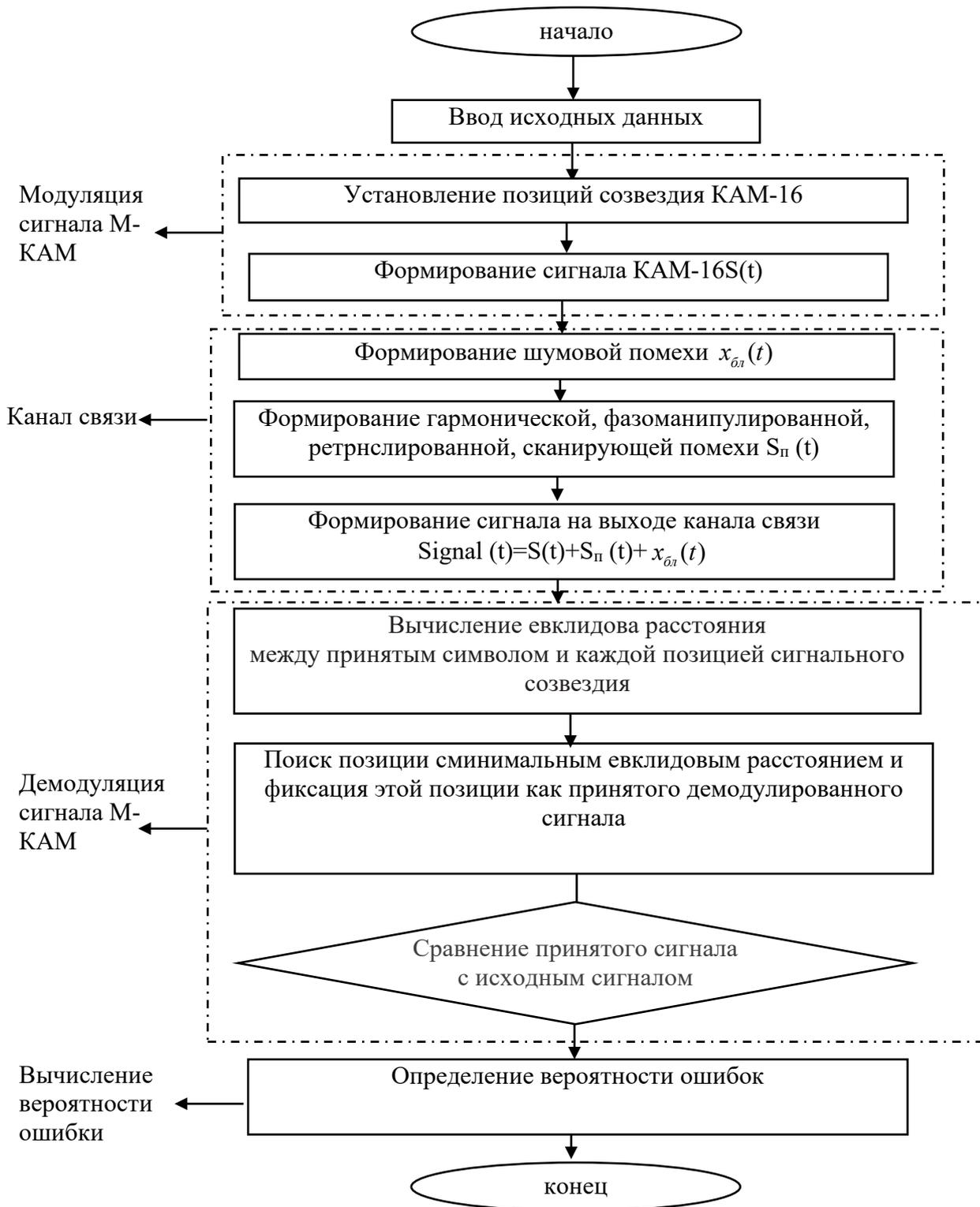


Рис. 2. Блок-схема алгоритма модуляции КАМ при наличии различных помех

Теоретическая вероятность битовой ошибки для КАМ-16

Исследования помехоустойчивости приема сигналов КАМ на фоне белого гауссовского шума показали, что вероятность ошибки в М-

позиционной амплитудной модуляции для прямоугольных сигнальных созвездий определяется выражением [1]:

$$P_{e\sqrt{M}-КАМ} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3kE_{bcp}}{(M-1)N_0}}\right),$$

где k – количество уровней в каждом измерении КАМ системы модуляции, E_{bcp}/N_0 – среднее отношение сигнал / шум. $Q[.]$ является гауссовской функцией ошибок и определяется выражением:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Следовательно, вероятность ошибки на символ для M -позиционной КАМ равна:

$$P_M = 1 - (1 - P_{e\sqrt{M}-КАМ})^2 = 2P_{e\sqrt{M}-КАМ} - (P_{e\sqrt{M}-КАМ})^2,$$

$$P_M = 2P_{e\sqrt{M}-КАМ} \left(1 - \frac{1}{2}P_{e\sqrt{M}-КАМ}\right),$$

$$P_M = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3kE_{bcp}}{(M-1)N_0}}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3kE_{bcp}}{(M-1)N_0}}\right)\right].$$

Для КАМ-16 имеем:

$$P_M = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{16}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3.4.E_{bcp}}{(16-1)N_0}}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{16}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3.4.E_{bcp}}{(16-1)N_0}}\right)\right],$$

$$P_M = 3.Q\left(\sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{E_{bcp}}{N_0}}\right) \left[1 - \frac{3}{4}.Q\left(\sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{E_{bcp}}{N_0}}\right)\right].$$

Это соотношение можно представить графически с помощью пакета MATLAB для сравнения теоретических результатов с численным экспериментом.

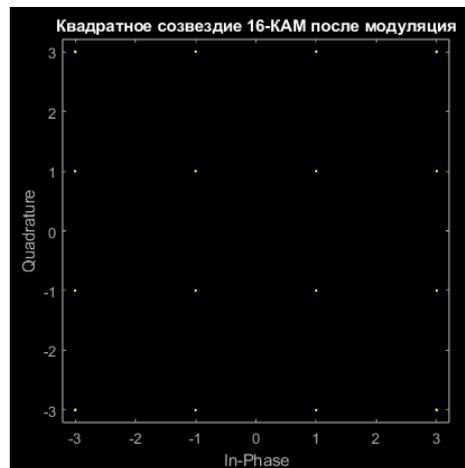


Рис. 3. Сигнальное созвездие сигнала КАМ-16 при отсутствии шумов

Верификация модели

Верификация модели, то есть проверка соответствия результатов моделирования и натуральных данных, проведена в несколько этапов.

На первом этапе была проведена проверка правильности формирования сигнала КАМ-16. На рисунке 3 показан результат моделирования сигнала, видно, что этот результат совпадает с теоретическим (рис. 1).

На втором этапе проведено сравнение работы блока канала связи с теоретическими результатами (рис. 4). Видно, что при увеличении значения ОСШ разброс уменьшается.

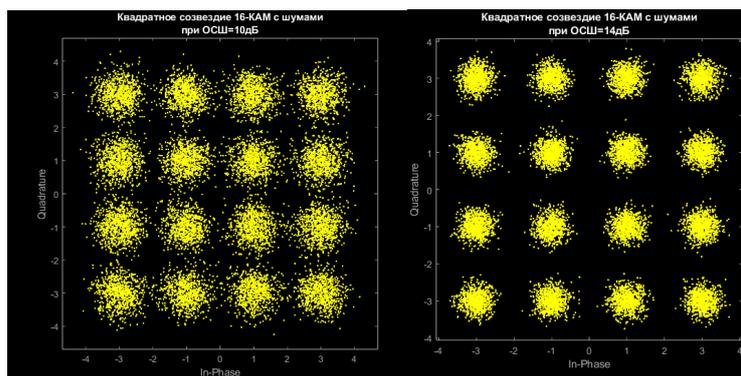


Рис. 4. Сигнальное созвездие сигнала КАМ-16 при различных шумах

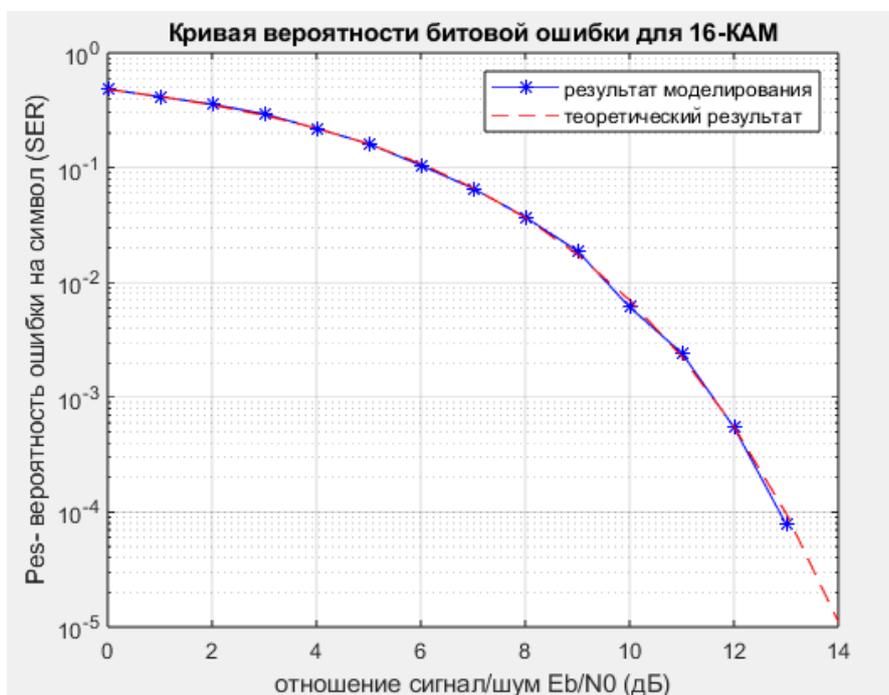


Рис. 5. Зависимость вероятности битовой ошибки на символ от отношения сигнал / шум (дБ) для КАМ-16

Вычисленная вероятность BER при ОСШ=14дБ равна $7.812e-05$ а при ОСШ = 10 дБ равна 0.0189, то есть при увеличении ОСШ точность

демодуляции закономерно возрастает. Более точное сравнение результатов моделирования и теоретических результатов приведено на рисунке 5.

Из графика видно, что результаты моделирования совпадают с теоретическими. Таким образом, можно сделать вывод, что использование численного эксперимента корректно и результаты, полученные на математической модели, могут быть использованы при проектировании и исследовании реальной системы. Этап верификации математической модели пройден успешно.

Литература

1. Прокис Дж. Цифровая связь. М.: Радио и связь, 2000. 800 с
2. Борисов В.И. Помехозащищенность систем радиосвязи: основы теории и принципы реализации. М.: Наука, 2009. 358 с.

Thanh Tuan, O.V. Tikhonova
Russian Technological University – MIREA

VERIFICATION OF A MODEL OF RECEPTION OF QUADRATIVE AMPLITUDE MODULATION SIGNALS WITH INTERFERENCE

Keywords: *mathematical model, model verification, bit error probability, signal-to-noise ratio*

Abstract. *The article considers an example of verification of a mathematical model – confirmation of the fact that the model correctly reflects the real radio engineering laws. Only after verification, the results of numerical experiments can be used in the design of real systems. For example, the model of signal reception with 16-position quadrature amplitude modulation is considered.*

РАЗДЕЛ 2

Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

А.М. Баин, Е.М. Портнов, В.В. Кокин

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

УДК 621.391

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ПОВЫШЕНИЯ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ПРИ КОНТРОЛЕ СОСТОЯНИЯ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Ключевые слова: *математическая модель, быстродействие, канал связи, спорадический принцип, передача информации.*

Разработан спорадический способ уменьшения скорости передачи данных по магистральным каналам связи при контроле состояния сложных промышленных объектов, который позволяет снизить загрузку центра обработки информации по меньшей мере в три раза по сравнению с использованием стандартного циклического способа передачи информации.

Широкое распространение циклического ввода информации при мониторинге и контроле сложных промышленных объектов объясняется следующими факторами: простотой реализации структуры модулей ввода, высокой достоверностью получаемой информации, поскольку циклический ввод информации является эквивалентом помехозащитного кода с многократным повторением без инверсии.

Несмотря на ряд положительных факторов, присущих циклическому вводу информации, очевидны и его недостатки: существенная избыточность поступающих в обрабатывающий центр сообщений, искусственно повышающая интенсивность потока требований со стороны канала контроля; значительные трудности при сочетании в одном устройстве обработки информации модулей ввода-вывода информации разного вида [1; 2].

Проведем теоретический анализ интенсивности информационных потоков для циклического ввода информации о состоянии объектов интереса в видеопотоке данных. Такими объектами интереса могут быть, в частности, состояние периметра охраняемых объектов, наличие людей и посторонних объектов, наличие возгорания и т.д. При изменении состояния объектов интереса в смежных кадрах

видеопоследовательности осуществляется передача телесигнализации, содержащей соответствующую информацию.

Степень сжатия информации в посылке телесигнализации (ТС) зависит от разрядности m каналов ввода информации. С учетом сжатия входной информации средний временной промежуток поступления смежных требований в обрабатывающий центр при циклическом вводе информации составит:

$$T_{\text{цикл}}^{\text{ср_пост}} = 1 / \lambda_{\text{цикл}}^{\text{ср_пост}} = kt_{\text{год}} / (mn_{\text{об}}),$$

где $\lambda_{\text{цикл}}^{\text{ср_пост}}$ – средняя интенсивность передачи ТС в режиме циклического ввода, определяемая через k -разрядность вводимой информации, $t_{\text{год}}$ – количество секунд за год, $n_{\text{об}}$ – среднее количество объектов интереса, информация о которых передается за год для среднестатистического объекта мониторинга, m – разрядность ЦОИ.

Определим среднее время $T_{\text{цикл}}^{\text{ср_обр_ТС-КУ}}$ обработки одного комплексного требования канала передачи информации о состоянии объектов интереса:

$$T_{\text{цикл}}^{\text{ср_обр}} = N_1 N_2 t_{\text{такт}} + t_{\text{ср_ож_обр}} + t_{\text{ср_ввод}},$$

где $t_{\text{такт}}$ – время передачи одного тактового сигнала центра обработки информации (ЦОИ); N_1 – число тактов, необходимых для ввода и обработки ТС; $t_{\text{ср_ож_обр}}$ – ожидание перед началом передачи ТС в центр обработки информации; $t_{\text{ср_ввод}}$ – время ввода посылки ТС в ЦОИ; N_2 – среднее количество команд обработки i -й сгруппированной посылки, вводимой в ЦОИ.

Разъясним сущность введенного определения величины m_{2i} . При циклическом методе передачи значительная часть введенных в ЦОИ данных не отличается от ранее введенных, поскольку довольно высока вероятность того, что во временном интервале между смежными сеансами ввода информации не произошло изменения состояния контролируемых объектов. Если в программу обработки принятых сигналов ввести модуль сравнения введенной и хранимой информации, то вся обработка сообщений, не содержащих информацию об изменении состояния контролируемых объектов, сведется к выполнению процедур сравнения и выхода из программы.

Если же во введенной информации содержатся данные об изменении состояния одного или нескольких объектов контроля, дополнительно должны быть выполнены процедуры: коррекции базы данных хранимых сигналов; регистрации факта и времени изменения сигнала; формирования данных для отображения информации; трансляция новой информации в базу ретроспективных данных; формирования данных для передачи по каналу связи, например в другой ЦОИ.

Тогда

$$t_{\text{ср_ож_обр}} = p_{\text{совн}} (t_{\text{пер}} + k_1 t_{\text{задж}}),$$

где $p_{совн}$ – вероятность наложения в ЦОИ двух и более посылок ТС; $t_{задj}$ – время обработки j -й задачи; k_1 – процент невыполнения задачи в случае ее прерывания; $t_{перер}$ – время, необходимое на переключение режимов работы ЦОИ при прерывании задачи.

$$t_{перер} = t_{перенос} + t_{подг} + t_{анализ},$$

где $t_{перенос}$ – время записи прерванной задачи в стек; $t_{подг}$ – время подготовки повторного ввода информации в ЦОИ; $t_{анализ}$ – анализ очереди команд и выбор наиболее приоритетной.

В этом случае:

$$\begin{aligned} T_{цикл\ ср\ обр}^{цикл} &= N_1 N_2 t_{такт} + t_{ср\ ввод} + p_{совн}(t_{перенос} + t_{подг} + t_{анализ}) + k_1 t_{задj} = \\ &= N_1 N_2 t_{такт} + p_{совн}(N_3 t_{такт} + N_4 t_{такт} + N_5 t_{такт} + 0.5 N_j t_{такт}) + N_6 t_{такт} = \\ &= t_{такт} [N_1 N_2 + 0.5 p_{совн}(N_3 + N_4 + N_5 + 0.5 N_j) + N_6], \end{aligned}$$

где N_3 ; N_4 ; N_5 ; N_6 – количество тактов выполнения команд при останове, подготовки, анализа и ввода ТС соответственно; N_j – количество команд j -й подпрограммы.

Определим среднюю загрузку ЦОИ ($\eta^{цикл\ ср\ см}$) обработкой требований стационарного потока, для циклического метода ввода информации в соответствии со следующим выражением:

$$\begin{aligned} \eta^{цикл\ ср\ см} &= T_{цикл\ ср\ обр}^{цикл} / T_{цикл\ ср\ пост}^{цикл} = \\ &= n_{об} t_{такт} [N_1 N_2 + 0.5 p_{совн}(N_3 + N_4 + N_5 + 0.5 N_j) + N_6] / (k t_{год}). \end{aligned}$$

Подставляя среднестатистические числовые значения приведенных параметров, получим $\eta^{цикл\ ср\ см} \approx 10^{-7}$.

Проведем анализ интенсивности аварийного потока ТС.

Принимая интенсивность аварийного потока канала ТС через $\lambda^{ав}$, можно определить среднюю частоту поступления аварийных сигналов в ЦОИ:

$$f^{ав\ ср\ пост\ ТС-КУ} = \frac{n_{об}}{T_p k}.$$

Тогда

$$\eta^{ав} = T^{ав\ ср\ обр} / T^{ав\ ср\ пост},$$

где $T^{ав\ ср\ обр}$ – среднее время обработки одного аварийного ТС, $T^{ав\ ср\ пост}$ – среднее время поступления одного информационного сигнала.

Очевидно, что средние времена обработки одного информационного сигнала для стационарного и аварийного потока канала равны, поэтому можно принять

$$\begin{aligned} T^{ав\ ср\ обр} &= T_{цикл\ ср\ обр}^{цикл} = t_{такт} [N_1 N_2 + 0.5 p_{совн}(N_3 + N_4 + N_5 + 0.5 N_j) + N_6], \\ T^{ав\ ср\ пост} &= 1 / f^{ав\ ср\ пост} = T_p k / n_{об}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\eta^{ав} = \frac{n_{об}}{k T_p} t_{такт} [N_1 N_2 + 0.5 p_{совн}(N_3 + N_4 + N_5 + 0.5 N_j) + N_6].$$

Примем $N_2 = 10^3 s + 10^2(1-s)$, где $1 \geq s \geq 0$ – доля данных ТС в общем информационном потоке, имеем:

$$\eta^{ав} = \frac{2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-7} [10^4 s + 10^3(1-s)] + 10^3 + 0.25(3 \cdot 10^3 + 0.5 \cdot 10^4)}{8 \cdot 10^{-2}}. \quad (1)$$

Преобразуя выражение (1), получим: $\eta^{ав} \approx 2.25s + 1$.

Таким образом, интенсивность аварийного потока ТС при любых s становится неприемлемо высокой и необходимо принимать меры для ее снижения.

Очевидно, что основным фактором, влияющим на высокую интенсивность информационных потоков при нештатных ситуациях, является ярко выраженная централизация методов обработки данных в системах.

Для снижения интенсивности передачи аварийного потока ТС в ОЗУ предложена следующая методика [3; 4].

1. Только при обнаружении расхождений в состоянии контролируемых объектов интереса, то есть спорадически, модуль формирует требование и вводит ТС в ЦОИ. Кроме того, контролируется количество изменений, которые фиксируются с момента завершения обработки предшествующего сеанса ввода данных.

2. При обнаружении второго и последующих изменений состояния объектов интереса данная ситуация идентифицируется как аварийный процесс, и в этом случае в буферную память вводятся координаты и код изображения объекта; временной сдвиг между фиксируемыми событиями.

Необходимо подчеркнуть, что дискретность фиксирования временных сдвигов между смежными состояниями объекта должна определяться критериями регистрации любого аварийного сигнала, который в данном случае целесообразно определить как $T_p = 10$ мс.

Вся зафиксированная аварийная информация передается в обрабатывающий центр только после завершения аварии, не в режиме реального времени. Поэтому могут быть значительно снижены требования к интенсивности передачи аварийных ТС. Для привязки времени начала ввода информации в ЦОИ к астрономическому времени необходимо фиксировать относительные временные сдвиги между моментами регистрации аварийных событий и началом передачи в ЦОИ данных.

В этом случае исключается необходимость проведения сеансов связи между модулями ввода дискретных сигналов и контроля астрономического времени.

Оценим загрузку центра обработки информации при использовании предложенного метода спорадической передачи данных при реализации разработанного алгоритма передачи информации.

Определим общее количество информационных сообщений $N_{ав}$, вводимых в ЦОИ после завершения аварии:

$$N_{ав} = J \frac{(\log n_{об} + \log \frac{t_{ав}}{t_{дискр}})}{k} [n_{об} + 2, \quad (2)$$

где $t_{дискр}$ – время дискретизации смежных аварийных событий.

Вторым слагаемым в выражении (2) является посылка длиной два байта, которая содержит данные об интервале между моментом регистрации первого изменения объекта интереса и началом ввода информации в ЦОИ.

Введение данной посылки дает возможность с дискретностью в $T_{аст} = T_p = 10$ мс восстанавливать астрономические времена всех событий.

В результате временной интервал от фиксации аварийных сигналов до ввода данных в ЦОИ составит:

$$T_{вр_сдв} = 2^{15} \cdot T_{аст} = 10^{-2} \cdot 2^{15} \approx 327 \text{ с.}$$

Принимая разрядность представления информации в ЦОИ $k = 8$, формула (2) преобразуется к виду:

$$N_{ав} = 3 n_{об} + 2.$$

Тогда время аварийной информации в ЦОИ можно определить следующим образом:

$$T_{вр_спорад}^{ав} = T_{вр_сдв} / N_{ав} = T_{вр_сдв} / (3n_{об} + 2).$$

Предполагая эквивалентность временных затрат ЦОИ при обработке одной посылки стационарного и аварийного потока, определим среднюю загрузку ЦОИ аварийным потоком ТС:

$$\eta^{ав} = \frac{T_{вр_спорад}^{ав}}{T_{вр_сдв}} = \frac{(3n_{об} + 2) \cdot t_{макт} [N_1 N_2 + 0.5 p_{совп} (N_3 + N_4 + N_5 + 0.5 N_j) + N_6]}{T_{вр_сдвиг}} = 0.078.$$

Таким образом, разработанный спорадический способ уменьшения скорости передачи данных к внешним ресурсам памяти позволяет снизить загрузку ЦОИ до 0.078, что как минимум в три раза меньше, чем при стандартном циклическом способе передаче информации.

Литература

1. Разработка модифицированного способа передачи информации по магистральным каналам связи в системах телемеханики / В.В. Кокин [и др.] // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении. 2017. №3(3). С. 33-38.
2. Чжо З.Е., Портнов Е.М., Гагарина Л.Г. Исследование проблемы быстрогодействия АСУТП в энергетике // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. 2016. №3(131). С. 3-7.

3. Портнов Е.М., Пашковский Д.В. Оценка быстродействия распределенных вычислительных систем // Актуальные проблемы современной науки. 2018. №1(98). С. 68-69.

4. Способ снижения интенсивности аварийных каналов телеуправления / Е.М. Портнов [и др.] // Энергосбережение и эффективность в технических системах: материалы IV Международной научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. Тамбов. 2017. С. 425-426.

A.M. Bain, E.M. Portnov, V.V. Kokin
National Research University of Electronic Technology

DEVELOPMENT OF A METHOD TO INCREASE THE SPEED OF DATA TRANSMISSION WHEN MONITORING THE STATE OF COMPLEX OBJECTS

Keywords: *mathematical model, speed, communication channel, sporadic principle, information transmission*

Abstract. *A sporadic method has been developed to reduce the speed of data transmission over trunk communication channels when monitoring the condition of complex industrial facilities, which reduces the load of the information processing center by at least three times less than using the standard cyclic method of information transmission.*

В.В. Борисов, М.В. Черновалова
*Филиал Национального исследовательского университета «МЭИ»
в г. Смоленске*

УДК 004.8

МЕТОДЫ СОПОСТАВЛЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ПРОЕКТНЫХ СИТУАЦИЙ И ВЫБОРА ПРЕЦЕДЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ

Ключевые слова: *проектное управление, нечеткая проектная ситуация, нечеткое расстояние, нечеткий логический вывод, прецедентное решение.*

Рассмотрены особенности задач в области проектного управления, обосновывающие целесообразность применения нечеткого подхода для сопоставления проектных ситуаций и выбора прецедентных решений в условиях неопределенности. Обоснованы методы определения сходства между нечетко заданными признаками проектных ситуаций на основе, во-первых, операций над нечеткими множествами, во-вторых, псевдометрических расстояний между нечеткими множествами, в-третьих, нечеткого расстояния между

нечеткими множествами. Описаны подходы к сопоставлению нечетких проектных ситуаций за счет агрегирования результатов сопоставления отдельных признаков с использованием различных сверток и алгоритмов нечеткого вывода, а также по отдельным приоритетным признакам. Приведен пример выбора прецедентных решений, релевантных нечетким проектным ситуациям.

Введение

В настоящее время для принятия эффективных проектных решений используются методы рассуждений на основе прецедентов (Case-Based Reasoning) [1–3]. Особенности задач в сфере проектного управления, обосновывающими целесообразность применения этих методов, являются:

- «нестационарность» понятийно-терминологического аппарата, динамичное изменение структуры и параметров предметной области проектного управления [4; 5];
- неполнота и недостаточность сведений о сопоставляемых проектных ситуациях, в том числе экспертный характер информации о признаках проектных ситуаций и их эвристическое представление [6];
- временные и ресурсные ограничения на формирование и выбор проектных прецедентных решений;
- сложность однотипного представления проектных ситуаций и проектных прецедентных решений;
- различный «масштаб» проектных ситуаций, предполагающий при этом выработку схожих проектных решений [7];
- сложность оценки сходства нечетких признаков проектных ситуаций
- сложность сопоставления проектных ситуаций, вследствие разного состава признаков, их различной значимости и степени согласованности;
- задача выбора прецедентных проектных решений, релевантных проектным ситуациям, как правило, сводится к задаче классификации и зависит от соответствующего метода сопоставления нечетких проектных ситуаций [8].

Статья посвящена анализу и систематизации нечетких методов сопоставления проектных ситуаций и выбора релевантных прецедентных решений.

1. Нечеткое представление проектных ситуаций

Указанные во введении особенности задач проектного управления позволяют обосновать целесообразность использования представления признаков проектных ситуаций и проектных прецедентных решений в виде нечетких множеств и нечетких отношений.

Введем следующие обозначения:

$Q_l = \{\tilde{q}_n^{(l)} \mid n = 1, \dots, N\}$ – l -я типовая нечеткая проектная ситуация ($l = 1, \dots, L$), представленная нечеткими множествами (числами) $\tilde{q}_n^{(l)}$ ее признаков;

$P_k = \{\tilde{p}_n^{(k)} \mid n = 1, \dots, N\}$ – k -я текущая проектная ситуация ($k = 1, \dots, K$), представленная нечеткими множествами (числами) $\tilde{p}_n^{(k)}$ ее признаков; N – число сопоставляемых признаков.

2. Оценка степени сходства между соответствующими признаками сопоставляемых проектных ситуаций

Для оценки сходства между соответствующими признаками сопоставляемых проектных ситуаций могут быть использованы следующие подходы:

- операции над нечеткими множествами (disjunctive sum, bounded difference, disjoint sum) [9–14];
- псевдометрическое расстояние между нечеткими множествами (Hamming distance, Euclidean distance) [15–18];
- нечеткое расстояние между нечеткими множествами [19; 20].

Операции над нечеткими множествами для оценки сходства нечетких признаков проектных ситуаций

Difference ($\tilde{q}_n^{(l)} - \tilde{p}_n^{(k)}$) с функцией принадлежности:

$$\mu_{(\tilde{q}_n^{(l)} - \tilde{p}_n^{(k)})}(x) = \min\left(\mu_{\tilde{q}_n^{(l)}}(x), \left(1 - \mu_{\tilde{p}_n^{(k)}}(x)\right)\right), \quad \forall x \in X,$$

где X – универсальное множество, на котором заданы нечеткие множества $\tilde{q}_n^{(l)}$ и $\tilde{p}_n^{(k)}$.

Bounded difference ($\tilde{q}_n^{(l)} \ominus \tilde{p}_n^{(k)}$) с функцией принадлежности:

$$\mu_{(\tilde{q}_n^{(l)} \ominus \tilde{p}_n^{(k)})}(x) = \max\left(0, \mu_{\tilde{q}_n^{(l)}}(x) - \mu_{\tilde{p}_n^{(k)}}(x)\right), \quad \forall x \in X.$$

Disjunctive sum ($\tilde{q}_n^{(l)} \oplus \tilde{p}_n^{(k)}$) с функцией принадлежности:

$$\mu_{(\tilde{q}_n^{(l)} \oplus \tilde{p}_n^{(k)})}(x) = \max\left(\min\left(\mu_{\tilde{q}_n^{(l)}}(x), \left(1 - \mu_{\tilde{p}_n^{(k)}}(x)\right)\right), \min\left(\left(1 - \mu_{\tilde{q}_n^{(l)}}(x)\right), \mu_{\tilde{p}_n^{(k)}}(x)\right)\right), \quad \forall x \in X.$$

Disjoint sum ($\tilde{q}_n^{(l)} \Delta \tilde{p}_n^{(k)}$) с функцией принадлежности:

$$\mu_{(\tilde{q}_n^{(l)} \Delta \tilde{p}_n^{(k)})}(x) = \left|\mu_{\tilde{q}_n^{(l)}}(x) - \mu_{\tilde{p}_n^{(k)}}(x)\right|, \quad \forall x \in X,$$

Выбор операции над нечеткими множествами приводит к различным результатам оценки сходства нечетких признаков. Обоснованием такого выбора являются идентифицированные условия сопоставления проектных ситуаций, а также система предпочтения лица, принимающего решения.

Псевдометрические расстояния между нечеткими множествами для оценки сходства нечетких признаков проектных ситуаций

Разновидностями псевдометрических расстояний, применимыми для оценки степени сходства одноименных признаков проектных ситуаций, представленных нечеткими множествами $\tilde{q}_n^{(l)}$ и $\tilde{p}_n^{(k)}$, являются расстояния Хэмминга и Евклида между нечеткими множествами [21; 22].

Относительное расстояние Хэмминга между нечеткими множествами:

$$d_H(\tilde{q}_n^{(l)}, \tilde{p}_n^{(k)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \mu_{\tilde{q}_n^{(l)}}(x_i) - \mu_{\tilde{p}_n^{(k)}}(x_i) \right|, \quad x_i \in X.$$

Относительное расстояние Евклида между нечеткими множествами:

$$d_E(\tilde{q}_n^{(l)}, \tilde{p}_n^{(k)}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\mu_{\tilde{q}_n^{(l)}}(x_i) - \mu_{\tilde{p}_n^{(k)}}(x_i) \right)^2}, \quad x_i \in X.$$

Полученная в результате применения псевдометрических расстояний оценка не требует дефаззификации, что, с одной стороны, облегчает процесс последующего агрегирования результатов попризнакового сопоставления (в отличие от использования ранее описанных операций над нечеткими множествами), а с другой – характеризуется меньшими возможностями учета условий определения релевантности сопоставляемых проектных ситуаций, а также системы предпочтения лиц, принимающих решения.

Нечеткое расстояние между нечеткими множествами для оценки сходства нечетких признаков проектных ситуаций

Рассмотренные выше псевдометрические расстояния трактуются традиционным образом. Использование же принципа обобщения Л. Заде позволяет рассматривать расстояние как нечеткое множество следующим образом [23; 24]:

$$\forall \delta \in \mathfrak{R}^+$$

$$\delta(\tilde{q}_n^{(l)}, \tilde{p}_n^{(k)}) = \max_{\delta \in \tilde{d}(\tilde{q}_n^{(l)}, \tilde{p}_n^{(k)})} \left(\min \left(\mu_{\tilde{q}_n^{(l)}}(x_i), \mu_{\tilde{p}_n^{(k)}}(x_i) \right) \right), \quad \forall x_i \in X.$$

3. Подходы к сопоставлению нечетких проектных ситуаций

При сопоставлении нечетких проектных ситуаций для выбора релевантных решений требуется выполнить агрегирование результатов сравнения нечетких признаков этих ситуаций. Агрегирование результатов сравнения нечетких признаков сопоставляемых ситуаций, как правило, осуществляется на основе одного из следующих подходов:

- сведение многокритериальной задачи оценки к однокритериальной на основе агрегирования результатов сопоставления

отдельных признаков с использованием различных сверток (аддитивной, мультипликативной, максиминной, минимаксной и др.) или алгоритмов нечеткого вывода (Мамдани, Ларсена, Такаги – Сугэно, Цукамото);

- по приоритетным признакам, а остальные признаки рассматриваются в качестве дополнительных, результаты сопоставления которых должны удовлетворять установленным правилам.

При сопоставлении проектных ситуаций превалирует первый подход на основе агрегирования результатов сопоставления отдельных признаков. Причем в ряде случаев задача агрегирования результатов сопоставления признаков проектных ситуаций решается «автоматически». Проблемы же агрегирования возникают в зависимости от различных условий сопоставления, а именно если:

- для сопоставления разных признаков используются различные шкалы;

- необходимо учитывать различную значимость сравниваемых признаков;

- требуется учитывать влияние согласованности (в том числе корреляции, взаимовлияния) признаков на общий результат сопоставления ситуаций;

- сопоставляемые проектные ситуации характеризуются сложной «структурой» агрегирования признаков.

В зависимости от этих и ряда других условий возможны следующие стратегии агрегирования результатов сопоставления признаков проектных ситуаций:

- общий результат сопоставления проектных ситуаций представляется в виде иерархии частных результатов сравнения признаков;

- общий результат сопоставления проектных ситуаций формируется при условии равнозначности результатов сравнения признаков для случаев:

- «одновременного» достижения всех частных результатов сравнения признаков,

- достижения одного из частных результатов сравнения признаков,

- компромиссного (промежуточного) достижения частных результатов сопоставления признаков (например, достижения отдельных частных результатов сопоставления признаков),

- гибридных стратегий, ориентированных на выбор (идентификацию) операций свертки в зависимости от полученных значений частных результатов сравнения признаков [25];

- общий результат сопоставления проектных ситуаций формируется на основе рекурсивного агрегирования частных результатов сравнения признаков;

• общий результат сопоставления проектных ситуаций формируется при условии неравнозначности частных результатов сравнения признаков для случаев:

- достижения требуемых пороговых значений частных результатов сравнения признаков,
- установления весов для частных результатов сравнения признаков и их учета при последующем агрегировании,
- иерархической древовидной И–ИЛИ структуры агрегирования признаков;

• общий результат сопоставления проектных ситуаций формируется на основе различных квантификаторов (в том числе и нечетких) для свертки результатов сравнения признаков, например, по соответствию большинства признаков, по несоответствию хотя бы по одному признаку.

В качестве примера для оценки степени сходства нечетких признаков проектных ситуаций используем относительное псевдометрическое расстояние Евклида между нечеткими множествами, а для сопоставления нечетких проектных ситуаций и выбора прецедентных проектных решений – модифицируемый алгоритм нечеткого вывода Мамдани [26; 27].

С учетом этих условий нечеткая модель сопоставления нечетких проектных ситуаций и выбора прецедентных проектных решений может быть представлена в следующем виде:

$$\tilde{R}_\Sigma = \bigcup_{p=1, \dots, P} \left(\min_{n=1, \dots, N} \left(d_E \left(\tilde{q}_n^{(l)}, \tilde{p}_n^{(k)} \right), \tilde{R}_p \right) \right),$$

где \tilde{R}_Σ – выходная нечеткая переменная, значение которой соответствует выбираемому прецедентному проектному решению; P – число правил нечеткой модели.

Заключение

Выполнены анализ и систематизация методов сопоставления нечетких проектных ситуаций. Рассмотрены методы оценки сходства между нечеткими признаками сопоставляемых проектных ситуаций на основе операций над нечеткими множествами, псевдометрических расстояний между нечеткими множествами, нечеткого расстояния между нечеткими множествами.

Описаны подходы к сопоставлению нечетких проектных ситуаций на основе перехода от многокритериальной задачи оценки к однокритериальной за счет агрегирования результатов сравнения отдельных признаков с использованием различных сверток или алгоритмов нечеткого вывода, а также по отдельным приоритетным признакам.

Поддержка исследований

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № FSWF-2023-0012).

Литература

1. Tsatsoulis C., Williams A.B. Case-Based Reasoning // Knowledge-Based Systems. 2000. Vol. 3. P. 807-837.
2. Machado N.L.R., Silva L.A.L., Fontoura L.M., Campbell J.A. Case-based reasoning for experience-based collaborative risk management // Proceedings of the International Conference on Software Engineering and Knowledge Engineering, SEKE. 2014. P. 262-267.
3. Khan M.J., Hayat H., Awan I. Hybrid case-base maintenance approach for modeling large scale case-based reasoning systems // Human-centric Computing and Information Sciences? 2019. Vol. 9, Iss. 1,9.
4. Dli M.I., Bulygina O.V., Emelyanov A.A., Selyavskiy Y.V. Intelligent analysis of complex innovative project prospects // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 919, Iss. 4, 042019.
5. Dli M.I., Stoyanova O.V., Abramenkova I.V., Zaitsev O.V. The method of intelligent management of information resources of an industrial enterprise // Journal of Applied Informatics. 2010. No. 5(29). P. 13-22.
6. Bulygina O. Analysis of the feasibility of innovative projects for creating high technology products: the algorithms and instruments // Journal of Applied Informatics. 2016. Vol. 11, No. 4 (64). P. 87-102.
7. Dli M., Ofitserov A., Stoianova O., Fedulov A. Complex model for project dynamics prediction // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. Vol. 11, No. 22. P. 11046-11049.
8. Chourib I., Guillard G., Mestiri M., Solaiman B., Farah I.R. Case-Based Reasoning: Problems and Importance of Similarity Measure // 2020 International Conference on Advanced Technologies for Signal and Image Processing, ATSIP. 2020. 9231755.
9. Batyrshin I., Kosheleva O., Kreinovich V., Kubysheva N., Akhtiamov R. Contrast similarity measures of fuzzy sets // Computacion y Sistemas. 2019. Vol. 23. No. 4. P. 1569-1573.
10. Aras A.C., Kaynak O., Batyrshin I. Nonlinear function approximation based on fuzzy algorithms with parameterized conjunctors // 2013 IEEE International Conference on Mechatronics, ICM 2013. 2013. P. 81-86.
11. Zavala A.H., Batyrshin I.Z., Nieto O.C., Castillo O. Conjunction and disjunction operations for digital fuzzy hardware // Applied Soft Computing Journal. 2013. Vol. 13. No. 7. P. 3248-3258.
12. Batyrshin I.Z., Rudas I.J., Panova A. On generation of digital fuzzy parametric conjunctions // Studies in Computational Intelligence. 2009. Vol. 243. P. 79-89.
13. Batyrshin I.Z. Towards a general theory of similarity and association measures: Similarity, dissimilarity and correlation functions // J. Intell. Fuzzy Syst. 2019. Vol. 36, No. 4. P. 2977-3004. doi: 10.1007 / 978-3-030-33274-7_2.
14. Zavala A.H., Batyrshin I.Z., Rudas I.J., Vargas L.V., Nieto O.C. Parametric operations for digital hardware implementation of fuzzy systems // Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5845. LNAI. P. 432-443.
15. Du W.S. Subtraction and division operations on intuitionistic fuzzy sets derived from the Hamming distance // Information Sciences. 2021. Vol. 571. P. 206-224.

16. Md Rodzi Z., Hassan N.A Hamming score distance of hesitant fuzzy sets // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1212, No. 1. 012020.
17. Mohd W.R.W., Abdullah L. Similarity measures of Pythagorean fuzzy sets based on combination of cosine similarity measure and Euclidean distance measure // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1974. 030017.
18. Yang M.-S., Hussain Z. Distance and similarity measures of hesitant fuzzy sets based on Hausdorff metric with applications to multi-criteria decision making and clustering // Soft Computing. 2019. Vol. 3. No. 14. P. 5835-5848.
19. Xiao F. A Distance Measure for Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Application to Pattern Classification Problems // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems 2021. Vol. 51. No. 6. 8944285. P. 3980-3992.
20. An S., Hu Q., Wang C. Probability granular distance-based fuzzy rough set model // Applied Soft Computing. 2021. Vol. 102. 107064.
21. Wygralak M. On nonstrict archimedean triangular norms, hamming distances, and cardinalities of fuzzy sets // International Journal of Intelligent Systems. 2009. Vol. 24, No. 6. P. 697-705.
22. Hidayat R., Yanto I.T.R., Ramli A.A., Fudzee M.F.M., Ahmar A.S. Generalized normalized euclidean distance based fuzzy soft set similarity for data classification // Computer Systems Science and Engineering. 2021. Vol. 38, No. 1. P. 119-130.
23. Zadeh A. Generalized Theory of Uncertainty (GTU)-Principal Concepts and Ideas // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. Vol. 51. P. 15-46.
24. Borisov V.V., Fedulov A.S., Zernov M.M. Osnovy teorii nechetkikh mnozhestv [Fundamentals of fuzzy set theory]. Moscow, Goryachaya liniya – Telekom Publ., 2014, 88 p.
25. Dubois D., Prade H. A Review of Fuzzy Set Aggregation Connectives. Information Sciences. 1986. 39. P. 105-210.
26. Chernovalova M.V. Fuzzy case models for project management using a multi-ontology approach // Journal of Applied Informatics. 2021. Vol. 16, No. 2. P. 4-16.
27. Borisov V.V., Chernovalova M.V., Kurilin S.P. Monitoring and adaptation of the base of design precedents in the management of innovative projects based on a fuzzy ontological approach // Ontology of Designing. 2020. Vol. 10, No. 4(38). P. 516-526.

V.V. Borisov, M.V. Chernovalova

The Branch of the National Research University
«Moscow Power Engineering Institute» in Smolensk

METHODS FOR COMPARING FUZZY PROJECT SITUATIONS AND SELECTING PRECEDENT DECISIONS

Keywords: *project management, fuzzy project situations, fuzzy distance, fuzzy logic inference, precedent decision.*

Abstract. *The features of tasks in the field of project management are characterized, justifying the expediency of using fuzzy methods of comparing project situations and choosing precedent solutions. Methods for estimating the similarity between fuzzy features of design situations based on: operations on fuzzy sets, pseudo-metric distances between fuzzy sets, fuzzy distance between fuzzy sets are considered. Approaches to the comparison of fuzzy design situations based on the transition from a multi-criteria assessment task*

to a single-criteria one are described by aggregating the results of comparing individual features using various convolutions or fuzzy inference algorithms, as well as by individual priority features. An example of the choice of precedent design solutions relevant to project situations is given.

А.Д. Булименко

Смоленский государственный университет

УДК 004.032.26

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПОЗНАВАНИЯ РЕЧЕВЫХ, ЛИЦЕВЫХ И ТЕКСТОВЫХ ЭМОЦИЙ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ ПО ШКАЛЕ ТОНОВ РОНА ХАББАРДА

Ключевые слова: распознавание речевых эмоций, распознавание лицевых жестикуляций, распознавание эмоций в тексте, глубокое обучение, MLP Classifier, Dostoevsky, DeepFace, шкала эмоциональных тонов Хаббарда.

В данном исследовании предлагается экспериментальный подход к нахождению распознавания речевых, лицевых и текстовых эмоций с последующей их классификацией по шкале тонов Хаббарда. Новизна этого подхода заключается в объединении технологий определения эмоций человека машинным путем и последующего определения характеристик человека для выявления его характера, будущих действий, отношений, общения и др. В эксперименте используются современные модели глубокого обучения, такие как MLP Classifier для определения речевых эмоций, DeepFace для определения лицевых эмоций в реальном времени, обученная для русского языка модель Dostoevsky, обеспечивающие распознавание в реальном времени сообщений (текста).

Введение

Важной задачей при взаимодействии машины и человека является распознавание эмоций. В настоящее время множество компаний занимаются обучением машин умению различать эмоции человека в разнообразных их проявлениях, таких как речь, текст, лицевая жестикуляция. Данные исследования способствуют прогрессу коммуникации между созданным программным обеспечением и человеком. Аналитика эмоционального состояния человека является сложной задачей, при которой обрабатываются и анализируются речь, текст, лицевые жесты говорящего для определения его эмоций.

Структура эксперимента

В предлагаемом эксперименте рассматриваются модели глубокого обучения для обработки речи, текста, лицевой жестикуляции и последующая их классификация по шкале тонов Хаббарда. На рисунке 1 показана структура эксперимента.



Рис. 1. Структура эксперимента

Цель экспериментального исследования

В данной работе цель исследования – рассмотрение современных методов распознавания эмоций человека по речи, тексту и лицевым жестикуляциям машинным интеллектом, создание характеристики испытуемого по шкале эмоциональных тонов Хаббарда с использованием полученных результатов оценивания эмоций машинным интеллектом.

Программные средства

Эксперимент проводился средствами языка Python 3.9 в среде PyCharm Community, все модули и базы данных находятся в открытых источниках.

Распознавание и анализ эмоций в речи

Для нахождения эмоций в речи человека был применен многослойный классификатор перцептронов MLP Classifier, который использует модель нейронной сети служащей для улучшения свойства потери журнала с BFGS (итерационный метод численной оптимизации). Для обучения нейронной сети использовалась открытая база данных RAVDES – аудио БД эмоциональной речи Ryerson, включающая 1440 записей голосов актеров (12 женщин и 12 мужчин, по 60 испытаний на каждого).

Используя данное программное обеспечение, можно определить в речи человека до 8 эмоций: нейтральность, спокойствие, счастье, печаль, злость, страх, удивление и отвращение.

Распознавание и анализ лицевых жестикуляций

Для распознавания лицевой жестикуляции в реальном времени используется DeepFace – гибридная платформа для распознавания эмоций лица человека, объединяющая несколько других моделей:

Facebook FaceNet, OpenFace, Facebook DeepFace, DeepID. Данная модель позволяет определить следующие 7 эмоций: нейтральность, счастье, печаль, злость, страх, удивление и отвращение. Для обучения платформа использует БД от Facebook.

Распознавание и анализ эмоций в тексте

Для выявления эмоции в тексте русского языка использовалась библиотека на языке Python – Dostoevsky, модель обучена на наборе данных RuSentiment, состоящем из более чем 30 000 комментариев сайта «ВКонтакте». В основе библиотеки – модель глубокого обучения, основанная на сверточной нейронной сети (Convolutional Neural Networks – CNN).

Классификация по шкале Хаббарда. Данная шкала состоит из 4 обобщений, которые распределены на эмоции, с коэффициентами тона от 0 до 4. Определив тон эмоции, можно предсказать характеристику испытуемого – его поведение, принципы, характер, позицию в обществе и другое. Точность исследования зависит от качества и времени его проведения. Шкала Хаббарда отображена в таблице 1.

Таблица 1

Шкала Хаббарда

Обобщение	Эмоции	Тон	Управление	Программный тон
Позитив	Энтузиазм	4.0	Управление на основе разума	1
	Веселье (Радость)	3.5		0.25
	Сильный интерес	3.3		0
Нейтральность	Консерватизм	3.0	Управление на основе эмоций	$\geq 0.666 \leq 1$
	Удовлетворенность	2.8		0.444
	Скука	2.5		0.111
	Монотонность	2.4		0
Негатив	Антагонизм	2.0	Управление на основе эмоций	$\geq 0.785 \leq 1$
	Гнев	1.5		0.4285
	Ненависть (Злость)	1.4		0.357
	Скрытая враждебность	1.1		0
Бездействие (сдался)	Страх	1.0	Твердое управление	1.0
	Сочувствие	0.9		0.9
	Горе	0.5		0.5
	Апатия	0.05		0.05
	Смерть тела	0		0

Для каждого обобщения эмоций их тон был пересчитан для работы с программой. Данная классификация в эксперименте состоит из нескольких вариаций действий.

1. Определяется по речи и лицевой жестикуляции, в который входит 7 эмоций, распределенных по следующим обобщениям:

- позитив: счастье, удивление;
- нейтральность: нейтральность;

- негатив: злость, отвращение;
- бездействие: страх, печаль.

2. Определяется по речи, лицевой жестикуляции и тексту, в связи с ограничениями модуля Dostoevsky по русскому языку, количество обобщений эмоций уменьшено до 3:

- позитив: счастье;
- нейтральность: нейтральность;
- негатив: злость.

Получив результаты оценки эмоций и приложив их к шкале Хаббарда, получим частое (основное) состояние человека на момент проведения эксперимента. В ходе испытания и предскажем поведение испытуемого, и охарактеризуем его.

Результат эксперимента

Проверочное тестирование человека через экспериментальную программу по 1-й и 2-й классификации велось ежедневно на протяжении 7 рабочих дней по 8 часов. В начале и конце дня человека опрашивали о ситуациях, произошедших в этот день, для их учета при анализе данных. Возможные ситуации показаны ниже для примера:

- смерть партнера по браку;
- собственная травма или болезнь;
- отпуск;
- изменение финансового состояния;
- рождение ребенка.

На данном промежутке времени не возникло подобных ситуаций. Результаты исследования приведены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2

Классификация по 1 критерию

Обобщение эмоций	Сред. коэф. жестикуляции лица	Сред. коэф. речевого тона	Частота появления эмоций, %
Позитив	0.65	0.68	34
Нейтральность	0.74	0.69	58
Негатив	0.14	0.07	7
Бездействие	0	0.017	1

Таблица 3

Классификация по 2 критерию

Обобщение эмоций	Сред. коэф. жестикуляции лица	Сред. коэф. речевого тона	Сред. коэф. текстового тона	Частота появления эмоций, %
Позитив	0.65	0.68	0.58	34
Нейтральность	0.74	0.69	0.66	59
Негатив	0.14	0.07	0.02	7

Если исходить из полученных данных, самое частое проявление эмоций по 1 и 2 критерию характерно для нейтрального обобщения и

входит в критерий «Консерватизм» тон 3.0. По данному определению производится характеристика тестируемого человека, приведенная в таблице 4.

Таблица 4

Характеристика тона 3.0 «Консерватизм»

№	Характеристика	Описание
1	Поведение и физиология	Обладает умеренной способностью выполнять поставленные перед ним задачи. Может заниматься спортом
2	Медицинские показатели	Обладает умеренной сопротивляемостью обычным инфекциям и другим болезням. Подвержен небольшому количеству психосоматических заболеваний
3	Эмоции	Умеренный интерес и удовлетворенность
4	Сексуальное поведение / Отношение к детям	Испытывает интерес к продолжению рода / Испытывает интерес к детям
5	Контроль над окружающим миром	Умеет контролировать функции своего тела. Обладает хорошо развитой способностью мыслить разумно. Демократичен, но определенные препятствия мешают свободно проявлять эмоции. Признает права других людей
6	Действительная ценность для общества	Видимая ценность равна действительной ценности. Достаточно ценен для общества
7	Этический уровень	Морален. Следует привитым ему этическим нормам максимально честно
8	Как человек обращается с правдой	Ради приличия может соврать. Правдивые утверждения привык делать с осторожностью
9	Уровень смелости	Если риск невелик, то проявляет смелость консервативно
10	Речь: как говорит / Речь: как слушают	Собственные мысли высказывает нерешительно и в ограниченном количестве / Готов воспринимать выраженные с осторожностью мысли и убеждения
11	Обращение человека с письменными сообщениями	Передает сообщения, но ведет себя консервативно. Имеет склонность к творчеству и умеренно конструктивным действиям
12	Реальность (согласие)	Проявляет сдержанное согласие. Осознает тот факт, что реальность других людей иногда бывает правильной
13	Способность нести ответственность	К своей ответственности относится небрежно
14	Настойчивость в достижении цели	Если препятствия не слишком велики, то проявляет достаточный уровень настойчивости
15	Буквальность сказанного	Обладает хорошей способностью воспринимать смысловые различия между высказываниями
16	Метод обращения с людьми	Вызывает поддержку людей благодаря своим практическим суждениям и умению вести себя в обществе других людей

17	Степень подверженности к гипнозу	В бодрствующем состоянии находится в состоянии максимальной готовности к действию, но может поддаваться гипнозу
18	Способность испытывать удовольствие в настоящее время	Иногда бывает удовлетворен существованием в настоящее время
19	Ценность человека как друга	Хороший друг
20	Уровень любви окружающих людей	Вызывает уважение у большинства окружающих людей
21	Состояние	Во вполне хорошем состоянии
22	Уровень понимания человека людьми	Обычно другие люди его понимают
23	Потенциал успеха	Хороший
24	Потенциал выживания	Хороший

Получив данную характеристику, можно сделать следующие выводы о испытуемом.

Он подавляет энтузиазм и изобретательность.

Он движим осторожностью, уравновешен, сдержан, терпелив, не любит выделяться из толпы.

Он надежный, честный и неконфликтный.

Он не стремится к переменам.

Он следует установленным традициям и очень зависим от порядков, принятых в окружающем его обществе.

Он способен заниматься спортом и имеет хорошее здоровье.

Имеет интерес к продолжению рода и к детям.

Испытывает определенные трудности со свободным проявлением эмоций.

Заключение

В работе предложено экспериментальное исследование обнаружения эмоций в речи, тексте и лицевых жестыкуляциях. В его основе – современные модели глубокого обучения, позволяющие прогнозировать эмоции в режиме реального времени. Результат исследования показывает характеристику человека по его эмоциям и определяет его действия в различных ситуациях. Для определения эмоционального состояния человека была выбрана шкала тонов Рона Хаббарда из-за его популярности, методов и удобства реализации, но не исключается использование других способов определения состояния человека. Характеризация человека позволит определить вектор прекращения или продолжения общения с испытуемым и даст возможность повысить или понизить эмоциональный тон, влияя на него методами общения Хаббарда.

Литература

1. Building a Speech Emotion Recognizer using Python. URL: <https://towardsdatascience.com/building-a-speech-emotion-recognizer-using-python-4c1c7c89d713> (дата обращения: 18.01.2023).
2. Emotion Detection using Python. URL: <https://geekyhumans.com/emotion-detection-using-python-and-deepface>. (дата обращения: 19.02.2023).
3. Dostoevsky – анализ тональности. URL: <https://egorovegor.ru/analiz-tonalnosti-s-python-i-dostoevsky>. (дата обращения: 24.02.2023).
4. Шкала эмоциональных тонов Хаббарда. URL: <https://bestlavka.ru/9-ehmocialnyh-tonov-i-24-harakteristiki-v-shkale-rona-habbarda/>. (дата обращения: 26.03.2023).

A.D. Bulimenko

Smolensk State University

EXPERIMENTAL RESEARCH OF SPEECH, FACIAL AND TEXT EMOTION RECOGNITION BASED ON DEEP LEARNING MODELS AND THEIR CLASSIFICATION ACCORDING TO THE RON HUBBARD TONE SCALE

Keywords: *speech emotion recognition, facial gesture recognition, emotion recognition in text, deep learning, MLP Classifier, Dostoevsky, DeepFace, Hubbard emotional tone scale.*

Abstract. *In this research, an experimental approach is proposed to find the recognition of speech, facial and textual emotions, followed by their classification on the Hubbard tone scale. The novelty of this approach consist in the combination of technologies for determining human emotions by machine and the subsequent determination of human characteristics to identify his character, future actions, relationships, communication, and more. The experiment uses modern deep learning models, such as MLP Classifier for determining speech emotions, DeepFace for determining facial emotions in real time, Dostoevsky model trained for the Russian language, providing real-time recognition of messages (text).*

А.С. Бушинский

Смоленский государственный университет

УДК 004.422

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НАПРАВЛЕННОГО АЦИКЛИЧЕСКОГО ГРАФА ДЛЯ СИНТЕЗА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Ключевые слова: *направленный ациклический граф, синтез программного обеспечения, эмуляция процессов, построение рекомендательных систем.*

В данной работе приводится вариант построения рекомендательной системы для множества технологических процессов на производстве при помощи применения направленного ациклического графа, вершинами которого являются подпрограммы, реализующие алгоритм работы по обработке данных, выдаче результатов работы, сбору данных из внешних источников. Рассмотрена возможность синтеза программного обеспечения на основе графового представления задачи в предметной области. Дано описание проведенного эксперимента.

1. Введение

Направленный ациклический граф (ориентированный ациклический граф, DAG от англ. directed acyclic graph) – оргграф, в котором отсутствуют направленные циклы, то есть пути, начинающиеся и кончающиеся в одной и той же вершине. Направленный ациклический граф является обобщением дерева (точнее, их объединения – леса) [1].

Электронная таблица может быть представлена в виде ориентированного ациклического графа, где каждая ячейка связана с вершиной и ребром, когда формула ссылается на другую ячейку [2]. Другие приложения включают планирование, схемотехнику и байесовские сети.

Направленные ациклические графы широко используются в приложениях: в компиляторах, в искусственном интеллекте (для представления искусственных нейронных сетей без обратной связи), в статистике и машинном обучении (для представления байесовской сети доверия).

С помощью графа можно эмулировать множество процессов в природе, описать алгоритм программы с ветвлениями, выполнять последовательные действия в информационной системе при совершении определенных событий и т.п.

Очень важным аспектом в данном подходе также является то, что при помощи графа можно построить информационную систему, в которой пользователь без знания языков программирования сможет с легкостью реализовывать свои алгоритмы при помощи предустановленных блоков с функциями. В данный момент это направление разработки программного обеспечения развивается и имеет название «No code».

«No code» – движение, которое поддерживает идею, что программисты не должны писать код для создания простых приложений. Вместо этого они могут использовать готовые решения, которые уже имеются на рынке. No code-движение стремится упростить

создание приложений, уменьшив время, затрачиваемое на разработку, и упростив процесс создания приложений.

Направленный ациклический граф распространен во многих областях, включая компьютерную науку, теорию графов, системное программирование, искусственный интеллект, теорию управления и т.д. Он также применяется для построения сложных алгоритмов, систем управления, сетевых структур и других задач. Направленный ациклический граф может быть использован для синтеза различных типов программного обеспечения, таких как операционные системы, базы данных, сетевое программное обеспечение, веб-службы, мультимедиа-приложения, и т.д.

2. Алгоритм графового синтеза программ

На данный момент граф и его аналоги распространены в основном в блокчейне, некоторых моделях машинного обучения и узкоспециализированных инструментах. Применение графа на основе сопрограмм для распределенного вычисления на данный момент актуально, так как этот подход позволяет просто описать какой-либо процесс, также дает возможность легко распределить или распараллелить вычисления, тем самым ускоряя работу или пропускную способность обработки данных, поступающих в итоговую программу.

В данной статье хочу рассказать об еще одном применении направленного ациклического графа, а именно составлении программы контроля качества процесса на производстве при помощи подпрограмм, которые являются вершинами графа. Ребра в данной ситуации связывают между собой независимые подпрограммы, тем самым образуя алгоритм, который является программой под каждый конкретный технологический процесс. Анализ литературы вопроса показал, что работ на данную тему еще не было.

Данный граф можно использовать для организации приложений, таких как многопоточные или параллельные вычисления. Он также может применяться для решения различных задач, таких как распределение ресурсов, обработка данных, управление доступом, управление потоками, системы управления базами данных, контроль производства при помощи сбора метрик с датчиков.

При помощи графа можно легко описать последовательный процесс с ветвлениями. В данном случае легко визуализировать весь алгоритм, так же просто можно менять логику работы.

В нашем случае вершинами графа будут являться функции, которые независимы друг от друга. При таком подходе есть возможность запускать вычисления параллельно, асинхронно или даже распределенно на нескольких компьютерах.

Также при помощи графа можно выстроить процесс обработки больших данных, которые постоянно поступают в систему,

обрабатываются и поступают в базу данных или, например, в алгоритм машинного обучения либо нейронную сеть для переобучения.

С помощью графа так же легко и просто можно построить ETL систему (Extract, Transform, Load), которая сейчас имеет большое распространение.

В моем примере мы рассмотрим использование направленного ациклического графа для построения рекомендательной системы реагирования на события во время процесса флотации меди. Данная реализация в настоящий момент внедрена и эксплуатируется заводом.

3. Реализация алгоритма графового синтеза программ

Рассмотрим пример, когда вершинами графа являются описанные разработчиком функции, а ребрами – указатель на следующую функцию, которая может принимать данные от предыдущей, если предыдущая функция выполнена успешно.

Например, для построения графа можно использовать следующие типы функций:

- функция сравнения – будет сравнивать попадание какого-либо значения в заданный интервал, в случае удачного результата, продолжить выполнение графа;
- функция формула – подставляет в формулу значения из какого-либо источника и считает значение. Если во время расчета не произошло ошибки (напр. деление на ноль, не удалось получить данные), то результат вычислений можно передать дальше;
- функция формирования результата работы алгоритма. Данная функция будет в конечной вершине и может обработать и отдать результат.

Граф будем описывать при помощи JSON файла, в котором определим два ключа: nodes и edges. В ключе nodes будут храниться объекты для настройки вершин, а в edges – массив ребер, где left – идентификатор исходящей вершины, а right – идентификатор связанной вершины.

Как видно из примеров, в формулу можно вставить переменную, которая берется из источника данных, в данном случае храним значение в Redis. Также результат вычисления формулы можно использовать в других вершинах.

Примеры описаний вершин графа:

- формула

```
{
  "id": 1,
  "type": "formula",
  "formula": "{Cu50} * 10 / {air}"
}
```
- сравнение

```
{
```

- ```

 "id": 2,
 "type": "compare",
 "key": "formula_1",
 "right": 100,
 "has_equal": false
 }

```
- вывод результата
 

```

 {
 "id": 11,
 "type": "result",
 "message": "Увеличить расход воздуха на {formula_9} куб.м."
 }

```

Пример описания ребер графа:

```

{
 "left": 1,
 "right": 2
}

```

Здесь в качестве языка программирования был использован Python 3.10, Redis и библиотека `paradag`, которая позволяет запускать простой граф в параллельном режиме.

В итоге при помощи данных классов мы сможем сгенерировать и интерпретировать граф, поданный на вход программы.

Опишем JSON для следующего графа (рис. 1).

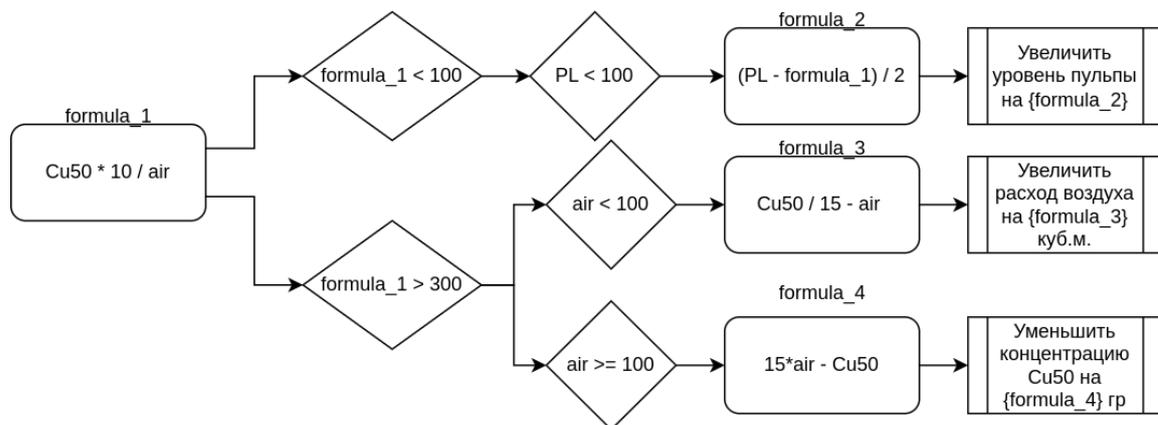


Рис. 1

Попробуем запустить со значениями  $Cu50=10$ ,  $air=100$ ,  $PL=90$ . Программа выдаст в итоге результат «Увеличить уровень пульпы на 44.5».

Теперь поставим  $Cu50=4200$ ,  $air=120$ ,  $PL=90$ , программа выдаст: «Уменьшить концентрацию  $Cu50$  на 2400.0 гр».

Последняя проверка  $Cu50=900$ ,  $air=3$ ,  $PL=90$ , программа выдаст: «Увеличить расход воздуха на 57.0 куб.м.»

Таким образом, задав с помощью JSON направленный ациклический граф, мы синтезировали программу для конкретного случая технологического процесса и смогли получить корректные результаты работы.

Данный граф работает с постоянно поступающими данными, тем самым производя мониторинг технологического процесса, и сигнализирует оператору, что процесс идет не так и нужно выполнить какое-то действие, которое предлагает граф.

#### **4. Заключение**

В данной работе мы рассмотрели использование графа на реальном примере, протестировали его работоспособность и применимость в определенных случаях.

Как было показано выше, граф имеет широкое распространение в современных информационных системах, помогает решать определенный набор задач, в том числе и в промышленности, легко параллелизируется за счет своей структуры.

К тому же стоит отметить, что при помощи графа открывается возможность создавать рекомендательные или скоринговые системы не при помощи алгоритмов машинного обучения на большом количестве данных, такие как деревья решений, а при помощи эксперта в заданной области, который благодаря своему опыту может просто связать вершины с определенными свойствами, являющимися подпрограммами, направленными ребрами. Это может привести к экономии ресурсов для вычисления алгоритмом машинного обучения, которому нужны массивы отобранных и качественных данных.

#### **Литература**

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М., 1978.
2. Направленный ациклический граф – Directed acyclic graph. URL: [https://wiki5.ru/wiki/Directed\\_acyclic\\_graph](https://wiki5.ru/wiki/Directed_acyclic_graph).

**A.S. Bushinskiy**

Smolensk State University

### **USING A DIRECTED ACYCLIC GRAPH FOR SOFTWARE SYNTHESIS**

**Keywords:** *directed acyclic graph, software synthesis, process emulation, building recommendation systems.*

**Abstract.** *This paper presents a variant of constructing a recommendation system for a set of technological processes in production by applying directed acyclic graphs, the vertices of which are subprograms that implement the algorithm of data processing, issuing the results of work, collecting data from external sources. The possibility of software synthesis based on the graph representation of the problem in the subject area is considered. The description of the conducted experiment is given.*

## **СРЕДСТВА РАЗРАБОТКИ СОВРЕМЕННЫХ КРОССПЛАТФОРМЕННЫХ ДЕСКТОП ПРИЛОЖЕНИЙ**

Ключевые слова: *кроссплатформенные десктоп приложения, html, Qt, обфускация, .NET, Electron.*

*В статье рассматриваются кроссплатформенные приложения. Автор описывает их основные виды и объясняет важность их разработки. Приводится сравнительный анализ современных фреймворков для создания кроссплатформенных десктоп приложений.*

### **Введение**

Все начинающие программисты используют во всех проектах без разбора язык, которому их учили, и лишь потом, овладев на средне-базовом уровне несколькими, начинают проект с выбора языка (если, конечно, он не задан заказчиком и не продиктован другими факторами). Следующим важным этапом «взросления» программиста является разработка приложений под разные платформы.

### **Кому и зачем это нужно**

Поддержка разных OS (Linux, Windows, MacOS) давно стала стандартом для всех серьезных производителей программного обеспечения, так как дает возможность охватить всех потенциальных клиентов. Безусловно, важнейшим достоинством кроссплатформенных приложений является возможность обеспечения этой поддержки без увеличения стоимости разработки и поддержания продукта. Использование кроссплатформенных средств разработки упрощает работу команде разработчиков, так как каждый может работать в привычной для себя OS. Так же это дает некоторую независимость от одной определенной OS: ее срока жизни и возможных изменений правил ее использования.

### **Дефиниция**

Под «кроссплатформенностью» в зависимости от контекста могут подразумеваться разные вещи. Кроссплатформенность консольных приложений и Web-серверов не вызывает вопросов: подходящее большинство языков и фреймворков обладает необходимым свойством. В разрезе Web-приложения куда более тонким будет являться вопрос кроссбраузерности. Поэтому будем рассматривать только клиентские приложения с графическим интерфейсом. Современные технологии позволяют создавать полностью кроссплатформенные приложения.

Однако целесообразность разработки кроссплатформенных приложений, запускаемых не только на разных OS, но и на устройствах (например, стационарные компьютеры и смартфоны), вызывает вопросы, поэтому в статье рассматриваются лишь методы разработки десктопных приложений. Также обговорим следующие моменты:

- говоря «кроссплатформенный фреймворк» для, например, Linux, мы не утверждаем, что его любая версия будет исправно работать на любом дистрибутиве. Так, например, российская Astra Linux не поддерживает .Net Core 7 [1]. Мы лишь говорим, что на какой-то версии дистрибутива скорее всего заработает какая-то версия фреймворка;

- говоря «кроссплатформенный фреймворк», мы подразумеваем, что используем только те библиотеки, которые поддерживаются на заявленных OS.

### **Цель работы**

Целью работы является обзор и сравнительный анализ современных фреймворков для разработки кроссплатформенных десктоп приложений и выбора наиболее удачного по совокупности факторов:

- обфускация (или запутывание кода – приведение исходного текста или исполняемого кода программы к виду, сохраняющему её функциональность, но затрудняющему анализ, понимание алгоритмов работы и модификацию при декомпиляции). Один из важнейших методов сохранения интеллектуальной собственности. Является «ахиллесовой пятой» для некомпilierуемых языков;

- тип лицензии, по которой он распространяется. Использование фреймворков, не относящихся к свободному ПО, негативно сказывается на конечной стоимости разрабатываемого продукта;

- актуальность. С одной стороны, фреймворк не должен быть слишком молодым, активно дописываемым, так как это чревато багами и отсутствием привычного функционала и документации, с другой – чрезмерно старым, поддержка которого прекращена;

- простота использования и эстетическая привлекательность.

Разнообразных средств, предоставляющих возможности кроссплатформенной разработки, существует бесчисленное множество, поэтому попробуем рассмотреть ярчайших представителей из наиболее широко распространенных групп.

### **Xaml разметка. Xamarin и Avalonia**

XAML разметка стала широко использоваться с появлением Windows Presentation Foundation и Xamarin [2]. С ее помощью можно создавать графический дизайн, не уступающий по красоте и простоте обычным html страницам. WPF не является кроссплатформенным, но Avalonia [3], основанная на WPF и UWP, является кроссплатформенной. Это, вероятно, наименее популярные платформы для создания кроссплатформенных приложений, что чревато малоактивным

комьюнити и невостребованностью практических знаний платформ на рынке.

### **Кроссплатформенные библиотеки элементов интерфейса**

- Qt [4] – фреймворк для разработки кроссплатформенного программного обеспечения на языке программирования C++. Для многих языков программирования существуют наборы библиотеки, позволяющие использовать Qt: Python – PyQt, PySide; Ruby – QtRuby; Java – Qt Jambi; PHP – PHP – Qt;

- GTK [5] – кроссплатформенная библиотека элементов интерфейса, аналогично Qt, имеет библиотеки для основных языков программирования: C++ – gtkmm, Java – java-gnome, Node.js – node-gtk, и многие другие;

- wxWidgets [6] – кроссплатформенная библиотека инструментов с открытым исходным кодом для разработки кроссплатформенных на уровне исходного кода приложений. Так же имеет библиотеки для основных языков программирования: Python – wxPython, Lua – wxLua, Perl – wxPerl, и многие другие.

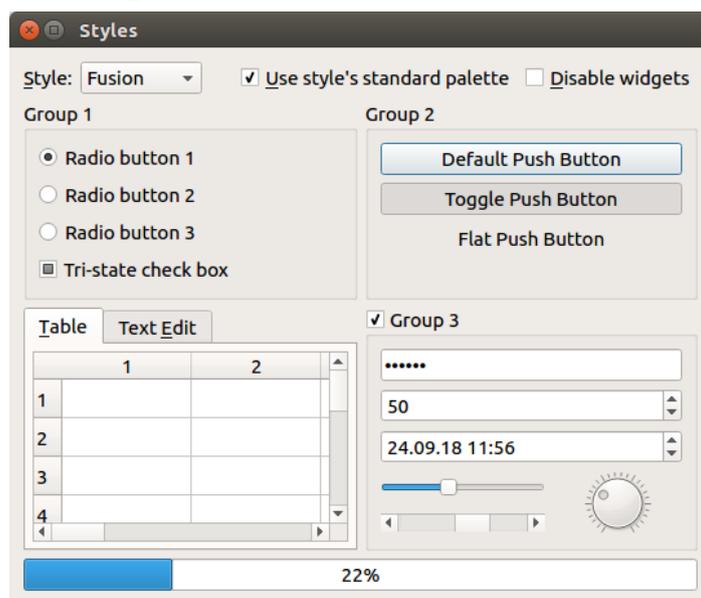


Рис. 1. Базовые виджеты PyQt

Главный недостаток этого семейства – излишне примитивные базовые виджеты (см. рис. 1). Существует возможность создания собственных, но эта процедура неоправданно трудозатратна.

### **Использование интерпретируемых языков программирования для разработки десктоп приложения**

В случае использования фреймворка на интерпретируемых языках программирования программа так и останется в виде набора исполняемых скриптов. При использовании Python с PyQt придать хоть какую-то законченность проекту можно, собрав скрипты в исполняемый .exe, например с помощью PyInstaller. Тем не менее он все еще будет

легко декомпилироваться. Более «изопрённые пути», например конвертация Python скриптов в C с помощью Cython, также могут ни к чему не привести, поэтому, выбирая интерпретируемый язык, нужно с самого начала продумать механизм надежного сокрытия кода.

### **Создание нативных графических приложений с помощью веб-технологий**

Широко распространены следующие фреймворки:

- Electron [7] (MIT License) использует Node.js для backend и Chromium браузер для frontend;
- Tauri [8] (MIT License, Apache License 2.0) использует rust для backend и tao, wry для frontend.

Их использование дает возможность создавать виджеты и их логику с помощью файлов html и таблиц стилей css, использовать js для управления виджетами. Таким образом, возможно использовать уже разработанные элементы управления, например с сайта компании, что позволит сохранить в точности один стиль для всех продуктов. Как и в случае с ранее упомянутой группой, на их основе создаются библиотеки для конкретных языков; так, с помощью ElectronNET (MIT license) можно упаковать классическое веб-приложение ASP.NET Core с MVC архитектурой в десктоп.

### **Выводы**

В современных условиях графическая оболочка – практически неотъемлемая часть любого приложения. Ввиду этого существует бесчисленное множество инструментов для их реализации, каждый может выбрать то, что ему больше подходит. Наиболее интересным среди них является использование веб-технологий, так как позволяет создавать эстетически красивые виджеты с минимальным порогом вхождения.

### **Литература**

1. Astra Linux: Astra Linux // wiki.astralinux.ru. URL: <https://wiki.astralinux.ru/pages/viewpage.action?pageId=41192241> свободный (дата обращения: 19.01.2023).
2. Peppers J. Xamarin Cross-platform Application Development. Packt Publishing Ltd, 2015.
3. Hoefling S. Introduction to Uno Platform // Getting Started with the Uno Platform and WinUI 3. Apress, Berkeley, CA, 2022. С. 1-6.
4. Blanchette J., Summerfield M. C++ GUI programming with Qt 4. Prentice Hall Professional, 2006.
5. Шикуть А. В. К вопросу о переносимости кода и некоторых возможностях использования кроссплатформенного программного обеспечения // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. №.6(18). С. 24.
6. Bližňák M., Dulík T., Vašek V. A persistent Cross-Platform class objects container for c++ and wxWidgets //WSEAS Transactions on Computers. 2009. №. 5. С. 778-787.

7. Build cross // platform desktop apps with JavaScript, HTML, and CSS | Electron. URL: <https://www.electronjs.org/ru/> (дата обращения: 19.01.2023).

8. Release tauri v1.0.0 · tauri-apps // tauri · GitHub. URL: <https://github.com/tauri-apps/tauri/releases/tag/tauri-v1.0.0> (дата обращения: 19.01.2023).

**Е.И. Goncharov**  
Smolensk State University

## **DEVELOPMENT TOOLS FOR MODERN CROSS-PLATFORM DESKTOP APPLICATIONS**

**Keywords:** *cross-platform desktop applications, xaml, Qt, обфускация, .NET, Electron.*

**Abstract.** *The article deals with cross-platform applications. The author describes their main types and explains the importance of the ability to develop them. A comparative analysis of modern frameworks for the development of cross-platform desktop applications is given.*

**А.В. Городилов, А.И. Кононова**  
*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.5

## **РОСТ КОМПЬЮТЕРНОЙ СЕТИ ВО ВРЕМЕНИ И ПРОСТРАНСТВЕ**

**Ключевые слова:** *компьютерные сети, глобальные сети, торрент, фазовое пространство, эволюция, динамическое моделирование, имитационное моделирование, принцип предпочтительного присоединения*

*В статье исследуются различные аспекты роста компьютерной сети, в частности на примере файлообменной: динамика отдельной компоненты и динамика роста в целом; структурные особенности и их оценивание при помощи утилит GNU/Linux и возможностей протокола TCP/IP. Описываются методика измерения, используемые инструменты и полученные результаты для каждой части исследования.*

### **1. Постановка задачи**

Компьютерные сети являются неотъемлемой частью нашей жизни. При этом только относительно небольшие сети имеют предсказуемую,

спроектированную системным администратором структуру – сети глобального масштаба растут постепенно, присоединяя и теряя узлы. В рамках данного исследования рассмотрено два аспекта роста таких сетей – динамический, описывающий изменение характеристик сети в процессе роста; и структурный, описывающий связи между узлами сети в каждый момент времени.

Как динамический, так и структурный аспекты роста рассмотрены на примере файлообменных сетей. Это связано в первую очередь с тем, что файлообменный протокол BitTorrent [1] в настоящее время широко используется для распространения информации.

Другой причиной исследования именно файлообменных сетей является то, что характеристики таких сетей в каждый момент времени часто публикуются или могут быть получены в самой сети [2; 3]. Сети, использующие закрытые протоколы, как правило, не публикуют сведений.

Задачей исследования было построение моделей эволюции сетей, отражающих основные тенденции распространения файлов в таких сетях и при этом поддающихся исследованию, что позволяют простые модели в виде динамической системы (системы обыкновенных дифференциальных уравнений) [4].

## 2. Динамическая модель развития отдельной раздачи [5; 6]

Как сеть складывается из отдельных узлов и их связей, так и инфраструктура файлообмена складывается из отдельных **раздач**, состоящих из процессов информационного обмена, и пользователей: **сидеров**, обладающих полной копией файла, и **личеров**, ещё не обладающих полной копией файла и скачивающих его у других.

Были выполнены экспериментальные измерения эволюции во времени количества сидеров  $s$  и личеров  $l$  для каждой из множества раздач. Некоторые из таких траекторий приведены на рисунке 1.

На основе их анализа была предложена динамическая модель эволюции раздачи [6]:

$$\begin{cases} \dot{s} = s \cdot l - \beta_1 \cdot s \cdot e^{-\frac{l}{M_1}}, \\ \dot{l} = \alpha \cdot s \cdot (N - l - s) - s \cdot l - \beta_2 \cdot l \cdot e^{-\frac{s+l}{M_2}}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha > 0$  и  $N > 0$  – параметры притока новых личеров:  $N$  – общее число пользователей ресурса, заинтересованных в файле,  $\alpha$  характеризует привлекательность раздачи; параметры  $M_{1,2} > 0$  и  $\beta_{1,2} > 0$  характеризуют явление оттока пользователей с тех раздач, где количество других пользователей малó.

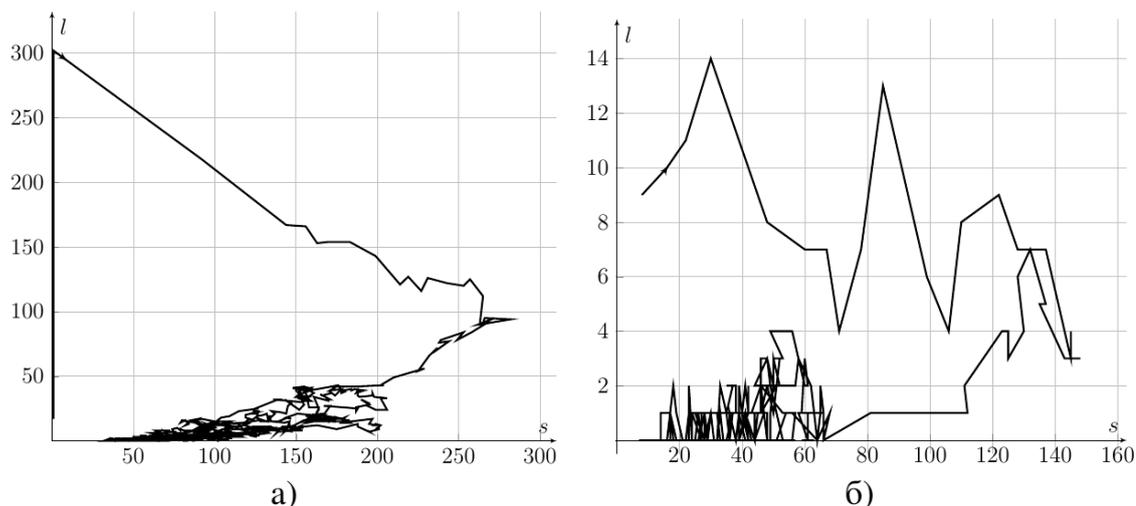


Рис. 1. Фазовые траектории раздач

Анализ модели показал, что её поведение хорошо соответствует экспериментально полученным данным; но значения параметров  $\alpha$ ,  $N$ ,  $M_{1,2}$  и  $\beta_{1,2}$  не являются постоянными, а различны для разных этапов жизненного цикла раздачи.

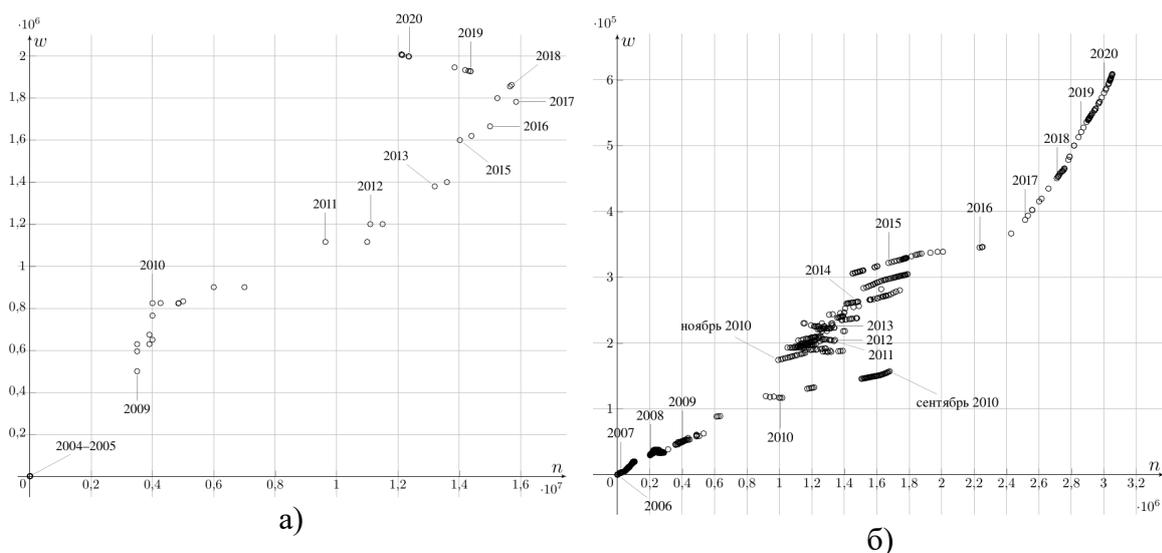


Рис. 2. Эволюция торрент-трекеров в фазовом пространстве: а) гигантский трекер, б) крупный

### 3. Динамическая модель развития сети [2; 7]

Для построения модели развития сети в целом были проведены исследования данных Internet Archive и сторонних обсуждений. Результатом стали значения количества пользователей  $n$  и раздач  $w$  для нескольких торрент-трекеров на протяжении их развития. Фазовые траектории эволюции двух крупнейших в России показаны на рисунке 2.

На основе полученных данных была предложена динамическая модель эволюции торрент-трекера, более подробно описанная в [7]:

$$\begin{cases} \dot{n} = nw \frac{n_{max}-n}{n_{max}} - b_1 n, \\ \dot{w} = n - b_2 w, \end{cases} \quad (2)$$

где  $b_1 > 0$  и  $b_2 > 0$  – параметры, характеризующие отток пользователей с трекера и вымирание раздач;  $n_{max}$  – «потолок» аудитории торрент-трекера.

#### 4. Структурная модель развития сети [3]

Данная модель разрабатывалась в виде модели роста [8] случайно порождённого графа, чему предшествовали экспериментальные измерения. Доступной для измерения характеристикой двух узлов сети является длина пути или количество промежуточных узлов [9]. Для сети в целом это распределение длин путей и его моменты [10, 11].

При помощи утилиты GNU/Linux traceroute были измерены длины путей между узлами для некоторой выборки узлов. Так как рассматриваемая выборка – лишь малая часть узлов глобальной сети, полученное распределение длин путей будем называть **частичным**, в отличие от **полного** распределения, учитывающего все возможные пути. На рисунке 3 показаны полученные для различных выборок и в различные моменты времени частичные распределения длин путей.

Имитационное моделирование различных схем роста, учитывающих как случайные, так и систематические факторы, показало, что рост сети, частичные распределения длин в которой соответствуют рисунку 3, не может быть описан моделью Барабаши–Альберт.

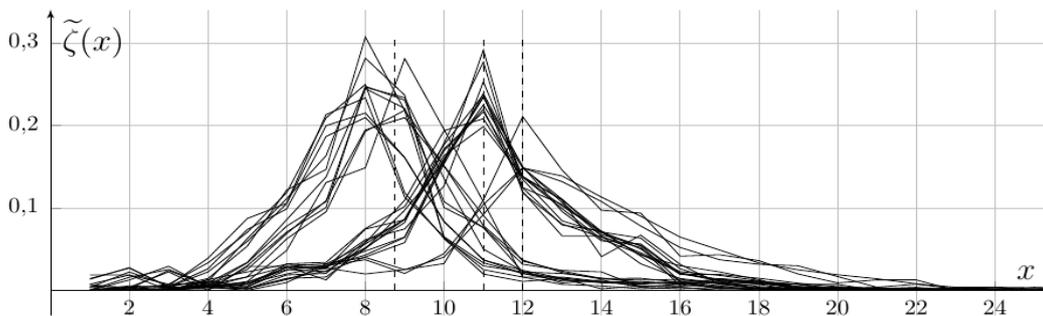


Рис. 4. Частичные распределения длин путей между узлами в реальной сети

Корректная модель роста должна учитывать как минимум то, что реальная сеть состоит из множества подсетей и принцип предпочтительного присоединения не глобален. Часть полученных при моделировании распределений показана на рисунке 4.

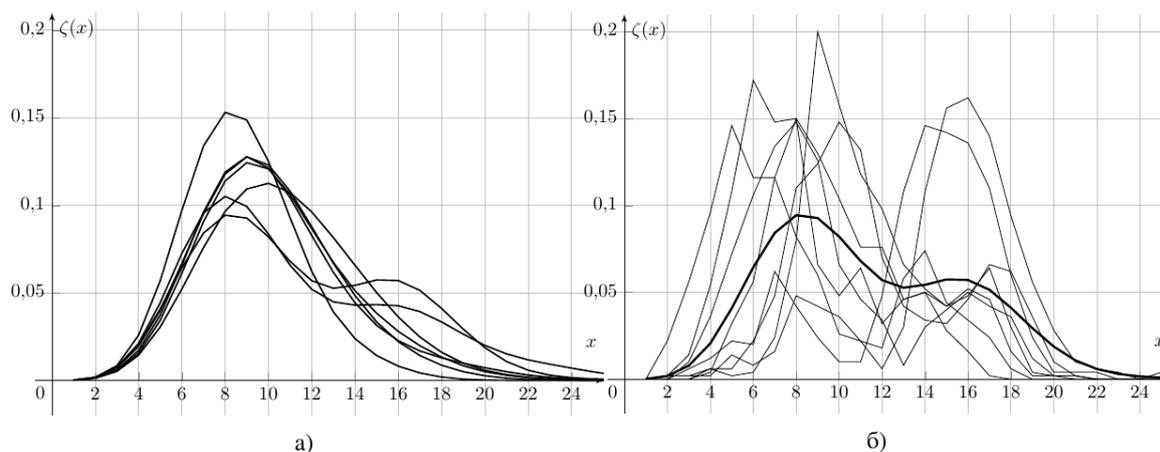


Рис. 5. Распределения длин путей между узлами в модели: а) полные для различных прогонов, б) полное (жирная линия) и частичные (тонкие линии) для одного прогона

Анализ разработанных моделей позволил сделать **выводы** о влиянии различных административных мер на развитие сети, а также спрогнозировать возможные итоги развития сети.

### Литература

1. Морозов Е. Как работает протокол BitTorrent. URL: [https://www.iguides.ru/main/other/kak\\_rabotaet\\_protokol\\_bittorrent/](https://www.iguides.ru/main/other/kak_rabotaet_protokol_bittorrent/). 2017.
2. Кононова А.И., Городилов А.В., Гагарина Л.Г. Эволюция крупнейших файлообменных сетей: рост и забвение // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: СмолГУ, 2021. Вып. 22. С. 104–108.
3. Кононова А.И., Городилов А.В. Имитационное моделирование погрешности экспериментального исследования распределения длин путей между узлами в глобальной сети // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: СмолГУ, 2019. Вып. 20. С. 34–41.
5. Кононова А.И., Городилов А.В. Исследование развития раздачи торрента как путь к эффективному управлению // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 109–115.
4. Арнольд В.И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2008. 32 с.
6. Кононова А.И. Динамическая модель процессов информационных обменов в пиринговой сети // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25, № 4. С. 421–434.
7. Кононова А.И., Гагарина Л.Г. Динамическая модель развития пиринговой файлообменной сети // Модел. и анализ информ. систем. 2019. Т. 26, № 3. С. 351–359.
8. Райгородский А.М. Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2011. 136 с.
9. Команда traceroute Linux. URL: <https://losst.ru/komanda-traceroute-linux>.
10. Евин И.А. Введение в теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. № 2. С. 121–141.
11. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.

**A.V. Gorodilov, A.I. Kononova**  
National Research University of Electronic Technology

## **THE GROWTH OF THE COMPUTER NETWORK IN TIME AND SPACE**

**Keywords:** *computer networks, global networks, torrent, phase space, evolution, dynamic modeling, simulation, preferred attachment principle*

**Abstract.** *The article describes research of various growth aspects of computer network. In particular, the file sharing network has been used as example; the dynamics of a separate component and the dynamics of growth as a whole; structural features and their detection using GNU/Linux utilities and TCP/IP capabilities. Also described measurement technique, used tools and obtained results for each part of the study.*

**Ю.О. Жорнова, Т.А. Самойлова**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.89

## **РАЗРАБОТКА ВЕБ-СЕРВИСА ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА YOLO**

Ключевые слова: *обнаружение объекта, YOLO алгоритм, прогнозирование, веб-сервис, сверточная нейронная сеть.*

*В области обнаружения объектов в последнее время достигнуты огромные успехи, но все же точное обнаружение и идентификация объектов с высокой скоростью – непростая задача. В этой статье рассматривается лучшая на сегодняшний день модель YOLOv7 и ее версия YOLOv7-tiny. Обширный эксперимент с наборами данных Pascal VOC 2007/2012 показал, что предложенные модели достигли лучших результатов и превосходили по точности обнаружения и скорости вывода предыдущие версии.*

### **1. Особенности алгоритма YOLO**

YOLOv7 – самая быстрая и точная модель обнаружения объектов в реальном времени для задач компьютерного зрения. Модель YOLOv7 делится на различные базовые модели: YOLOv7, YOLOv7-tiny, YOLOv7-W6.

- YOLOv7 – базовая модель, оптимизированная для обычных вычислений на GPU;

- YOLOv7-tiny – базовая модель, оптимизированная для графического процессора Edge. Tiny означает, что модель оптимизирована для глубокого и машинного обучения на мобильных устройствах. По сравнению с другими версиями, YOLOv7-tiny использует leaky ReLU в качестве функции активации;

- YOLOv7-W6 – базовая модель, предназначенная для облачных вычислений на GPU. Такие облачные графические модули предназначены для глубокого обучения в облаке, не требуя развертывания графических процессоров на локальном устройстве.

YOLOv7 обеспечивает значительно улучшенную работу в режиме реального времени обнаружения объектов и высокую точность без увеличения затрат на вывод. По сравнению с другими известными моделями, YOLOv7 может эффективно сократить на 40% параметры и на 50% вычисления при обнаружении объектов в реальном времени, а также повысить скорость вывода и точность обнаружения. В результате эту модель можно обучить намного быстрее на небольших наборах данных без предварительно подготовленных весов.

## 2. Унифицированное обнаружение объектов

Архитектура YOLO основана на FCNN (полностью подключенная нейронная сеть). Модель YOLO состоит из трех основных компонентов:

- **Backbone;**
- **Head;**
- **Neck.**

Backbone извлекает основные характеристики изображения и передает их в Head через Neck. Neck собирает карты объектов, которые извлекает Backbone, и создает пирамиды объектов.

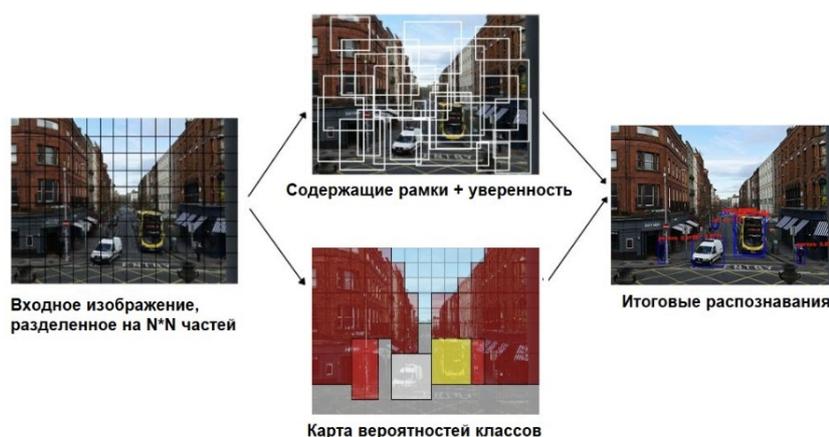


Рис. 1. Алгоритм распознавания YOLO

Принцип детекции YOLO прост: он разбивает исходное изображение на ячейки размером  $N*N$ . В итоге в каждой клетке ячейки будет записана информация о наличии объекта в соответствующей части изображения и каждая ячейка будет отвечать за предсказание некоторых вещей. Во-первых, каждая ячейка отвечает за предсказание  $B$  ограничивающих рамок и показателя достоверности для них. Показатель достоверности отражает, насколько модель уверена в том, что поле содержит объект, а также насколько точно она предсказывает поле. Если в какой-то ячейке нет объектов, то значение достоверности должно быть минимальным. Во-вторых, каждая ячейка отвечает за предсказание вероятностей объектов. В противном случае, показатель достоверности должен быть равен пересечению по объединению (IOU). IOU – отношение площади пересечения прямоугольников к площади их объединения.

YOLOv7 повышает скорость и точность за счет внедрения архитектурных новшеств:

- E-ELAN (расширенная эффективная сеть агрегации уровней);
- Масштабирование модели, основанное на конкатенации;
- Запланированная повторная параметризованная свертка.

E-ELAN является вычислительным блоком в YOLOv7. Такой подход был разработан на основе следующих факторов: стоимость доступа к памяти; соотношение каналов ввода-вывода; поэлементная операция; активация; градиентный путь. Проще говоря, архитектура E-ELAN позволяет платформе лучше обучаться.

Масштабирование модели выполняется в соответствии с требованиями и позволяет использовать ее на различных устройствах. При масштабировании размера модели учитываются следующие параметры: размер входного изображения; количество каналов; количество слоев; количество объектов. Модель YOLOv7 использует метод масштабирования NAS (поиск сетевой архитектуры). BoF или Bag of Freebies – это методы, которые повышают производительность модели без увеличения времени обучения.

### **3. Эксперимент и результаты**

Разработанный веб-сервис на python был протестирован на наборе данных Pascal VOC 2007/2012 с использованием модели YOLOv7 и модели YOLOv7-tiny. Результаты эксперимента были выполнены на машине с графическим процессором AMD Radeon HD 7800 Series, процессором 6-го поколения и 16 ГБ оперативной памяти.

В отличие от предыдущих версий YOLO, которые используют методы обнаружения объектов на основе привязки, YOLOv7 выбирает метод без привязки. Это делает модель на 51% быстрее по сравнению с большинством.

Результаты эксперимента приведены на рисунке 2 и выражены в процентах.

| PASCAL VOC 2007/2012         | YOLOv7 | YOLOv7-tiny |
|------------------------------|--------|-------------|
| Велосипед                    | 95     | 95          |
| Компьютер                    | 92     | 90          |
| Кот                          | 93     | 70          |
| Лошадь                       | 85     | 74          |
| Автомобиль                   | 81.95  | 93          |
| Поезд                        | 94     | 88          |
| Птица                        | 66     | 30          |
| Самолет                      | 90     | 70          |
| Собака                       | 97     | 74          |
| Стол                         | 34     | 32          |
| Кресло                       | 88     | 75          |
| Среднее время обнаружения, с | 2.85   | 1.95        |

Рис. 2. Результаты обнаружения объектов каждой модели

В нашем наборе Pascal VOC некоторые данные не являются репрезентативными, что приводит к ошибочной идентификации. Это можно увидеть из результатов: например, самолет распознается как птица, а исходные изображения с птицами идентифицируются как самолеты. Причина в том, что общая форма очень похожа: у самолета два крыла, как и у птицы, а форма корпуса самолета очень похожа на форму птицы. Поэтому результаты показывают, что 22% самолетов ошибочно распознаются как птицы, а 36% птиц были ошибочно распознаны как самолеты. Кроме того, стул и кресло также относительно легко поддаются ошибочной идентификации, потому что на картинке стулья и кресла очень похожи. Чтобы проверить производительность модифицированной модели, мы сравнили результаты моделей YOLOv7 и YOLOv7-tiny. Средняя скорость обнаружения YOLOv7-tiny составила 1.95 секунды, что на 46% быстрее, чем YOLOv7. По результатам тестирования отмечается надежность YOLOv7: она в среднем идентифицирует объект и определяет каждый класс на 13% лучше, чем YOLOv7-tiny. Несмотря на превосходство YOLOv7, YOLOv7-tiny идентифицирует на изображении мелкие и близкие друг к другу объекты, чего не может делать предыдущая модель.

#### 4. Заключение

В этой статье мы рассмотрели обнаружение объектов на основе моделей YOLOv7 и YOLOv7-tiny, которые являются наиболее быстрыми

и точными в реальном времени на сегодняшний день. Обширный эксперимент на наборе данных Pascal VOC 2007/2012 показывает эффективность базовых моделей. Результаты обнаружения YOLOv7 были сравнены с результатами YOLOv7-tiny, из которых можно увидеть следующее:

- YOLOv7 на 13% эффективнее модели YOLOv7-tiny;
- время обнаружения объектов у YOLOv7 на 46% ниже, чем у YOLOv7-tiny;
- YOLOv7-tiny намного лучше идентифицирует мелкие объекты.

### Литература

1. Peiyuan Jiang, Daji Ergu, Fangyao Liu, Ying Cai, Bo Ma. A Review of Yolo Algorithm Developments // The 8th International Conference on Information Technology and Quantitative Management (ITQM 2020 & 2021).
2. Dr. Suwarna Gothane. A Practice for Object Detection Using YOLO Algorithm // International Journal of Scientific Research in Computer Science, Engineering and Information Technology (IJSRCSEIT), March-April 2021.
3. Zhong-Qiu Zhao, Shou-tao Xu, Xindong Wu. Object Detection with Deep Learning: A Review // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems for Publication. April 2019.
4. <https://learnopencv.com/yolov7-object-detection-paper-explanation-and-inference/> <https://www.analyticsvidhya.com/blog/2018/12/practical-guide-object-detection-yoloframewor-python>.
5. <https://medium.com/aiguys/yolov7-making-yolo-great-again-7b1ec1f6a2a0>.

**J.O. Zhornova, T.A. Samoilova**  
Smolensk State University

## DEVELOPMENT OF A WEB SERVICE FOR OBJECT DETECTION USING THE YOLO ALGORITHM

**Keywords:** *object detection, YOLO algorithm, forecasting, web service, convolutional neural network.*

**Abstract.** *In the field of object detection, tremendous progress has been made recently, but still the accurate detection and identification of objects at high speed is not an easy task. This paper discusses the currently best model YOLOv7 and its version YOLOv7-tiny. Extensive experimentation with Pascal VOC 2007/2012 datasets showed that the proposed models achieved better results and outperformed previous versions in terms of detection accuracy and inference speed.*

## **О НЕКОТОРЫХ ЮБИЛЕЙНЫХ СОБЫТИЯХ 2023 ГОДА В РОССИЙСКОЙ ИНФОРМАТИКЕ**

Ключевые слова: *информатика, цифровая вычислительная машина, ЭВМ, АН СССР, ОИВТА РАН, ИПИАИ, ФИЦ ИУ РАН.*

*В статье кратко рассматриваются события истории отечественной информатики, юбилейные даты по которым будут отмечаться в 2023 году. Это 75-летие первого в стране патента на изобретение автоматической цифровой вычислительной машины, 40-летие образования Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации АН СССР, 40-летие создания Института проблем информатики АН СССР, 100-летие со дня рождения выдающихся ученых, сыгравших важную роль в отечественной информатике, М.А. Карцева и В.М. Глушкова. Приводятся некоторые сведения и подробности, связанные с описываемыми событиями.*

### **1. Введение**

На 2023 год выпадает целый ряд юбилейных дат, связанных с возникновением и развитием отечественной отрасли информатики, которые планируется достаточно широко отмечать. Это прежде всего 75-летие первого патента на изобретение отечественной автоматической цифровой вычислительной машины. Ниже приводятся сведения о его авторах и первых шагах по реализации изобретения. Другим важным событием было возвращение информатики и вычислительной техники в лоно Академии наук – в этом году исполняется 40 лет со дня создания Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации АН СССР. С указанным событием тесно связана и юбилейная дата Института проблем информатики АН СССР, 40-летие создания которого тоже приходится на этот год. В 2023 году отмечается 100 лет со дня рождения великих учёных, сыгравших важную роль в развитии отечественной вычислительной техники и информатики, Михаила Александровича Карцева и Виктора Михайловича Глушкова. О них тоже приводятся некоторые краткие сведения.

## 2. Первое свидетельство на изобретение АЦВМ

На заседании Президиума Российской академии наук 31 января 2023 года было решено обратиться в Правительство России с предложением придать статус Государственной памятной даты Российской Федерации Дню российской информатики, отмечаемому 5 декабря. Выбор даты связан с тем, что первое в СССР авторское свидетельство на изобретение автоматической цифровой вычислительной машины (АЦВМ) на имя И.С. Брука и Б.И. Рамеева было датировано 4 декабря 1948 года (приоритет, выдано 16 февраля 1950 года), и в этом году мы отмечаем юбилей – 75 лет изобретению. Приведу некоторые сведения, относящиеся к этому событию, а также немного расскажу про авторов изобретения.

Исаак Семенович Брук (1902–1974) в 1925 г. окончил электротехнический факультет МВТУ им. Н.Э. Баумана, работал во Всесоюзном электротехническом институте им. В.И. Ленина. В 1935 году был направлен в Энергетический институт АН СССР (ЭНИИ), где организовал Лабораторию электросистем и начал исследования в области расчетов мощных энергетических систем. Для моделирования таких систем он создал расчетный стол переменного тока – аналоговую вычислительную машину. За эти работы И.С. Бруку была присвоена ученая степень кандидата технических наук без защиты диссертации, а в октябре 1936 года он защитил докторскую диссертацию на тему «Продольная компенсация линий электропередач». 28 января 1939 года И.С. Брук был избран членом-корреспондентом АН СССР по Отделению технических наук по специальности «энергетика, электротехника» [1].

В мае 1948 года в Лабораторию электросистем ЭНИИ на должность инженера-конструктора был зачислен Башир Искандарович Рамеев (1918–1994), интересовавшийся средствами создания вычислительной техники. И.С. Брук был рад получить помощника-энтузиаста. Б.И. Рамеев обучался в Московском энергетическом институте (1936–1938), который не окончил – был исключен из-за репрессированного отца.

В августе 1948 года за подписью чл.-корр. АН СССР И.С. Брука и инженера Б.И. Рамеева было представлено краткое описание «Автоматическая цифровая вычислительная машина» (АЦВМ), в котором были изложены принципы действия АЦВМ (оригинал документа хранится в Политехническом музее в Москве). В октябре 1948 года И.С. Бруком и Б.И. Рамеевым были составлены «Проектные соображения по организации лаборатории при Институте точной механики и вычислительной техники для разработки и строительства автоматической цифровой вычислительной машины», которые по разным причинам не удалось реализовать. В декабре 1948 года они подали в Государственный комитет Совета министров СССР по

внедрению передовой техники в народное хозяйство заявку на изобретение «Автоматическая цифровая вычислительная машина» (с использованием общей шины). По этой заявке было получено авторское свидетельство, внесенное в Государственный реестр изобретений Союза ССР 16 февраля 1950 года с приоритетом от **4 декабря 1948 года**, – первое в области цифровой электронной вычислительной техники в СССР.

Немного о дальнейшей судьбе Б.И. Рамеева [2, с. 233-276]. В 1949 году его неожиданно (он уже служил и принимал участие в Великой отечественной войне) призвали в армию как специалиста по радиолокации, но вскоре перевели на работу в СКБ-245, где началась работа по техническому проектированию и созданию ЭВМ «Стрела», Б.И. Рамеев был заместителем главного конструктора. С 1955 г. Б.И. Рамеев работал в Пензе, где был руководителем разработки и главным конструктором семейства машин «Урал». В 1962 году Б.И. Рамееву была присвоена ученая степень доктора технических наук без защиты диссертации. С 1967 по 1970 год работал в Научно-исследовательском центре электронной вычислительной техники НИЦЭВТ в качестве заместителя генерального конструктора намечаемой к созданию ЕС ЭВМ, откуда ушел в связи с несогласием с принятой политикой копирования архитектуры системы IBM-360. С 1970 по 1988 год – заместитель начальника главного управления вычислительной техники и систем управления Государственного комитета по науке и технике СМ СССР. Мне довелось неоднократно встречаться и общаться с Баширом Искандаровичем – до конца жизни он был членом Специализированного диссертационного совета Д 003.56.01, созданного при Институте проблем информатики АН СССР приказом по ВАК СССР 14.05.1986.

Кратко о первых шагах по практической реализации изобретения Брука и Рамеева [3]. В 1950–1951 годах под руководством И.С. Брука в Лаборатории электросистем ЭНИН была разработана малогабаритная электронная автоматическая цифровая машина М-1 (с хранимой программой). Лаборатория располагалась частично в основном здании ЭНИН (Ленинский проспект, 19) и частично на первом этаже жилого дома (Ленинский проспект, 18. Там ещё был магазин «Рыба», поэтому сотрудники для краткости говорили, что работают в рыбе). Постановление Президиума АН СССР о начале разработки М-1 вышло 22 апреля 1950 года. Научно-технический отчет «Автоматическая цифровая вычислительная машина [М-1]» был утвержден директором ЭНИН АН СССР им. Г.М. Кржижановского академиком Г.М. Кржижановским 15 декабря 1951 года. На этом документе указаны руководитель лаборатории чл.-корр. АН СССР И.С. Брук и исполнители работы – младшие научные сотрудники Т.М. Александриди, А.Б.

Залкинд, М.А. Карцев, Н.Я. Матюхин, техники Л.М. Журкин, Ю.В. Рогачев, Р.П. Шидловский.

М-1 была запущена в опытную эксплуатацию в начале 1952 года. АЦВМ М-1 была одной из двух первых в стране ЭВМ (наряду с машиной МЭСМ, создававшейся в Киеве под руководством С.А. Лебедева). В 1952 году лабораторией Брука разработана машина М-2.

В 1955–1956 годах И.С. Брук сформулировал концепцию малых ЭВМ и их отличия от машин предельной производительности. В 1956 году на базе Лаборатории электросистем ЭНИН АН СССР для разработки электронно-вычислительной техники была образована самостоятельная Лаборатория управляющих машин и систем (ЛУМС) АН СССР под руководством И.С. Брука. Разработка в 1956–1957 годах машины М-3, проведенная ЛУМС совместно с НИИЭМ (акад. А.Г. Иосифьян), была принята в 1957 году Государственной комиссией под председательством академика Н.Г. Бруевича, выпускалась малой серией на заводе им. С. Орджоникидзе в Минске.

Одним из участников разработки машины М-1 был **Михаил Александрович Карцев**, родившийся **10 мая 1923 года**, 100-летие которого отмечается в этом году [2, с. 212-231]. М.А. Карцев окончил в 1952 году Московский энергетический институт, работал в ЭНИН АН СССР, возглавлял (наряду с Н.Я. Матюхиным) создание универсальной ЭВМ М-2. В 1957 году коллектив под руководством М.А. Карцева начал разработку управляющей машины М-4 для управления в реальном времени комплексом РЛС. В 1959 году изготовлены 2 комплекта на заводе. В декабре 1964 года Загорский электромеханический завод выпустил 5 машин М-4М, отвечающих требованиям ЭУМ для РЛС. Под руководством М.А. Карцева была создана управляющая машина М-7 для систем управления мощными теплоэнергетическими блоками электростанций. Он был главным конструктором многопроцессорных векторно-параллельных ЭВМ, составивших основу построения мощных вычислительных комплексов для противоракетной обороны. В 1967 году перешел из ИНЭУМ в ОКБ «Вымпел». С 1975 по 1983 год был директором НИИ вычислительных комплексов, который в настоящее время носит его имя.

В 1956 году И.С. Брук выступил на сессии АН СССР по автоматизации с докладом, в котором изложил главные направления промышленного применения вычислительных и управляющих машин. В 1957 году поставил научную проблему «Разработка теории, принципов построения и применения специализированных вычислительных и управляющих машин». Для решения этой проблемы 1 октября 1958 года ЛУМС АН СССР преобразована в Институт электронных управляющих машин (ИНЭУМ) АН СССР, директором которого стал И.С. Брук.

Брук избегал работать по постановлениям правительства с привлечением других коллективов. Работы по созданию ЭВМ М-1, М-2, М-3 выполнялись как внутриакадемические, по постановлениям президиума АН СССР. Предложения И.С. Брука по применению ЭВМ в экономике встретили резкие возражения чиновников, стоявших у руководства Госпланом СССР и Госэкономсоветом СССР, в ведение которых попал ИНЭУМ в начале 60-х годов. В результате непримиримых противоречий с руководством И.С. Брук в 1964 году был вынужден уйти с поста директора ИНЭУМ. Выйдя на пенсию, продолжал работать в ИНЭУМ в качестве научного консультанта.

### **3. 40-летие возвращения информатики в лоно Академии наук**

В 1962 году во время реформ Н.С. Хрущева многие академические институты переводились в промышленные министерства. Не избежал этого и ИНЭУМ АН СССР, который был передан в Госэкономсовет СССР, в дальнейшем ставший Министерством приборостроения, средств автоматизации и автоматизированных систем управления (Минприбор СССР).

К началу 1980-х годов в мире начался бум использования средств вычислительной техники буквально во всех областях. Это было вызвано в значительной степени появлением на рынке нового вида массовой техники – персональных ЭВМ. В СССР к этому времени в ряде министерств и ведомств велись работы по разработке и производству средств вычислительной техники, однако уже отчетливо проявилось осознание заметного отставания от мировых лидеров в этом направлении. В конце 1982 года после смерти руководителя страны Л.И. Брежнева и избрания на пост генерального секретаря ЦК КПСС Ю.В. Андропова в стране начались определенные изменения, затронувшие и область вычислительной техники. Обновленным руководством страны был принят целый ряд важных решений, направленных на преодоление отставания. По правилам того времени решения оформлялись в виде постановлений ЦК КПСС или Совета Министров СССР или в виде совместных постановлений этих двух органов [4].

2 и 3 марта 1983 года проходило годовое Общее собрание Академии наук СССР. О необходимости возрождения и усиления фундаментальных исследований в области компьютерных наук, а также целесообразности для обеспечения технологического паритета в области информационных технологий и вычислительной техники создания специального отделения в своем вступительном слове говорил президент АН СССР А.П. Александров. С большим докладом «Об организации работ по информатике, вычислительной технике и автоматизации в Академии наук СССР» выступил вице-президент АН СССР Е.П. Велихов. В результате постановлением Общего собрания АН СССР № 12 от **3 марта 1983 года** было принято решение об организации

Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации (ОИВТА) в составе Секции физико-технических и математических наук при Президиуме АН СССР. Этим же постановлением указанной секции было поручено представить на утверждение очередного Общего собрания АН СССР персональный состав отделения.

Распоряжением Президиума АН СССР от 24 ноября 1983 года был утвержден состав организационного бюро ОИВТА под председательством академика Е.П. Велихова. В него вошли: академики Алферов Ж.И., Белоцерковский О.М., Мельников В.А., члены-корреспонденты АН СССР Валиев К.А., Ершов А.П., Копецкий Ч.В., Наумов Б.Н., д.т.н. Пономарев В.М. и к.ф.-м.н., ученый секретарь Вишняков Ю.С.

В этом году исполняется 40 лет выпущенным в один день 29 июля 1983 года совместному Постановлению ЦК КПСС и Совета Министров СССР № 729-231 «О дальнейшем развитии работ в области вычислительной техники» и детализирующему его Постановлению Совета Министров СССР № 730-232 «О мерах по обеспечению работ в области вычислительной техники и ее применения в народном хозяйстве», сыгравшим большую роль в истории информатики в стране. В частности, именно в этом совместном постановлении ЦК КПСС и СМ СССР было сказано: «Принять предложение АН СССР, согласованное с ГКНТ и комиссией Президиума СМ СССР по военно-промышленным вопросам о создании в системе АН СССР: Научного центра по фундаментальным проблемам вычислительной техники и систем управления (с включением в его состав организуемых в г. Ярославле Института проблем вычислительной техники, Института микроэлектроники, СКБ и опытного производства); Института проблем кибернетики на базе лабораторий научного совета АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика» в г. Москве с филиалом в г. Переславле-Залесском Ярославской области; Института проблем технологии микроэлектроники и особо чистых материалов (с СКБ и опытным производством) в пос. Черноголовка на базе ряда подразделений Института физики твердого тела и других организаций АН СССР. Разрешить АН СССР создать Институт проблем информатики с опытным производством в г. Москве и с филиалами в гг. Казани и Бердянске Запорожской области». Эти созданные организации вошли в состав ОИВТА.

23 февраля 1984 года Постановлением Президиума АН СССР были определены научные учреждения АН СССР, вошедшие в состав ОИВТА, – это были четыре ранее существовавших института: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Вычислительный центр, Институт проблем передачи информации и Ленинградский научно-исследовательский вычислительный центр, а также пять новых

институтов, созданных вышеуказанным постановлением ЦК КПСС и СМ СССР.

14 марта 1984 года Общее собрание АН СССР своим постановлением № 10 утвердило персональный состав ОИВТА, в который вошли 10 действительных членов АН СССР (Белоцерковский О.М., Бункин Б.В., Велихов Е.П., Воронов А.А., Дородницын А.А., Мельников В.А., Пугачев В.С., Самарский А.А., Семенихин В.С., Тихонов А.Н.) и 25 членов-корреспондентов (Алексеев А.С., Бицадзе А.В., Бурцев В.С., Валиев К.А., Говорун Н.Н., Гуляев Ю.В., Евтихийев Н.Н., Емельянов С.В., Ершов А.П., Золотов Е.В., Копецкий Ч.В., Королев Л.Н., Лавров С.С., Лопато Г.П., Макаров И.М., Моисеев Н.Н., Наумов Б.Н., Попов Е.П., Поспелов Г.С., Ржанов А.В., Савин А.И., Сифоров В.И., Тихомиров В.В., Цыпкин Я.З., Шереметьевский Н.Н.).

#### **4. 40-летие Института проблем информатики**

29 июля 1983 года было принято постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР об образовании Института проблем информатики АН СССР [5]. Соответствующее распоряжение Президиума АН СССР было датировано **2 августа 1983 года**.

В начале 1980-х годов появляются и стремительно завоевывают новые области применения массовые средства вычислительной техники – персональные компьютеры, существенное развитие получают научные основы информатики. Однако «ведомственность» организаций, занимающихся проблемами информатизации, являлась тормозом для развития информатики в СССР. Именно с целью преодоления «ведомственных барьеров», а также развития методов и средств информатизации было образовано новое отделение АН СССР, а член-корреспондент АН СССР Б.Н. Наумов, возглавлявший Институт электронных управляющих машин Минприбора СССР, был назначен директором – организатором одного из новых институтов – ИПИАН. Основная задача ИПИАН была определена как «проведение фундаментальных и прикладных исследований в области технических и программных средств массовой вычислительной техники и систем на их основе», а интеллектуальной базой первых научных подразделений ИПИАН стали коллективы ряда научных отделов ИНЭУМ, переведенные в ИПИАН в начале 1984 года

Институт в первые годы своего существования быстро развивался: в его состав вошли филиалы в Бердянске, Казани, Орле. В 1990 году был образован совместный отдел с радиотехническим институтом в г. Таганроге. Общая численность сотрудников института в 1988–1989 годах превышала 1000 человек.

В 1989 году директором института стал член-корреспондент АН СССР Игорь Александрович Мизин (в 1997 году избран действительным членом РАН). В 1999 году директором института стал

Игорь Анатольевич Соколов (в 2003 году избран членом-корреспондентом РАН, а в 2008 году – действительным членом РАН).

В 1992 году институт получил новое наименование – Институт проблем информатики Российской академии наук (ИПИ РАН). В настоящее время преемником Института проблем информатики РАН является Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН) – подведомственная Министерству науки и высшего образования Российской Федерации научная организация, выполняющая фундаментальные, поисковые и прикладные научные исследования и разработки в области вычислительной и прикладной математики, системного анализа и управления, теоретической информатики и информационных технологий, развития информационно-телекоммуникационной инфраструктуры и информатизации общества. ФИЦ ИУ РАН создан в декабре 2014 года путем реорганизации Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем информатики Российской академии наук (ИПИ РАН) в форме присоединения к нему Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН) и Федерального государственного бюджетного учреждения науки Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук (ВЦ РАН). Центр имеет в Орле и в Калининграде филиалы, которые до реорганизации были филиалами ИПИ РАН. ФИЦ ИУ РАН работает под научно-методическим руководством двух отделений РАН – Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН (до 2002 года – Отделение информатики, вычислительной техники и автоматизации, в 2002–2007 годах – Отделение информационных технологий и вычислительных систем) и Отделения математических наук РАН.

#### **5. 100-летие В.М. Глушкова**

Ещё об одной памятной дате этого года нельзя не сказать: **24 августа 2023 года** исполняется 100 лет со дня рождения академика АН СССР Виктора Михайловича Глушкова (1923–1982) – пионера информатики и кибернетики, идеолога цифрового государства, известного своими результатами мирового значения в математике, информатике и кибернетике, вычислительной технике и программировании [2]. С 1956 года и до конца жизни В.М. Глушков жил и работал в Киеве, где в 1962 году организовал Институт кибернетики АН УССР, бессменным директором которого был до конца жизни. В книге [2, с. 83-173], написанной в 1995 году, один из соратников и сотрудников В.М. Глушкова – Б.Н. Малиновский – писал: «Удастся ли флагману кибернетики, лишившемуся капитана, благополучно преодолеть штормы и подводные рифы в бурном море разрушительной

перестройки? Вряд ли кто-нибудь сейчас даст ответ на этот тревожный вопрос. И все-таки хотелось бы надеяться, что 24 августа 2023 года, в день столетия со дня рождения В.М. Глушкова, нашим наследникам не придется краснеть ни за нас, ученых, ни за государственных мужей, определяющих дальнейшую судьбу Украины». Увы, надежда не оправдалась!

### Литература

1. Филинов Е.Н. Исаак Семенович Брук // Информационные технологии и вычислительные системы. 2002. Изд. УРСС, №2. С. 3-10.
2. Малиновский Б.Н. История вычислительной техники в лицах. Киев: КИТ, 1995.
3. Захаров В.Н. Две судьбы в истории отечественной вычислительной техники (С.А. Лебедев и И.С. Брук) // Сб. тр. SoRuCom-2017. Четвертая Международная конференция «Развитие вычислительной техники в России и странах бывшего СССР: история и перспективы». Зеленоград, 3-5 октября 2017 / под ред. А.Н. Томилина. М.: РЭУ им. Г.В. Плеханова, 2017. С. 58-62.
4. Zakharov V. Computers and Their Application in the USSR in the Middle of the 1980s: Situation, Actions Taken, Predictions of Development. Computer Technology in Russia and in the Former Soviet Union (SoRuCom), 2014 Third International Conference on Computer Technology in Russia and in the Former Soviet Union. Publication Year: 2014. P. 53 – 60. doi: 10.1109/SoRuCom.2014.19 .
5. Захаров В.Н. Работы Института проблем информатики РАН // История отечественной электронной вычислительной техники / под ред. А.С. Якунина. М: Издательский дом «Столичная энциклопедия», 2014. 576 с. С. 444-448.

### V.N. Zakharov

Federal Research «Center Computer Science and Control» of the  
Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS)

## ON SOME JUBILEE EVENTS OF 2023 IN RUSSIAN COMPUTER SCIENCE

**Keywords:** *Informatics, digital computer, Academy of Sciences of the USSR, IPIAN, FRC CSC RAS.*

**Abstract.** *The article briefly discusses the events in the history of Russian informatics, the anniversaries of which will be celebrated in 2023. This is the 75th anniversary of the country's first patent for the invention of an automatic digital computer, the 40th anniversary of the formation of the Department of Informatics, Computer Engineering and Automation of the USSR Academy of Sciences, the 40th anniversary of the Institute of Informatics Problems of the USSR Academy of Sciences, the 100th anniversary of outstanding scientists who played an important role in the national informatics – M.A. Kartsev and V.M. Glushkov. Some information and details related to the described events are given.*

## СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Ключевые слова: алгебра многомерных матриц, пространственная матрица, сингулярное разложение, сжатие изображений.

*Сингулярное разложение матриц – это основной строительный блок, используемый для решения многих прикладных задач. Если размерность задачи превышает два, то используются обобщения сингулярного разложения – тензорные разложения. Однако разложения тензоров не всегда работают хорошо, поскольку они ограничены определением операций тензорной алгебры. Обобщение алгоритма сингулярного разложения плоских матриц на пространственные матрицы позволит найти новые применения и решать уже существующие задачи более эффективно. Данное разложение будет проиллюстрировано примером – с его помощью будет реализовано сжатие цветного изображения.*

### Введение

Авторы [1; 2] утверждают, что программно-аппаратный комплекс эффективно решает задачу только тогда, когда он полностью реализует алгебру, которая описывает его математическую модель. Алгебра многомерных матриц может быть использована как модель данных для решения задач из различных областей. В [3] авторы доказывают гомоморфизм между алгеброй многомерных матриц и реляционной алгеброй, что привело к новому подходу к распараллеливанию запросов в базах данных. В [4] были выведены полиномиальные алгоритмы для вывода ассоциативных правил и маршрутизации. Некоторые матричные алгоритмы шифрования, такие как шифр Хилла [5] и алгоритм Диффи–Хеллмана, удалось успешно обобщить с помощью алгебры многомерных матриц, что привело к улучшению их характеристик стойкости. Алгебра многомерных матриц также подходит для построения цепей Маркова [6] и решения задач на графах [7]. В [8] автор получил математическую модель операций свертки на основе алгебры многомерных матриц с операцией  $(0, \mu)$ -свернутого произведения. Автор [9] применяет алгебру многомерных матриц для исследования гиперграфов.

Все эти примеры показывают, как естественное обобщение уже известных алгоритмов на алгебру многомерных матриц позволяет

улучшить их характеристики или получить гибкий инструмент для решения более широкого круга задач. Данную тенденцию можно продолжить, рассмотрев обобщение алгоритма сингулярного разложения плоских матриц, который является важным инструментом для решения множества задач из различных областей науки, таких как математика, информатика, физика, биология, социология и т.д.

### **Сингулярное разложение плоских матриц**

Сингулярное разложение – это один из видов факторизации матрицы, позволяющий представить вещественную матрицу  $A$  размера  $n \times n$  в виде произведения трех матриц  $U$ ,  $\Sigma$  и  $V^T$ .

**Теорема.** Для любой матрицы  $A$   $n \times n$  с вещественными элементами существуют две ортогональные матрицы  $n \times n$  с вещественными элементами, обозначаемые  $U$  и  $V$ , такие, что

$$U^T A V = \Sigma \quad (1)$$

и матрица  $\Sigma$  – диагональная матрица.

Данная теорема широко известна и доказывается многими авторами, например в [10].

**Следствие.** Умножив обе части (1) слева на  $U$  и справа на  $V^T$ , получим сингулярное разложение матрицы  $A$ :

$$A = U \Sigma V^T. \quad (2)$$

### **Сингулярное разложение пространственных матриц**

Определения многомерной матрицы и основных понятий, связанных с ней, а именно транспонирования, сечения,  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения, используемые в данной статье, приводятся в монографии [11].

Общая идея и алгоритм нахождения сингулярного разложения пространственных матриц были изложены в [12]. Чтобы не повторять все проведенные там рассуждения, будет рационально привести итоговую формулу, выражающую аналог разложения (2) для пространственных матриц:

$$A = {}^{1,1}({}^{1,1}(U \times \Sigma) \times V \begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ i_3 i_2 i_1 \end{pmatrix}). \quad (3)$$

В [12] было сказано о возможных приложениях и возможностях обобщить (3) на произвольные размерности. Для начала рассмотрим способ, позволяющий обобщить (3) на матрицы, чья размерность превышает три; для этого воспользуемся преобразованием матрицы, которое позволит рассмотреть её как трехмерную. Затем приведем пример, в котором рассмотрим одно из простейших приложений (3).

### **Условно трехмерные матрицы**

Многомерная матрица с числом измерений большим или равным трех может быть представлена в виде трехмерной [13]; идея данного

представления чем-то похожа на поднятие и опускание индексов тензора. Опишем данное представление.

Пусть матрица  $A = \|A_{i_1 \dots i_p}\|$  –  $p$ -мерная ( $p \geq 3$ ) порядка  $n$ . Рассмотрим разбиение индексов данной матрицы на группы:  $l = (l_1, l_2, \dots, l_\kappa)$ ,  $s = (s_1, s_2, \dots, s_\lambda)$ ,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_\mu)$ , где  $(\kappa, \lambda, \mu \geq 0)$  и  $\kappa + \lambda + \mu = p$ . Тогда  $A$  можно представить в виде  $A = \|A_{lsc}\|$ . Рассмотрим каждую из групп  $l$ ,  $s$  и  $c$  как мультииндекс. Получим три набора чисел, пробегающих:

$$\begin{aligned} l^\# &: \text{от } \underbrace{(11\dots 1)}_\kappa \text{ до } \underbrace{(nn\dots n)}_\kappa, \\ s^\# &: \text{от } \underbrace{(11\dots 1)}_\lambda \text{ до } \underbrace{(nn\dots n)}_\lambda, \\ c^\# &: \text{от } \underbrace{(11\dots 1)}_\mu \text{ до } \underbrace{(nn\dots n)}_\mu, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $l^\#$ ,  $s^\#$  и  $c^\#$  – это индексы, являющиеся мультииндексами матрицы  $A$  и соответствующие разбиениям  $l$ ,  $s$  и  $c$  набора индексов  $A$ . Для простоты пересчета этих наборов можно сместить нумерацию, начав её не с единицы, а с нуля. Тогда мультииндексы будут представлять собой числа в  $n$ -ричной системе счисления; в таком случае их становится легко перебрать, прибавляя каждый раз единицу [2].

Таким образом, каждая из совокупностей, состоящих из  $\kappa$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  индексов соответственно, рассматривается как один индекс. Тогда матрицу  $A$  можно представить в виде:

$$A^\# = \|A_{l^\# s^\# c^\#}\|. \quad (5)$$

### Сингулярное разложение многомерных матриц

Сингулярное разложение пространственных матриц можно обобщить на матрицы большей размерности по крайней мере двумя способами.

Пусть матрица  $A = \|A_{i_1 \dots i_p}\|$  –  $p$ -мерная ( $p \geq 3$ ) порядка  $n$ . Тогда аналог (2) в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$A = {}^{\lambda_1, \mu_1} (\lambda_2, \mu_2 (U \times \Sigma) \times V \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_q \\ i_{a_1} & i_{a_2} & \dots & i_{a_q} \end{pmatrix}), \quad (6)$$

где  $U$ ,  $\Sigma$  и  $V$  –  $w$ ,  $d$  и  $q$ -мерные соответственно.

Получить разложение первым способом можно, наложив искусственные ограничения на размерность матриц  $U$ ,  $\Sigma$  и  $V$ , положив их размерность равной  $p$ . Тогда, согласно свойствам  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения,  $\lambda_1 = \lambda_2 = p - 2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Таким образом, (6) примет вид:

$$A = {}^{p-2, 1} ({}^{p-2, 1} (U \times \Sigma) \times V \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_q \\ i_q & i_2 & \dots & i_1 \end{pmatrix}).$$

Вторым способом будет соединение идей сингулярного разложения пространственных матриц с представлением условно трехмерных матриц. Представив произвольную многомерную матрицу в виде (5), для этого представления можно получить разложение (3) в виде:

$$A^{\#} = {}^{1,1}({}^{1,1}(U^{\#} \times \Sigma^{\#}) \times V^{\# \begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ i_3 i_2 i_1 \end{pmatrix}}),$$

после чего обратным преобразованием восстановить размерность матриц, получив искомые многомерные матрицы. Вид полученного разложения будет зависеть от конфигурации наборов (4), то есть от выбора чисел  $k$ ,  $\lambda$  и  $\mu$ . С помощью данного способа можно получить все разложения, которые могут быть получены с помощью предыдущего. Для этого нужно выбрать  $k = 1$ ,  $\lambda = p - 2$ ,  $\mu = 1$ .

### **Сжатие изображений с помощью сингулярного разложения пространственных матриц**

Рассмотрим цветное изображение с цветовой схемой RGB. В такой схеме цвет каждого пикселя изображения формируется из трех цветов: красного, зеленого и синего. Эти цвета образуют три цветовых канала; каналы накладываются, образуя различные цвета и оттенки. Диапазон изменения значений каждого из каналов – от 0 до 255. Таким образом, все цветовое пространство содержит  $256^3 = 16777216$  возможных цветов. С помощью модели RGB можно сформировать все цвета, воспринимаемые человеческим глазом, поэтому она применяется для отображения кадров на мониторах компьютеров.

Изображение можно представить в виде плоской матрицы пикселей. Каждый пиксель содержит значение каналов красного, зеленого и синего цветов. Это приводит нас к трехмерному случаю, когда изображение представляется в виде трехмерной матрицы размера  $m \times n \times 3$ .

Рассмотрим обычное цветное изображение (рис. 1).

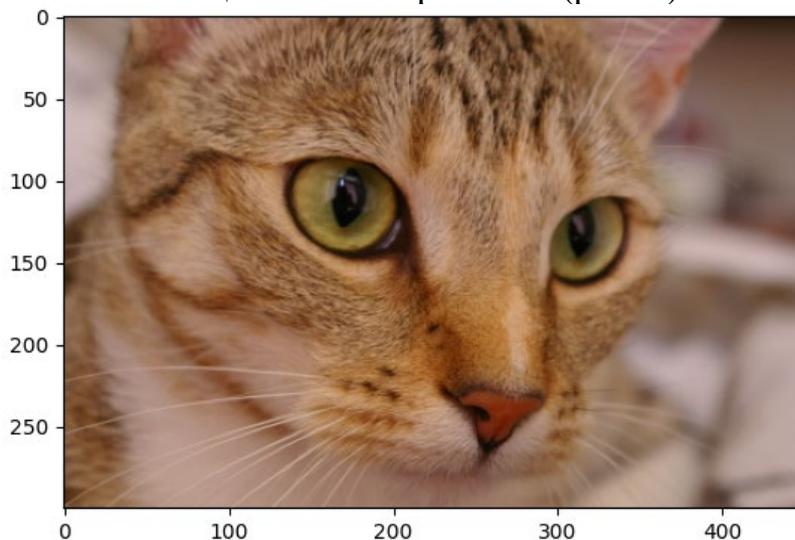


Рис. 1. Сжимаемое изображение

В памяти компьютера данное изображение представляется в виде трехмерного массива (матрицы) размером  $300 \times 451 \times 3$ . Будем работать с ним как с пространственной матрицей.

Пусть  $I$  – трехмерная матрица  $300 \times 451 \times 3$ . Для простоты транспонируем матрицу изображения согласно подстановке  $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}$ ,

получим матрицу  $300 \times 3 \times 451$ . Введем следующие разбиения индексов:  $l = (i_1)$ ,  $s = (i_2)$ ,  $c = (i_3)$ , то есть все числа  $\kappa$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  равны единице. Тогда матрицу  $I$  можно представить в виде  $I = \|I_{lsc}\|$ . Далее, согласно алгоритму нахождения сингулярного разложения пространственной матрицы, для каждого скоттова сечения матрицы  $I$  найдем представление (2). Определим число сингулярных чисел  $r$ , которое хотим взять. Тогда представление (2) превратится в

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T.$$

Из полученных сечений сконструируем привычным образом матрицы  $U$ ,  $V$  и  $\Sigma$ . Таким образом, с помощью сингулярного разложения пространственной матрицы будет получено разложение каждого из каналов (красного, зеленого и голубого) изображения. Варьируя число  $r$ , можно добиваться различной степени сжатия изображения. Положив  $r$  достаточно большим, можно не заметить различий с оригиналом. Однако с уменьшением значения  $r$  все сильнее проявляются артефакты компрессии, заметно «замыливание» изображения (рис. 2). Если же положить  $r$  близким к нулю, то на изображении можно разглядеть только базовую линейаризованную структуру, но объект на фото распознать очень сложно (рис. 3).

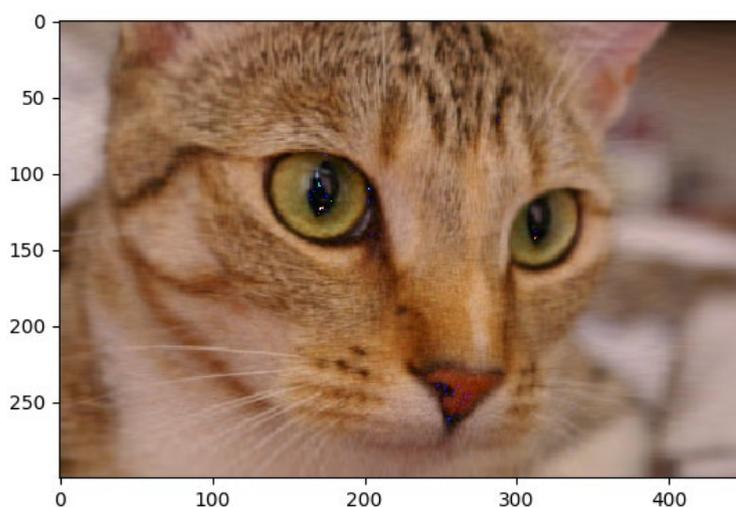


Рис. 2. Сжатие изображения при  $r = 50$

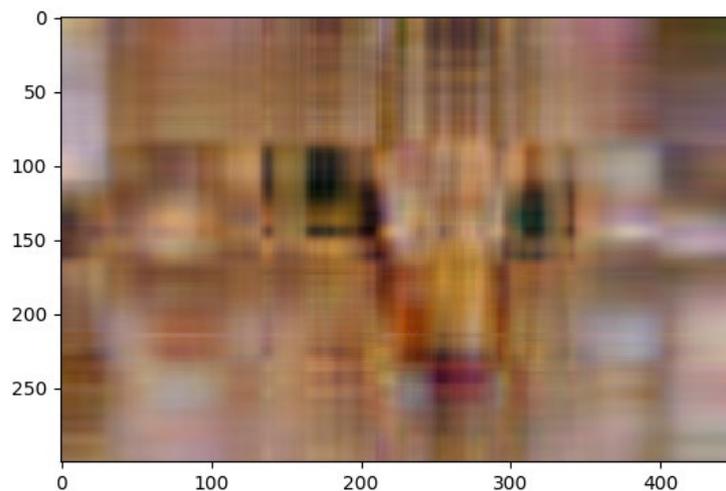


Рис. 3. Сжатие изображения при  $r = 5$

### Заключение

В статье были развиты идеи обобщения сингулярного разложения плоских матриц на многомерный случай. Полученный в [12] результат удалось распространить на случай произвольной размерности, прибегнув к представлению многомерной матрицы в виде трехмерной. Было показано простейшее приложение сингулярного разложения пространственных матриц в задаче сжатия цветных изображений.

Полученные результаты может быть удобно применять для решения задач, в которых сейчас используются тензорные разложения: развитие темы сжатия изображений [14; 15], создание водяных знаков [16], построение рекомендательных систем [17] и др.

### Литература

1. Munerman V.I. Construction of architectures of hardware-software complexes to increase the efficiency of massively data processing // High Availability Systems. 2014. Т. 10, No. 4. P. 3-16.
2. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Параллельная реализация обработки интенсивно используемых данных на основе алгебры многомерных матриц // Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных: XVII Международная конференция DAMDID/RCDL. 2015. С. 217-223.
3. Мунерман В.И., Мунерман Д.В. Соответствие операций в многомерно-матричной и реляционной моделях данных // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XX Международной научной конференции, – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. Вып. 20. С. 209-214.
4. Кириллов Е.В., Мельник К.В., Мунерман В.И. Параллельная реализация вывода ассоциативных правил на основе NUMA-архитектуры // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XX Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. Вып. 20. С. 170-176.
5. Гончаров Е.И., Мунерман В.И., Самойлова Т.А. Выбор параметров многомерных матриц для обобщенного алгоритма шифрования Хилла // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XX Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. Вып. 20. С. 111-116.

6. Корчиц К.С., Муха В.С. Векторные односвязные цепи Маркова // Доклады БГУИР. 2003. №3(3). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vektornye-odnosvyaznye-tseri-markova> (дата обращения: 09.01.2023).
7. Мунерман В.И., Самойлова Т.А. Алгебраический подход к алгоритмизации задач маршрутизации // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14, №5. С. 50-56, doi: 10.18127/j20729472-201805-08
8. Гончаров Е.И. Многомерно-матричное определение операции свертки // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/mnogomerno-matrichnoe-opredelenie-operatsii-svertki> (дата обращения: 09.10.2022).
9. Тараненко А.А. Перманенты многомерных матриц: свойства и приложения // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. 23.4. С. 35-101.
10. Форсайт Д., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир, 1969.
11. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев: Наукова Думка, 1972. 177 с.
12. Iljin P.L., Samoiloва T.A. Сингулярное разложение пространственных матриц // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, №3.
13. Munerman V.I., Munerman D.V. Обобщение одного алгоритма параллельного умножения матриц в алгебре многомерных матрице // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, №3.
14. Kahu S., Rahate R. Image compression using singular value decomposition // International Journal of Advancements in Research & Technology. 2013. Т. 2, №8. С. 244-248.
15. Cao L. Singular value decomposition applied to digital image processing // Division of Computing Studies, Arizona State University Polytechnic Campus, Mesa, Arizona State University polytechnic Campus. 2006. С. 1-15.
16. Chandra D.V.S. Digital image watermarking using singular value decomposition // The 2002 45th Midwest Symposium on Circuits and Systems. 2002. MWSCAS-2002. IEEE, 2002. – Vol. 3.
17. Frolov E., Oseledets I. Fifty shades of ratings: how to benefit from a negative feedback in top-N recommendations tasks // Proceedings of the 10th ACM Conference on Recommender Systems. 2016. P. 91-98.

**P.L. Iljin**

Smolensk State University

## **SINGULAR VALUE DECOMPOSITION OF MULTIDIMENSIONAL MATRIX AND ITS APPLICATIONS**

**Keywords:** *multidimensional matrix algebra, spatial matrix, singular value decomposition, image compression.*

**Abstract.** *Singular value decomposition of matrices is a basic building block used in the solutions of many applied problems. In cases where the dimensionality of the problem exceeds two, generalizations of singular value decomposition, such as tensor decompositions, are used. However, tensor decompositions do not always work well, as they are limited by the definition*

*of tensor algebra operations. Generalizing the singular value decomposition for flat matrices to spatial matrices will allow for finding new applications and solving existing problems more efficiently. This decomposition will be illustrated by an example – it will be used to implement compression of a color image.*

**И.А. Казанцев, Р.К. Классен**

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ*

УДК 004.651

## **ПРИМЕНЕНИЕ БИНАРНЫХ ФАЙЛОВ ДЛЯ УСКОРЕНИЯ ОБРАБОТКИ ЗАПРОСОВ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СУБД КЛАССА BIGDATA CLUSTERIX-N К БД ОБЪЁМОМ 1 ТБ**

Ключевые слова: СУБД, Clusterix-N, бинарные файлы, хранение данных, большие данные, обработка запросов.

*В данной работе приводится реализация бинарного хранилища для хранения больших объёмов информации (1 ТБ и более). Предлагается структура бинарного файла и его метаданных. Экспериментально подтверждается улучшение характеристик системы управления базами данных Clusterix-N при работе с базами данных большого объёма.*

### **1. Введение и постановка задачи**

Информацию в электронном виде можно хранить различными способами. Это могут быть неструктурированные текстовые файлы, структурированные текстовые и бинарные файлы. Хранение структурированных данных подразумевает наличие специальных структур, которые принято называть форматом [1]. Форматы бывают простыми и сложными. Для чтения и изменения простых форматов достаточно использования простого текстового редактора. Для сложных форматов необходимо дополнительное программное обеспечение, которое способно читать и представлять информацию в понятном для человека виде.

Альтернативой текстовым форматам служат бинарные. Они обладают наименьшей избыточностью, так как хранят данные без указаний метаданных для каждой строки. Бинарный файл записывается в соответствии со своим форматом (порядок байтов и полей заранее

определен). Поэтому для его записи и чтения требуется специальное программное обеспечение, реализующее требуемый формат.

В силу малой избыточности бинарные форматы хранения активно используются разработчиками СУБД для обеспечения максимальной производительности при работе со специфичными данными. Ярким примером такого подхода могут быть СУБД: Neo4J (графовая СУБД) [5], InfluxDB (СУБД временных рядов) [6].

Еще одним преимуществом бинарных файлов перед текстовыми является скорость чтения/записи. Чтение данных из текстового файла сопряжено с определением границ значений (разметка файла) и преобразованием типов данных (строка в число, строка в дату / время и пр). Запись в текстовый файл требует обратной операции преобразования. В свою очередь, бинарные файлы записываются и читаются «как есть», то есть без трудозатратных операций преобразования строк.

К преимуществу текстовых файлов CSV [7] можно отнести простоту их подготовки и редактирования, что подтверждается их частым использованием аналитиками.

В нашем исследовании предлагается подход к разработке собственного бинарного формата и его сравнение с простым форматом CSV. Для проведения такого сравнения будем использовать СУБД Clusterix-N [8]. Данная СУБД поддерживает произвольные адаптеры БД, которые потребуются для выбранных форматов данных. Для выполнения этой задачи будем использовать Apache Calcite [9]. Apache Calcite позволяет выполнять простые SQL-запросы, которые передаются адаптером БД Clusterix-N. Для Apache Calcite уже реализован адаптер для формата CSV. Осталось разработать такой адаптер для предлагаемого бинарного формата. Связку Адаптер+Формат будем называть хранилищем.

После разработки адаптера БД Clusterix-N для Apache Calcite и адаптера данных Apache Calcite для бинарного хранилища потребуется произвести множество экспериментальных исследований: MySQL (конфигурация Clusterix-N с инструментальной СУБД MySQL в роли хранилища БД), хранилище CSV (конфигурация Clusterix-N с адаптером в БД к Apache Calcite и файлами CSV), хранилище BIN (конфигурация Clusterix-N с адаптером в БД к Apache Calcite и бинарными).

## **2. Организация бинарного хранилища**

Для Apache Calcite реализовано множество разнообразных адаптеров данных. Одним из таких адаптеров является адаптер данных для файлов CSV. В основе этого адаптера лежит библиотека OpenCSV [10; 11], благодаря которой происходит выборка очередной строки из файла CSV, ее валидация и разбор. Затем результат разбора разбивается на отдельные объекты и приводятся из строкового формата в нужный

тип объектов данных языка Java. Выбор типа зависит от метаданных, которые хранятся в первой строке CSV файла, состоящего из названий столбцов, типа и его размерности, если необходимо. Таким образом, в одном файле CSV хранится одна таблица базы данных.

Поскольку адаптер CSV достаточно прост, было решено изменить его для работы с бинарным форматом хранения данных. Для этого потребовалось заменить используемую библиотеку OpenCSV на самостоятельно разработанный модуль доступа к бинарному формату. Благодаря такой замене отпадает необходимость реализации всего функционала адаптера, достаточно лишь создать модуль, возвращающий в адаптер CSV строку данных, состоящую из объектов языка Java с необходимым типом данных.

Данные профилирования Apache Calcite с CSV показывают, что чуть меньше половины всего времени уходит на выполнение преобразования данных из строк. Поэтому, в силу уменьшения вычислительных затрат на преобразование типов при переходе от хранилища CSV к бинарному хранилищу, мы ожидаем существенного увеличения скорости чтения данных.

Теперь рассмотрим сам бинарный формат хранения данных. Поскольку мы точно знаем, какое количество байт нужно под определённый тип, кроме строкового, мы заранее можем определить позиции, отвечающие за нужные нам данные, и без каких-либо дополнительных вычислений перевести их в типы языка Java. Однако строковый формат может быть переменной длины, поэтому для него необходимо указывать количество символов в строке.

### **3. Реализация бинарного хранилища**

Основой для реализации бинарного хранилища является предполагаемый формат бинарных файлов. Эксперименты проводятся с тестом TPC-H [12], поэтому бинарные файлы будем реализовывать, опираясь на схему БД для этого теста. Заранее определимся, что один бинарный файл будет содержать данные только для одной таблицы из БД. Формат бинарного файла для таблицы NATION приведен на рисунке 1.

Согласно схеме БД, для теста TPC-H таблица NATION состоит из четырех полей.

1. N\_NATIONKEY – число типа LONG, занимает 8 байт.
2. N\_NAME – текстовая строка, переменной длины.
3. N\_REGIONKEY – число типа LONG, занимает 8 байт.
4. N\_COMMENT – текстовая строка, переменной длины.

Второе и четвертое поля БД являются строками переменной длины. В бинарном формате перед ними добавляется поле типа INT, занимающее 4 байта, в которых содержится количество символов в

строке. Аналогичным образом формируются и другие файлы для всех таблиц БД.

| 00000000 | 00 01 02 03 | 04 05 06 07 | 08 09 0a 0b | 0c 0d 0e 0f |                  |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------------|
| 00000000 | 00 00 00 00 | 00 00 00 00 | 00 00 00 07 | 41 4c 47 45 | .....ALGE        |
| 00000010 | 52 49 41 00 | 00 00 00 00 | 00 00 00 00 | 00 00 33 20 | RIA.....3        |
| 00000020 | 68 61 67 67 | 6c 65 2e 20 | 63 61 72 65 | 66 75 6c 6c | haggle. carefull |
| 00000030 | 79 20 66 69 | 6e 61 6c 20 | 64 65 70 6f | 73 69 74 73 | y final deposits |
| 00000040 | 20 64 65 74 | 65 63 74 20 | 73 6c 79 6c | 79 20 61 67 | detect slyly ag  |
| 00000050 | 61 69 00 00 | 00 00 00 00 | 00 01 00 00 | 00 09 41 52 | ai.....AR        |
| 00000060 | 47 45 0e 54 | 49 4e 41 00 | 00 00 00 00 | 00 00 01 00 | GENTINA.....     |
| 00000070 | 00 00 4c 61 | 6c 20 66 6f | 78 65 73 20 | 70 72 6f 6d | ..La1 foxes prom |
| 00000080 | 69 73 65 20 | 73 6c 79 6c | 79 20 61 63 | 63 6f 72 64 | ise slyly accord |
| 00000090 | 69 6e 67 20 | 74 6f 20 74 | 68 65 20 72 | 65 67 75 6c | ing to the regul |
| 000000a0 | 61 72 20 61 | 63 63 6f 75 | 6e 74 73 2e | 20 62 6f 6c | ar accounts. bol |
| 000000b0 | 64 20 72 65 | 71 75 65 73 | 74 73 20 61 | 6c 6f 6e 00 | d requests alon. |
| 000000c0 | 00 00 00 00 | 00 00 02 00 | 00 00 06 42 | 52 41 5a 49 | .....BRAZI       |
| 000000d0 | 4c 00 00 00 | 00 00 00 00 | 01 00 00 00 | 6b 79 20 61 | L.....ky a       |

| N_NATIONKEY | LEN                           | N_NAME         | N_REGIONKEY | LEN                             | N_COMMENT      |
|-------------|-------------------------------|----------------|-------------|---------------------------------|----------------|
| LONG - 8Б   | INT - 4Б<br>$7_{16} = 7_{10}$ | STRING - LEN Б | LONG - 8Б   | INT - 4Б<br>$33_{16} = 51_{10}$ | STRING - LEN Б |

Рис. 1. Формат бинарного файла

Поскольку в самом файле с данными не указывается тип поля, для преобразования в типы языка Java необходимы метаданные. В нашей реализации они хранятся в текстовом виде в формате XML (пример для таблицы NATION).

```

<?xml version="1.0"?>
<FileMeta xmlns:xsd="http://www.w3.org/2001/XMLSchema"
xmlns:xsi="http://www.w3.org/2001/XMLSchema-instance">
 <Columns>
 <string>N_NATIONKEY</string>
 <string>N_NAME</string>
 <string>N_REGIONKEY</string>
 <string>N_COMMENT</string>
 </Columns>
 <Types>
 <ColumnType>LONG</ColumnType>
 <ColumnType>STRING</ColumnType>
 <ColumnType>LONG</ColumnType>
 <ColumnType>STRING</ColumnType>
 </Types>
 <Indexes>
 <ColumnIndex>
 <Index>2</Index>
 <IsPrimary>>false</IsPrimary>
 </ColumnIndex>
 </Indexes>
</FileMeta>

```

Таким образом, для каждой таблицы из БД имеется два файла: файл с данными и метаданные. Благодаря этому адаптер сможет преобразовывать байты данных в типы языка Java.

Одним из преимуществ бинарных файлов является возможность размещения в оперативной памяти без дополнительных преобразований, поэтому целесообразно воспользоваться буферной оперативной памятью. Для написания модуля доступа к бинарным файлам используется язык Java, поскольку адаптеры Calcite и сам Apache Calcite написаны на этом же языке.

Для операций с буферной оперативной памятью в Java существует класс `MappedByteBuffer` [13]. Однако одновременно с помощью этого класса можно размещать только ограниченный двумя ГБ объём данных. Из-за этих ограничений был дополнительно разработан механизм обработки файлов размером более чем 2ГБ.

В проводимых экспериментах бинарное хранилище будет использоваться СУБД Clusterix-N на узлах IO. На одном вычислительном узле кластера под узлы IO может быть выделено несколько процессорных ядер. Поэтому исходный файл базы данных будет делиться на части по количеству процессорных ядер, выделенных под узлы IO всего кластера. Например, если в кластере 5 узлов, на каждом выделено по 2 ядра на узлы IO и общий объём БД 100ГБ, то на каждом узле будет по 2 файла размером ~10ГБ.

#### **4. Постановка эксперимента**

Прежде всего необходимо определить эффективность работы разработанных адаптеров данных, а затем – быстродействие системы.

Платформой проведения экспериментов является вычислительный GPU-кластер, состоящий из 7 узлов со следующими характеристиками: 2 six-core E5-2640 CPU/2,5GHz/DDR3 128GB; 2 448-core GPU Tesla C-2075/1,15GHz/GDDR5 6GB (на Mgm GPU отсутствуют). Дисковая подсистема узла – RAID 10 из 4 WD1000 DHTZ/ 1TB объемом 2 TB. Операционная система – Windows Server 2012 R2, на Mgm – CentOS 7 Linux. Интерконнект между узлами – Gigabit-Ethernet с 24-портовым коммутатором SSE G24-TG4.

Эффективность работы адаптеров будем оценивать на одном узле кластера, путем запуска обработки запроса № 3 теста TPC-H [12] к БД объемом 120 ГБ на разном количестве процессорных ядер. Чем меньше потребуется процессорных ядер для достижения предела скорости чтения с дисковой подсистемы, тем эффективнее работает адаптер.

Быстродействие системы будем определять, используя все 7 узлов кластера для объёмов БД 120 и 1000 GB. Представительский тест (ПТ) – конкатенация первых 6 перестановок TPC-H Throughput Test [12], без операций записи (84 запроса всего).

В проводимых экспериментах СУБД Clusterix-N развёрнута следующим образом: 1 узел управления и сортировки (MGM и SORT), 6 узлов обработки (IO и JOIN). При этом на узлах обработки возможно суммарно запустить до 12 процессов IO/JOIN. Соотношение процессов

IO/JOIN выбирается на основе результатов эксперимента по определению эффективности адаптеров данных.

Ввиду того что физическим хранилищем данных выступают жёсткие диски (HDD), а не твердотельные накопители (SSD), после генерации базы данных производилась дефрагментация [14]. Также перед каждым экспериментом проводилась очистка буферной оперативной памяти из-за того, что часть данных оставалась в буферной памяти.

### 5. Результаты эксперимента

Первый эксперимент направлен на определение эффективности рассматриваемых адаптеров Apache Calcite. Эксперимент проводился для двух хранилищ (CSV и BIN).

Для хранилища CSV по итогу семи экспериментов было определено, что оптимальное количество ядер для IO = 7, соответственно оставшиеся 5 остаются для JOIN. При использовании 7 ядер достигается средняя скорость чтения ~135 Мб/с или 19 Мб/с на ядро.

Таблица 1

| Результаты |                               |                               |
|------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Ядра       | Время SELECT-PROJECT CSV, мин | Время SELECT-PROJECT BIN, мин |
| 2          | 46.83                         | 10.99                         |
| 3          | -                             | 7.78                          |
| 4          | 25.16                         | 7.84                          |
| 5          | -                             | 7.49                          |
| 6          | 17.67                         | 7.18                          |
| 7          | 15.42                         | -                             |
| 8          | 17.39                         | -                             |

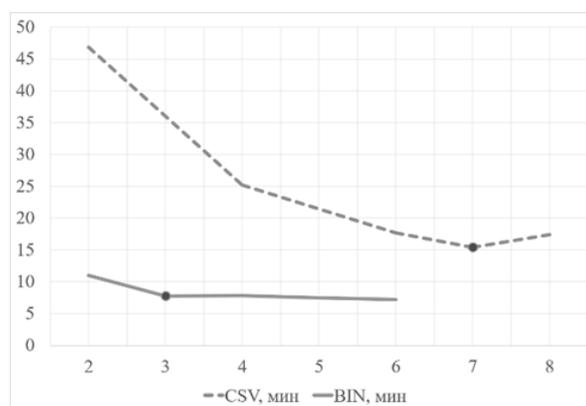


Рис. 2. График результатов

Второе хранилище – BIN. Для него было определено, что оптимальное количество ядер для IO = 3 (соответственно, 9 остается для JOIN). При использовании 3 ядер в этом эксперименте достигается

средняя скорость чтения ~260 Мб/с или 87 Мб/с на ядро. При использовании двух ядер, обнаруживается недозагруженность дисковой системы, а при использовании четырёх ядер – перегрузка, обусловленная увеличением задержек выполнения команд чтения HDD. Результаты первой серии экспериментов отражены на рисунке 2 и в таблице 1

Для связки Clusterix-N + MySQL определение эффективности не проводилось, поскольку все данные находятся в ОЗУ и рост производительности линейный.

Второй эксперимент проводился с целью выявления конфигурации с наименьшим временем выполнения ПТ и наибольшим максимальным объёмом обрабатываемой БД. Сразу следует отметить, что с объёмом 1ТБ справилась только одна конфигурация СУБД Clusterix-N + Хранилище BIN, время ПТ составило 67,97 часа. Быстродействие конфигураций определялось на базе данных объёмом 120 GB, результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2

Результаты, 120 ГБ

| Конфигурация             | MySQL | CSV  | BIN  |
|--------------------------|-------|------|------|
| Время выполнения ПТ, час | 4.52  | 5.44 | 4.49 |

Таким образом, конфигурация BIN сравнима с конфигурацией MySQL, однако она способна обрабатывать БД объёмом в терабайты, что делает её по совокупности показателей лучшей конфигурацией из рассматриваемых.

## 6. Заключение

В результате работы были разработаны адаптеры БД Clusterix-N для форматов CSV и собственного бинарного хранилища (BIN). Экспериментально показано превосходство скорости чтения для BIN над CSV (87 МБ/с против 19 МБ/с). Появилась возможность обработки данных объёмом 1 ТБ и более за счёт использования дискового хранилища.

## Литература

1. Формат файла // Википедия. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Формат\\_файла](https://ru.wikipedia.org/wiki/Формат_файла) (дата обращения: 10.01.2023).
2. Miller Justin J. Graph Database Applications and Concepts with Neo4j // SAIS 2013 Proceedings. 2013. С. 24.
3. Naqvi S.N.Z., Yfantidou S., Zimányi E. Time series databases and influxdb // Studienarbeit, Université Libre de Bruxelles. 2017. Т. 12.
4. CSV // Википедия URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/CSV> (дата обращения: 10.01.2023).
5. Классен Р.К. Разработка и исследование консервативной СУБД Clusterix-N класса «BigData» на платформе GPU-Кластера // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2018. Вып. 19. С. 163-171.
6. Apache Calcite // Apache Calcite URL: <https://calcite.apache.org/> (дата обращения: 10.01.2023).

7. Opensv Users Guide. URL: <https://opensv.sourceforge.net/> (дата обращения: 10.01.2023).

8. Calcite/CsvEnumerator.java // URL: <https://github.com/apache/calcite/blob/b9c2099ea92a575084b55a206efc5dd341c0df62/file/src/main/java/org/apache/calcite/adapter/file/CsvEnumerator.java> (дата обращения: 10.01.2023).

9. TPC-H Homepage. URL: <https://www.tpc.org/tpch/> (дата обращения: 10.01.2023).

10. Class MappedByteBuffer // URL: <https://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/java/nio/MappedByteBuffer.html> (дата обращения: 10.01.2023).

11. Kleiman Dave, Hunter Laura, Satyanarayana Mahesh, Andreou Kimon, G. Altholz Nancy, Abrams Lawrence, Windham Darren, Bradley Tony and Barber Brian (2006) Winternals: Defragmentation, Recovery, and Administration Field Guide – Syngress.

**I.A. Kazantsev, R.K. Klassen**

Kazan National Research Technical University A.N. Tupolev – KAI

## **1 TB DATABASE QUERY PROCESSING SPEED UP IN A BIG DATA CLASS PARALLEL DBMS CLUSTERIX-N WITH BINARY FILE USAGE**

**Keywords:** *DBMS, Clusterix-N, binary files, data storage, big data, query processing.*

**Abstract.** *This paper presents the implementation of binary storage for storing large amounts of information (1 TB or more). The structure of the binary file and its metadata is proposed. The improvement of the characteristics of the Clusterix-N database management system when working with large-volume databases is experimentally confirmed.*

**А.П. Карпенко**

*МГТУ им. Н.Э. Баумана*

УДК 519.6

## **ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПОПУЛЯЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

**Ключевые слова:** *метаэвристические алгоритмы, популяционные алгоритмы, алгоритмы, вдохновленные природой, параметрический синтез, метаоптимизация, настройка параметров.*

*Рассматриваем задачу глобальной непрерывной оптимизации и популяционные (метаэвристические) алгоритмы (П-алгоритмы) ее*

решения. Эти алгоритмы содержат свободные параметры, называемые стратегиями П-алгоритма. Работа посвящена проблеме поиска наилучших стратегий П-алгоритма. Выделяем стационарные, программно-динамические и адаптивно-динамические стратегии. Приводим характеристики популяции, которые используются для построения адаптивных стратегий П-алгоритма, а также постановки задач синтеза параметрических стационарных, программно-динамических и адаптивно-динамических стратегий. Завершаем работу обзором методов решения указанных задач параметрического синтеза.

## **Введение**

Задачи глобальной (непрерывной) оптимизации возникают во многих приложениях. Популяционные алгоритмы (П-алгоритмы) решения этих задач относятся к классу прямых стохастических поисковых алгоритмов. П-алгоритмы часто называют поведенческими, интеллектуальными, метаэвристическими, вдохновленными (инспирированными) природой, роевыми, многоагентными. Обычно выделяют следующие классы П-алгоритмов: эволюционные алгоритмы, включая генетические; алгоритмы, вдохновленные живой природой; алгоритмы, вдохновленные неживой природой; алгоритмы, инспирированные человеческим обществом; прочие алгоритмы [1]. В настоящее время известно более 100 базовых П-алгоритмов, каждый из которых имеет, как правило, большое или очень большое число модификаций [2; 3].

Одной из особенностей П-алгоритмов является использование ими *свободных параметров* (число которых может достигать нескольких десятков). От значений этих параметров может существенно, а иногда сильно, зависеть эффективность П-алгоритма. В этой связи возникает задача поиска «наилучших» значений свободных параметров данного П-алгоритма для заданного класса задач глобальной оптимизации. Называем эту задачу задачей *параметрического синтеза* П-алгоритма или задачей *параметрической метаоптимизации*. Вектор свободных параметров П-алгоритма называем *стратегией* этого алгоритма.

Известны попытки теоретического анализа влияния различных стратегий на эффективность некоторых современных П-алгоритмов. Например, известны публикации, в которых на основе такого анализа рассмотрен выбор оптимальных значений свободных параметров алгоритма роя частиц PSO. Однако такого рода теоретические исследования основаны на сильных упрощениях П-алгоритма и имеют весьма ограниченную практическую ценность. Обычно задачу параметрического синтеза решают с использованием численных методов.

Целью параметрического синтеза является поиск *оптимальной стратегии* П-алгоритма. В силу того что эта стратегия отыскивается численными методами, результатом такого поиска является, очевидно, лишь приближенно оптимальная (квазиоптимальная) стратегия. Для простоты записи далее мы опускаем этот нюанс и всюду говорим об оптимальной стратегии.

### 1. Стратегии П-алгоритмов

Компоненты стратегии могут быть бинарными, дискретными, натуральными, целыми, вещественными. Практически во всех П-алгоритмах одной из компонент стратегии является размер популяции. Как правило, авторы П-алгоритмов предлагают некоторые рекомендованные стратегии.

Вектор стратегии высокой размерности затрудняет метаоптимизацию П-алгоритма, но позволяет обеспечить максимальную эффективность алгоритма для данной задачи оптимизации или некоторого *узкого* класса этих задач. Напротив, малая размерность этого вектора позволяет, вероятнее всего, настроить П-алгоритм только на *широкий* класс задач оптимизации.

Различаем следующие классы стратегий:

- стационарные стратегии;
- динамические стратегии (программные и адаптивные).

Значения компонентов *стационарной* стратегии остаются постоянными на протяжении всего поиска, то есть до завершения процесса эволюции популяции (итерационного процесса).

В *динамической* стратегии ее компоненты могут изменять свои значения в процессе поиска. В генетическом алгоритме, например, на ранних этапах эволюции предпочтительным является большой шаг мутации, обеспечивающий широкое исследование пространства поиска (диверсификацию поиска). На поздних этапах эволюции, напротив, этот шаг должен быть уменьшен, чтобы обеспечить быструю сходимость алгоритма (интенсифицировать поиск).

Программные стратегии изменяют свои значения в зависимости от текущего номера итерации, а адаптивные стратегии – в зависимости от значений некоторых *характеристик* популяции. Иногда еще говорят о *самоадаптивных* (*self-adapt*) стратегиях [1]. Очевидно, можно также говорить о *комбинированных* стратегиях – стационарно-программных, программно-адаптивных и т.д.

Значительным стимулом для использования в П-алгоритмах динамических (программных и адаптивных) стратегий является тот факт, что применение даже простого правила варьирования компонентов стратегии часто дает существенный выигрыш в эффективности алгоритма по сравнению с использованием «оптимальных» стационарных значений этих компонентов.

**Стационарные стратегии.** Инициализацию стационарных стратегий (а также начальных значений динамических стратегий) реализуют в соответствии с рекомендациями авторов соответствующего П-алгоритма либо предпочтениями лица, принимающего решения (ЛПР). Эти рекомендации могут быть заданы в двух формах:

- в форме фиксированных значений или фиксированных интервалов значений;
- в форме функциональных зависимостей этих значений от других свободных параметров алгоритма (*метапараметров*).

Примером фиксированных рекомендованных значений стратегий являются величины весов инерциальной  $p_I$ , когнитивной  $p_C$  и социальной  $p_S$  составляющих скорости особей в каноническом алгоритме роя частиц *PSO* [1]. Фиксированные интервалы значений своих стратегий рекомендуют, например, авторы алгоритма поиска гармонии *HS* для размера популяции  $|S| \leq 50$ , вероятности  $\xi_h = 0,7 \div 0,95$  случайного выбора кандидатов в решения из *памяти гармоний*, вероятности  $\xi_p = 0,1 \div 0,5$   $\xi_p$  изменения данной компоненты кандидата в решение на этапе *настройки вектора гармонии* [1]. Границы указанных интервалов можно интерпретировать как метапараметры алгоритма.

В качестве примера определения значений стратегии в форме функциональной зависимости от метапараметров П-алгоритма приведем определение размера популяции  $|S|$  в муравьином алгоритме *CACO* [1]:

$$|S| = |S|^+ (1 - \exp(-0,1|X|)) + 5.$$

Здесь  $|S|^+$  – максимально допустимый размер популяции (метапараметр);  $|X|$  – размерность вектора варьируемых параметров базовой задачи оптимизации (см. ниже).

Если рекомендации авторов П-алгоритма даны в форме интервалов возможных значений стратегий, то конкретные стратегии, во-первых, может назначать ЛПР в указанных интервалах, исходя из своих неформальных соображений, например на основе предыдущего опыта эксплуатации данного П-алгоритма. Во-вторых, могут быть использованы случайные стратегии в тех же интервалах.

**Программно-динамические стратегии.** Чаше всего в П-алгоритмах используют простые эвристические правила изменения значений стратегий, определяемые монотонно убывающими или возрастающими, линейными или нелинейными, непрерывными или ступенчатыми детерминированными функциями текущего номера итерации  $t$ . Пусть, например, речь идет о генетическом алгоритме и операторе гауссовой мутации вида

$$x'_{i,k} = x_{i,k} + N_1(0, \sigma), \quad i \in [1:|S|], \quad k \in [1:|X|],$$

где величина  $\sigma$  (*шаг мутации*) является свободным параметром алгоритма. Известное программное эвристическое правило изменения этой величины определяет функция  $\sigma(t) = 1 - 0,9 \frac{t}{\hat{t}}$ , в соответствии с которой с ростом числа итераций  $t$  шаг мутации линейно уменьшается с единицы при  $t = 0$  до  $0,1$  в конце итераций (когда  $t = \hat{t}$ ). Здесь величину  $0,9$  можно считать свободным (мета)параметром.

Значения стохастических программных параметров могут быть получены следующими путями:

- генерация последовательности случайных чисел, подчиненных требуемому закону распределения;

- рандомизация соответствующей детерминированной зависимости.

Например, стохастическое программное изменение значений некоторого параметра  $p$  может быть выполнено по следующим не рекуррентному и рекуррентному правилам:

$$p' = p_0 + U_1(-1; 1), \quad p' = p + b N(0; 1).$$

Здесь  $p_0, b$  – метапараметры;  $U_1(-1; 1)$  – случайная величина, равномерно распределенное в интервале  $[-1; 1]$ ;  $N(0; 1)$  – нормально распределенная случайная величина, имеющая нулевое математическое ожидание и единично среднее квадратичное отклонение.

Могут использоваться также нечеткие и хаотичные программно-динамические стратегии.

**Адаптивно-динамические стратегии.** Примером адаптивного детерминированного правила изменения стратегии  $\sigma$  в операторе гауссовой мутации является правило  $\frac{1}{5}$  Рехенберга, которое может быть записано в виде следующей ступенчатой функции [1]:

- если номер текущей итерации  $t$  кратен периоду адаптации  $t_a$ , то

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma(t-t_a)}{c_m}, & \varpi_s < \frac{1}{5}, \\ \sigma(t-t_a) c_m, & \varpi_s > \frac{1}{5}, \\ \sigma(t-t_a), & \varpi_s = \frac{1}{5}; \end{cases}$$

- в противном случае  $\sigma(t) = \sigma(t-1)$ .

Здесь  $\varpi_s$  – характеристика популяции, имеющая смысл средней относительной доли успешных мутаций, вычисленной на основе результатов эволюции популяции в течение  $t_a$  поколений (метапараметр);  $c_m \in [0,817; 1,0]$  – заданная константа (метапараметр). Успешной называется мутация, порождающая лучшего потомка, чем родитель.

Значения стохастических адаптивных параметров можно получить путем рандомизации соответствующих детерминированных зависимостей.

## 2. Характеристики сущностей П-алгоритма

Вообще говоря, с каждой из сущностей П-алгоритма, исключая его стратегии, может быть связана одна или несколько величин, значения которых определяют «состояние» сущности и которые могут использоваться для управления эволюцией этой сущности [4].

Различаем детерминированные и стохастические характеристики сущностей. С другой стороны, выделяем стационарные и динамические характеристики. *Стационарными* называем характеристики, которые определяет «стационарный» алгоритм, вычисляющий их значения, то есть алгоритм, который не изменяется в процессе эволюции популяции на протяжении всего процесса поиска. Напротив, к *динамическим* относим характеристики, значения которых вычисляются с помощью «динамического» алгоритма, тем или иным образом изменяющегося в процессе эволюции популяции.

В общей постановке можно говорить об одно- и многосоставных характеристиках. *Односоставную* характеристику сущности идентифицирует лишь одна величина, определяющая «качество» этой сущности. *Многосоставная характеристика* представляет собой ту или иную скалярную свертку некоторого числа односоставных характеристик.

Нам понадобятся характеристики особей, а также популяции (субпопуляции). Поэтому ограничимся рассмотрением только этих характеристик.

**Характеристики особей популяции.** Вообще говоря, в качестве характеристики особи может быть использована любая оценка ее успешности. В П-алгоритме успешные особи могут получать те или иные бонусы, например в виде продления своего жизненного цикла, а проигравшие особи – штраф (уменьшение этого цикла).

Среди односоставных различаем следующие классы характеристик особи:

- характеристики на основе приспособленности особи (не использующие и использующие ее след);
- характеристики, не использующие приспособленность особи;
- характеристики, основанные на оценке данной особи другой либо другими особями популяции.

*Приспособленность особи.* Основной (детерминированной стационарной односоставной) характеристикой особи является ее значение фитнес-функции. Значительное число характеристик особи может быть построено на основе ее приспособленности или динамики приспособленности в процессе эволюции популяции. Например, в П-

алгоритмах часто используется *ранг* (rank) особи, ее *успешность* (success), *сила* (force) особи и др. [1].

Можно предложить значительное число характеристик особи, основанных на ее приспособленности и использующих след этой особи. В качестве таких характеристик могут быть использованы, например, минимальные, максимальные, средневзвешенные и среднеквадратичные отклонения указанных выше оценок успешности особи в точках ее следа. В то же время известен ряд специфических характеристик особи, построенных на основе ее следа. Например, в алгоритме поиска косяком рыб FSS используется *вес* (weight) особи, в алгоритме оптимизации роem светлячков GSO – *светимость* (luciferin level) особи, в алгоритме поиска бактериями пищи BFO – *состояние здоровья* (health status) особи и т.д. [1].

Примерами характеристик, не использующих приспособленность особи, являются *возраст* (age) особи, уровень ее *голода* (hunger) [1].

Характеристики на основе оценки данной особи другой особью можно построить, используя расстояния между особями в том или ином из пространств, а также обычный или феромонный следы особи. Примерами таких характеристик являются *привлекательность* (attractiveness) особи, *интерес* данной особи к некоторой точке следа другой особи [1].

Многосоставная характеристика *энергия* (energy) особи используется, например, алгоритмом непрерывной оптимизации химической реакцией RCCRO [2].

**Характеристики популяции (субпопуляции).** В качестве характеристики популяции  $S = \{s_i; i \in [1:|S|]\}$  могут быть использованы:

- 1) характеристики, построенные на основе характеристик ее особей;
- 2) характеристики, не вытекающие из характеристик образующих популяцию особей.

К характеристикам **первого класса** относим минимальные, максимальные, средневзвешенные и среднеквадратичные отклонения соответствующих характеристик особей данной популяции. Например, в качестве характеристики популяции может быть использовано лучшее значение фитнес-функции, достигнутое особями этой популяции.

Характеристики популяции в П-алгоритмах нередко строят на основе текущего среднего значения фитнес-функции особей этого набора. Например, алгоритм броуновского движения газа GBMO использует *температуру* популяции, многопопуляционный иерархический алгоритм империалистической конкуренции ICA – *силу* популяции [2].

Важные характеристики популяции можно получить на основе следов ее особей. Примером является величина, называемая *успешностью*, которую использует, например, алгоритм искусственного

племени АТА, а также величина *кинетической энергии*, применяемая в алгоритме непрерывной оптимизации химической реакцией RCCRO [2].

Чаще всего для синтеза адаптивных П-алгоритмов используют характеристики **второго класса** – характеристики, не основанные на характеристиках особей популяции. Приведем несколько примеров.

*Разнообразие* (variance) популяции представляет собой оценку дисперсии текущих положений особей по каждому из  $|X|$  измерений пространства поиска. Например, алгоритм рассеянного поиска SS в качестве разнообразия популяции  $S$  использует величину

$$v(S) = \max_{k \in [1:|X|]} v_k(S),$$

где  $v_k(S)$  – разнообразие популяции по  $k$ -му измерению. На основе величины  $v(S)$  в алгоритме SS принимается решение о завершении итерационного процесса (при выполнении условия  $v(S) \leq \varepsilon_\mu$ , где  $\varepsilon_\mu$  – метапараметр) [1].

*Среднее расстояние* между особями популяции определяет выражение  $d_g = \text{median} \{d_{i,j}; 1 \leq i < j \leq |S|\}$ , где  $d_{i,j} = \|X_i - X_j\|_E$  – текущее евклидово расстояние между особями  $s_i, s_j$ . Данная характеристика используется, например, для управления популяцией в оптимизационном алгоритме распространения тараканов RIO [2].

Функция *пригодности* субпопуляции может использоваться в коэволюционных алгоритмах как мера их относительной успешности. В генетическом коэволюционном алгоритме GCA, например, функция пригодности субпопуляции  $S_i$  имеет вид  $\alpha_i(t) = \sum_{\tau=0}^{\hat{t}-1} \frac{\hat{t}-\tau}{\tau+1} b_i(t-\tau)$ , где  $b_i(t-\tau) = 1$ , если эта субпопуляция на итерации  $(t-\tau)$  включала в себя лучшую среди всех субпопуляций особь, и  $b_i(t-\tau) = 0$  в противном случае;  $\hat{t}$  – число итераций базового генетического алгоритма [1].

**3. Основные определения и постановки задач параметрического синтеза.** Рассматриваем *базовую* задачу глобальной безусловной оптимизации (Б-задачу)

$$\min_{X \in \mathfrak{R}^{|X|}} f(X) = f(X^*) = f^*, \quad (1)$$

где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{|X|})$  –  $|X|$ -мерный вектор варьируемых параметров (размерность задачи);  $\mathfrak{R}^{|X|}$  – пространство поиска;  $f(X)$  – целевая функция, совпадающая, полагаем, с фитнес-функцией исследуемого П-алгоритма;  $X^*, f^*$  – искомые оптимальный вектор  $X$  и значение целевой функции.

Рассматриваемый класс Б-задач обозначаем  $\Phi = \{\phi_i; i \in [1:|\Phi|]\}$ , где  $\phi_i$  – одна из задач этого класса. Поскольку речь идет о безусловной оптимизации, задачу  $\phi_i$  полностью определяет ее фитнес-функция  $f_i(X)$ . В качестве совокупности задач  $\Phi$  обычно используют множество, определяемое набором тестовых функций  $\{f_i(X); i \in [1:|\Phi|]\}$ , для каждой из которых известно точное решение  $X_i^*, f_i^*$ .

Эффективность стратегий  $P$  на классе задач  $\Phi$  оцениваем с помощью *индикатора эффективности (М-фитнес-функции)*  $\mu(\Phi, P) \rightarrow \min_P$ . Можно предложить целый ряд таких функций, отражающих разные аспекты представлений ЛПР об оптимальности стратегии  $P$ , так что задачу параметрического синтеза, вообще говоря, следует рассматривать как многоиндикаторную.

В качестве одной из частных М-фитнес-функций (пусть это будет функция  $\mu_1(\Phi, P)$ ) можно использовать оценку математического ожидания точности решения задач множества  $\Phi$  с помощью данного П-алгоритма. Аналогично в роли функции  $\mu_2(\Phi, P)$  может выступать оценка среднего квадратичного отклонения этой величины. М-фитнес-функция  $\mu_3(\Phi, P)$  может быть использована для оценки вероятности *нелокализации* минимума функции  $f(X)$  на классе задач  $\Phi$  с помощью рассматриваемого П-алгоритма. С целью оценки производительности П-алгоритма можно использовать М-фитнес-функцию  $\mu_4(\Phi, P)$  – оценку математического ожидания времени решения задач множества  $\Phi$ , а также оценку СКО этого времени  $\mu_5(\Phi, P)$ .

**Стационарные стратегии.** Стационарную стратегию П-алгоритма обозначаем  $P = (p_1, p_2, \dots, p_{|P|})$ . Полагаем, что для каждой из компонент  $p_j$  вектора  $P$  заданы интервалы ее допустимых значений  $p_j^-, p_j^+$ , так что определено *множество допустимых (стационарных) стратегий*

$$D_P = \{p_j \mid p_j^- \leq p_j \leq p_j^+; j \in [1:|P|]\}.$$

Совокупность П-алгоритмов, которую определяет множество  $D_P$ , обозначаем

$$A = \{a(P) \mid P \in D_P\}.$$

Во введенных обозначениях и соглашениях постановка задачи синтеза оптимальной стационарной стратегии П-алгоритма имеет следующий вид: для класса задач  $\Phi$  найти стратегию  $P^* \in D_P$  (а тем самым и алгоритм  $a^* = a(P^*) \in A$ ), которая обеспечивает минимальное значение скалярной М-фитнес-функции  $\mu(\Phi, B)$ , то есть решить задачу

$$\min_{P \in D_P} \mu(\Phi, P) = \mu(\Phi, P^*). \quad (2)$$

В терминах теории метаоптимизации задача (2) представляет собой *стационарную параметрическую задачу* (parameter adaptation problem) метаоптимизации (*метазадачу*) [1].

**Программно-динамические стратегии.** Программную стратегию П-алгоритма обозначаем  $P(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{|P|}(t))$ , где  $t \in [0: \hat{t}]$  – номер итерации;  $\hat{t}$  – максимальное число итераций. Полагаем, что компоненты стратегии  $P(t)$  принадлежат некоторому пространству  $\mathfrak{N}(0: \hat{t})$  одномерных функций, определенных на интервале  $[0: \hat{t}]$ , то есть что  $p_j(t) \in \mathfrak{N}(0: \hat{t})$ ;  $j \in [1: |P|]$ .

Параметризуем каждую из компонент  $p_j(t)$  стратегии  $P(t)$  так, чтобы было справедливо равенство  $p_j(t) = p_j(p_{j,1}, p_{j,2}, \dots, p_{j,|p|}, t)$ , где  $p_{j,k} \in \mathfrak{R}^1$ ,  $k \in [1: |p|]$ . При этом задача синтеза программной стратегии сводится к задаче синтеза стационарной стратегии  $P = (p_{j,k}; j \in [1: |P|], k \in [1: |p|])$  с множеством допустимых значений

$$D_P = \{p_{j,k} \mid p_{j,k}^- \leq p_{j,k} \leq p_{j,k}^+; j \in [1: |P|], k \in [1: |p|]\},$$

где  $[p_{j,k}^-, p_{j,k}^+]$  – интервал допустимых значений стационарной величины  $p_{j,k}$ . В результате формально задача синтеза оптимальной программной стратегии П-алгоритма может быть записана в виде (2).

**Адаптивно-динамические стратегии.** Адаптивную стратегию П-алгоритма обозначаем  $P(C) = (p_1(C), p_2(C), \dots, p_{|P|}(C))$ , где  $C$  – вектор рассматриваемых характеристик популяции;  $p_j(C)$  – некоторая функция;  $j \in [1: |P|]$ .

Положим, что каждая из компонент  $p_j(C)$  стратегии  $P(C)$  параметризована, так имеет место равенство  $p_j(C) = p_j(p_{j,1}, p_{j,2}, \dots, p_{j,|p|}, C)$ , где  $p_{j,k} \in \mathfrak{R}^1$ ,  $k \in [1: |p|]$ . Тогда аналогично программным стратегиям формально задача синтеза оптимальной адаптивной стратегии П-алгоритма также может быть записана в виде (2).

#### 4. Методы синтеза стратегий П-алгоритма

Прямое решение задач вида (2) для синтеза оптимальных стратегий П-алгоритма, как правило, невозможно из-за неприемлемо высоких вычислительных затрат. В вычислительной практике с этой целью используют методы метаоптимизации [1].

В соответствии с классификацией Эйбена [5] различаем методы метаоптимизации, представленные на рисунке 1.



Рис. 1. Классификация методов метаоптимизации Эйбена

Методы *настройки параметров* являются более универсальными в сравнении с методами *управления параметрами*, поскольку не требуют доработки базового П-алгоритма (который в этом случае рассматривается как «черный ящик»). Все пользователи П-алгоритма после окончания процесса настройки получают оптимальную стратегию для решения некоторого класса Б-задач, что избавляет их от дальнейших вычислительных затрат на метаоптимизацию. Важно, что методы настройки позволяют дополнять накопленный опыт решения Б-задачи, уточняя найденные оптимальные Б-стратегии в процессе эксплуатации этой задачи.

Методы управления параметрами, по сути, порождают новый П-алгоритм, и по этой причине их можно интерпретировать как методы (структурного) синтеза П-алгоритмов.

**Методы настройки параметров** (parameter tuning) предполагают решение задачи метаоптимизации для ряда Б-задач некоторого класса. Найденные оптимальные стратегии Б-алгоритма фиксируют и используют для решения других оптимизационных Б-задач данного класса.

Методы настройки параметров разделяют на две группы:

- методы однократной настройки,
- методы перманентной настройки (рис. 1).

Методы *однократной настройки параметров* (one-time parameter tuning) представляют собой классические методы метаоптимизации. Идея этих методов состоит в том, что программу, реализующую рассматриваемый П-алгоритм, многократно выполняют при различных стратегиях на большом числе задач, принадлежащих рассматриваемому классу Б-задач. На основе результатов исследования выбирают стратегию с наилучшими значениями индикаторов эффективности.

Основной проблемой метода однократной настройки является экспоненциальный рост вычислительных затрат при увеличении числа

компонентов стратегии П-алгоритма. Из-за невозможности исчерпывающего исследования полученная в результате стратегия может оказаться далекой от оптимальной.

В методе *перманентной настройки параметров* (permanent parameter tuning) метапрограмма в процессе функционирования программы, реализующей данный П-алгоритм, непрерывно собирает информацию об эффективности различных стратегий решения конкретных Б-задач рассматриваемого класса и варьирует эти стратегии, пытаясь повысить эффективность Б-алгоритма. Известны примеры реализации такого подхода применительно к генетическому алгоритму, алгоритму роя частиц и алгоритму Нелдера – Мида.

**Методы управления параметрами** (parameter control) предусматривают решение метазадачи в процессе решения Б-задачи (с помощью Б-программы). Основная идея состоит в том, что, поскольку для каждой из Б-задач оптимальной является, вообще говоря, своя стратегия, поиск этой стратегии необходимо производить в процессе каждого запуска программы, реализующей рассматриваемый Б-алгоритм.

Методы управления параметрами разделяют на две группы:

- методы адаптивного,
- методы самоадаптивного управления (рис. 1).

В методах *адаптивного управления параметрами* (adaptive parameter control) метаалгоритм надстраивается над Б-алгоритмом и использует информацию, получаемую в процессе функционирования последнего. Часто в качестве метаалгоритма применяют генетический алгоритм. Например, известны работы, в которых над Б-алгоритмом роя частиц PSO надстраивают генетический алгоритм, оптимизирующий в процессе решения Б-задачи параметры алгоритма роя частиц.

Можно выделить два основных подхода к построению методов *самоадаптивного управления* (self-adaptive parameter control): подход на основе расширения вектора варьируемых параметров Б-задачи и подход на основе коэволюции нескольких субпопуляций.

В первом случае параметры стратегии Б-алгоритма включают в вектор варьируемых параметров Б-задачи, увеличивая тем самым размерность пространства поиска. Эти же параметры участвуют в формировании М-фитнес-функции, модифицируя, таким образом, фитнес-функцию Б-задачи. В результате Б-алгоритм начинает выполнять функции метаалгоритма.

Во втором случае используют коэволюцию типа соперничества, когда субпопуляции различаются стратегиями поиска. В процессе коэволюции большие ресурсы получают более успешные субпопуляции, тем самым автоматически определяется оптимальная стратегия Б-алгоритма [1].

Важным преимуществом методов управления параметрами по сравнению с методами их настройки является то, что первые методы позволяют относительно просто синтезировать динамические стратегии метаоптимизации.

### **Заключение**

Известно значительное число программных систем, реализующих различные методы метаоптимизации. Представляем некоторые из них.

*Универсальный программный продукт SMAC* реализует одноименный метаметод настройки стратегий Б-алгоритмов (а также иных параметризованных объектов) [6]. SMAC имеет возможность гибкой настройки временных и вычислительных ограничений метаалгоритма и позволяет использовать информацию о характерных признаках решаемых Б-задач.

*Программный комплекс ParamILS* позволяет использовать только категориальные стратегии Б-алгоритма (в то время как SMAC поддерживает и числовые стратегии) [7].

*Программный комплекс DGGA* реализует метаметод настройки GGA и поддерживает как категориальные, так и числовые стратегии Б-алгоритма [8]. Метод использует технику гонок для поиска оптимальных Б-стратегий.

*Программный пакет Irace* основан на расширенном итеративном метаметоде настройки I/F-Race, использующем гонки. Пакет предоставляет возможность параллельного исполнения метаалгоритма, задания начального набора стратегий, указания признаков «плохих» стратегий, которые должны быть исключены из процедуры поиска [9].

Перспективными являются параллельные методы метаоптимизации. Так, метод *ReACT* (Real-time Algorithm Configuration through Tournaments) позволяет одновременно испытывать несколько Б-стратегий с использованием многопроцессорных систем. На каждом из доступных процессоров запускают экземпляр Б-алгоритма с одной из допустимых стратегий. После завершения всех запущенных Б-алгоритмов определяем стратегию-победителя, которая и объявляется оптимальной стратегией данного Б-алгоритма [10].

В общей постановке можно говорить также о структурном и структурно-параметрическом синтезе П-алгоритмов. Предполагается, что эта проблематика станет темой дальнейших исследований автора.

### **Литература**

1. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с.
2. Bo Xing, Wen-Jing Gao. Innovative Computational Intelligence: A Rough Guide to 134 Clever Algorithms. Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London. 451 p.

3. Ashraf Darwish. Bio-inspired computing: Algorithms review, deep analysis, and the scope of applications // *Future Computing and Informatics Journal*. 2018. Vol. 3, P. 231-246.

4. Карпенко А.П. Основные сущности популяционных алгоритмов глобальной оптимизации. опыт систематизации // Интернет-журнал «Науковедение». 2017. Т. 9, №6. URL: <https://naukovedenie.ru/PDF/46TVN617.pdf>.

5. Eiben A.E., Smith J.E. Introduction to evolutionary computing // *Natural Computing*. Springer, Berlin Heidelberg New York. 2015. 287 p.

6. Hutter F., Ramage S. Manual for SMAC version v2. 10.02-master. Vancouver: Department of Computer Science University of British Columbia. 2015. 73 p.

7. Blot A. et al. MO-ParamILS: A Multi-Objective Automatic Algorithm Configuration Framework // 10th International Conference on Learning and Intelligent Optimization. Springer International Publishing. 2016. P. 32–47.

8. Ansótegui C., Sellmann M., Tierney K. A gender-based genetic algorithm for the automatic configuration of algorithms // *International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*, Springer, Berlin, Heidelberg. 2009. P. 142–157.

9. López-Ibáñez M., Dubois-Lacoste J., Stützle T., Birattari M. The irace package: Iterated racing for automatic algorithm configuration // IRIDIA, Université Libre de Bruxelles, Belgium, Tech. Rep. TR/IRIDIA/2011-004. 2011. P. 43–58.

10. Fitzgerald T., Malitsky Y., O’Sullivan B., Tierney K. ReACT: Real-Time Algorithm Configuration through Tournaments // *Seventh Annual Symposium on Combinatorial Search*. 2014. 15 p.

**A.P. Karpenko**

Bauman Moscow State Technical University

## **PARAMETRIC SYNTHESIS OF POPULATION ALGORITHMS FOR GLOBAL OPTIMIZATION**

**Keywords:** *metaheuristic algorithms, population algorithms, nature-inspired algorithms, parametric synthesis, meta-optimization, parameter tuning.*

**Abstract.** *We consider the problem of global continuous optimization and population (metaheuristic) algorithms (P-algorithms) for solving it. These algorithms contain free parameters, called P-algorithm strategies. The work is devoted to the problem of finding the best values of the P-algorithm strategies. We single out stationary, program-dynamic and program-adaptive strategies. The characteristics of the population are given, which are used to construct adaptive strategies of the P-algorithm, as well as to formulate problems for the synthesis of parametric stationary, program-dynamic and program-adaptive strategies. We conclude the work with a review of methods for solving the indicated problems of parametric synthesis.*

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВВЕДЕННОГО ПОНЯТИЯ ВЕСА ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПОИСКА**

Ключевые слова: *параллельное программирование, BigData, поиск сложных структур, норма пространства, базы данных.*

*В статье рассматривается метод повышения эффективности решения задач поиска и соединения элементов широких таблиц в базах данных. Этот метод основан на использовании понятия близкого к понятию нормы пространства, а также группировки и распараллеливания методов обработки массивов данных. Для реализации параллельной обработки данных используется принцип симметричного горизонтального распределения данных*

### **1. Введение**

В статье рассматривается возможность применения распределения, а также понятия схожего с нормой элемента базы для дополнительной оптимизации последовательности поисковых запросов к базам данным (Big Data). Современные сервисы зачастую сталкиваются с проблемами чрезвычайной нагрузки за счет следующих факторов:

- данные в обработке имеют тенденцию к усложнению своей структуры;
- количество данных постоянно растет;
- общность данных снижается что влечет за собой снижение эффективности универсальной обработки данных.

Сейчас подобные проблемы решаются, как правило, экстенсивными мерами. Обычно прибегают к увеличению числа процессоров и прямому разбиению данных или к кешированию и введению более мощных устройств. Однако данные меры являются неэффективными с точки зрения затрат, а также имеют строгие ограничения в своем применении, поскольку с каждым увеличением относительный КПД растет все меньше. Так, увеличение числа кластеров вычисления в какой-то момент неизбежно приведет, например, к перегрузке шины обмена данными и прочим побочным эффектам.

Предлагаемый метод оптимизации поисковых запросов среди широких таблиц основан на введении понятия веса элемента, разбиении, основанном на симметричном горизонтальном распределении и кластеризации элементов. При таком подходе предполагается, что все элементы таблицы будут распределены и кластеризованы на основе

вводимой характеристики «вес элемента». В дальнейшем изложении предполагается, что таблицы имеют большой объем и немалое число столбцов, для эффективности вводимых понятий, иначе их обработка не представляла бы особого интереса.

## 2. Понятие веса

Для оптимизации, разбиения по вычислителям и кластеризации необходимо ввести для каждого элемента признак, который назовем весом элемента  $w$ . Предположим, что имеется таблица со столбцами следующих числовых типов:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n). \quad (1)$$

Пусть также каждый столбец имеет пару максимального и минимального значения

$$((A, A')_1, (A, A')_2, (A, A')_3, \dots, (A, A')_n). \quad (2)$$

Будем говорить для  $i$ -й координаты элемента  $x$  – значения  $i$ -го столбца элемента  $x$ , что ее вес равен единице, если для  $x_i$  выполняется условие:

$$x_i \geq \frac{(A'_i + A_i)}{(e/2)}. \quad (3)$$

Иными словами, если по  $i$ -ой координате  $x$  находится несколько дальше первых трех четвертей от минимума по данному столбцу (рис. 1). Весом элемента  $x$  назовем следующую сумму:

$$\sum_{i=1}^n x_i, \quad (4)$$

где  $x_i$  – координаты (значения  $x$  в  $i$ -х столбцах) элемента  $x$ .

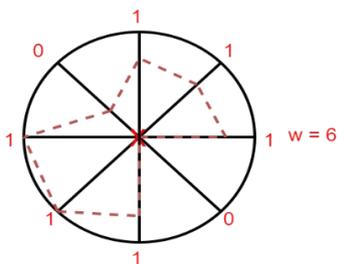


Рис. 1. Веса элементов

## 3. Оптимизация поиска

Данную характеристику необходимо находить для каждого элемента, предпочтительно также ее хранение в качестве метаданных для поиска, поскольку затраты памяти на нее весьма ограничены. Очевидно, что для всех элементов таблицы подобную характеристику можно рассчитать, а также несложно показать, что у одинаковых элементов будут одинаковые веса. Эти два факта дают нам право воспринимать данную характеристику как естественную перцептивную хеш-функцию, на основе которой уже можно повышать эффективность поиска и операции соединения таблиц путем отбрасывания элементов с другим весом из нужной выборки. Более того, если необходим поиск по

части столбцов среди элементов таблицы или же по сочетанию условий вида

$$x_1 = a_1 \text{ or } x_2 = a_2 \text{ or } x_3 = a_3 \dots, \quad (5)$$

где  $a$  – поисковый образ, на данном этапе можно использовать правило, следующее из неравенства треугольника, поскольку каждый вес можно представить в качестве расстояния от нулевого элемента для таблицы – элемент, лежащий посреди каждого отрезка [1]:

$$|W_1 - W_2| \leq \rho(x_1, x_2), \quad (6)$$

где  $\rho$  – расстояние Хемминга по весам координат. Иными словами, если модуль разности весов равен определенной величине, расстояние Хемминга между весами координат элементов отличаются не более чем на это число (рис. 2).

Так, для очередного поиска представляется возможным найти вес поискового образа и первыми для сравнения отбирать элементы с ближайшим весом, поскольку они в большей степени близки к поисковому образу по большей части столбцов, а значит, имеют больший шанс на совпадение с условиями поиска. Рассмотрим еще одно свойство на примере элементов из двух столбцов. Пусть

$$a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2). \quad (7)$$

Очевидно, что расстояние Хемминга – это сумма из побитовых исключаящих или для координат элементов, тогда побитовая дизъюнкция двух элементов  $x$  и  $y$  может быть выражена арифметическими действиями в виде

$$x + y - 2xy. \quad (8)$$

Тогда имеем для элементов  $a$  и  $b$ :

$$x_1 + y_1 - 2x_1y_1 + x_2 + y_2 - 2x_2y_2 \leq (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = W_1 + W_2. \quad (9)$$

Это означает, что для любых  $x$  и  $y$ :

$$\rho(x_1, x_2) \leq W_1 + W_2. \quad (10)$$

Таким образом, имеется неравенство:

$$|W_1 - W_2| \leq \rho(x_1, x_2) \leq W_1 + W_2. \quad (11)$$

При поиске сразу отсекается большое количество пар элементов, которые заведомо не могут подойти после сравнения. Кроме того, понятие веса позволяет строить отношения эквивалентности на множестве элементов и разбивать множество элементов по данному признаку на классы эквивалентности, что дает возможность построить на множестве таблицы горизонтально симметричное распределение. Для этого следует сгруппировать множество элементов по данному признаку, после чего выполнить сортировку по мощности получившихся множеств [2].

Нулевой шаг при обработке трудных запросов, состоящих из цепочек операций Join, заключается в разбиении их по столбцам в соответствии со значениями весов. Такой способ позволит при

выполнении соединения таблиц отсекают большое количество ненужных для сравнения элементов. А поскольку вычисление веса не имеет большой алгоритмической сложности и при этом позволяет разделить множество на подобные по элементам подмножества достаточно равномерно, данное разбиение может существенно повысить эффективность распределенной обработки тяжелых запросов путем эффективного распределения без возможных пересечений данных.

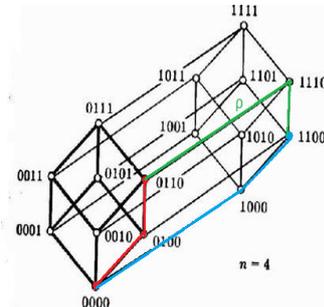


Рис. 2. Гиперкуб метаданных для поиска

#### 4. Кластеризация на основе веса

Для следующей оптимизации поисковых запросов таблицу, по которой осуществляется поиск необходимо подвергнуть специфической кластеризации и индексации. Будем разбивать множество элементов таблицы по их весу на подмножества, далее получившиеся подмножества будут разбиты вновь до момента, когда в результирующих множествах не останется малого числа элементов, или до достижения большого числа глубины.

Каждый шаг при этом назовем уровнем разбиения. На каждом уровне кластеризации функция веса будет видоизменена с учетом глубины кластеризации. А именно положим, что при кластеризации на каждом  $j$ -м уровне координата имеет вес 1 тогда, когда

$$x_i \geq \frac{(A_i + a_i)}{(e/2)^j}. \quad (12)$$

Таким образом, общую формулу веса элемента  $x$  на  $j$ -м уровне для таблицы из  $n$  столбцов можно записать в следующем виде:

$$W(x) = \sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{(A_i + a_i)}{(e/2)^j}. \quad (13)$$

При таком разбиении и такой функции веса для каждого шага в множестве с ростом числа вершин будет гарантированно меньше элементов (рис. 3). Также из того, что для одного уровня функция веса одинаковая, и из сказанного выше следует, что одинаковые элементы будут находиться на каждом шаге в одинаковых результирующих множествах. Так же, как и для классического индекса, можно рассчитать, что для каждого шага количество элементов в его листьях будет составлять в среднем  $\frac{n}{L}$  элементов.

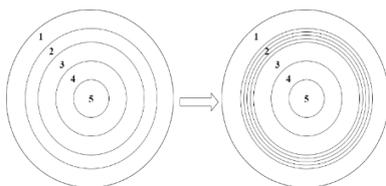


Рис. 3. Кластеры весов элементов

А для достижения состояния в один элемент в каждом из результирующих множеств необходимо

$$k = \log_L n - 1 \text{ шагов.} \quad (14)$$

Для очередного поиска элементов по заданным столбцам необходимо найти вес поискового образа, после чего определить для него вложенное множество на каждом уровне и повторить до тех пор, пока данный элемент не попадет в результирующее множество, поскольку элементы однозначно разбиты функциями веса на каждом шаге, вместе с поисковым образом обязательно будут либо идентичные, либо близкие по Хеммингу к нему элементы базы данных. Для поиска подобных элементов возможно воспользоваться приведенным выше неравенством:

$$|W_1 - W_2| \leq \rho(x_1, x_2) \leq W_1 + W_2. \quad (15)$$

И выбирать, исходя из расстояния, те весовые кольца, которые подходят для поискового запроса.

Поскольку в среднем разбиение по весам достаточно равномерно по заполненной базе, указанные характеристики верны и для предлагаемой схемы. И значит, схема разбиения сохраняет преимущества индексирования пространства при оптимизации поиска и вывода его на логарифмическую сложность. Однако вместе с этим нужно отметить, что для индексирования по большому количеству столбцов обычный индекс типа b-tree имеет вложенную структуру для каждого столбца в листьях предыдущего, а значит, кратно увеличивает расходы памяти на хранение, в это же время для предложенной схемы число столбцов при разбиении не сказывается на памяти, затраченной при хранении индекса.

### 5. Частичная кластеризация

Подобная характеристика применима также для частичной кластеризации и индексирования подобного типа. Представим элементы таблицы как элементы гиперплоскости, а каждый столбец – как их координаты. Для вычисления расстояния выберем на этой гиперплоскости метрику Таксиста, она более, чем другие, удовлетворяет нашим целям, поскольку не «сглаживает» разницу в нескольких конкретных координатах в угоду общей разнице. Также определим понятие частичного элемента – это элемент, всех координат которого мы не знаем, нам известны лишь какие-то  $k$  его координат, причем не обязательно первые  $k$ . Определим расстояние между частичным элементом и стандартным элементом гиперплоскости. В нашем случае

расстоянием назовем расстояние между частичным элементом и элементом, состоящим из тех же координат целевого элемента, которые известны для частичного. Например, если имеются элементы (1, 2, 3) и (? , ?, 2), то расстоянием между ними будем считать 1. Основываясь на описанных выше определениях, начнем разбивать наше множество (на первом шаге всю таблицу) на подмножества путем использования схемы, схожей с картами Кохонена. А именно выберем  $M$  элементов со случайными координатами, случайно лежащих среди элементов нашей гиперплоскости. Затем вычислим расстояние между каждым элементом таблицы и этими вершинами, при обработке каждого элемента будем присуждать этому элементу ту вершину, которая наиболее близка к нему на данном шаге, и сдвигать с некоторым коэффициентом выбранную вершину к обрабатываемому элементу. Процесс можно повторять неоднократно, но это лишь немного влияет на эффективность конечной модели. После подобного передвижения назовем центрами эти вершины, определим каждый элемент таблицы к ближайшему центру, при этом для центра сохраним два значения: Максимальный радиус и Минимальный радиус. Первое – максимальное расстояние от центра до любого принадлежащего ему элемента. Второе – минимальное частичное расстояние от центра до принадлежащих ему элементов. Фактически второе число – минимальная разность координат любого из принадлежащих ему элементов с центром; разумеется, если хотя бы раз оно приобрело значение нуля, сравнивать с другими элементами больше не следует.

Будем повторять проделанную процедуру до тех пор, пока в результирующих множествах разбиения не окажется достаточно мало элементов (максимум до  $M$ , дальнейшее разбиение не выгодно, поскольку глубина разбиения будет в меньшей степени влиять на ширину). При поиске элемента достаточно проделать с ним одним операцией «примерки», а именно сравнить его с центрами на первой глубине и отнести к одному из них. Затем проделать ту же процедуру на данной глубине и так далее, к все более глубоким, наиболее близким ему центрам. В итоге такого сравнения поисковый образ попадет в то множество, где точно находятся/находились бы элементы, эквивалентные ему. И уже среди этих элементов нужно производить сравнение. Однако при примерке можно пользоваться правилами, согласно которым если частичный элемент не попадает в рамки между двух радиусов, то с таким центром продолжать работу не следует.

### **Заключение**

Приведенный выше подход позволяет не только эффективно находить равные или схожие последовательности ключей для операций поиска и сравнения, но и выстроить распределенную систему для оптимизации других более сложных операций, таких как join [3; 4].

Предлагаемый метод использования метаданных, в частности понятия веса, на основе заполнения столбца для элемента обладает следующими преимуществами:

- возможность построения индексной структуры для оптимизации поиска данных без ограничений на элементы;
- возможность построения индексной структуры без неоптимальных затрат памяти по большому количеству характеристик элемента;
- возможность эффективного разбиения данных перед трудными запросами для распределения по разным процессорам без пересечения данных.

Использование метаданных на основе некоторого множества характеристик в рамках предлагаемого метода наиболее эффективно в рамках усложнения структуры обрабатываемых данных и усложнения запросов к таким данным. Конкретно предлагаемое решение оставляет за собой основные черты индексных методов, однако во многом решает проблему увеличения расходования памяти за счет увеличения числа столбцов и усложнения их типов, что существенно расширяет возможности его применения.

### Литература

1. Kirikova A., Mironov A., Munerman V. The Method of Composition Hash-functions for Optimize a Task of Searching Images in Dataset // 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). IEEE, 2020. С. 1983-1986.
2. Monga V., Evans B.L. Perceptual image hashing via feature points: performance evaluation and tradeoffs // IEEE Transactions on Image Processing. 2006. 15(11). P. 3452-3465.
3. NP-полнота / Т.Х. Кормен [и др.] // Алгоритмы: построение и анализ = INTRODUCTION TO ALGORITHMS. 2-е изд. М.: Вильямс, 2006.
4. Zakharov V. et al. Architecture of Software-Hardware Complex for Searching Images in Database // 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). IEEE, 2019. С. 1735-1739.

**A.V. Kiricova, A.I. Mironov**  
Smolensk State University

### USING THE INTRODUCED CONCEPT THE WEIGHT OF THE ELEMENT TO OPTIMIZE THE SEARCH

**Keywords:** *integrated programming, big data, search, complex structure, volume, database.*

**Abstract.** *The article considers a method for increasing the efficiency of solving problems of searching and joining elements of wide tables in databases. This method is based on the use of the concept of a space close to*

*the concept of a norm, as well as grouping and parallelization of methods for processing data arrays. To implement parallel data processing, the principle of symmetrical horizontal data distribution is used.*

**Е.В. Колюхов**

*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.9

## **ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЧЕТКОГО КОНТУРА УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ СУБТРАКТИВНОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ**

*Ключевые слова: нечеткий контур управления, нечеткая логика, нечеткие множества, функция принадлежности, субтрактивная кластеризация.*

*В статье описаны особенности определения параметров нечеткого контура управления для автоматизированной сборки изделий микроэлектроники на основе субтрактивной кластеризации, позволяющей определить базу нечетких правил, что является одной из самых трудоемких задач при решении задач управления. Использование нечетких контроллеров для управления совмещением и позиционированием элементов при автоматизированной сборке изделий микроэлектроники позволило добиться высокой точности и скорости выполнения операций, чего требует современное развитие техники и технологий.*

### **Введение**

Развитие технических возможностей и использование последних научных разработок при автоматизации и управлении технологическими процессами и производствами, в том числе и в микроэлектронике (МЭ), открывают новые возможности и ставят все более сложные задачи по повышению точности и скорости технологических процессов, уменьшению линейных размеров и увеличению количества элементов в выпускаемых изделиях микроэлектроники (ИМЭ) [1; 4; 6]. Операция сборки является завершающим этапом производства ИМЭ. От качества выполнения данной операции в значительной степени зависит надежность и долговечность выпускаемой продукции. Классические подходы (аппаратное определение положения и последующая корректировка) не позволяют достичь современных требований к точности и быстродействию выполняемых операций, что приводит к высокому проценту бракованных изделий. В настоящее время, как показывает отечественная и зарубежная практика, хорошо

зареккомендовали себя интеллектуальные технологии, позволяющие обеспечивать высокоточное управление в широком диапазоне скоростей, под воздействием внешних возмущений и внутренних нелинейных факторов. Однако при использовании интеллектуальных технологий следует учитывать аппаратные ограничения исполнительного оборудования [5; 6].

Исходя из вышеизложенного, задача управления совмещением и позиционированием элементов с учетом всевозможных факторов является своевременной и актуальной.

Исследование современных методов и средств совмещения и позиционирования элементов при автоматизированной сборке ИМЭ показало, что существующие решения неэффективны при управлении нелинейными и сложными системами, а также при отсутствии достаточной информации об объекте управления [2; 3]. Развитие информационных технологий позволяет использовать в процессах управления и регулирования методы искусственного интеллекта, нечеткой логики, нейронных сетей, генетических алгоритмов. Перечисленные методы эффективно работают с нелинейными факторами, а также с неполными и неточными данными. Обращение к нечетким контроллерам, использующим методы нечеткой логики и искусственного интеллекта, позволяет добиться высокоточных результатов настройки и адаптации регуляторов для автоматизации различных технологических операций, в частности, совмещения и позиционирования элементов ИМЭ.

Основной недостаток использования нечетких контроллеров при решении задач управления заключается в составлении базы нечетких правил и определении функции принадлежности.

В случаях, если идентификация объекта управления является трудоемкой задачей, идентификационная модель имеет множество эмпирически определяемых коэффициентов, для управления объектом требуется эксперт, отсутствует достаточная информация об объекте управления, целесообразно применение нечеткого управления, то есть управления основанного на методах теории нечетких множеств и нечеткой логики.

### **Реализация нечетких контроллеров на основе субтрактивной кластеризации**

Для настройки и обучения нечеткого контроллера необходимо разделить все возможные положения элементов при сборке на отдельные группы с учетом нечетких отношений для дальнейшего формирования функций принадлежности и вывода лингвистических правил [4, 5, 6]. Кластеризация – один из способов анализа и обработки данных. Методы кластеризации позволяют разделить большие объемы данных на отдельные совокупности по определенным схожим

признакам. Такие совокупности называются кластерами. Для проведения кластеризации необходимо определить признаки анализируемых данных: качественные, количественные или смешанные.

Кластеризацию проводят с использованием четких и нечетких отношений. Четкие методы кластеризации позволяют разделить искомое множество данных  $D$  на конечное количество непересекающихся сегментов. При этом выполняется утверждение, что любой объект исходного множества данных  $D$  принадлежит только одному сегменту. Использование нечетких отношений при кластеризации приводит к тому, что один и тот же объект исходного множества  $D$  принадлежит нескольким сегментам с разной степенью, что позволяет использовать дополнительные интерпретации для объектов, находящихся на границах кластеров.

Кластеризация данных производится с заранее определенным и неопределенным количеством итоговых кластеров. Для автоматизированных систем управления совмещением и позиционированием элементов при сборке ИМЭ целесообразно использовать определенное количество кластеров, зависящее от распределения исходных данных и аппаратных ограничений сборочной установки.

Формализованное математическое представление кластеризации исходных данных заключается в следующем.

Пусть  $D$  – исходное метрическое пространство,  $h: D \rightarrow R$  – определяющая метрика,  $(D_1, \dots, D_n) \subset D$  – последовательность данных. При этом  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \exists j \in \{1, \dots, n\}: D_i \neq D_j$ ;  $\forall i \in \{1, \dots, n\}: \max\{h(D_i, D_k) | k \in \{1, \dots, n\}\} > 0$ . Следовательно, для каждого  $i$ -го элемента определена функция сходства  $j$ -го элемента последовательности с  $i$ -ым элементом.

$$\theta_i: \{1, \dots, n\} \rightarrow [0, 1]; \theta_i(j) := 1 - \frac{h(D_i, D_j)}{\max\{h(D_i, D_k) | k \in \{1, \dots, n\}\}}, \quad (1)$$

$$\delta_i: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow [0, \dots, 1]; \delta_i(k, l) := 1 - |\theta_i(D_k) - \theta_i(D_l)|, \quad (2)$$

$$\mu: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow [0, \dots, 1]; \mu(i, j) := \min\{\delta_k(i, j) | k \in \{1, \dots, n\}\}. \quad (3)$$

Рекурсивная функция  $\mu^{(k)}: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow [0, 1]$  для  $k = 1, 2, \dots, n$  определена как

$$\begin{cases} \mu^{(1)}(i, j) := \mu(i, j) \\ \mu^{(k)}(i, j) := \max\{\min\{\mu^{(k-1)}(i, s), \mu^{(k-1)}(s, j)\} | s \in \{1, \dots, n\}\} \end{cases} \quad (4)$$

Бинарное отношение эквивалентности  $R_\gamma \subset \{D_1, \dots, D_n\}^2$  для  $\gamma \in [0, 1]$  определено как  $(D_i, D_j) \in R_\gamma: \Leftrightarrow \mu^{(k)}(i, j) \geq \gamma$ .

Следовательно, отношение эквивалентности  $R_\nu$  позволяет разбить множество данных  $\{D_1, \dots, D_n\}$  на классы эквивалентности. Два элемента множества  $D_i, D_j$  входят в один класс эквивалентности тогда и только тогда, когда значение рекурсивной функции  $\mu^{(k)}$  для этих элементов велико и эквивалентно существованию последовательности пар элементов  $(D_i, D_{j1}), (D_{j1}, D_{j2}), \dots, (D_{jk}, D_j)$ , на которых значение рекурсивной функции  $\mu$  велико. По определению рекурсивной функции  $\mu$  по уравнению (4) наличие подобной последовательности пар элементов обозначает близость элементов друг другу. Таким образом, два элемента исходного множества входят в один класс эквивалентности тогда и только тогда, когда между ними есть последовательность попарно близких друг к другу элементов.

Для создания базы знаний и последующей настройки и обучения нечеткого контроллера необходимо собрать исходные данные о различных положениях элементов при сборке ИМЭ. Задача кластеризации положений элементов состоит в разбиении исходного информационного множества  $D$  на несколько подмножеств, в которых характеристики положений схожи между собой. Схожесть положений элементов или объектов кластеров определяется через разницу между основными характеристиками положений элементов. Чем меньше разница, тем объекты более схожи. Представим исходные данные в виде матрицы наблюдений:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m1} & \dots & D_{mk} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В результате кластеризации получается матрица нечеткого разбиения  $F = [f_{ij}], f_{ij} \in [0,1]; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k$ , в которой каждая строчка показывает степень принадлежности объекта кластерам. Для обеспечения наполняемости кластера необходимо выполнение условия  $\sum_{i=1}^m f_{ij} > 0, j \in \{1, \dots, k\}$ . Для создания базы знаний положений элементов и траекторий перехода от одного положения к другому необходимо обеспечить распределение исходных данных по всем кластерам, то есть сумма степеней принадлежности по всем кластерам должна быть равна 1 для каждого элемента исходных данных. Для этого необходимо выполнение условия  $\sum_{j=1}^k f_{ij} = 1, i \in \{1, \dots, m\}$ .

**Заключение.** Для нечеткой кластеризации положений элементов для управления совмещением и позиционированием элементов при автоматизированной сборке ИМЭ могут быть использованы основные алгоритмы с предварительным заданием количества кластеров и без него. На основе кластеризации данных формируются правила с

использованием лингвистических и логических операторов и переменных. Совокупность таких правил записывается в базу правил, на основе данных которой в блоке логического вывода формируется нечеткий логический вывод, в результате анализа которого осуществляется управляющее воздействие на объект управления. Таким образом, достигается высокая точность настройки параметров регулятора в нечетком контуре управления и, как следствие, высокая точность и быстродействие выполнения операций совмещения и позиционирования элементов при сборке ИМЭ.

### Литература

1. Шевнина Ю.С. Метод оценки состояния нелинейной системы на основе логического анализа данных // Изв. вузов. Электроника. 2022. Т. 27, №3. С. 407-415.
2. Шевнина Ю.С. Метод декомпозиции сложной нелинейной системы на основе процессного подхода // Системы управления и информационные технологии, 2021. №3(85). С. 24-29.
3. Гагарина Л.Г., Шевнина Ю.С. Моделирование цифрового двойника производственного процесса с использованием смарт структуры // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. Вып. 23. С. 84-90.
4. Усков А.А., Кузьмин А.В. Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика. М.: Горячая линия-Телеком, 2004. 143 с.
5. Рутковская Д, Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия-Телеком. 2006. 383 с.
6. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: учебник / под ред. Н.Д. Егупова. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2022. 744 с.

**E.V. Konyuhov**

National Research University of Electronic Technology

### **FEATURES OF DETERMINING THE PARAMETERS OF A FUZZY CONTROL LOOP BASED ON SUBTRACTIVE CLUSTERING**

**Keywords:** *fuzzy control loop, fuzzy logic, fuzzy sets, membership function, subtractive clustering.*

**Abstract.** *The article describes a method for determining the parameters of a fuzzy control loop for automated assembly of microelectronics products based on subtractive clustering, which makes it possible to determine the base of fuzzy rules, which is one of the most time-consuming tasks in solving control problems. The use of fuzzy controllers to control the alignment and positioning of elements in the automated assembly of microelectronic products has made it possible to achieve high accuracy and speed of performing operations required by modern developments in technology and technology.*

## НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ $(0, \mu)$ -СВЕРНУТОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Ключевые слова: теория графов, многомерные матрицы, клика, дерево.

*В статье рассматривается применение алгебры многомерных матриц для решения нескольких задач теории графов. В отличие от классических эвристических методов, предложенный подход позволяет получить ответ на вопрос, ставящийся ко всему графу, а не к паре отдельно выбранных вершин. С помощью  $(0, \mu)$ -свернутого произведения матриц решается задача определения достижимости вершин в графе, определения числа комбинаций всех возможных клик в графе, а также производится проверка на то, является ли граф деревом.*

### **Введение**

Задачи теории графов нашли применение в разных отраслях жизнедеятельности и промышленности. К таким задачам относят раскраску графа, задачу о поиске клики или общих подграфов, поиск путей в графе. Для их решения найдено множество эвристических алгоритмов, дающих точные или приблизительные ответы за удовлетворительное время. Однако все они дают ответы только для части задачи. Применяя алгебру многомерных матриц, мы можем получить решение различных задач в общем виде, а не для конкретных частей графа. Так как матрица является одним из стандартных представлений данных о графе, можно считать соответствие модели данных модели вычислений полным [1].

### **Анализ задач на графах с использованием многомерных матриц**

При проектировании вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей важную роль играет грамотное распределение нагрузки. Для каких-то задач это может быть неравномерное распределение (когда отдельные части системы более производительны и получают большую нагрузку), для каких-то – равномерное (когда мы предполагаем все элементы системы равнозначными и распределяем нагрузку поровну).

С помощью матричного способа представления графа возможно хранение информации обо всех возможных разбиениях. Матрица смежности графа  $G$ , представляющая собой двумерную матрицу размера

$n \times n$ , является также матрицей, содержащей информацию обо всех кликах размера 2. Клик в графе называется множество его вершин, где каждая вершина связана с каждой. При этом на главной диагонали, той части матрицы, где равные значения индексов, хранится информация обо всех кликах размера 1 – вершинах с петлями [2].

**Задача 1. Построение матрицы смежности.** Для графа, имеющего малое число ребер, получить многомерную матрицу смежности графа [3].

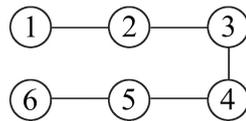


Рис. 1. Граф  $G$  для задачи 1

Матрицей смежности данного графа является матрица  $G$ , представленная ниже. Так как в задаче заранее известно, что у графа имеется малое число ребер, матрица смежности является разреженной, что дает возможность использование в гомоморфной алгебре многомерных матриц реляционной алгебры [1], которая позволяет при практической реализации наиболее эффективно обрабатывать разреженные матрицы. При возведении ее в  $(0,1)$ -квадрат результирующая матрица не будет тривиальной. Матрицы  $G$  и  $C$  будет иметь следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В общем виде элемент  $c_{i_1 i_2 \dots i_{k-\mu} i_{\mu+1} i_{\mu+2} \dots i_k}$  указывает на число общих кликов размера  $\mu$  между кликами, состоящими из вершин  $i_1 i_2 \dots i_{k-\mu}$  и  $i_{\mu+1} i_{\mu+2} \dots i_k$ .

Также отдельного рассмотрения заслуживает частный случай  $(0, \mu)$ -свернутого произведения в  $(0, 1)$ -свернутое произведение, если речь идет о возведении с его помощью матрицы смежности графа в степень. Как уже рассматривалось выше, результатом возведения в  $(0, 1)$ -квадрат матрицы смежности графа будет двумерная матрицы, элементы которой находятся по следующему правилу:

$$c_{i_1 i_2} = \sum_{(j)} g_{i_1 j} \times g_{j i_2}. \quad (1)$$

Каждый элемент  $c_{i_1 i_2}$  показывает число вершин графа  $G$ , смежных вершинам с номерами  $i_1, i_2$ . Но не всегда необходимо знать число

соседей. В случае, если достаточно просто знать, имеется ли в графе вершина, смежная двум заданным, формулу возможно дополнить:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \sum_{k=1}^n g_{ik} * g_{kj} > 0 \\ 0, \sum_{k=1}^n g_{ik} * g_{kj} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Однако, если требуется проверить вершины на связность, данный вариант не подойдет: связанные напрямую вершины, либо имеющие связь более чем через одну вершину, не будут считаться связными. Для исправления первого пункта (прямой связности) достаточно заменить формулу на следующую:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \sum_{k=1}^n g_{ik} * g_{kj} > 0 \\ 0 + g_{ij}, \sum_{k=1}^n g_{ik} * g_{kj} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Так же альтернативно, элемент  $g_{ij}$  можно внести под знак суммы, это не играет существенной роли, важно его учесть. Таким образом, матрица, состоящая из элементов  $c_{ij}$ , будет представлять собой матрицу связности вершин не более, чем через два ребра. При возведении данной матрицы в квадрат по той же формуле получаем элементы  $c_{1ij}$ , характеризующие связность вершин не более, чем через 4 ребра. Задача 1 не представляет интереса для рассмотрения, так как матрица  $C$  уже не содержит нулевых элементов, поэтому пропустим ее. Для изображенной выше задачи 1 рассмотрим результирующие матрицы  $C$  и  $C_1$ :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $C_1$  свидетельствует о том, что между всеми вершинами графа, кроме 1 и 6, можно построить путь не длиннее 4 ребер.

При этом, если матрицу  $C_1$  возвести в квадрат, результирующая матрица будет состоять из элементов  $c_{2ij}$ , характеризующих связность вершин не более, чем через 8 ребер, так как для каждой вершины добавляются вершины, достижимые не более, чем через 4 ребра от каждой достижимой вершины, а до наиболее удаленной как раз еще не более чем 4 ребра.

В общем виде для  $k$ -го возведения в квадрат результирующая матрица будет содержать элементы, характеризующие достижимость вершин не более, чем через  $2^{k+1}$  ребер. Используя данный способ, возможно проверять связность графа, не выходя за рамки алгебры

многомерных матриц. Зная, что наибольшее число ребер между двумя вершинами в графе, содержащем  $n$  вершин, не превосходит  $n-1$ , для проверки связности достаточно провести  $\log_2(n-1)$  возведение в квадрат. При этом сложность каждого возведения соответствует сложности произведения матриц  $O(n^3)$ . Итоговая сложность проверки на связность графа не превосходит  $O(n^3 \log_2(n-1)) \approx O(n^3)$ .

**Задача 2. Поиск комбинаций всех клик.** Для многомерной матрицы определить число всех возможных комбинаций клик размера не более  $k$  в графе.

Отдельным случаем стоит рассмотреть  $(0, k)$ -квадрат  $k$ -мерной матрицы, содержащей информацию обо всех кликах размера не более  $k$ . Начнем с тривиального случая, матрицы смежности и  $(0, 2)$ -квадрата. Результатом данного действия будет являться число:

$$c = \sum_{j_1 j_2} g_{j_1 j_2} * g_{j_1 j_2}. \quad (4)$$

В рассматриваемом случае для каждого отдельно зафиксированного значения  $j_1$  и  $j_2$  результатом суммы будет степень вершины с зафиксированным номером, а значит, перебор по данной величине даст сумму степеней всех вершин графа, что для ориентированного графа равно числу ребер, а для неориентированного – удвоенному числу ребер. Для задачи 1 результатом будет число 10.

**Задача 3. Определение типа графа.** Определить является ли граф деревом [4].

Стоит отдельно подробнее рассмотреть применение  $(0, 2)$ - квадрата матрицы смежности графа. Данное значение можно использовать как вариант проверки графа на то, является ли он деревом: по определению в случае, когда у связного графа равное число вершин и ребер, он является деревом. Такая проверка позволяет отнести граф к хорошо изученному классу деревьев, при этом не выходя за рамки операций алгебры многомерных матриц и не используя эвристических алгоритмов.

Таким образом, используя только математический аппарат алгебры многомерных матриц, возможно проверить, является ли граф деревом, а если нет, является ли он связным. А в дальнейшем с помощью  $(0, \mu)$ -свернутого произведения матриц можно находить существование пересечений среди клик графа.

### **Заключение**

Рассмотренные задачи имеют эвристические алгоритмы решения, однако использование алгебры многомерных матриц позволяет решать без приближенных вычислений сразу все семейство поставленных задач: найти не только наибольшее пересечение у клик графа, а все

пересечения; проверить достижимость не только между одной парой вершин, а между всеми парами сразу, что позволяет определить связность графа. Помимо этого, с помощью алгебры многомерных матриц возможно определять отдельные свойства графов, что позволяет не расширять математический аппарат построенной модели данных для расширения ее функционала, если перед ней ставятся другие задачи теории графов.

Данные результаты позволяют оптимизировать процесс проектирования приборов в рамках построения и анализа размерных цепей, находить пересекающиеся подмножества в сфере приложения задачи (от распределения нагрузки на производственные мощности до построения рекомендательных систем), определять свойства построенной модели данных и на основе этого выбирать оптимальные алгоритмы решения отдельных поставленных задач.

### Литература

1. Мунерман В.И., Мунерман Д.В. О соответствии моделей данных и моделей вычислений // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2021. Вып. 22. С. 146-152.
2. Зыков А.А. Теория конечных графов. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1969. 554 с.
3. Один метод построения циклов в графе / Е.П. Емельченков [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, №. 4. С. 814-823.
4. Moon J.W., Mozer L. On cliques in graphs // Israel J. Math. 1965. Т. 3. С. 23–28.

**A.I. Makarov**

Smolensk State University

### **SOME APPLICATIONS OF $(0, M)$ -CONVOLUTION PRODUCTS OF MULTIDIMENSIONAL MATRICES FOR SOLVING GRAPH THEORY PROBLEMS**

**Keywords:** *graph theory, multidimensional matrices, clique, tree.*

**Abstract.** *The article discusses the application of the algebra of multidimensional matrices to solve several problems of graph theory. Unlike classical heuristic methods, the proposed approach allows us to get an answer to the question posed to the entire graph, and not to a pair of separately selected vertices. Using the  $(0, \mu)$ -convolution product of matrices, the problem of determining the reachability of vertices in the graph is solved, determining the number of combinations of all possible clicks in the graph, and also checking whether the graph is a tree is performed.*

## **ОДИН ПРИМЕР ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СООТВЕТСТВИЯ МОДЕЛЕЙ ДАННЫХ**

Ключевые слова: *алгебра многомерных матриц, реляционная алгебра, модель данных.*

*Доказательство соответствия моделей данных играет важную роль при решении проблемы выбора или проектирования программно-аппаратного комплекса для решения конкретной прикладной задачи. Поскольку модели данных – это универсальные многоосновные алгебраические системы, необходимо доказать соответствие как основных множеств, так и операций. В ряде случаев возникает ситуация, когда операция, определенная в одной модели данных, отсутствует в другой модели. В таком случае необходимо найти возможность моделирования этой операции композицией операций той модели, с которой устанавливается соответствие. В качестве примера в статье рассматривается установление соответствия многомерно-матричной, файловой и реляционной моделей данных по операции слияния строго упорядоченных файлов. Приведен достаточно простой метод построения этой операции посредством композиции двух реляционных операций. Показано, что такая операция позволяет доказать эквивалентность, в аксиоматическом смысле, и гомоморфизм, в алгебраическом смысле, моделей данных.*

### **Введение**

Доказательство соответствия моделей данных играет важную роль при решении проблемы выбора или проектирования программно-аппаратного комплекса для решения конкретной прикладной задачи. Поскольку модели данных – это универсальные многоосновные алгебраические системы, необходимо доказать соответствие как основных множеств, так и операций [1; 2]. В ряде случаев возникает ситуация, когда операция, определенная в одной модели данных, отсутствует в другой модели. В этом случае необходимо найти возможность моделирования этой операции композицией операций той модели, с которой устанавливается соответствие. В качестве примера в статье рассматривается установление соответствия многомерно-матричной, файловой и реляционной моделей данных [3] по операции слияния строго упорядоченных файлов.

### **Постановка задачи**

Формальная модель решения многих прикладных задач представляет собой алгебраическое выражение в выбранной программистом-разработчиком модели данных.

Пример задачи разузлования [4; 5] наглядно иллюстрирует этот факт. Суть этой задачи, краеугольного камня всех автоматизированных систем управления предприятиями, состоит в построении технологической спецификации из конструкторской спецификации. Конструкторская спецификация содержит непосредственную входимость узлов и деталей в изделия и другие узлы. Технологическая – общую входимость узлов и деталей в изделия и узлы. Конструкторскую спецификацию легко представить в виде ациклического ориентированного нагруженного графа. Его вершины соответствуют изделиям, узлам и деталям. Вершины, в которые не входит ни одного ребра, соответствуют изделиям, из которых не выходит ни одного ребра, – деталям, а остальные – узлам. Ребра графа отражают отношение «изделие/узел  $A$  включает узел/деталь  $B$ », а их веса – количество.

В книге [6] впервые показано, что если обе спецификации представить в виде матриц, элементы которых принадлежат алгебраической системе  $\langle R^+; +, \times \rangle$ , то технологическая спецификация может быть получена из конструкторской как результат вычисления матричного алгебраического выражения. В [7; 8] показано, что матрица технологической спецификации может быть вычислена как транзитивное замыкание матрицы конструкторской спецификации, то есть как сумма ее отличных от нуля-матрицы степеней. Если матрица конструкторской спецификации настолько велика, что применение технологии in-методу нецелесообразно, или она сильно разрежена, то возможно использование файловой модели данных, так как в этом случае операции умножения матриц соответствует операция слияния нестрого упорядоченных файлов, а операции сложения – операция слияния строго упорядоченных файлов. В этом случае матричная и файловая модели данных изоморфны. Далее рассматривается возможность решения задачи разузлования в реляционной модели данных.

### **Реализация операции слияния строго упорядоченных файлов в реляционной алгебре**

Используемая в задаче разузлования операция слияния строго упорядоченных файлов имеет вид:

$$f(X_{K^*}, Y_{K^*}) = \begin{cases} Y_{K^*}, & \text{если } X_{K^*} = \Theta_{K^*} \\ X_{K^*}, & \text{если } Y_{K^*} = \Theta_{K^*} \\ X_{K^*} \oplus Y_{K^*}, & \text{если } X_{K^*} \neq \Theta_{K^*}, Y_{K^*} \neq \Theta_{K^*} \end{cases}$$

Здесь классы эквивалентности файлов операндов состоят из единственных записей вида

$X_{K^*} / Y_{K^*}$  (Изделие\_Узел, Узел\_Деталь, Количество).

В том случае, когда классы эквивалентности с одинаковыми значениями ключей Изделие\_Узел и Узел\_Деталь присутствуют в обоих файлах, в файл-результат помещается запись, содержащая ключи из первого файла операнда и поле  $\text{Количество} = X_{K^*} \cdot \text{Количество} + Y_{K^*} \cdot \text{Количество}$ . В противном случае в файл-результат помещается запись из того файла, в котором она имеется.

В реляционной алгебре такая операция отсутствует. Ни одна из имеющихся бинарных операций соединения: LEFT/RIGHT/INNER JOIN не реализует слияние строго упорядоченных файлов по требуемому алгоритму. Поэтому ее необходимо реализовать при помощи имеющихся в алгебре операций.

Особенность реляционной алгебры состоит в том, что все отношения (таблицы в базах данных) рассматриваются как множества, то есть не могут содержать двух одинаковых элементов: кортежей (строк таблиц). В таблице 1 (а) приведен результат выполнения стандартной операции UNION над таблицами, содержащими одинаковые строки. После выполнения этой операции в таблице-результате вместо двух таких строк будет одна.

Однако современные процедурные языки манипулирования данными, такие как Transact-SQL или PL/pgSQL, включают операцию UNION ALL, которая позволяет построить нестрого упорядоченную по составному ключу <Изделие\_Узел, Узел\_Деталь> таблицу (мультимножество), которая соответствует нестрого упорядоченному файлу. После выполнения операции UNION ALL выполняется операция сжатия с групповой операцией суммирования, в результате которой получается строго упорядоченная таблица. Эти действия легко реализуются в названных языках манипулирования данными простыми возвращаемыми в таблицу функциями, приведенными в листингах 1 и 2.

*Листинг 1.* Вспомогательная функция полного объединения таблиц-операндов

```
ALTER FUNCTION [dbo].[StrongMergeUnionAll] ()
RETURNS TABLE
AS
RETURN
(
 SELECT Op1.A, Op1.B FROM Op1
 UNION ALL
 SELECT Op2.A, Op2.B FROM Op2
)
```

*Листинг 2.* Функция, реализующая слияние строго упорядоченных таблиц

```
ALTER FUNCTION [dbo].[StrongMerge]()
RETURNS TABLE
```

```

AS
RETURN
(
 SELECT UnionAll.A, SUM(UnionAll.B) AS B
 FROM dbo. StrongMergeUnionAll () AS UnionAll
 GROUP BY UnionAll.A ORDER BY Res.A
)

```

Результаты выполнения этих функций приведены в таблице 1 в разделах *b)* и *c)*.

Таблица 1

| Операнд<br>1 |   | Операнд<br>2 |   | Результат<br>UNION |   | Операция StrongMerge                 |   |           |   |
|--------------|---|--------------|---|--------------------|---|--------------------------------------|---|-----------|---|
|              |   |              |   |                    |   | Промежуточный результат<br>UNION ALL |   | Результат |   |
| A            | B | A            | B | A                  | B | A                                    | B | A         | B |
| a            | 1 | a            | 2 | a                  | 1 | a                                    | 1 | a         | 3 |
| b            | 2 | b            | 2 | a                  | 2 | a                                    | 2 | b         | 4 |
| c            | 3 | c            | 3 | b                  | 2 | b                                    | 2 | c         | 6 |
| d            | 4 | e            | 7 | c                  | 3 | b                                    | 2 | d         | 4 |
|              |   |              |   | d                  | 4 | c                                    | 3 | e         | 7 |
|              |   |              |   | e                  | 7 | c                                    | 3 |           |   |
|              |   |              |   |                    |   | d                                    | 4 |           |   |
|              |   |              |   |                    |   | e                                    | 7 |           |   |

*a)*

*b)*

*c)*

Исходя из сказанного можно сделать вывод, о том, что формула для задачи разузлования в реляционной модели данных имеет вид:

$T = StrongMerge(T, C^i)$ , где  $C$  – конструкторская спецификация,  $T$  – технологическая спецификация,  $C^i = C^{i-1} Inner Join C$ .

Первоначально таблица  $T$  совпадает с таблицей  $C$ , а процесс возведения в степень таблицы  $C$  завершается тогда, когда не содержит записей таблица  $C^{K+1}$ .

### Соответствие моделей данных

Аксиома слияния при строгой упорядоченности агрегатов данных имеет вид:

$${}^{so}(\mathbb{K}_{A_1, \dots, A_k})R_1(A_1, \dots, A_k, B_{k+1}, \dots, B_m) \oplus {}^{so}(\mathbb{K}_{A_1, \dots, A_k})R_2(A_1, \dots, A_k, C_{k+1}, \dots, C_n) = \{(a_1, \dots, a_k, f(b_{k+1}, \dots, b_m, c_{k+1}, \dots, c_n))\}. \quad (1)$$

Эта аксиома дает описание агрегата данных, который должен быть получен из агрегатов данных  $R_1(A_1, \dots, A_k, B_{k+1}, \dots, B_m)$  и  $R_2(A_1, \dots, A_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$  после применения операции  $f(b_{k+1}, \dots, b_m, c_{k+1}, \dots, c_n)$  к их элементам с одинаковыми значениями  $a_1, \dots, a_k$ . Новый агрегат данных формируется в результате применения операции  $(\oplus)$  к этим агрегатам данных. Подставляя в нее используемые

для решения задачи разузлования термы реляционной модели данных, получим следующую формулу, интерпретирующую формулу (1).

<sup>so</sup>(К (Изделие\_Узел, Узел\_Деталь) $R_1$ (Изделие\_Узел, Узел\_Деталь, Количество))

*StrongMerge*

<sup>so</sup>(К (Изделие\_Узел, Узел\_Деталь) $R_2$ (Изделие\_Узел, Узел\_Деталь, Количество)) =  
{(Изделие\_Узел, Узел\_Деталь,  $R_1$ .Количество +  $R_2$ .Количество)}.

Но в матричной модели данных формула (1) интерпретируется как сложение матриц. Следовательно, как показано в [9], эти модели данных в рассматриваемом случае эквивалентны. В алгебраическом смысле они гомоморфны, так как операции сложения матриц соответствует операция *StrongMerge*, полученная как композиция двух базовых операций реляционной модели данных.

**Заключение.** В статье рассмотрен метод доказательства соответствия моделей данных в том случае, когда сигнатуры операций в этих моделях не совпадают. Особенность ситуации показана на реальном примере из широко распространенной предметной области – управления производством. Показано, что задачи, для решения которых необходима операция слияния строго упорядоченных файлов (сложения матриц), не могут быть реализованы одной операцией сигнатуры реляционной алгебры. Приведен достаточно простой метод построения этой операции посредством композиции двух реляционных операций. Показано, что такая операция позволяет доказать эквивалентность, в аксиоматическом смысле, и гомоморфизм, в алгебраическом смысле, моделей данных.

## Литература

1. Мунерман В.И., Мунерман Д.В. О соответствии моделей данных и моделей вычислений // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2021. Вып 22. С. 146-152.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970.
3. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, №. 4. С. 3-16.
4. Мубаракзянов Г.М., Дылевский И.В. Математическая теория задач разузлования сборочных единиц // Вестник Казанского государственного технического университета им. АН Туполева. 2008. №. 1. С. 83-86.
5. Салмин П.С. Разузлование ресурсных спецификаций на платформе 1С: ПРЕДПРИЯТИЕ / Ред. кол. Ю.А. Кузнецов, О.В. Капитанова. 2022. С. 141.
6. Вожоньи А. Научное программирование в промышленности и торговле / пер.с англ. В.В. Головинского, Е.М. Четыркина; вступ. ст. А.Я. Боярского. М.: Иностранная литература, 1963. 388 с.

7. Левин Н.А., Мунерман В.И. Алгебраический подход к оптимизации обработки информации // Системы и средства информатики. 2005. Т. 15, № 2. С. 282-297.

8. Емельченков Е.П., Левин Н.А., Мунерман В.И. Алгебраический подход к оптимизации разработки и эксплуатации систем управления базами данных // Системы и средства информатики. 2009. Т. 19, № 2. С. 114-137.

9. Munerman V., Munerman D. An axiomatic approach to the data models formalization for mass data processing // Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). IEEE, 2020. С. 1996-2000.

**V.I. Munerman, D.V. Munerman**  
Smolensk State University

## **THE PROOF OF THE DATA MODELS CORRESPONDENCE EXAMPLE**

**Keywords:** *multidimensional matrix algebra; relational algebra, data model.*

**Abstract.** *The proof of the mapping of data models plays an important role in solving the problem of choosing or designing a hardware and software system for solving a specific applied problem. Since data models are universal polybasic algebraic systems, it is necessary to prove the correspondence of both base sets and operations. In some cases, a situation arises when an operation defined in one data model is missing in another model. In this case, it is necessary to find the possibility of modeling this operation by the composition of operations of the model with which the correspondence is established. As an example, the article considers the establishment of a correspondence between multidimensional-matrix, file and relational data models by the operation of merging strictly ordered files. A fairly simple method for constructing this operation by composing two relational operations is presented. It is shown that such an operation allows one to prove the equivalence, in the axiomatic sense, and the homomorphism, in the algebraic sense, of data models.*

**К.С. Николаев**

*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.891.2

## **ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

**Ключевые слова:** *поисковый образ, модель фильтрации объектов, интеллектуальные рекомендательные системы.*

*В статье приводится вариант постановки задачи исследования и разработки модели фильтрации объектов для интеллектуальных рекомендательных систем. Кроме того, разобран второй этап решения данной задачи.*

### **1. Постановка задачи**

Задачу поиска рекомендации следует интерпретировать следующим образом. Пусть имеется набор входных параметров (характеристик)  $X = (x_1, \dots, x_{nX})$ . В свою очередь,  $x_i = (k_i^x, v_i^x)$  ( $k_i^x \neq k_\mu^x$ ) является парой значений, в которой  $k_i^x \in K^x$  – ключ (категориальная величина), а  $v_i^x \in V^x$  – значение (числовая величина).

Тогда по входным параметрам  $X$  требуется определить (рекомендовать) конечное множество  $C \subset \dot{Y}$ , состоящее из наперед заданного количества ( $c \neq 0$ ) релевантных объектов  $Y \in \dot{Y}$ , определяющихся схожим образом с  $X$ , то есть:  $Y_i = (y_1, \dots, y_{nX})$ , где  $i = (1, \dots, c)$ ;  $y_j = (k_j^y, v_j^y)$  ( $k_{j\tau}^y \neq k_{j\mu}^y$ );  $k_j^y \in K^y$ ;  $v_j^y \in V^y$ .

Решение описанной задачи выполняется в два этапа (рассматривается только первый).

1. Рекомендация параметров: на основе  $X$  вывести множество  $Y^\theta$ , состоящее из элементов вида  $y = (k^y, v^y)$ , то есть получение образа;
2. Рекомендация объектов: по  $Y^\theta$  получить множество  $C$ , то есть поиск объектов, схожих с полученным образом.

Решение первого этапа было представлено в [2].

### **2. Рекомендация объектов. Нахождение рекомендаций по образу**

После выполнения первого этапа получено множество  $Y^\theta$ , состоящее из элементов вида  $y_\theta = (k_\theta^y, v_\theta^y)$ , где  $k_i^y \neq k_j^y$ . Полученное множество не обязательно (чаще всего и не должно) совпадает с каким-либо объектом  $Y$ . Соответственно, на данном этапе из множества всевозможных объектов  $Y(\dot{Y})$  требуется выделить подмножество  $C$  релевантных рекомендаций. Для этой задачи предлагается следующее решение.

До того как анализировать числовые значения, следует рассмотреть категориальные величины. Так как для них не определено даже отношение порядка, дальнейшая модель к ним неприменима. Соответственно, требуется исключить все  $y_\theta$ , содержащие категориальные  $v_\theta^y$ . Для  $Y$  следует определить новое  $\dot{Y}$ , применяя фильтрацию по исключенным значениям по логическому оператору «И» (если значение на самом деле является коллекцией, то применить оператор «И» над логическим выражением с «ИЛИ»: «И» (значение\_1 «ИЛИ» значение\_2 «ИЛИ» ...)).

Далее следует рассматривать  $\dot{Y}$  как множество всевозможных объектов  $Y$  после фильтрации.

На первом этапе необходимо провести нормировку имеющихся числовых значений  $V^y$ . Для этого следует разбить  $V^y$  на подмножества

вида  $V^k = \left[ V_{k^y}^y \right] \cup \{v_\theta^y \sim k^y\}$  (здесь оператор « $\sim$ » следует

интерпретировать как «соответствующий») так, чтобы элементы  $V^y$ , дополненные значениями из  $Y^\theta$  соответствовали связанным с ними  $k^y$ .

Для каждого подмножества  $V^k$  выполняется минимаксная нормализация, то есть:

$$v'_i \in V^k = \frac{v_i - V_{min}^k}{V_{max}^k - V_{min}^k},$$

где  $V_{max}^k, V_{min}^k$  – максимальное и минимальное числовое значение из  $V^k$ .

После нормализации будут получены  $y_\theta = (k_\theta^y, v_\theta^y)$  и  $\dot{Y}'$ .

Следующим шагом является получение значимости параметров  $k^y$ .

Под значимостью в данном случае следует понимать некоторый коэффициент (принадлежащий  $[0; 1]$ ) для указанных параметров, который будет являться весом значения для соответствующего параметра. Способ получения веса не имеет значения для поведения модели, однако для конкретных предметных областей следует подобрать подходящий метод получения весов. В частности, веса можно установить:

- исходя из частоты использования параметра;
- исходя из результатов работы нейросетевых моделей, применимых к данной предметной области;
- вручную.

В данной работе вес будет определять частота использования параметра. Для получения значимостей параметров необходимо построить множество из элементов вида  $(k^y, \mu^c)$ , где  $\mu^c$  – количество использований параметра. Во избежание путаницы, частоту необходимо вычислять не как величину, обратную количеству, а с помощью минимаксной нормировки с добавлением 1 к числителю и знаменателю:

$$\mu_k^y = \frac{\mu^c - \mu_{min}^c + 1}{\mu_{max}^c - \mu_{min}^c + 1}.$$

Тогда значимость часто используемых параметров будет стремиться к 1, а малоиспользуемых – к 0, но не достигнет 0.

Множество  $K^y$  состоит из непустых неповторяющихся элементов  $k^y$ , являющихся категориальными величинами (размер этого множества –  $N$ ). Тогда можно построить евклидово пространство  $R^N$  так, чтобы принять  $k_i^y$  ( $i = (1, \dots, N)$ )  $i$ -м измерением этого пространства.

В полученном пространстве следует расположить нормированные элементы  $Y^\theta$  и  $\dot{Y}'$  в виде точек с координатами  $\{v'_{k_1}, v'_{k_2}, \dots, v'_{k_N}\}$ . Если  $Y^\theta$

или  $\dot{Y}'$  не содержат в себе  $y'$  с определенным  $k^y$ , то значение этой координаты следует принять равным нулю, то есть  $v_k^{y'} = 0$ .

В таком указанном пространстве между обозначенными  $Y'^{\theta}$  и имеющимися  $\dot{Y}'$  можно найти расстояние, согласно евклидовой метрике:

$$\rho = d(y'_{\theta}, y') = (y'_{\theta} - y') = \sqrt{\sum_{i=1}^N (v_{\theta k_i}^{y'} - v_{k_i}^{y'})^2}, \forall y' \in \dot{Y}'.$$

Тогда множество рекомендаций  $S$  можно выделить с помощью «схожести»  $y'_{\theta}$  и  $y'$ . Схожими можно считать такие  $y'$ , которые находятся вблизи  $\dot{Y}'_{\theta}$ , согласно расстоянию между этими точками по евклидовой метрике. Однако стоит заметить следующее: если разность множеств использованных  $k^y$  в указанных объектах не пуста (то есть либо в  $y'_{\theta}$  находятся характеристики, которых нет в  $y'$ , либо наоборот), расстояние между такими объектами согласно метрике описанного пространства будет велико, хотя нет оснований полагать, что такая рекомендация не должна войти в  $S$ .

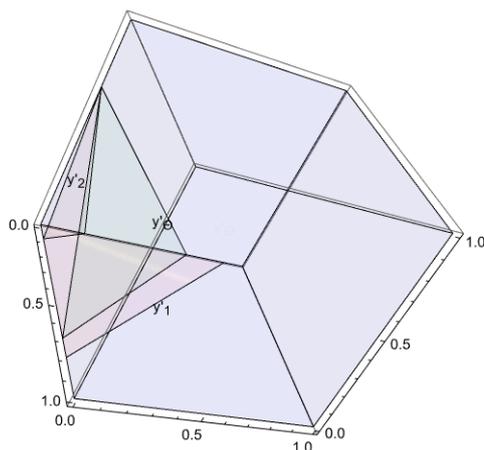


Рис. 1. Пример пространства объектов для трех измерений

Во избежание указанной проблемы в данном пространстве следует рассмотреть не точки, а фигуры. Вершины этих фигур будут находиться по координатам вида:  $(0, \dots, v_{k_i}^{y'}, \dots, 0)$ , где  $i = (1, \dots, N)$ . Иначе говоря, точки будут находиться на осях пространства согласно своим значениям.

Исходя из того, что ранее была получена значимость параметров, для получившихся фигур (рис. 1) можно найти центр масс, где масса – это значимость (вес). Принимая фигуры как систему частиц, получим следующее:

$$R_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \mu_{k_i}^{y'} \times v_{k_i}^{y'},$$

где  $M$  – суммарная значимость параметров;  $R_k$  –  $k$ -я координата центра масс. Так как суммарная масса для всех фигур в пространстве не

меняется и в дальнейших вычислениях не влияет на результат, ей можно пренебречь. Тогда формула координаты центра масс примет вид:

$$R_k = \sum_{i=1}^N \mu_{k_i}^y \times v_{k_i}^y.$$

По получившимся координатам определяются новые расстояния:

$$\rho_R = d(y'_{\theta R}, y'_R) = (y'_{\theta R} - y'_R) \left( = \sqrt{\sum_{i=1}^N (R_{\theta k_i}^y - R_{k_i}^y)^2} \right), \forall y' \in \dot{Y}.$$

Заключительным шагом является расположение объектов  $\dot{Y}$  в порядке возрастания расстояний  $\rho_R$  и заполнением  $C$  первыми  $c$  объектами из  $\dot{Y}$ , если  $(\dot{Y}) \geq c$ . Иначе  $C = \dot{Y}$ .

### Литература

1. Singh P.K. et al. Recommender systems: an overview, research trends, and future directions // International Journal of Business and Systems Research. 2021. Vol. 15. No. 1. P. 14-52.

2. Николаев К.С. Исследование и разработка модели и алгоритма получения поискового образа для интеллектуальных рекомендательных систем // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXIII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. Вып. 23. С. 156 -161.

**K.S. Nikolaev**

National Research University of Electronic Technology.

## RESEARCH AND DEVELOPMENT OF A MODEL FOR DATA OBJECTS SELECTION FOR INTELLIGENT RECOMMENDER SYSTEMS

**Keywords:** Search Sample, Data Selection Model, Intelligent Recommender System.

**Abstract.** *This paper presents a variant of the problem statement of research and development of a model for data selection for intelligent recommender systems. In addition, the article analyzes the second stage of solving this problem.*

**В.В. Перевозникова, В.В. Сенчилов**  
Смоленский государственный университет

УДК 004.424

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАЗРАБОТКИ КРОССПЛАТФОРМЕННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ СЕТЕВОЙ ТОРГОВЛИ

Ключевые слова: *ASP.NET Core, информационная система, веб-приложение, информационная модель, кроссплатформенная система, контроллер.*

*В статье рассмотрены некоторые особенности разработки прикладной информационной системы с применением средств ASP.NET Core. Описаны основные атрибуты таблиц базы данных информационной системы. Представлены варианты интерфейса приложения на базе ряда платформ.*

## **Введение**

Успешному бизнесу необходимо, чтобы организационные, финансовые данные, а также статистическая информация должным образом сохранялись в виде базы данных качественной информационной системы. Сегодня никто не может представить себе ведение бизнеса без помощи вычислительной техники. Внедрение простейшей информационной системы в делопроизводство имеет множество преимуществ и помогает сотрудникам предприятия справляться с внешними и внутренними проблемами, с которыми они сталкиваются каждый день, а также принимать стратегически корректные решения. Также использование Интернета для бизнеса в настоящее время является одним из основных способов организации сетевой торговли товарами и услугами.

Однако необходимо отметить, что практически все предприятия сталкиваются с резким замедлением рабочих процессов из-за проблем с надежностью и точностью хранения данных. Эта проблема часто возникает в системах, которые легкодоступны, имеют стандартизированный интерфейс и ориентированы на универсальность в способах хранения информации с большой точностью. Поэтому определение особенностей разработки кроссплатформенного приложения для организации поддержки сетевого бизнеса является актуальной задачей.

Одним из способов решения указанных проблем становится разработка веб-приложения на основе ASP.NET Core [1]. Это кроссплатформенное продолжение платформы ASP.NET, которое может быть развернуто на таких ОС, как Windows, Mac OS, Linux. ASP.NET Core имеет следующие достоинства за счет маленькой контактной зоны приложения: высокая защищенность, минимальное обслуживание и усовершенствованная эффективность. Также платформа ASP.NET Core позволяет создать динамические веб-страницы, что подтверждает актуальность ее использования на данный момент.

## **Описание проекта**

Разрабатываемая информационная система представляет собой интернет-магазин саженцев как популярных, так и достаточно редких растений. Рассмотрим основные требования к приложению:

1) программа должна содержать информацию о саженцах, об их категориях, о заказах и о покупателях;

2) предусмотрена возможность добавления товара в корзину, перехода с одной страницы на другую, а также фильтрация товаров по определенному признаку;

3) саженцы должны иметь следующую характеристику: код, название саженца, описание, фото, цена открытой корневой системы, цена закрытой корневой системы, наличие в магазине, является ли товар лучшим в данный период времени, к какой категории товар относится;

4) категории саженцев должны иметь следующие атрибуты: код, название категории;

5) заказы имеют следующую характеристику: код, название саженца, цена, фото;

6) атрибуты покупателей: код, фамилия и имя, номер телефона, пожелания к заказу.

При выборе площадки для разработки учитывалось, что приложения ASP.NET Core содержат фреймворк MVC, который связывает эффективность MVC, Web API и Web Pages. Такие приложения имеют следующую архитектуру: модель – представление – контроллер (рис. 1).

В модели описываются данные, а также логика, непосредственно связанная с этими данными. Объекты моделей хранятся в базе данных.

Пользовательский интерфейс отображает представление. Как правило, это html-страница, которую видит пользователь, когда заходит на сайт. Оно также может содержать в себе логику, связанную с отображением данных [2].

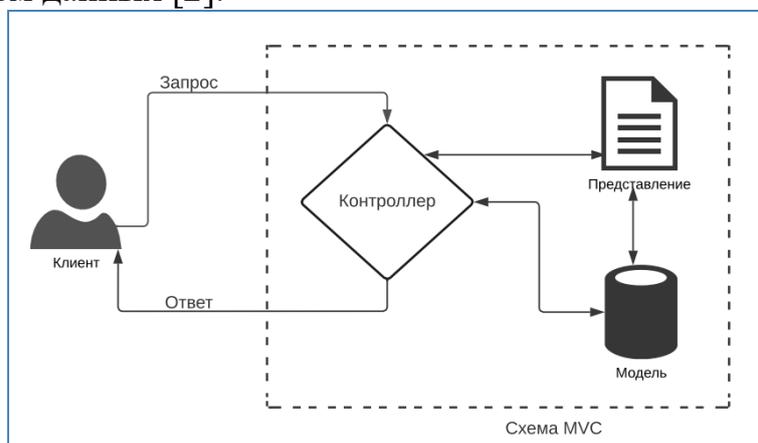


Рис. 1. Архитектура ASP.NET Core

Контроллер является центральным компонентом, который обеспечивает связь между пользователем и приложением, представлением и базой данных. Контроллер обрабатывает запросы пользователей и отправляет определенный вывод.

Само приложение разрабатывалось в среде Visual Studio Community 2019 на платформе ASP.NET. Оно построено по схеме Model-View-Controller. Информация хранится в Microsoft SQL Server.

Информационная база системы состоит из четырёх основных таблиц (см. табл. 1).

Таблица 1.

Структура базы данных

| Название таблицы | Атрибуты                                                                              | Описание           |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Sapling          | id, name, description, img, pricePot, priceGarden, available, isFavourote, categoryID | Саженцы            |
| Category         | id, categoryName, description                                                         | Категории саженцев |
| ShopSaplingItem  | id, saplingid, price                                                                  | Заказы клиента     |
| Order            | id, name, phone, wish                                                                 | Клиенты            |

Интерфейс основной платформы (см. рис. 2) отражает основные характеристики информационной системы и связи между ними. Так, в разработанном примере ИС действия пользователя были реализованы в виде функциональных веб-страниц.

Клиент может осуществлять навигацию по категориям саженцев, просматривать информацию об определенном товаре и добавлять его в корзину. После добавления товара покупатель может оформить свой заказ или удалить его [3].

В любую информационную систему необходимо вносить различные новые данные, редактировать их или удалять. Всё это можно легко сделать с помощью блока администратора, вход в который доступен не всем пользователям веб-приложения, так как административная часть является защищенной страницей приложения.

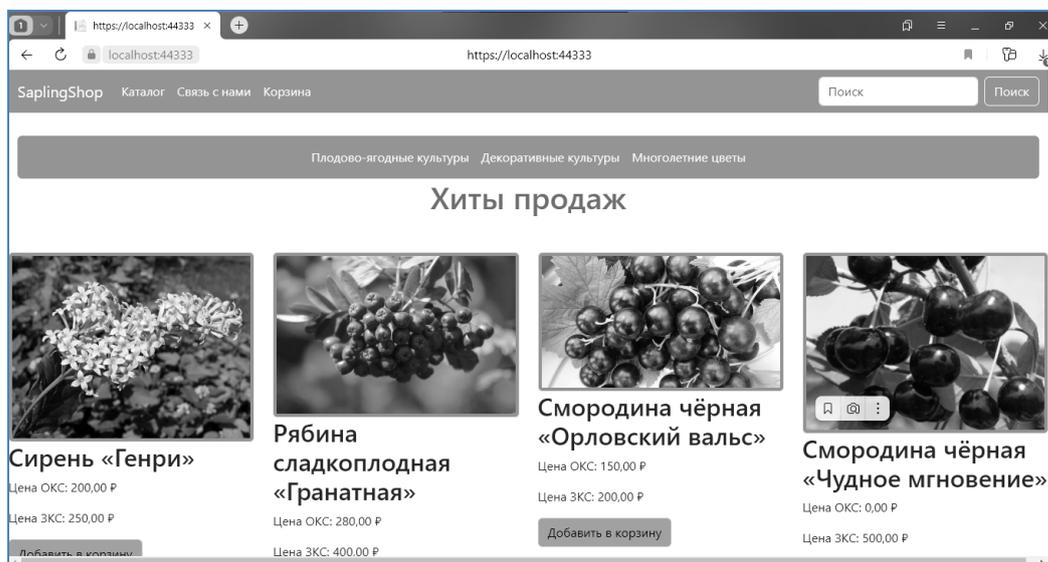


Рис. 2. Интерфейс главной страницы веб-приложения

Как уже было отмечено ранее, платформа ASP.NET Core является кроссплатформенной, что позволяет пользователю взаимодействовать с приложением с любого устройства и с любой операционной системой.

Ниже представлен пример работы веб-приложения на мобильном устройстве (см. рис. 3).



Рис. 3. Интерфейс приложения на мобильном устройстве

Для удобства пользователей все основные блоки выделены в отдельные объекты навигации [4], а приложение можно запустить с любого устройства. Функциональная возможность, доступная только администратору, способствует более эффективному управлению информационной системой.

### **Заключение**

В данной работе использовались следующие технологии веб-программирования: C#, HTML, MVC. Разработанное приложение было апробировано на сотрудниках магазина, а также на небольшой группе потенциальных покупателей. Информационная система позволила упростить работу пользователей с основной информацией приложения, что подтвердило предположение о полезности подобных систем. Преимуществом приложения является его доступность, а ряд полученных рекомендаций позволяет говорить о постепенной модернизации в процессе работы.

### **Литература**

1. Шарапов Н.Р. Архитектура технологии разработки веб-приложений asp.net core mvc // Mathematics. 2018. № 13(25). С. 30-31.
2. Katunina N.V., E.A. Luneva. Marketing information system as the basis of company activity // Omsk Scientific Readings 2019: материалы Третьей Всероссийской научной конференции, Омск, 02–06 декабря 2019 года. Омск: Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, 2019. Р. 172-174.
3. Сенчилов В.В., Григорьева Г.М., Ходченков В.Ю. О результатах внедрения в медицинскую практику методов интеллектуального анализа данных // Образование

в цифровую эпоху: сборник статей по материалам Международной научно-практической конференции преподавателей, студентов, аспирантов, докторантов и заинтересованных лиц, Нижний Новгород, 10–11 декабря 2019 года. Нижний Новгород: Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина, 2019. С. 183-186.

4. Сенчилов В.В., Тверской Е.А. Об одном способе разработки справочного мобильного приложения по физике для Android // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Смоленск, 22 апреля 2022 года. Вып. 6. Киров: Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2022. С. 167-173.

**V.V. Perevoznikova, V.V. Senchilov**  
Smolensk State University

## **ON THE FEATURES OF DEVELOPING A CROSS-PLATFORM INFORMATION SYSTEM FOR SUPPORTING NETWORK TRADING**

**Keywords:** *ASP.NET Core, information system, web application, information model, cross-platform system, controller.*

**Abstract.** *The article presents some features of the development of an applied information system using ASP.NET Core tools. The main attributes of information system database tables are described. Application interface options based on a number of platforms are presented.*

**Т.А. Самойлова, Ю.А. Грибер**  
Смоленский государственный университет

УДК 004.9

## **АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕСТА НАРУШЕНИЙ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ**

**Ключевые слова:** *тест Фарнsworthа – Манселла, вектор цветового различия, пространство CIELUV, момент инерции, Python.*

*В статье представлены результаты создания компьютерной программы, предназначенной для оценки нарушений цветового зрения средствами теста Фарнsworthа – Манселла. В алгоритме программы использовано вычисление момента инерции для векторов цветового различия, формируемого в пространстве CIELUV. Испытания, проведенные на группе участников из 80 человек, показали надежность и эффективность программы.*

## **Введение**

Оценка нарушений цветового зрения представляет собой комплекс сложных диагностических процедур, которые выполняются с помощью специальных инструментов (тестов). Одним из широко используемых является тест Фарнsworth – Манселла (FM 100 Hue Test) [1]. В этом тесте используется набор из 85 цветных фишек с оттенками от красного до синего и от зеленого до желтого, расположенных в четырех пеналах. Крайние фишки в каждом из пеналов закреплены. Все остальные подвижны. Испытуемого просят установить относительное положение каждой фишки, сопоставив ее цвет с соседними таким образом, чтобы переход от цвета фишки, закрепленной на одном конце пенала к цвету фишки на другом конце получился как можно более плавным. Все фишки в пеналах пронумерованы от 1 до 85. Количество смещений и расстояние между правильным положением (номером) фишки и тем, что выбрал респондент, дают возможность получить объективную оценку дефицита цветового зрения. В 1988 году Вингрис и Кинг-Смит [2] разработали методику количественной оценки результатов теста Фарнsworth – Манселла, базирующуюся на методе момента инерции, позволяющем вычислить показатель угла (тип потери цвета), S-индекс (показатель случайности расположения фишек) и C-индекс (показатель серьезности нарушения цвета). В данной статье предлагается программный подход к диагностике нарушений цветового зрения, основанный на данной методике, который автоматизирует и упрощает процедуру тестирования, позволяя практически моментально анализировать результаты. Его использование не ограничивается только медицинской или лабораторной средой, поскольку программное приложение может быть развернуто на мобильных устройствах и онлайн. Программа, описание которой приведено в статье, имеет два режима работы: первый позволяет задать последовательность фишек, предварительно установленных испытуемым, вручную. Это дает возможность врачу или администратору оперативно вносить в исходную последовательность фишек со спектральной прогрессией цветов допущенные испытуемым ошибки. Второй режим полностью организует выполнение тестирования на компьютере, избавляя от необходимости в наборе номеров фишек и заменив его соответствующим пользовательским интерфейсом.

## **Структурная схема программы**

Разработанная программа содержит две основные ветви с модулями обработки данных (рис. 1), соответствующие указанным режимам работы.

Правая ветвь данной схемы позволяет администратору методом Drag & Drop («перетащил и бросил») ввести полученное в результате

тестирования расположение фишек (рис. 2), выполнить полный анализ и количественную оценку теста с последующим выводом набора отчетов.

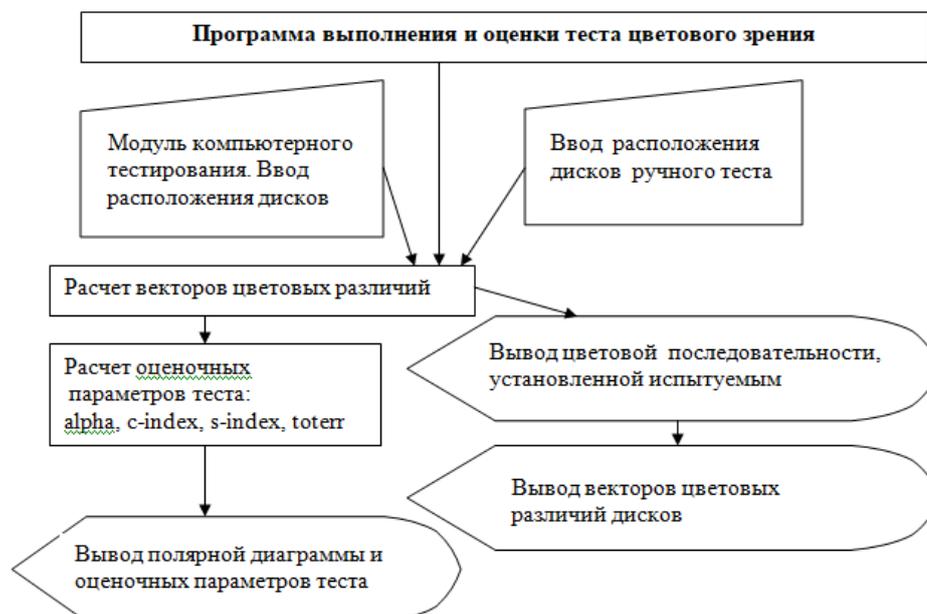


Рис. 1. Структурная схема программы тестирования цветового зрения



Рис. 2. Интерфейс администратора для ввода результатов тестирования

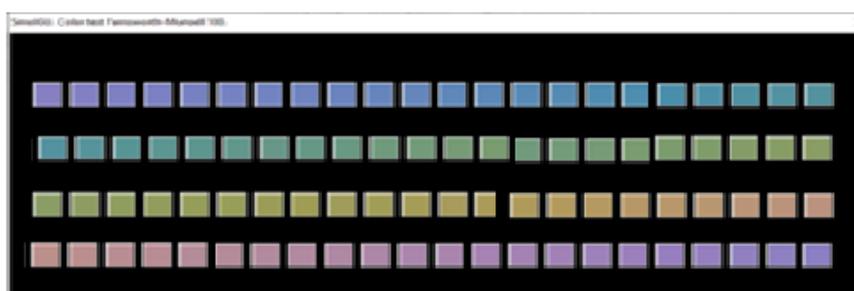


Рис. 3. Интерфейс компьютерного тестирования

Модули другой ветви реализуют собственно компьютерное тестирование, оценку основных показателей нарушения цветового зрения и вывод результирующего отчета. Пользовательский интерфейс модуля ввода представляет собой четыре ряда (пенала) фишек. Начальное состояние – цвета расположены случайным образом. Состояние цветового зрения определяется по способности испытуемого

размещать цветные фишки в правильном порядке для всех групп оттенков (рис. 3).

### Расчет векторов цветовых различий

Техника оценки результатов панельного цветового теста выполняется в соответствии с метрикой цветового различия, которая позволяет получить точные количественные параметры нарушений цветового зрения. Вектор цветового различия (CDV – Color Difference Vector) вычисляется для всех пар соседних фишек в пространстве CIELUV, разработанном Международной комиссией по освещению (CIE), как простое в вычислении преобразование цветового пространства CIE XYZ. Исходные данные для расчетов следующие:

- последовательность номеров фишек C1, C2, ..., C85, установленная испытуемым в ходе выполнения теста.
- координаты цветового пространства, соответствующие оттенкам выбранных фишек  $U(C1), U(C2), \dots, U(C85)$  и  $V(C1), V(C2), \dots, V(C85)$ .

На рисунке 4 приведены графики, соответствующие исходным данным двух испытуемых – с идеальным цветовым зрением (а) и с нарушениями (б).

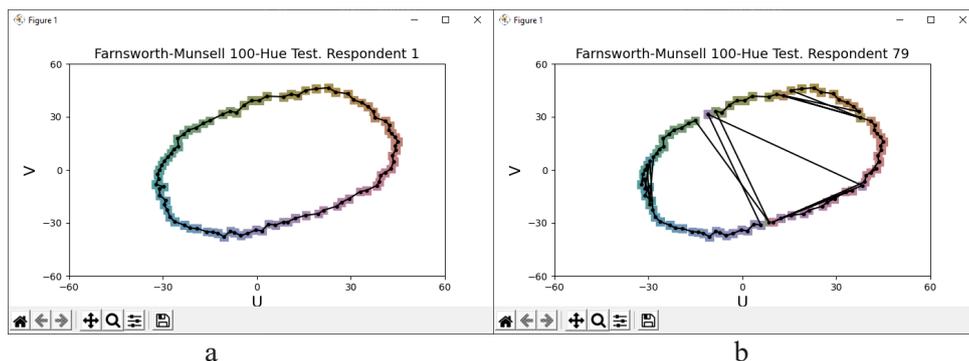


Рис. 4. Цветовые последовательности, установленные испытуемыми

Вычисление значений координат вектора цветового различия и его размера выполняется в соответствии с отношениями:

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= U(C_i) - U(C_{i-1}), \\ \Delta V_i &= V(C_i) - V(C_{i-1}), \\ S_i &= \sqrt{(\Delta U_i)^2 + (\Delta V_i)^2}, \end{aligned}$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, 85$ .

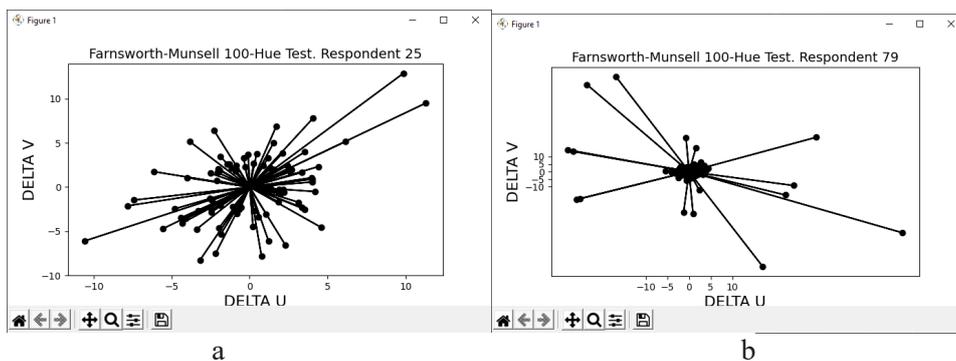


Рис. 5. Векторы цветовых различий

На рисунке 5 приведены графики векторов, соответствующих результатам выполнения теста испытуемым с идеальным цветовым зрением (а) и с нарушениями (b).

### **Вычисление момента инерции и оценочных параметров теста**

Количественная оценка результатов цветового теста использует общий момент инерции для вектора цветового различия. Векторы, изображенные на рисунке 5, имеют тенденцию выстраиваться вдоль общей оси для людей с цветовыми отклонениями (b), тогда как векторы людей с нормальным зрением (а) показывают большой угловой разброс. Чтобы количественно оценить расположение векторов, применяется метод момента инерции. Этот метод позволяет представить графики в виде жестких фигур, где каждый конец (голова) вектора имеет единичную массу и соединен с началом координат невесомым жестким стержнем. Если большинство длинных векторов лежат близко к горизонтали, то момент инерции будет относительно велик для вертикальной оси, потому что большинство векторов (их массы) далеко смещены от этой оси. Соответственно, их момент инерции будет мал для горизонтальной оси. Оба момента инерции можно рассчитать для всей конструкции из 85 «стержней».

Вместо каждого момента инерции можно использовать соответствующий «радиус вращения», который определяется как расстояние от начала координат, создающее тот же момент инерции для общей массы (85 единиц) системы. Преимущество использования радиусов вращения по сравнению с моментами инерции заключается в том, что они выражены в тех же единицах, что и векторы цветового различия (рис. 5). Отношения для расчета радиусов вращения вокруг осей  $\Delta U$  и  $\Delta V$ :

$$U^2 = \sum_{i=1}^{85} (\Delta U_i)^2, \quad V^2 = \sum_{i=1}^{85} (\Delta V_i)^2.$$

Используя эти отношения и путем дифференцирования момента инерции, можно получить числовые параметры нарушений цветового зрения (см. подробнее: [2]). Угол смещения вектора цветового различия соответствует типу нарушения; минимальный и максимальный радиусы вращения этого угла показывают диапазон нарушения; суммарная ошибка (S-индекс) является показателем случайности расположения фишек; C-индекс показывает серьезность нарушений. Далее приведены расчетные формулы параметров.

1) Угол смещения или угловой размер:

$$A_0 = \arctan(2 * UV / D) / 2,$$

где

$$UV = \sum_{i=1}^{85} (\Delta U_i * \Delta V_i), \quad D = U^2 - V^2.$$

Данный угловой размер обеспечивает измерение типа потери цвета. Протановые (патологическое восприятие красного цвета) углы больше

нуля, а дейтановые (аномальное восприятие зелёного цвета) углы меньше нуля. Например, угол CDV  $0^\circ$  или  $-3^\circ$  классифицирует дефекты как протановые или дейтановые.

2) Минимальный и максимальный радиусы вращения (major moment, minor moment) соответствуют минимальному и максимальному моментам инерции для CDV:

$$\begin{aligned} \min R &= U^2 \cdot \sin(A_0)^2 + V^2 \cdot \cos(A_0)^2 - 2 \cdot UV \cdot \sin(A_0) \cdot \cos(A_0), \\ \max R &= U^2 \cdot \sin(A_1)^2 + V^2 \cdot \cos(A_1)^2 - 2 \cdot UV \cdot \sin(A_1) \cdot \cos(A_1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + 1.5708, \text{ если } A_0 < 0, \\ A_1 &= A_0 - 1.5708, \text{ если } A_0 > 0. \end{aligned}$$

3) Суммарная ошибка расчета (total error):

$$\text{Total Error} = \sqrt{(R_0^2 + R_1^2)},$$

где

$$R_0 = \sqrt{(\min R / 85)}, \quad R_1 = \sqrt{(\max R / 85)}.$$

4) Индекс специфичности (S-индекс) – показатель случайности расположения фишек:

$$\text{S-index} = R_0 / R_1.$$

5) Индекс смещения (C-индекс) – показатель тяжести нарушения цветового зрения:

$$\text{C-index} = R_0 / 2.525249.$$

### Визуализация данных

Разработанная программа позволяет представлять результат теста в удобной для пользователя графической форме. Визуализация результатов анализа с помощью полярной диаграммы, дополненной оценочными параметрами теста (рис. 6), позволяет практически мгновенно сделать промежуточные выводы о характере нарушений цветового зрения и его серьезности у каждого отдельного участника исследования.

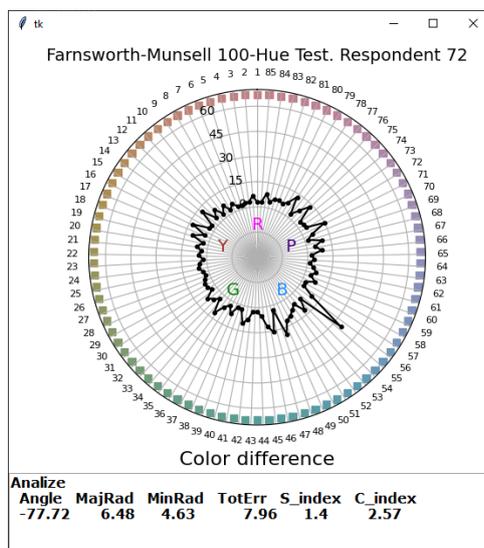


Рис. 6. Полярная диаграмма и оценочные параметры теста

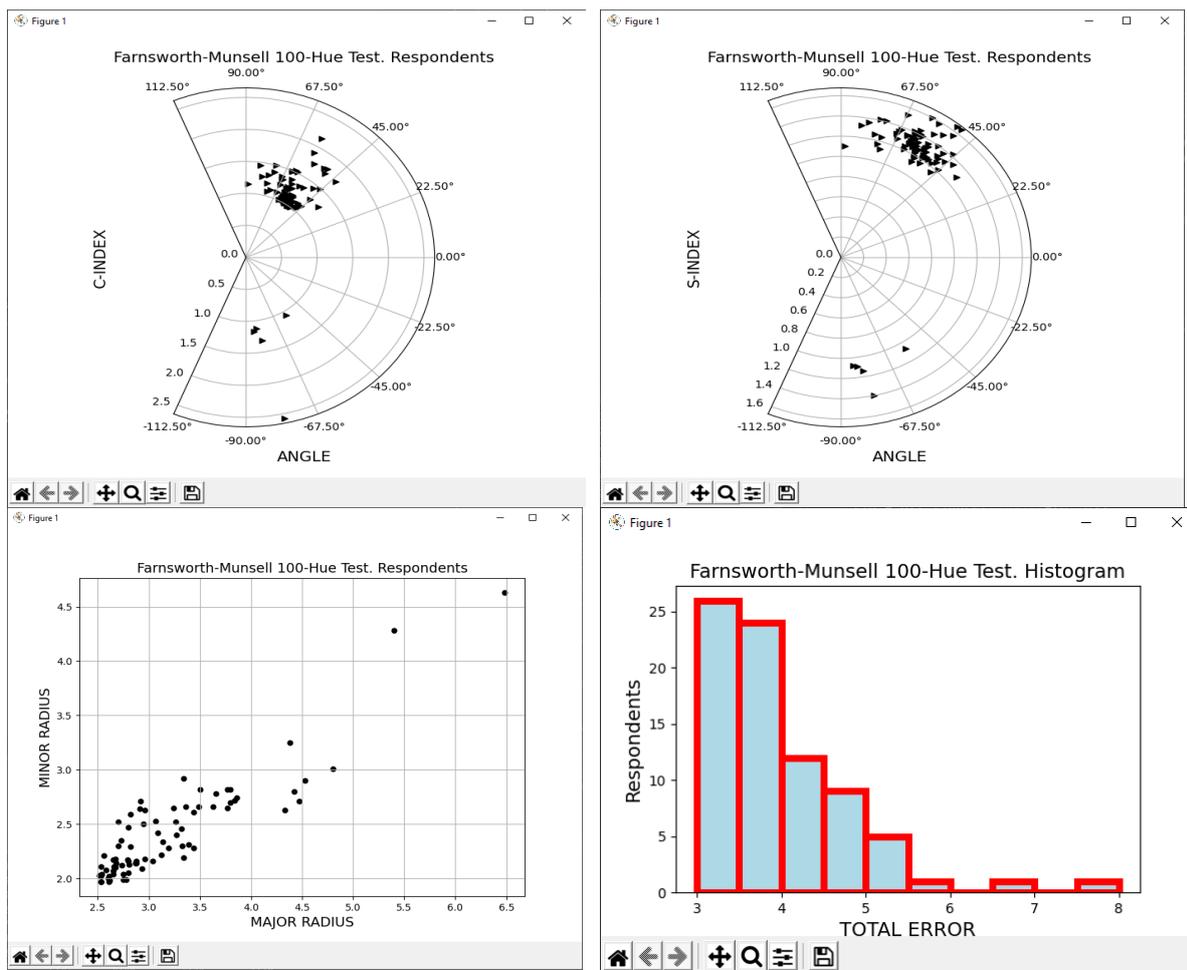


Рис. 7. Точечные диаграммы и гистограмма, визуализирующие «коллективные» проблемы

Одновременный вывод ответов всех респондентов на точечных диаграммах и гистограммах (рис. 7) хорошо показывает «коллективные» проблемы. Например, визуализирует специфику нарушений цветового зрения у людей с определенной болезнью (сахарным диабетом, глаукомой, коронавирусом) или с определенным видом интоксикации (наркотическая зависимость, ртутное отравление и др.).

Программа написана на Python, слой пользовательского интерфейса реализован фреймворком Tkinter, графики и диаграммы построены в Matplotlib.

### Выводы

Разработанная программа анализа данных оценки цветового зрения с помощью теста Фарнворта – Манселла обладает рядом преимуществ по сравнению с существующими на сегодняшний день аналогами.

*Во-первых*, программа имеет два режима работы и позволяет, в зависимости от задач исследования, задавать последовательность фишек как после проведения теста, так и непосредственно во время тестирования.

*Во-вторых*, программа позволяет легко рассчитывать не только стандартный для оценки результатов тестирования цветового зрения показатель суммарной ошибки, но и более специфические величины угла смещения, минимального и максимального радиусов вращения, а также индексы специфичности (S-индекс) и серьезности нарушений (C-индекс).

*В-третьих*, программа позволяет визуализировать не только индивидуальные данные (отдельно для каждого респондента), но и «коллективные» проблемы (например, связанные с определенной болезнью или с определенным видом интоксикации).

Апробация программы продемонстрировала ее эффективность в отношении цветовых нарушений, а также возможность быстро и качественно выполнить их оценку. Высокая скорость тестирования без использования дорогостоящей аппаратуры значительно упрощает проведение исследований в ходе массовых осмотров и психофизиологических исследований.

#### **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-18-00407, <https://rscf.ru/project/22-18-00407/>, в Смоленском государственном университете.

#### **Литература**

1. Farnsworth D. Farnsworth-Munsell 100-Hue and dichotomous tests for color vision // Journal of the Optical Society of America. 1943. № 33. P. 568–578.
2. Vingrys A. J., King-Smith P. E. A quantitative scoring technique for panel tests of color vision // Investigative Ophthalmology and Visual Science. 1988. № 29(1). P. 50–63.

**T.A. SamoiloVA, Y.A. Griber**  
Smolensk State University

### **AUTOMATED METHOD FOR ASSESSING THE RESULTS OF THE COLOR VISION TEST**

**Keywords:** *Farnsworth-Munsell 100 Hue Test, color difference vector, CIELUV space, moment of inertia, Python.*

**Abstract.** *The paper introduces a computer program designed to assess color vision disorders using the Farnsworth-Munsell 100 Hue Test. The algorithm of the program is based on the calculation of the moment of inertia from color difference vectors in the CIELUV space. Tests conducted on a group of 80 participants showed the reliability and effectiveness of the program.*

## **ОДНОВРЕМЕННОЕ ГЕОКОДИРОВАНИЕ ПОДМАССИВОВ НАЗВАНИЙ С УЧЕТОМ РЕТРОСПЕКТИВНОГО АСПЕКТА ДЛЯ СОЗДАНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ БАЗЫ ГЕОДАННЫХ НИКА БЫСТРОГО ГЕОКОДИРОВАНИЯ**

Ключевые слова: *одновременное геокодирование подмассивов, ретроспективный аспект, сервисы геокодирования, геоинформационный слой, ООСУБД НИКА.*

*Подмассивы исходного массива ключей геокодируются через запросы к геокодировщику одновременно. По достижении статуса выполнения запроса с сервера получается результат в виде наборов геообъектов. Геообъекты сохраняются в локальную базу геоданных НИКА. Особенностью является наличие ретроспективных названий мест.*

**1. Актуальность предварительного геокодирования массивов.** При работе с исторической базой данных через Интернет возникает естественная проблема отображения индексов геоимен на географической карте. Такую возможность предоставляют географические сервисы. Однако не всегда есть возможность и не всегда удобно пользоваться возможностями геокодирования, которые предоставляют такие сервисы. Причин для этого несколько. Картографические сервисы не всегда предоставляют возможность бесплатного геокодирования; кроме того, существуют ограничения на число запросов геокодирования в сутки; результаты геокодирования нельзя использовать в других картографических сервисах; наконец, ограничена частота, с которой могут выполняться запросы. При таких ограничениях невозможно выполнить массовое геокодирование имен для отображения на карте. Требуется осуществить массовое геокодирование на предварительном этапе, а не в режиме работы с базой данных, используя свободнораспространяемые геоданные, и сохранить результат геокодирования в отдельную БД НИКА геообъектов. Такая БД может использоваться при работе с гипертекстовой системой для ООСУБД НИКА NKWSystem [1] для отображения индексов географических имен на карте. Смежной проблемой является геокодирование ретроспективных имен. В общем случае ретроспективные названия требуют ручного геокодирования [2], так как

современные картографические сервисы не обладают возможностями геокодирования таких названий. В некоторых случаях, рассмотренных ниже, удается автоматизировать процесс ретроспективного геокодирования.

**2. Массовое геокодирование названий.** Сервисы геокодирования в Интернете со свободнораспространяемыми данными выдают результат единичного запроса с частотой не менее чем 1 с. В случае индексов названий в несколько десятков тысяч это очень низкая эффективность для массового геокодирования. Возможность геокодирования группы названий значительно повышает скорость обработки. Например, если запрос на геокодирования одного названия в среднем занимает 3 с [3], то запрос на геокодирование группы из 100 названий выполняется в среднем примерно за 30 с. Это по времени лучше в 10 раз, чем при геокодировании того же количества названий в виде единичных запросов. Еще одним улучшением в технологию геокодирования является возможность запуска параллельных запросов. При запуске 10 параллельных запросов по 100 названий время выполнения такого массового запроса составляет примерно 90 с. При последовательном запуске запросов время обработки составляет примерно 300 с. Это по крайней мере в 3 раза медленнее, чем в параллельном режиме. При полностью последовательной обработке запросов время обработки данных 1000 запросов составляет ~3000 с. Это минимум в 30 раз медленнее, чем при пакетной параллельной обработке того же числа запросов. На практическом примере было проиллюстрировано преимущество одновременных групповых запросов к серверу геокодирования. В этом смысле представляет интерес вопрос, связанный с тем, какое количество названий поместить в группы и какое количество параллельных запросов запускать.

**3. Исторические названия мест.** Наличие ретроспективных данных накладывает свои особенности на процесс их геокодирования. В зависимости от самих ретроспективных данных процесс геокодирования может быть различным. В самом общем случае этот процесс сводится к определению широты и долготы вручную по историческим картам [2]. Однако в случае БД по новомученикам и исповедникам [4] возможна автоматизация процесса геокодирования. В ней используются названия советской и современной эпохи, а также периода, предшествующего советскому. При переходе от губерний и уездов к областям и районам названия населенных пунктов сохранились. Для геокодирования ретроспективных названий необходимо подать на вход геокодера измененное название, в котором губерния заменяется на современное название региона, за которым непосредственно следует населенный пункт. Поскольку нет взаимно однозначного соответствия между

губерниями и областями, необходимо запустить несколько запросов, включающих современные регионы для данной губернии.

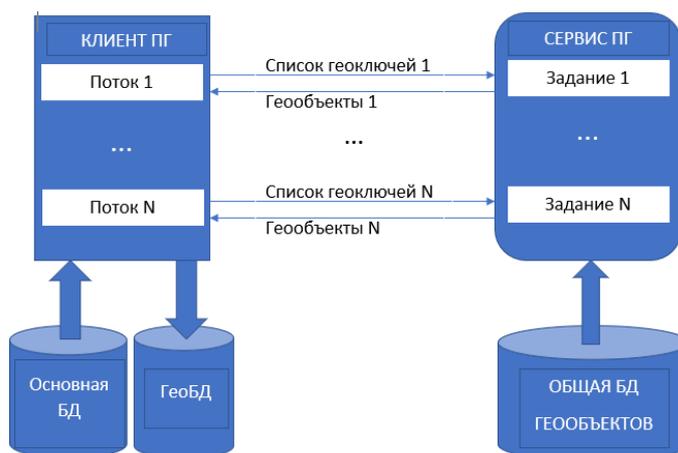


Рис. 1. Схема процесса параллельного пакетного геокодирования (ПГ)

**4. Процесс геокодирования групп ключей.** Процесс параллельного пакетного геокодирования (ПГ) показан на рисунке 1. Система содержит клиента ПГ и сторонний сервис ПГ. Клиент ПГ формирует группы ключей по исходному массиву географических названий и в параллельных потоках посылает запросы, содержащие подмассивы ключей, на сервис ПГ через сеть Интернет, используя https-протокол. Сервис ПГ в ответ на каждый запрос запускает параллельно задание пакетного геокодирования. Результатом выполнения задания являются геообъекты, определенные по геоключам в общей БД геообъектов, которые возвращаются клиенту ПГ в ответ на запрос. Клиент ПГ помещает геообъекты в отдельную БД.

Описанный процесс параллельного ПГ необходимо детализировать запросами состояния выполняемых параллельных заданий на сервисе ПГ. На рисунке 2 приведен процесс получения клиентом ПГ от сервиса ПГ ответа, содержащего запрашиваемые геообъекты, на любой запрос ПГ.

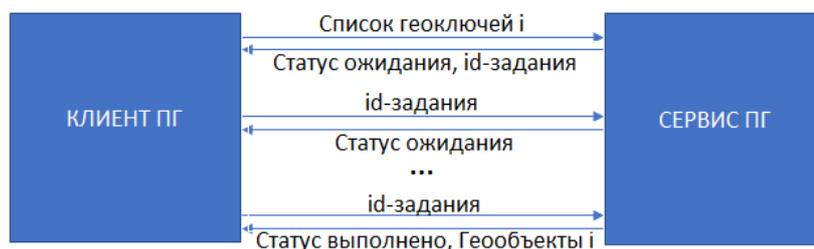


Рис. 2. Схема запроса пакетного геокодирования

В ответ на  $i$ -й запрос ПГ со списком геоключей сервис ПГ присылает клиенту ПГ идентификатор  $id$  запущенного задания и статус ожидания. Клиент ПГ переходит в режим ожидания ответа в  $i$ -м потоке, периодически посылая запросы на статус выполнения задания с данным идентификатором  $id$ . В случае завершения задания  $id$  в ответ на запрос статуса сервис ПГ присылает клиенту ПГ статус «выполнено» с набором

запрашиваемых геообъектов. Полученные в результате геокодирования отдельные для каждого списка геоименований БД с геообъектами сливаются в одну БД геообъектов (на рис. 1 – ГеоБД), представляющую собой ООБД НИКА.

**5. Анализ результатов геокодирования.** В результате геокодирования выдается набор геообъектов в формате json. На рисунке 3 приведен пример такого объекта. Ретроспективное название «Архангельская губ., Пинежский у., д. Едома» на предварительном этапе преобразуется во входную строку геокодера: «Архангельская область, Едома». Ключ был успешно геокодирован геообъекта на рисунке 3. Тип населенного пункта был опущен, но в общем случае могут быть разные интерпретации строки геокодером, поэтому тип необходимо указывать, то есть «Архангельская область, деревня Едома». Хотя в приведенном примере строка была геокодирована правильно, но в общем случае Архангельская губерния может соответствовать нескольким регионам современного административного деления: Архангельская область, Мурманская область, Ненецкий автономный округ, Карелия, Республика Коми. В данном случае одно ретроспективное название порождает 5 соответствующих запросов на геокодирование. Поскольку число ретроспективных наименований не меньше, чем современных, это еще один пример того, насколько актуально параллельное пакетное геокодирование с учетом ретроспективного аспекта.

```

▼ query:
 text: "Архангельская область,Едома"
 parsed: {}
 datasource: {}
 name: "Edoma"
 country: "Russia"
 country_code: "ru"
 region: "Northwestern Federal District"
 state: "Arkhangelsk Oblast"
 county: "Leshukonsky District"
 city: "Edoma"
 municipality: "Лешуконское сельское поселение"
 hamlet: "Edoma"
 lon: 45.8245521
 lat: 64.8974864
 formatted: "Edoma, Leshukonsky District, Russia"
 address_line1: "Edoma"
 address_line2: "Leshukonsky District, Russia"
 category: "populated_place"
 timezone:
 name: "Europe/Moscow"
 offset_STD: "+03:00"
 offset_STD_seconds: 10800
 offset_DST: "+03:00"
 offset_DST_seconds: 10800
 abbreviation_STD: "MSK"
 abbreviation_DST: "MSK"
 result_type: "city"
 rank:
 importance: 0.25000999999999995
 popularity: 0.4556100326803025
 confidence: 1
 confidence_city_level: 0
 match_type: "full_match"
 place_id: "518fac57ec8ae946405 ..."

```

Рис. 3. Геообъект с ключом «Архангельская область, Едома»

Функция геокодирования также является элементом для построения *тематических карт* на основе геоинформационных слоев.

### Литература

1. Емельянов Н.Е., Тищенко В.А. Представление гипертекста в СУБД НИКА // Технология программирования и хранения данных: сб. трудов ИСА РАН. Т. 45 / под ред. В.Л. Арлазарова и Н.Е. Емельянова. М., 2009.

2. Владимиров В.Н. Историческая геоинформатика: геоинформационные системы в исторических исследованиях. Барнаул, 2005. С. 27.

3. Geoapify API Docs. Batch Geocoding API. URL: <https://apidocs.geoapify.com/docs/geocoding/batch/>

4. Интернет-ресурс база данных «За Христа пострадавшие». URL: <http://martyrs.pstbi.ru>.

**V.A. Tishchenko**

Federal Research «Center Computer Science and Control» of the  
Russian Academy of Sciences, PSTGU

### **CONCURRENT GEOCODING OF NAME SUBARRAYS WITH A RETROSPECTIVE ASPECT TO CREATE A LOCAL FAST GEOCODING NIKA GEODATABASE**

**Keywords:** *concurrent geocoding of subarrays, retrospective aspect, geocoding services, geoinformation layer, NIKA OODBMS.*

**Abstract.** *Subarrays of the source key array are geocoded via requests to the geocoder at the same time. Upon reaching the status of the request execution from the server, the result is obtained in the form of sets of geoobjects. Geoobjects are stored in the local NIKA geodatabase. A feature is the presence of retrospective place names.*

**М.А. Туева, Т.А. Самойлова**

*Смоленский государственный университет*

УДК 004.67

### **РАЗРАБОТКА РЕКОМЕНДАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОИСКА АССОЦИАЦИЙ ДЛЯ НЕЯВНЫХ ДАННЫХ**

**Ключевые слова:** *рекомендательная система, матричная факторизация, правила ассоциации, алгоритм Apriori, машинное обучение.*

*Разработка эффективных рекомендательных систем относится к числу актуальных проблем в области создания программного обеспечения. В большинстве применений требуется их высокое быстроедействие. В первую очередь это относится к системам быстрого принятия решений. В таком случае рекомендации становятся бесполезными, если есть задержка с их формированием и показом пользователю. Цель работы – повышение скорости систем построения рекомендаций без ущерба для точности. В статье предлагается рекомендательная система, основанная на создании*

правил ассоциаций методом *Apriori*, в которой для повышения производительности использованы неявные данные. Проведено сравнение разработанного программного обеспечения с преобладающим в настоящее время методом матричной факторизации, где выполняется обработка рейтингов пользователей, задаваемых явно. Показана эффективность предложенного подхода.

**Введение.** Рекомендательные системы становятся неотъемлемой частью нашей жизни, благодаря их огромной помощи в направлении пользователей к наиболее вероятным товарам, которые могут им понравиться. Они стали особенно актуальны, когда многие люди во всем мире перешли на онлайн-сервисы. Многие из таких сервисов пытаются увеличить свои продажи, рекомендуя товары, которые интересны пользователям. Метод матричной факторизации [1] – традиционный подход к разработке системы, предлагающей рекомендации пользователям с похожими интересами. При этом предполагается, что интересы представлены явно – оценками, выставленными объектам после их приобретения или просмотра. Однако производительность метода по причине обработки больших разреженных наборов данных – одна из основных его проблем. Для ее решения предлагается строить рекомендательную модель предпочтений на основе метода ассоциативных правил для неявных данных, не требующих сложной системы рейтингов.

**Методы разработки.** Сравняется быстродействие метода ассоциативных правил с быстродействием традиционного метода матричной факторизации. Исходные данные ассоциативных правил – транзакции вида {пользователь, товар}. В методе матричной факторизации к каждой такой транзакции явно добавляется поле «рейтинг» {пользователь, товар, рейтинг}, когда пользователь высказывает свое мнение о купленных товарах в виде явных оценок. Цель системы рекомендаций — генерировать предложения о наиболее востребованных товарах.

Матричная факторизация – наиболее часто используемый в случае объемных данных метод. Заключается в преобразовании исходных транзакций в матрицу полезности, размер которой значительно превышает размер входных данных из-за ее разреженности.

Таблица 1

Фрагмент матрицы полезности

|                | Товар 1 | Товар2 | ..... | Товар D |
|----------------|---------|--------|-------|---------|
| Пользователь 1 | 4       | ?      |       | 3       |
| Пользователь 2 | ?       | ?      |       | 3       |
| Пользователь 3 | 2       | ?      |       | ?       |
| ...            | ...     | ...    | ...   | ...     |
| Пользователь U | ?       | 5      |       | ?       |

В таблице 1 приведен фрагмент структуры матрицы полезности для представления как известных, так и прогнозируемых рейтингов.

В приведенной матрице вопросительные знаки представляют товары, которые пользователь не оценил. Стратегия состоит в том, чтобы каким-то образом предсказать эти рейтинги и рекомендовать пользователям товары, которые им, вероятно, понравятся. Идея метода – в преобразовании матрицы полезности с целью уменьшения ее размера. Для этого она разлагается на произведение двух прямоугольных матриц меньшей размерности. Таким образом, у нас есть набор пользователей  $U$  и набор товаров  $D$ . Пусть  $R$  размера  $|U|*|D|$  – матрица полезности, содержащая все рейтинги, которые пользователи присвоили элементам. Задача состоит в том, чтобы найти две матрицы  $P=|U|*K$  и  $Q=|D|*K$ , произведение которых равно  $R$ . Для разложения был выбран один из самых быстродействующих – алгоритм SVD, основанный на разложении по сингулярным числам [2]. На рисунке 1 показано разложение входной матрицы пользовательских элементов.

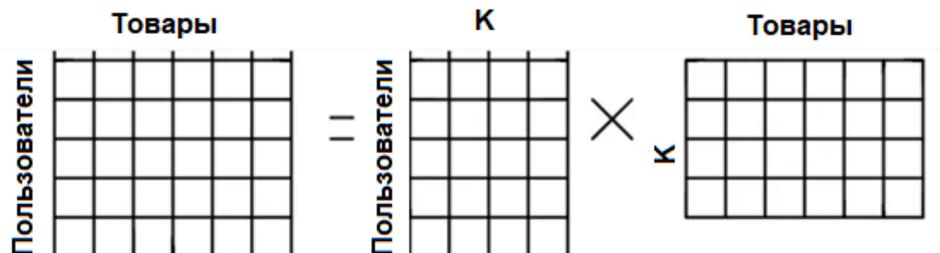


Рис 1. Разложение матрицы полезности алгоритмом SVD

Вывод ассоциативных правил – метод машинного обучения, помогающий выявить значимые корреляции различных продуктов в наборе исходных данных. Основная идея ассоциативных правил [3] состоит в том, чтобы раскрыть отношения между пользователями и товарами, которые формируются по данным транзакций. Правила ассоциации пытаются находить глобальные или общие предпочтения для всех пользователей, а не индивидуальные предпочтения, как в методе матричной факторизации. Существует несколько алгоритмов, разработанных относительно правил ассоциации, но мы выбрали классический алгоритм, который обычно используется для торговых сетей, – Apriori. Он определяет ассоциации между элементами на основе трех важных показателей: support (поддержка), confidence (достоверность), lift (лифт, подъемная сила). Чтобы найти наиболее рейтинговые и часто покупаемые товары, этот алгоритм использует показатель support. Его расчет основан на частоте, вычисляемой путем деления количества транзакций, содержащих определенный элемент, на общее количество транзакций:

$$\text{Support}(A) = \frac{\text{Transactions}(A)}{\text{Total Transactions}}$$

где  $A$  – конкретный элемент транзакции, товар.

Алгоритм Apriori выполняет следующую последовательность вычислений.

1. Объединение. Просмотр базы данных и определение частоты вхождения отдельных товаров.

2. Отсечение. Удаляются те наборы, которые не удовлетворяют поддержке.

3. Повторение. Предыдущие два шага повторяются для каждой величины набора, пока не будет повторно получен ранее определенный размер данных.

Быстродействие алгоритма зависит от числа транзакций во входных данных и задаваемого минимального порога поддержки. Для больших наборов, содержащих сотни товаров, число транзакций измеряется в сотнях тысяч. При больших наборах необходимо тщательно задавать порог поддержки, поскольку установив более низкий минимальный порог поддержки, мы создадим намного больше наборов элементов размера 2 и более, что в случае рекомендательных систем не требуется.

**Эксперимент и результаты.** Для создания модели рекомендательной системы были выбраны высокоуровневый язык программирования python и его библиотеки: math, sklearn, scipy, numpy, pandas, matplotlib. В качестве исходных данных для испытаний были взяты явные и неявные данные о покупках товаров клиентами за определенное время. Максимальное число транзакций – 1029591. Для вывода названий наиболее востребованных товаров использовалась таблица {productID, productName}, содержащая номер и название товара. Полученные результаты обработки транзакций методами ассоциативных правил по алгоритму Apriori с неявными и матричной факторизации с явными данными представлены в таблице 2.

Таблица 2

**Время прогнозирования Apriori и матричной факторизации**

| <i>Число транзакций</i> | <i>Время прогнозирования Apriori</i> | <i>Время прогнозирования матричной факторизации</i> |
|-------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 100837                  | 1.5 сек                              | 12 сек                                              |
| 727083                  | 2.5 сек                              | 15 сек                                              |
| 1029591                 | 3 сек                                | 18 сек                                              |

По данным эксперимента, время прогнозирования для неявных данных меньше времени обработки традиционным методом в 6–8 раз, что является вполне хорошим результатом. Оценка точности по MSE составляет 2.604. Фрагмент списка наиболее рейтинговых товаров, полученный обоими методами, представлен в таблицах 3 и 4.

Процент несовпадений в приведенных таблицах для 50–8100 наиболее рейтинговых товаров не превышает 10%.

Таблица 3

**Фрагмент наиболее рейтинговых товаров, полученных методом Apriori**

| Уровень рейтинга | Название товара               | Поддержка |
|------------------|-------------------------------|-----------|
| 1                | Детская посуда                | 100%      |
| 2                | Автобус- игрушка              | 93.75%    |
| 3                | Бассейн надувной «Жираф»      | 87.50%    |
| 4                | Железная дорога               | 87.50%    |
| 5                | Бассейн надувной «Динозаврик» | 81.25%    |

Таблица 4

**Фрагмент наиболее рейтинговых товаров, полученный методом матричной факторизации**

| Уровень рейтинга | Название товара          | Средний рейтинг |
|------------------|--------------------------|-----------------|
| 1                | Детская посуда           | 4.9             |
| 2                | Конструктор              | 4.9             |
| 3                | Бассейн надувной «Жираф» | 4.4             |
| 4                | Железная дорога          | 4.3             |
| 5                | Автобус- игрушка         | 3.8             |

**Заключение**

В статье представлены результаты разработки рекомендательной системы методом ассоциативных правил по алгоритму Apriori для неявных исходных данных. Чтобы оценить производительность созданной модели, проведены эксперименты сравнения предложенного метода с традиционным методом матричной факторизации. При этом вычисления выполнялись на одном и том же наборе данных. Полученные результаты говорят о том, что использование ассоциативных правил значительно повышает производительность прогноза рекомендательной системы. Эксперименты также показывают удовлетворительную точность обоих прогнозов. В будущей работе мы планируем применить более продвинутый метод для создания правил ассоциации на основе алгебры многомерных матриц [4; 5]. В нем использована возможность параллельного умножения многомерных матриц, позволяющая выполнить прогноз рекомендаций еще быстрее.

**Литература**

1. Gillis N. Introduction to nonnegative matrix factorization // SIAG/OPT Views and News. 2017. Vol. 25, No. 1. P. 7–16.
2. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений / пер. с англ. Х.Д. Икрамова. М.: Мир, 1980. 280 с.
3. Srikant R, Agrawal R. Mining Generalized Association Rules // In Proc. of the 21th International Conference on VLDB. Zurich, Switzerland, 1995.
4. Захаров В.Н., Мунерман В.И., Самойлова Т.А. Параллельные методы вывода ассоциативных правил в технологиях IN-DATABASE И IN MEMORY\*// Труды II Междунар. научной конференции «Конвергентные когнитивноинформационные технологии». М., 2017. С. 219–225.

5. Мунерман В.И. Алгебраический подход к подготовке данных для вывода ассоциативных правил // Системы высокой доступности. 2017. Т. 13, №3. С.34–37.

**M.A. Tueva, T.A. Samoilova**  
Smolensk State University

## **DEVELOPMENT OF A RECOMMENDER SYSTEM USING SEARCH ASSOCIATIONS FOR IMPLICIT DATA**

**Keywords:** *recommender system, matrix factorization, association rules, Apriori algorithm, machine learning*

**Abstract.** *The development of effective recommender systems is one of the urgent problems in the field of software development. Most applications require high performance of these systems. This is especially true for systems of rapid decision making. In this case, recommendations become useless if there is a delay in their generation and display to the user. The purpose of the work is to increase the speed of recommendation building systems without sacrificing accuracy. The article proposes a recommender system based on the creation of association rules by the Apriori method, in which implicit data is used to improve performance. The developed software is compared with the currently prevailing method of matrix factorization, where user ratings are processed explicitly. The effectiveness of the proposed approach is shown.*

**П.М. Хвостик**

*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

УДК 004.9

## **ОСОБЕННОСТИ ГРАФОВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ И ПРОИЗВОДСТВАМИ**

**Ключевые слова:** *графовое представление, моделирование автоматизированных систем, управление доступом.*

*В статье описаны особенности графового представления автоматизированных систем управления технологическими процессами и производствами. Данное представление позволяет повысить эффективность процессов проектирования, моделирования, функционирования и развития автоматизированных систем управления. Графовое представление помогает определить оптимальные параметры конфигурации автоматизированной системы управления технологическими процессами и производствами в*

*зависимости от имеющегося набора программно-аппаратных компонентов.*

### **Введение**

В настоящее время развитие информационных технологий позволяет разрабатывать новые технологии и подходы к проектированию, моделированию и функционированию автоматизированных систем управления технологическими процессами и производствами для различных предметных областей. В связи с этим встают задачи разработки новых представлений и моделей автоматизированных систем управления, поскольку существующие позволяют решать отдельные практические вопросы и не позволяют получить гибкую возможность управления конфигурациями автоматизированных систем в зависимости от имеющегося программно-аппаратного обеспечения процесса.

Современная автоматизированная система управления технологическими процессами и производствами состоит из множества разнообразных взаимодействующих между собой программно-аппаратных компонентов, структуру которых эффективно и целесообразно представлять в виде дерева или графа. Такое представление позволит наглядно увидеть компоненты автоматизированной системы и связи между ними, а также анализировать и изучать не только систему в целом, но и ее отдельные модули. Следовательно, исследование особенностей графового представления автоматизированных систем управления технологическими процессами и производствами является своевременной и актуальной задачей.

### **Графовое представления автоматизированных систем управления технологическими процессами и производствами**

Как правило, разработка, внедрение и эксплуатация крупных автоматизированных систем управления охватывает большой временной интервал, что, несомненно, влечет за собой проблемы развития системы с учетом изменения методов и подходов к автоматизации. Для решения таких проблем необходимо учитывать модульную иерархическую зависимость компонентов автоматизированной системы для быстрой и эффективной их замены или доработки. Для моделирования автоматизированных систем управления технологическими процессами и производствами воспользуемся объектно-ориентированными методами анализа и проектирования, например UML (Unified Modeling Language – унифицированный язык моделирования). Обоснованием выбора объектно-ориентированной методологии языка UML служит то, что автоматизированная система управления в общем случае представляет собой бесконечный цикл ожидания заранее определенных

событий, а в качестве отдельных структурных единиц системы выступают классы и объекты с соответствующими методами и свойствами.

Для определения основных компонентов автоматизированной системы управления технологическими процессами и производствами, изучения их свойств и взаимодействия с целью последующего использования полученных сведений при разработке графового представления построена диаграмма классов UML (рис. 1).



Рис. 1. Диаграмма классов UML для автоматизированной системы управления

Диаграмма классов автоматизированной системы управления состоит из Сущностей и Интерфейсов. Сущность представляет собой аппаратный или программный модуль, входящий в состав системы, а интерфейсы позволяют имплементировать методы передачи и получения данных при взаимодействии сущностей. Объектно-ориентированная методология дает возможность моделировать четыре типа взаимодействия компонентов автоматизированных систем управления: зависимость, наследование, ассоциация и реализация.

Таким образом, отдельный программный или аппаратный модуль автоматизированной системы управления технологическими процессами и производствами имеет вид:

$$M = \langle T, R, K, P, D_1, D_2, D_3, D_4 \rangle, \quad (1)$$

где  $T$  – множество входных параметров модуля,  $R$  – множество выходных параметров модуля (множества  $T$  и  $R$  получаются в результате эскизного и технического проектирования модуля для автоматизированной системы управления),  $K$  – множество технических параметров и условий для описания корректной работы модуля,  $P$  – множество правил доступа к элементам модуля (элементы множества  $P$  представляют собой пары  $(v, f)$ , где  $v$  – роль,  $f$  – уровень доступа, то есть доступ открыт, доступ закрыт),  $D_1$  – отношение на  $T \times R$ ,  $D_2$  – отношение на  $T \times K$ ,  $D_3$  – отношения  $T \times P$ ,  $D_4$  – отношение  $R \times P$ .

Сопоставляя результаты объектно-ориентированного моделирования автоматизированных систем управления с математическим представлением компонента системы, получим иерархическую структуру, на основе которой может быть построен ориентированный граф, позволяющий описывать различные конфигурации системы.

$$\begin{cases} A_1 : \langle M_1, \dots, M_k \rangle \Rightarrow L_1 \\ \dots \\ A_i : \langle M_1, \dots, M_m \rangle \Rightarrow L_i \\ \dots \\ A_n : \langle M_1, \dots, M_n \rangle \Rightarrow L_n, \end{cases} \quad (2)$$

где  $A_i$  – конфигурация автоматизированной системы управления технологическими процессами и производствами,  $L_i$  – иерархический уровень конфигурации,  $k, n, m$  – количество компонентов в одной конфигурации автоматизированной системы управления.

С учетом установленных при моделировании ассоциативных отношений между классами с определением кратности взаимодействия компонентов исследованы свойства отношений:

1.  $\forall t_i \in T \exists R_i \subset R : \forall r \in R_i \rightarrow (t_i, r) \in D_1 \equiv t_i D_1 r \wedge |R| \geq 1.$
2.  $\forall r \in R \exists ! t \in T : t D_1 r.$
3.  $\forall t \in T \exists ! k \in K : t D_2 k.$
4.  $\forall t_i \in T \exists P_i \subset P : \forall p \in P_i \rightarrow (t_i, p) \in D_3 \equiv t_i D_3 p \wedge |P_i| \geq 0.$
5.  $\exists p \in P \exists ! t \in T : t D_3 p.$
6.  $\forall R_j \subset R : \forall r \in R_j \exists P_j \subset P : \forall p \in P_j \rightarrow (r_j, p) \in D_4 \equiv r_j D_4 p \wedge |P_j| \geq 0.$
7.  $\exists p \in P \exists ! r \in R : r D_4 p.$
8.  $\exists t \in T \exists p \in P : \neg t D_3 p \rightarrow \exists r \in R : r D_4 p.$

С учетом вышеизложенного наглядно графовое представление автоматизированной системы управления технологическими процессами и производствами может быть изображено как на рисунке 2.

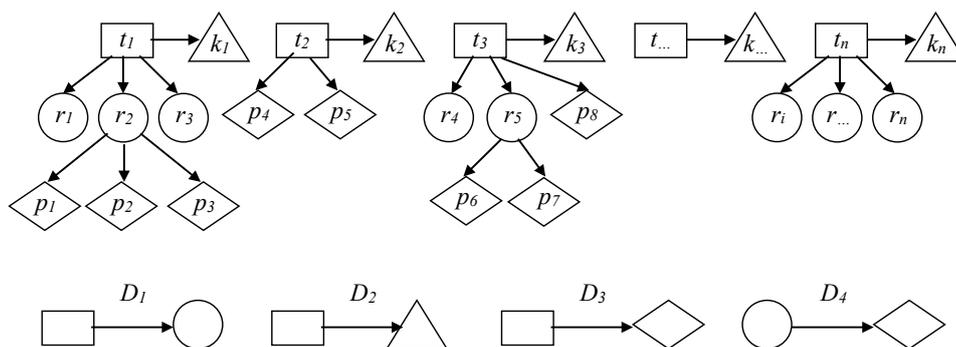


Рис. 2. Графическая интерпретация графового представления автоматизированной системы управления

### Заключение

Графовое представление автоматизированных систем управления технологическими процессами и производствами позволяет определить множество конфигураций систем в зависимости от имеющегося набора программно-аппаратных компонентов с учетом различных параметров, в том числе ролевого управления доступом. Используя положения теории множеств и теории графов, возможно эффективно моделировать автоматизацию производственных и технологических процессов, разрабатывать интеллектуальные системы управления и формировать системы из готовых компонентов.

### Литература

1. Шевнина Ю.С. Иерархическая модель нелинейной динамической системы // Современная наука: актуальные пробл. / теории и практики. 2021. № 8. С. 135-139.
2. Шевнина Ю.С. Метод декомпозиции сложной нелинейной системы на основе процессного подхода // Системы управления и информационные технологии. 2021. № 3(85). С. 24-29.
3. Особенности организации доступа в автоматизированных информационных системах на основе принципов нелинейной динамики / Ю.С. Шевнина [и др.] // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2021. Т. 17, № 4. С. 50-57.
4. Усков А.А., Кузьмин А.В. Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика. М.: Горячая линия-Телеком, 2004. 143 с.

**Р.М. Hvostik**

National Research University of Electronic Technology

## FEATURES OF GRAPH REPRESENTATION OF AUTOMATED CONTROL SYSTEMS OF TECHNOLOGICAL PROCESSES AND PRODUCTION

**Keywords:** *graph representation, modeling of automated systems, access control.*

**Abstract.** *The article describes the features of the graph representation of automated control systems for technological processes and industries. This*

*representation makes it possible to increase the efficiency of the processes of design, modeling, operation and development of automated control systems. Graph representation allows you to determine the optimal configuration parameters for an automated process and production control system, depending on the available set of software and hardware components.*

**В.Ю. Ходченков**

*Смоленский государственный университет*

УДК 004.022:004.027

## **О ВОЗМОЖНОСТИ РАЗРАБОТКИ ВЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ ВЫЧИСЛЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ SIMD РЕГИСТРОВ**

Ключевые слова: *векторная модель, SIMD регистры, квантовые вычисления, эмуляция, многомерные матрицы.*

*В статье рассматривается возможность построения векторной модели вычислений с использованием принципов квантового компьютера и SIMD регистров. Модель основана на эмуляции поведения кубитов и предназначена для проведения вычислений, аналогичных квантовым, но с меньшими затратами ресурсов. Результаты показывают возможность реализации сложных алгоритмов, таких как умножение и свертка многомерных матриц, с помощью данной модели. Разработанная векторная модель вычислений может применяться в различных областях, таких как криптография, искусственный интеллект и машинное обучение.*

### **Введение**

В статье рассматривается создание векторной модели вычислений на основе принципов квантового компьютера. Сегодня в научном сообществе все большее внимание уделяется разработке сложных квантовых алгоритмов, например умножения и свертки многомерных матриц. Однако после проведения исследований и работы над одним из таких алгоритмов стало ясно, что существующие на данный момент эмуляторы квантовых компьютеров не позволяют в полной мере оценить эффективность предложенного алгоритма. Особенности квантовых вычислений привели к идее использования регистров SIMD для эмуляции кубитов и, следовательно, к эмуляции квантовых алгоритмов без использования огромных экономических и энергетических ресурсов, а также без применения сложных структур,

используемых в квантовых компьютерах. Автором ранее была разработана такая эмуляция на основе модели, основанной на квантовых принципах. Эта модель позволяет производить вычисления аналогичным квантовому способом, но с существенно меньшими затратами.

Предлагаемая векторная модель вычислений, которая строится на основе квантовых принципов, может применяться для решения многих задач и использоваться для эффективной обработки многомерных матриц. Более того, данная модель может стать основой для создания полноценного процессора на основе алгебры многомерных матриц, что значительно увеличит эффективность вычислений на несколько порядков.

### **Принцип работы векторной модели вычислений с использованием SIMD регистров**

Компьютерные системы на базе квантовых вычислений открывают новые возможности в решении сложных задач. Однако в настоящее время реализация квантовых компьютеров является технически и экономически сложной задачей. В связи с этим возникла необходимость в поиске альтернативных подходов к эмуляции квантовых вычислений. В данной работе рассматривается векторная модель вычислений на основе применения SIMD регистров.

Предлагаемая модель основана на использовании пары связанных SIMD регистров для представления одного кубита. Этот подход позволяет приближенно, с достаточно высокой точностью реализовать координаты кубита. Необходимо лишь наложить ограничение на числа, записанные в регистр так, чтобы сумма их квадратов равнялась единице. Таким образом, можно сохранить в эту пару регистров координаты нормализованного вектора единичной окружности, аналогично алгоритму, предложенному в работе [1].

В дальнейшем модель расширяется для работы с матрицами регистров. Это позволяет перейти к векторной модели вычислений, которая аналогична квантовой, но требует существенно меньшей вычислительной мощности и ресурсов. Такой подход открывает новые возможности эффективного решения сложных задач на компьютерах, основанных на технологии SIMD.

### **Описание разработанной модели вычислений**

Модель представляет собой программную систему, которая работает с использованием SIMD регистров и позволяет проводить вычисления, аналогичные квантовым, но с существенно меньшими затратами. В модели используется алгоритм, основанный на принципах квантовой механики, который позволяет эффективно решать сложные задачи, в том числе связанные с многомерными матрицами.

Модель состоит из трех компонентов: кубитного регистра, классического регистра и арифметического блока. Кубитный регистр эмулирует состояние кубита на основе пары XMM регистров, а классический регистр используется для хранения результатов вычислений. Арифметический блок осуществляет операции над кубитным и классическим регистрами, реализуя алгоритм, основанный на принципах квантовой механики.

Таким образом, модель позволяет проводить вычисления, аналогичные квантовым, но с использованием классических компьютеров и существенно меньшими затратами. Это открывает возможности для решения широкого круга задач, связанных с многомерными матрицами и другими сложными алгоритмами.

**Заключение.** Кратко рассмотрев работу над векторной моделью вычислений на основе операций квантового компьютера, мы пришли к выводу, что данная модель позволяет производить вычисления аналогично квантовому компьютеру, но с существенно меньшими затратами. Таким образом, предложенная в работе векторная модель вычислений с использованием SIMD регистров имеет потенциал для использования в различных областях, где требуется быстрое и эффективное выполнение сложных вычислений.

### Литература

1. Ходченков В.Ю, Мунерман В.И. Реализация векторной модели данных с использованием SIMD регистров //Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, №. 4. С. 756-766.

**V.Y. Khodchenkov**  
Smolensk State University

### **ABOUT THE POSSIBILITY OF DEVELOPING A VECTOR MODEL OF CALCULATIONS USING SIMD REGISTERS**

**Keywords:** *vector model, SIMD registers, quantum computing, emulation, multi-dimensional matrices.*

**Abstract.** *This article discusses the possibility of building a vector calculation model using the principles of a quantum computer and SIMD registers. The model is based on emulating qubit behavior and used for conducting of calculation similar to quantum ones but without less resources. The results demonstrate the possibility of implementing complex algorithms, such as multiplication and convolution of multidimensional matrices, using this model. The developed vector model of computing can be applied in various fields, such as cryptography, artificial intelligence and machine learning.*

## К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗЛИЧНОЙ СЛОЖНОСТИ

Ключевые слова: *нелинейные системы, алгебраические системы, гомоморфизм нелинейных систем, иерархическая система.*

*В статье описан подход к получению математического представления нелинейных систем, основанный на утверждении, что любая система представляет собой иерархию автономных подсистем, в которой исходящие от верхнего уровня команды управления предопределяют переходы подсистем более низких уровней от одного режима функционирования к другому. Полученные математические представления динамической системы учитывают все ее характеристики и состояния с приемлемой погрешностью, а также позволяют использовать физические интерпретации процессов.*

### **Введение**

Нелинейная система определяется зависящим от внешнего воздействия состоянием как совокупностью характеристик в некоторые моменты времени, описываемой дифференциальными уравнениями различного порядка [1]. Примеры нелинейных систем присутствуют в физике, биологии, химии, экономике, информатике и др., а моделирование их состояния привлекает внимание значительного количества ученых [2]. С.М. Осовец, Д.А. Гинзбург, М.П. Дафилис, Д.Т. Лилей и др. работали над проблемами применения аппарата нелинейной динамики к сигналам электроэнцефалограммы и вычислению динамических показателей (корреляционная размерность, старший показатель Ляпунова, энтропия Колмогорова) для разделения различных состояний мозга [3]. В работах М.И. Рабиновича и Д. Келсо доказано, что человеческий мозг является нелинейной динамической системой и проявляет такие свойства, как мультистабильность, резкие фазовые переходы, кризисы и перемежаемость [4–6].

Моделирование нелинейных систем различной сложности, в том числе и со способностью к самоорганизации, является междисциплинарным инструментом исследования разнообразных процессов в природе, технике, обществе. При этом важно разработать единые модели, позволяющие на основе обобщенных законов анализировать и прогнозировать состояние нелинейных систем.

Наиболее сложной и актуальной задачей моделирования является разработка математического представления нелинейной системы с учетом всех ее характеристик и состояний с приемлемой погрешностью.

### Математическое моделирование сложных нелинейных систем

При описании естественнонаучных, социальных и экономических нелинейных систем в качестве интерпретации используется физическая (механическая) модель, наиболее точно отражающая динамику изменений в системе [5]. Такая модель представляет нелинейную систему с высокой погрешностью, и в некоторых случаях невозможно получить решения системы дифференциальных уравнений для систем с хаотическим поведением [6]. Для решения этой проблемы, а также для учета всех характеристик и состояний предлагается использовать математическое представление нелинейной системы в виде алгебраической системы:

$$S = \langle E_{1, \dots, E_n}, O_{s1, \dots, O_{sm}}, R_{s1, \dots, R_{sk}} \rangle, \quad (1)$$

где  $E_i$  – сущность (компонент) системы;  $O_{si}$  – операции, определенные в системе;  $R_{si} = \{r_{si1}, \dots, r_{sik}\}$  – отношения между сущностями, определяемые в процессе моделирования системы. Отношения между сущностями не зависят от отношений, определенных внутри сущности.

Математическое описание сущности  $E$ :

$$E = \langle A_{1, \dots, A_n}, V_{1, \dots, V_n}, O_{1, \dots, O_m}, R_{1, \dots, R_k} \rangle, \quad (2)$$

где  $A_i = \{a_{i1}, \dots, a_{ir}\}$  – характеристики сущности одного типа;  $V_i = \{v_{i1}, \dots, v_{ir}\}$  – значения характеристик. Каждый элемент множества состоит из одного значения или кортежа значений  $\{v_{ij,1}, \dots, v_{ij,p}\}$ ;  $O_i$  – операции, определенные для сущности;  $R_i = \{r_{i1}, \dots, r_{ik}\}$  – отношения между характеристиками сущности.

Состояние сущности описывается значениями всех характеристик, входящих в ее состав.

$$E_S = \langle (a_{1i}, v_{1i}), \dots, (a_{ni}, v_{ni}) \rangle, \quad (3)$$

где  $(a_{ij}, v_{ij})$  – упорядоченная пара характеристики и ее значения.

Отношения  $R$  и  $R_S$  для двух абстрактных множеств  $C$  и  $D$  обладают свойствами:

- 1)  $\forall c_i \in C \exists D_i \subset D: \forall d \in D_i \rightarrow (c_i, d) \in R \equiv c_i R d \wedge |D_i| \geq 1.$
- 2)  $\forall c \in C \exists! d \in D: c R d.$

Остальные свойства отношений определяются в процессе моделирования системы.

Состояние системы представляет совокупность состояний сущностей, входящих в ее состав.

$$S_S = \langle E_{1S}, \dots, E_{nS} \rangle \quad (4)$$

где  $E_{iS}$  – описание состояния сущности, входящей в состав системы.

Объект является конкретным представлением сущности и описывается алгебраической системой  $N^E$ .

$$N^E = \langle A_1^E, \dots, A_n^E, V_1^E, \dots, V_n^E, O_1^E, \dots, O_m^E, R_1^E, \dots, R_k^E \rangle \quad (5)$$

где  $A_i^E$  – характеристики объекта одного типа.  $A_i^E \subseteq A_i$ .  $V_i^E$  – значения характеристик объекта.  $V_i^E \subseteq V_i$ .  $O_i^E$  – операции, определенные для объекта.  $O_i^E \subseteq O_i$ .  $R_i^E$  – отношения между элементами объекта.  $R_i^E \subseteq R_i$ . Доказательство:  $R_i^E$  – множество упорядоченных пар  $(a_i^E, v_i^E)$ , а  $R_i$  –  $(a_i, v_i)$ . Так как  $A_i^E \subseteq A_i$  и  $V_i^E \subseteq V_i$ , значит, и  $\forall a_i^E \in A_i^E \rightarrow a_i^E \in A_i$ ,  $\forall v_i^E \in V_i^E \rightarrow v_i^E \in V_i$ . Кроме того, соответствующие свойства  $a_i^E$  и  $a_i$ ,  $v_i^E$  и  $v_i$  равны. Таким образом, пары  $(a_i^E, v_i^E)$  и  $(a_i, v_i)$  равны между собой, а значит  $R_i^E \subseteq R_i$ .

Представления объектов одной сущности однотипичны, и отображение  $h: N_1^E \rightarrow N_2^E$  является гомоморфизмом [2]. Для операции  $o_{ij}^E \in O_i^E$  и элементов  $a_{ij}^E \in A_i^E$  выполняется условие сохранения операции  $h(a_{i1}^E \dots a_{in}^E o_{ij}^E) = h(a_{i1}^E) \dots h(a_{in}^E) o_{ij}^E$  при  $n \geq 0$ . Кроме того, выполняется условие сохранения отношений для элементов  $A_i^E$  и  $V_i^E$ , то есть  $(a_i^E, v_i^E) \in R_i^E$ , значит, их образы  $h(a_1^E, v_1^E), \dots, h(a_n^E, v_n^E)$  во второй системе связаны тем же отношением  $h(a_i^E, v_i^E) \in R_i^E$  при  $n \geq 1$ . Следовательно, отображение  $h: N_1^E \rightarrow N_2^E$  является гомоморфизмом.

Состояние объекта является совокупностью  $N_S^E$  значений его характеристик в определенный момент времени.

$$N_S^E = \langle (a_{1i}^E, v_{1i}^E), \dots, (a_{ni}^E, v_{ni}^E) \rangle, \quad (6)$$

где  $(a_{ij}^E, v_{ij}^E)$  – упорядоченная пара характеристики объекта и ее значение.  $N_S^E \subset N^E$ , поскольку  $(a_{ij}^E, v_{ij}^E) \in N^E$ .

Конкретная реализация системы представляет собой совокупность объектов, операций над ними и отношений между компонентами.

$$P^S = \langle N_1^E, \dots, N_n^E, O_{s1}^S, \dots, O_{sm}^S, R_{s1}^S, \dots, R_{sk}^S \rangle, \quad (7)$$

где  $N_i^E$  – объекты системы.  $O_{si}^S$  – операции, определенные для системы.  $O_{si}^S \subseteq O_{si}$ .  $R_{si}^S$  – отношения между компонентами системы.  $R_{si}^S \subseteq R_{si}$ .

Системы, построенные на основе одной абстрактной модели, однотипичны и отображение  $g: P_1^S \rightarrow P_2^S$  является гомоморфизмом. Причем, если  $h: N_1^E \rightarrow N_2^E$  и  $g: P_1^S \rightarrow P_2^S$  – гомоморфизмы, то и композиция  $h \circ g: N_1^E \rightarrow P_2^S$  – гомоморфизм. Данное утверждение означает, что при отображении объекта из одной однотипичной системы в другую сохраняются операции и отношения, с ним связанные.

Состояние конкретной реализации системы описывается совокупностью состояний объектов, входящих в ее состав.

$$P_S^S = \langle N_{1S}^E, \dots, N_{nS}^E \rangle, \quad (8)$$

где  $N_{iS}^E$  – множество состояний объектов системы.

Для определения сущностей, характеристик и операций применяется онтологический, семантический анализ предметной области или их совокупность.

В результате исследования полученных математических описаний компонентов нелинейной системы выявлено:

$$- A_{iS}^E \subseteq A_i^E \subseteq A_i, V_{iS}^E \subseteq V_i^E \subseteq V_i, O_i^E \subseteq O_i, R_i^E \subseteq R_i.$$

Следовательно,  $N_S^E \subseteq E_S$  – состояние объекта является одним из определенных состояний сущности;  $N^E \subseteq E$  – объект представляет полный или частичный набор компонентов, описанный в сущности. Алгебраические системы объекта и сущности однотипичны, и отображение  $f: E \rightarrow N^E$  является гомоморфизмом;

–  $N_S^E \subseteq N^E \subseteq E$ ,  $O_{si}^S \subseteq O_{si}$ ,  $R_{si}^S \subseteq R_{si}$ . Следовательно,  $P_S^S \subseteq S_S$  – состояние конкретной реализации системы является одним из определенных состояний абстрактной системы;  $N^E \subseteq P^S \subseteq S$  – объект представляет полный или частичный набор компонентов, описанный в сущности. Математическое представление нелинейной системы и конкретная реализация системы однотипичны, и отображение  $p: S \rightarrow P^S$  является гомоморфизмом;

– количество состояний сущности определяется как  $K_{SE} = \prod_{i=1}^{K_{AE}} |V_i|$ , где  $K_{AE} = \sum_{i=1}^n [A_i]$  – количество характеристик сущности по разным типам. Количество состояний объекта  $K_S = \prod_{i=1}^{K_A} |V_i|$ , где  $K_A = \sum_{i=1}^n [A_i]$  – количество характеристик объекта по разным типам. Причем,  $K_S \leq K_{SE}$  и  $K_A \leq K_{AE}$ . Количество состояний системы  $K_{SS} = \prod_{i=1}^n |K_{iSE}|$ , количество состояний конкретной реализации системы –  $K_{PS} = \prod_{i=1}^n |K_{iS}|$ ,  $K_{PS} \leq K_{SS}$ . Если возможное значение характеристики представляет собой диапазон множества рациональных чисел, то количество состояний стремится к бесконечности [2]. Следовательно, для увеличения количества состояний сущности или объекта необходимо увеличивать количество возможных значений для характеристики и/или увеличивать количество характеристик. Аналогично для увеличения состояний системы необходимо увеличивать количество сущностей и/или количество состояний сущностей.

Приведенные математические представления нелинейных систем и их свойства не противоречат утверждению, что любая система представляет собой иерархию автономных подсистем, в которой

исходящие от верхнего уровня команды управления предопределяют переходы подсистем более низких уровней от одного режима функционирования к другому [2].

### **Заключение**

Полученные математические модели нелинейной системы, учитывающие все ее характеристики и состояния с приемлемой погрешностью, а также позволяющие использовать физические интерпретации процессов, ориентированы на широкое применение, например, моделирование и определение с высокой точностью параметров различных состояний веществ и материалов (прочность, сверхпроводимость, агрегатные состояния и т.п.); моделирование материалов с заданными свойствами; прогнозирование поведения объектов и процессов с высокой точностью; принятие решения как с участием человека, так и без него; управление объектами и процессами с участием и без участия человека.

### **Литература**

1. Шевнина Ю.С. Метод оценки состояния нелинейной системы на основе логического анализа данных // Известия вузов. Электроника. 2022. Т. 27, № 3. С. 407-415.
2. Шевнина Ю.С. Метод декомпозиции сложной нелинейной системы на основе процессного подхода // Системы управления и информационные технологии. 2021. № 3(85). С. 24-29.
3. Гагарина Л.Г., Шевнина Ю.С. Моделирование цифрового двойника производственного процесса с использованием смарт структуры // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXIII Международной научной конференции. Смоленск, 2022. Вып. 23. С. 84-90.
4. Хакен Г. Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1991
5. Садовский В.Н. Системный подход и общая теория систем: статус, основные проблемы и перспективы развития. М.: Наука, 1980.
6. Черногор С.А. Введение в синергологию и сложные системы моделирования. М.: Наука, 2008. 346 с.

**Ju.S. Shevnina, L.G. Gagarina**

National Research University of Electronic Technology

## **TO THE QUESTION OF SIMULATION OF COMPLEX NONLINEAR SYSTEMS**

**Keywords:** *nonlinear systems, algebraic systems, homomorphism of nonlinear systems, hierarchical system.*

**Abstract.** *The article presents an approach to obtaining a mathematical representation of nonlinear systems based on the assertion that any system is*

*a hierarchy of autonomous subsystems, in which control commands coming from the upper level predetermine the transitions of subsystems of lower levels from one mode of operation to another. The resulting mathematical representations of a dynamic system take into account all its characteristics and states with an acceptable error, and also allow the use of physical interpretations of processes.*

## РАЗДЕЛ 3

### Математика и её приложения

М. Алмохамед, И.В. Тихонов  
МТУСИ, МГУ имени М.В. Ломоносова

УДК 517.9

#### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Ключевые слова: дифференциальное уравнение четвертого порядка, линейные обратные задачи, единственность решения, элементарные решения.

*Сделаны специальные дополнения к теории линейных обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений высокого порядка. Указан модельный пример обратной задачи для уравнения четвертого порядка, где вопрос единственности решения допускает полное исследование в элементарных терминах. Для подтверждения общего результата подобраны одномерные дифференциальные операторы с подходящими спектральными свойствами. Это позволяет перевести нашу абстрактную схему на язык конкретных уравнений в частных производных.*

В последние десятилетия в рамках общей теории обратных задач (см. [1; 2]) сложился интерес к неклассическим задачам для абстрактных дифференциальных уравнений произвольного высокого порядка. Так, в недавней работе [3] в развитие прежних идей [4–6] рассмотрена модельная обратная задача с финальным переопределением вида  $u^{(q)}(T) = 0$  для уравнения  $u^{(n)}(t) = Au(t) + g$  произвольного натурального порядка  $n \geq 1$  при условиях  $u(0) = 0, \dots, u^{(n-1)}(0) = 0$ . Требуется восстановить функцию  $u(t)$  и неизвестный элемент  $g$ . Показано, что вопрос единственности решения для таких задач при всех сочетаниях  $n \in \mathbb{N}$  и  $q \in \{0, \dots, n-1\}$  находит свое полное выражение в терминах нулей специальных целых функций

$$Y_{n,n-q}(\lambda T^n) = E_{1/n}(\lambda T^n; n-q+1), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

с функциями  $E_\rho(z; \mu)$  типа Миттаг-Леффлера (см. [7]). При  $n \geq 3$  функции  $Y_{n,n-q}(\lambda T^n) = E_{1/n}(\lambda T^n; n-q+1)$  устроены достаточно сложно, и нужные нули оценивают аналитически – без знания их точных значений (см. [8]). Однако в работе [3] на основе прежней идеи [5] был указан случай  $n=4$ ,  $q=2$ , когда все нули функции  $Y_{4,2}(\lambda T^4) = E_{1/4}(\lambda T^4; 3)$  вычисляются явно и принимают значения  $\lambda_k = -4k^4\pi^4 / T^4$  при  $k \in \mathbb{N}$ .

Тем самым при  $n \geq 3$  выделяется одна обратная задача для уравнения четвертого порядка, где вопрос единственности решения допускает описание в самых элементарных терминах.

Сосредоточимся сейчас именно на этом случае. Для упрощения изложения заменим финальное значение  $T \in (0, +\infty)$  на  $T=1$ . Ввиду очевидной линейности ситуации полученные результаты сформулируем применительно к однородным (нулевым) условиям. Всё это не приводит к снижению общности.

Итак, в комплексном банаховом пространстве  $E$  на отрезке  $[0, 1]$  рассмотрим задачу о нахождении функции  $u: [0, 1] \rightarrow E$  и неизвестного элемента  $g \in E$  из соотношений

$$\frac{d^4 u(t)}{dt^4} = Au(t) + g, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 0, \quad (2)$$

$$u''(1) = 0. \quad (3)$$

Оператор  $A$  считаем линейным и замкнутым в  $E$  с областью определения  $D(A) \subset E$ , не обязательно плотной в  $E$ . Условия (2) суть стандартные условия Коши, а (3) – это специальное *финальное переопределение*. Задача (1)–(3) относится к классу *обратных задач* (см. [1; 2]).

*Решением* задачи (1)–(3) назовем пару  $(u(t), g)$ , удовлетворяющую перечисленным соотношениям и ограничениям

$$u \in C^4([0, 1], E), \quad u(t) \in D(A) \text{ при } 0 \leq t \leq 1, \quad g \in E.$$

Ясно, что задача (1)–(3) всегда имеет тривиальное решение

$$u(t) \equiv 0, \quad g = 0. \quad (4)$$

Все другие решения (если они есть) называем уже *нетривиальными*.

Для обратной задачи (1)–(3) установлен следующий критерий единственности решения (см. [3]).

**Теорема 1.** Пусть  $A$  – линейный замкнутый оператор в  $E$ . Для того чтобы однородная обратная задача (1)–(3) имела на  $[0, 1]$  только

тривиальное решение (4), необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел

$$\lambda_k = -4k^4\pi^4, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

не являлось собственным значением оператора  $A$ .

Дополним теорему 1 таким результатом.

**Теорема 2.** Предположим, что какое-то из чисел вида (5) с некоторым  $k \in \mathbb{N}$  есть собственное значение оператора  $A$ . Тогда задача (1)–(3) имеет нетривиальное элементарное решение

$$u(t) = \frac{1}{4k^4\pi^4} (1 - \operatorname{ch} k\pi t \cdot \cos k\pi t) f_k, \quad g = f_k, \quad (6)$$

с собственным вектором  $f_k \in D(A)$ ,  $f_k \neq 0$ ,  $Af_k = -4k^4\pi^4 f_k$ .

Подробное обсуждение этих результатов см. в работе [3].

Проиллюстрируем полученное конкретными примерами для уравнений в частных производных. Укажем сначала дифференциальные операторы  $A$  с подходящими спектральными свойствами.

**Пример 1.** Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} f^{(4)}(x) = \mu f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad f''(1) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

со спектральным параметром  $\mu \in \mathbb{C}$ .

Задаче (7) отвечает оператор  $A = d^4/dx^4$  в пространстве  $L_2(0, 1)$  на области определения

$$D(A) = \{ f \in H^4(0, 1) : f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad f''(1) = 0 \}.$$

Данный оператор имеет собственные значения

$$\mu_k = -4k^4\pi^4, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

с собственными функциями

$$f_k(x) = \operatorname{ch} k\pi x \cdot \cos k\pi x, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Помимо чисел (8) в спектр оператора  $A$  входит также собственное значение  $\mu_0 = 0$  с собственной функцией  $f_0(x) = 1$ , но это сейчас нам не понадобится.

**Пример 2.** Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} f^{(4)}(x) = \mu f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad f(1) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

со спектральным параметром  $\mu \in \mathbb{C}$ .

Задаче (10) отвечает оператор  $A = d^4/dx^4$  в пространстве  $L_2(0, 1)$  на области определения

$$D(A) = \left\{ f \in H^4(0,1): f(0) = 0, f'(0) = 0, f'''(0) = 0, f(1) = 0 \right\}.$$

Данный оператор имеет спектр, составленный из тех же собственных значений (8) с собственными функциями

$$f_k(x) = \operatorname{sh} k\pi x \cdot \sin k\pi x, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Других собственных значений здесь нет.

Теперь можно перейти к примерам конкретных обратных задач.

**Пример 3.** Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} u_{iiii}(x,t) = u_{xxxx}(x,t) + g(x), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_{tt}(x,0) = 0, \quad u_{iii}(x,0) = 0, \\ u_{tt}(x,1) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

с неизвестными функциями  $u(x,t)$  и  $g(x)$ .

Это аналог обратной задачи (1)–(3) с оператором  $A = d^4/dx^4$ , отвечающим спектральной задаче (7). При этом все числа (5) из теоремы 1 совпадают с собственными значениями (8), составляющими спектр данного оператора  $A$ . Отсюда заключаем, что единственность решения в обратной задаче (12) нарушается. По теореме 2, совмещая общий шаблон (6) с конкретными выражениями (9), получим элементарные решения для обратной задачи (12). Они имеют вид

$$u(t) = \frac{1}{4k^4\pi^4} (1 - \operatorname{ch} k\pi t \cdot \cos k\pi t) \operatorname{ch} k\pi x \cdot \cos k\pi x, \quad g(x) = \operatorname{ch} k\pi x \cdot \cos k\pi x.$$

Указанные пары удовлетворяют соотношениям (12) при всех  $k \in \mathbb{N}$ .

**Пример 4.** Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} u_{iiii}(x,t) = u_{xxxx}(x,t) + g(x), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_{tt}(x,0) = 0, \quad u_{iii}(x,0) = 0, \\ u_{tt}(x,1) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

с неизвестными функциями  $u(x,t)$  и  $g(x)$ .

Это аналог обратной задачи (1)–(3) с оператором  $A = d^4/dx^4$ , отвечающим спектральной задаче (10). Все числа (5) совпадают с собственными значениями (8) данного оператора  $A$ . По теореме 1 заключаем, что единственность решения в обратной задаче (13) нарушается. По теореме 2, совмещая (6) и (11), получаем элементарные решения вида

$$u(t) = \frac{1}{4k^4\pi^4} (1 - \operatorname{ch} k\pi t \cdot \cos k\pi t) \operatorname{sh} k\pi x \cdot \sin k\pi x, \quad g(x) = \operatorname{sh} k\pi x \cdot \sin k\pi x.$$

Указанные пары удовлетворяют задаче (13) при всех  $k \in \mathbb{N}$ .

Как видим, в обратных задачах (12) и (13) есть бесконечно много различных линейно независимых элементарных решений, находимых согласно теореме 2. Построенные примеры 3 и 4 носят, конечно, иллюстративный характер. Для дальнейшего развития теории было бы полезно привести примеры обратных задач вида (1)–(3), возникающих непосредственно в математической физике.

### Литература

1. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
2. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. N.Y., Basel: Marcel Dekker, 2000. 710 p.
3. Almohamed M., Tikhonov I.V. Specific cases of one general inverse problem for abstract differential equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. № 2. P. 502–509.
4. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 637–644.
5. Тихонов И.В. Обобщенная задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 3. С. 325–336.
6. Тихонов И.В. Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений: дис. ... д-ра физ.мат. наук: 01.01.02: защищена 29.10.08. М., 2008.
7. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
8. Попов А.Ю., Седлецкий А.М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.

**M. Almohamed, I. V. Tikhonov**  
MTUCI, MSU

### SPECIFIC EXAMPLES OF INVERSE PROBLEMS FOR FOURTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

**Keywords:** *fourth order differential equations, linear inverse problems, uniqueness of solution, elementary solutions.*

**Abstract.** *Special additions to the theory of linear inverse problems are done. A model example of one inverse problem for the fourth order abstract differential equation is considered. In this example, the uniqueness of a solution has a complete study at elementary terms. To confirm the general result, we point out one-dimensional differential operators with suitable spectral properties. This allows us to translate the abstract scheme into the language of practical partial differential equations.*

## О КОНТАКТНОЙ ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ключевые слова: *почти эрмитова структура, келерова структура, почти контактная метрическая структура, гиперповерхность, типовое число, структурные уравнения Картана.*

*Представлено несколько результатов о почти контактных метрических структурах, индуцированных на ориентируемых гиперповерхностях произвольного келерова многообразия размерности не ниже шести.*

### 1

Интересным и очень важным направлением в изучении взаимосвязи двух дифференциально-геометрических структур – почти контактной метрической и почти эрмитовой – является исследование структур на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. До 80-х годов прошлого века наиболее содержательные работы в этой области выполнили японские и американские геометры: М. Окумура, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, Х. Янамото, К. Яно, Д. Блэр, С. Голдберг. Позднее ряд замечательнейших результатов в данном направлении получили известный отечественный специалист Вадим Фёдорович Кириченко (значительную их часть содержит монография [1]) и некоторые его ученики. Особо выделим диссертационное исследование Л.В. Степановой [2], в котором содержатся глубокие результаты по этой тематике. Л.В. Степанова, проделав крайне сложную и трудоемкую работу, среди прочего вывела структурные уравнения Картана для почти контактной метрической структуры, которая индуцируется на ориентируемой гиперповерхности произвольного почти эрмитова многообразия. С помощью этих структурных уравнений Л.В. Степанова (а затем и другие исследователи) получила множество результатов о различных видах почти контактных метрических структур (косимплектической, слабо косимплектической, а также структур Сасаки, Кенмоцу и их многочисленных обобщений) на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий различных классов. Существенная часть фактов, полученных в этой области до 2012 года различными специалистами, нашла отражение в обзоре М.Б. Банару и В.Ф. Кириченко [3].

В настоящей заметке мы представляем несколько результатов о контактной геометрии (то есть геометрии почти контактных метрических структур) гиперповерхностей келеровых многообразий. Упомянутые выше структурные уравнения Картана, полученные Л.В. Степановой около тридцати лет назад, детализированы для случая, когда почти эрмитово многообразие является келеровым (см., например, [4; 5]). Все представленные здесь результаты получены именно с помощью этих детализированных структурных уравнений, а также классического тензорного исчисления.

## 2

Как известно, четверка тензорных полей  $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$  на многообразии нечетной размерности  $N^{2n-1}$  называется почти контактной метрической структурой на этом многообразии, если для этой четверки выполняются такие условия [1]:

$$\eta(\xi) = 1; \Phi(\xi) = 0; \eta \circ \Phi = 0; \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N^{2n-1}).$$

Здесь  $\xi$  – структурный вектор,  $\Phi$  – поле тензора типа (1,1),  $\eta$  – структурная форма,  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  – риманова метрика,  $\mathfrak{X}(N^{2n-1})$  – модуль  $C^\infty$ -гладких векторных полей на многообразии  $N^{2n-1}$ .

Известно также [1], что заданную на многообразии четной размерности  $M^{2n}$  пару  $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  называют почти эрмитовой структурой, если  $J$  – почти комплексная структура, а  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  – риманова метрика. При этом почти комплексная структура  $J$  и риманова метрика  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  должны удовлетворять такому соотношению

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}).$$

Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется почти эрмитовым. С каждой почти эрмитовой структурой  $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  на многообразии  $M^{2n}$  связано поле 2-формы, определяемой равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n})$$

и называемой фундаментальной (в некоторых работах келеровой) формой структуры.

В том случае, когда почти комплексная структура на многообразии интегрируема, то есть оператор почти комплексной структуры  $J$  является оператором Нейенхейса, почти эрмитово многообразие называют эрмитовым. Эрмитово многообразие называют келеровым, если  $\nabla F = 0$  [1].

Рассмотрим произвольное почти эрмитово многообразие  $(M^{2n}, \{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\})$ . Выберем и зафиксируем на нем точку  $p$ . Пусть  $T_p(M^{2n})$  – пространство, касательное к данному многообразию  $M^{2n}$  в этой точке,

$\{J_p, g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  – почти эрмитова структура, порожденная исходной структурой  $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ . Конструкция адаптированных почти эрмитовой структуре реперов (их чаще всего называют А-реперами) в естественной комплексификации касательного пространства устроена так:

$$(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}).$$

Здесь  $\varepsilon_a$  – собственные векторы оператора почти комплексной структуры, которые принадлежат собственному значению оператора  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\varepsilon_{\hat{a}}$  – собственные векторы, которые принадлежат собственному значению  $-i$ . Здесь индекс  $a$  принимает значения от 1 до  $n$ ;  $\hat{a} = a + n$  [6].

### 3

Как уже было сказано выше, отправной точкой для получения наших результатов служат записанные в А-репере структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности келерова многообразия:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega + i\sigma^{\alpha\beta} \omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - i\sigma_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega - i\sigma_{\alpha\beta} \omega^\beta \wedge \omega; \\ d\omega &= -i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + i\sigma_{n\beta} \omega \wedge \omega^\beta - i\sigma_n^\beta \omega \wedge \omega_\beta. \end{aligned}$$

Здесь через  $\{\omega^\alpha\}, \{\omega_\alpha\}$  обозначены компоненты форм смещения ( $\omega^n = \omega$ ); через  $\{\omega_j^k\}$  – компоненты форм римановой связности;  $\omega_\alpha = \omega^{\hat{a}}$ ;  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n-1$ ;  $a, b, c = 1, \dots, n$ ;  $\hat{a} = a + n$ ;  $\sigma$  – вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности  $N^{2n-1}$  в келерово многообразие  $M^{2n}$ ,  $n \geq 3$  [7].

Также напомним [8], что под типовым числом гиперповерхности риманова многообразия понимают ранг ее второй квадратичной формы (ранг матрицы  $\sigma$  в нашем случае).

**Теорема 1.** Почти контактная метрическая структура на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести является косимплектической, если типовое число этой гиперповерхности равно нулю или единице.

**Теорема 2.** На гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести существует отличная от косимплектической почти контактная метрическая структура косимплектического типа.

**Теорема 3.** В келеровом многообразии размерности не ниже шести гиперповерхности с типовым числом 2 допускают почти контактную метрическую структуру косимплектического типа.

**Теорема 4.** *В келеровом многообразии размерности не ниже шести гиперповерхности с типовым числом 2 допускают почти контактную метрическую структуру, отличную от структуры Кенмоцу и структуры Сасаки.*

Отметим, что первые два результата сначала были установлены в частном случае для почти контактных метрических гиперповерхностей 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав [9], [10], а две другие теоремы получены при детализации более общих результатов [11], [12] о почти контактных метрических структурах на гиперповерхностях приближенно келеровых многообразий.

### Литература

1. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Одесса: Печатный дом, 2013. 458с.
2. Степанова Л.В. Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий: дис. ... канд. физ.-мат.наук. М.: МПГУ им. В.И. Ленина, 1995.
3. Banaru M.B., Kirichenko V.F. Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // J. Math. Sci., New York. 2015. Vol. 207, № 4. P.513-537.
4. Степанова Л.В., Банару Г.А., Банару М.Б. О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. №1. С.86-89.
5. Степанова Л.В., Банару М.Б., Банару Г.А. О геометрии QS-гиперповерхностей келеровых многообразий // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т.15. С.815-822.
6. Banaru M.B., Banaru G.A. 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT J. Math. 2015. Vol. 51, № 1. P.1-9.
7. Банару М.Б. О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, №4. С. 719–723.
8. Банару М.Б. О типовом числе косимплектических гиперповерхностей 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44, № 5. С. 981–991.
9. Банару М.Б. О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Известия высших учебных заведений. Математика. 2003. № 7. С. 59-63.
10. Банару М.Б. О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в 6-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 10. С. 13-18.
11. Abu-Saleem A., Banaru M.B., Banaru G.A. A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2017. Т. 85, №3. С.107–114.
12. Banaru M., Banaru G. A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III. Mathematics, Informatics, Physics. 2015. Т. 8, № 2. P.21-28.

**M.B. Banaru, G.A. Banaru**  
Smolensk State University

## **ON CONTACT GEOMETRY OF HYPERSURFACES IN KÄHLERIAN MANIFOLDS**

**Keywords:** almost Hermitian structure, Kählerian structure, almost contact metric structure, hypersurface, type number, Cartan structural equations.

**Abstract.** *We present some results on almost contact metric structures induced on oriented hypersurfaces in an arbitrary Kählerian manifold of dimension at least six.*

**А.О. Блинов, А.В. Борисов, Л.В. Кончина, К.С. Маслова**  
*Филиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ» в г. Смоленске*

УДК 531.3

## **ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОДСИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ МОДЕЛЮ ЭКЗОСКЕЛЕТА**

**Ключевые слова:** *электрический привод, экзоскелет, локальная система координат, система уравнений Лагранжа – Максвелла, управление, функции Лагранжа и Релея.*

*Разработана электрическая подсистема для управления моделью экзоскелета опорно-двигательного аппарата человека. Для описания движения звена использована локальная система координат. Записаны функции Лагранжа и Релея, составлена система дифференциальных уравнений Лагранжа – Максвелла. Управление отрабатывается на модели одного звена. Представлены результаты численного моделирования. Из таких звеньев с электрическими приводами можно будет создавать модели экзоскелетов с любым необходимым количеством звеньев.*

**1. Введение.** Проблема создания комфортабельных энергетически эффективных экзоскелетов носит комплексный характер и находится на стыке нескольких наук: механики, электродинамики, теории управления, робототехники, биомеханики, анатомии и физиологии. В данной статье рассматривается электрическая подсистема при использовании в приводах экзоскелета электрических двигателей постоянного тока. Подобные модели и вопросы управления описываются в работах [1–5]. В отличие от имеющихся работ, в данной модели используется

локальная система координат, так как при этом есть возможность использовать углы между звеньями при построении многозвенной модели.

**2. Модель звена экзоскелета с электрической подсистемой.** Модель состоит из одного подвижного звена, с углом, отсчитываемым между двумя системами координат – абсолютной и локальной. При этом ось абсцисс локальной системы координат совпадает со звеном (рис. 1).

Пусть в точке  $A_0$  расположен электрический привод, управляющий движением звена экзоскелета. Введем электрическую часть управления движением электродвигателя. Уравнения движения с электрической подсистемой записываются в виде уравнений Лагранжа – Максвелла [3; 4]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_1} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{i}_1} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial i_1} = U_1. \end{cases} \quad (1)$$

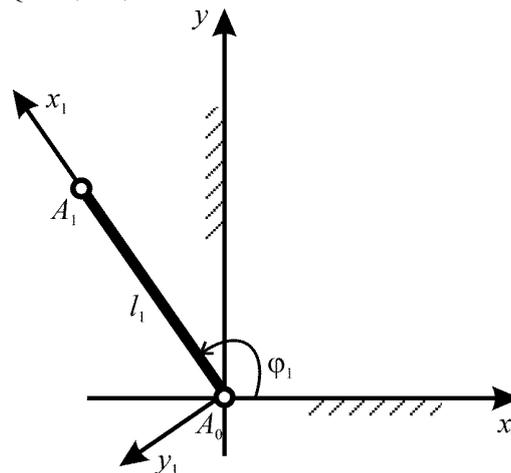


Рис. 1. Модель звена экзоскелета с электрической подсистемой

Функции Лагранжа и Релея для рассматриваемой модели звена экзоскелета могут быть записаны в виде:

$$L = \frac{1}{2} (I_1 + I_R k_R^2) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} L_1 \dot{i}_1^2 + c_1 k_R \varphi_1 \dot{i}_1 - \frac{1}{2} m_1 l_1 g \sin \varphi_1, \quad (2)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} R_1 \dot{i}_1^2. \quad (3)$$

Тогда система уравнений движения принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{c_1 k_R} \left[ (I_1 + I_R k_R^2) \ddot{\varphi}_1 + (1/2) m_1 l_1 g \cos \varphi_1 \right] = \dot{i}_1, \\ L_1 \ddot{i}_1 + c_1 k_R \dot{\varphi}_1 + R_1 \dot{i}_1 = U_1, \end{cases} \quad (4)$$

$$(5)$$

где  $R_1, L_1$  – обобщенные сопротивление и индуктивность обмоток ротора электродвигателя,  $c_1$  – коэффициент электромеханического

взаимодействия,  $i_1 = i_1(t)$  – ток во внешней цепи ротора,  $U_1 = U_1(t)$  – подаваемое на двигатель напряжение,  $I_R$  – момент инерции ротора электродвигателя относительно оси вращения,  $k_R$  – передаточное число редуктора.

Система уравнений (4)–(5) может быть преобразована подстановкой выражения для силы тока  $i_1$  из уравнения (4) и ее производной в (5) к одному дифференциальному уравнению движения звена экзоскелета:

$$\frac{1}{c_1 k_R} \left[ (I_1 + I_R k_R^2) L_1 \ddot{\phi}_1 + (I_1 + I_R k_R^2) R_1 \dot{\phi}_1 + (c_1^2 k_R^2 - (1/2) L_1 l_1 m_1 g \sin \phi_1) \dot{\phi}_1 + R_1 (1/2) m_1 l_1 g \cos \phi_1 \right] = U_1. \quad (6)$$

Управляющим параметром в системе является напряжение, неизвестной искомой функцией – угол поворота звена  $\phi_1$ .

**3. Результаты численного моделирования.** Исходя из максимальных значений момента нагрузки и скорости, в качестве примера выбираем подходящие электродвигатель и редуктор из номенклатуры выпускаемых в настоящее время. В результате подбора выбираем синхронный двигатель с постоянными магнитами марки TECNOTION QTR-A-78 [6] и волновой редуктор марки Harmonic Drive CPL-2A [7]. Момент инерции ротора электродвигателя  $I_R = 1,3 \cdot 10^{-5}$  кг·м<sup>2</sup>, передаточное число редуктора  $k_R = 100$ , номинальное напряжение  $U_1 = 48$  В, сопротивление якоря  $R_1 = 0,857$  Ом, индуктивность якоря  $L_1 = 0,00135$  Гн. Коэффициент электромеханического взаимодействия входит в уравнение (6) в виде произведения с передаточным числом редуктора, поэтому определим его совместно [3; 5]:  $c_1 k_R = M_{1P} / U_1$ . Пусковой момент на выходе редуктора оценим по формуле:  $M_{1P} \approx g m_1 l_1 / 2$ . Таким образом, получаем:  $c_1 k_R = g m_1 l_1 / 2 U_1 \approx 0.115$  Н·м/В,  $c_1 \approx 0.00115$  Н·м/В. Начальные условия имеют вид  $\phi_1(0) = 1.82$  рад,  $\dot{\phi}_1(0) = 0$  рад/с,  $\ddot{\phi}_1(0) = 0$  рад/с<sup>2</sup>.

Используем программное управление движением модели [1]. Решая прямую задачу динамики для системы уравнений движения (4)–(5), находим зависимости силы тока и напряжения, графики которых представлены на рисунке 2.

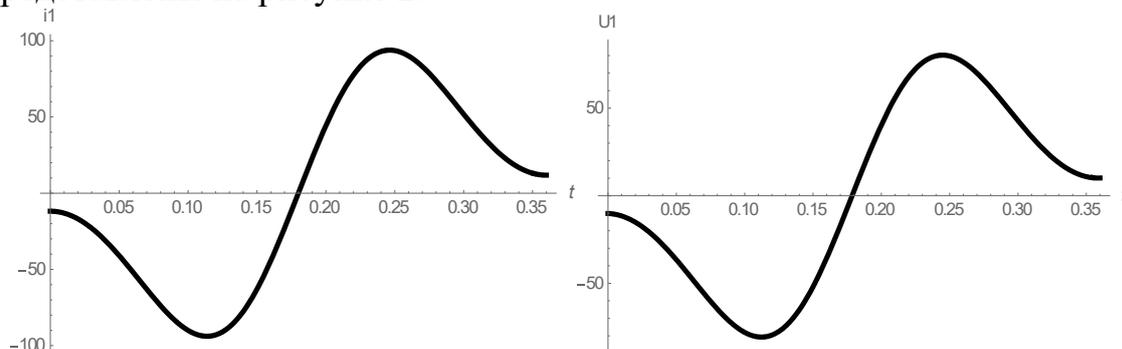


Рис. 2. Зависимости силы тока  $i_1$  (А) и напряжения  $U_1$  (В) от времени  $t$  (с)

Далее, полученные зависимости силы тока и напряжения от времени были аппроксимированы ступенчатыми функциями (рис. 3).

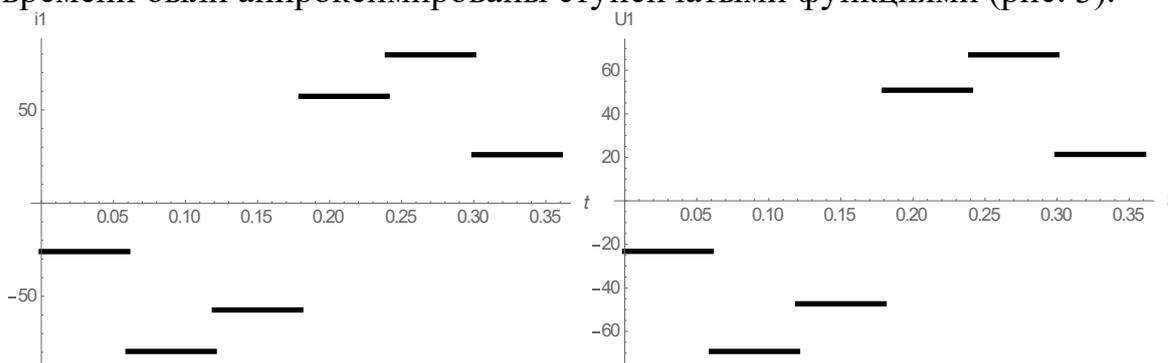


Рис. 3. График аппроксимации ступенчатой функцией силы тока  $i_1$  (А) и напряжения  $U_1$  (В) от времени  $t$  (с)

В результате решения задачи Коши для уравнения (6) с управляющим напряжением в виде ступенчатой функции, представленным на рисунке 3, получены следующие зависимости угла поворота звена от времени, показанные на рисунке 4.

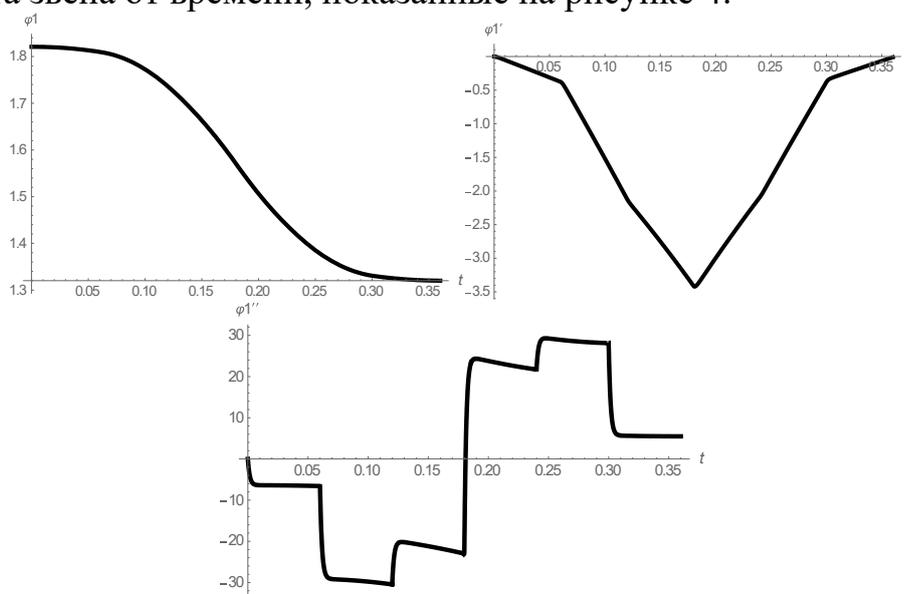


Рис. 4. Результаты решения задачи Коши – найденные угол поворота  $\varphi_1$  (рад), угловая скорость  $\dot{\varphi}_1$  (рад/с) и угловое ускорение  $\ddot{\varphi}_1$  (рад/с<sup>2</sup>) звена в зависимости от времени  $t$  (с)

Полученный результат хорошо согласуется с результатами работ [1–5]. Затраты энергии механизма при движении в этом случае можно вычислить по следующей формуле:

$$A = \int_0^{t_k} |U_1 i_1| dt, \quad (7)$$

где  $t_k$  – время движения механизма,  $U_1, i_1$  – напряжение и сила тока в электродвигателе аппарата.

Применяя формулу (7) к оценке энергетических затрат привода, осуществляющего поворот звена при задании управляющего момента в

виде ступенчатой функции (рис. 3), имеем:  $A_{\phi_1} = 1057.35$  Дж, являющиеся энергозатратами механизма.

**4. Заключение.** В результате проведенного исследования создана электрическая подсистема для управления движением звена экзоскелета. Численным моделированием показано хорошее сходство с другими имеющимися моделями.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда и Смоленской области № 22-29-20308, <https://rscf.ru/project/22-29-20308/>.

### Литература

1. Blinov A., Borisov A., Filippenkov K., Konchina L., Maslova K. Modeling the dynamics of an exoskeleton link of variable length using the Lagrange – Maxwell system of differential equations of motion // Journal of Applied Informatics. 2022. Vol. 99, No. 3, P. 117-130.

2. Колюбин С.А. Динамика робототехнических систем: учеб. пособ. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. 117 с.

3. Сирегар Х.П. Энергетические затраты при ходьбе антропоморфных роботов: дис. ... канд. технич. наук. М. 2003. 134 с.

4. Белов М.П., Чыонг Д.Д., Лань Н.В. Разработка математической модели и управление методом разделения закона управления для экзоскелета // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2020. № 1. С. 71-77.

5. Варков А.А. Разработка и исследование системы управления манипуляционным промышленным роботом на базе контроллера движения: дис. ... канд. технич. наук. Иваново. 2015. 133 с.

6. <https://www.tecnotion.com/>.

7. <https://innodrive.ru/>.

**A.O. Blinov, A.V. Borisov, L.V. Konchina, K.S. Maslova**

The Branch of National Research University  
«Moscow Power Engineering Institute»

### ELECTRICAL SUBSYSTEM OF EXOSKELETON MODEL CONTROL

**Keywords:** *electric drive, exoskeleton, local coordinate system, system of Lagrange-Maxwell equations, control, Lagrange and Rayleigh functions.*

**Abstract.** *An electrical subsystem has been developed to control the exoskeleton model of the human musculoskeletal system. To describe the movement of the link, the local coordinate system is used. The Lagrange and Rayleigh functions are written, the system of Lagrange-Maxwell differential equations is compiled. Management is worked out on the model of one link. The results of numerical simulation are presented. From such links with*

*electric drives it will be possible to create models of exoskeletons with any necessary number of links.*

### **Acknowledgments**

The work was supported by the Russian Science Foundation and Smolensk region no. 22-29-20308, <https://rscf.ru/en/project/22-29-20308/>.

**А.О. Блинов, А.В. Борисов, Л.В. Кончина, М.А. Новикова**  
*Филиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ» в г. Смоленске*

УДК 531.3

## **МОДЕЛЬ ЭКЗОСКЕЛЕТА С ПЯТЬЮ ЗВЕНЬЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ И РЕГУЛИРУЕМОЙ ПОСРЕДСТВОМ МАГНИТНО-РЕОЛОГИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ЖЕСТКОСТЬЮ**

*Ключевые слова: экзоскелет, звено переменной длины, жесткость, магнитно-реологическая жидкость, система дифференциальных уравнений, шарнир, управление.*

*Предложена модель экзоскелета в пространстве для опорно-двигательного аппарата человека, состоящая из пяти звеньев переменной длины и точечной массы на конце, моделирующей голову. Особенность рассматриваемой модели состоит в применении магнитно-реологической жидкости на участках переменной длины для управления жесткостью звеньев. Модель поможет созданию приближенных к биомеханике опорно-двигательного аппарата человека комфортабельных, в сравнении с имеющимися в настоящее время, экзоскелетов. Соединения звеньев моделируются шарнирами, реализующими необходимое вращательное движение. Управление движением модели реализуется изменением длины звеньев и углов между звеньями.*

**1. Введение.** Экзоскелеты могут значительно облегчить жизнь людей с проблемами опорно-двигательного аппарата. Однако пока они имеют ряд проблем [1–4]. Оценке эффективности использования экзоскелетов посвящены работы [5–6]. Разработана модель с пассивным управлением длиной участка переменной длины с использованием

магнитно-реологической жидкости, изменения ее вязкости под действием прилагаемого внешнего магнитного поля [7–9].

**2. Модель экзоскелета с пятью звеньями переменной длины с регулируемой жесткостью.** Рассмотрим 3D-модель экзоскелета, состоящего из пяти звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью в одноопорной фазе движения. Введем неподвижную декартову систему координат, связанную с Землей  $A_0x_0y_0z_0$  (рис. 1), с началом в закрепленном сферическом шарнире  $A_0$ . В модели используются сферические шарниры, которые позволяют с избытком реализовать возможные степени подвижности в реальном опорно-двигательном аппарате человека. Для составления системы дифференциальных уравнений движения используем подвижные локальные системы координат  $A_{i-1}x_iy_iz_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), жестко связанные со сферическими шарнирами  $A_i$ , в которых реализуются повороты звеньев. Такой способ описания движения позволяет использовать углы между звеньями, что соответствует режиму работы реальных приводов различных конструкций, изменяющих относительные углы. Оси  $z_i$  направим вдоль подвижных звеньев  $A_{i-1}A_i$  (рис. 1).

Звенья одинаковой конструкции  $A_{i-1}A_i$  состоят из штоков  $A_iD_i$  с поршнями  $D_i$ , находящимися внутри корпусов  $B_iC_i$ . Корпуса являются тонкостенными цилиндрами с намотанными на них электромагнитными катушками. Внутри цилиндры заполнены магнитно-реологической жидкостью. Снизу к цилиндрам жестко прикреплены абсолютно твердые стержни  $A_{i-1}B_i$  и  $A_iB_{i+1}$ , на обратном конце которых расположены сферические шарниры. В шарнирах предполагается возможность создания необходимых управляющих моментов. На конце механизма, в точке  $A_5$  имеется сосредоточенная масса  $m_p$ , которая может приближенно моделировать голову и верхние конечности. Длины участков стержня:  $A_{i-1}B_i = l_{i1}$ ,  $D_iA_i = l_{i2}$ , где первый индекс равен номеру звена, второй – номеру участка на звене. Длины цилиндров с магнитно-реологической жидкостью:  $B_iC_i = l_{i3}$ , диаметры считаем пренебрежимо малыми в сравнении с длиной, т.е. допустим, что цилиндр с магнитно-реологической жидкостью моделируется стержнем. Массы отдельных элементов звеньев равны  $m_{i1}$ ,  $m_{i2}$ ,  $m_{i3}$  соответственно. Моменты инерции перпендикулярно плоскости, в которой происходит вращение стержней, относительно их концов равны  $I_{i1}$ ,  $I_{i2}$ ,  $I_{i3}$  соответственно. В первом приближении допустим, что сами поршни  $D_i$  имеют пренебрежимо малую массу и моменты инерции в сравнении со стержнями  $D_iA_i$ . Длина звена изменяется вследствие относительного движения вдоль направления звеньев  $A_{i-1}A_i$  и  $A_iA_{i+1}$  поршней со штоками  $D_iA_i$  внутри цилиндров с магнитно-реологической жидкостью  $B_iC_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ).

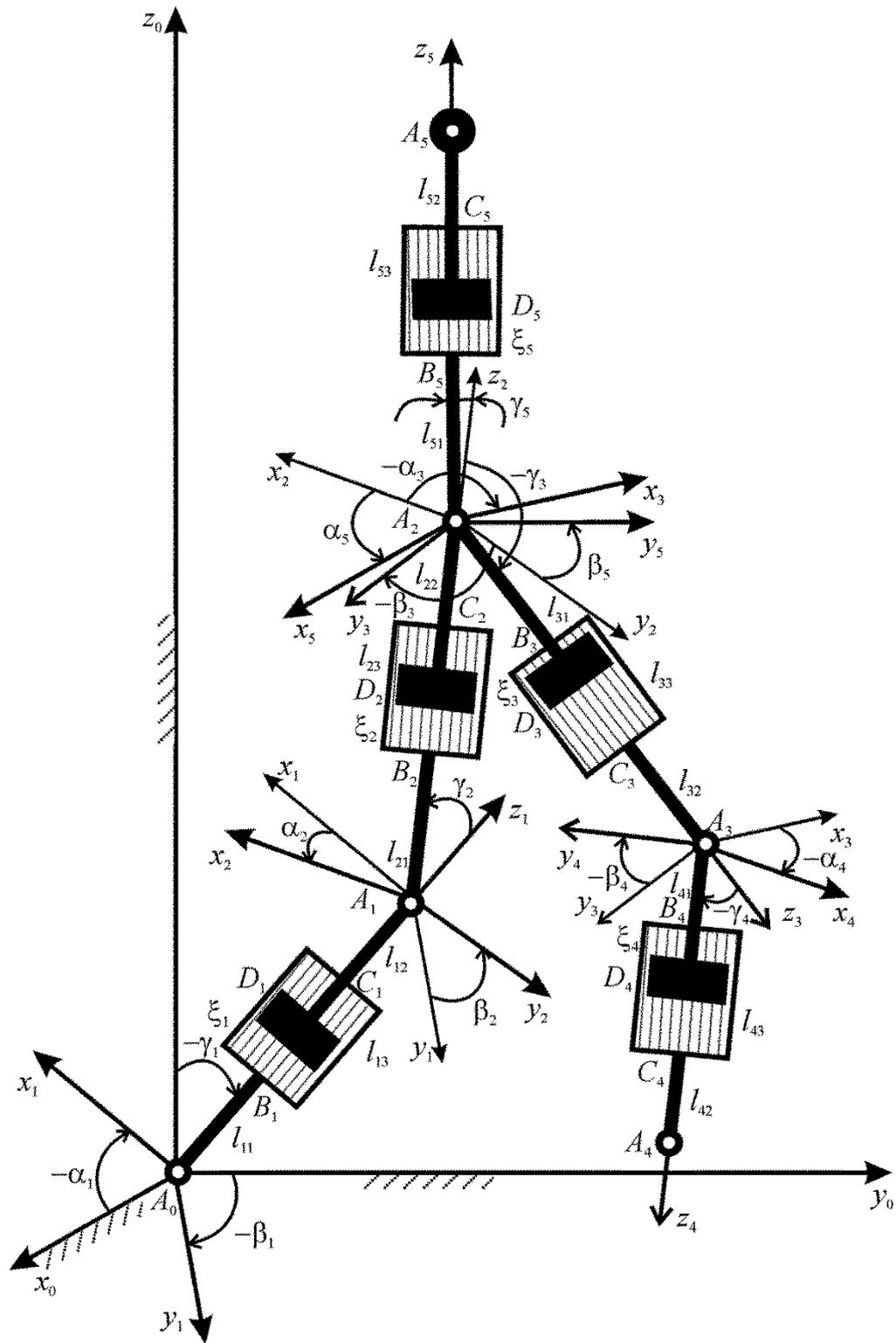


Рис. 1. Пространственная модель пяти звеньев экзоскелета переменной длины с регулируемой жесткостью (показан случай с приложенным внешним магнитным полем, когда магнитные частицы ориентируются вдоль силовых линий поля)

Магнитно-реологическая жидкость реализует силы сопротивления  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), действующие вдоль штоков с поршнями. В результате действия внешнего магнитного поля магнитные частицы частично

ориентируются вдоль силовых линий магнитного поля, причем с увеличением напряженности магнитного поля доля ориентированных частиц увеличивается, тем самым увеличивается сила сопротивления магнитно-реологической жидкости движению поршня. Следовательно, обеспечивается управляемое изменение длины звена в соответствии с фазой ходьбы и нагрузкой от соседних звеньев.

Состояния звеньев зависят от двадцати параметров и однозначно определяются углами  $\alpha_i(t)$ ,  $\beta_i(t)$ ,  $\gamma_i(t)$ , переменными длинами участков звена между поршнем и дном цилиндра  $B_iD_i = \xi_i(t)$ . Следовательно, модель двух звеньев опорной ноги экзоскелета с переменной длиной и регулируемой жесткостью имеет восемь степеней свободы. Управляющие моменты, развиваемые в сферических шарнирах  $A_{i-1}$  с идеальными связями, обозначим  $M_{i\alpha}$ ,  $M_{i\beta}$ ,  $M_{i\gamma}$ , считаем мгновенно развиваемыми требуемое усилие.

Кинетическая энергия рассматриваемого механизма вычисляется путем интегрирования по всем весомым участкам  $A_{i-1}B_i$ ,  $B_iC_i$ ,  $D_iA_i$ :

$$T = \frac{1}{2} \left( m_p V_{A_5}^2 + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 \int_0^{l_{ij}} \rho_{ij} V_{ij}^2 d\zeta_{ij} \right), \quad (1)$$

где:  $i$  – номер звена ( $i = 1, 2, \dots, 5$ );  $j$  – номер участка на звене, причем  $j = 1$  соответствует нижним участкам  $A_{i-1}B_i$ ,  $j = 2$  соответствует штокам с поршнями  $D_iA_i$ ,  $j = 3$  соответствует цилиндрам  $B_iC_i$ ,  $\zeta_{ij}$  – координата бесконечно малой частицы  $j$ -того инерционного участка  $i$ -того звена,  $\rho_{ij}$  – плотность  $j$ -того участка  $i$ -того звена, при этом  $m_{ij} = \rho_{ij} l_{ij}$ ,  $I_{ij} = \rho_{ij} l_{ij}^3 / 3$ ,  $l_{ij}$ ,  $m_{ij}$ ,  $I_{ij}$  – длина, масса, момент инерции  $j$ -того участка  $i$ -того звена,  $m_p$  – масса полезной нагрузки, расположенная в точке  $A_5$ ,  $V_{A_5}^2$  – квадрат скорости точки  $A_5$ ,  $V_{ij}^2$  – квадрат скорости бесконечно малой частицы  $j$ -того участка  $i$ -того звена.

Кинетическая энергия предложенной модели громоздка, вследствие того, что звенья совершают сложное движение вокруг полюсов  $A_i$ , поэтому приведем формулу кинетической энергии первого звена

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[ (I_{11} + I_{12} + I_{13} + (l_{11}^2 + l_{11}l_{12} + 2l_{11}\xi_1 + l_{12}\xi_1 + \xi_1^2)m_{12} + (l_{11}^2 + l_{11}l_{13})m_{13}) \times \right. \\ \left. \times (\dot{\alpha}_1^2 \cos^2 \beta_1 + \dot{\beta}_1^2) + m_{12} \dot{\xi}_1^2 \right] \quad (2)$$

С использованием уравнений Лагранжа второго рода была составлена система дифференциальных уравнений для предложенной на

рисунке 1 модели экзоскелета в виде пяти звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью, которая не приводится из-за громоздкости.

**3. Заключение.** Создана модель экзоскелета в виде пяти звеньев со звеньями переменной длины с регулируемой жесткостью. Описан механизм изменения длины звена под действием внешнего магнитного поля. Модель может найти применение при создании комфортабельных экзоскелетов с регулируемой жесткостью звеньев для широкого круга пользователей.

### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00491, <https://rscf.ru/project/22-21-00491/>.

### **Литература**

1. Borisov A.V., Chigarev A.V., The Causes of a Change in The Length of a Person's Link and Their Consideration When Creating an Exoskeleton, Biomedical Journal of Scientific and Technical Research. 2020. Vol. 25, P. 18769-18771.

2. Piña-Martínez E., Rodríguez-Leal E., Inverse Modeling of Human Knee Joint Based on Geometry and Vision Systems for Exoskeleton Applications, Mathematical Problems in Engineering. V. 2015.

3. Nordin M., Frankel H., Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System. Lippicott – London, Williams & Wilkins, 2001. P. 467.

4. Borisov A.V., Chigarev A.V. Mathematical Models of Exoskeleton. Dynamics, Strength, Control. Monograph. Springer, 2022. 232 p.

5. Franks P.W., Bryan G.M., Martin R.M., Reyes R., Lakmazaheri A.C. and Collins S.H. (2021). Comparing optimized exoskeleton assistance of the hip, knee, and ankle in single and multi-joint configurations. Wearable Technologies, 2, e16, doi:<https://doi.org/10.1017/wtc.2021.14>

6. Das Gupta S., Bobbert M.F. and Kistemaker D.A. (2019). The metabolic cost of walking in healthy young and older adults – A systematic review and meta analysis. Scientific Reports 9(1), 9956.

7. Bougrinat Y. Design and development of a lightweight ankle exoskeleton for human walking augmentation. (Université de Montréal, 2018), P. 114.

8. Blinov A., Borisov A., Konchina L., Novikova M. Applying the models of magneto-rheological substances in the study of exoskeleton variable-length link with adjustable stiffness. // Journal of Applied Informatics. 2022. Vol. 98, No. 2, P. 133-142.

9. Jason P. Rich, Patrick S. Doyle, Gareth H. McKinley. Magnetorheology in an aging, yield stress matrix fluid // Original contribution. 2012. Vol. 51. P. 579–593.

**A.O. Blinov, A.V. Borisov, L.V. Konchina, M.A. Novikova**

The Branch of National Research University

«Moscow Power Engineering Institute»

**EXOSKELETON MODEL WITH FIVE PARTS OF VARIABLE  
LENGTH AND RIGIDITY ADJUSTABLE BY MEANS OF  
MAGNETIC-RHEOLOGICAL FLUID**

**Keywords:** *exoskeleton, link of variable length, rigidity, magnetic rheological fluid, system of differential equations, hinge, control.*

**Abstract.** *A model of an exoskeleton in space for the human musculoskeletal system is proposed, consisting of five links of variable length and a point mass at the end, simulating the head. A feature of the model under consideration is the use of a magnetic rheological fluid in sections of variable length to control the rigidity of the links. The model will help create comfortable exoskeletons close to the biomechanics of the human musculoskeletal system, in comparison with those currently available. Link connections are modeled by hinges that implement the necessary rotational movement. The movement of the model is controlled by changing the length of the links and the angles between the links.*

### **Acknowledgments**

This work was supported by the Russian Science Foundation № 22-21-00491, <https://rscf.ru/project/22-21-00491/>.

**С.А. Васильев, М.А. Буатта, И.С. Колосова**  
*Российский университет дружбы народов*

УДК 517.928.2, 539.129.2

## **АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КАДЫШЕВСКОГО С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Ключевые слова: *уравнение Кадышевского, дифференциальное уравнение бесконечного порядка, малый параметр, периодические краевые условия.*

*В данной работе рассматривается краевая задача Штурма – Лиувилля с периодическими краевыми условиями для уравнения Кадышевского (релятивистского аналога уравнения Шредингера), представляющего собой сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение бесконечного порядка. Для построения приближенного решения задачи Штурма – Лиувилля используются асимптотические методы теории сингулярных возмущений. В качестве квазипотенциала рассматривается случай бесконечно глубокой квантовомеханической ямы, что позволяет построить приближенное решение задачи о*

поведении свободной релятивистской кваномеханической частицы на одномерном торе.

**1. Постановка задачи.** Релятивистский конечно-разностный аналог уравнения Шредингера, которое также называют уравнением Кадышевского [2–5], с квазипотенциалом в релятивистском конфигурационном пространстве для радиальных волновых функций связанных состояний двух одинаковых элементарных частиц без спина имеет вид:

$$[H_0^{rad} + V(r) - 2c\sqrt{q^2 + m^2c^2}] \psi(r, l) = 0, \quad (1)$$

где

$$H_0^{rad} = 2mc^2 ch \left( \frac{i\hbar}{mc} D \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr(r + \frac{i\hbar}{mc})} \exp \left( \frac{i\hbar}{mc} D \right) = \quad (2)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p 2mc^2}{(2p)!!} \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^{2p} D^{2p} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr(r + \frac{i\hbar}{mc})} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \frac{i\hbar}{mc} \right)^p D^p, \quad D^p = d^p / dr^p,$$

где  $m$  – масса,  $q$  – импульс,  $l$  – угловой момент каждой элементарной частицы и  $V(r)$  – квазипотенциал (кусочно-непрерывная функция).

Пусть далее параметры уравнения (1) равны  $\hbar = 1, m = 1, \varepsilon = c^{-1}$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) и пусть  $l = 0$  (случай  $S$ -волны), тогда имеют место следующие соотношения:

$$\lambda_{\varepsilon, \infty} = 2q^2 / \sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} + 1, v(r) = V(r), q^2 = (1 + 0.25\varepsilon^2 \lambda_{\varepsilon, \infty}) \lambda_{\varepsilon, \infty}.$$

В этом случае уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$[\bar{L}_{\infty}^{\varepsilon} - \lambda_{\infty}(\varepsilon)] \psi_{\infty}(r, \varepsilon) = 0, \quad (3)$$

$$\bar{L}_{\infty}^{\varepsilon} = L_2 + \varepsilon^2 L_{\infty}^{\varepsilon} = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^{2p-2} L_{2p} + v(r), \quad L_{2p} = \frac{2(-1)^p}{(2p)!!} D^{2p},$$

$$L_2 = -D^2 + v(r), \quad L_{\infty}^{\varepsilon} = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^{2p} L_{2p+2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p+2)!!} \varepsilon^{2p} D^{2p+2}.$$

Уравнение (3) представляет собой дифференциальное уравнение бесконечного порядка с малым параметром ( $\varepsilon \ll 1$ ) при старших производных, и его можно отнести к классу сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [1].

Сформулируем задачу Штурма – Лиувилля  $A_{\varepsilon}^{\infty}$  на отрезке  $[0, 1]$  для определения собственных функций  $[\psi_{\infty, n}(r, \varepsilon)]_{n=1}^{\infty}$  и собственных значений  $[\lambda_{\infty, n}(\varepsilon)]_{n=1}^{\infty}$  следующим образом:

$$\begin{cases} [\bar{L}_\infty^\varepsilon - \lambda_\infty(\varepsilon)]\psi_\infty(r, \varepsilon) = 0, \\ D^i \psi_\infty(0, \varepsilon) = D^i \psi_\infty(1, \varepsilon), \quad i = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (4)$$

Пусть собственные функции  $[\psi_{\infty, n}(r, \varepsilon)]_{n=1}^\infty$  и собственные значения  $[\lambda_{\infty, n}(\varepsilon)]_{n=1}^\infty$  задачи  $A_\varepsilon^\infty$  можно представить в виде следующих асимптотических рядов:

$$\begin{aligned} \Theta \psi_\infty(r, \varepsilon) &= \bar{\psi}_\infty(r, \varepsilon) + \Pi_\infty \psi(\rho_1, \varepsilon) + Q_\infty \psi(\rho_2, \varepsilon) = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k (\bar{\psi}_{\infty, k}(r) + \Pi_{\infty, k} \psi(\rho_1) + Q_{\infty, k} \psi(\rho_2)), \\ \lambda_\infty(\varepsilon) &\equiv \lambda_{\infty, 0} + \varepsilon \lambda_{\infty, 1} + \varepsilon^2 \lambda_{\infty, 2} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

В данном исследовании ограничимся случаем, когда функция  $v(r) = 0$ , которая представляет собой квазипотенциал бесконечно глубокой квантовомеханической ямы, что позволяет провести анализ решений задачи  $A_\varepsilon^\infty$  о поведении свободной релятивистской квантовомеханической частицы на одномерном торе (на замкнутой кривой единичной длины без самопересечений).

## 2. Построение асимптотического решения.

Если подставить разложения (5) в уравнение и периодические краевые условия задачи (4), то получим:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^\infty \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \varepsilon^{2p-2} \frac{d^{2p} \bar{\psi}_\infty}{dr^{2p}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{p=1}^\infty \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} \Pi_\infty \psi}{d\rho_1^{2p}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{p=1}^\infty \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} Q_\infty \psi}{d\rho_2^{2p}} + \\ + \sum_{p=0}^\infty \varepsilon^p \sum_{q=0}^p [\lambda_{\infty, q} (\bar{\psi}_{\infty, q-p} + \Pi_{\infty, q-p} \psi + Q_{\infty, q-p} \psi)] = 0, \end{aligned}$$

где краевые условия для задачи  $A_\varepsilon^\infty$ :

$$\bar{\psi}_\infty(0, \varepsilon) + \Pi_\infty \psi(0, \varepsilon) = \bar{\psi}_\infty(1, \varepsilon) + Q_\infty \psi(1, \varepsilon),$$

$$D^i (\bar{\psi}_\infty(0, \varepsilon) + \Pi_\infty \psi(0, \varepsilon)) = D^i (\bar{\psi}_\infty(1, \varepsilon) + Q_\infty \psi(1, \varepsilon)), \quad i = 1, 2, \dots,$$

и при этом необходимо  $\Pi_{\infty, k} \psi(\rho_1) \rightarrow 0, Q_{\infty, k} \psi(\rho_2) \rightarrow 0, k = 0, 1, 2, \dots$

Если приравнять члены, которые стоят при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$ , то получим задачи, решения которых позволят определить члены разложения (5).

В нулевом приближении получаем задачу для поиска решений  $\bar{\psi}_{\infty, 0}(r, \varepsilon), \Pi_{\infty, 0} \psi, Q_{\infty, 0} \psi$  и  $\lambda_{\infty, 0}$ :

$$\frac{d^2 \bar{\psi}_{\infty, 0}}{dr^2} + \lambda_{\infty, 0} \bar{\psi}_{\infty, 0} = 0, \quad \sum_{p=1}^\infty \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} \Pi_{\infty, 0} \psi}{d\rho_1^{2p}} = 0, \quad \sum_{p=1}^\infty \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} Q_{\infty, 0} \psi}{d\rho_2^{2p}} = 0,$$

где краевые условия задачи  $A_\varepsilon^{2m}$  при  $i = 1, 2, \dots$  имеют вид:

$$\bar{\psi}_{\infty, 0}(0) + \Pi_{\infty, 0} \psi(0) = \bar{\psi}_{\infty, 0}(1) + Q_{\infty, 0} \psi(1),$$

$$D^i(\bar{\psi}_{\infty,0}(0) + \Pi_{\infty,0}\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_{\infty,0}(1) + Q_{\infty,0}\psi(1))$$

при условии, что  $\Pi_{\infty,0}\psi(\rho_1) \rightarrow 0, Q_{\infty,0}\psi(\rho_2) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ , где  $\bar{\psi}_{\infty,0}$  – решение вырожденной задачи  $A_0^2$ , которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{\psi}_{\infty,0}}{dr^2} + \lambda_{\infty,0} \bar{\psi}_{\infty,0} = 0, \\ \bar{\psi}_{\infty,0}(0) = \bar{\psi}_{\infty,0}(1), \end{cases} \quad (6)$$

и решения которой представляет собой набор нормированных собственных функций  $\bar{\psi}_{\infty,0n}(r) = 2^{-\frac{1}{2}} \sin \sqrt{\lambda_n} r$  и собственных значений  $\lambda_n = (2\pi n)^2, n = 1, 2, \dots$ .

Таким образом, имея решения задачи (6), можно сформулировать задачи для поиска решений  $\Pi_{\infty,0}\psi(\rho_1), Q_{\infty,0}\psi(\rho_2)$ , которые будут представлять собой пограничные функции

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)1!} \frac{d^{2p} \Pi_{\infty,0}\psi}{d\rho_1^{2p}} = 0, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} Q_{\infty,0}\psi}{d\rho_2^{2p}} = 0, \quad (7)$$

$$\bar{\psi}_{\infty,0}(0) + \Pi_{\infty,0}\psi(0) = \bar{\psi}_{\infty,0}(1) + Q_{\infty,0}\psi(1), \quad (8)$$

$$D^i(\bar{\psi}_{\infty,0}(0) + \Pi_{\infty,0}\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_{\infty,0}(1) + Q_{\infty,0}\psi(1)), \quad (9)$$

при  $i = 1, 2, \dots$ , а также при условии  $\Pi_{\infty,0}\psi(\rho_1) \rightarrow 0, Q_{\infty,0}\psi(\rho_2) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ .

Решением этих задач будет набор функций погранслоя:

$$\Pi_{\infty,0}\psi(\rho_1) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}^1 \exp(-\alpha_k \rho_1) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}^1 \exp(-\varepsilon^{-1} \alpha_k r),$$

$$Q_{\infty,0}\psi(\rho_2) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}^2 \exp(-\alpha_k \rho_2) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}^2 \exp(-\varepsilon^{-1} \alpha_k (1-r)),$$

где счетное множество коэффициентов  $\alpha_k (k = 1, 2, \dots)$  представляет собой набор корней характеристического уравнения

$$\sum_{p=1}^m \frac{(-1)^p}{(2p)!} \alpha^{2p-2} = 0, \Rightarrow \cos \alpha = 1, \alpha_k = 2\pi k, k \in Z.$$

Из условий (8), (9) для задачи  $A_\varepsilon^\infty$  получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений  $A\vec{C} = \vec{b}$ , где матрица  $A$  имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \\ -2\pi & -4\pi & \dots & -2k\pi & \dots \\ 2\pi^2 & 8\pi^2 & \dots & 2k^2\pi^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2(-\pi)^{2m-1} & 2(-2\pi)^{2m-1} & \dots & 2(-k\pi)^{2m-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\vec{C}^T = (C_{01}^1 - C_{01}^2, \dots, C_{02m-1}^1 - C_{02m-1}^2, \dots),$$

$$\vec{b}^T = (q_0 - p_0, q_1 - p_1, \dots, q_{2m-1} - p_{2m-1}, \dots),$$

$$q_i = -\varepsilon^{i-1} \sin(\pi n + i\pi / 2), p_i = -\varepsilon^{i-1} \sin(i\pi / 2), i = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots$$

В силу того, что  $\alpha_k$  попарно различны, матрицы соответствующих систем являются невырожденными и решение систем имеет следующий вид:

$$C_{0k}^1 = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{s-1} A_{k,s}^1 \sin(i\pi / 2),$$

$$A_{1,s}^1 = \frac{1}{\prod_{l \neq s} (\alpha_l - \alpha_s)}; A_{2q,s}^1 = A_{2q+1,s}^1 = -\frac{\sum_{r=1}^{2q} \frac{(-1)^r}{(2r)!} \alpha_s^{2r-2}}{\prod_{l \neq s} (\alpha_l - \alpha_s)}; q, l, s = 1, 2, \dots,$$

$$C_{0k}^2 = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{s-1} A_{k,s}^2 \sin(\pi n + i\pi / 2),$$

$$A_{1,s}^2 = \frac{1}{\prod_{l \neq s} (\alpha_l - \alpha_s)}, A_{2q,s}^2 = A_{2q+1,s}^2 = -\frac{\sum_{r=1}^{2q} \frac{(-1)^r}{(2r)!} \alpha_s^{2r-2}}{\prod_{l \neq s} (\alpha_l - \alpha_s)}, q, l, s = 1, 2, \dots$$

Для построения первого приближения асимптотического ряда (5) получим задачу для нахождения решений  $\bar{\psi}_{\infty,1}$ ,  $\Pi_{\infty,1}\psi$ ,  $Q_{\infty,1}\psi$  и  $\lambda_{\infty,1}$ :

$$\frac{d^2 \bar{\psi}_{\infty,1}}{dr^2} + \lambda_{\infty,0} \bar{\psi}_{\infty,1} = -\lambda_{\infty,1} \bar{\psi}_{\infty,0},$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} \Pi_{\infty,1}\psi}{d\rho_1^{2p}} = 0, \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} Q_{\infty,1}\psi}{d\rho_2^{2p}} = 0,$$

$$\bar{\psi}_{\infty,1}(0) + \Pi_{\infty,1}\psi(0) = \bar{\psi}_{\infty,1}(1) + Q_{\infty,1}\psi(1),$$

$$D^i(\bar{\psi}_{\infty,1}(0) + \Pi_{\infty,1}\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_{\infty,1}(1) + Q_{\infty,1}\psi(1))$$

при  $i = 1, 2, \dots$  и с учетом условий  $\Pi_{\infty,1}\psi(\rho_1) \rightarrow 0, Q_{\infty,1}\psi(\rho_2) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ .

Разрешимость такой задачи возможна лишь при  $\lambda_{\infty,1} = 0$ , и тогда в этом приближении выполняются следующие равенства:  $\bar{\psi}_{\infty,0} = \bar{\psi}_{\infty,1}$ ,  $\Pi_{\infty,0}\psi = \Pi_{\infty,1}\psi$ ,  $Q_{\infty,0}\psi = Q_{\infty,1}\psi$ .

В следующем приближении получим задачу для нахождения решений  $\bar{\psi}_{\infty,2}$ ,  $\Pi_{\infty,2}\psi$ ,  $Q_{\infty,2}\psi$  и  $\lambda_{\infty,2}$ :

$$\frac{d^2 \bar{\psi}_{\infty,2}}{dr^2} + \lambda_{\infty,0} \bar{\psi}_{\infty,2} + \lambda_{\infty,2} \bar{\psi}_{\infty,0} = \frac{2}{4!} \frac{d^4 \bar{\psi}_{\infty,0}}{dr^4} - \lambda_{\infty,1} \bar{\psi}_{\infty,1} \equiv h_2(r),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} \Pi_{\infty,2}\psi}{d\rho_1^{2p}} = -\lambda_{\infty,0} \Pi_{\infty,0}\psi, \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} Q_{\infty,1}\psi}{d\rho_2^{2p}} = -\lambda_{\infty,0} Q_{\infty,0}\psi,$$

$$\bar{\psi}_{\infty,2}(0) + \Pi_{\infty,2}\psi(0) = \bar{\psi}_{\infty,2}(1) + Q_{\infty,2}\psi(1),$$

$$D^i(\bar{\psi}_{\infty,2}(0) + \Pi_{\infty,2}\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_{\infty,2}(1) + Q_{\infty,2}\psi(1))$$

при  $i = 1, 2, \dots$  и при условии, что  $\Pi_{\infty,2}\psi(\rho_1) \rightarrow 0, Q_{\infty,2}\psi(\rho_2) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ .

Таким образом, можно получить оценку во втором приближении собственного значения:

$$\lambda_{\infty,2n} = (h_2, \bar{\psi}_{\infty,0n}) = \int_0^1 h_2(s) \bar{\psi}_{\infty,0n}(s) ds = \frac{2}{4!} \int_0^1 \bar{\psi}_{\infty,0n}(s) \frac{d^4 \psi_n(s)}{ds^4} ds = \frac{2}{4!} (2\pi n)^4.$$

Вводя функцию Грина

$$G(r, r_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\psi}_{\infty,0n}(r) \bar{\psi}_{\infty,0n}(r_0)}{\lambda_{\infty,0n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-1} \sin(2\pi nr) \sin(2\pi nr_0)}{(2\pi n)^2},$$

которая является решением задачи

$$[L_2 + \lambda_0]G(r, r_0) = -\delta(r - r_0), \quad G(0,0) = G(1,1) = 0,$$

получим, что

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\infty,2n}(r) &= \int_0^1 G(r,s) h_2(s) ds = \\ &= \frac{2}{4!} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-1} \sin(2\pi kr) \sin(2\pi ks)}{(2\pi k)^2} \frac{d^4 [\sqrt{2}^{-1} \sin(2\pi ns)]}{ds^4} ds = 0, \end{aligned}$$

а это приводит к равенству  $\bar{\psi}_{\infty,2} = \bar{\psi}_{\infty,0}$ .

Задачу для поиска пограничных функций теперь можно сформулировать так:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} \Pi_{\infty,2} \psi}{d\rho_1^{2p}} = -\lambda_{\infty,0} \Pi_{\infty,0} \psi, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} Q_{\infty,2} \psi}{d\rho_2^{2p}} = -\lambda_{\infty,0} Q_{\infty,0} \psi,$$

$$\bar{\psi}_{\infty,2}(0) + \Pi_{\infty,2} \psi(0) = \bar{\psi}_{\infty,2}(1) + Q_{\infty,2} \psi(1),$$

$$D^i (\bar{\psi}_{\infty,2}(0) + \Pi_{\infty,2} \psi(0)) = D^i (\bar{\psi}_{\infty,2}(1) + Q_{\infty,2} \psi(1)),$$

при  $i = 1, 2, \dots$ , а также с учетом  $\Pi_{\infty,2} \psi(\rho_1) \rightarrow 0, Q_{\infty,2} \psi(\rho_2) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ .

Решением этой задачи будут решения типа погранслоя такого вида:

$$\Pi_{\infty,2} \psi(\rho_1) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^1 \exp(-\alpha_k \rho_1) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^1 \exp(-\varepsilon^{-1} \alpha_k r),$$

$$Q_{\infty,2} \psi(\rho_2) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^2 \exp(-\alpha_k \rho_2) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^2 \exp(-\varepsilon^{-1} \alpha_k (1-r)),$$

$$C_{2k}^1 = C_{0k}^1 (1 - \lambda_0 B_{k,k} \rho_1) - \lambda_0 \sum_{p=0, p \neq k}^{\infty} C_{0k}^1 B_{p,k},$$

$$C_{2k}^2 = C_{0k}^2 (1 - \lambda_0 B_{k,k} \rho_2) - \lambda_0 \sum_{p=0, p \neq k}^{\infty} C_{0k}^2 B_{p,k},$$

$$B_{p,k} = \frac{1}{(\alpha_p - \alpha_k) \prod_{n \neq k} (\alpha_n - \alpha_k)}, \quad B_{k,k} = \frac{1}{\prod_{n \neq k} (\alpha_n - \alpha_k)},$$

где  $k, p, n = 0, 1, 2, \dots$

Системы уравнений и дополнительные условия для поиска следующих членов  $\bar{\psi}_{\infty,k}$ ,  $\Pi_{\infty,k} \psi$ ,  $Q_{\infty,k} \psi$  и  $\lambda_{\infty,k}$  при  $k > 0$  асимптотического разложения (5) имеют вид:

$$\frac{d^2 \bar{\psi}_{\infty, k}}{dr^2} + \lambda_{\infty, 0} \bar{\psi}_{\infty, k} = \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p+2)!} \frac{d^{2p+2} \bar{\psi}_{\infty, k-2p}}{dr^{2p+2}} - \sum_{p=1}^k \lambda_{\infty, p} \bar{\psi}_{\infty, k-p} \equiv h_k(r),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} \Pi_{\infty, k} \psi}{d\rho_1^{2p}} = - \sum_{p=0}^{k-2} \lambda_{\infty, p} \Pi_{\infty, k-p-2} \psi,$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!!} \frac{d^{2p} Q_{\infty, k} \psi}{d\rho_2^{2p}} = - \sum_{p=0}^{k-2} \lambda_{\infty, p} Q_{\infty, k-p-2} \psi,$$

$$\bar{\psi}_{\infty, k}(0) + \Pi_{\infty, k} \psi(0) = \bar{\psi}_{\infty, k}(1) + Q_{\infty, k} \psi(1),$$

$$D^i(\bar{\psi}_{\infty, k}(0) + \Pi_{\infty, k} \psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_{\infty, k}(1) + Q_{\infty, k} \psi(1)),$$

при  $i = 1, 2, \dots$ , при условии  $\Pi_{\infty, k} \psi(\rho_1) \rightarrow 0$ ,  $Q_{\infty, k} \psi(\rho_2) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Таким образом, процесс построения асимптотического ряда может быть продолжен до сколь угодно желаемого значения  $k$ .

### Литература

1. Amirkhanov I.V., Kolosova I.S., Vasilyev S.A. Asymptotic solution of Sturm-Liouville problem with periodic boundary conditions for relativistic finite-difference Schrödinger equation // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2020. Vol. 28. P. 230-251.
2. Baru V., Epelbaum E., Gegelia J., Ren X.-L. Towards baryon-baryon scattering in manifestly Lorentz-invariant formulation of SU(3) baryon chiral perturbation theory // Physics Letters B. 2019. Vol. 798. P. 134987.
3. Kadyshevsky V.G., Mateev M. On a Relativistic Quasipotential Equation in the Case of Particles with Spin // Nuovo Cimento. 1967. Vol. 55A, No 2. P. 275-300.
4. Kadyshevsky V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude // Nucl. Phys. 1968. Vol. B6, No 1. P. 125 - 148
5. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Quasipotential Approach and the Expansion in Relativistic Spherical Functions // Nuovo Cimento. 1968. Vol. 55A, No 2. P. 233-257.

**S.A. Vasilyev, M.A. Bouatta, I.S. Kolosova**  
Peoples' Friendship University of Russia

### ANALYSIS OF THE STURM – LIOUVILLE PROBLEM SOLUTIONS FOR THE KADYSHEVSKY EQUATION WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

**Keywords:** *Kadyshevsky equation, differential equation of infinite order, small parameter, periodic boundary conditions.*

**Abstract.** *We consider the Sturm – Liouville boundary value problem with periodic boundary conditions for the Kadyshevsky equation (the relativistic analogue of the Schrodinger equation), which is a singularly*

*perturbed differential equation of infinite order. Asymptotic methods of singular perturbation theory are used to construct an approximate solution of the Sturm – Liouville problem. The case of an infinitely deep quantum mechanical potential well is considered as a quasi-potential, which makes it possible to construct approximate solutions to the problem of the behavior of a free relativistic quantum mechanical particle on a one-dimensional torus.*

**Ю.М. Вувуникян, Mastafa Al-Imari**

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы*

УДК 517.521

### **ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОРТОНОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛЕЖАНДРА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К СЖАТИЮ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

*Ключевые слова: ортогональная система полиномов Лежандра, норма полинома Лежандра, ортонормальная система полиномов Лежандра, тензорное произведение, ортонормальный полином Лежандра двух переменных, коэффициенты Лежандра.*

*Рассматривается ортонормальная система полиномов Лежандра [1–3] и тензорное произведение элементов этой системы. Показано, что построенное тензорное произведение совпадает с векторным пространством всех алгебраических полиномов двух переменных и, следовательно, всюду плотно в полном гильбертовом пространстве всех квадратично интегрируемых функций, определенных на квадрате  $[-1,1]^2$ . Из этого следует, что множество попарных тензорных произведений одномерных нормированных полиномов Лежандра является полным ортонормальным базисом, и поэтому любую функцию из пространства  $L^2[-1,1]^2$  можно разложить в сходящийся ряд по элементам построенного ортонормального базиса. С целью сокращения вычислений коэффициентов этого ряда предлагается заменить нормированные полиномы Лежандра на классические полиномы Лежандра. Тогда и разложение функции в ряд принимает также более простую форму. Полученные результаты являются ключевыми для применения полиномов Лежандра в задаче сжатия двумерных (как монохромных, так и цветных) изображений.*

Применяя в пространстве  $L^2[-1,1]$  метод ортогонализации Гильберта – Шмидта к системе степеней  $\{t^k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ , получим ортогональную систему полиномов Лежандра  $\tilde{P} = \{P_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Отметим, что

$$P_0(t) = 1, P_1(t) = t, P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), P_3(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t),$$

$$P_6(t) = \frac{1}{16}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5).$$

Эти равенства для  $k \geq 2$  могут быть получены с помощью следующего общего рекуррентного соотношения:

$$P_k(t) = \left(2 - \frac{1}{k}\right)tP_{k-1}(t) - \left(1 - \frac{1}{k}\right)P_{k-2}(t). \quad (1)$$

Так, например, при  $k = 2$

$$P_2(t) = \left(2 - \frac{1}{2}\right)tP_1(t) - \left(1 - \frac{1}{2}\right)P_0(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3t^2 - 1).$$

Далее, при  $k = 3$  имеем:

$$P_3(t) = \left(2 - \frac{1}{3}\right)tP_2(t) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)P_1(t) = \frac{5}{3}t \frac{1}{2}(3t^2 - 1) - \frac{2}{3}t =$$

$$= \frac{5}{6}(3t^3 - t) - \frac{2}{3}t = \frac{5}{2}t^3 - \frac{5}{6}t - \frac{2}{3}t = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t).$$

Соотношение (1) может также эффективно использоваться для построения графиков полиномов Лежандра произвольного порядка с помощью программы на языке программирования Python с применением известного пакета matplotlib:

```
def P(k, t):
 if(k == 0):
 return 1
 elif(k == 1):
 return t
 else:
 return ((2 - 1/k)*t * P(k-1, t)
 -(1-1/k)*P(k-2, t))
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
t = np.arange(- 1, 1, 0.01)
for k in range(1,7):
 plt.plot(t, P(k, t), 'k')
plt.show()
```

Результаты работы программы отображены на рисунке 1.

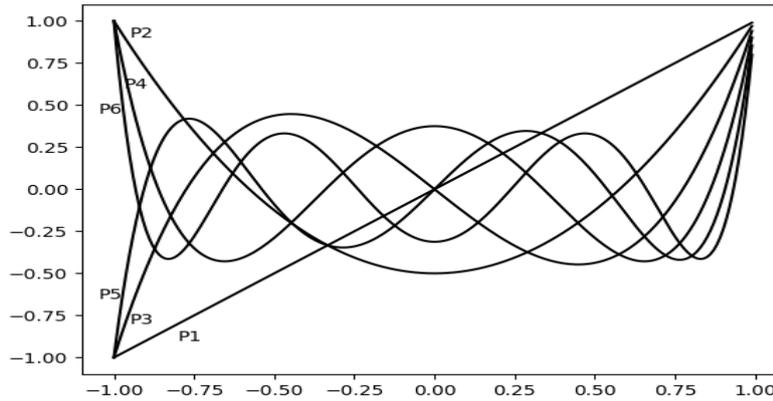


Рис. 1. Графики полиномов Лежандра порядка 1, 2, 3, 4, 5 и 6

Превратим теперь построенную ортогональную систему  $\tilde{P}$  в нормированную, нормируя каждый элемент этой системы, то есть разделив каждый полином Лежандра, входящий в систему  $\tilde{P}$ , на его норму.

Норма  $k$ -го полинома Лежандра  $\|P_k\|$  определяется равенством  $\|P_k\| = \sqrt{\int_{-1}^{+1} P_k^2(t) dt}$  и может быть вычислена по следующей формуле:  $\|P_k\| = \frac{1}{\sqrt{k+0,5}}$ .

Для любого неотрицательного числа  $k$  определим нормированный полином Лежандра  $\bar{P}_k$  равенством:

$$\bar{P}_k = P_k / \|P_k\| = P_k \sqrt{k+0,5}.$$

Отметим, что  $\|\bar{P}_k\| = 1$ , норма любого  $\bar{P}_k$  равна единице.

Система, каждый элемент которой нормирован, называется нормированной системой, а ортогональная и нормированная система называется ортонормальной системой.

Таким образом, система  $\bar{P} = \{\bar{P}_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$  является ортонормальной системой (ОНС).

Определим теперь тензорное произведение  $\bar{P} \otimes \bar{P}$  для ортонормальной системы полиномов как линейную оболочку, то есть совокупность всех конечных линейных комбинаций множества

$$\{\bar{P}_k \otimes \bar{P}_m \mid k, m = 0, 1, 2, \dots\},$$

где  $\bar{P}_k \otimes \bar{P}_m$  определяется равенством  $(\bar{P}_k \otimes \bar{P}_m)(t, s) = \bar{P}_k(t) \bar{P}_m(s)$  для любых  $t, s \in [-1; 1]$ , будет обозначаться  $\bar{P}_{k,m}$  и называться ортонормальным полиномом Лежандра двух переменных.

Отметим, что полученная система, действительно, является ортонормальной системой в пространстве  $L^2[-1,1]^2$  всех квадратично интегрируемых по Лебегу функций на квадрате  $[-1,1]^2$ .

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]^2} \bar{P}_{k,m}(t,s) \bar{P}_{k',m'}(t,s) dt ds &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{P}_k(t) \bar{P}_m(s) \bar{P}_{k'}(t) \bar{P}_{m'}(s) dt ds = \\ &= \int_{-1}^1 \bar{P}_k(t) \bar{P}_{k'}(t) dt \int_{-1}^1 \bar{P}_m(s) \bar{P}_{m'}(s) ds = \begin{cases} 1, & \text{если } (k,m) = (k',m') \\ 0, & \text{если } (k,m) \neq (k',m') \end{cases}. \end{aligned}$$

Тензорное произведение  $\bar{P} \otimes \bar{P}$  как совокупность всех конечных линейных комбинаций множества  $\{\bar{P}_k \otimes \bar{P}_m \mid k, m = 0, 1, 2, \dots\}$  совпадает со множеством всех конечных линейных комбинаций множества  $\{t^k s^m \mid k, m = 0, 1, 2, \dots\}$ , то есть с векторным пространством всех алгебраических полиномов двух переменных, определенных на квадрате  $[-1,1]^2$ . Так как множество полиномов, определенных на  $[-1,1]^2$  согласно теореме Вейерштрасса, всюду плотно в пространстве  $C[-1,1]^2$ , то оно всюду плотно и в пространстве  $L^2[-1,1]^2$ .

Таким образом, рассматриваемая ортонормальная система  $\{\bar{P}_k \otimes \bar{P}_m \mid k, m = 0, 1, 2, \dots\}$  полна в пространстве, и, значит, по теореме о разложении элемента полного гильбертова пространства, любая функция  $f(t,s)$ , принадлежащая пространству  $L^2[-1,1]^2$ , может быть разложена в сходящийся ряд:

$$f(t,s) = \sum_{k,m=0}^{+\infty} c_{k,m} \bar{P}_k(t) \bar{P}_m(s), \quad (2)$$

где коэффициенты определяются по формуле

$$c_{k,m} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{P}_k(t) \bar{P}_m(s) f(t,s) dt ds. \quad (3)$$

С целью сокращения вычислений мы вместо коэффициентов  $c_{k,m}$  будем применять  $L_{k,m}$ , определяемые формулой

$$L_{k,m} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{P}_k(t) \bar{P}_m(s) f(t,s) dt ds, \quad (4)$$

называемые коэффициентами Лежандра порядка  $(k,m)$  функции  $f(t,s)$ .

Из формул (3) и (4) получаем следующее соотношение:

$$c_{k,m} = \sqrt{k+0,5} \sqrt{m+0,5} L_{k,m}.$$

Подставляя это равенство в равенство (2), получим:

$$f(t,s) = \sum_{k,m=0}^{+\infty} L_{k,m}(k+0,5)(k+0,5)P_k(t)P_m(s). \quad (5)$$

Полученные формулы (4) и (5) являются ключевыми для метода сжатия 2D-изображений [4–12] с помощью полиномов Лежандра. В случае, когда изображение монохромное, функция изображения  $f(t,s)$  принимает числовые значения в диапазоне от 0 до 255.

Если же изображение цветное, то функция  $f(t,s)$  является трехмерной вектор-функцией  $f(t,s) = (f_1(t,s), f_2(t,s), f_3(t,s))$  с компонентами-функциями, определяющими интенсивности красного, зеленого и синего цвета соответственно.

### Литература

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
2. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. Издание второе, дополненное. М.: Физматлит, 1979. 416 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
4. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. 2-е издание, испр.– М.: Техносфера, 2009. – 856 с.: ил.
5. Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьёва Е.Б. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций. 2-е издание, испр. и перераб. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 768 с.
6. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: 2-е изд.: пер. с англ. М.:ООО «Бином-Пресс», 2009. 656 с.: ил.
7. Скиена С. Алгоритмы. Руководство по разработке. 2-е изд.: пер. с англ. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
8. Грищенко А.Ю., Коробейников А.Г. Улучшение сходимости метода конечных разностей с помощью вычисления промежуточного решения // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 3 (79). С. 124-127.
9. Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М. Юкин В. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. М.: Диалог-МИФИ. 2003. 384 с.
10. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений: пер. с англ. М.: Техносфера. 2006. 1072 с.
11. Сэлмон Д. Сжатие данных, изображений и звука. М.: Техносфера. 2004. 368 с.
12. Тропченко А.Ю., Курносенков И.Н. Анализ современных стандартов сжатия видеоданных // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2006. Вып. 32. С. 17-21.

**Y.M. Vuvunikian, Al-Imari Mastafa Ayad Habeeb**  
Grodno State University

## TENSOR PRODUCT OF ORTHONORMAL LEGENDE SYSTEMS AND THEIR APPLICATION TO IMAGE COMPRESSION

**Keywords:** *orthogonal system of Legendre polynomials, norm of Legendre polynomial, orthonormal system of Legendre polynomials, tensor product, orthonormal Legendre polynomial of two variables, Legendre coefficients.*

**Abstract.** *The orthonormal system of Legendre polynomials and the tensor product of the elements of this system are considered. It is shown that the constructed tensor product coincides with the vector space of all algebraic polynomials of two variables and, consequently, is everywhere dense in the complete Hilbert space of all quadratically integrable functions defined on the square  $[-1,1]^2$ . It follows from this that the set of pairwise tensor products of one-dimensional normalized Legendre polynomials is a complete orthonormal basis, and therefore any function from space can be decomposed into a convergent series by the elements of the constructed orthonormal basis. In order to reduce the calculation of the coefficients of this series, it is proposed to replace the normalized Legendre polynomials with classical Legendre polynomials. Then the decomposition of the function into a series also takes a simpler form. The results obtained are key for the application of Legendre polynomials in the problem of compression of two-dimensional (both monochrome and color) images.*

**Ю.М. Вувуникян, Ваньли Чжень**

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы*

УДК 517.972

## НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА И ПОРОЖДАЮЩИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ Е.М. ИЖИКЕВИЧА ИМПУЛЬСНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

**Ключевые слова:** *импульсные нейронные сети, математическая модель Е.М. Ижикевича, нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, нелинейный эволюционный оператор, система импульсных характеристик эволюционного оператора, система спектральных характеристик нелинейного эволюционного оператора.*

*Импульсные (спайковые) нейронные сети являются искусственными нейронными сетями третьего поколения. Одной из эффективных моделей таких сетей является математическая модель*

*Е.М. Ижикевича. В работе предлагается метод математического моделирования таких сетей с помощью нелинейных интегральных уравнений Вито Вольтерра. Показано, что рассматриваемые уравнения порождаются нелинейным эволюционным оператором с обобщенными ядрами, которые свертываются с прямыми степенями входных воздействий. Целью данной статьи является разработка эффективного метода вычисления нелинейных импульсных и спектральных характеристик рассматриваемой математической модели импульсной нейронной сети.*

Импульсные нейронные сети [1–5] часто называют искусственными нейронными сетями третьего поколения. Первым поколением нейронных сетей был персептрон, который представлял собой простую модель нейрона и мог обрабатывать только двоичные данные. Нейронная сеть второго поколения включает в себя относительно широкий спектр, в том числе более широко используемую в настоящее время нейронную сеть прямого распространения с весами. Импульсные нейронные сети (называемые также спайковыми нейронными сетями), моделируемые нейроны которых ближе к реальности, учитывают распространение импульсов, что приводит к учету электрических токов и, в итоге, к анализу электрической модели, основными компонентами которых являются стандартные элементы электрической цепи: резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности.

В импульсной нейронной сети текущий уровень активации нейрона обычно считается текущим состоянием, а входной импульс повышает текущее значение на определенный период времени, а затем постепенно снижает. Появился ряд схем кодирования для интерпретации этих последовательностей выходных импульсов, и эти схемы кодирования учитывают как частоту импульсов, так и время между импульсами.

С помощью исследований в области нейробиологии создается модель нейронной сети на основе времени генерации импульсов. Этот новый тип нейронной сети использует пиковое кодирование. Получив точную синхронизацию импульсов, этот новый тип нейронной сети может получить больше информации и большую вычислительную мощность.

Математическая модель Е.М. Ижикевича определяется следующей системой двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a(bv - u) \\ u + \frac{dv}{dt} = \alpha v^2 + \beta v + g, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $g$  являются функциями независимой временной  $t$ . Функция  $v$  представляет мембранный потенциал нейрона, функция  $u$  представляет восстанавливающий потенциал, возрастающий при увеличении тока ионов калия и убывающий при уменьшении тока ионов натрия. После того, как импульс достигнет наибольшего значения (+30 mV), происходит сброс и мембранного потенциала, и восстанавливающего потенциала.

### Интегральное уравнение и нелинейный эволюционный оператор

Из первого уравнения приведенной системы уравнений мы получаем следующее равенство

$$\begin{aligned} u &= ab\theta e^{-at} * v + u(0) = \\ &= ab \int_0^t e^{-a(t-s)} v(s) ds + u_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $*$  – оператор свертки,  $\theta$  – функция Хевисайда.

Подставляя полученное равенство во второе дифференциальное уравнение системы, получим:

$$ab\theta e^{-at} * v + v' = \alpha v^2 + \beta v + g - u_0. \quad (3)$$

Обозначим  $f(v) = \alpha v^2 + \beta v + g - u_0$ .

Тогда уравнение (3) запишется следующим образом:

$$\int_0^t ab e^{-a(t-s)} v(s) ds + v' = f(v). \quad (4)$$

Полученное уравнение является нелинейным эволюционным интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра [8] относительно функции  $v(t)$ . С помощью рассмотренной свертки оно может быть записано следующим образом:

$$(ab\theta e_{-a} + \delta' - \beta\delta) * v + S_2((- \alpha\delta \otimes \delta) * v^{\otimes 2}) = g - u_0, \quad (5)$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $\delta'$  – обобщенная производная дельта-функции  $\delta$ ,  $e_{-a}(t) = e^{-at}$ ,  $S_2$  – оператор сокращения переменных второго порядка [4].

Таким образом, левая часть уравнения (5) представляет собой нелинейный эволюционный оператор [4] второго порядка со следующей системой импульсных характеристик:

$$a_1 = ab\theta e_{-a} + \delta' - \beta\delta, \quad a_2 = -\alpha(\delta \otimes \delta).$$

Применяя к системе импульсных характеристик обобщенное преобразование Лапласа, получим систему спектральных характеристик рассматриваемого нелинейного эволюционного оператора:

$$\tilde{a}_1(\lambda) = \frac{ab}{\lambda + a} + \lambda - \beta, \quad \tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) = -\alpha(\lambda_1 \otimes \lambda_2).$$

### **Принцип распознавания изображений импульсной нейронной сетью**

Как и в традиционных нейронных сетях ANN, при распознавании изображения сначала преобразуются размер и формат данных изображения. В импульсных нейронных сетях это похоже, но с двумя отличиями. Один из них заключается в выполнении импульсного кодирования данных изображения, так что оно становится импульсным кодом, который может быть распознан импульсной нейронной сетью; другой заключается в распознавании изображения с использованием возбуждения нейронов вместо выполнения свертки во время распознавания.

#### **Применение пакета BindsNET**

BindsNET – пакет для моделирования импульсной нейронной сети. Он построен поверх платформы глубокого обучения PyTorch и ориентирован на машинное обучение и обучение с подкреплением.

BindsNET используется преимущественно для построения импульсных сетей и связей между ними и моделирования их на процессорах или графических процессорах (для сильного ускорения / распараллеливания) без какой-либо дополнительной работы. Недавно torchvision.datasets был интегрирован в библиотеку, чтобы позволить использовать популярные наборы данных vision при обучении импульсных нейронных сетей SNN для задач компьютерного зрения. Функциональность нейронной сети, содержащаяся в модуле torch.nn.functional, используется для реализации более сложных связей между популяциями нейронов.

По своей сути, BindsNET предоставляет программные объекты и методы, которые поддерживают моделирование групп различных типов нейронов (bindsnet.network.nodes), а также различных типов соединений между ними (bindsnet.network.topology). При создании сети пользователь может указать константу временного шага моделирования, которая определяет степень детализации моделирования.

### **Литература**

1. Izhikevich E.M. Simple model of spiking neurons // IEEE Transactions on Neural Networks. 2003. Vol. 14, No. 6, P. 1569-1572. doi: 10.1109/TNN.2003.820440.
2. Maass W. Networks of spiking neurons: The third generation of neural network model // Neural Networks. 1997. 10 (9). P. 1659–1671.
3. Panda P., Roy K. Unsupervised regenerative learning of hierarchical features in spiking deep networks for object recognition // International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). IEEE, 2016. P. 299-306.

4. Вувуникян Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками: монография. Гродно: ГрГУ, 2007. 224 с.

5. Вувуникян Ю.М., Ваньли Чэнь. Последовательное соединение мультиполярных эволюционных операторов с обобщёнными импульсными характеристиками // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной научной конференции, Минск, 22–25 ноября 2021 г.: в 2 ч. / сост. В.В. Лепин; Национальная академия наук Беларуси, Институт математики, Белорусский государственный университет. Минск: Беларуская навука, 2021. Ч. 1. С. 18–19.

6. Вувуникян Ю.М., Ваньли Чэнь. Операторное моделирование импульсной нейронной сети и прямое произведение реакций системных операторов. // Системы компьютерной математики и их приложения: сб. материалов XXIII Междунар. конф., Смоленск, 27-28 мая 2022 года. Вып. 23. Смоленск: СмолГУ, 2022. С. 202 – 210.

7. Вувуникян Ю.М., Ваньли Чэнь. Методы прямого обучения глубоких импульсных нейронных сетей // Материалы Международного конгресса по информатике: информационные системы и технологии (CSIST'2022). Минск, 27 – 28 октября 2022 года. Минск: БГУ, 2022. С. 112–116.

8. Вувуникян Ю.М., Каландия Е.И. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с параметром // Весн. Гродз. дзярж. ун-та. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2023. Т. 13, № 1. С. 6–16.

**Y.M. Vuvunikian, Vanli Chen**  
Grodno State University

**NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATION  
AND THE GENERATIVE EVOLUTIONARY OPERATOR  
OF E.M. IZHKEVICH'S MATHEMATICAL MODEL  
OF AN IMPULSE NEURAL NETWORK**

**Keywords:** *pulsed neural networks, mathematical model of E.M. Izhikevich, nonlinear integral Volterra equation, nonlinear evolutionary operator, system of impulse characteristics of the evolutionary operator, system of spectral characteristics of the nonlinear evolutionary operator.*

**Abstract.** *Impulse (spike) neural networks are artificial neural networks of the third generation. One of the effective models of such networks is the mathematical model of E.M. Izhikevich. The paper proposes a method for mathematical modeling of such networks using Vito Volterra nonlinear integral equations. It is shown that the equations under consideration are generated by a nonlinear evolutionary operator with generalized kernels that collapse with direct degrees of input effects. The purpose of this work is to develop an effective method for calculating nonlinear pulse and spectral characteristics of the considered mathematical model of an impulse neural network.*

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ключевые слова: *предельные множества, полианалитический полином, алгебраическая линия, результат, бинарное отношение.*

*В данной работе демонстрируются в достаточно конкретной ситуации два весьма распространённых и часто применяемых в математике приема, помогающих изучить строение тех или иных множеств. В данном случае – это предельные множества полианалитических полиномов. Во-первых, это метод «размножения точек», о которых есть информация, что они заведомо принадлежат исследуемому множеству. И, во-вторых, это метод получения достаточно просто устроенного надмножества для того же исследуемого множества.*

Пусть  $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$  и  $p(z, \bar{z})$  – произвольный полином из кольца  $\mathbb{C}[z_1, \bar{z}_1, \dots, z_k, \bar{z}_k]$ . Будем называть его полианалитическим (короче – п.а.) полиномом [1]. Выберем произвольную точку  $a = (a_1, \dots, a_k)$  из  $\bar{\mathbb{C}}^k \setminus \mathbb{C}^k$  и обозначим  $C(p(z, \bar{z}), a)$  (или подробнее:  $C(p(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_k, \bar{z}_k), (a_1, \dots, a_k))$ ) предельное множество полинома  $p(z, \bar{z})$  в точке  $a$  (то есть множество всех таких чисел  $l$ , которые служат пределами последовательностей вида  $(p(z^{(n)}, \bar{z}^{(n)}))$  при  $z^{(n)} \rightarrow a$ ) [2; 3].

Множество  $\bigcup_{a \in \bar{\mathbb{C}}^k \setminus \mathbb{C}^k} C(p(z, \bar{z}), a)$  обозначим  $C(p(z, \bar{z}), \infty)$  и назовем предельным множеством п.а. полинома на множестве  $\bar{\mathbb{C}}^k \setminus \mathbb{C}^k$ . Если  $p(z^{(n)}, \bar{z}^{(n)}) \rightarrow l$ ,  $l \in \bar{\mathbb{C}}$ , то будем говорить, что последовательность  $(z^{(n)})$ , сходящаяся к  $a$ , порождает точку  $l$  из  $C(p(z, \bar{z}), a)$ .

Заметим, что понятие «предельное множество в точке» можно ввести для произвольной комплекснозначной функции  $f(z_1, \dots, z_n)$  с бесконечной областью определения  $Dom(f)$ , лишь бы эта точка была предельной для  $Dom(f) \subset \bar{\mathbb{C}}^k$ . В частности, можно говорить о  $C(p(x), a)$  любого комплекснозначного многочлена  $p(x)$ , где

$x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbf{R}^s$ ,  $a = (a_1, \dots, a_s) \in \overline{\mathbf{R}}^s \setminus \mathbf{R}^s$ . В дальнейшем всякий многочлен, отличный от константы, будем называть нетривиальным.

Основными результатами данного исследования являются следующие две теоремы.

**Теорема 1.** *Вместе с каждой своей конечной точкой предельное множество в точке из  $\overline{\mathbf{C}}^k \setminus \mathbf{C}^k$  нетривиального п.а. полинома содержит все значения некоторого нетривиального комплекснозначного полинома нескольких вещественных переменных.*

**Теорема 2.** *Для всякого п.а. полинома  $p(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_k, \dots, \bar{z}_k)$  и произвольной точки  $a \in \overline{\mathbf{C}}^k \setminus \mathbf{C}^k$  существует от них зависящее конечное семейство алгебраических линий  $A_j$ , объединение множеств точек которых  $\bigcup_{j=1}^s A_j = \bigcup_{j=1}^s \{x + iy \in \mathbf{C} \mid \Phi_j(x, y) = 0, \text{ а точнее } x + iy = p_j(t_1, \dots, t_{k-1}), \text{ где } p_j(t_1, \dots, t_{k-1}) \in \mathbf{C}[t_1, \dots, t_{k-1}], t_m \in \mathbf{R}, m = 1, 2, \dots, k-1\}$ ,  $s \in \mathbf{N}$ , пополненное точкой  $\infty$ , объемлет  $C(p(z, \bar{z}), a) \setminus \{\infty\}$ .*

*Доказательство теоремы 1.* Пусть задан п.а. полином  $p(z, \bar{z})$  и  $l \in C(p(z, \bar{z}), a) \setminus \{\infty\}$ , где  $a \in \overline{\mathbf{C}}^k \setminus \mathbf{C}^k$ . (Если  $C(p(z, \bar{z}), a) = \{\infty\}$ , то утверждение очевидно). Пусть последовательность  $(z^{(n)}) = ((z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)})) = ((x_1^{(n)} + iy_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)} + iy_k^{(n)}))$  порождает эту точку  $l$ , и все последовательности  $(x_j^{(n)})$  и  $(y_j^{(n)})$ , где  $j = 1, 2, \dots, k$ , а также отношение каждой из них к каждой сходится в  $\overline{\mathbf{C}}$ , что, очевидно, не ограничивает общности из-за возможности любое конечное число раз переходить к подпоследовательности последовательности  $(z^{(n)})$  без ущерба для  $C(p(z, \bar{z}), a)$ .

При этом, по крайней мере, одна из последовательностей  $(x_j^{(n)})$  и  $(y_j^{(n)})$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , сходится к  $\infty$ . Выберем из множества (оно конечное) таких последовательностей ту, которая имеет порядок не ниже остальных. Пусть это  $(y_j^{(n)})$ , в противном случае можно было бы произвести и переобозначение.

Рассмотрим выражение

$$p(x_1^{(n)} + \Delta x_1^{(n)} + iy_1^{(n)} + i\Delta y_1^{(n)}, x_1^{(n)} + \Delta x_1^{(n)} - iy_1^{(n)} - i\Delta y_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)} + \Delta x_k^{(n)} - iy_k^{(n)} - i\Delta y_k^{(n)})$$

и применим к этому многочлену формулу Тейлора, что позволит представить его в виде суммы слагаемого  $p(z_1^{(n)}, \bar{z}_1^{(n)}, \dots, \bar{z}_k^{(n)})$  и конечного

числа слагаемых, в каждом из которых присутствует, по крайней мере, один из сомножителей  $\Delta x_j^{(n)}$  либо  $\Delta y_j^{(n)}$ . Коэффициенты перед этими сомножителями в каждом слагаемом являются общими членами последовательностей, зависящих от  $(z_1^{(n)}), \dots, (z_k^{(n)})$ . Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что все эти последовательности, как и  $(z_1^{(n)}), \dots, (z_k^{(n)})$ , сходящиеся в пространстве  $\bar{C}$ . При этом будем считать, что хоть одна из них сходится к  $\infty$ , так как в остальных случаях доказательство существенно не отличается от приводимого далее.

Общий вид такого слагаемого (с точностью до знака) следующий:  $a_n (\Delta x_1^{(n)})^{\alpha_1} \dots (\Delta x_k^{(n)})^{\alpha_k} \cdot (\Delta y_1^{(n)})^{\beta_1} \dots (\Delta y_k^{(n)})^{\beta_k}$ , где при всех натуральных  $n$   $a_n > 0$ ,  $\alpha_j \in N_0$ ,  $\beta_j \in N_0$ , ( $j = 1, 2, \dots, k$ ),  $a_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для каждого из таких слагаемых построим последовательность  $(a_n^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k + \beta_1 + \dots + \beta_k)^{-1}})$  и выберем ту, которая имеет порядок не ниже, чем остальные. Пусть это  $(\rho_n)$ .

Рассмотрим семейство последовательностей:

$$\Delta x_1^{(n)} = \frac{t_1}{\rho_n}, \Delta x_2^{(n)} = \frac{t_2}{\rho_n}, \dots, \Delta x_k^{(n)} = \frac{t_k}{\rho_n},$$

$$\Delta y_1^{(n)} = \frac{t_{k+1}}{\rho_n}, \Delta y_2^{(n)} = \frac{t_{k+2}}{\rho_n}, \dots, \Delta y_k^{(n)} = \frac{t_{2k}}{\rho_n},$$

где константы  $t_j$  принадлежат  $\mathbf{R}$ ,  $j = 1, \dots, 2k$ . Каждая из таких последовательностей сходится к нулю при любых фиксированных  $t_j$  ( $j = 1, \dots, 2k$ ).

Последовательность  $(\tilde{a}_n (\Delta x_1^{(n)})^{\tilde{\alpha}_1} \dots (\Delta x_k^{(n)})^{\tilde{\alpha}_k} \cdot (\Delta y_1^{(n)})^{\tilde{\beta}_1} \dots (\Delta y_k^{(n)})^{\tilde{\beta}_k})$ , где  $\tilde{a}_n$  – общий член последовательности, стоящий перед сомножителем  $(\Delta x_1^{(n)})^{\tilde{\alpha}_1} \dots (\Delta x_k^{(n)})^{\tilde{\alpha}_k} \cdot (\Delta y_1^{(n)})^{\tilde{\beta}_1} \dots (\Delta y_k^{(n)})^{\tilde{\beta}_k}$  в разложении многочлена  $p(x_1^{(n)} + \Delta x_1^{(n)} + iy_1^{(n)} + i\Delta y_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)} + \Delta x_k^{(n)} - iy_k^{(n)} - i\Delta y_k^{(n)})$  с помощью формулы Тейлора в сумму одночленов и многочлена  $p(x_1^{(n)} + iy_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)} - iy_k^{(n)})$ , сходится или к нулю, или к  $t_1^{\tilde{\alpha}_1} \dots t_k^{\tilde{\alpha}_k} \cdot t_{k+1}^{\tilde{\beta}_1} \dots t_{2k}^{\tilde{\beta}_k}$  (с точностью до ненулевого коэффициента, не зависящего от  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, 2k$ ).

Действительно, 
$$\tilde{a}_n (\Delta x_1^{(n)})^{\tilde{\alpha}_1} \cdots (\Delta x_k^{(n)})^{\tilde{\alpha}_k} \cdot (\Delta y_1^{(n)})^{\tilde{\beta}_1} \cdots (\Delta y_k^{(n)})^{\tilde{\beta}_k} =$$

$$= t_1^{\tilde{\alpha}_1} \cdot t_2^{\tilde{\alpha}_2} \cdots t_{2k}^{\tilde{\beta}_k} \cdot \frac{\tilde{a}_n}{\rho_n^{\tilde{\alpha}_1 + \dots + \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_1 + \dots + \tilde{\beta}_k}} = t_1^{\tilde{\alpha}_1} \cdots t_{2k}^{\tilde{\beta}_k} \cdot \left( \frac{\tilde{a}_n^{(\tilde{\alpha}_1 + \dots + \tilde{\beta}_k)^{-1}}}{\rho_n} \right)^{\tilde{\alpha}_1 + \dots + \tilde{\beta}_k}.$$
 Однако  $(\rho_n)$

выбрана так, что ее порядок не ниже, чем  $\left( \tilde{a}_n^{(\tilde{\alpha}_1 + \dots + \tilde{\beta}_k)^{-1}} \right)$ , следовательно,

последовательность  $\left( \tilde{a}_n^{(\tilde{\alpha}_1 + \dots + \tilde{\beta}_k)^{-1}} / a_n^{(\tilde{\alpha}_1 + \dots + \tilde{\beta}_k)^{-1}} \right)$  имеет конечный предел,

причем, по крайней мере, один из таких пределов (например, для  $\tilde{a}_n = a_n$ ) ненулевой. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_1^{(n)} + \Delta x_1^{(n)} + iy_1^{(n)} + i\Delta y_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)} + \Delta x_k^{(n)} - iy_k^{(n)} - i\Delta y_k^{(n)}) =$$

$$= q(t_1, \dots, t_{2k}) \neq const, \quad q(0, \dots, 0) = l,$$

то есть

$$l \in q(\mathbf{R}^{2k}) \subset C(p(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_k, \bar{z}_k), (a_1, \dots, a_k)),$$

где  $q(t_1, \dots, t_{2k}) \in C[t_1, \dots, t_{2k}]$ ,  $Dom(q(t_1, \dots, t_{2k})) = \mathbf{R}$ . Теорема 1 доказана. Отметим, что в некоторых случаях множество значений многочлена  $q(t_1, \dots, t_{2k})$  совпадает с множеством значений многочлена от меньшего, чем  $2k$  числа вещественных переменных.

**Замечание 1.** Легко видеть, что приведенные рассуждения можно почти дословно применить и к рациональным функциям из  $C(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_k, \bar{z}_k)$ , а также для исследования предельных множеств некоторых классов функций, определённых на множестве кватернионов, равно как и для выяснения свойств отображений из  $C^m$  в  $C^m$ , заданных, например, с помощью  $s$  многочленов из  $C[z_1, \bar{z}_1, \dots, z_m, \bar{z}_m]$ .

*Доказательство теоремы 2.* Предварительно отметим, что в зависимости от конкретной ситуации теорема 2 может быть как очевидным фактом (например, если объединение множеств точек алгебраических линий упомянутого в теореме 2 семейства совпадает с  $C$ ), так и содержательной информацией о расположении предельного множества п.а. полинома на плоскости  $\bar{C}$ .

Непосредственному доказательству теоремы 2 предположим две леммы, представляющие и самостоятельный интерес.

**Лемма 1.** Для любого п.а. полинома  $p(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_k, \bar{z}_k)$  и любой точки  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \bar{C}^k \setminus C^k$  существует конечное число таких комплекснозначных полиномов  $p_j(x_1, \dots, x_{2k})$ ,  $(j=1, \dots, t)$  от  $2k$  переменных, что

$$C(p(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_k, \bar{z}_k), (a_1, \dots, a_k)) \subseteq \bigcup_{j=1}^t C(p_j(x_1, \dots, x_{2k}), (0, \dots, 0, \infty)).$$

*Доказательство.* Пусть  $l \in C(p(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_k, \bar{z}_k), (a_1, \dots, a_k))$ , где  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \bar{C}^k \setminus C^k$  и пусть последовательность  $((z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}))$  порождает точку  $l$ , причем  $z_j^{(n)} \rightarrow a_j, (j=1, \dots, k)$  и  $z_j^{(n)} = x_j^{(n)} + ix_{j+k}^{(n)}, (j=1, \dots, k)$ .

В силу возможности переходить от последовательности  $(z^{(n)})$  к любой ее бесконечной подпоследовательности, без ущерба для  $C(p(z, \bar{z}), a)$  можно считать, что все последовательности  $(x_j^{(n)})$ ,  $(x_j^{(n)}/x_s^{(n)}) (j=1, \dots, 2k; s=1, \dots, 2k)$  являются в  $\bar{C}$  сходящимися, причем среди  $(x_j^n)$  нет ни одной, тождественной константе (в противном случае перешли бы к рассмотрению многочлена от меньшего, чем  $2k$  числа переменных).

Рассмотрим на конечном множестве последовательностей  $\{(x_j^n) | j=1, 2, \dots, 2k\}$  бинарное отношение " $(\alpha_n) \preceq (\beta_n)$ ": " $(\alpha_n)$  – последовательность порядка не выше порядка последовательности  $(\beta_n)$ ", то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n}$  принадлежит  $\bar{C} \setminus \{0\}$  и  $\beta_n \rightarrow \infty, \alpha_n \rightarrow \infty$ , либо  $(\beta_n)$  и  $(\alpha_n)$  имеют конечные пределы (также последовательности считаем одного порядка). В результате множество  $\{(x_j^n) | j=1, 2, \dots, 2k\}$  оказалось не строго упорядоченным. Значит, в конечной модели  $\langle \{(x_j^n) | j=1, 2, \dots, 2k\}, \preceq \rangle$  есть элемент  $(x_{j_0}^{(n)})$  (и даже, быть может, не один), порядок которого не ниже порядков всех остальных элементов. Но в конечном множестве  $2k$  элементов лишь конечным числом способов можно ввести нестрогий порядок, и в качестве элемента, который не ниже всех остальных, в различных моделях может выступать любой из  $2k$  элементов конечного множества. Очевидно, эта последовательность  $(x_{j_0}^{(n)})$  сходится к  $\infty$ . Осуществляя в многочлене  $p(x_1 + ix_1, \dots, x_k - ix_k)$  переобозначение  $x_{j_0}$  на  $x_{2k}$ , получим многочлен  $p_{j_0}(x_1, \dots, x_{2k})$ .

Рассматривая различные элементы из множества  $C(p(z, \bar{z}), a)$  и различные последовательности, их порождающие, можно получить в принципе значения для  $j_0$  от 1 до  $2k$ .

Введем в рассмотрение многочлены

$$\tilde{p}_j(x_1, \dots, x_{2k}) = p_j(x_{2k}^2 x_1, x_{2k}^2 x_1, \dots, x_{2k}^2 x_{2k-1}, x_{2k}) \quad (j = 1, \dots, 2k).$$

Очевидно, что

$$C(p(z, \bar{z}), a) \subseteq \bigcup_{j=1}^{2k} C(p_j(x_1, \dots, x_{2k}), (0, \dots, 0, \infty)),$$

что и требовалось доказать.

**Замечание 2.** Непосредственно из доказательства вытекает еще один факт:

$$C(p(z, \bar{z}), \infty) \subseteq \bigcup_{j=1}^{2k} C(p_j(x_1, \dots, x_{2k}), (0, \dots, 0, \infty)),$$

где  $p_j(x_1, \dots, x_{2k})$  – многочлены вещественных переменных  $x_1, \dots, x_{2k}$ , полученные в процессе доказательства леммы 1.

**Лемма 2.** Для любого комплекснозначного многочлена  $p(x_1, \dots, x_k)$  с  $\text{Dom}(p(x_1, \dots, x_k)) = \mathbf{R}^k$  существует семейство алгебраических линий  $A_j = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid \Phi_j(x, y) = 0, \text{ где } \Phi_j \in \mathbf{C}[x, y], \text{ а точнее, } x + iy = p_j(t_1, \dots, t_{k-1}), \text{ где } p_j(t_1, \dots, t_{k-1}) \in \mathbf{C}[t_1, \dots, t_{k-1}], t_m \in \mathbf{R}, m = 1, 2, \dots, k-1\}, j = 1, \dots, s, \text{ объединение множеств точек которых содержит своей частью}$

$$C(p(x_1, \dots, x_k), (0, \dots, 0, \infty)) \setminus \{\infty\}.$$

*Доказательство.* Пусть  $W = x + iy = p(x_1, \dots, x_k)$ . Тогда  $\bar{W} = x - iy = \overline{p(x_1, \dots, x_k)} = \tilde{p}(x_1, \dots, x_k)$ . Имеем систему

$$\begin{cases} W = p(x_1, \dots, x_k) \\ \bar{W} = \tilde{p}(x_1, \dots, x_k), \end{cases}$$

следовательно, можно исключить из этой системы двух различных уравнений переменную  $x_k$ , например, с помощью составления результата. Если  $p(x_1, \dots, x_k) \equiv \tilde{p}(x_1, \dots, x_k)$ , то  $W = \bar{W}$  и искомая зависимость получена. Следовательно,  $W, \bar{W}, x_1, \dots, x_{k-1}$  удовлетворяют некоторому алгебраическому уравнению  $\Phi(W, \bar{W}, x_1, \dots, x_{k-1}) = 0$ .

(Отметим, что в некоторых случаях выгодно ввести в  $\mathbf{R}^k$  комплексную структуру и изучать предельное множество п.а. полинома, исключая одну из переменных, например,  $\bar{z}_s$ ).

Пусть степень элемента  $x_k$  над полем  $\mathbf{C}(W, x_1, \dots, x_{k-1})$  равна некоторому натуральному числу  $\delta$  [4]. Тогда степень элемента  $\bar{W}$  над

$C(W, x_1, \dots, x_{k-1})$  не выше  $\delta$ , то есть существует нетривиальный многочлен  $\Phi(W, \bar{W}, x_1, \dots, x_{k-1})$  степени не выше  $\delta$  по переменной  $W$  и по переменной  $\bar{W}$ , рассматриваемый над полем  $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_{k-1})$  и для которого равенству  $\Phi(W, \bar{W}, x_1, \dots, x_{k-1}) = 0$  удовлетворяют все значения  $W, \bar{W}, x_1, \dots, x_{k-1}$ , связанные зависимостью  $W = p(x_1, \dots, x_{k-1})$  и  $\bar{W} = \tilde{p}(x_1, \dots, x_{k-1})$ .

Так как точка  $\infty$  входит в предельное множество любого не тождественного константе п.а. полинома в любой точке из  $\bar{C}^k \setminus C^k$ , то достаточно исследовать расположение конечных точек соответствующего предельного множества.

Пусть  $l \in C(p(x_1, \dots, x_k), (0, \dots, 0, \infty)) \setminus \{\infty\}$  и пусть последовательность  $(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)})$  порождает эту точку  $l$ , где  $x_j^{(n)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $j = 1, 2, \dots, k-1$ ) и  $x_k^{(n)} \rightarrow \infty$ , то есть  $W_n = p(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}) \rightarrow l$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(W_n, \bar{W}_n, x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)})$ . Этот предел существует и равен, с одной стороны, нулю, а с другой стороны  $\Phi(l, \bar{l}, 0, \dots, 0)$ . Значит,  $\Phi(l, \bar{l}, 0, \dots, 0) = 0$ . Рассмотрим все возможные случаи, которые могут иметь место для произвольной точки из  $C(p(x_1, \dots, x_k), (0, \dots, 0, \infty))$  и произвольной последовательности, порождающей эту точку.

Возможны два варианта: либо многочлен  $\Phi(W, \bar{W}, 0, \dots, 0) \equiv 0$  либо  $\Phi(W, \bar{W}, 0, \dots, 0) \not\equiv 0$ , а значит,  $\Phi(W, \bar{W}, 0, \dots, 0) \not\equiv const$ , так как имеет смысл считать, что  $C(p(x_1, \dots, x_k), (0, \dots, 0, \infty)) \setminus \{\infty\} \neq \emptyset$ . В первом случае получена алгебраическая линия в  $C$ , которой принадлежит точка  $l$ . Во втором случае никакой зависимости пока не получилось, но ее все-таки можно отыскать, пользуясь тождеством  $\Phi(W_n, \bar{W}_n, x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)}) = 0$ , имеющим место для любого натурального  $n$ .

Пусть в левой части этого тождества коэффициенты при одночленах  $W_n^{\gamma_m} \cdot \bar{W}_n^{\kappa_m}$  имеют вид  $q_m(x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)})$ , причем  $\gamma_m + \kappa_m \in N$  ( $m = 1, 2, \dots, s; s \geq 1$ ) и последовательности  $(q_m(x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)}))$  сходятся к нулю при всех  $m$ , причем в силу непрерывности многочлена  $p(x_1, \dots, x_k)$  на  $\mathbf{R}^k$  и многочлена  $q_m(x_1, \dots, x_{k-1})$  на  $\mathbf{R}^{k-1}$  без ущерба для предельного множества  $C(p(x_1, \dots, x_k), (0, \dots, 0, \infty))$  можно считать, что последовательности  $(q_m(x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)}))$  ( $m = 1, 2, \dots, s$ ) не имеют ни одного

нулевого члена. Выберем из всех последовательностей ту, которая имеет порядок не выше всех остальных. В принципе, такой последовательностью может оказаться любая из  $s$  последовательностей  $(q_m(x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)}))$  ( $m = 1, 2, \dots, s$ ). Разделим обе части тождества  $\Phi(W_n, \bar{W}_n, x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)}) = 0$  на общий член выбранной последовательности. Если перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в полученном тождестве, то возникает искомая алгебраическая зависимость для  $l$  и  $\bar{l}$ , причем предел свободного члена (то есть не зависящего от  $W_n$  и  $\bar{W}_n$ ) многочлена  $\Phi(W_n, \bar{W}_n, x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)})$ , деленного на выбранное выражение, тоже должен быть конечен, иначе возникает очевидное противоречие; остается выяснить, какие возможные значения могут иметь коэффициенты при одночленах, зависящих от  $l$  и  $\bar{l}$ .

Пусть после деления тождества  $\Phi(W_n, \bar{W}_n, x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)}) = 0$  на выражение  $q_{m_0}(x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)})$  возникают следующие коэффициенты

$$\frac{q_m(x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)})}{q_{m_0}(x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)}), m = 1, 2, \dots, s + 1.$$

Рассмотрим рациональные функции из  $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_{k-1})$ :

$$\Theta_m = \frac{q_m(x_1, \dots, x_{k-1})}{q_{m_0}(x_1, \dots, x_{k-1})}, m = 1, 2, \dots, s + 1.$$

Выделим во множестве  $\{\Theta_1, \dots, \Theta_{s+1}\}$  алгебраически независимую над  $\mathbf{C}$  и эквивалентную данному множеству часть. Пусть это  $\{\Theta_{m_1}, \dots, \Theta_{m_r}\}$ , причем заведомо  $0 \leq r \leq \min(s, k-1)$ , так как степень трансцендентности данного множества  $\{\Theta_1, \dots, \Theta_{s+1}\}$  не может быть более чем  $k-1$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в тождестве

$$\sum_{j=0}^{s+1} \Theta_j(x_1^{(n)}, \dots, x_{k-1}^{(n)}) W_n^{\gamma_j} \bar{W}_n^{\kappa_j} = 0,$$

получим, что  $l$  удовлетворяет алгебраическому уравнению с коэффициентами, алгебраически зависящими от  $r$  вещественных параметров. Рассматривая различные значения  $l$  из  $C(p(x_1, \dots, x_k), (0, \dots, 0, \infty))$  и различные последовательности, их порождающие, получим не более чем  $s$  алгебраических линий, зависящих не более чем от  $k-1$  вещественных параметров:  $A_j = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid \Phi_j(x, y) = 0, \text{ где } \Phi_j \in \mathbf{C}[x, y], \text{ а точнее, } x + iy = p_j(t_1, \dots, t_{k-1}), \text{ где } p_j(t_1, \dots, t_{k-1}) \in \mathbf{C}[t_1, \dots, t_{k-1}], t_m \in \mathbf{R}, m = 1, 2, \dots, k-1\}$ ,

$j = 1, \dots, s$ . Следовательно, любая конечная точка из  $C(p(x_1, \dots, x_k), (0, \dots, 0, \infty))$  принадлежит конечному семейству алгебраических линий, задаваемых условием

$$\prod_{j=1}^s \Phi_j(x, y) = 0,$$

где  $\Phi_j(x, y)$  – многочлены с коэффициентами, зависящими не более чем от  $k - 1$  параметров,  $j = 1, \dots, s$ . Лемма 2 доказана.

Очевидно, что для доказательства теоремы 2 остается, применив к п.а. полиному  $p(z, \bar{z})$  лемму 1, затем применить к каждому из возникших многочленов  $p_j(x_1, \dots, x_{2k})$  лемму 2 с последующим перемножением многочленов, задающих соответствующие алгебраические линии. Полученный многочлен от  $x$  и  $y$  с коэффициентами из  $\mathbf{R}[t_1, \dots, t_{2k-1}]$  и будет задавать семейство алгебраических линий плоскости  $\mathbf{C}$ , содержащих все конечные точки из  $C(p(z, \bar{z}), a)$ . Теорема 2 доказана.

### Литература

1. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1991. Т. 85. С. 187-254.
2. Гомонов С.А. О предельных множествах отображений топологических пространств // Доклады АН СССР. 1989. Т. 306, № 1. С. 20-24.
3. Гомонов С.А. О строении конечной части предельных множеств в точке  $\infty$  некоторых отображений из  $\bar{\mathbf{C}}$  в  $\bar{\mathbf{C}}^m$ , связанных с полианалитическими полиномами // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: СмолГУ, 2013. Вып. 14. С. 136-138.
4. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.

**S.A. Gomonov**

Smolensk State University

### ON SOME PROPERTIES OF THE CLUSTER SETS OF POLYANALYTIC POLYNOMIALS OF SEVERAL VARIABLES

**Keywords:** *cluster sets, polyanalytic polynomial, algebraic line, resultant, binary relation.*

**Abstract.** *In this paper, in a fairly specific situation, we demonstrate two very common methods often used in mathematics that help to study the structure of certain sets. In this case, these are the cluster sets of polyanalytic polynomials. Firstly, this is the method of “multiplication of points”, about which there is information that they certainly belong to the set under study.*

*And, secondly, it is a method of obtaining a fairly simple superset for the same set under study.*

**Т.М. Иванова**

*Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ*

УДК 517.521

## **ОПИСАНИЕ ОБЛАСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО СИММЕТРИЧНОГО НЕРАВЕНСТВА**

Ключевые слова: *симметричные неравенства, область решений, функциональная последовательность, равномерная сходимость, неявная функция, компьютерная математика.*

*В работе рассматривается специальное симметричное неравенство относительно двух положительных переменных. Строится последовательность функций, равномерно сходящаяся к неявной функции, определяющей область решений.*

В работе [1] подробно обсуждались различные способы доказательства для любых натуральных чисел  $m \neq n$  симметричного неравенства

$$\left| \frac{1}{n^m} - \frac{1}{m^n} \right| > \frac{1}{mn}, \quad (1)$$

предлагавшегося на одной из московских математических олимпиад [2]. Найденное в [1] усиление неравенства (1) в форме

$$\left| \frac{1}{n^m} - \frac{1}{m^n} \right| \geq \frac{K|m-n|}{mn} \quad (2)$$

содержит в правой части точную константу  $K=2$  и обращается в равенство лишь в следующих ситуациях:  $m=n \in \mathbb{N}$ ;  $m=1, n=2$ ;  $m=2, n=1$ .

Сейчас рассмотрим поставленный в [1] вопрос об исследовании неравенства (2) при положительных вещественных значениях переменных для случая  $K=1$ .

### **1. Постановка задачи**

Найти множество всех тех точек области  $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ , для которых выполнено неравенство

$$\left| y^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{y}} \right| \geq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|, \quad (3)$$

и описать все случаи равенства.

## 2. Разделение области $D$

Очевидно, решение этого неравенства представляет собой множество, симметричное относительно прямой  $y = x$ , причём на открытом луче  $L = \{(x, y) : x > 0, y = x\}$  в (3) реализуется равенство. Поэтому далее достаточно ограничиться рассмотрением неравенства (3) в области  $\tilde{D} = \{(x, y) : y > x > 0\}$ .

Пусть  $y > x \geq 1$ . Тогда, учитывая, что  $y \ln y > x \ln x$ ,  $e^{\frac{\ln y}{x}} > 1$ , и применяя теорему Лагранжа для функции  $\varphi(t) = t \ln t$  на отрезке  $[x, y]$ , получим

$$\begin{aligned} \left| y^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{y}} \right| &= y^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{y}} = e^{\frac{\ln y}{x}} - e^{\frac{\ln x}{y}} = e^{\frac{\ln x}{y}} \left( e^{\frac{y \ln y - x \ln x}{xy}} - 1 \right) \geq \\ &\geq \frac{y \ln y - x \ln x}{xy} = \frac{(1 + \ln \xi)(y - x)}{xy} > \frac{y - x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|, \end{aligned}$$

где  $1 \leq x < \xi < y$ ,  $\ln \xi > 0$ . Поэтому искомое множество содержит угол

$$D_1 = \{(x, y) : x \geq 1, y \geq 1\}.$$

Здесь мы повторили рассуждения заметки [1]. При этом равенство в (3) на множестве  $D_1$  достигается только при  $y = x$ . С другой стороны, действуя аналогично, можно показать, что неравенство (3) не выполняется ни в одной точке множества

$$D_2 = \{(x, y) : 0 < x, y \leq 1, y \neq x\}.$$

Теперь покажем, что на множестве

$$D_3 = \{(x, y) : 0 < x < 1 \leq y\}$$

имеется кривая  $y = y_*(x)$ , на которой реализуется равенство в (3). Выше этой кривой на данном множестве неравенство (3) истинно, а ниже — ложно. Аналогичное утверждение можно сделать и о кривой на множестве

$$D_4 = \{(x, y) : x \geq 1 > y > 0\},$$

расположенном симметрично множеству  $D_3$ .

## 3. Неявная функция

Для точек из  $D_3$  неравенство (3) перепишем в виде  $F(x, y) \geq 0$  с непрерывной в  $D_3$  функцией

$$F(x, y) = y^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{y}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию  $f(x) = x - x^\alpha \ln x$  с параметром  $\alpha > 1$ . Она возрастает на  $(0, 1]$ , так как  $f'(x) = \underbrace{-\alpha x^{\alpha-1} \ln x}_{>0} + \underbrace{1 - x^{\alpha-1}}_{>0} > 0$ . Тогда на  $(0, 1)$  получим  $0 < f(x) < f(1) = 1$ .

Отсюда

$$F_y(x, y) = \frac{1}{x} y^{\frac{1}{y}-1} + \frac{1}{y^2} \left( x^{\frac{1}{y}} \ln x - 1 \right) = \frac{1}{xy^2} \left( y^{\frac{1}{y}+1} - \left( x - x^{\frac{1}{y}+1} \ln x \right) \right) > \frac{1}{xy^2} \left( y^{\frac{1}{y}+1} - 1 \right) \geq 0.$$

Значит, при каждом фиксированном  $x \in (0, 1)$  функция  $F(x, y)$  возрастает по  $y \geq 1$  и верны неравенства  $F(x, 1) = 2 - \left( x + \frac{1}{x} \right) < 0$ ,  $F(x, x^{-x}) = x^x - x^{x^x} > 0$ . Следовательно, при каждом фиксированном  $x \in (0, 1)$  существует такое единственное значение  $y_* = y_*(x) \in (1, x^{-x})$ , что  $F(x, y_*) = 0$ . Таким образом, множество точек, на котором реализуется равенство в (3), расположено выше прямой  $y = 1$  и ниже кривой  $y = x^{-x}$ .

#### 4. Построение итерационной последовательности

Заметим, что зависимость  $y = y_*(x)$ , реализующая равенство в (3), то есть являющаяся решением уравнения  $F(x, y) = 0$  в  $D_3$ , удовлетворяет эквивалентному уравнению

$$y = \left( \frac{1}{x} + x^{\frac{1}{y}} - \frac{1}{y} \right)^x. \quad (4)$$

Введём функциональную последовательность  $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  по правилу

$$y_0 = \left( \frac{1}{x} \right)^x, \quad y_{n+1} = \left( \frac{1}{x} + x^{\frac{1}{y_n}} - \frac{1}{y_n} \right)^x, \quad x \in (0, 1). \quad (5)$$

В отдельных ситуациях для сокращения записи аргументы у функций будем опускать.

Покажем, что  $y_n(x) > y_{n+1}(x)$  при всех  $n \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$  и всех  $x \in (0, 1)$ .

Доказательство проведём по индукции.

База индукции ( $n = 0$ ):

$$(y_0)^{\frac{1}{x}} - (y_1)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \underbrace{x^x - x^{x^x}}_{>0} \Rightarrow y_0 > y_1.$$

Шаг индукции. Пусть  $y_{n-1}(x) > y_n(x)$  при всех  $x \in (0, 1)$ .

Тогда  $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_{n-1}} > 0$ ,  $(y_{n-1})^{\frac{1}{x}} - (y_n)^{\frac{1}{x}} > 0$  и

$$(y_n)^{\frac{1}{x}} - (y_{n+1})^{\frac{1}{x}} = \underbrace{x^{\frac{1}{y_{n-1}}} - x^{\frac{1}{y_n}}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_{n-1}}}_{>0} > 0 \Rightarrow y_n > y_{n+1}.$$

Покажем теперь, что  $y_n(x) > y_*(x) > 1$  при всех  $n \in \mathbb{N}_0$  и всех  $x \in (0, 1)$ .

База индукции ( $n = 0$ ). Как показано в п. 3, при всех  $x \in (0, 1)$  выполнены неравенства

$$1 < y_*(x) < y_0(x) = \left( \frac{1}{x} \right)^x.$$

Шаг индукции. Пусть  $y_{n-1}(x) > y_*(x)$  при всех  $x \in (0, 1)$ .

Тогда  $\frac{1}{y_*} - \frac{1}{y_{n-1}} > 0$ ,  $(y_{n-1})^{\frac{1}{x}} - (y_*)^{\frac{1}{x}} > 0$  и

$$(y_n)^{\frac{1}{x}} - (y_*)^{\frac{1}{x}} = \underbrace{x^{\frac{1}{y_{n-1}}} - x^{\frac{1}{y_*}}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{y_*} - \frac{1}{y_{n-1}}}_{>0} > 0 \Rightarrow y_n > y_* > 1.$$

Значит, при каждом фиксированном  $x \in (0,1)$  последовательность (5) монотонно убывает и ограничена снизу. Следовательно, она сходится.

Поскольку  $y_n = (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_2 - y_1) + y_1 = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)$ , то сходимость на  $(0,1)$  последовательности  $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  эквивалентна сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} (y_{k+1}(x) - y_k(x))$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  достаточно мало,  $x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ . Рассмотрим функцию

$g(x, y) = \left( \frac{1}{x} + x^{\frac{1}{y}} - \frac{1}{y} \right)^x$  на компакте  $G_\varepsilon = \{(x, y) : x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon], y \in [1, x^{-x}]\}$ . Оценим

модуль разности её значений в двух точках вида  $(x, y_n), (x, y_{n-1}) \in G_\varepsilon$ .

По теореме Лагранжа запишем

$$\begin{aligned} |g(x, y_n) - g(x, y_{n-1})| &= |g_y(x, \xi)| \cdot |y_n - y_{n-1}| = x \left( \frac{1}{x} + x^{\frac{1}{\xi}} - \frac{1}{\xi} \right)^{x-1} \cdot \left| 1 - x^{\frac{1}{\xi}} \ln x \right| \cdot \frac{|y_n - y_{n-1}|}{\xi^2} = \\ &= \frac{\left( \frac{1}{x} + x^{\frac{1}{\xi}} - \frac{1}{\xi} \right)^x}{\xi} \cdot \frac{|x - x^{\frac{1}{\xi}+1} \ln x|}{\frac{1}{x} + x^{\frac{1}{\xi}} - \frac{1}{\xi}} \cdot \frac{|y_n - y_{n-1}|}{\xi} < \frac{|y_n - y_{n-1}|}{\frac{1}{x} + x - \frac{1}{\xi}} < \frac{|y_n - y_{n-1}|}{1 + \varepsilon^2} = \beta |y_n - y_{n-1}|, \end{aligned}$$

где  $\beta = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ ,  $\xi \in (y_n, y_{n-1})$ . Мы воспользовались выполненными для указанных точек из  $G_\varepsilon$  соотношениями

$$\begin{aligned} 1 < y_* < y_n < \xi < y_{n-1} < y_0, \quad \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon, \quad \frac{1}{\xi} < 1, \quad \left( \frac{1}{x} + x^{\frac{1}{\xi}} - \frac{1}{\xi} \right)^x < \xi, \quad \left| x - x^{\frac{1}{\xi}+1} \ln x \right| < 1, \\ \frac{1}{x} + x - \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1 - \varepsilon} + 1 - \varepsilon - 1 > 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon = 1 + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $0 < \beta < 1$  и при  $x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$  верна оценка

$$|y_{k+1} - y_k| = |g(x, y_k) - g(x, y_{k-1})| < \beta |y_k - y_{k-1}| < \dots < \beta^k |y_1 - y_0| < \beta^k y_0 < 2\beta^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

то ряд  $y_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{k+1} - y_k)$  сходится равномерно на  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ , а его сумма

$y = s(x)$  является непрерывной на таком отрезке функцией. Покажем, что  $y = s(x)$  даёт решение уравнения (4) для  $x \in (0,1)$ . Учитывая равномерную на отрезке  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$  сходимость функциональной последовательности (5), для таких  $x$  получим

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + x^{\frac{1}{y_{n-1}}} - \frac{1}{y_{n-1}} \right)^x = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + x^{\frac{1}{y_{n-1}}} - \frac{1}{y_{n-1}} \right) \right)^x = \left( \frac{1}{x} + x^{\frac{1}{s(x)}} - \frac{1}{s(x)} \right)^x.$$

Тем самым  $y_*(x) = s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$  есть непрерывное решение уравнения (4) в  $G_\varepsilon$ . В силу произвольности параметра  $\varepsilon$ , это будет непрерывное решение в  $D_3$ . Поскольку при всех  $n \in \mathbb{N}_0$  и всех  $x \in (0,1)$  имеем  $1 \leq y_*(x) < y_n(x) \leq y_0(x)$ , то

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0+0} y_n(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0+0} y_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} x^{-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+0} y_n(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+0} y_*(x) = 1,$$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 1-0} y_n(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1-0} y_0(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^{-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-0} y_n(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-0} y_*(x) = 1.$$

На множестве  $D_3$  (см. рис. 1) приведены: точное решение  $y = y_*(x)$ , реализующее равенство в (3) (нижний график), а также последовательные приближения  $y = y_0(x)$ ,  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$ .

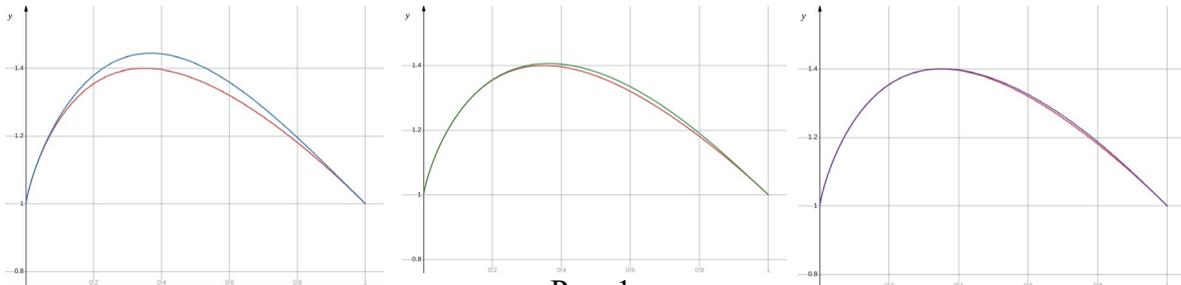


Рис. 1

Как видим, качество аппроксимации высокое, и приближенное решение  $y_2(x)$  уже практически совпадает с точным решением  $y_*(x)$ .

### Заключение

Найдено множество всех тех точек исходной области  $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ , для которых выполнено неравенство (3), и описаны все случаи равенства. Помимо множества  $L = \{(x, y) : x > 0, y = x\}$ , равенство достигается также на кривой, которая получена как предел равномерно сходящейся функциональной последовательности.

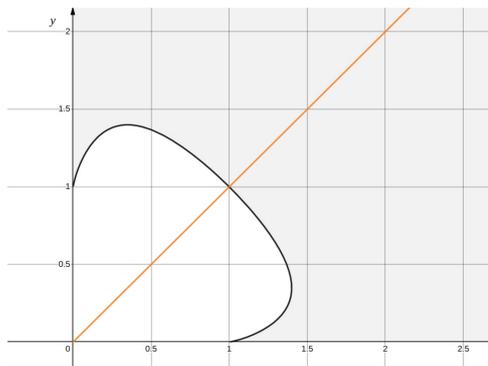


Рис. 2

Множество всех тех точек области  $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ , для которых неравенство (3) выполнено со строгим знаком, отмечено серой заливкой (рис. 2). На симметричном продолжении кривой  $y = y_*(x)$  (черная линия) реализуется равенство. Равенство реализуется также на открытом луче  $L = \{(x, y) : x > 0, y = x\}$ .

При моделировании ситуации активно использовалась система компьютерной математики Maple 2015 и популярный в студенческой среде научный графический калькулятор Desmos.

### Литература

1. Иванова Т.М., Шерстюков В.Б. Об одном симметричном неравенстве // Матем. обр. 2021. №4 (100), ч. 2. С. 69–74.
2. Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. М.: МЦНМО, 2019. 60 с. URL: <https://olimpiads.mccme.ru/mmo/2019/82mmo.pdf>.

**Т.М. Ivanova**

*National Research Nuclear University MEPHI*

## DESCRIPTION OF THE SOLUTION DOMAIN OF A SYMMETRIC INEQUALITY

**Keywords:** *symmetric inequalities, solution domain, functional sequence, uniform convergence, implicit function, computer science.*

**Abstract.** *The paper considers the solution of special symmetric inequality with respect to two positive variables. A functional sequence converging uniformly to the implicit solution of the corresponding equality is constructed.*

**Э.Г. Кирьяцкий**

*Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса*

УДК 519.83

## РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ ИГР

Ключевые слова: *игра, множество элементов, четные и нечетные числа.*

*Пусть множество имеет нечетное число  $M_1$  элементов. Каждый из двух игроков поочередно берет из этого множества некоторое количество элементов, не превышающее фиксированного числа  $n$ . Концом игры считается та ситуация, когда все элементы множества*

будут взяты. Выигрывает тот из игроков, у которого в конце игры окажется нечетное количество элементов. В данной работе полностью решена сформулированная выше проблема. Установлены формулы, связывающие между собой  $n$  и  $M_1$ , позволяющие дать точный ответ по поводу выигрыша или проигрыша, начиная с любой позиции, возникшей во время игры.

### **Введение**

Пусть множество содержит конечное число элементов и каждый игрок поочередно берет из этого множества любое количество элементов, не превышающее некоторого фиксированного числа. Проигрывает тот, которому нечего брать. Эта игра была предложена французским математиком Баше де Мезирьяком и в настоящее время полностью решена. Такого типа комбинаторные задачи известны под названием «НИМ». В данной статье решается следующая проблема. Пусть  $T$  – фиксированное множество, имеющее нечетное число  $M_1$  элементов. Каждый из двух игроков поочередно берет из множества  $T$  некоторое положительное число  $l$  элементов, не превышающее некоторого натурального числа  $n$ . Концом игры считается та ситуация, когда все элементы множества  $T$  будут взяты. Выигрывает тот из игроков, у которого в конце игры окажется нечетное число элементов. Требуется узнать, при каких значениях  $M_1$  и  $n$  начинающий игру выигрывает или проигрывает. Данная игровая проблема при заданных  $M_1$  и  $n$  полностью решена нами в общем виде. В простейшем частном случае, когда  $M_1 = 41, n = 7$ , эта задача была опубликована в [1].

### **1. Обозначения и терминология**

Условимся в обозначениях и дадим краткие пояснения.  $M_1$  – нечетное число.  $N$  – число элементов из  $T$ , еще не взятых игроками в процессе игры.  $n$  – наибольшее число элементов, которое может взять игрок.  $l$  – число элементов, которое может взять игрок при условии, что  $1 \leq l \leq n$ . Запись 01 означает, что игрок, который должен делать ход первым, имеет положительное четное число элементов, а у противника – нечетное число элементов. Аналогичным образом определяются записи 10; 11; 00. Запись  $A^{[01; N]}$  означает позицию, в которой игрок  $A$ , который должен делать ход, имеет четное число элементов, а игрок  $B$  имеет нечетное число элементов, причем  $N$  элементов игроками еще не взяты. Аналогично объясняются другие подобные позиции. Запись  $A\left\{\left[{}^{01}; N\right]; l\right\}$  означает, что игрок  $A$  делает ход. Он берет  $l$  элементов из оставшихся  $N$  элементов. Аналогично объясняются и другие подобные позиции. Символы  $\uparrow$  и  $\downarrow$  означают выигрыш и проигрыш

соответственно. Например, запись  $\left[{}^{10}; N\right] \downarrow$  означает, что игрок, который должен делать ход, проигрывает, хотя здесь отсутствует сам ход и название игрока. Запись  $A\left[{}^{10}; N\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow$  означает, что игрок  $A$ , который должен делать ход, проигрывает, то есть игрок  $B$  выигрывает. Аналогично объясняются и другие подобные позиции. Запись  $\left[{}^{\otimes\otimes}; M_1\right]$  означает начало игры. У обоих игроков нет элементов. Если в процессе игры окажется  $N=0$ , то игра считается законченной и победа присуждается тому игроку, у которого четное число элементов. Символ  $\Rightarrow$  означает переход от одной позиции к другой. Приведем пример борьбы двух игроков. Пусть  $M_1 = 13, n_1 = 5$ .

$$\begin{aligned} A\left\{\left[{}^{\otimes\otimes}; 13\right]; 5\right\} &\Rightarrow B\left\{\left[{}^{\otimes 1}; 8\right]; 1\right\} \Rightarrow A\left\{\left[{}^{11}; 7\right]; 3\right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow B\left\{\left[{}^{10}; 4\right]; 2\right\} \Rightarrow A\left\{\left[{}^{01}; 2\right]; 1\right\} \Rightarrow B\left[{}^{11}; 1\right] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \end{aligned} \quad (1)$$

Заметим, что в (1) игроки делали не всегда наилучшие ходы. На самом деле, можно доказать, что игрок  $B$  всегда выигрывает, если будет соблюдать определенный план игры. В дальнейшем число  $N$  будем записывать в виде  $N = k(n+1) + m$ , где  $0 \leq m \leq n$ , или в виде  $N = k(n+2) + m$ , где  $0 \leq m \leq n+1$ . При этом  $n_0, l_0, m_0, k_0$  – четные значения  $n, l, m, k$ , а  $n_1, l_1, m_1, k_1$  – нечетные значения  $n, l, m, k$ .

## 2. Вспомогательные леммы и теоремы

**Лемма 1.** *Справедливы следующие утверждения:*

$$\begin{aligned} 1a. \left[{}^{01}; k_0(n_1+1)\right] \downarrow. & \quad 1a^*. \left[{}^{01}; k_1(n_1+1)\right] \uparrow. \\ 1b. \left[{}^{10}; k_0(n_1+1)\right] \downarrow. & \quad (2) \\ 1b^*. \left[{}^{10}; k_1(n_1+1)\right] \downarrow. & \quad (3) \\ 1c. \left[{}^{11}; k_0(n_1+1)+1\right] \downarrow. & \quad 1c^*. \left[{}^{11}; k_1(n_1+1)+1\right] \uparrow. \\ 1d. \left[{}^{00}; k_0(n_1+1)+1\right] \uparrow. & \quad 1d^*. \left[{}^{01}; k_1(n_1+1)+1\right] \downarrow. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Будем доказывать утверждения (2) и (3) с помощью индукции. При  $k_0 = 0$  справедливость утверждений (2) очевидна. Пусть утверждения (2) верны при некотором  $k_0 > 0$ . Установим, что утверждения (3) верны при  $k_1 = k_0 + 1$ . Соперников назовем  $A$  и  $B$ . Для определенности пусть первым делает ход игрок  $A$ . Имеем

$$1a^*. A\left\{\left[{}^{01}; k_1(n_1+1)\right]; n_1\right\} \Rightarrow B\left[{}^{11}; k_0(n_1+1)+1\right] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \quad (\text{см. 1c}).$$

$$1b^*. A\left\{\left[{}^{10}; k_1(n_1 + 1)\right]; l_1\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{00}; k_0(n_1 + 1) + n_1 + 1 - l_0\right]; n_1 - l_0\right\} \Rightarrow \quad (\text{см. 1a}).$$

$$\Rightarrow A\left[{}^{01}; k_1(n_1 + 1)\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow$$

$$A\left\{\left[{}^{10}; k_1(n_1 + 1)\right]; l_0\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{01}; k_0(n_1 + 1) + n_1 + 1 - l_0\right]; n_1 - l_0\right\} \Rightarrow \quad (\text{см. 1c}).$$

$$A\left[{}^{11}; k_0(n_1 + 1) + 1\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow$$

$$1c^*. A\left\{\left[{}^{11}; k_1(n_1 + 1) + 1\right]; 1\right\} \Rightarrow B\left[{}^{10}; k_1(n_1 + 1)\right] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \quad (\text{см. 1b}^*).$$

$$1d^*. A\left\{\left[{}^{00}; k_1(n_1 + 1) + 1\right]; l_1\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{01}; k_1(n_1 + 1) + 1 - l_1\right]; n_1 + 1 - l_1\right\} \Rightarrow \quad (\text{см. 1c}).$$

$$A\left[{}^{11}; k_0(n_1 + 1) + 1\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow$$

$$A\left\{\left[{}^{00}; k_1(n_1 + 1) + 1\right]; l_0\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{00}; k_1(n_1 + 1) + 1 - l_0\right]; n_1 + 2 - l_0\right\} \Rightarrow \quad (\text{см. 1a}).$$

$$A\left[{}^{01}; k_0(n_1 + 1)\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow$$

Мы доказали утверждение (3) при  $k_1 = 1$ . Предположим, что утверждение (3) справедливо при некотором  $k_1 > 1$ , и докажем справедливость утверждений (2) при  $k_0 = k_1 + 1$ . Действительно,

$$1a. A\left\{\left[{}^{01}; k_0(n_1 + 1)\right]; l_1\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{11}; k_0(n_1 + 1) + 1 - l_1\right]; n_1 + 1 - l_1\right\} \Rightarrow$$

$$A\left[{}^{10}; k_1(n_1 + 1)\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow \quad (\text{см. 1 b}^*).$$

$$A\left\{\left[{}^{01}; k_0(n_1 + 1)\right]; l_0\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{10}; k_0(n_1 + 1) - l_0\right]; n_1 - l_0\right\} \Rightarrow$$

$$A\left[{}^{00}; k_1(n_1 + 1) + 1\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow \quad (\text{см. 1 d}^*).$$

$$1b. A\left\{\left[{}^{10}; k_0(n_1 + 1)\right]; n_1\right\} \Rightarrow B\left[{}^{00}; k_1(n_1 + 1) + 1\right] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \quad (\text{см. 1 d}^*).$$

$$1c. A\left\{\left[{}^{11}; k_0(n_1 + 1) + 1\right]; l_1\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{10}; k_0(n_1 + 1) + 1 - l_1\right]; n_1 + 1 - l_1\right\} \Rightarrow$$

$$A\left[{}^{00}; k_1(n_1 + 1) + 1\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow \quad (\text{см. 1 d}^*).$$

$$A\left\{\left[{}^{11}; k_0(n_1 + 1) + 1\right]; l_0\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{11}; k_0(n_1 + 1) + 1 - l_0\right]; n_1 + 2 - l_0\right\} \Rightarrow$$

$$A\left[{}^{10}; k_1(n_1 + 1)\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow \quad (\text{см. 1 b}^*).$$

$$1d. A\left\{\left[{}^{00}; k_0(n_1 + 1) + 1\right]; 1\right\} \Rightarrow B\left[{}^{01}; k_0(n_1 + 1)\right] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \quad (\text{см. 1a}).$$

Лемма 1 доказана.

**Теорема 1.** *Справедливы утверждения:*

$$2a. \left[{}^{01}; k_0(n_1 + 1) + m_0\right] \uparrow \quad \text{при } m_0 \neq 0. \quad 2a^*. \left[{}^{01}; k_1(n_1 + 1) + m_0\right] \uparrow \quad \text{при } m_0 \neq 0.$$

$$2b. \left[{}^{10}; k_0(n_1 + 1) + m_0\right] \uparrow \quad \text{при } m_0 \neq 0. \quad 2b^*. \left[{}^{10}; k_1(n_1 + 1) + m_0\right] \uparrow \quad \text{при } m_0 \neq 0.$$

$$2c. \left[{}^{11}; k_0(n_1 + 1) + m_1\right] \uparrow \quad \text{при } m_1 \neq 1. \quad 2c^*. \left[{}^{11}; k_1(n_1 + 1) + m_1\right] \uparrow \quad \text{при } m_1 \neq 0.$$

$$2d. \left[{}^{00}; k_0(n_1 + 1) + m_1\right] \uparrow \quad \text{при } m_1 \neq 1. \quad 2d^*. \left[{}^{00}; k_1(n_1 + 1) + m_1\right] \uparrow \quad \text{при } m_1 \neq 1.$$

- 1a.  $[^{01}; k_0(n_1 + 1)] \downarrow$ . 1b\*.  $[^{10}; k_1(n_1 + 1)] \downarrow$ .  
 1c.  $[^{11}; k_0(n_1 + 1) + 1] \downarrow$ . 1d\*.  $[^{00}; k_1(n_1 + 1) + 1] \downarrow$ .

**Доказательство.** Двух соперников назовем  $A$  и  $B$ . Для определенности пусть первым делает ход игрок  $A$ . Утверждения 1a, 1b, 1c, 1d, 1a\*, 1b\*, 1c\*, 1d\*, когда  $m_0 = 0$ ,  $m_1 = 1$ , доказаны в лемме 1. Пусть  $m_0 \neq 0$ ,  $m_1 \neq 1$ . Имеем

- 2a.  $A \left\{ [^{01}; k_0(n_1 + 1) + m_0]; m_0 - 1 \right\} \Rightarrow B [^{11}; k_0(n_1 + 1) + 1] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow$  (см. 1c).  
 2b.  $A \left\{ [^{10}; k_0(n_1 + 1) + m_0]; m_0 \right\} \Rightarrow B [^{01}; k_0(n_1 + 1)] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \Leftrightarrow A \uparrow$  (см. 1a).  
 2c.  $A \left\{ [^{11}; k_0(n_1 + 1) + m_1]; m_1 - 1 \right\} \Rightarrow B [^{11}; k_0(n_1 + 1) + 1] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow$  (см. 1c).  
 2d.  $A \left\{ [^{00}; k_0(n_1 + 1) + m_1]; m_1 \right\} \Rightarrow B [^{01}; k_0(n_1 + 1)] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow$  (см. 1a).  
 2a\*.  $A \left\{ [^{01}; k_0(n_1 + 1) + m_0]; m_0 \right\} \Rightarrow B [^{10}; k_1(n_1 + 1)] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow$  (см. 1b\*).  
 2b\*.  $A \left\{ [^{10}; k_1(n_1 + 1) + m_0]; m_0 - 1 \right\} \Rightarrow B [^{00}; k_1(n_1 + 1) + 1] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow$  (см. 1d\*).  
 2c\*.  $A \left\{ [^{11}; k_1(n_1 + 1) + m_1]; m_1 \right\} \Rightarrow B [^{10}; k_1(n_1 + 1)] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow$  (см. 1b\*).  
 2d\*.  $A \left\{ [^{00}; k_1(n_1 + 1) + m_1]; m_1 - 1 \right\} \Rightarrow B [^{00}; k_1(n_1 + 1) + 1] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow$  (см. 1d\*).

Теорема 1 доказана.

**Лемма 2.** *Справедливы следующие утверждения:*

- 3a.  $[^{01}; k(n_0 + 2)] \downarrow$ .  
 3b.  $[^{10}; k(n_0 + 2)] \uparrow$ .  
 3c.  $[^{00}; k(n_0 + 2) + 1] \uparrow$  (4)  
 3d.  $[^{11}; k(n_0 + 2) + 1] \downarrow$   
 3e.  $[^{11}; k(n_0 + 2) + n_0 + 1] \uparrow$ .  
 3f.  $[^{00}; k(n_0 + 2) + n_0 + 1] \downarrow$ .

**Доказательство.** Воспользуемся индукцией. При  $k = 0$  утверждения (4) справедливы. Пусть утверждения (4) справедливы при некотором  $k > 0$ . Убедимся в том, что утверждения (4) справедливы при  $k^* = k + 1$ . Докажем утверждения:

- 3a\*.  $[^{01}; k(n_0 + 2)] \downarrow$ .  
 3b\*.  $[^{10}; k^*(n_0 + 2)] \uparrow$ .  
 3c\*.  $[^{00}; k^*(n_0 + 2) + 1] \uparrow$ . (5)  
 3d\*.  $[^{11}; k(n_0 + 2) + 1] \downarrow$   
 3e\*.  $[^{11}; k^*(n_0 + 2) + n_0 + 1] \uparrow$ .

$$3f^*. \left[{}^{00}; k^*(n_0 + 2) + n_0 + 1\right] \downarrow.$$

Соперников назовем  $A$  и  $B$ . Для определенности пусть первым делает ход игрок  $A$ . Имеем

$$3a^*. A\left\{\left[{}^{01}; k^*(n_0 + 2)\right]; l_1\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{11}; k(n_0 + 2) + n_0 + 2 - l_1\right]; n_0 + 1 - l_1\right\} \Rightarrow$$

$$A\left[{}^{11}; k(n_0 + 2) + 1\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow \text{ (см. 3d)}.$$

$$A\left\{\left[{}^{01}; k^*(n_0 + 2)\right]; l_0\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{10}; k(n_0 + 2) + n_0 + 2 - l_0\right]; n_0 + 2 - l_0\right\} \Rightarrow \text{ (см. 3a).}$$

$$A\left[{}^{01}; k(n_0 + 2)\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow$$

$$3b^*. A\left\{\left[{}^{10}; k^*(n_0 + 2)\right]; 1\right\} \Rightarrow B\left[{}^{00}; k(n_0 + 2) + n_0 + 1\right] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \text{ (см. 3f)}.$$

$$3c^*. A\left\{\left[{}^{00}; k^*(n_0 + 2) + 1\right]; 1\right\} \Rightarrow B\left[{}^{01}; k^*(n_0 + 2)\right] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \text{ (см. 3a*)}.$$

$$3d^*. A\left\{\left[{}^{11}; k^*(n_0 + 2) + 1\right]; 1\right\} \Rightarrow B\left[{}^{10}; k^*(n_0 + 2)\right] \uparrow \Leftrightarrow A \downarrow \text{ (см. 3b*)}.$$

$$l_1 \neq 1.$$

$$A\left\{\left[{}^{11}; k^*(n_0 + 2) + 1\right]; l_1\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{10}; k^*(n_0 + 2) + 1 - l_0\right]; n_0 + 3 - l_1\right\} \Rightarrow \text{ (см. 3a).}$$

$$A\left[{}^{01}; k(n_0 + 2)\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow$$

$$A\left\{\left[{}^{11}; k^*(n_0 + 2) + 1\right]; l_0\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{11}; k^*(n_0 + 2) + 1 - l_0\right]; n_0 + 2 - l_0\right\} \Rightarrow \text{ (см. 3d).}$$

$$A\left[{}^{11}; k(n_0 + 2) + 1\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow$$

$$3e^*. A\left\{\left[{}^{11}; k^*(n_0 + 2) + n_0 + 1\right]; n_0\right\} \Rightarrow B\left[{}^{11}; k^*(n_0 + 2) + 1\right] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \text{ (см. 3d*)}.$$

$$3f^*.$$

$$A\left\{\left[{}^{00}; k^*(n_0 + 2) + n_0 + 1\right]; l_1\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{01}; k^*(n_0 + 2) + n_0 + 1 - l_1\right]; n_0 - l_1\right\} \Rightarrow$$

$$A\left[{}^{11}; k^*(n_0 + 2) + 1\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow \text{ (см. 3d*)}.$$

$$A\left\{\left[{}^{00}; k^*(n_0 + 2) + n_0 + 1\right]; l_0\right\} \Rightarrow B\left\{\left[{}^{00}; k^*(n_0 + 2) + n_0 + 1 - l_0\right]; n_0 + 1 - l_0\right\} \Rightarrow$$

$$A\left[{}^{01}; k^*(n_0 + 2)\right] \downarrow \Leftrightarrow B \uparrow$$

$$\text{(см. 3a*)}.$$

Мы установили справедливость утверждений (5). Лемма 2 доказана.

**Теорема 2.** *Справедливы утверждения:*

$$4a. \left[{}^{01}; k(n_0 + 2) + m_0\right] \uparrow \text{ при } 0 < m_0 \leq n_0.$$

$$4b. \left[{}^{10}; k(n_0 + 2) + m_0\right] \uparrow \text{ при } 0 < m_0 \leq n_0.$$

$$4c. \left[{}^{11}; k(n_0 + 2) + m_1\right] \uparrow \text{ при } 1 < m_1 \leq n_0 + 1.$$

$$4d. \left[{}^{00}; k(n_0 + 2) + m_1\right] \uparrow \text{ при } 1 < m_1 \leq n_0 + 1.$$

$$3a. \left[{}^{01}; k(n_0 + 2)\right] \downarrow.$$

- 3b.  $[^{10}; k(n_0 + 2)] \uparrow$   
 3d.  $[^{11}; k(n_0 + 2) + 1] \downarrow$ .  
 3f.  $[^{00}; k(n_0 + 2) + n_0 + 1] \downarrow$ .

**Доказательство.** Утверждения 3а, 3b, 3d, 3f, когда  $m_0 = 0, m_1 = 1$  или  $m_1 = n_0 + 1$ , доказаны в лемме 2. Докажем утверждения 4а, 4b, 4с, 4d. Двух соперников назовем  $A$  и  $B$ . Для определенности пусть первым делает ход игрок  $A$ . Имеем

4а. Если  $0 < m_0 \leq n_0$ , то

$$A \left\{ [^{01}; k(n_0 + 2) + m_0]; m_0 - 1 \right\} \Rightarrow B [^{11}; k(n_0 + 2) + 1] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \text{ (см. 3d).}$$

4b. Если  $0 < m_0 \leq n_0$ , то

$$A \left\{ [^{10}; k(n_0 + 2) + m_0]; m_0 \right\} \Rightarrow B [^{01}; k(n_0 + 2)] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \text{ (см. 3а).}$$

4с. Если  $1 < m_1 \leq n_0 + 1$ , то

$$A \left\{ [^{11}; k(n_0 + 2) + m_1]; m_1 - 1 \right\} \Rightarrow B [^{11}; k(n_0 + 2) + 1] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \text{ (см. 3d).}$$

4d. Если  $1 < m_1 \leq n_0 + 1$ , то

$$A \left\{ [^{00}; k(n_0 + 2) + m_1]; m_1 \right\} \Rightarrow B [^{01}; k(n_0 + 2)] \downarrow \Leftrightarrow A \uparrow \text{ (см. 3а).}$$

Теорема 2 доказана.

### 3. Заключительный результат

Нами сформулированы и доказаны две теоремы. Они полностью отражают все возможные фрагменты игры, так как записанные в теоремах игровые позиции не обязаны служить началом игры. Из этих теорем следует, что начинать игру можно с любой позиции, причем исход игры при условии, что оба партнера играют наилучшим образом, можно заранее предсказать. В следующей теореме мы рассматриваем те случаи, когда в начале игры оба игрока не имеют элементов.

**Теорема 3.** *Справедливы следующие утверждения:*

1.  $[^{\otimes\otimes}; M_1] \downarrow$ , если  $M_1 = k_0(n_1 + 1) + 1$ .
2.  $[^{\otimes\otimes}; M_1] \uparrow$ , если  $M_1 = k_1(n_1 + 1) + 1$ .
3.  $[^{\otimes\otimes}; M_1] \uparrow$ , если  $M_1 = k(n_1 + 1) + m_1$  и  $m_1 \neq 1$ .
4.  $[^{\otimes\otimes}; M_1] \downarrow$ , если  $M_1 = k(n_0 + 2) + 1$ .
5.  $[^{\otimes\otimes}; M_1] \uparrow$ , если  $M_1 = k(n_0 + 2) + m_1$  и  $0 < m < n_0 + 1$ .
6.  $[^{00}; k(n_0 + 2) + n_0 + 1] \downarrow$ , если  $M_1 = k(n_0 + 2) + n_0 + 1$ .

Утверждения 1, 2, 3 следуют из теоремы 1, а утверждения 4, 5, 6 следуют из теоремы 2. Таким образом, теоремы 1, 2 исчерпывают все случаи, которые могут представиться в данной игре. Тем самым теорема 3 доказана.

**Пример.** Пусть  $M_1 = 41$  и  $n_1 = 7$ . Тогда  $41 = 5(7 + 1) + 1$ . По теореме 1 игрок, делающий ход первым, выигрывает.

### Литература

1. Sprague Roland. Unterhaltsame Mathematik // Braunschweig, 1969. 36.

**Е. Kirjackij**

Vilnius Gediminas Technical University

## THE SOLUTION OF A PARTICULAR GAMES THEORY PROBLEM

**Keywords:** *game, player, elements, number, winner.*

**Abstract.** *Let a set  $T$  have an odd number of elements  $M_1$ . Each of two players (referred to as  $A$  and  $B$ ) takes a certain number of elements, which should not exceed the number  $n$ . The game is over when all the elements of the set  $T$  are taken. The winner is a player who has an odd number of elements at the end of the game. The above problem is fully solved by author of this paper.*

**А.Б. Костин, Е.Х. Садекова, В.Б. Шерстюков**

*Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,  
МГУ имени М.В. Ломоносова*

УДК 517.518.8+517.955

## О ПРИБЛИЖЕНИИ В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, задача Коши, формула Пуассона, разрывная функция, метрика Хаусдорфа,  $W$ -функция Ламберта.*

*На примере задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности изучается вопрос о характере приближения решения к начальному условию в хаусдорфовой метрике. В качестве начального условия выбрана простейшая разрывная функция  $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$ . При исследовании такой модельной задачи потребовалась информация об асимптотическом поведении  $W$ -функции Ламберта. На этой основе получена оценка сверху для хаусдорфова расстояния между решением, задаваемым формулой Пуассона, и функцией  $u_0(x)$ .*

В работе [1] рассматривался пример приближения в метрике Хаусдорфа ( $H$ -метрике) функции  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  последовательностью  $g_n(x) = (2/\pi) \operatorname{arctg} nx$ . В частности, там была получена асимптотика хаусдорфова расстояния

$$H(f, g_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

При обсуждении нашего доклада профессор И.В. Тихонов задал вопрос о приближении в  $H$ -метрике разрывной функции соответствующим интегралом Пуассона, что послужило поводом для написания данной заметки. Различные сведения о хаусдорфовой аппроксимации разрывных функций гладкими можно найти, например, в [2; 3]. Примеры применения  $H$ -метрики в задачах математической физики авторам неизвестны.

Напомним необходимые определения. Хаусдорфовым расстоянием ( $H$ -расстоянием) между двумя замкнутыми множествами  $X, Y$  на плоскости  $Oxy$  называется величина

$$H(X, Y) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid X \subset U_\varepsilon(Y), Y \subset U_\varepsilon(X) \right\},$$

где  $\varepsilon$ -окрестность множества  $X$  имеет вид

$$U_\varepsilon(X) = \left\{ M \mid \rho(M; X) \leq \varepsilon \right\},$$

а расстояние от точки  $M = M(x, y)$  до множества  $X$  задается формулой

$$\rho(M; X) = \inf \left\{ \operatorname{dist}(M, M') \mid M' \in X \right\},$$

в которой

$$\operatorname{dist}(M, M') = \max(|x - x'|, |y - y'|)$$

есть расстояние между точками  $M(x, y)$  и  $M'(x', y')$ .

Под дополненным графиком заданной функции  $f$  будем понимать наименьшее замкнутое множество  $F(f)$  плоскости  $Oxy$ , содержащее график  $\Gamma_f$  этой функции и являющееся выпуклым относительно оси  $Oy$ . Наконец,  $H$ -расстоянием между двумя функциями  $f$  и  $g$  называется  $H$ -расстояние между их дополненными графиками  $F(f)$  и  $F(g)$ , то есть

$$H(f, g) = H(F(f), F(g)).$$

Перейдем к строгой постановке вопроса. Классическая задача Коши для уравнения теплопроводности состоит в нахождении функции  $u(x, t)$  из условий

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

где параметр  $a > 0$  выражается через характеристики однородной среды по формуле  $a^2 = k/(c\rho)$ . Символами  $\rho, c, k$  обозначены плотность,

удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности соответственно. Хорошо известно, например, что если заданная функция  $u_0$  непрерывна и ограничена на  $\mathbf{R}$  ( $u_0 \in C(\mathbf{R}) \cap B(\mathbf{R})$ ), то решение задачи (1), (2) существует и может быть найдено по формуле Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi. \quad (3)$$

При этом решение  $u \in C^{2,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0) \cap B(t \geq 0)$  и единственно в таком классе. Начальное условие (2) здесь понимается как предел изнутри области  $t > 0$ , то есть для любого  $x \in \mathbf{R}$  выполнено равенство

$$\lim_{(y,t) \rightarrow (x,0)} u(y, t) = u_0(x). \quad (4)$$

Как нетрудно видеть, требование  $u_0 \in C(\mathbf{R})$  является необходимым для выполнения (4). Возьмем в начальном условии (2) функцию знака  $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$ . Из курса уравнений математической физики известно, что при  $x = 0$  в этом случае предела (4) не существует, а выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(0, t) = \frac{u_0(0+) + u_0(0-)}{2}.$$

Формула Пуассона (3) дает также решение уравнения (1), например, при любом выборе  $u_0 \in B(\mathbf{R}) \cap L_{1,loc}(\mathbf{R})$ . В каком смысле тогда следует понимать начальное условие (2)? Для модельной начальной функции  $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$  мы получим оценку сверху  $H$ -расстояния  $H(u(\cdot, t), \operatorname{sgn})$  при  $t \rightarrow 0+$ , показывающую, что для разрывных начальных функций условие (2) удобно понимать как предел в  $H$ -метрике при  $t \rightarrow 0+$ . Отметим, что соответствующего предела в стандартных нормах  $C$  или  $L_p$  не существует, а вместе с тем «на глаз» [3] решение  $u(x, t)$  стремится к начальной функции  $u_0(x)$ .

Получим формулу для решения  $u(x, t)$ , подставив  $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$  в (3). Имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left( e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-\eta^2} d\eta$$

при всех  $x \in \mathbf{R}$  и всех  $t > 0$ . Обозначим  $\alpha = 1/(2a\sqrt{t}) > 0$ . Искомое расстояние находится по правилу

$$H(u(\cdot, t), \operatorname{sgn}) = x > 0,$$

где  $x = x(\alpha)$  – корень уравнения

$$1 - x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha x} e^{-\eta^2} d\eta. \quad (5)$$

Сделаем еще одну замену, полагая в (5)  $\tau = \alpha x$ . Тогда

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \tau = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \equiv \Phi(\tau), \quad \tau > 0. \quad (6)$$

Функция  $\Phi(\tau)$ , связанная с интегралом ошибок, строго убывает к нулю при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Верна оценка

$$\frac{1}{2\tau} \left(1 - \frac{1}{2\tau^2}\right) e^{-\tau^2} < \Phi(\tau) < \frac{1}{2\tau} e^{-\tau^2}, \quad \tau > 0. \quad (7)$$

Правая часть (7) показывает, что при фиксированном  $\alpha > 0$  корень  $\tau = \tau(\alpha)$  уравнения (6) оценивается сверху через корень уравнения  $ue^u = \beta$  с заданным  $\beta > 0$ .

На луче  $u \geq 0$  рассмотрим функцию  $\beta = \varphi(u) \equiv ue^u$ . На этом луче  $\varphi(u)$  строго возрастает от  $\varphi(0) = 0$  до  $+\infty$ . Поэтому обратная функция  $u = \varphi^{-1}(\beta) \equiv W(\beta)$  однозначно определена и строго возрастает при  $\beta \geq 0$  от  $W(0)$  до  $+\infty$ . Требуется выяснить асимптотическое поведение функции  $u = W(\beta)$  при  $\beta \rightarrow +\infty$ . Поставленная задача, впрочем, не нова. Дело в том, что  $W(\beta)$  совпадает на луче  $\beta \geq 0$  с главной ветвью специальной  $W$ -функции Ламберта – многозначной функции комплексного переменного, играющей заметную роль в естествознании (см., например, [4]). Особо выделим обзорную работу [5], которая содержит, помимо прочего, асимптотические формулы для  $W$ -функции Ламберта. В частности, как указано в [5], при  $\beta \rightarrow +\infty$  справедливо разложение

$$W(\beta) = L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2(L_2 - 2)}{2L_1^2} + \frac{L_2(2L_2^2 - 9L_2 + 6)}{6L_1^3} + O\left(\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^4\right), \quad (8)$$

для записи которого использованы краткие обозначения  $L_1 \equiv \ln \beta$ ,  $L_2 \equiv \ln \ln \beta$ . В заметке [6] к такой асимптотике добавлено несколько оценок разной степени точности. Так, согласно [6, теорема 2.7], для всех  $\beta \geq e$  имеем

$$\ln \beta - \ln \ln \beta + \frac{1}{2} \frac{\ln \ln \beta}{\ln \beta} \leq W(\beta) \leq \ln \beta - \ln \ln \beta + \frac{e}{e-1} \frac{\ln \ln \beta}{\ln \beta} \quad (9)$$

со строгими неравенствами при  $\beta > e$ . Результат (9) показывает, что

$$W(\beta) = \ln \beta - \ln \ln \beta + O\left(\frac{\ln \ln \beta}{\ln \beta}\right), \quad \beta \rightarrow +\infty,$$

но не выявляет правильный вид  $L_2/L_1 \equiv \ln \ln \beta / \ln \beta$  третьего члена асимптотической формулы (8).

Оценка (9) может быть усилена так, чтобы из нее извлекались

первые три слагаемых асимптотического разложения (8) и точный порядок остаточного члена. Сформулируем нужное утверждение.

**Теорема 1.** При всех  $\beta \geq e$  справедливо двойное неравенство

$$\ln \beta - \frac{\ln \beta}{\ln \beta + 1} \ln \ln \beta \leq W(\beta) \leq \ln \beta - \frac{\ln \beta}{\ln \beta + 1} \ln \ln \beta + \frac{\ln \beta}{(\ln \beta + 1)^3} \ln^2 \ln \beta, \quad (10)$$

влекущее асимптотическую формулу

$$W(\beta) = \ln \beta - \ln \ln \beta + \frac{\ln \ln \beta}{\ln \beta} + O\left(\left(\frac{\ln \ln \beta}{\ln \beta}\right)^2\right)$$

при  $\beta \rightarrow +\infty$ .

В краткой нотации имеем

$$L_1 - \frac{L_1 L_2}{L_1 + 1} \leq W(\beta) \leq L_1 - \frac{L_1 L_2}{L_1 + 1} + \frac{L_1 L_2^2}{(L_1 + 1)^3}$$

при всех  $\beta \geq e$ , откуда

$$W(\beta) = L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + O\left(\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\right)$$

при  $\beta \rightarrow +\infty$  (ср. с (8)).

Двусторонняя оценка (10) представляет самостоятельный интерес. Отметим, что сейчас, для доказательства основного результата статьи, достаточно воспользоваться простейшим вариантом  $W(\beta) \leq \ln \beta$ ,  $\beta \geq e$ .

**Теорема 2.** Справедливо неравенство

$$H(u(\cdot, t), \text{sgn}) < 2a \sqrt{t \ln \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}}, \quad 0 < t < \frac{1}{\pi(2ae)^2}. \quad (11)$$

Из (11) очевидно вытекает, что  $H(u(\cdot, t), \text{sgn}) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0+$ , и просматривается скорость такой сходимости. Пользуясь оценкой функции  $\Phi(\tau)$  снизу (см. (7)), можно для величины  $H(u(\cdot, t), \text{sgn})$  найти подходящую миноранту и получить асимптотику при  $t \rightarrow 0+$ . Ввиду ограничений на объем статьи подробные доказательства и обсуждение как указанной асимптотики, так и неравенств (10) будут даны в отдельной работе.

## Литература

1. Костин А.Б., Садекова Е.Х., Шерстюков В.Б. Два модельных примера приближения разрывных функций гладкими в метрике Хаусдорфа // Системы компьютерной математики и их приложения. 2022. Вып. 23. С. 251-257.
2. Сендов Б.Х. Хаусдорфовы приближения. София: Изд-во Болгарской АН, 1979. 372 с.

3. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно монотонных (в частности, рациональных) функций // Математический сборник. 1976. Т. 101(143), № 4(12). С. 508-541.

4. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W-функция Ламберта и ее применения в математических задачах физики. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. 159 с.

5. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function // Advances in Computational Mathematics. 1996. Vol. 5. P. 329-360.

6. Hoorfar A., Mehdi H. Inequalities on the Lambert W function and hyperpower function // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. 2008. Vol. 9(2), art. 51. 5 p.

**A.B. Kostin, E.H. Sadekova, V.B. Sherstyukov**

National Research Nuclear University MEPhI

Moscow State University

### **ON THE APPROXIMATION OF THE INITIAL CONDITION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION BY ITS SOLUTION IN THE HAUSDORFF METRIC**

**Keywords:** *heat equation, Cauchy problem, Poisson formula, discontinuous function, Hausdorff metric, Lambert W function.*

**Abstract.** *Using the example of the Cauchy problem for the one-dimensional heat equation, we study the problem of approximation of the solution to the initial condition in the Hausdorff metric. The simplest discontinuous function  $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$  is chosen as the initial condition. When studying such a model problem, we needed information about the asymptotic behavior of the Lambert W function. Based on this, an upper bound is obtained for the Hausdorff distance between the solution given by the Poisson formula and the function  $u_0(x)$ .*

**С.Ю. Курицын, К.М. Расулов**

*Смоленский государственный университет*

УДК 517.968.23

### **ОБ УСЛОВИЯХ НЕТЕРОВОСТИ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ТИПА**

**Ключевые слова:** *метааналитическая функция, обобщенная краевая задача типа Римана, интегральные члены, условия разрешимости, нетеровость.*

В статье приводится конструктивный алгоритм решения одной из основных обобщенных краевых задач типа Римана для кусочно метааналитических функций второго типа в произвольных односвязных областях с гладкими границами. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых решение рассматриваемой задачи сводится к последовательному решению двух невырожденных скалярных обобщенных краевых задач Римана в классах кусочно аналитических функций. Кроме того, получены условия нетеровости исследуемой задачи.

**1. Постановка задачи.** Предположим, что  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым замкнутым гладким контуром  $L \in C_\mu^2$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ , причем для определенности будем считать, что точка  $z = 0$  принадлежит  $T^+$ .

Напомним (см., например, [1, с. 139] или [2–3]) *исчезающей на бесконечности кусочно метааналитической функцией второго типа с линией скачков  $L$*  называют функцию  $F(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , которая в двух дополняющих друг друга до расширенной комплексной плоскости областях  $T^+$  и  $T^-$  определяется так:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_0 \bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_1 \bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) \exp\left\{\lambda_0 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\} + \varphi_1^-(z) \exp\left\{\lambda_1 \frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi_k^\pm(z) \in A(T^\pm)$ ,  $k = 0, 1$ ,  $m \in N, m \geq 2$ ,  $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1$  а  $\lambda_0, \lambda_1$  – некоторые комплексные постоянные ( $\lambda_0 \neq \lambda_1$ ), причем существуют конечные угловые пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

Обычно говорят, что кусочно метааналитическая функция  $F(z)$  с линией скачков  $L$  вида (1) принадлежит классу  $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$ , если ее аналитические компоненты  $\varphi_k^\pm(z)$  ( $k = 0, 1$ ) непрерывно продолжаются на границу  $L$  вместе со своими производными  $\frac{d\varphi_k^\pm(z)}{dz}$  ( $k = 0, 1$ ), причем так, что граничные значения функций  $\varphi_k^\pm(z)$  ( $k = 0, 1$ ) и указанных их производных удовлетворяют на  $L$  условию Гёльдера.

Рассматривается следующая задача (см. также [1, с. 141], [2–3]). *Требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно метааналитические функции  $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$  вида (1),*

принадлежащие классу  $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \int_L A_1(t, \tau) \frac{\partial F^+(\tau)}{\partial x} d\tau + \int_L B_1(t, \tau) \frac{\partial F^-(\tau)}{\partial x} d\tau = g_1(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} + G_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + \int_L A_2(t, \tau) \frac{\partial F^+(\tau)}{\partial y} d\tau + \int_L B_2(t, \tau) \frac{\partial F^-(\tau)}{\partial y} d\tau = ig_2(t), \quad (3)$$

где  $G_k(t)$ ,  $g_k(t)$  ( $k=1, 2$ ) – заданные на  $L$  функции класса  $H^{(1)}(L)$ , причем  $G_k(t) \neq 0$  ( $k=1, 2$ ), а  $A_k(t, \tau)$ ,  $B_k(t, \tau)$  ( $k=1, 2$ ) – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу  $H_*^{(1)}(L \times L)$ .

Следуя [2–3], сформулированную выше задачу будем называть первой основной обобщенной краевой задачей типа Римана в классах метааналитических функций или, короче, задачей  $GR_{l,m}$ , а соответствующую однородную задачу ( $g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$ ) – задачей  $GR_{l,m}^0$ .

В работе [2] авторов была анонсирована идея метода решения задачи  $GR_{l,m}$ , а в статье [3] было дано полное решение этой задачи в случае, когда носителем краевых условий (2) и (3) служит единичная окружность, то есть когда  $L = \{t : |t| = 1\}$ . Целью настоящей статьи является полное изложение алгоритма решения задачи  $GR_{l,m}$  и установление условий ее нетеровости в случае, когда  $L$  – произвольная гладкая кривая из класса  $C_\mu^2$  (см., например, [1, с. 25]).

## 2. Алгоритм решения задачи $GR_{l,m}$ в случае, когда $\lambda_1 \neq 0, \lambda_0 \neq \lambda_1$ .

**1 шаг.** Будем искать решения задачи  $GR_{l,m}$  в виде (1). Тогда с учетом (1) будем иметь:

$$\frac{\partial F^+(z)}{\partial z} = \sum_{k=0}^1 \frac{d\varphi_k^+(z)}{dz} \exp\{\lambda_k \bar{z}\}, \quad \frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}} = \sum_{k=0}^1 \lambda_k \varphi_k^+(z) \exp\{\lambda_k \bar{z}\}, \quad z \in T^+, \quad (4)$$

$$\frac{\partial F^-(z)}{\partial z} = \sum_{k=0}^1 \left[ \frac{d\varphi_k^-(z)}{dz} - \frac{\lambda_k m \bar{z}}{z^{m+1}} \varphi_k^-(z) \right] \exp\left\{ \lambda_k \frac{\bar{z}}{z^m} \right\},$$

$$\frac{\partial F^-(z)}{\partial \bar{z}} = \sum_{k=0}^1 \frac{\lambda_k}{z^m} \varphi_k^-(z) \exp\left\{ \lambda_k \frac{\bar{z}}{z^m} \right\}, \quad z \in T^-. \quad (5)$$

Далее, пользуясь соотношениями (4)–(5) и тем, что  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  и

$\frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$ , перепишем краевые условия (2) и (3) в виде

$$\sum_{k=0}^1 \left( \frac{d\varphi_k^+(t)}{dt} + \lambda_k \varphi_k^+(t) \right) \exp\{\lambda_k \bar{t}\} - G_1(t) \sum_{k=0}^1 \left( \frac{d\varphi_k^-(t)}{dt} + \frac{\lambda_k (t - m\bar{t})}{t^{m+1}} \varphi_k^-(t) \right) \exp\left\{ \frac{\lambda_k \bar{t}}{t^m} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_L A_1(t, \tau) \sum_{k=0}^1 \left( \frac{d\varphi_k^+(\tau)}{d\tau} + \lambda_k \varphi_k^+(\tau) \right) \exp\{\lambda_k \bar{\tau}\} d\tau + \\
& + \int_L B_1(t, \tau) \sum_{k=0}^1 \left( \frac{d\varphi_k^-(\tau)}{d\tau} + \frac{\lambda_k(\tau - m\bar{\tau})}{\tau^{m+1}} \varphi_k^-(\tau) \right) \exp\left\{\frac{\lambda_k \bar{\tau}}{\tau^m}\right\} d\tau = g_1(t), \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^1 \left( \frac{d\varphi_k^+(t)}{dt} - \lambda_k \varphi_k^+(t) \right) \exp\{\lambda_k \bar{t}\} - G_2(t) \sum_{k=0}^1 \left( \frac{d\varphi_k^-(t)}{dt} - \frac{\lambda_k(t + m\bar{t})}{t^{m+1}} \varphi_k^-(t) \right) \exp\left\{\frac{\lambda_k \bar{t}}{t^m}\right\} + \\
& + \int_L A_2(t, \tau) \sum_{k=0}^1 \left( \frac{d\varphi_k^+(\tau)}{d\tau} - \lambda_k \varphi_k^+(\tau) \right) \exp\{\lambda_k \bar{\tau}\} d\tau + \\
& + \int_L B_2(t, \tau) \sum_{k=0}^1 \left( \frac{d\varphi_k^-(\tau)}{d\tau} - \frac{\lambda_k(\tau + m\bar{\tau})}{\tau^{m+1}} \varphi_k^-(\tau) \right) \exp\left\{\frac{\lambda_k \bar{\tau}}{\tau^m}\right\} d\tau = g_2(t). \quad (7)
\end{aligned}$$

**2 шаг.** Разделив обе части равенства (6) на  $\exp\{\lambda_0 \bar{t}\}$ , будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \lambda_0 \varphi_0^+(t) - G_{11}(t) \left( \frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \frac{\lambda_0(t - m\bar{t})}{t^{m+1}} \varphi_0^-(t) \right) + \\
& + \int_L A_{11}(t, \tau) \left( \frac{d\varphi_0^+(\tau)}{d\tau} + \lambda_0 \varphi_0^+(\tau) \right) d\tau + \\
& + \int_L B_{11}(t, \tau) \left( \frac{d\varphi_0^-(\tau)}{d\tau} + \frac{\lambda_0(\tau - m\bar{\tau})}{\tau^{m+1}} \varphi_0^-(\tau) \right) d\tau = Q_0(t), \quad (8)
\end{aligned}$$

где приняты обозначения:

$$G_{11}(t) = G_1(t) \exp\left\{\frac{\lambda_0 \bar{t}(1 - t^m)}{t^m}\right\}, \quad (8a)$$

$$A_{11}(t, \tau) = A_1(t, \tau) \exp\{\lambda_0 \bar{\tau} - \lambda_0 \bar{t}\}, \quad B_{11}(t, \tau) = B_1(t, \tau) \exp\left\{\frac{\lambda_0 \bar{\tau}}{\tau^m} - \lambda_0 \bar{t}\right\}, \quad (8б)$$

$$\begin{aligned}
Q_0(t) = & \left( -\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \lambda_1 \varphi_1^+(t) \right) \exp\{(\lambda_1 - \lambda_0) \bar{t}\} + \\
& + \left( \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \frac{\lambda_1(t - m\bar{t})}{t^{m+1}} \varphi_1^-(t) \right) G_1(t) \exp\left\{\frac{\lambda_1 \bar{t}}{t^m} - \lambda_0 \bar{t}\right\} - \\
& - \int_L A_1(t, \tau) \left( \frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau} + \lambda_1 \varphi_1^+(\tau) \right) \exp\{\lambda_1 \bar{\tau} - \lambda_0 \bar{t}\} d\tau - \\
& - \int_L B_1(t, \tau) \left( \frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau} + \frac{\lambda_1(\tau - m\bar{\tau})}{\tau^{m+1}} \varphi_1^-(\tau) \right) \exp\left\{\frac{\lambda_1 \bar{\tau}}{\tau^m} - \lambda_0 \bar{t}\right\} d\tau + g_1(t) \exp\{-\lambda_0 \bar{t}\}. \quad (8в)
\end{aligned}$$

**3 шаг.** Пусть  $\chi_1 = \text{Ind}G_{11}(t) = \text{Ind}G_1(t)$  – индекс Коши функции (8a) вдоль контура  $L$ . Считая временно функцию  $Q_0(t)$  известной и решая

невырожденную дифференциальную задачу типа Римана (8) относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции  $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$  методом, изложенным в §8 монографии [1], получаем следующие результаты.

1. Если  $\chi_1 > 1$ , то для разрешимости дифференциальной задачи Римана (8) необходимо и достаточно выполнение  $\nu_1 - r_1$  условий разрешимости вида

$$\int_L Q_0(t) \omega_{1j}(t) d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu_1 - r_1, \quad (9)$$

где  $\omega_{11}(t), \omega_{12}(t), \dots, \omega_{1, \nu_1 - r_1}(t)$  ( $0 \leq r_1 \leq \nu_1$ ) – некоторые линейно независимые решения вполне определенного однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. При выполнении этих условий общее решение задачи (8) задается формулами:

$$\varphi_0^+(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L Q_0(\tau) \ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau + \int_L R_{10}^+(z, \tau) Q_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \gamma_{1k} h_{1k}^+(z), \quad z \in T^+, \quad (10)$$

$$\varphi_0^-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_0(\tau)}{G_{11}(\tau)} \ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) d\tau + \int_L R_{10}^-(z, \tau) Q_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \gamma_{1k} h_{1k}^-(z), \quad z \in T^-, \quad (11)$$

где  $l_1 = \chi_1 + \nu_1 - r_1 - 1$ , а  $\gamma_{1k}$  ( $k = 1, 2, \dots, l_1$ ) – произвольные комплексные постоянные,  $d_{1k}^\pm(z)$  ( $k = 1, 2, \dots, l_1$ ) – известные аналитические функции из класса  $A(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$ ,  $R_{10}^\pm(z, \tau)$  – функции, которые вполне определенным образом выражаются через  $G_1(t)$ ,  $A_1(t, \tau)$ ,  $B_1(t, \tau)$ , причем  $R_{10}^\pm(t, \tau) \in H_*^{(2)}(L \times L)$ .

2. Если же  $\chi_1 \leq 1$ , то для разрешимости дифференциальной задачи Римана (8) необходимо и достаточно выполнение  $\nu_1$  условий разрешимости вида

$$\int_L Q_0(t) \omega_{1j}(t) d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu_1, \quad (12)$$

где  $\omega_{11}(t), \omega_{12}(t), \dots, \omega_{1, \nu_1}(t)$  – полная система линейно независимых решений вполне определенного однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. При выполнении этих условий общее решение задачи (8) задается также формулами вида (10) и (11), где  $l_1 = \max(0, \chi_1 + \nu_1 - 1)$ .

**4 шаг.** С помощью дифференцирования из формул (10) и (11) получаем

$$\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tau - z} d\tau + \int_L \frac{\partial R_{10}^+(z, \tau)}{\partial z} Q_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \gamma_{1k} \frac{dh_{1k}^+(z)}{dz}, \quad z \in T^+, \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} = \frac{z^{-1}}{2\pi i} \int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tau^{-1}G_{11}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z} + \int_L \frac{\partial R_{10}^-(z, \tau)}{\partial z} Q_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \gamma_{1k} \frac{dh_{1k}^-(z)}{dz}, \quad z \in T^-. \quad (14)$$

Далее, переходя к пределу при  $z \rightarrow t \in L$  и используя формулы Сохоцкого – Племели (см., например, [4, с. 38]), из формул (13) и (14) соответственно будем иметь:

$$\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} = \frac{1}{2} Q_0(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_L \frac{\partial R_{10}^+(t, \tau)}{\partial t} Q_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \gamma_{1k} \frac{dh_{1k}^+(t)}{dt}, \quad (15)$$

$$\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{Q_0(t)}{G_{11}(t)} + \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tau^{-1}G_{11}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-t} + \int_L \frac{\partial R_{10}^-(t, \tau)}{\partial t} Q_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{l_1} \gamma_{1k} \frac{dh_{1k}^-(t)}{dt}. \quad (16)$$

Поскольку относительно граничных значений для аналитических функций  $\varphi_0^+(z)$  и  $\varphi_0^-(z)$  справедливы равенства (см., например, [4, с. 40])

$$\frac{1}{2} \frac{d^{(k)}\varphi_0^\pm(t)}{dt^k} = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d^{(k)}\varphi_0^\pm(\tau)}{d\tau^k} \frac{d\tau}{\tau-t} \quad (k=0, 1), \quad (17)$$

то (с учетом формулы (8в)) из (15) и (16) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} = & \left( -\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \lambda_1 \varphi_1^+(t) \right) \exp\{(\lambda_1 - \lambda_0)\bar{t}\} + \\ & + \int_L A_{20}^+(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \int_L B_{20}^+(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau + g_{10}^+(t) + \sum_{k=1}^{l_1} \gamma_{1k} \frac{dh_{1k}^+(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} = & \left( -\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \frac{\lambda_1(t-m\bar{t})}{t^{m+1}} \varphi_1^-(t) \right) \exp\left\{ \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)\bar{t}}{t^m} \right\} + \\ & + \int_L A_{20}^-(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \int_L B_{20}^-(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau + g_{10}^-(t) + \sum_{k=1}^{l_1} \gamma_{1k} \frac{dh_{1k}^-(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $g_{10}^\pm(t)$ ,  $A_{20}^\pm(t, \tau)$ ,  $B_{20}^\pm(t, \tau)$  – функции, которые вполне определенным образом выражаются через  $G_1(t)$ ,  $A_1(t, \tau)$ ,  $B_1(t, \tau)$ ,  $g_k(t)$  ( $k=1, 2$ ), причем  $g_{10}^\pm(t) \in H^{(1)}(L)$ , а  $A_{20}^\pm(t, \tau)$ ,  $B_{20}^\pm(t, \tau) \in H_*^{(1)}(L \times L)$ .

**5 шаг.** Подставляя в левую часть равенства (7) вместо  $\varphi_0^+(t)$ ,  $\varphi_0^-(t)$ ,  $\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}$ ,  $\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt}$  граничные значения аналитических функций  $\varphi_0^+(z)$ ,  $\varphi_0^-(z)$ ,  $\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz}$ ,  $\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz}$ , определяемых по формулам (10), (11), (13) и (14), получаем

$$-2\lambda_1 \varphi_1^+(t) \exp\{\lambda_k \bar{t}\} + G_2(t) \frac{2\lambda_1}{t^m} \varphi_k^-(t) + \int_L A_{22}(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \int_L B_{22}(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau + Q_1(t), \quad (20)$$

где  $Q_1(t)$ ,  $A_{22}(t, \tau)$ ,  $B_{22}(t, \tau)$  – функции, которые вполне определенным образом выражаются через  $G_k(t)$ ,  $A_k(t, \tau)$ ,  $B_k(t, \tau)$ ,  $g_k(t)$  ( $k = 0, 1$ ), причем  $Q_1(t) \in H^{(1)}(L)$ , а  $A_{20}^\pm(t, \tau)$ ,  $B_{20}^\pm(t, \tau) \in H_*^{(1)}(L \times L)$ .

Ясно, что при  $\lambda_1 \neq 0$  равенство (20) представляет собой краевое условие хорошо изученной (см., например, [4, с. 365]) невырожденной обобщенной краевой задачи типа Римана относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции  $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$ .

Далее предположим, что  $\lambda_1 \neq 0$ . Тогда, решая обобщенную задачу типа Римана (20) методом, изложенным в § 2 монографии [1], находим аналитические функции  $\varphi_1^+(z)$  и  $\varphi_1^-(z)$  (в случае разрешимости задачи (20)). Затем, подставляя граничные значения аналитических функций  $\varphi_1^+(z)$  и  $\varphi_1^-(z)$  в правую часть формулы (8в), определяем функцию  $Q_0(t)$ . Наконец, подставив значения найденной функции  $Q_0(t)$  в правую часть равенства (8), а затем решая дифференциальную задачу типа Римана (8), определяем аналитические функции  $\varphi_0^+(z)$  и  $\varphi_0^-(z)$  (в случае разрешимости задачи Римана (8)). Но тогда, подставляя в правую часть формулы (1) решения краевых задач (20) и (8), получаем решение исходной задачи  $GR_{l,m}$ .

**Замечание 1.** Важно отметить, что приведенный выше алгоритм решения задачи  $GR_{l,m}$  мы получили при условии  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_0 \neq \lambda_1$ . Но в общем представлении (1) кусочно метааналитической функции второго типа параметры  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  входят «равноправно», то есть без ограничения общности в наших рассуждениях мы можем их менять местами. Следовательно, для того чтобы обе вспомогательные краевые задачи (8) и (20) были невырожденными, достаточно требовать выполнения хотя бы одного из следующих двух условий: 1) либо  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_0 \neq \lambda_1$ ; 2) либо  $\lambda_0 \neq 0, \lambda_0 \neq \lambda_1$ .

Таким образом, из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_0 \neq \lambda_1$ . Тогда решение краевой задачи  $GR_{l,m}$  сводится к последовательному решению невырожденной обобщенной задачи Римана (20) относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции  $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$  и невырожденной дифференциальной задачи Римана (8) относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции  $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$ . Задача  $GR_{l,m}$  разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы обе вспомогательные краевые задачи (20) и (8).

**3. О нетеровости краевой задачи  $GR_{l,m}$ .** В силу теоремы 1 и формулы (1) краевая задача  $GR_{l,m}$  будет нетеровой тогда и только тогда, когда одновременно обе вспомогательные краевые задачи типа Римана (20) и (8) являются нетеровыми.

Из рассуждений предыдущего пункта следует, что при выполнении следующих условий:

1)  $G_j(t) \neq 0$  ( $j = 1, 2$ );

2) либо  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_0 \neq \lambda_1$ ; либо  $\lambda_0 \neq 0, \lambda_0 \neq \lambda_1$

вспомогательные краевые задачи типа Римана (8) и (20) будут невырожденными, а значит, и нетеровыми (см., например, [4, с. 371]). Следовательно, при выполнении условий 1) и 2) исходная краевая задача  $GR_{l,m}$  также будет нетеровой.

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.

2. Курицын С.Ю., Расулов К.М. Обобщенная краевая задача Римана для метааналитических функций второго типа // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Смоленск, 2016. Вып. 17. С. 161-163.

3. Kuritsyn S.Yu., Rasulov K.M. On a Generalized Riemann Problem for Metaanalytic Functions of the Second Type // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2018, Vol. 39, No. 1. P. 97-103.

4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.

**S.Yu. Kuritsyn, K.M. Rasulov**  
Smolensk State University

### ON CONDITIONS FOR THE NETHERIANITY OF A GENERALIZED BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF RIEMANN TYPE FOR METAANALYTIC FUNCTIONS OF THE SECOND TYPE

**Keywords:** *metaanalytic function, generalized boundary value problems of Riemann type, integral parts, solvability conditions, Noetherian.*

**Abstract.** *The paper presents a constructive algorithm for solving one of the main generalized boundary value problems of Riemann type for piecewise metaanalytic functions of the second type in arbitrary simply connected domains with smooth boundaries. Necessary and sufficient conditions are established under which the solution of the problem under consideration is reduced to the sequential solution of two nondegenerate scalar generalized Riemann boundary value problems in classes of piecewise analytic functions. In addition, the conditions for the problem to be Noetherian are obtained.*

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ИНФОРМАЦИОННОЙ СЛОЖНОСТИ В МИНИМАКСНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Ключевые слова: *информационная сложность, предельные теоремы теории вероятностей, гауссовские ядра.*

*В статье рассматривается информационная сложность в минимаксной постановке многопараметрической задачи аппроксимации функций в гильбертовом пространстве с квадратичным экспоненциальным (гауссовским) воспроизводящим ядром. В частности, проводится анализ данной величины при произвольно большой параметрической размерности и малом пороге ошибки с помощью предельных методов теории вероятностей.*

**1. Введение и постановка задачи.** Приведём формальную постановку задачи. Пусть  $H_d$  – гильбертово пространство с квадратичным экспоненциальным воспроизводящим ядром вида

$$K_d(s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_d) = \prod_{j=1}^d K(s_j, t_j), \quad K(s_j, t_j) = \exp\left\{-\frac{(t_j - s_j)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (1)$$

где  $\sigma > 0$  – масштабирующий параметр,  $d \geq 1$  – параметрическая размерность. Ядро вида (1) называется квадратичным экспоненциальным или гауссовским. Модели, в которых фигурирует пространство  $H_d$ , имеют практические приложения, в частности в анализе данных и машинном обучении [1–2].

Мы рассматриваем следующую многопараметрическую задачу аппроксимации:

$$APP_d: H_d \rightarrow L_d, \quad APP_d f = f, \quad (2)$$

где  $L_d = L_2(R^d, \mu_d)$ ,  $\mu_d$  – стандартная гауссовская мера на  $R^d$ , то есть мера измеримого (по Лебегу) множества  $A$  вычисляется следующим образом:

$$\mu_d A = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_A \exp\left\{-\frac{\|x\|^2}{2}\right\} dx. \quad (3)$$

Будем аппроксимировать  $APP_d$  алгоритмами с конечной линейной информацией. Как известно из теории трактabilityности многопараметрических задач (*англ.* tractability of multivariate problems) [3], мы можем искать аппроксимации ранга  $n$  следующего вида:

$$A_{d,n} = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k L_k f : a_k \in L_d, L_k \in H_d^* \right\}. \quad (4)$$

Ошибка  $err(S_{d,n})$  аппроксимации алгоритма  $S_{d,n} \in A_{d,n}$  ранга  $n$  в худшем случае определяется как

$$err(S_{d,n}) = \sup_{\|f\|_{H_d} \leq 1} \|APP_d f - S_{d,n} f\|_{L_d}. \quad (5)$$

Минимаксной ошибкой  $err(d, n)$  порядка  $n$  будем называть величину

$$err(d, n) = \inf_{S_{d,n} \in A_{d,n}} err(S_{d,n}). \quad (6)$$

Кроме того, рассматривается начальная ошибка  $err(d, 0)$ , которая может интерпретироваться как ошибка константного алгоритма,

$$err(d, 0) = \sup_{\|f\|_{H_d} \leq 1} \|APP_d f\|_{L_d}. \quad (7)$$

Информационная сложность  $n(d, \varepsilon)$  для нормализованного критерия в минимаксной постановке (далее для краткости – информационная сложность) определяется как

$$n(d, \varepsilon) = \min\{n \geq 1: err(d, n) \leq \varepsilon \cdot err(d, 0)\}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon \in (0, 1)$  – порог ошибки.

Для данного масштабирующего параметра  $\sigma$  мы рассматриваем величину  $n(d, \varepsilon)$  как функцию от 2 переменных: параметрической размерности  $d$  и порога ошибки  $\varepsilon$ . Традиционно рассматриваются оценки сверху величины  $n(d, \varepsilon)$  и критерии для данных оценок [3], однако в некоторых случаях соответствующие оценки могут быть грубыми. Для рассматриваемой задачи известные результаты можно найти в [4–5]. Мы будем искать асимптотические оценки информационной сложности при  $d \rightarrow \infty$  и фиксированном  $\varepsilon \in (0, 1)$  с помощью предельных методов теории вероятностей. Ранее данный подход использовался при анализе информационной сложности при постановке в среднем [6–7].

Тесно с величиной  $n(d, \varepsilon)$  связан интегральный оператор  $I_d: H_d \rightarrow H_d$ :

$$I_d f = \int_{\mathbb{R}^d} f(s_1, \dots, s_d) K_d(t_1, \dots, t_d, s_1, \dots, s_d) \mu_d(ds_1, \dots, ds_d). \quad (9)$$

Известны собственные числа и собственные функции данного оператора [1], а именно собственные числа имеют вид

$$\lambda_{d,j} = (1 - \omega)^d \omega^{kj}, \quad k_j \geq 0, \quad (10)$$

где  $\omega$  выражается через  $\sigma$  следующим образом:

$$\omega = \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\sigma^2}} \right) \right)^{-1}, \quad (11)$$

при этом, как несложно заметить,  $\omega \in (0, 1)$  и  $\lambda_{d,j} \in (0, 1)$ , а соответствующую собственному числу  $\lambda_{d,j}$  (предполагаем, что последовательность собственных чисел при фиксированном  $d$  упорядочена по убыванию относительно индекса  $j$ ) собственную функцию обозначим как  $\phi_{d,j}$ , имеющую представление

$$\phi_{d,j}(x) = \exp \left\{ -d \left( \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4\sigma^2}} - \frac{1}{4} \right) \|x\|^2 \right\} \prod_{i=1}^d H_{k_{j_i}} \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} x_i \right), \quad (12)$$

где индексы  $k_{j_i}$  выбираются из уравнения  $k_j = k_{j_1} + \dots + k_{j_d}$ ,  $H_k(x)$  – полином Эрмита:

$$H_k(x) = \frac{(-1)^k \exp\{x^2\} d^k}{d x^k} \exp\{-x^2\}. \quad (13)$$

Оптимальная аппроксимация  $S_d$  согласно известным результатам [3] имеет вид

$$S_d f = \sum_{j=1}^{n(d,\varepsilon)} (f, \phi_{d,j})_{H_d} \phi_{d,j}, \quad (14)$$

а информационная сложность  $n(d, \varepsilon)$  связана с собственными числами следующим образом:

$$n(d, \varepsilon) = \min\{n: \lambda_{d,n+1} \leq \varepsilon^2(1-\omega)^d\}. \quad (15)$$

**2. Вспомогательные утверждения.** Прежде всего заметим, что величина  $n(d, \varepsilon)$  представима в виде считающей функции:

$$\begin{aligned} n(d, \varepsilon) &= |\{\lambda_{d,j}: \lambda_{d,j} > \varepsilon^2(1-\omega)^d\}| \\ &= |\{(k_1, \dots, k_d): \prod_{j=1}^d \omega^{k_j}(1-\omega) > \varepsilon^2(1-\omega)^d, k_j \geq 0\}| \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_d \geq 0} I(\sum_{j=1}^d k_j |\ln \omega| < |\ln \varepsilon^2|), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $I(x) = 1$ , если  $x$  истина, и ноль в противном случае.

Введем последовательность  $(U_j), j \geq 1$ , независимых одинаково распределенных случайных величин, вероятностное распределение которых имеет вид

$$P(U_j = k |\ln \omega|) = \omega^k (1-\omega), \quad k \geq 0. \quad (17)$$

Обозначим  $F_d(x)$  как функцию распределения суммы первых  $d$  слагаемых  $U_1, \dots, U_d$ . Тогда величину  $n(d, \varepsilon)$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} n(d, \varepsilon) &= \sum_{k_1, \dots, k_d \geq 0} \exp\{|\ln \lambda_{d,k}|\} \lambda_{d,k} I(\sum_{j=1}^d k_j |\ln \omega| < |\ln \varepsilon^2|) \\ &= \exp\{d |\ln(1-\omega)|\} \int_0^{|\ln \varepsilon^2|} \exp\{x\} dF_d(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Далее рассмотрим функцию  $M(v) = E \exp\{vU_j\}$ . Несложно заметить, что при  $v < 1$  имеет место соотношение

$$M(v) = (1-\omega) \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{(1-v)k} = \frac{1-\omega}{1-\omega^{1-v}}. \quad (19)$$

Кроме того, при  $v < 1$  для  $dM(v)/dv$  имеем

$$\frac{dM(v)}{dv} = \frac{-\ln \omega (1-\omega) \omega^{1-v}}{(1-\omega^{1-v})^2} = \frac{|\ln \omega| (1-\omega) \omega^{1-v}}{(1-\omega^{1-v})^2}. \quad (20)$$

Для дальнейшего анализа введем последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин  $(V_j^v), j \geq 1$ :

$$P(V_j^v = k |\ln \omega|) = \frac{(1-\omega) \omega^k \exp\{kv |\ln \omega|\}}{M(v)} = \frac{(1-\omega) \omega^{(1-v)k}}{M(v)}, \quad k \geq 1, \quad (21)$$

и обозначим  $F_d^v(x)$  как функцию распределения суммы  $V_1^v + \dots + V_d^v$ . Тогда исходя из введенного выше определения (21) можно заключить, что величина  $n(d, \varepsilon)$  представима в виде

$$\begin{aligned} n(d, \varepsilon) &= \exp\{d|\ln(1-\omega)|\} \int_0^{|\ln \varepsilon^2|} \exp\{(1-v)x\} M^d(v) dF_d^v(x) \\ &= \exp\{d(|\ln(1-\omega)| + \ln M(v))\} \int_0^{|\ln \varepsilon^2|} \exp\{(1-v)x\} dF_d^v(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, действуя, как в теории больших уклонений [8], подставим  $v = v_{d,\varepsilon}$ , выбранное из уравнения

$$\frac{|\ln \varepsilon^2|}{d} = \frac{dM(v)/dv|_{v=v_{d,\varepsilon}}}{M(v_{d,\varepsilon})}. \quad (23)$$

Заметим, что уравнение (23) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{|\ln \varepsilon^2|}{d} &= \frac{|\ln \omega| \omega^{1-v_{d,\varepsilon}}}{(1-\omega^{1-v_{d,\varepsilon}})} \Leftrightarrow \omega^{1-v_{d,\varepsilon}} = \frac{|\ln \varepsilon^2|}{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|} \\ &\Leftrightarrow \ln \omega (1 - v_{d,\varepsilon}) = \ln \frac{|\ln \varepsilon^2|}{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|} \\ &\Leftrightarrow (1 - v_{d,\varepsilon}) = -|\ln \omega|^{-1} \ln \frac{|\ln \varepsilon^2|}{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|}. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда с учетом соотношений (19), (22), (24) величину  $n(d, \varepsilon)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} n(d, \varepsilon) &= \exp\left\{-d \ln\left(1 - \frac{|\ln \varepsilon^2|}{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|}\right)\right\} \int_0^{|\ln \varepsilon^2|} \exp\{(1-v_{d,\varepsilon})x\} dF_d^{v_{d,\varepsilon}}(x) \\ &= \exp\left\{d \ln \frac{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|}{d|\ln \omega|}\right\} \int_0^{|\ln \varepsilon^2|} \exp\left\{\frac{1}{|\ln \omega|} \ln \frac{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|}{|\ln \varepsilon^2|} x\right\} dF_d^{v_{d,\varepsilon}}(x). \end{aligned} \quad (25)$$

Далее с учетом (19), (21) и (24) заметим, что характеристическая функция  $f_d(t)$  суммы независимых случайных величин  $V_1^{v_{d,\varepsilon}}, \dots, V_d^{v_{d,\varepsilon}}$  имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} f_d(t) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\omega)\omega^{(1-v_{d,\varepsilon}-it)k}}{M(v_{d,\varepsilon})} \right)^d = \left( \frac{\left(1 - \frac{|\ln \varepsilon^2|}{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|}\right)}{1 - \omega^{1-v_{d,\varepsilon}-it}} \right)^d \\ &= \left( \frac{d|\ln \omega|}{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|(1-\omega^{-it})} \right)^d, \end{aligned} \quad (26)$$

и характеристическая функция функции  $f_d(t)$  при  $d \rightarrow \infty$  имеет вид:

$$\begin{aligned} f_d(t) &= \exp\left\{d \ln\left(1 - \frac{|\ln \varepsilon^2|(1-\omega^{-it})}{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|(1-\omega^{-it})}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{d|\ln \varepsilon^2|(1-\omega^{-it})}{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|(1-\omega^{-it})} + o(1)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{|\ln \varepsilon^2|}{|\ln \omega|} (1 - \exp(it|\ln \omega|)) + o(1)\right\} \\ &\rightarrow \exp\left\{-\frac{|\ln \varepsilon^2|}{|\ln \omega|} (1 - \exp(it|\ln \omega|))\right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

которая соответствует следующему вероятностному распределению («масштабированный» пуассоновский закон):

$$P(V = k|\ln \omega) = \frac{\exp\left\{-\frac{|\ln \varepsilon^2|}{|\ln \omega|}\right\} |\ln \varepsilon^2|^k}{k! |\ln \omega|^k}, \quad (28)$$

откуда можно сделать вывод, что для вероятностей имеет место предельный переход:

$$P(V_1^{v_{d,\varepsilon}} + \dots + V_d^{v_{d,\varepsilon}} = k | \ln \omega |) \rightarrow P(V = k | \ln \omega |), d \rightarrow \infty. \quad (29)$$

В дальнейшем полезна уточненная версия соотношения (29):

$$P(V_1^{v_{d,\varepsilon}} + \dots + V_d^{v_{d,\varepsilon}} = k | \ln \omega |) = \frac{\exp\left\{-\frac{|\ln \varepsilon^2|}{|\ln \omega|}\right\} |\ln \varepsilon^2|^k}{k! |\ln \omega|^k} + \frac{c_{k,\varepsilon,\omega}}{d} + o\left(\frac{1}{d}\right), \quad (30)$$

где  $c_{k,\varepsilon,\omega}$  – зависящая от  $k, \varepsilon, \omega$  константа. Для получения оценки (30) достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} P(V_1^{v_{d,\varepsilon}} + \dots + V_d^{v_{d,\varepsilon}} = k | \ln \omega |) &= \sum_{k_1 + \dots + k_d = k} \frac{(1-\omega)^d \omega^{(1-v_{d,\varepsilon})k}}{M^d(v_{d,\varepsilon})} = \\ &= C_{k+d-1}^k (1-\omega)^{1-v_{d,\varepsilon}k} \omega^{(1-v_{d,\varepsilon})k} = \\ &= C_{k+d-1}^k \left(\frac{d|\ln \omega|}{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|}\right)^d \left(\frac{|\ln \varepsilon^2|}{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|}\right)^k, \end{aligned} \quad (31)$$

и применить стандартные функции в окрестности нуля.

**3. Основной результат.** Приведем искомую асимптотическую оценку информационной сложности:

$$n(d, \varepsilon) = \left(\frac{d|\ln \omega| + |\ln \varepsilon^2|}{|\ln \varepsilon^2|}\right)^m \frac{|\ln \varepsilon^2|^m}{m! |\ln \omega|^m} + o(d^m), \varepsilon \in (0, 1), d \rightarrow \infty, \quad (32)$$

где  $m = \left\lfloor \frac{|\ln \varepsilon^2|}{|\ln \omega|} \right\rfloor$ . Для получения оценки (32) достаточно в соотношение (25) подставить асимптотическую оценку (30).

### Литература

1. Rasmussen C.E., Williams C. Gaussian Processes for Machine Learning // The MIT Press, 2006.
2. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction // Springer Series in Statistics, Springer, New York, 2009.
3. Novak E., Wóźniakowski H. Tractability of Multivariate Problems. Vol. I: Linear Information. Zürich: EMS publishing house, 2008. (EMS Tracts in Mathematics; 6).
4. Sloan I., Wóźniakowski H. Multivariate approximation for analytic functions with Gaussian kernels // Journal of Complexity. 2018. Vol. 45. P. 1–21.
5. Fasshauer G.E., Hickernell F.J., Wóźniakowski H. On dimension-independent rates of convergence for function approximation with Gaussian kernels // SIAM J. Numer. Analysis. 2012. Vol. 50. P. 247–271.
6. Khartov A.A. Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements // Journal of Complexity. 2015. Dec. Vol. 31, No. 6. P. 835–866.
7. Khartov A.A. Limar I.A. Asymptotic analysis in multivariate average case approximation with Gaussian kernels // Journal of Complexity. 2022. Vol. 70. P. 101631.
8. Боровков А.А. Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстроубывающие распределения приращений. М.: Физматлит, 2013.

I.A. Limar  
ITMO University

# PROBABILISTIC APPROACH TO ANALYSIS OF INFORMATION COMPLEXITY IN WORST CASE SETTINGS

**Keywords:** *information-based complexity, limit methods of probability theory, Gaussian kernels.*

**Abstract.** *Information complexity in worst case settings of multivariate approximation problems in reproducing Hilbert spaces with squared-exponential (Gaussian) kernels is considered in the article. In addition, information complexity is estimated for sufficiently large parametric dimension and small error threshold via limit methods of probability theory.*

**Т.И. Михалёва, К.М. Расулов**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 517.968.23

## О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГАЗЕМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

**Ключевые слова:** *квазигармоническая функция, краевая задача типа Газемана, дифференциальное уравнение Эйлера, круговая область, неустойчивость решений.*

*В статье рассматривается краевая задача типа Газемана для квазигармонических функций в произвольных односвязных областях с гладкими границами. Доказано, что решение рассматриваемой задачи в круговых областях сводится к последовательному решению классической задачи Газемана в классах аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера. Кроме того, установлено, что решения исследуемой краевой задачи в круговых областях неустойчивы по отношению к малым изменениям носителя краевых условий.*

**1. Постановка задачи.** Обозначим через  $T^+$  конечную односвязную область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченную гладким замкнутым контуром  $L$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ . Для определенности будем считать, что точка  $z = 0$  принадлежит  $T^+$ .

В работе [1] была поставлена и частично исследована следующая краевая задача: *требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно квазигармонические функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) с линией скачков  $L$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  краевому условию*

$$W^+[\alpha(t)] = W^-(t)G(t) + g(t), \quad (1)$$

где  $G(t)$ ,  $g(t)$  – заданные на  $L$  комплексные функции, причем  $G(t) \neq 0$  на  $L$ , а  $\alpha(t)$  – функция сдвига контура  $L$ , сохраняющая его ориентацию.

Следуя [1], сформулированную выше задачу будем называть *задачей типа Газемана для квазигармонических функций рода  $n$* , или, короче, *задачей  $H_n$* , а соответствующую ей однородную задачу ( $g(t) \equiv 0$ ) – *задачей  $H_n^0$* .

Основной целью настоящей статьи является установление существенной зависимости картины разрешимости исследуемой краевой задачи  $H_n$  в круговых областях от радиуса рассматриваемой области. Ради краткости мы ограничиваемся исследованием задачи  $H_n$  в случае, когда  $n=2$  и область  $T^+$  представляет собой произвольную круговую область вида  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ .

**2. Метод решения задачи  $H_2$  в произвольных круговых областях.** Пусть  $L_r = \{t : |t| = r\}$  – граница круга  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ ,  $r > 0$ . Как известно (см., например, [1–2]), всякая исчезающая на бесконечности кусочно квазигармоническая функция  $W(z)$  второго рода с линией скачков  $L_r$  представляется в виде

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12\left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2 \varphi^+(z), & z \in T_r^+, \\ W^-(z) = \frac{d^2\varphi^-(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + 12\left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2 \varphi^-(z), & z \in T_r^-, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varphi^+(z), \varphi^-(z)$  – пока неизвестные аналитические соответственно в  $T_r^+$  и  $T_r^-$  функции, причем  $\varphi^-(z)$  исчезает на бесконечности (обычно  $\varphi^+(z), \varphi^-(z)$  называются *аналитическими компонентами* кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ ). Поскольку мы ищем решения задачи  $H_2$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L_r)$ , то  $\varphi^\pm(z) \in A(T_r^\pm) \cap H^{(2)}(L_r)$  (см. [1–2]).

Так как в точках окружности  $L_r$  выполняется тождество  $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ , краевое условие (1) при  $n=2$  с учетом (2) можно переписать так:

$$\begin{aligned} & [\alpha(t)]^2 \frac{d^2\varphi^+[\alpha(t)]}{dt^2} - \frac{6r^2}{1+r^2} \alpha(t) \frac{d\varphi^+[\alpha(t)]}{dt} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+[\alpha(t)] = \\ & = G_1(t) \left( t^2 \frac{d^2\varphi^-(t)}{dt^2} - \frac{6r^2t}{1+r^2} \frac{d\varphi^-(t)}{dt} + 12\left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^2 \varphi^-(z) \right) + g_1(t), \quad t \in L_r, \end{aligned} \quad (3)$$

где приняты обозначения:

$$G_1(t) = \frac{[\alpha(t)]^2 G(t)}{t^2}, \quad g_1(t) = [\alpha(t)]^2 g(t). \quad (4)$$

Далее, введя в рассмотрение вспомогательную кусочно аналитическую функцию  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  с линией скачков  $L_r$ , где

$$\Phi^\pm(z) = z^2 \frac{d^2 \varphi^\pm(z)}{dz^2} - \frac{6r^2 z}{1+r^2} \varphi^\pm(z) + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^\pm(z), \quad z \in T_r^\pm \quad (5)$$

(здесь  $\varphi^\pm(z)$  – аналитические компоненты искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ ), перепишем (3) в виде

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G_1(t)\Phi^-(t) + g_1(t), \quad t \in L_r, \quad (6)$$

где  $\Phi^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L_r} \Phi^\pm(z)$ .

Заметим, что равенство (6) есть краевое условие *классической краевой задачи Газемана* относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  (см., например, [3, с. 117]).

Пусть  $\chi = \text{Ind}G_1(t) = \text{Ind}G(t)$  – индекс вспомогательной краевой задачи Газемана (6).

Как известно (см., например, [4, с. 303]), если индекс  $\chi \geq 0$ , то задача Газемана (6) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать следующими формулами:

$$\Phi^+(z) = \frac{X^+(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\psi[\beta(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad z \in T_r^+, \quad (7)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{X^-(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - z} d\tau + X^-(z) \cdot P_{\chi-1}(z), \quad z \in T_r^-, \quad (8)$$

где  $X(z) = \{X^+(z), X^-(z)\}$  – так называемая *каноническая функция задачи Газемана*,  $P_{\chi-1}(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{\chi-1} z^{\chi-1}$  – произвольный многочлен степени не выше  $\chi - 1$  с комплексными коэффициентами, а  $\psi(t)$  – решение интегрального уравнения Фредгольма вида

$$(K\psi)(t) \equiv \psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] \psi(\tau) d\tau = \frac{g_1(t)}{X^+[\alpha(t)]} + P_{\chi-1}(z). \quad (9)$$

Если же  $\chi < 0$ , то для разрешимости задачи Газемана (6) необходимо и достаточно выполнение  $-\chi$  условий вида

$$\int_L \left[ \frac{g_1(\tau)}{X^+[\alpha(\tau)]} + \int_L R(\tau, \tau_1) \frac{g_1(\tau_1)}{X^+[\alpha(\tau_1)]} d\tau_1 \right] \tau^{k-1} dt = 0, \quad (10)$$

$$k = 1, 2, \dots, -\chi,$$

где  $R(\tau, \tau_1)$  – резольвента ядра интегрального уравнения Фредгольма (9), причем (при выполнении условий (10)) задача Газемана (6) имеет единственное решение, которое также задается формулами (7)–(9), в которых нужно положить  $P_{\chi^{-1}}(z) \equiv 0$ .

Предположим, что задача Газемана (6) разрешима и уже найдено ее решение  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ . Тогда в силу (5) для полного решения искомой задачи  $\mathbf{H}_n$  нам остается найти *аналитические компоненты*  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ , решив следующие два линейных дифференциальных уравнения Эйлера:

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{6r^2 z}{1+r^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (11)$$

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} - \frac{6r^2 z}{1+r^2} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^-(z) = \Phi^-(z), \quad z \in T_r^-. \quad (12)$$

В случае разрешимости дифференциальных уравнений Эйлера (11) и (12) в классах функций  $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$  и  $A(T_r^-) \cap H^{(2)}(L_r)$  соответственно находим их общие решения  $\tilde{\varphi}^+(z)$  и  $\tilde{\varphi}^-(z)$ . А затем, подставляя в правую часть (2) вместо  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  найденные функции  $\tilde{\varphi}^+(z)$  и  $\tilde{\varphi}^-(z)$  соответственно, получаем общее решение  $\tilde{W}(z)$  искомой задачи  $\mathbf{H}_2$  по следующей формуле:

$$\tilde{W}(z) = \begin{cases} \tilde{W}^+(z) = \frac{d^2 \tilde{\varphi}^+(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} + 12 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \tilde{\varphi}^+(z), & z \in T_r^+, \\ \tilde{W}^-(z) = \frac{d^2 \tilde{\varphi}^-(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d\tilde{\varphi}^-(z)}{dz} + 12 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \tilde{\varphi}^-(z), & z \in T_r^-. \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Решение краевой задачи типа Газемана  $\mathbf{H}_2$  для квазигармонических функций второго рода в круговых областях сводится к последовательному решению классической краевой задачи Газемана (6) относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера (11) и (12) в классах  $A(T_r^\pm) \cap H^{(2)}(L_r)$  аналитических функций. Для разрешимости задачи  $\mathbf{H}_2$  необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы задача Газемана (6) и дифференциальные уравнения (11) и (12) в классах  $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$  и  $A(T_r^-) \cap H^{(2)}(L_r)$  соответственно.*

**3. О зависимости числа линейно независимых решений однородной задачи  $\mathbf{H}_2^0$  от величины радиуса круговой области.**

Поскольку общее решение *однородной задачи*  $H_2^0$  ( $g(t) \equiv 0$ ) в круговых областях также задается формулой (13), где  $\tilde{\varphi}^+(z)$  и  $\tilde{\varphi}^-(z)$  – решения дифференциальных уравнений Эйлера вида (11) и (12) соответственно, у которых правыми частями служат функции  $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ , являющиеся решениями *однородной задачи Газемана* вида

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G_1(t)\Phi^-(t), \quad t \in L_r, \quad (14)$$

то для доказательства зависимости числа линейно независимых решений *однородной задачи*  $H_2^0$  от величины радиуса круговой области  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$  достаточно установить *существенную зависимость* числа  $l$  линейно независимых решений *однородного дифференциального уравнения Эйлера* вида

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{6r^2 z}{1+r^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+(z) = 0, \quad z \in T_r^+, \quad (15)$$

от величины радиуса  $r$  круговой области  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ .

Нетрудно проверить (см. также [4, с. 136]), что общее решение уравнения Эйлера (15) можно задавать так:

$$\varphi^+(z) = b_1 z^{\mu_1} + b_2 z^{\mu_2}, \quad (16)$$

где  $\mu_k = \mu_k(r) = \frac{1 + 7r^2 + (-1)^k \sqrt{1 + 14r^2 + r^4}}{2(1+r^2)}$ , а  $b_k = \alpha_k + i\delta_k$  – произвольные

комплексные постоянные.

Далее, будем искать среди решений вида (16) те, которые принадлежат классу  $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L)$ . Нетрудно заметить, что для принадлежности решений (16) указанному классу, значения функций  $\mu_k(r)$  должны быть целыми неотрицательными числами. Находя значения радиуса  $r$ , при которых значения функций  $\mu_k(r)$  являются целыми, получаем, что общее решение *однородного дифференциального уравнения* (15) в круге  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ , принадлежащее классу  $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L)$ , можно задавать следующим образом:

$$\varphi_o^+(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \neq 1, r \neq \sqrt{2-\sqrt{3}}, r \neq \sqrt{2+\sqrt{3}}, \\ bz^2, & \text{если } r = \sqrt{2-\sqrt{3}}, r = \sqrt{2+\sqrt{3}}, \\ b_1 z + b_2 z^3, & \text{если } r = 1, \end{cases} \quad (17)$$

где  $b, b_k$  ( $k = 1, 2$ ) – произвольные комплексные постоянные.

Таким образом, число  $l$  линейно независимых (над полем  $C$ ) решений *однородного дифференциального уравнения* (15),

принадлежащих классу  $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ , существенно зависит от величины радиуса  $r$  круговой области  $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ , причем максимального значения  $l = 2$  оно достигает при  $r = 1$ .

Приведенные выше рассуждения показывают, что справедливо следующее важное утверждение.

**Теорема 2.** *Решения краевой задачи типа Газемана  $H_2$  для квазигармонических функций в круговых областях неустойчивы по отношению к малым изменениям носителя  $L_r = \{t : |t| = r\}$  краевого условия задачи.*

### Литература

1. Михалёва Т.И., Расулов К.М. Об одном методе решения краевой задачи типа Газемана в классах квазигармонических функций в круговых областях // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Смоленск, 2022. Вып. 23. С. 261-269.

2. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.

3. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.

4. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: СГПУ, 1998. 343 с.

5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.

**T.I. Mikhalyova, K.M. Rasulov**  
Smolensk State University

### ON THE INSTABILITY OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HASEMAN TYPE FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN CIRCULAR DOMAINS

**Keywords:** *quasiharmonic function, boundary value problem of Haseman type, Euler differential equation, circular domain, instability of solutions.*

**Abstract.** *This paper considers a Haseman type boundary value problem for quasiharmonic functions in arbitrary simply connected domains with smooth boundaries. This paper proves that a solution of the considered boundary value problem is reduced to solution of usual Haseman problem in the classes of analytic functions and two linear Euler differential equations. It is established that solutions of the considered problem are unstable about small changes in the carrier of the boundary conditions.*

## ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *бианалитическая функция, краевая задача типа Римана, конструктивный алгоритм, односвязная область.*

*В данной работе приводится конструктивный алгоритм решения одной модельной краевой задачи типа Римана для кусочно бианалитических функций в односвязных областях. Предлагаемый алгоритм основан на явном решении классической векторно-матричной задачи Римана в классах кусочно аналитических векторов в случае, когда коэффициентами краевых условий служат матрицы-функции треугольного вида. Кроме того, построена полная картина разрешимости рассматриваемой краевой задачи и установлена ее нетеровость.*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $L$  – произвольный гладкий замкнутый контур на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограничивающий конечную односвязную область  $T^+$ . Обозначим через  $T^-$  дополнение  $T^+ \cup L$  до расширенной комплексной плоскости, т.е.  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ . Для определенности будем считать, что точка  $z = 0$  принадлежит  $T^+$ .

Всюду в дальнейшем в основном будем придерживаться терминологии, принятой в монографии [1].

Напомним, что функция  $F(z)$  называется *кусочно бианалитической с линией скачков  $L$* , если она в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях  $T^+$  и  $T^-$  определяется выражениями  $F^+(z)$  и  $F^-(z)$ :

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z) \in A(T^+)$ ,  $\varphi_0^-(z), \varphi_1^-(z) \in A(T^-)$ , причем в каждой точке  $t \in L$  существуют пределы:  $\lim_{z \rightarrow t} F^\pm(z)$ ; кроме того, выполняется условие

$$\varphi_1^-(z) = z^{-2} f_1^-(z), \quad f_1^-(z) \in A(T^-). \quad (2)$$

При этом, если  $\varphi_0^-(\infty) = 0$  ( $\varphi_0^-(\infty) = const$ ), то будем говорить, что кусочно бианалитическая функция  $F(z)$  *исчезает (ограничена) на бесконечности.*

К числу основных классических линейных краевых задач для бианалитических функций относится следующая краевая задача типа Римана: *требуется найти все кусочно бианалитические функции  $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$  с линией скачков  $L$ , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на  $L$  следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) = G_0(t)F^-(t) + g_0(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} = G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial \bar{t}} + g_1(t), \quad (4)$$

где  $G_k(t), g_k(t)$  ( $k=0,1$ ) – заданные на  $L$  функции, удовлетворяющие условию Гельдера, т.е.  $G_k(t) \in H(L)$ ,  $g_k(t) \in H(L)$ , причем  $G_k(t) \neq 0$  на  $L$ .

Сформулированную выше задачу назовем *модельной задачей типа Римана для бианалитических функций*, короче – задачей  $R_{2,M}$ , а соответствующую однородную задачу ( $g_0 \equiv g_1 \equiv 0$ ) – задачей  $R_{2,M}^0$ .

Отметим, что впервые задача  $R_{2,M}$  в классах нерегулярных полианалитических функций в случае, когда  $L$  – кусочно-гладкий контур, была поставлена и исследована в работе В.И. Показеева [2].

Основной целью настоящей статьи является разработка эффективного алгоритма решения краевой задачи  $R_{2,M}$  и построение полной картины ее разрешимости.

**2. Об эквивалентности задачи  $R_{2,M}$  в классах бианалитических функций векторно-матричной задаче Римана для аналитических функций.** Введем в рассмотрение кусочно аналитический вектор с линией скачков  $L$  вида  $\Phi(z) = (\Phi^+(z), \Phi^-(z))$ , где

$$\Phi^\pm(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0^\pm(z) \\ \varphi_1^\pm(z) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

а  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z) \in A(T^+)$ ,  $\varphi_0^-(z), \varphi_1^-(z) \in A(T^-)$ .

Заметим, что в силу представления (1) краевые условия (3) и (4) можно переписать соответственно в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0^+(t) + \bar{t} \varphi_1^+(t) &= G_0(t) (\varphi_0^-(t) + \bar{t} \varphi_1^-(t)) + g_0(t), \quad t \in L, \\ \varphi_1^+(t) &= G_1(t) \varphi_1^-(t) + g_1(t), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (6)$$

В свою очередь, с учетом (5) последние два равенства можно записать в следующей векторно-матричной форме

$$A(t)\Phi^+(t) = B(t)\Phi^-(t) + C(t), \quad t \in L, \quad (7)$$

где приняты обозначения:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} G_0(t) & \bar{t}G_0(t) \\ 0 & G_1(t) \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} g_0(t) \\ g_1(t) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Наконец, умножив слева обе части равенства (7) на матрицу  $A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , обратную  $A(t)$ , получаем

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (9)$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} G_0(t) & \bar{t}(G_0(t) - G_1(t)) \\ 0 & G_1(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_0(t) - \bar{t}g_1(t) \\ g_1(t) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Таким образом, краевая задача  $R_{2,M}$  в классах бианалитических функций по своей сути эквивалентна векторно-матричной задаче Римана (9) относительно кусочно аналитического вектора вида (5) (см. [3]).

Из структуры матрицы  $G(t)$ , задаваемой формулой (10), видно, что при исследовании векторно-матричной задачи Римана (9) целесообразно рассматривать отдельно следующие два случая:

- 1)  $G_0(t) \equiv G_1(t)$ ,  $t \in L$ ;
- 2)  $G_0(t) \neq G_1(t)$ ,  $t \in L$ .

Поскольку матрица  $G(t)$ , задаваемая формулой (10), имеет треугольную форму, то в случае  $G_0(t) \equiv G_1(t)$ ,  $t \in L$ ; решение векторно-матричной задачи Римана (9), в свою очередь, сводится к решению следующих двух *независимых друг от друга* скалярных задач Римана:

$$\varphi_0^+(t) = G_0(t)\varphi_0^-(t) + g_0(t) - \bar{t}g_1(t), \quad t \in L, \quad (11)$$

$$\varphi_1^+(t) = G_1(t)\varphi_1^-(t) + g_1(t), \quad t \in L, \quad (12)$$

причем решения задачи Римана (11) следует искать в классе кусочно аналитических функций  $\varphi_0(z) = (\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z))$ , *исчезающих на бесконечности* (т.е.  $\prod \{\varphi_0^-, \infty\} \geq 1$ ), а (в силу (2)) решения задачи Римана (12) нужно искать в классе кусочно аналитических функций  $\varphi_1(z) = (\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z))$ , *имеющих на бесконечности нуль не ниже второго порядка* (т.е.  $\prod \{\varphi_1^-, \infty\} \geq 2$ ).

В случае же  $G_0(t) \neq G_1(t)$ ,  $t \in L$ , решение векторно-матричной задачи Римана (9) сводится к *последовательному* решению следующих двух скалярных задач Римана:

$$\varphi_1^+(t) = G_1(t)\varphi_1^-(t) + g_1(t), \quad t \in L, \quad (13)$$

и

$$\varphi_0^+(t) = G_0(t)\varphi_0^-(t) + Q_0(t), \quad t \in L, \quad (14)$$

где

$$Q_0(t) = g_0(t) - \bar{t}g_1(t) + \bar{t}(G_0(t) - G_1(t)) \varphi_1^-(t), \quad (15)$$

причем  $\prod \{\varphi_0^-, \infty\} \geq 1$  и  $\prod \{\varphi_1^-, \infty\} \geq 2$ .

В результате приведенных выше рассуждений можно сформулировать следующие два утверждения.

**Теорема 1.** Если  $G_0(t) \equiv G_1(t)$ ,  $t \in L$ ; то решение задачи  $R_{2,M}$  в классе исчезающих на бесконечности кусочно бианалитических функций вида (1) сводится к решению двух независимых друг от друга скалярных задач Римана (11) и (12) относительно кусочно аналитических функций  $\varphi_0(z) = (\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z))$  и  $\varphi_1(z) = (\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z))$  соответственно, причем  $\prod \{\varphi_0^-, \infty\} \geq 1$  и  $\prod \{\varphi_1^-, \infty\} \geq 2$ .

**Теорема 2.** Если  $G_0(t) \neq G_1(t)$ ,  $t \in L$ , то решение задачи  $R_{2,M}$  в классе исчезающих на бесконечности кусочно бианалитических функций вида (1) сводится к последовательному решению двух скалярных задач Римана (13) и (14) относительно кусочно аналитических функций  $\varphi_1(z) = (\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z))$  и  $\varphi_0(z) = (\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z))$  соответственно, при этом в краевое условие задачи Римана (14) входит граничное значение  $\varphi_1^-(t)$  решения задачи Римана (13), причем  $\prod \{\varphi_0^-, \infty\} \geq 1$  и  $\prod \{\varphi_1^-, \infty\} \geq 2$ .

**3. О картине разрешимости краевой задачи  $R_{2,M}$ .** Пусть  $\chi_0 = \text{Ind}G_0(t)$  и  $\chi_1 = \text{Ind}G_1(t)$  – индексы Коши вдоль кривой  $L$  функций  $G_0(t)$  и  $G_1(t)$  соответственно. Число  $\chi = \chi_0 + \chi_1$  будем называть в дальнейшем суммарным индексом краевой задачи  $R_{2,M}$ , а числа  $\chi_0$  и  $\chi_1$  – частными индексами этой задачи. На основании теорем 1 и 2 можно сделать следующие выводы относительно картины разрешимости задачи  $R_{2,M}$  (см. также, например, [1, с. 48] или [4, с. 49]).

*Случай 1.* Предположим, что  $G_0(t) \equiv G_1(t)$ ,  $t \in L$ , и  $\chi_0 = \text{Ind}G_0(t)$ . Тогда, если  $\chi_0 \geq 1$ , то в силу теоремы 1 краевая задача  $R_{2,M}$  безусловно разрешима и ее общее решение задается формулами

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$\varphi_0^\pm(z) = X_0^\pm(z) \{ \Psi_0^\pm(z) + P_{0,\chi_0-1}(z) \}, \quad (16a)$$

$$\varphi_1^\pm(z) = X_1^\pm(z) \{ \Psi_1^\pm(z) + P_{1,\chi_1-2}(z) \}, \quad (16b)$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_{10}(\tau)}{X_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} \Psi_0^+(z), & z \in T^+, \\ \Psi_0^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (16\text{в})$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} \Psi_1^+(z), & z \in T^+, \\ \Psi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (16\text{г})$$

$g_{01}(t) = g_0(t) - \bar{t}g_1(t)$ , а  $X_k^+(t)$  ( $k=0,1$ ) – граничные значения так называемых *канонических функций* задач Римана (11) и (12) соответственно, которые определяются формулами

$$X_k^+(z) = \exp\{\gamma_k^+(z)\}, \quad X_k^-(z) = z^{-\chi_k} \exp\{\gamma_k^-(z)\},$$

$$\gamma_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\chi_k} G_k(\tau)]}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \gamma_k^+(z), & z \in T^+, \\ \gamma_k^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (17)$$

$P_{k,\chi_k}(z) = c_{0k} + c_{1k}z + c_{2k}z^2 + \dots + c_{\chi_k,k}z^{\chi_k}$  ( $k=0,1$ ) – многочлены степени не выше  $\chi_k$  с произвольными комплексными коэффициентами.

Если же  $\chi_0 < 1$ , то в силу теоремы 1 краевая задача  $R_{2,M}$  будет разрешима тогда и только тогда, когда выполняются следующие  $-2\chi_0 + 1$  условий разрешимости вида

$$\int_L \frac{g_{01}(t)}{X_0^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad k=1,2,\dots, -\chi_0. \quad (18)$$

и

$$\int_L \frac{g_1(t)}{X_0^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad k=1,2,\dots, -\chi_0 + 1, \quad (19)$$

(ясно, что при  $\chi_0 = 0$  условия (18) будут отсутствовать). При выполнении условий (18)–(19) задача  $R_{2,M}$  будет иметь единственное решение, которое также задается формулами (16)–(16г), где нужно положить  $P_{0,\chi_0-1}(z) \equiv 0$  и  $P_{1,\chi_1-2}(z) \equiv 0$ .

*Случай 2.* Предположим теперь, что  $G_0(t) \neq G_1(t)$ ,  $t \in L$ , и  $\chi_0 = \text{Ind}G_0(t) \geq 0$  и  $\chi_1 = \text{Ind}G_1(t) \geq 1$ . Тогда в силу теоремы 2 краевая  $R_{2,M}$  безусловно разрешима и ее общее решение, задаваемое формулой (16), где  $\varphi_1^\pm(z), \varphi_0^\pm(z)$  – решения скалярных задач Римана (13) и (14) соответственно, линейно зависит от  $\chi - 1 = \chi_0 + \chi_1 - 1$  произвольных комплексных постоянных.

Если  $\chi_0 < 0$  и  $\chi_1 < 1$ , то (в силу теоремы 2) задача  $R_{2,M}$  будет разрешима тогда и только тогда, когда выполняются следующие  $-\chi + 1$  условий разрешимости вида

$$\int_L \frac{g_1(t)}{X_1^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad k=1,2,\dots, -\chi_1 + 1. \quad (20)$$

и

$$\int_L \frac{Q_0(t)}{X_0^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\chi_0, \quad (21)$$

причем при выполнении условий (20)–(21) задача  $R_{2,M}$  будет иметь единственное решение.

Если  $\chi_0 \geq 0$  и  $\chi_1 < 1$ , то (в силу теоремы 2) задача  $R_{2,M}$  будет разрешима тогда и только тогда, когда выполняются  $-\chi_1 + 1$  условий разрешимости вида (20). При выполнении этих условий общее решение задачи  $R_{2,M}$  линейно зависит от  $\chi_0$  произвольных комплексных постоянных.

Наконец, если  $\chi_0 < 0$  и  $\chi_1 \geq 1$ , то (в силу теоремы 2) задача  $R_{2,M}$  будет разрешима тогда и только тогда, когда выполняются  $-\chi_0$  условий разрешимости вида (21). Но некоторые из этих условий можно удовлетворить за счет определенного выбора произвольных постоянных  $C_{10}, C_{11}, \dots, C_{1,\chi_1-1}$ , входящих в общее решение скалярной задачи Римана (13). Поэтому в данном случае общее решение задачи  $R_{2,M}$  линейно зависит от  $\chi_1 - r$ , где  $0 \leq r \leq \min\{-\chi_0, \chi_1\}$ , произвольных комплексных постоянных.

Таким образом, при любых значениях частных индексов  $\chi_0$  и  $\chi_1$  как число  $l$  линейно независимых решений *однородной задачи*  $R_{2,M}^0$ , так и число  $p$  условий разрешимости неоднородной задачи  $R_{2,M}$  являются *конечными числами* ( $l \leq |\chi| - 1$ ,  $p \leq |\chi| + 1$ , где  $\chi = \chi_0 + \chi_1$  – *суммарный индекс задачи*), то есть задача  $R_{2,M}$  является *нетеровой* (см., например, [1, с. 55]).

**4. Об алгоритме решения краевой задачи  $R_{2,M}$ .** Теоремы 1 и 2 позволяют построить эффективные алгоритмы решения краевой задачи  $R_{2,M}$  в каждом из двух рассмотренных выше случаев: 1)  $G_0(t) \equiv G_1(t)$ ,  $t \in L$ ; 2)  $G_0(t) \neq G_1(t)$ ,  $t \in L$ .

Пусть  $G_0(t) \equiv G_1(t)$ ,  $t \in L$ . В этом случае алгоритм решения задачи  $R_{2,M}$  целесообразно разбить на следующие **три этапа**.

**1 этап.** Вычисляем индекс  $\chi_0 = \text{Ind}G_0(t)$  и находим *канонические функции*  $X_0^+(z) = \exp\{\gamma_0^+(z)\}$  и  $X_0^-(z) = z^{-\chi_0} \exp\{\gamma_0^-(z)\}$ , а затем переходим к следующему этапу.

**2 этап.** Если  $\chi_0 \geq 1$ , то переходим сразу к следующему этапу. Если же  $\chi_0 < 1$ , проверяем выполнение  $-2\chi_0 + 1$  условий разрешимости вида (18)–(19). В случае, когда не выполняется хотя бы одно из условий (18)–

(19), заключаем, что задача  $R_{2,M}$  не имеет решения, и на этом заканчивается алгоритм. А в случае выполнения всех условий разрешимости вида (18)–(19), переходим к следующему этапу.

3 этап. Определяем значения кусочно аналитических функций

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_{01}(\tau)}{X_0^+(\tau) \tau - z} d\tau = \begin{cases} \Psi_0^+(z), z \in T^+, \\ \Psi_0^-(z), z \in T^-, \end{cases} \quad (22)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{X_1^+(\tau) \tau - z} d\tau = \begin{cases} \Psi_1^+(z), z \in T^+, \\ \Psi_1^-(z), z \in T^-. \end{cases} \quad (23)$$

Далее, если  $\chi_0 \geq 1$ , то записываем общее решение  $R_{2,M}$  по формулам (16)–(16г). Если же  $\chi_0 < 1$ , то записываем единственное решение задачи  $R_{2,M}$  по формулам (16)–(16г), где положено  $P_{0,\chi_0-1}(z) \equiv 0$  и  $P_{1,\chi_1-2}(z) \equiv 0$ . И на этом заканчивается алгоритм решения задачи  $R_{2,M}$ .

Пусть теперь  $G_0(t) \neq G_1(t)$ ,  $t \in L$ . В данном случае алгоритм решения задачи  $R_{2,M}$  целесообразно разбить на следующие **пять этапов**.

1 этап. Вычисляем индексы  $\chi_0 = \text{Ind}G_0(t)$ ,  $\chi_1 = \text{Ind}G_1(t)$  и находим канонические функции  $X_k^+(z) = \exp\{\gamma_k^+(z)\}$ ,  $X_k^-(z) = z^{-\chi_k} \exp\{\gamma_k^-(z)\}$  ( $k = 0, 1$ ), а затем переходим к следующему этапу.

2 этап. Если  $\chi_1 = \text{Ind}G_1(t) \geq 1$ , то переходим сразу к следующему этапу. Если же  $\chi_1 < 1$ , проверяем выполнение  $-\chi_1 + 1$  условий разрешимости вида (20). В случае, когда не выполняется хотя бы одно из условий (20), заключаем, что задача  $R_{2,M}$  не имеет решения, и на этом заканчивается алгоритм. А в случае выполнения всех условий разрешимости вида (20), переходим к следующему этапу.

3 этап. Определяем значения кусочно аналитической функции вида (23), находим решение скалярной задачи Римана (13) по формулам (16б) и (23). Далее, по формуле (15), где  $\varphi_1^-(t)$  – граничные значения решения задачи Римана (13), находим функцию  $Q_0(t)$ , а затем переходим к следующему этапу.

4 этап. Если  $\chi_0 = \text{Ind}G_0(t) \geq 0$ , то переходим сразу к следующему этапу. Если же  $\chi_0 < 0$ , проверяем выполнение  $-\chi_0$  условий разрешимости вида (21). В случае, когда не выполняется хотя бы одно из условий (21), заключаем, что задача  $R_{2,M}$  не имеет решения, и на этом заканчивается алгоритм. А в случае выполнения всех условий разрешимости вида (21) переходим к следующему этапу.

5 этап. Определяем значения кусочно аналитических функций

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_0(\tau)}{X_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} \Psi_0^+(z), & z \in T^+, \\ \Psi_0^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (24)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} \Psi_1^+(z), & z \in T^+, \\ \Psi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (25)$$

и записываем общее решение задачи  $R_{2,M}$  по формулам

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$\varphi_0^\pm(z) = X_0^\pm(z) \left\{ \Psi_0^\pm(z) + P_{0,\chi_0-1}(z) \right\}, \quad (26a)$$

$$\varphi_1^\pm(z) = X_1^\pm(z) \left\{ \Psi_1^\pm(z) + P_{1,\chi_1-2}(z) \right\} \quad (26b)$$

(при  $\chi_0 < 0$  полагаем в (26a)  $P_{0,\chi_0-1}(z) \equiv 0$ , при  $\chi_1 < 1$  в (26b) полагаем  $P_{1,\chi_1-2}(z) \equiv 0$ ). И на этом заканчивается алгоритм решения задачи  $R_{2,M}$ .

### Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Показеев В.И. Нерегулярные полианалитические функции // Известия вузов. Математика. 1975, № 6. С. 103–113.
3. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
4. Расулов К.М. Методы решения линейных краевых задач комплексного анализа: учебное пособие. Смоленск: Принт-Экспресс, 2019. 153 с.

**V.I. Munerman, K.M. Rasulov, D.E. Feramuzov**  
Smolensk State University

### ON ALGORITHM OF THE SOLUTION OF MODEL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF RIEMANN TAPE FOR BIANALYTIC FUNCTIONS

**Keywords:** *bianalytic function, boundary value problem of Riemann type, constructive algorithm, simply connected domain.*

**Abstract.** *In this paper we present a constructive algorithm for solving a model boundary value problem of Riemann type for piecewise bianalytic functions in simply connected domains. The proposed algorithm is based on the explicit solution of the classical vector-matrix Riemann problem in classes of piecewise analytic vectors in the case when the coefficients of the boundary conditions are triangular matrix functions. In addition, a complete solvability picture of the considered boundary value problem is constructed and its Noetherian property is established.*

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Ключевые слова: краевая задача с косою производной, дифференциальное уравнение Бауэра, обобщенная гармоническая функция, круговая область.

В статье рассматривается краевая задача с косою производной для обобщенных гармонических функций в произвольных односвязных областях с гладкими границами. Устанавливаются условия, при которых решение рассматриваемой задачи в круговых областях сводится к решению известной невырожденной дифференциальной краевой задачи типа Римана в классах аналитических функций комплексного переменного.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – односвязная область, лежащая в единичном круге  $U_1^+ = \{z : |z| < 1\}$  на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , а простая гладкая замкнутая кривая  $L$  служит границей  $T^+$  (см. рис. 1). Рассмотрим в области  $T^+$  дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1-z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n$  – фиксированное

натуральное число, а  $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  – неизвестная функция.

В 1965 году известный немецкий математик К.В. Бауэр (K.W. Bauer) в работе [1] (см. также [2]) установил, что всякое регулярное решение уравнения (1) в области  $T^+ \subset U_1^+$  можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n B_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} + \overline{\sum_{k=0}^n B_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k f^+(z)}{dz^k}}, \quad (2)$$

где  $B_k^n = \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z), f^+(z)$  – аналитические (голоморфные) в области  $T^+$  функции.

Следуя [2], регулярные решения дифференциального уравнения (1) в области  $T^+ \subset U_1^+$  будем называть *обобщенными гармоническими функциями порядка  $n$  в области  $T^+$* , а функции  $\varphi^+(z)$  и  $f^+(z)$ , входящие в правую часть представления (2), для удобства назовем соответственно *первой и второй аналитическими компонентами обобщенной гармонической функции  $W(z)$* . При этом класс всех обобщенных гармонических функций порядка  $n$  в области  $T^+$  будем обозначать символом  $\mathbf{G}_n(T^+)$ , а через  $\mathbf{G}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$  обозначим класс обобщенных гармонических функций порядка  $n$  в области  $T^+$ , для которых в представлении (2) аналитические компоненты  $\varphi^+(z), f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , то есть  $\varphi^+(z), f^+(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно.

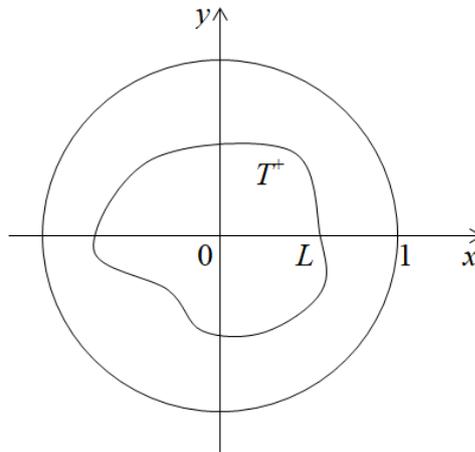


Рис. 1

Рассматривается следующая краевая задача: *требуется найти все обобщенные гармонические функции  $W(z)$  порядка  $n$  ( $n \geq 1$ ) в области  $T^+$ , принадлежащие классу  $\mathbf{G}_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию*

$$a(t) \frac{\partial W(t)}{\partial x} + b(t) \frac{\partial W(t)}{\partial y} = q(t), \quad t \in L, \quad (3)$$

где  $a(t), b(t)$  и  $q(t)$  – заданные на контуре  $L$  комплекснозначные функции из класса  $H(L)$  (то есть удовлетворяющие на  $L$  условию Гельдера).

Следуя традициям математической физики (см., например, [4, с. 80]), сформулированную выше задачу будем называть *краевой задачей с косою производной (directional derivative) для обобщенных гармонических*

функций порядка  $n$ , или, короче, задачей  $DD_n$ , а соответствующую ей однородную задачу ( $q(t) \equiv 0$ ) – задачей  $DD_n^0$ .

Основной целью настоящей статьи является разработка метода решения задачи  $DD_n$  в случае, когда  $n=1$ ,  $T^+ = T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $L_r = \{t: |t| = r\}$  ( $0 < r < 1$ ) и  $[a(t)]^2 + [b(t)]^2 \neq 0$ ,  $t \in L_r$ .

**2. Метод решения задачи  $DD_1$  в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ , в случае  $[a(t)]^2 + [b(t)]^2 \neq 0$ ,  $t \in L_r$ .**

В силу (2) при  $n=1$  и  $T^+ = T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  всякую обобщенную гармоническую функцию  $W(z)$  из класса  $G_1(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$  можно задавать в виде

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1-z\bar{z}}\varphi^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1-z\bar{z}}f^+(z)}, \quad z \in T_r^+, \quad (4)$$

где  $\varphi^+(z)$ ,  $f^+(z)$  – аналитические в круге  $T_r^+$  функции, принадлежащие классу  $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ .

Поскольку  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} = -i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ , в силу (4) краевое условие (3) можно записать так:

$$\begin{aligned} & a(t) \left\{ \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{2(\bar{t})^2 + 2}{(1-t\bar{t})^2} \varphi^+(t) \right\} + \\ & + a(t) \left\{ \overline{\frac{d^2f^+(t)}{dt^2} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{df^+(t)}{dt} + \frac{2(\bar{t})^2 + 2}{(1-t\bar{t})^2} f^+(t)} \right\} - \\ & - ib(t) \left\{ \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{2(\bar{t})^2 - 2}{(1-t\bar{t})^2} \varphi^+(t) \right\} + \\ & + ib(t) \left\{ \overline{\frac{d^2f^+(t)}{dt^2} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{df^+(t)}{dt} + \frac{2(\bar{t})^2 - 2}{(1-t\bar{t})^2} f^+(t)} \right\} = q(t), \quad t \in L_r. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее, разделив обе части (5) на  $[a(t) - ib(t)]$ , из (5) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{2(\bar{t})^2 [a(t) - ib(t)] + 2[a(t) + ib(t)]}{[a(t) - ib(t)](1-t\bar{t})^2} \varphi^+(t) + \\ & + \frac{[a(t) + ib(t)] \overline{d^2f^+(t)}}{[a(t) - ib(t)] dt^2} + \frac{[a(t) + ib(t)] 2t \overline{df^+(t)}}{[a(t) - ib(t)] 1-t\bar{t} dt} + \\ & + \frac{2(t)^2 [a(t) + ib(t)] + 2[a(t) - ib(t)] \overline{f^+(t)}}{[a(t) - ib(t)](1-t\bar{t})^2} = \frac{q(t)}{[a(t) - ib(t)]}, \quad t \in L_r. \end{aligned} \quad (6)$$

Наконец, построив аналитическую в области  $T_r^- = \bar{C} \setminus (T_r^+ \cup L_r)$  функцию  $f^-(z)$  по формуле

$$f^-(z) = \overline{f^+\left(\frac{r^2}{z}\right)}, \quad z \in T_r^-, \quad (7)$$

и учитывая (см., например, [5, с. 40] или [6, с. 290]), что на окружности  $L_r = \{t : |t| = r\}$  выполняются условия «симметрии»

$$\frac{d^2 \overline{f^+(t)}}{dt^2} = \frac{t^4}{r^4} \frac{d^2 f^-(t)}{dt^2} + \frac{2t^3}{r^4} \frac{df^-(t)}{dt}, \quad \overline{\frac{df^+(t)}{dt}} = -\frac{t^2}{r^2} \frac{df^-(t)}{dt}, \quad \overline{f^+(t)} = f^-(t), \quad t \in L_r, \quad (8)$$

из равенства (6) будем иметь:

$$\frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + A_1(t) \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + A_0(t) \varphi^+(t) - G_2(t) \frac{d^2 f^-(t)}{dt^2} - G_1(t) \frac{df^-(t)}{dt} - G_0(t) f^-(t) = \quad (9)$$

$$= Q(t), \quad t \in L_r,$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}}, \quad A_0(t) = \frac{2(\bar{t})^2 [a(t) - ib(t)] + 2[a(t) + ib(t)]}{[a(t) - ib(t)](1-t\bar{t})^2}, \\ G_2(t) &= -\frac{[a(t) + ib(t)] t^4}{[a(t) - ib(t)] r^4}, \quad G_1(t) = -\frac{[a(t) + ib(t)] \left(\frac{1}{1-t\bar{t}} - \frac{1}{r^2}\right) 2t^3}{[a(t) - ib(t)] r^2}, \\ G_0(t) &= -\frac{2(t)^2 [a(t) + ib(t)] + 2[a(t) - ib(t)]}{[a(t) - ib(t)](1-t\bar{t})^2}, \quad Q(t) = \frac{q(t)}{[a(t) - ib(t)]}, \quad t \in L_r. \end{aligned} \quad (10)$$

Предположим, что выполняется условие

$$[a(t)]^2 + [b(t)]^2 \neq 0, \quad t \in L_r. \quad (11)$$

При выполнении условия (11) равенство (9) представляет собой краевое условие хорошо известной невырожденной дифференциальной задачи типа Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\varphi^+(z), f^-(z)\}$  (см., например, [6, с. 142] или [6, с. 365]).

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие (11). Тогда, решая задачу типа Римана (9), например, методом, изложенным в §8 монографии [5], в случае ее разрешимости, определяем аналитические функции  $\varphi^+(z)$  и  $f^-(z)$ . Тогда на основании (7) находим аналитическую в круге  $T_r^+$  функцию  $f^+(z)$  по формуле

$$f^+(z) = \overline{f^-\left(\frac{r^2}{z}\right)}, \quad z \in T_r^+. \quad (12)$$

Подставляя значения найденных аналитических в  $T_r^+$  функций  $\varphi^+(z)$  и  $f^+(z)$  в правую часть равенства (4), получаем решение искомой задачи  $DD_1$ .

Приведенные выше рассуждения устанавливают справедливость следующего утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ , и выполняется условие (11). Тогда решение краевой задачи  $DD_1$  сводится к решению невырожденной дифференциальной задачи Римана (9) относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\varphi^+(z), f^-(z)\}$ . Для разрешимости краевой задачи  $DD_1$  в круге  $T_r^+$  необходимо и достаточно, чтобы была разрешимой дифференциальная задача Римана (9).

### Литература

1. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung  $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. – 1965. – Schriften 23.
2. Bauer K.W., Ruscheweyh S. Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics. Edited by A. Dold and B. Eckmann, 791), 1980. 253 p.
3. Нагорная Т.Р., Расулов К.М. О краевой задаче Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях // Научно-технический вестник Поволжья. 2022. № 7. С. 32–35.
4. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М: Наука, 1976. 295 с.
5. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

**T.R. Nagornaya, K.M. Rasulov**  
Smolensk State University

### ON A METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM WITH DIRECTIONAL DERIVATIVE FOR GENERALIZED HARMONIC FUNCTIONS IN CIRCULAR DOMAINS

**Keywords:** boundary value problem with directional derivative, Bauer differential equation, generalized harmonic function, circular domain.

**Abstract.** The article considers a boundary value problem with an directional derivative for generalized harmonic functions in arbitrary simply connected domains with smooth boundaries. Conditions are established at which the

*solution of the problem in circular domains is reduced to the solution of the well-known nonsingular Riemann-type differential boundary value problem in classes of analytic functions of a complex variable.*

**П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба**

*Гродненский государственный университет  
имени Янки Купалы*

УДК 517.5

## **О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ**

*Ключевые слова: сопряженная функция, рациональная аппроксимация, ряды Фурье – Чебышёва, суммы Фейера, суммы Абеля – Пуассона, функция со степенной особенностью, поточечные и равномерные оценки, асимптотические оценки.*

*Исследуются рациональные аппроксимации сопряженной функции на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Фейера и Абеля – Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. В обоих случаях устанавливается интегральное представление соответствующих приближений.*

*Для сопряженной функции с плотностью  $(1-x)^\gamma$ ,  $\gamma \in (1/2, 1)$ , обоими методами получены интегральные представления приближений, оценки сверху поточечных и равномерных приближений. Установлены асимптотические выражения полученных мажорант, зависящие от параметров аппроксимирующей функции.*

*В заключительной части для каждого из способов рациональной аппроксимации найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания асимптотических выражений мажорант.*

*В качестве следствий найдены оценки приближений сопряженной функции на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Фейера и Абеля – Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.*

### **1. Введение**

При решении ряда различных задач математики и ее приложений возникают интегралы с ядром типа Коши, взятые вдоль отрезка действительной оси, которые при помощи различных преобразований приводятся к виду:

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t-x\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1], \quad (1)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши и для его существования достаточно потребовать, чтобы функция  $f(t)$  удовлетворяла на отрезке  $[-1, 1]$  условию Липшица любого порядка [1; 2].

Преобразование  $\hat{f}(x)$  можно рассматривать также как один из вариантов определения сопряжённой функции с функцией  $f$ , заданной на отрезке  $[-1, 1]$ . При этом суперпозиция  $\hat{f}(\cos \theta)$  выражается через функцию, тригонометрически сопряжённую с индуцированной функцией  $f(\cos \theta)$ , а именно

$$\hat{f}(\cos \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \theta}{2} d\tau, \quad x = \cos \theta.$$

Последнее выражение является хорошо известным [3; 4] представлением сопряженной функции с  $2\pi$ -периодической функцией  $f$ .

Задачи, связанные с изучением  $2\pi$ -периодических сопряженных функций, имеют богатую историю и затронули интересы большого числа выдающихся математиков, среди которых И.И. Привалов [5; 6], А.Н. Колмогоров [7], М. Рисс [8; 9]. Полиномиальные приближения сингулярного интеграла вида (1) с плотностью  $f(t)$ , принадлежащей различным функциональным классам, изучались в работах В.П. Моторного [10; 11]. С сопряженными функциями связан ряд задач теории аппроксимации, среди которых классическая задача Н.К. Бари [12] и С.Б. Стечкина [13] о взаимосвязях между наилучшими приближениями функций и им сопряженных. В.Р. Мисюк и А.А. Пекарский [14] исследовали алгебраический аналог этой задачи на отрезке  $[-1, 1]$ .

Рациональные аппроксимации сопряжённой функции носят эпизодический характер. В.Н. Русак и И.В. Рыбаченко [15] нашли сравнительные порядковые оценки для рациональных приближений взаимно сопряженных в смысле Гильберта функций действительной переменной в пространстве непрерывных  $2\pi$ -периодических функций. А.А. Пекарским и Т.С. Мардвилко [16] установлены тесные взаимосвязи между наилучшими равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными аппроксимациями функций и им сопряженных на отрезке. В [17] изучены рациональные аппроксимации на отрезке  $[-1, 1]$  сингулярных интегралов вида (1) частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе ортогональных рациональных функций Чебышёва – Маркова. В частности, найдены оценки равномерных приближений в случае, когда функция  $f(t)$  имеет на отрезке  $[-1, 1]$

степенную особенность. Установлено, что специальным выбором параметра аппроксимирующей функции можно добиться большей скорости рациональных приближений в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

В рациональной аппроксимации нашли применение операторы, являющиеся аналогами известных полиномиальных периодических операторов Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена [18; 19]. В 1979 году Е.А. Ровба [20] ввел интегральный оператор на отрезке на основании системы рациональных функций Чебышёва – Маркова, который является обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Пусть задано произвольное множество чисел  $\{a_k\}_{k=1}^n$ , где  $a_k$  либо являются действительными и  $|a_k| < 1$ , либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $(1-x^2)^{-1/2}$  функций  $f(x)$  рассмотрим рациональный интегральный оператор [20]:

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin \lambda_n(v, u)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv, \quad x = \cos u, \quad (2)$$

где

$$\lambda_n(v, u) = \int_u^v \left( \frac{1}{2} + \lambda_n(y) \right) dy, \quad \lambda_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - \alpha_k^2}{1 + 2\alpha_k \cos y + \alpha_k^2}, \quad \alpha_k = \frac{a_k}{1 + \sqrt{1 - a_k^2}}, \quad |\alpha_k| < 1. \quad (3)$$

Оператор  $s_n : f \rightarrow \mathbb{R}_n(A)$ , где  $\mathbb{R}_n(A)$  – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)}, \quad p_n(x) \in \mathbb{P}_n,$$

$A$  – множество параметров  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $s_n(1, x) \equiv 1$ . В частности, если положить  $a_k = 0, k = 1, \dots, n$ , то  $s_n(f, x)$  есть частичная сумма полиномиального ряда Фурье – Чебышева.

Известно [21], что сопряженный с (2) рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва имеет интегральное представление

$$\hat{s}_n(f, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\cos \frac{v-u}{2} - \cos \lambda_n(v, u)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv, \quad x = \cos u, \quad (4)$$

где  $\lambda_n(v, u)$  определена в (3) и его образом является рациональная функция вида

$$\frac{\sqrt{1-x^2} p_{n-1}(x)}{\prod_{k=1}^n (1+a_k x)}, \quad p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Кроме этого, в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции известны [21] в явном виде значения параметров, при которых приближения сопряженной функции с плотностью  $(1-x)^\gamma, \gamma > 1/2$ , на отрезке  $[-1, 1]$  имеют большую скорость убывания в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Изучению приближений сопряженных  $2\pi$ -периодических функций суммами Фейера сопряженных тригонометрических рядов Фурье посвящены работы большого количества специалистов в теории функций, среди которых С.М. Никольский [22], Г. Алексич [23], А.В. Ефимов [24; 25], С.Б. Стечкин [26]. В [27] были введены суммы Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье – Чебышёва на отрезке  $[-1, 1]$  с двумя геометрически различными полюсами и в продолжении работы [17] найдены оценки приближений сопряженной функции с плотностью, имеющей на отрезке  $[-1, 1]$  степенную особенность. Установлено, что специальным выбором параметра аппроксимирующей функции также можно добиться большей скорости рациональных приближений в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Суммы Абеля – Пуассона сопряженных рядов Фурье на классах  $2\pi$ -периодических функций исследовались в работах многих известных математиков, таких как Б. Надь [28], В.А. Баскаков [29], К.М. Жигалло и Ю.И. Харкевич [30; 31]. В [32] были введены и исследованы суммы Абеля – Пуассона сопряженных рациональных рядов Фурье – Чебышёва на отрезке  $[-1, 1]$ . В частности, также был установлен параметр аппроксимирующей рациональной функции, при котором обеспечивается скорость рациональных приближений, большая в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Известно (см., например, [33]), что между методами суммирования Фейера и Абеля – Пуассона существует определенная связь. Целью настоящей работы является исследование аппроксимационных свойств сумм Фейера и Абеля – Пуассона рационального интегрального оператора (4) в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов. В работе для обоих методов рациональной аппроксимации устанавливается интегральное представление соответствующих приближений и изучаются приближения на отрезке

$[-1, 1]$  сопряженной функции с плотностью  $(1-x)^\gamma, \gamma \in (1/2, 1)$ . В заключительной части для каждого случая устанавливаются соответствующие ему оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты рациональных приближений.

Введем некоторые обозначения, которые будут использоваться при построении и исследовании каждого из рассматриваемых методов рациональной аппроксимации. Пусть  $q \in (0, n)$  – произвольное натуральное число.  $A_q$  есть подмножество  $A$  параметров таких, что среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , ровно  $q$  различных и кратность каждого параметра равна  $m, n = mq, n > q$ . Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с  $q$  геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости. Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К.Н. Лунгу [34, 35].

## 2. Сопряженные суммы Фейера интегральных операторов Фурье – Чебышёва

Составим сумму:

$$\hat{\sigma}_{n,q}(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \hat{s}_{kq}(f, x), \quad x \in [-1, 1], \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где  $\hat{s}_{kq}(f, x)$  определена в (4). Выражение (5) естественно назвать суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева с  $q$  геометрически различными полюсами.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{n,q}(f, x, A_q) &= \hat{f}(x) - \hat{\sigma}_{n,q}(f, x), \quad x \in [-1, 1], \\ \hat{\varepsilon}_{n,q}(f, A_q) &= \left\| \hat{f}(x) - \hat{\sigma}_{n,q}(f, x) \right\|_{C[-1,1]}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Для приближений сопряженной функции (1) на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Фейера (5) имеет место интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f, x, A_q) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) K_n(v, u) dv, \quad x = \cos u,$$

где

$$K_n(v, u) =$$

$$\frac{\cos \frac{v-u}{2} - \cos \left( \frac{v-u}{2} - \lambda_q^* \right) + \cos \left( \frac{v-u}{2} + m\lambda_q^* \right) - \cos \left( \frac{v-u}{2} + (m+1)\lambda_q^* \right)}{8\pi(m+1) \sin \frac{v-u}{2} \sin^2 \frac{\lambda_q^*}{2}},$$

$$\lambda_q^* = \lambda_q^*(v, u) = \int_u^v \sum_{k=1}^q \frac{1 - \alpha_k^2}{1 + 2\alpha_k \cos y + \alpha_k^2} dy.$$

Доказательство теоремы 1 основано на очевидном равенстве

$$\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \hat{\delta}_{kq}(f, x) = \hat{\varepsilon}_{n,q}(f, x), \quad x \in [-1, 1],$$

где  $\hat{\delta}_{kq}(f, x) = \hat{f}(x) - \hat{s}_{kq}(f, x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , – приближения на отрезке  $[-1, 1]$  сопряженной функции (1) сопряженным рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (4) в случае  $q$  геометрически различных полюсов. Интегральное представление величины  $\hat{\delta}_{kq}(f, x)$  было получено нами ранее (см. [21]). Далее задача сводится к применению соответствующих алгебраических преобразований.

В теореме 1 положим значения параметров  $\alpha_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ . Тогда величина  $\hat{\varepsilon}_{n,1}(f, x, 0) = \hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f, x)$  – приближения сопряженной функции (1) суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. В этом случае из теоремы 1 получаем

**Следствие 1.** *Имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f, x) = \frac{1}{4\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\sin(n+1)(v-u)}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} dv, \quad x = \cos u, n \in \mathbb{N}.$$

Изучим приближения суммами Фейера (5) сопряженной функции с плотностью  $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$ ,  $\gamma \in (1/2, 1)$ . Пусть параметры  $\{a_k\}_{k=1}^q$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha_k \mapsto -\alpha_k, \quad \alpha_k \in [0, 1), \quad k = 1, \dots, q.$$

**Теорема 2.** *Для приближений сопряженной функции с плотностью  $f_\gamma(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с  $q$  геометрически различными полюсами имеют место:*

1) *интегральное представление:*

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma, x, A_q) = -\frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2t \cos u + t^2}} \sqrt{\frac{1-2\omega_q^{m+1}(t)M_{q(m+1)}(x) + \omega_q^{2(m+1)}(t)}{1-2\omega_q(t)M_q(x) + \omega_q^2(t)}} \sin \psi_n(x,t) dt,$$

где

$$\psi_n(x,t) = \arg \frac{\xi}{1-t\xi} + \arg \frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)}, \quad \omega_q(t) = \prod_{k=1}^q \frac{t-\alpha_k}{1-\alpha_k t}, \quad \xi = e^{iu},$$

$$M_q(x) = \frac{1}{2}(\omega_q(\xi) + \overline{\omega_q(\xi)}) -$$

рациональная функция Чебышёва – Маркова порядка  $q$ ;

2) поточечная оценка:

$$\begin{aligned} |\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma, x, A_q)| &\leq \frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma \sqrt{1-x^2}}{\pi} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{1-2tx+t^2} \sqrt{\frac{1-2\omega_q^{m+1}(t)M_{q(m+1)}(x) + \omega_q^{2(m+1)}(t)}{1-2\omega_q(t)M_q(x) + \omega_q^2(t)}} dt + \right. \\ &+ \frac{\lambda_q(u)}{m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2tx+t^2}} \frac{|\omega_q(t)|(1-|\omega_q(t)|^{m+1})}{(1-|\omega_q(t)|)^2} dt - \\ &\left. - \lambda_q(u) \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2tx+t^2}} \frac{|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|} dt \right], \quad x = \cos u, \end{aligned}$$

где  $\lambda_q(u)$  из (3);

3) равномерно относительно  $x \in [-1, 1]$  неравенство

$$|\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma, x, A_q)| \leq \sqrt{1-x^2} \hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q) &= \frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi} \left[ \frac{1}{m+1} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma-2} t^{-\gamma} \frac{1-|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|} dt + \right. \\ &+ \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^q \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma-1} t^{-\gamma} \frac{1-|\omega_q(t)|^{m+1}}{(1-|\omega_q(t)|)^2} dt - \\ &\left. - \sum_{k=1}^q \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma-1} t^{-\gamma} \frac{|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|} dt \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

В теореме 2 положим значение параметров  $\alpha_k = 0, k = 1, 2, \dots, q$ . Тогда  $\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma, x, O) = \hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma, x)$  есть приближения сопряженной функции с плотностью  $f_\gamma(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Фейера сопряженных

полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. В этом случае из теоремы 2 получим

**Следствие 2.** Для приближений сопряженной функции с плотностью  $f_\gamma(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва имеют место:

1) интегральное представление:

$$\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma, x) = -\frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi(n+1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{(1-2tx+t^2)^2} p_n(t, x) dt, \quad x \in [-1, 1], x = \cos u,$$

где

$$p_n(t, x) = (1-t^2) \sin u + 2t^{n+2} \sin(n+1)u - t^{n+1} \sin(n+2)u - t^{n+3} \sin nu;$$

2) равномерно по  $x \in [-1, 1]$  оценка:

$$|\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma, x)| \leq \frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma \sqrt{1-x^2}}{\pi(n+1)} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma-2} t^{-\gamma} \frac{1+t-(n+2)t^{n+1}+nt^{n+2}}{1-t} dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Исследуем асимптотическое поведение величины (7) при  $m \rightarrow \infty$ . Для решения этой задачи в правой части (7) выполним замену переменного по формуле  $t = (1-u)/(1+u)$ ,  $dt = -2du/(1+u)^2$ . Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q) = \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} \left[ I_n^{(1)} + 2 \left( \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right) I_n^{(2)} - 2(m+1) \left( \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right) I_n^{(3)} \right], \quad (8)$$

где  $\beta_k = (1-\alpha_k)/(1+\alpha_k)$ ,

$$I_n^{(1)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^\gamma} \frac{1-|\chi_q(u)|^{m+1}}{1-|\chi_q(u)|} du, \quad I_n^{(2)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} \frac{1-|\chi_q(u)|^{m+1}}{(1-|\chi_q(u)|)^2} du,$$

$$I_n^{(3)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} \frac{|\chi_q(u)|^{m+1}}{1-|\chi_q(u)|} du, \quad \chi_q(u) = \prod_{k=1}^n \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае для каждого значения  $n \in \mathbb{N}$  может выбираться соответствующий набор параметров  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ . То есть, вообще говоря,  $\beta_k = \beta_k(n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ . В этом случае будем полагать, что выполнены следующие условия

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_k = \infty, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad n = mq, \quad (9)$$

и учитывать их в дальнейших рассуждениях.

**Теорема 3.** Имеет место асимптотическое равенство

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q) \sim \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} (\Psi_n(A_q) + \Phi_n(A_q)), \quad m \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi_n(A_q) &= \frac{2\gamma\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}} + \\
&+ 2\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right) \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}\right)^2} + \\
&+ 2\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right) \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}\right)^2}, \\
\Phi_n(A_q) &= \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}\right)} + \\
&+ \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}\right)}.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3 сводится к изучению асимптотического поведения интегралов  $I_n^{(1)}$ ,  $I_n^{(2)}$  и  $I_n^{(3)}$  в (8) при  $m \rightarrow \infty$ . Отметим, что для решения поставленной задачи применяется метод Лапласа [36; 37].

Положив в теореме 3 значения параметров  $\beta_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ , величина  $\varepsilon_{n,q}^*(f_\gamma, O) = \varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma)$  есть мажоранта равномерных приближений сопряженной функции (1) суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. В этом случае получим

**Следствие 3.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma) \sim \frac{2^{1-\gamma} \gamma \Gamma(2\gamma-1) \sin \pi\gamma}{\pi(1-\gamma)(n+1)^{2\gamma-1}}, \quad \gamma \in (1/2, 1), n \rightarrow \infty.$$

В теореме 3 положим значение  $q = 1$ . То есть аппроксимирующая функция имеет один полюс в открытой комплексной плоскости. Тогда имеет место

**Следствие 4.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_{n,1}^*(f_\gamma, A_1) \sim \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi(n+1)} \left[ \frac{2\gamma\Gamma(2\gamma-1)(n+1)^{2-2\gamma} \beta^{2\gamma-1}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\beta^3} \int_{\beta}^1 \frac{u^{2\gamma-2}(u+\beta)(u^2+u\beta(1+\beta)+\beta^2)du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} \right], \quad n \rightarrow \infty.$$

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (10) посредством выбора оптимального для этой задачи набора  $A_q^* = \{\alpha_1^*, \dots, \alpha_q^*\}$ . Будем искать наилучшую оценку приближений сопряженной функции с плотностью  $f_\gamma(x)$  суммами Фейера (5). Положим

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma) = \inf_{A_q} \hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q),$$

где  $\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q)$  – асимптотическое выражение мажоранты приближений, полученное в теореме 3 и приведенное в (10).

**Теорема 4.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma) \sim \frac{\mu(q, \gamma)}{(n+1)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}}, \quad \gamma \in (1/2, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\mu(q, \gamma) = \frac{2^{1-\gamma+\frac{4\gamma^3-4\gamma^2-5\gamma+6}{2\gamma(1+\gamma)}} q^{\frac{4\gamma+1}{1+\gamma}} (1+\gamma) \sin \pi\gamma [c_1(\gamma)]^{\frac{2\gamma-1}{2(1+\gamma)}} \left( \frac{\gamma^2 \Gamma(2\gamma-1)}{2^{3-2\gamma} q^2} \right)^{\frac{1}{2\gamma} \left(1 + \frac{(2\gamma-1)(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}\right)}}{\pi\gamma(1-\gamma)^{\frac{1}{2\gamma} \left(q + \frac{(2\gamma-1)(1-\gamma)^q}{\gamma(1+\gamma)}\right)}},$$

$$c_1(\gamma) = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma+1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\sqrt{\pi\gamma}} \left( \Gamma\left(\frac{3}{2} + \gamma\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma(1+\gamma) \right), \quad \gamma \in (1/2, 1).$$

Отметим некоторые этапы в доказательстве теоремы 4. Очевидно, задача сводится к исследованию правой части асимптотического равенства (10). При постоянных значениях параметров  $\beta_k, k=1, 2, \dots, q$ , порядок в указанном соотношении не отличается от полиномиального, найденного в следствии 3. Будем полагать, что  $\beta_k = \beta_k(m) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ , с сохранением условия (9). Причем  $\beta_{k+1} = o(\beta_k), m \rightarrow \infty$ . В этом случае нетрудно получить, что справедливы асимптотические равенства

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \sim \frac{1}{\beta_q},$$

$$1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \sim \frac{2u}{\beta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad u \in [\beta_{j+1}, \beta_j],$$

$$1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \sim \frac{2\beta_1}{u}, \quad u \in [\beta_1, 1].$$

При этом (10) приводится к виду

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q) = \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} \Psi_n(A_q) + \Phi_n(A_q), \quad (11)$$

где

$$\Psi_n(A_q) \sim \frac{2^\gamma \Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma} \beta_q^{2\gamma-1}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)} + \frac{1}{4(1-\gamma)\beta_q} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}} + \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_q\beta_1^2}, \quad (12)$$

$c_1(\gamma)$  определена в формулировке теоремы 4,

$$\Phi_n(A_q) = \frac{1}{m+1} O\left(\frac{1}{4(1-\gamma)} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}} + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1-u^2)^\gamma}\right), \quad m \rightarrow \infty.$$

Ввиду очевидного асимптотического равенства

$$\Phi_n(A_q) = o\left(\frac{1}{(m+1)\beta_q} \left(\frac{1}{4(1-\gamma)} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}} + \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2}\right)\right), \quad m \rightarrow \infty,$$

при варьировании параметров  $\beta_k, k=1,2,\dots,q$ , слагаемые в  $\Phi_n(A_q)$  не влияют на асимптотическое поведение величины  $\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q)$ .

Следовательно, нахождение наилучшего набора параметров необходимо осуществлять, исследуя выражение  $\Psi_n(A_q)$ . При каждом фиксированном  $\gamma \in (1/2, 1)$  оно представляет собой функцию переменных  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ , непрерывную в каждой точке  $q$ -мерного куба  $[\delta, 1]^q$ , где  $\delta = \delta(n) > 0$  – некоторая достаточно малая величина, зависящая от  $n$  и при любом  $n$  ограничивающая множество параметров  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$  слева. Согласно теореме Вейерштрасса функция  $\Psi_n(A_q)$  имеет строгий минимум при некотором  $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_q^*)$ . Причем поскольку  $\beta_k = 1, k=1, \dots, q$ , соответствует полиномиальному случаю, а при  $\beta_k = \beta_k(m) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ , со скоростью большей, чем в условии (9), функция  $\Psi_n(A_q)$  неограниченно растет, то можно предположить, что  $\beta^*$  – внутренняя точка куба  $[\delta, 1]^q$ . Решая экстремальную задачу

$$\Psi_n(A_q) \xrightarrow{A_q} \min,$$

где  $\Psi_n(A_q)$  из (12), находим оптимальный набор параметров  $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_q^*)$ . Подставив его в (11), придем к утверждению теоремы 4.

Из теоремы 4 и (6) следует, что параметры аппроксимирующей рациональной функции (5) можно подобрать так, что для приближений

сопряженной функции (1) с плотностью  $f_\gamma(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  справедлива оценка

$$|\hat{f}_{f_\gamma} - \hat{\sigma}_{n,q}(f_\gamma, x)| \leq \frac{\sqrt{1-x^2} \mu(q, \gamma)}{(n+1)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}} + \delta_n^*, \quad n \rightarrow \infty,$$

где величина  $\mu(q, \gamma)$  определена в формулировке теоремы 4, а величина  $\delta_n^* \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и имеет заведомо больший порядок малости в сравнении с главным членом асимптотического выражения справа.

В теореме 4 положим значение  $q=1$ . Другими словами, аппроксимирующая функция имеет один полюс в открытой комплексной плоскости. В этом случае задача сводится к оптимизации по параметру  $\beta$  правой части асимптотического равенства в следствии 4. Отметим, что при  $\beta = \beta(n) \rightarrow 0$  первое слагаемое будет уменьшаться, в то время как второе будет увеличиваться. Принцип выбора оптимального параметра в этом случае сводится к поиску такого его значения, которое бы уравнивало оба слагаемых. Из (6) и теоремы 4 получим

$$|\hat{f}_{f_\gamma} - \hat{\sigma}_{n,1}(f_\gamma, x)| \leq \frac{\sqrt{1-x^2} \mu(1, \gamma)}{(n+1)^{\frac{2}{1+\gamma}(2\gamma-1)}} + \delta_n^*, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поскольку величина  $2/(1+\gamma) > 1$ , то полученная скорость приближений является большей в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом (см. следствие 3).

### 3. Суммы Абеля – Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва

Составим сумму:

$$\hat{P}_{r,q}(f, x) = (1-r) \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \hat{s}_{kq}(f, x), \quad x \in [-1, 1], r \in (0, 1), \quad (13)$$

где  $\hat{s}_{kq}(f, x)$  определена в (4). Выражение (13) естественно [38, с. 403] назвать суммами Абеля – Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева с  $q$  геометрически различными полюсами.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{r,q}(f, x) &= \hat{f}(x) - \hat{P}_{r,q}(f, x), \quad x \in [-1, 1], \\ \hat{\varepsilon}_{r,q}(f, A_q) &= \left\| \hat{f}(x) - \hat{P}_{r,q}(f, x) \right\|_{C[-1,1]}, \quad r \rightarrow 1. \end{aligned}$$

**Теорема 5.** Для приближений сопряженной функции (1) на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Абеля – Пуассона (13) имеет место интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}(f,x) = \frac{1-r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\cos \frac{v-u}{2} - r \cos \left( \frac{v-u}{2} - \lambda_q^*(v,u) \right)}{\sin \frac{v-u}{2} (1 - 2r \cos \lambda_q^*(v,u) + r^2)} dv, \quad x = \cos u,$$

где  $\lambda_q^*(v,u)$  указана в формулировке теоремы 1.

В теореме 5 положим значения всех параметров  $\alpha_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ . Тогда величина  $\hat{\varepsilon}_{r,0}(f,x) = \hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f,x)$  – приближения сопряженной функции (1) суммами Абеля – Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Отсюда получим

**Следствие 5.** *Имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f,x) = \frac{(1-r)^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{dv}{\operatorname{tg} \frac{v-u}{2} (1 - 2r \cos(v-u) + r^2)}, \quad x = \cos u.$$

Эта величина исследовалась, например, в [39].

Изучим приближения суммами Абеля – Пуассона (13) сопряжённой функции с плотностью  $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$ ,  $\gamma \in (1/2, 1)$ . Пусть параметры  $\{\alpha_k\}_{k=1}^q$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha_k \mapsto -\alpha_k, \quad \alpha_k \in [0, 1), \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

**Теорема 6.** *Для приближений сопряженной функции с плотностью  $f_\gamma(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Абеля – Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с  $q$  геометрически различными полюсами имеют место:*

1) *интегральное представление:*

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}(f_\gamma, x) = -\frac{2^{1-\gamma}(1-r)\sin \pi\gamma}{\pi} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} \sin \psi_r(x,t) dt}{\sqrt{1-2tx+t^2} \sqrt{1-2r\omega_q(t)M_q(x)+r^2\omega_q^2(t)}},$$

где

$$\psi_r(x,t) = \arg \frac{\xi}{1-t\xi} + \arg \frac{1}{1-r\omega_q(t)\omega_q(\xi)}, \quad \omega_q(t) = \prod_{k=1}^q \frac{t-\alpha_k}{1-\alpha_k t}, \quad \xi = e^{iu},$$

$M_q(x)$  – рациональная функция Чебышёва – Маркова порядка  $q$ , представление которой содержится в формулировке теоремы 2;

2) *поточечная оценка приближений*

$$|\hat{\varepsilon}_{r,q}(f_\gamma, x)| \leq \frac{2^{1-\gamma}(1-r)\sin \pi\gamma \sqrt{1-x^2}}{\pi} \times$$

$$\left[ \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} dt}{(1-2tx+t^2)\sqrt{1-2r\omega_q(t)M_q(x)+r^2\omega_q^2(t)}} + \lambda_q(u) \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} dt}{\sqrt{1-2tx+t^2} (1-2r\omega_q(t)M_q(x)+r^2\omega_q^2(t))} \right], \quad x = \cos u,$$

где  $\lambda_q(u)$  из (3);

3) равномерно по  $x \in [-1, 1]$  оценка

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}(f_\gamma, A_q) \leq \sqrt{1-x^2} \hat{\varepsilon}_{r,q}^*(f_\gamma, A_q), \quad r \in (0,1), \quad (14)$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}^*(f_\gamma, A_q) = \frac{2^{1-\gamma} (1-r) \sin \pi\gamma}{\pi} \times \left[ \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma-2} t^{-\gamma}}{1-r|\omega_q(t)|} dt + \sum_{k=1}^q \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma-1} t^{-\gamma}}{(1-r|\omega_q(t)|)^2} dt \right]. \quad (15)$$

В теореме 6 положим значения параметров  $\alpha_k = 0, k = 1, 2, \dots, q$ . Тогда  $\hat{\varepsilon}_{r,0}(f_\gamma, x) = \hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f_\gamma, x)$  есть приближения сопряженной функции с плотностью  $f_\gamma(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Абеля – Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. В этом случае из теоремы 6 получаем

**Следствие 6.** Для приближений сопряженной функции (1) с плотностью  $f_\gamma(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Абеля – Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва имеют место:

1) интегральное представление:

$$\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f_\gamma, x) = -\frac{2^{1-\gamma} (1-r) \sin \pi\gamma \sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} (1-rt^2) dt}{(1-2tx+t^2)(1-2rtx+r^2t^2)}, \quad x \in [-1, 1];$$

2) интегральное представление:

$$\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f_\gamma) = \frac{2^{1-\gamma} (1-r) \sin \pi\gamma}{\pi} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma-2} t^{-\gamma} (1-rt^2) dt}{(1-rt)^2}, \quad r \in (0,1).$$

Исследуем асимптотическое поведение величины (15) при  $r \rightarrow 1$ . Для решения поставленной задачи в правой части (15) выполним замену переменного по формуле  $t = (1-u)/(1+u)$ ,  $dt = -2du/(1+u)^2$ . Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}^*(f_\gamma, A_q) = \frac{2^\gamma (1-r) \sin \pi\gamma}{\pi} \left[ I_r^{(1)} + 2 \left( \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right) I_r^{(2)} \right], \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \quad (16)$$

где

$$I_r^{(1)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma (1-r|\chi_q(u)|)}, \quad I_r^{(2)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma (1-r|\chi_q(u)|)^2},$$

$$\chi_q(u) = \prod_{k=1}^n \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения  $r \in (0,1)$  может выбираться соответствующий набор параметров  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ . То есть, вообще говоря,  $\beta_k = \beta_k(r), k=1, \dots, q$ . В этом случае будем полагать, что параметры  $\beta_k, k=1, \dots, q$ , удовлетворяют следующим условиям

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\beta_k}{1-r} = \infty, \quad k=1, 2, \dots, q, \quad (17)$$

и учитывать их в дальнейших рассуждениях.

**Теорема 7.** Для величины  $\hat{\varepsilon}_{r,q}^*(f_\gamma)$  при  $r \rightarrow 1$  имеет место асимптотическое равенство

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}^*(f_\gamma, A_q) \sim \frac{2^\gamma (1-r) \sin \pi\gamma}{\pi} (\Psi_r(A_q) + \Phi_r(A_q)), \quad r \rightarrow 1, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_r(A_q) &= \frac{2\pi\gamma(1-r)^{2\gamma-2}}{|\sin 2\pi\gamma| \left(2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}} + \\ &+ 2 \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right) \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}\right)^2} + \\ &+ 2 \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right) \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}\right)^2}, \\ \Phi_r(A_q) &= \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}\right)} + \\ &+ \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}\right)}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 7 сводится к изучению асимптотического поведения интегралов  $I_r^{(1)}$  и  $I_r^{(2)}$  в (16) при  $r \rightarrow 1$ .

Положив в теореме 7 значения параметров  $\beta_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ , величина  $\varepsilon_{r,q}^*(f_\gamma, O) = \varepsilon_r^{(0)}(f_\gamma)$  есть мажоранта приближений сопряженной функции (1) с плотностью  $f_\gamma(x)$  суммами Абеля – Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. В этом случае получим

**Следствие 7.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f_\gamma) \sim \frac{2^{1-\gamma} \gamma (1-r)^{2\gamma-1}}{|\cos \pi \gamma|}, \quad r \rightarrow 1.$$

В теореме 7 положим значение  $q = 1$ . В этом случае аппроксимирующая функция имеет один полюс в открытой комплексной плоскости. Тогда

**Следствие 8.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{r,1}^*(f_\gamma, A_1) \sim & \frac{2^\gamma (1-r) \sin \pi \gamma}{\pi} \left[ \frac{2^{2-2\gamma} \pi \gamma (1-r)^{2\gamma-2} \beta^{2\gamma-1}}{|\sin 2\pi \gamma|} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\beta^3} \int_{\beta}^1 \frac{u^{2\gamma-2} (u+\beta)(u^2+u\beta(1+\beta)+\beta^2) du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} \right], \quad r \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (18) посредством выбора оптимального для этой задачи набора  $A_q^* = \{\alpha_1^*, \dots, \alpha_q^*\}$ . Найдем наилучшую оценку приближений сопряженной функции с плотностью  $f_\gamma(x)$  суммами Абеля – Пуассона (13). Положим

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}^*(f_\gamma) = \inf_{A_q} \hat{\varepsilon}_{r,q}^*(f_\gamma, A_q),$$

где  $\hat{\varepsilon}_{r,q}^*(f_\gamma, A_q)$  – асимптотическое выражение мажоранты приближений сопряженной функции с плотностью  $f_\gamma(x)$ , определенное в (18).

**Теорема 8.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}^*((1-x)^\gamma) \sim \mu(q, \gamma) (1-r)^{\gamma \left(1 - \frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right) (2\gamma-1)}, \quad r \rightarrow 1,$$

где

$$\mu(q, \gamma) = \frac{2^{1-\gamma} (1+\gamma)}{|\cos \pi \gamma| (1-\gamma)^{\frac{q-1+(2\gamma-1)(1-(1-\gamma)^{q-1})}{2\gamma} + \frac{2\gamma^2(1+\gamma)}{2\gamma^2(1+\gamma)}}} (2c_1(\gamma))^{\frac{2\gamma-1}{4\gamma(1+\gamma)}} \left( \frac{|\sin 2\pi \gamma|}{2^{4-2\gamma} \pi \gamma^2} \right)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}\right)},$$

величина  $c_1(\gamma)$  определена в теореме 4.

Доказательство теоремы 8 является практически аналогичным с доказательством теоремы 4. Укажем на некоторые отличия. Задача сводится к исследованию правой части асимптотического равенства (18). В этом случае будем полагать, что  $\beta_k = \beta_k(r) \rightarrow 0, r \rightarrow 1$ , с сохранением условия (17). Причем  $\beta_{k+1} = o(\beta_k), r \rightarrow 1$ . Тогда (18) приводится к виду

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}^*(f_\gamma, A_q) \sim \frac{2^\gamma (1-r) \sin \pi\gamma}{\pi\beta_q} \Psi_r(A_q), \quad r \rightarrow 1, \quad (20)$$

где

$$\Psi_r(A_q) = \frac{2^{2-2\gamma} \pi\gamma (1-r)^{2\gamma-2} \beta_q^{2\gamma}}{|\sin 2\pi\gamma|} + \frac{1}{4(1-\gamma)} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}} + \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2}.$$

Далее доказательство теоремы 8 сводится к решению экстремальной задачи

$$\Psi_r(A_q) \xrightarrow{A_q} \min.$$

Получив оптимальный набор  $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_q^*)$  и подставив его в (20), придем к утверждению теоремы 8.

Из теоремы 8 и оценки (14) следует, что параметры аппроксимирующей рациональной функции (13) можно подобрать так, что для приближений сопряженной функции (1) с плотностью  $(1-x)^\gamma, \gamma \in (1/2, 1)$ , на отрезке  $[-1, 1]$  будет справедлива оценка

$$|\hat{f}_{f_\gamma} - \hat{P}_{r,q}(f_\gamma, x)| \leq \sqrt{1-x^2} \mu(q, \gamma) (1-r)^{\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right) (2\gamma-1)} + \delta_r^*, \quad r \rightarrow 1,$$

где величина  $\mu(q, \gamma)$  определена в формулировке теоремы 8, а величина  $\delta_r^* \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 1$  и имеет заведомо больший порядок малости в сравнении с главным членом асимптотического выражения справа.

В теореме 8 положим значение  $q=1$ . То есть аппроксимирующая функция имеет один полюс в открытой комплексной плоскости. Другими словами, задача сводится к поиску параметра, оптимизирующего правую часть (19). Тогда

$$|\hat{f}_{f_\gamma} - \hat{P}_{r,1}(f_\gamma, x)| \leq \sqrt{1-x^2} \mu(1, \gamma) (1-r)^{\frac{2}{1+\gamma} (2\gamma-1)} + \delta_r^*, \quad r \rightarrow 1.$$

Поскольку величина  $2/(1+\gamma) > 1$ , то полученная скорость приближений является большей в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом (см. следствие 7).

Интересно сравнить порядки наилучших мажорант, найденные в теореме 4 и теореме 7. Они соответствующим образом совпадают. Последнее позволяет сделать вывод о некоторой степени близости между методами суммирования Фейера и Абеля – Пуассона и в рациональной аппроксимации.

**Заключение.** В работе исследованы рациональные аппроксимации сопряженной функции на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Фейера и Абеля – Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Для каждого метода аппроксимации установлены интегральные представления приближений.

Изучены рациональные аппроксимации сопряженной функции с плотностью  $(1-x)^\gamma$ ,  $\gamma \in (1/2, 1)$ , на отрезке  $[-1, 1]$  введенными суммами Фейера и Абеля – Пуассона. Для каждого из способов рациональной аппроксимации получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и в некотором смысле равномерных приближений с определенной мажорантой. Установлены асимптотические выражения этих мажорант, зависящие от параметров аппроксимирующих функций. В заключительной части для каждого метода найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты.

Следствием полученных результатов являются оценки приближений и асимптотическое выражение мажоранты приближений сопряженной функции на отрезке  $[-1, 1]$  суммами Фейера и Абеля – Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что для каждого исследуемого рационального аппарата приближений при специальном выборе параметров возможно добиться скорости приближений большей в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. Этот вывод справедлив уже в случае одного параметра аппроксимирующей функции.

### Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. 543 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М.: Наука, 1968. 513 с.
3. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматлит, 1961. 936 с.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.
5. Привалов И.И. Sur les fonctions conjuguées // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1916. Vol. 44. P. 100–103.
6. Привалов И.И. К теории сопряженных тригонометрических рядов // Математический сборник. 1923. № 2. С. 224–228.
7. Колмогоров А.Н. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier // Fundamenta Mathematicae. 1925. Vol. 7. P. 24–29.
8. Riesz M. Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1924. Vol. 178. P. 1464–1467.
9. Riesz M. Sur les fonctions conjuguées // Mathematische Zeitschrift. 1927. Vol. 27. P. 218–244.

10. Моторный В.П. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами // Украинский математический журнал. 2001. Т. 53(3). С. 331–345.
11. Моторный В.П. Приближение одного класса сингулярных интегралов алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке // Труды математического института имени В.А. Стеклова. 2001. Т. 232. С. 268–285.
12. Бари Н.К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Известия АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19(5). С. 285–302.
13. Стечкин С.Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами // Известия АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20(2). С. 197–206.
14. Мисюк В.Р., Пекарский А.А. Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений // Известия НАН Беларуси, Сер. физико-математических наук. 2015. № 2. С. 37–40.
15. Русак В.Н., Рыбаченко И.В. Равномерная рациональная аппроксимация сопряжённых функций // Вестник БГУ. Сер. 1. Математика и информатика. 2013. Т. 3. С. 83–86.
16. Mardvilko T.S., Pekarskii A.A. Conjugate Functions on the Closed Interval and Their Relationship with Uniform Rational and Piecewise Polynomial Approximations // Math. Notes. 2016. Vol. 99(3). P. 272–283.
17. Ровба Е.А., Поцейко П.Г. Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова // Известия вузов. Математика. 2020. № 9. С. 68–84.
18. Русак В.Н. Об одном методе приближения рациональными функциями // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1978. № 3. С. 15–20.
19. Ровба Е.А. Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестник БГУ. Сер. 1. Мат. и инф. 1996. Т. 1(1). С. 34–39.
20. Ровба Е.А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Доклады АН БССР. 1979. Т. 23(11). С. 968–971.
21. Поцейко П.Г., Ровба Е.А. Сопряженный рациональный оператор Фурье – Чебышева и его аппроксимационные свойства // Известия вузов. Математика. 2022. № 3. С. 44–60.
22. Никольский С.М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Труды математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1945. Т. 15. С. 3–76.
23. Alexits G. Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1952. Vol. 3(1–2). P. 29–42. doi:10.1007/bf02146066
24. Ефимов А.В. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера // Известия АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22(1). С. 81–116.
25. Ефимов А.В. Приближение сопряженных функций суммами Фейера // Успехи математических наук. 1959. Т. 14, № 1(85). С. 183–188.
26. Стечкин С.Б. О приближении периодических функций суммами Фейера // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 62. С. 48–60.
27. Поцейко П.Г., Ровба Е.А. О суммах Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье – Чебышёва и приближениях некоторых функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXII междунар. науч. конф. Смоленск, 2021. Вып. 22. С. 300–321.

28. Sz.-Nagy, B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1950. Vol. 1. P. 183–188.

29. Баскаков В.А. Асимптотические оценки приближения сопряженных функций сопряженными интегралами Абеля – Пуассона // Применение функционального анализа в теории приближений. Вып. 5. Калинин : Калининский гос. университет. 1975. С. 14–20.

30. Жигалло К.М., Харкевич Ю.И. Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Український математический журнал. 2002. Т. 54(1). С. 43–52.

31. Жигалло К.М., Харкевич Ю.И. Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля – Пуассона // Український математический журнал. 2009. Т. 61(1). С. 73–82.

32. Поцейко П.Г., Ровба Е.А. Суммы Абеля – Пуассона сопряженных рядов Фурье – Чебышёва и их аппроксимационные свойства // Известия НАН Беларуси. 2021. Т. 57(2). С. 156–175.

33. Харди Г.Г. Расходящиеся ряды: пер. с англ. М.: Ил, 1951. 545 с.

34. Лунгу К.Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Математический сборник. 1971. Т. 86(128), № 2(10). С. 314–324.

35. Лунгу К.Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 15(2). С. 151–160.

36. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.

37. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Гл. ред. Физ-мат лит-ры, 1987. 544 с.

38. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 810 с.

39. Фалалеев Л.П. Приближение сопряженных функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона // Математические заметки. 2000. Т. 67(4). С. 595–602.

**P.G. Patseika, Y.A. Rouba**

Yanka Kupala State University of Grodno

## **ON SOME METHODS OF RATIONAL APPROXIMATION OF A CONJUGATE FUNCTION ON A SEGMENT BASED ON INTEGRAL OPERATORS**

**Keywords:** *conjugate function, rational approximation, Fourier – Chebyshev series, Fejer sums, Abel – Poisson sums, function with power singularity, pointwise and uniform estimates, asymptotic estimates.*

**Abstract.** *Rational approximations of the conjugate function on the segment  $[-1, 1]$  by Fejér and Abel – Poisson sums of conjugate rational integral Fourier – Chebyshev operators with restrictions on the number of*

*geometrically different poles are investigated. In both cases, an integral representation of the corresponding approximations is established.*

*For a conjugate function with density  $(1-x)^\gamma$ ,  $\gamma \in (1/2, 1)$ , an integral representation of approximations, an estimate of pointwise and uniform approximations with a certain majorant by both methods are obtained. The asymptotic expression of this majorant, depending on the parameters of the approximating function, is established.*

*In the final part, optimal values of parameters for each of the rational approximation methods, at which the highest rate of decrease of the asymptotic expression of the majorant is provided, are found.*

*As a consequence, estimates of approximations of the conjugate function on the interval  $[-1, 1]$  by the Fejér and Abel – Poisson sums of conjugate polynomial Fourier – Chebyshev series are found.*

**А.В. Светлаков, Г.А. Банару**

*Смоленский государственный университет*

УДК 519.76+519.685.3

## **О СИНТАКСИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ LR(0)-ГРАММАТИК**

Ключевые слова: *КС-грамматика, LR-анализ, LR(0)-грамматика, LR-автомат, LR(0)-ситуация, управляющая таблица, перенос, свертка, состояние.*

*Работа посвящена LR(0)-грамматикам. Подробно описан алгоритм построения синтаксического анализатора для таких грамматик. Приведен пример LR(0)-грамматики, не поддающейся LL(1)-анализу.*

В теории трансляций для контекстно-свободных грамматик (КС-грамматик) наиболее часто применяются два вида синтаксических анализаторов: LL-анализатор и LR-анализатор. Описание LL(1)-анализатора можно найти в [2]. Названный анализатор является наиболее простым и интуитивно понятным, однако он имеет существенные ограничения, в связи с этим на практике наиболее часто применяется LR-анализатор. Кроме того, различные модификации LR-анализатора (например, GLR-парсер) способны справляться с неоднозначными грамматиками и именно по этой причине могут применяться для обработки текстов естественных языков.

В отличие от нисходящего по своей сути LL-анализа LR-анализ является восходящим – он осуществляет поиск пути от исходной цепочки до аксиомы грамматики.

В настоящей работе приводится подробное описание LR(0)-анализа, который является простейшим частным случаем LR-анализа и служит базой для всех типов LR-анализаторов.

Буква L в названии означает, что входящая цепочка будет считываться слева направо, буква R – что при построении вывода имитируется правосторонний вывод этой цепочки. Число 0 говорит о том, что анализатор не использует предварительный просмотр: поведение анализатора зависит только от уже прочитанной части цепочки.

**Определение.** Пополненной грамматикой  $G'$  к грамматике  $G$  называется грамматика с дополнительным правилом  $S_0 \rightarrow S$  таким, что  $S_0$  – аксиома в  $G'$ , которой нет в  $G$  ( $S_0 \notin N$ ).

**Определение.** КС-грамматика  $G$  называется LR(0)-грамматикой, если в ее пополненной грамматике  $G'$  для любых правосторонних выводов вида:  $S_0 \Rightarrow \delta A t \rightarrow \delta a t \Rightarrow w$  и  $S_0 \Rightarrow \gamma B x \rightarrow \delta a y \Rightarrow w'$ , следует, что  $\delta = \gamma$ ,  $A = B$  и  $y = x$ , где  $\delta, \alpha, \gamma, \beta \in (N \cup T)^*$ ,  $A, B \in N$ ,  $x, y \in T^*$  [3].

Неформально это определение означает, что, осуществляя свертку к аксиоме грамматики, мы на каждом этапе можем однозначно определить, в какой нетерминал сворачивается хвост выведенной основы, не заглядывая в правый контекст цепочки. Однако на практике довольно сложно выяснить, пользуясь определением, является ли рассматриваемая грамматика LR(0)-грамматикой, поэтому обычно применяется другой метод.

**Определение.** Пусть  $G$  – LR(0)-грамматика и  $A \rightarrow \omega_1 \omega_2$  – ее некоторое правило. Композиция вида  $[A \rightarrow \omega_1 \cdot \omega_2]$  называется LR(0)-ситуацией.

### **I. Построение LR-автомата и определение типа грамматики**

Изначально будем предполагать, что рассматриваемая грамматика является LR(0)-грамматикой. Построим для нее анализирующий автомат.

Состояниями автомата будут LR(0)-ситуации. Начальному (нулевому) состоянию будет соответствовать ситуация  $[S_0 \rightarrow \cdot S]$ .

Определим правила свертки: пусть имеется некоторое состояние автомата вида  $[A \rightarrow \alpha \cdot B \beta]$ , добавим следующее состояние  $[B \rightarrow \cdot \gamma]$ , связанное с предыдущим  $\epsilon$ -переходом в соответствии с правилами исходной грамматики.

Теперь определим правила переноса: автомат из состояния  $[A \rightarrow \alpha \cdot b\beta]$  переходит в состояние  $[A \rightarrow \alpha b \cdot \beta]$  по терминалу  $b$ , аналогично переход  $[A \rightarrow \alpha \cdot B\beta] \rightarrow [A \rightarrow \alpha B \cdot \beta]$  осуществляется по нетерминалу  $B$ .

Конечными состояниями автомата будут состояния с LR(0)-ситуациями вида  $[A \rightarrow \gamma \cdot]$ .

Из алгоритма видно, что мы построили  $\epsilon$ -НКА. Преобразуем его в ДКА нижеописанным способом.

Теперь состояниями автомата будут множества LR(0)-ситуаций. Каждое состояние, начиная с нулевого, объединяем с состояниями, в которые можно добраться только с помощью  $\epsilon$ -переходов, а множество ситуаций пополняется так: к множеству ситуаций, у которых стоит точка справа от нетерминала, добавляются ситуации, получаемые из правил, в левых частях которых находится этот нетерминал. Все переходы по символам остаются между объединенными состояниями автомата (причем, если вышло так, что один и тот же символ ведет к разным состояниям, то эти состояния объединяются с объединением множеств LR(0)-ситуаций). Таким образом, удаляются все  $\epsilon$ -переходы, и получается ДКА с одним или несколькими заключительными состояниями. Такой автомат называется LR-автоматом.

При построении автомата для произвольной грамматики на этом этапе могут возникнуть два особых случая.

*Случай 1.* В одном из состояний автомата окажется множество LR(0)-ситуаций, содержащее в себе хотя бы один элемент вида  $[A \rightarrow \alpha \cdot]$  и хотя бы один элемент вида  $[B \rightarrow \beta \cdot]$ . Такой случай называется «конфликт свертка-свертка».

*Случай 2.* В одном из состояний автомата окажется множество LR(0)-ситуаций, содержащее в себе хотя бы один элемент вида  $[A \rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2]$  и хотя бы один элемент вида  $[B \rightarrow \beta \cdot]$ . Такой случай называется «конфликт перенос-свертка».

**Критерий LR(0)-грамматики.** КС-грамматика является LR(0)-грамматикой тогда и только тогда, когда в соответствующем для ее пополненной грамматики LR-автомате отсутствуют конфликты свертка-свертка и конфликты перенос-свертка.

Именно этот критерий без больших затруднений на практике позволяет выяснить, является ли какая-либо грамматика грамматикой LR(0)-типа.

Итак, предполагая изначально, что интересующая нас грамматика является LR(0)-грамматикой, мы строим для нее LR-автомат. Если в построенном автомате окажется конфликт свертка-свертка или конфликт перенос-свертка, то сделанное предположение неверно, то есть данная грамматика не является LR(0)-грамматикой, и тогда

дальнейшие рассуждения к ней неприменимы. Если же в автомате конфликтов нет, то переходим ко второму этапу синтаксического анализа такой грамматики.

## II. Построение управляющей таблицы

Управляющая таблица анализатора состоит из двух подтаблиц, представляющих две функции:  $action(X,T)$  и  $goto(X,N)$ , где  $X$  – состояние LR-автомата,  $T$  – терминальный символ,  $N$  – нетерминал. Строки управляющей таблицы – это состояния LR-автомата, а столбцы представляют собой все терминальные символы (дополнительно включая символ конца цепочки  $\$$ ) для функции  $action(X,T)$  и нетерминалы для функции  $goto(X,N)$ . Функция действия содержит различные инструкции для анализатора, а именно:  $action(X,T) \rightarrow \{sX, rn, err, ok\}$ , где  $sX$  – перенос терминала  $T$  и переход в состояние  $X$ ,  $rn$  – свертка по  $n$ -правилу грамматики,  $err$  – ошибка,  $ok$  – завершено. Функция переходов содержит ссылки на состояния автомата в зависимости от текущего состояния и нетерминала:  $goto(X,N) \rightarrow \{X\}$ .

На основе LR-автомата заполним управляющую таблицу следующим образом:

а) для каждого перехода из состояния  $X_i$  в состояние  $X_j$  по терминалу  $T$  поместим в таблицу по адресу  $action(X_i, T)$  инструкцию  $sX_j$ ;

б) для каждого перехода из состояния  $X_i$  в состояние  $X_j$  по нетерминалу  $N$  поместим в таблицу по адресу  $goto(X_i, N)$  переход  $X_j$ ;

в) для каждого состояния  $X_i$ , содержащего LR(0)-ситуацию  $[A \rightarrow \alpha \cdot]$ , кроме  $[S_0 \rightarrow S \cdot]$ , поместим в таблицу по адресу  $action(X_i, T)$  для каждого терминала  $T$  (и  $\$$ ) инструкцию  $rn$ , где  $n$  – номер правила  $A \rightarrow \alpha$ . Инструкцию  $ok$  поместим по адресу  $action(\{[S_0 \rightarrow S \cdot]\}, \$)$ ;

г) пустая ячейка – это инструкция  $err$ .

Таким образом, управляющая таблица окажется построенной. Очевидно, что каждая клетка таблицы будет содержать какую-либо единственную инструкцию или переход.

## III. Алгоритм синтаксического анализа

Теперь, имея управляющую таблицу, можно провести синтаксический анализ произвольной цепочки для указанной LR(0)-грамматики.

Анализатор содержит стек, в который записывается строка следующего вида:  $X_0 Y_0 X_1 X_2 \dots X_n Y_n$ , где  $X_i$  – состояние автомата,  $Y_i$  – символ (терминал или нетерминал грамматики). Для удобства

пронумеруем состояния LR-автомата, начиная с нулевого. Изначально в стеке находится строка «0».

Каждый такт своей работы анализатор считывает символ из входной цепочки и обращается к управляющей таблице к ячейке  $action(X_i, T)$ , здесь  $X_i$  – состояние на вершине стека,  $T$  – текущий входной символ.

Если в ячейке находится инструкция *err*, то анализатор останавливает работу с выводом ошибки (возможно, с номером позиции символа), так как это означает, что указанная цепочка не порождается исходной грамматикой.

Если в ячейке находится инструкция *ok*, то анализатор успешно завершает работу и цепочка принадлежит грамматике.

Если в ячейке находится инструкция *s*  $X_j$ , то происходит *перенос* считываемого символа в стек, также в стек заносится состояние  $X_j$  и анализатор переходит к следующему такту.

Если в ячейке находится инструкция *r*  $n$ , то происходит *свертка*: анализатор извлекает из стека все символы, находящиеся в правой части правила грамматики с номером  $n$ , включая номера состояний автомата, добавляет в стек нетерминал левой части, затем обращается к управляющей таблице к ячейке  $goto(X_i, N)$ , где  $X_i$  – состояние, оставшееся на вершине стека до занесения в него нетерминала,  $N$  – занесенный нетерминал. Найденное в ячейке  $X_j$  состояние заносится в стек и анализатор переходит к следующему такту.

Таким образом, анализатор прочитает всю цепочку и ответит на вопрос, принадлежит ли эта цепочка данной LR(0)-грамматике. Этот метод синтаксического анализа называется методом свертки-переноса, и он одинаков для всех видов LR-анализа [1].

Рассмотрим пример синтаксического анализа LR(0)-грамматик.

Пополненная грамматика  $G'$  имеет вид:  $S_0 \rightarrow S$ ,  $S \rightarrow aSb$ ,  $S \rightarrow bBc$ ,  $B \rightarrow Bb$ ,  $B \rightarrow cC$ ,  $B \rightarrow b$ ,  $C \rightarrow dC$ ,  $C \rightarrow da$ . Определим, является ли  $G$  LR(0)-грамматикой. Если да, то построим для нее LR-автомат и управляющую таблицу.

Предположим, что данная грамматика является LR(0)-грамматикой. Построим для нее  $\epsilon$ -НКА (рис. 1).

Преобразуем его в LR-автомат согласно алгоритму из пункта 1, для удобства пронумеровав состояния и правила грамматики (рис. 2).

Из рисунка 2 видно, что LR-автомат не содержит конфликтов свертка-свертка или перенос-свертка, значит, по критерию, данная грамматика является LR(0)-грамматикой. Тогда для нее можно построить управляющую таблицу (для наглядности состояния отмечены в ней красными числами).

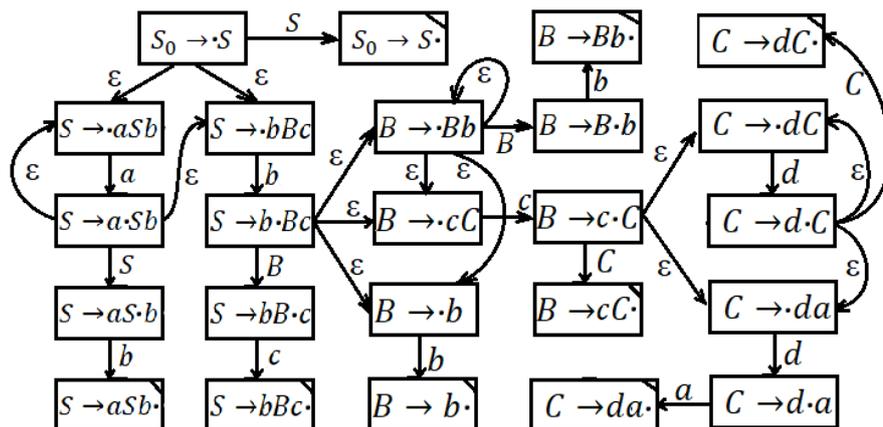


Рис. 1.  $\epsilon$ -НКА для грамматики

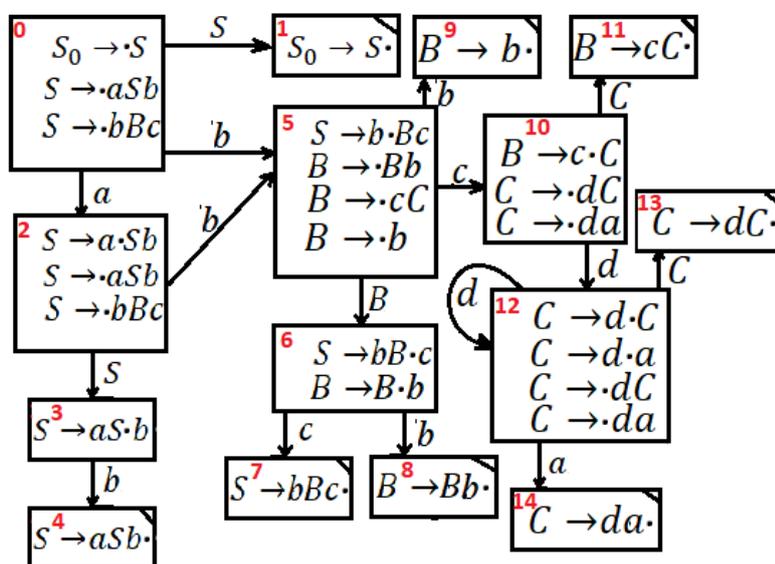


Рис. 2. LR-автомат

Таблица 1

**Управляющая таблица**

|    | Action |     |      |      |     | Goto |   |    |
|----|--------|-----|------|------|-----|------|---|----|
|    | a      | b   | c    | d    | \$  | S    | B | C  |
| 0  | s 2    | s 5 |      |      |     | 1    |   |    |
| 1  |        |     |      |      | ok  |      |   |    |
| 2  |        | s 5 |      |      |     | 3    |   |    |
| 3  |        | s 4 |      |      |     |      |   |    |
| 4  | r 1    | r 1 | r 1  | r 1  | r 1 |      |   |    |
| 5  |        | s 9 | s 10 |      |     |      | 6 |    |
| 6  |        | s 8 | s 7  |      |     |      |   |    |
| 7  | r 2    | r 2 | r 2  | r 2  | r 2 |      |   |    |
| 8  | r 3    | r 3 | r 3  | r 3  | r 3 |      |   |    |
| 9  | r 5    | r 5 | r 5  | r 5  | r 5 |      |   |    |
| 10 |        |     |      | s 12 |     |      |   | 11 |
| 11 | r 4    | r 4 | r 4  | r 4  | r 4 |      |   |    |

|    |      |     |     |      |     |  |  |    |
|----|------|-----|-----|------|-----|--|--|----|
| 12 | s 14 |     |     | s 12 |     |  |  | 13 |
| 13 | r 6  | r 6 | r 6 | r 6  | r 6 |  |  |    |
| 14 | r 7  | r 7 | r 7 | r 7  | r 7 |  |  |    |

В качестве примера рассмотрим этапы работы синтаксического анализатора (п. 3) для цепочки *abccb*. Оформи́м их в виде таблицы.

Таблица 2

### Работа LR(0)-анализатора

| Стек      | Цепочка              | Функция               | Комментарий                                     |
|-----------|----------------------|-----------------------|-------------------------------------------------|
| 0         | <i>abccb</i> \$      | $action(0,a) = s\ 2$  | Перенос в стек <i>a</i> , переход в состояние 2 |
| 0a2       | <i>bbcb</i> \$       | $action(2,b) = s\ 5$  | Перенос в стек <i>b</i> , переход в состояние 5 |
| 0a2b5     | <i>bc<b>b</b></i> \$ | $action(5,b) = s\ 9$  | Перенос в стек <i>b</i> , переход в состояние 9 |
| 0a2b5b9   | <i>cb</i> \$         | $action(9,c) = r\ 5$  | Свертка по правилу 5: $B \rightarrow b$         |
| 0a2b5B    | <i>cb</i> \$         | $goto(5,B) = 6$       | Переход в состояние 6                           |
| 0a2b5B6   | <i>cb</i> \$         | $action(6,c) = s\ 7$  | Перенос в стек <i>c</i> , переход в состояние 7 |
| 0a2b5B6c7 | <i>b</i> \$          | $action(7,b) = r\ 2$  | Свертка по правилу 2: $S \rightarrow bBc$       |
| 0a2S      | <i>b</i> \$          | $goto(2,S) = 3$       | Переход в состояние 3                           |
| 0a2S3     | <i>b</i> \$          | $action(3,b) = s\ 4$  | Перенос в стек <i>b</i> , переход в состояние 4 |
| 0a2S3b4   | \$                   | $action(4,\$) = r\ 1$ | Свертка по правилу 1: $S \rightarrow aSb$       |
| 0S        | \$                   | $goto(0,S) = 1$       | Переход в состояние 1                           |
| 0S1       | \$                   | $action(1,\$) = ok$   | Анализ успешно завершен                         |

Таким образом, цепочка *abccb* порождается исходной грамматикой.

В заключение отметим, что эта грамматика не является LL(1)-грамматикой, так как в ней присутствуют левая рекурсия и правое ветвление [2; 3], поэтому она не поддается нисходящему анализу. Однако названные особенности грамматики не вызвали проблем при ее LR(0)-анализе. Отметим, что усовершенствованные способы LR-анализа, основанные на рассмотренном в нашей работе методе свертки-переноса, покрывают большую часть практических потребностей при анализе искусственных языков и, более того, позволяют анализировать гораздо более сложные объекты – языки естественные.

### Литература

1. Замятин А.П., Шур А.М. Языки, грамматики, распознаватели: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2007. 248 с.
2. Козлов С.В., Светлаков А.В., О LL(1)-грамматиках, алгоритмах на них и методах их анализа в программировании // International Journal of Open Information Technologies. 2022. Т. 10, № 3. С. 30-38.
3. Мартыненко Б.К. Языки и трансляции: учеб. пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2013. 265 с.

**A.V. Svetlakov, G.A. Banaru**  
Smolensk State University

## ON SYNTACTICAL ANALYSIS OF LR(0)-GRAMMARS

**Keywords:** *CF-grammar, LR-analysis, LR(0)-grammar, LR-automaton, LR(0)-situation, control table, transfer, convolution, state.*

**Abstract.** *This paper deals with LR(0)-grammars. The way to build a parser for such grammars is described in detail. An example of LR(0)-grammars not amenable to LL(1)-parsing is presented.*

**В.Н. Сорокина, М.М. Сорокина**  
Брянский государственный университет  
им. академика И.Г. Петровского

УДК 512.542

## СВОЙСТВА $\omega$ -ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Ключевые слова: *группа, конечная группа, класс групп, формация групп, F-корадикал группы.*

*Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. В работе для непустого множества  $\omega$  простых чисел определены  $\omega$ -формации – классы групп, являющиеся естественным обобщением формаций групп. Установлены ключевые свойства  $\omega$ -формаций.*

### 1. Постановка задачи

Теория классов конечных групп является одним из интенсивно развивающихся направлений современной алгебры (см., напр., [1, 7, 8]). Классом групп называется совокупность групп, содержащая с каждой группой все группы, ей изоморфные ([6], определение 1.1). Среди классов конечных групп центральное место занимают формации – классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений ([6], определение 1.2). Формациями являются такие известные классы, как класс всех конечных разрешимых групп, класс всех конечных нильпотентных групп, класс всех конечных абелевых групп и др.

В настоящее время наиболее изученными типами формаций конечных групп являются локальные формации (см., например, [4, 6]).

Понятие  $\omega$ -локальной формации, где  $\omega$  – непустое множество простых чисел, введенное в рассмотрение Л.А. Шеметковым в 1984 году, является естественным обобщением понятия локальной формации, а именно, всякая локальная формация является  $\omega$ -локальной для любого множества  $\omega$  [5]. Важные результаты о локальных и  $\omega$ -локальных формациях получены Л.А. Шеметковым, А.Н. Скибой, В.С. Монаховым, А.Ф. Васильевым, С.Ф. Каморниковым, В.Н. Семенчуком и их учениками, многими другими алгебраистами (см., например, [2, 4]). Изучение  $\omega$ -локальных формаций привело к идее введения в рассмотрение новых видов классов групп, связанных с множеством  $\omega$  (см., например, [5]). В настоящей работе рассматриваются классы конечных групп, называемые  $\omega$ -формациями. В теоремах 1 – 3 установлены их ключевые свойства.

## 2. Предварительные сведения

Рассматриваются только конечные группы. В доказательствах теорем применяются классические методы теории групп, а также методы теории классов групп.

Используемые обозначения и определения для групп и классов групп стандартны. Приведем лишь некоторые из них.

Пусть  $\omega$  – непустое множество простых чисел. Натуральное число  $n$  называется  $\omega$ -числом, если  $n$  делится только на простые числа из  $\omega$ . Группа  $G$  называется  $\omega$ -группой, если порядок группы  $G$  является  $\omega$ -числом. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\omega$ -подгруппой группы  $G$ , если  $H$  является  $\omega$ -группой.

**Определение 1.** Следуя [6], класс групп  $F$  назовём  $\omega$ -формацией, если выполняются следующие два условия:

- 1) из того, что  $G \in F$  и  $N$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ , следует, что  $G/N \in F$ ;
- 2) из того, что  $G/N_1 \in F$ ,  $G/N_2 \in F$ , где  $N_1$  и  $N_2$  – нормальные  $\omega$ -подгруппы группы  $G$ , следует, что  $G/(N_1 \cap N_2) \in F$ .

**Замечание 1.** Всякая формация групп является  $\omega$ -формацией, для любого множества  $\omega$ . В случае, когда  $\omega$  – множество всех простых чисел, понятие  $\omega$ -формации групп совпадает с понятием формации.

**Определение 2.** Пусть  $F$  – непустая формация групп,  $G$  – группа. Следуя [6],  $F^\omega$ -корадикалом группы  $G$  назовём пересечение всех нормальных  $\omega$ -подгрупп группы  $G$ , фактор-группы по которым принадлежат  $F$ , и обозначим  $G^{F^\omega}$ .

**Замечание 2.** Пусть  $F$  – непустая  $\omega$ -формация,  $G$  – группа. Тогда  $F^\omega$ -корадикал группы  $G$  является наименьшей нормальной  $\omega$ -подгруппой группы  $G$ , фактор-группа по которой принадлежит  $F$ , то есть подгруппа  $G^{F^\omega}$  удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1)  $G^{F^\omega}$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ ;

$$2) G / G^{F^\omega} \in F;$$

3)  $G^{F^\omega}$  – наименьшая подгруппа группы  $G$ , удовлетворяющая условиям 1) и 2).

**Замечание 3.**  $F$ - корадикал любой группы содержится в ее  $F^\omega$ - корадикале, для любого множества  $\omega$ . В случае, когда  $\omega$  – множество всех простых чисел, понятие  $F^\omega$ - корадикала группы совпадает с понятием  $F$ - корадикала группы.

### 3. Основные результаты

**Теорема 1.** Пересечение любой совокупности  $\omega$ -формаций является  $\omega$ -формацией.

**Доказательство.** Пусть  $\{F_i | i \in I\}$  – некоторая совокупность  $\omega$ -формаций и  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ . Покажем, что  $F$  является  $\omega$ -формацией. Если  $F_j = \emptyset$  для некоторого  $j \in I$ , то  $F = \emptyset$  –  $\omega$ -формация. Пусть  $F_i \neq \emptyset$  для любого  $i \in I$ .

Проверим, что класс  $F$  удовлетворяет условию 1) из определения 1. Пусть  $G \in F$  и  $N$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ . Тогда  $G \in F_i$  для любого  $i \in I$ . Поскольку класс  $F_i$  является  $\omega$ -формацией, то по определению 1  $G/N \in F_i$  для любого  $i \in I$  и поэтому  $G/N \in \bigcap_{i \in I} F_i$ . Таким образом,  $G/N \in F$ .

Проверим, что класс  $F$  удовлетворяет условию 2) из определения 1. Пусть  $G/N_1 \in F$ ,  $G/N_2 \in F$ , где  $N_1$  и  $N_2$  – нормальные  $\omega$ -подгруппы группы  $G$ . Тогда  $G/N_1 \in F_i$  и  $G/N_2 \in F_i$ , для любого  $i \in I$ . Поскольку класс  $F_i$  является  $\omega$ -формацией, то по определению 1  $G/(N_1 \cap N_2) \in F_i$  для любого  $i \in I$  и поэтому  $G/(N_1 \cap N_2) \in \bigcap_{i \in I} F_i$ . Таким образом,  $G/(N_1 \cap N_2) \in F$ .

Тем самым установлено, что класс  $F$  является  $\omega$ -формацией. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $F$  – непустая  $\omega$ -формация,  $G$  – группа. Тогда  $G \in F$  в том и только в том случае, когда  $G^{F^\omega} = 1$ .

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть  $G \in F$ . Покажем, что  $G^{F^\omega} = 1$ . Так как  $G \cong G/1$ ,  $G \in F$  и  $F$  – класс групп, то по определению класса групп имеет место  $G/1 \in F$ . Поскольку 1 – нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ ,  $G/1 \in F$  и 1 – наименьшая из всех подгрупп группы  $G$ , то, согласно замечанию 2,  $G^{F^\omega} = 1$ .

*Достаточность.* Пусть  $G^{F^\omega} = 1$ . Докажем, что  $G \in F$ . Так как  $G^{F^\omega} = 1$  и по замечанию 2  $G/G^{F^\omega} \in F$ , то  $G/1 \in F$ . Поскольку  $G \cong G/1$ , то по определению класса групп  $G \in F$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $G$  – группа,  $F$  – непустая  $\omega$ -форма,  $K$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ . Тогда  $(G/K)^{F^\omega} = G^{F^\omega}K/K$ .

**Доказательство.** Докажем равенство  $(G/K)^{F^\omega} = G^{F^\omega}K/K$  методом встречных включений. Обозначим  $(G/K)^{F^\omega}$  через  $N/K$ , то есть полагаем, что

$$(G/K)^{F^\omega} = N/K. \quad (1)$$

1) Покажем, что  $G^{F^\omega}K/K \subseteq N/K$ . Для этого предварительно установим, что  $G^{F^\omega} \subseteq N$ . Ввиду замечания 2, достаточно проверить, что:

а)  $N$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ ; б)  $G/N \in F$ .  
 а) Докажем, что  $N$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G$ . По замечанию 2,  $(G/K)^{F^\omega}$  – нормальная подгруппа группы  $G/K$ , то есть  $N/K$  – нормальная подгруппа в  $G/K$ . Отсюда по теореме о соответствии получаем, что  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ .

Покажем, что  $|N|$  –  $\omega$ -число. Действительно, так как по замечанию 2  $|N/K|$  –  $\omega$ -число и по условию теоремы  $|K|$  –  $\omega$ -число, то, ввиду теоремы Лагранжа,  $|N|$  также является  $\omega$ -числом.

Таким образом,  $N$  является нормальной  $\omega$ -подгруппой группы  $G$ .

б) Установим, что  $G/N \in F$ . По теореме о гомоморфизмах

$$G/N \cong (G/K)/(N/K). \quad (2)$$

Ввиду (1), по замечанию 2, справедливо

$$(G/K)/(N/K) \in F. \quad (3)$$

Так как  $F$  – класс групп, то из (2) и (3) следует, что  $G/N \in F$ .

Из а) и б) по замечанию 2 получаем, что  $G^{F^\omega} \subseteq N$ . Отсюда по теореме о соответствии приходим к выводу, что  $G^{F^\omega}K/K \subseteq N/K$ .

2) Докажем, что  $N/K \subseteq G^{F^\omega}K/K$ . Исходя из (1), ввиду замечания 2, достаточно проверить, что: а)  $G^{F^\omega}K/K$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G/K$ ; б)  $(G/K)/(G^{F^\omega}K/K) \in F$ .

а) Покажем, что  $G^{F^\omega}K/K$  – нормальная  $\omega$ -подгруппа группы  $G/K$ . Действительно, по замечанию 2 подгруппа  $G^{F^\omega}$  является нормальной  $\omega$ -подгруппой группы  $G$ . Отсюда по теореме о соответствии следует, что подгруппа  $G^{F^\omega}K/K$  является нормальной в  $G/K$ .

Покажем, что  $|G^{F^\omega}K/K|$  –  $\omega$ -число. Действительно, так как по замечанию 2  $|G^{F^\omega}|$  –  $\omega$ -число и по теореме Лагранжа

$$|G^{F^\omega}K/K| = \frac{|G^{F^\omega}K|}{|K|} = \frac{|G^{F^\omega}| \cdot |K|}{|K| \cdot |G^{F^\omega} \cap K|} = \frac{|G^{F^\omega}|}{|G^{F^\omega} \cap K|},$$

то  $|G^{F^\omega}K/K|$  также является  $\omega$ -числом.

б) Покажем, что  $(G/K)/(G^{F^\omega}K/K) \in F$ . По теореме о гомоморфизмах справедливы следующие соотношения:

$$(G/K)/(G^{F^\omega}K/K) \cong G/G^{F^\omega}K, \quad (4)$$

$$G/G^{F^\omega}K \cong (G/G^{F^\omega})/(G^{F^\omega}K/G^{F^\omega}). \quad (5)$$

Согласно замечанию 2,  $G/G^{F^\omega} \in F$ . Так как  $F$  –  $\omega$ -формация, то по определению 1 имеем:

$$(G/G^{F^\omega})/(G^{F^\omega}K/G^{F^\omega}) \in F. \quad (6)$$

Поскольку  $F$  – класс групп, то из (4), (5) и (6) по определению класса групп получаем  $(G/K)/(G^{F^\omega}K/K) \in F$ .

Из а) и б) по замечанию 2 приходим к выводу, что  $N/K \subseteq G^{F^\omega}K/K$ .

Из 1) и 2) следует равенство  $N/K = G^{F^\omega}K/K$ . Таким образом, с учетом (1), заключаем, что  $(G/K)^{F^\omega} = G^{F^\omega}K/K$ . Теорема доказана.

В случае, когда  $\omega$  совпадает с множеством всех простых чисел, из теорем 1 – 3 вытекают следующие известные свойства формаций групп.

**Следствие 1** ([6], лемма 1.1 (1)). *Пересечение любой совокупности формаций является формацией.*

**Следствие 2** ([3], лемма 5.7 (4)). *Пусть  $F$  – непустая формация,  $G$  – группа. Тогда  $G \in F$  в том и только том случае, когда  $G^F = 1$ .*

**Следствие 3** ([6], лемма 1.2 (1)). *Пусть  $G$  – группа,  $F$  – формация,  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Тогда  $(G/K)^F = G^F K/K$ .*

## Литература

1. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп. Смоленск: Смоленская городская типография, 1988. 96 с.
2. Воробьев Н.Н. Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. 322 с.
3. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Высшая школа, 2006. 207 с.
4. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.
5. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114-147.
6. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
7. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
8. Guo W. The Theory of Classes of Groups. Beijing – New York: Science Press, 2000. 258 p.

**V.N. Sorokina, M.M. Sorokina**

Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky

**PROPERTIES OF  $\omega$ -FORMATIONS OF FINITE GROUPS**

**Keywords:** *group, finite group, class of groups, formation of groups,  $F$ -coradical of a group.*

**Abstract.** *Only finite groups and classes of finite groups are considered. A formation is a class of groups that is closed under homomorphic images and subdirect products. In this article for a non-empty set  $\omega$  of primes,  $\omega$ -formations are defined, which are classes of groups that are a natural generalization of formations of groups. The basic properties of  $\omega$ -formations are established.*

**И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, Е.Д. Писаренкова**  
*МГУ имени М.В. Ломоносова, МПГУ*

УДК 517.518.82+517.986.7+517.983

## **ПОЛИНОМЫ ЭЙЛЕРА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Ключевые слова: *полиномы Эйлера, числа Эйлера, неклассические задачи математической физики, нелокальные задачи, эволюционные уравнения.*

*Излагаются основные сведения о полиномах Эйлера. Показано, что эти полиномы находят применение при решении нелокальных задач для эволюционных дифференциальных уравнений, когда вместо обычного условия Коши рассматривается усреднение значений искомой функции в начальный и финальный моменты времени. Для подобных задач указана явная разрешающая формула, выражающая ответ в виде ряда по полиномам Эйлера. Обсуждаются условия применимости данной формулы, приводятся примеры конкретных нелокальных задач для уравнения теплопроводности. Наши результаты могут быть полезны при разработке новых численных методов.*

В настоящей работе продолжим исследование, начатое в [1], где были указаны применения полиномов Бернулли в теории современных неклассических задач математической физики. Сейчас мы рассмотрим аналогичный вопрос для полиномов Эйлера. Напомним, что эти последние тесно связаны с так называемыми числами Эйлера, введенными в [2] для вычисления некоторых специальных сумм и записи тейлоровского разложения трансцендентной функции  $\sec z$ .

Возможно, впервые сами полиномы Эйлера  $E_n(t)$  были определены Нёрлундом (см. [3]) как решения системы разностных уравнений

$$\frac{E_n(t) + E_n(t+1)}{2} = t^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1)$$

Следует иметь в виду, что существует несколько различных систем эйлеровых полиномов и эйлеровых чисел (см. [4; 5]), и предварительно всегда важно уточнить, о каких именно объектах идет речь. Мы будем использовать наиболее известный вариант – как в справочниках [6; 7]. Подробное изложение теории «наших» полиномов Эйлера вместе с их естественными обобщениями можно найти в [3; 8]. Отметим также обновляемый сайт <https://dlmf.nist.gov/> с электронной энциклопедией в духе [7], куда можно обратиться за дополнительной информацией о полиномах Эйлера. Напомним основные нужные нам сведения.

Определим полиномы Эйлера при помощи производящей функции

$$\frac{2}{1+e^\lambda} e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(t)}{n!} \lambda^n. \quad (2)$$

Здесь  $t \in \mathbb{R}$  и  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Разложение (2) по степеням  $\lambda$  сходится при  $|\lambda| < \pi$ . Коэффициенты  $E_n(t)$  и называются *полиномами Эйлера* – они представляют собой обычные полиномы степени  $n$ . Точнее,  $\deg E_n(t) = n$  для любого  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Справедливо представление

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{E_k}{2^k} \left(t - \frac{1}{2}\right)^{n-k}, \quad (3)$$

где  $C_n^k$  – обычные биномиальные коэффициенты, а  $E_n = 2^n E_n(1/2) \in \mathbb{Z}$  суть *числа Эйлера*. Впервые подобные целые числа встречались у Эйлера (см. [2, с. 364–366]) в выражениях сумм вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2m+1}} = \frac{|E_{2m}|}{(2m)!} \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}}, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

а также в качестве коэффициентов в разложении

$$\sec z \equiv \frac{1}{\cos z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k)!} z^{2k}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что числа  $E_n$  с нечетными индексами равны нулю, а остальные знакопереваются:

$$E_{2k+1} = 0, \quad E_{4k} > 0, \quad E_{4k+2} < 0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (4)$$

Приведем для справки несколько первых значимых чисел Эйлера:

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385, \quad E_{10} = -50521$$

(ср. со знаками в формуле (4)). Множество фактов про числа и полиномы Эйлера представлено в [6–8].

Особо выделим *свойство Анпеля*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E_n(t)}{n!} \right) = \frac{E_{n-1}(t)}{(n-1)!} \quad (5)$$

и свойство нулевого среднего

$$\frac{E_n(0) + E_n(1)}{2} = 0. \quad (6)$$

Формулы (5), (6) действуют при всех  $n \in \mathbb{N}$ . При  $n = 0$  имеем

$$\frac{dE_0(t)}{dt} \equiv 0, \quad \frac{E_0(0) + E_0(1)}{2} = 1. \quad (7)$$

Понятно, что в формуле (6) знаменатель можно без ущерба сократить, но он дает связь с общим законом (1) и удобен нам для дальнейшего.

Несколько первых полиномов Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} E_0(t) &\equiv 1, & E_1(t) &= t - \frac{1}{2}, & E_2(t) &= t^2 - t, & E_3(t) &= t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{4}, \\ E_4(t) &= t^4 - 2t^3 + t, & E_5(t) &= t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{2}, & E_6(t) &= t^6 - 3t^5 + 5t^3 - 3t, \\ E_7(t) &= t^7 - \frac{7}{2}t^6 + \frac{35}{4}t^4 - \frac{21}{2}t^2 + \frac{17}{8}, & E_8(t) &= t^8 - 4t^7 + 14t^5 - 28t^3 + 17t. \end{aligned}$$

Общая формула весьма нетривиальна

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k E_k(0) t^{n-k} = -2 \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1} - 1}{k+1} C_n^k B_{k+1} t^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (8)$$

и связана со значениями

$$E_n(0) = -\frac{2(2^{n+1} - 1)}{n+1} B_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (9)$$

Здесь  $B_n$  – стандартные числа Бернулли (см. [6; 7]). Интересно, что само представление (8) нам не удалось обнаружить в других источниках, хотя формула (9) есть в справочнике [7].

Следует иметь в виду, что числа  $B_n = B_n(0)$  соответствуют значениям полиномов Бернулли  $B_n(t)$  в нуле, а числа Эйлера  $E_n = 2^n E_n(1/2)$  связаны со значениями полиномов Эйлера  $E_n(t)$  в точке  $t = 1/2$  – середине основного отрезка  $[0, 1]$  (см. также (3)). Напомним, что  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -1/2$ , а далее

$$B_{2k+1} = 0, \quad B_{4k-2} > 0, \quad B_{4k} < 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

причем все числа  $B_{2m}$  (кроме  $B_0 = 1$ ) являются рациональными дробями со сложно устроенными знаменателями, вычисляемыми по теореме Штаудта (см. [3; 9]). Напротив, числа Эйлера  $E_{2m}$  – всегда целые с асимптотической формулой

$$(-1)^m E_{2m} \sim 8 \sqrt{\frac{m}{\pi}} \left( \frac{4m}{\pi e} \right)^{2m}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Она напоминает асимптотический закон для чисел Бернулли

$$(-1)^{m+1} B_{2m} \sim 4\sqrt{m\pi} \left(\frac{m}{\pi e}\right)^{2m}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (12)$$

В обоих выражениях (11) и (12) встречается редкое сочетание  $\pi e$  в виде произведения двух классических трансцендентных констант  $\pi$  и  $e$ .

Покажем, что полиномы Эйлера представляют интерес для современной математической физики. Изложим сначала общую схему на языке абстрактных дифференциальных уравнений в духе [10; 11].

В банаховом пространстве  $E$  рассмотрим нелокальную задачу для эволюционного уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \frac{u(0) + u(1)}{2} = \varphi. \quad (13)$$

Здесь  $A$  – линейный оператор в  $E$  с областью определения  $D(A) \subset E$ . Элемент  $\varphi$  задан в  $D(A^\infty)$ . Поставленное условие означает, что вместо привычных данных Коши мы знаем усреднение значений неизвестной функции  $u(t)$  в начальный и финальный моменты времени.

С физической точки зрения указанная задача весьма естественна. Переменную  $t$ , имеющую смысл «времени», считаем изменяющейся на отрезке  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

Нетрудно проверить, что ряд

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(t)}{n!} A^n \varphi = \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(t)}{n!} A^n \varphi \quad (14)$$

на основании свойств (5)–(7) формально удовлетворяет задаче (13).

Возникает вопрос о том, когда формальное разложение (14) сходится по норме пространства  $E$ , определяя истинное решение задачи (13). Перечислим несколько типичных возможностей.

1. Оператор  $A$  линейный в  $E$ , элемент  $\varphi$  принадлежит  $\text{Ker } A^m$  при некотором натуральном  $m$ . Тогда ряд (14) перейдет в конечную сумму

$$u(t) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{E_n(t)}{n!} A^n \varphi, \quad (15)$$

тождественно удовлетворяющую задаче (13).

2. Оператор  $A$  линейный ограниченный в  $E$ , причем

$$\|A\| < \pi. \quad (16)$$

Элемент  $\varphi$  – произвольный вектор из  $E \equiv D(A^\infty)$ .

3. Оператор  $A$  линейный ограниченный в  $E$ , причем его спектр попадает в открытый круг

$$|\lambda| < \pi. \quad (17)$$

Элемент  $\varphi$  произвольный из  $E \equiv D(A^\infty)$ . При выборе конечномерного пространства  $E$  требование 3 означает, что все собственные значения

матрицы  $A$  попадают в открытый круг (17). Несмотря на элементарность, эта «конечномерная» ситуация представляет интерес для приложений.

4. Оператор  $A$  линейный замкнутый в  $E$ , а элемент  $\varphi \in D(A^\infty)$  удовлетворяет условиям

$$\|A^n \varphi\| \leq Mq^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

с некоторыми константами  $M > 0$  и  $0 < q < \pi$ . Это означает, что  $\varphi$  есть *целый вектор экспоненциального типа*  $q < \pi$  для оператора  $A$  из задачи (13). По поводу подобных векторов см. важную статью [12]; о некоторых приложениях конструкций такого рода см. [13; 14].

При любом из перечисленных условий 1–4 можно провести строгое обоснование формулы (14). Константа  $\pi$ , фигурирующая при формулировке требований (16)–(18), связана с радиусом сходимости исходного разложения (2). Условие (18), где  $0 < q < \pi$ , является наиболее общим из всех и вбирает в себя, по сути, все предыдущие.

Допустим, что сходимость ряда (14) обоснована. Тогда частные значения решения  $u(t)$  в опорных точках  $t=0$ ,  $t=1$  и  $t=1/2$  выражаются через числа Бернулли и Эйлера:

$$u(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(0)}{n!} A^n \varphi = \varphi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (2^{n+1} - 1) A^n \varphi,$$

$$u(1) = 2\varphi - u(0) = \varphi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (2^{n+1} - 1) A^n \varphi,$$

$$u(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(1/2)}{n!} A^n \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} 2^{-n} A^n \varphi$$

с последующим устранением нулевых слагаемых (см. (4) и (10)).

Для иллюстрации обсудим пример из математической физики. Рассмотрим задачу для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad \frac{u(x, 0) + u(x, 1)}{2} = \varphi(x) \quad (19)$$

в полосе  $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, 1]$ . В работе [15] указаны условия единственности решения задачи (19) и с помощью преобразования Фурье найдены явные формулы для  $u(x, t)$  в виде интегралов от заданной функции  $\varphi(x)$ . Однако для многих простых  $\varphi(x)$  подобные интегралы трудно вычислимы. Используем сейчас наш новый подход.

Поскольку оператор  $A$  в данном примере есть оператор второй производной  $d^2/dx^2$ , то формула (14) сводится к выражению

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(t)}{n!} \varphi^{(2n)}(x). \quad (20)$$

Пусть  $\varphi(x)$  – полином переменной  $x \in \mathbb{R}$  некоторой степени  $N \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $\varphi^{(2n)}(x) \equiv 0$  при всех  $n > N/2$  и, следовательно, ряд (20) будет содержать лишь конечное число ненулевых слагаемых, обращаясь в сумму вида (15), где  $m-1 = \lfloor N/2 \rfloor$ . Например, для  $\varphi(x) = x^5$  получаем

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^2 \frac{E_n(t)}{n!} \varphi^{(2n)}(x) = x^5 + 10(2t-1)x^3 + 60(t^2-t)x$$

с учетом явных выражений для  $E_0(t)$ ,  $E_1(t)$ ,  $E_2(t)$ .

Другие полезные примеры дают квазиполиномы. Например, для функции  $\varphi(x) = e^{\alpha x}$  с фиксированным показателем  $\alpha \in \mathbb{C}$ , применяя формулу (20) и учитывая затем формулу (2), получим, что

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(t)}{n!} \alpha^{2n} e^{\alpha x} = \frac{2}{1 + \exp(\alpha^2)} \exp(\alpha x + \alpha^2 t). \quad (21)$$

Ряд сходится при  $|\alpha| < \sqrt{\pi}$ , но сумма ряда допускает аналитическое продолжение на всю плоскость  $\alpha \in \mathbb{C}$  за исключением точек вида

$$\alpha_{1,k}^{(\pm)} = \pm(1+i)\sqrt{(2k-1)\pi/2}, \quad \alpha_{2,k}^{(\pm)} = \pm(1-i)\sqrt{(2k-1)\pi/2}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Ответ (21) элементарно проверяется подстановкой в задачу (19). Он годен для функции  $\varphi(x) = e^{\alpha x}$  с любым показателем  $\alpha \in \mathbb{C}$ , кроме значений, указанных в формуле (22).

Для функции  $\varphi(x) = x e^{\alpha x}$  ответ выглядит сложнее:

$$u(x, t) = \frac{2}{1 + \exp(\alpha^2)} \left( x + 2\alpha t - \frac{2\alpha \exp(\alpha^2)}{1 + \exp(\alpha^2)} \right) \exp(\alpha x + \alpha^2 t). \quad (23)$$

Для квазиполинома  $\varphi(x) = x^p e^{\alpha x}$  произвольной степени  $p \in \mathbb{N}$  суммирование ряда (20) приводит к выражению

$$u(x, t) = 2e^{\alpha x} \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} (x^p)_x^{(k)} \left( \frac{\exp(\alpha^2 t)}{1 + \exp(\alpha^2)} \right)_\alpha^{(k)} \quad (24)$$

с последующим нахождением производных  $(\dots)_x^{(k)}$ ,  $(\dots)_\alpha^{(k)}$  по  $x$  и по  $\alpha$ . Применительно к формулам (23), (24) работают те же соображения аналитического продолжения по  $\alpha$  на плоскость  $\mathbb{C}$  за исключением особых точек вида (22). Что делать с задачей, если экспоненциальный показатель  $\alpha$  в  $\varphi(x)$  совпадает с одним из значений (22), требует отдельного изучения.

Предложенная методика позволяет решать задачи теплопроводности вида (19) для любой функции  $\varphi(x)$ , являющейся сужением на вещественную ось целой функции  $\varphi(z)$  экспоненциального типа  $\sigma$ , меньшего, чем  $\sqrt{\pi}$ . Ответы запишутся через сходящиеся ряды по системе полиномов Эйлера. Эта же техника применима ко всем

нелокальным задачам (13) для многих других уравнений в частных производных.

Отметим также, что наша теория может быть востребованной при построении алгоритмов быстрых матричных вычислений в нелокальных задачах для систем ОДУ, аналогично тому, как это было сделано ранее с полиномами Бернулли (см. [16; 17]).

### Литература

1. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Эйдельман Ю.С. Применение полиномов Бернулли в неклассических задачах математической физики // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVIII Международной научной конференции, посвященной 70-летию В.И. Мунермана. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. Вып. 18. С. 223-226.
2. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / пер. с лат. М.Я. Выгодского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 578 с.
3. Nörlund N.E. Vorlesungen über Differenzenrechnung. Berlin: Springer-Verlag, 1924. 554 S.
4. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика: Основание информатики / пер. с англ. Б.Б. Походзея и А.В. Ходулева под ред. А.В. Ходулева. М.: Мир: Бином. Лаборатория знаний, 2006. 704 с.
5. Жевняк А. В. Эйлеровы и бернуллиевы суммы: классические и современные результаты. Рязань: Ринфо, 2014. 236 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра / пер. с англ. Н.Я. Виленкина. М.: Наука, 1965. 296 с.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / пер. с англ. под ред.: В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. Milne-Thomson L. M. The calculus of finite differences. London: Macmillan and Co., 1933. 558 p.
9. Кудрявцев В.А. Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 74 с.
10. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
11. Крейн С.Г., Хазан М.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1983. С. 130-264.
12. Радыно Я.В. Пространство векторов экспоненциального типа // Доклады АН БССР. 1983. Т. 27. № 9. С. 791-793.
13. Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2009. 430 с.
14. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Московского университета, 2011. 456 с.
15. Королев Г.М. Специальная нелокальная задача для одномерного уравнения теплопроводности // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2018. Материалы науч. конф., 9–13 апреля 2018 г. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2018. С. 96-100.

16. Boito P., Eidelman Y., Gemignani L. Efficient solution of parameter-dependent quasiseparable systems and computation of meromorphic matrix functions // Numerical Linear Algebra with Applications. 2018. Vol. 25. No. 6. P. 1-13.

17. Boito P., Eidelman Y., Gemignani L. Computing the reciprocal of a  $\phi$ -function by rational approximation // Advances Computational Math. 2022. Vol. 48. No. 1. P. 1-28.

**I.V. Tikhonov, V.B. Sherstyukov, E.D. Pisarenkova**  
MSU, MPSU

## **EULER POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATIONS IN NON-LOCAL PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS**

**Keywords:** *Euler polynomials, Euler numbers, non-classical problems of mathematical physics, non-local problems, evolution equations.*

**Abstract.** *A basic information on Euler polynomials is presented. It is shown that these polynomials can be used to solve non-local problems for evolutionary differential equations when the usual Cauchy conditions are replaced by averaging values of an unknown function at the initial and final point in time. For such problems, an explicit resolving formula is found. The solutions are expressed as a series in Euler polynomials. Conditions for applying this formula are discussed, and examples of specific non-local problems for the heat equation are given. Our results can be useful in the development of new numerical methods.*

**И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович**  
МГУ имени М.В. Ломоносова, ИЯИ РАН

УДК 517.521.1+517.581+519.114

## **АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЦЕНТРАЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА И КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА**

**Ключевые слова:** *центральный биномиальный коэффициент, двусторонние оценки, системы компьютерной математики.*

*Работа носит обзорный характер. Представлен большой спектр различных оценок – от времён Эйлера до наших дней – для центрального биномиального коэффициента в его нормированной версии  $2^{-2n} C_{2n}^n$ . Оценки удобно сравнивать между собой на тестовом примере  $2^{-100} C_{100}^{50}$ . Показано, что современные системы компьютерной математики позволяют без больших затрат выяснить качество приближений с самой высокой точностью. Ориентируясь на наши материалы,*

каждый сможет подобрать «свой» результат для дальнейшего использования. Тематика будет интересна всем специалистам, встречающим в исследованиях базовые комбинаторные величины.

В математической литературе (учебной, научной и популярной) часто по разным поводам встречается последовательность центральных биномиальных коэффициентов

$$C_{2n}^n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Важно оценить поведение величины (1) при изменении значения  $n \in \mathbf{N}$ . Эта задача, известная с давних времён, допускает множество различных решений. Недавно, при подготовке обзора [1], авторы убедились, что компьютерная математика даёт эффективный инструмент для сравнения полученных оценок. Обзор [1] содержит обширный материал и совмещает многие подходы к проблеме. Сейчас мы дадим более компактное «концентрированное» изложение, продемонстрировав идею на одном естественном частном примере. Отметим также, что наш интерес к тематике был вызван некоторыми задачами из теории полиномов Бернштейна (см. [2, с. 153-157]).

По формуле Стирлинга последовательность (1) при  $n \rightarrow \infty$  экспоненциально возрастает со скоростью  $2^{2n}/\sqrt{n\pi}$ . Поэтому вместо (1) удобнее рассматривать нормированный вариант

$$W_n \equiv 2^{-2n} C_{2n}^n = 2^{-2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (2)$$

Последовательность (2) часто связывают с именем Валлиса (Wallis), поскольку его известную формулу (1656 г.) можно трактовать как асимптотику

$$W_n = 2^{-2n} C_{2n}^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

с медленным степенным стремлением к нулю (некоторые подробности см. в [1]). Справедливо рекуррентное соотношение

$$W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (4)$$

Формула (4) показывает, что последовательность (2) строго убывает при возрастании номера  $n \in \mathbf{N}$ . Кроме того, используя свойства эйлеровых интегралов, имеем:

$$W_n = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{\pi} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}} dt, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (5)$$

где  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(n+1/2) = (2^{-2n} (2n)!/n!) \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$  – известные

значения. Как видим из (5), числа  $W_n = 2^{-2n} C_{2n}^n$  служат моментами некоторой положительной меры на  $[0, 1]$ . Применяя известную теорему Хаусдорфа (см. [3]), заключаем, что последовательность (2) является *вполне монотонной*, то есть все её разности любого порядка заведомо строго положительны. Сказанное означает, что классическая последовательность (2) ведёт себя самым регулярным образом.

Тем не менее в конкретных задачах желательно дополнить асимптотику (3) как можно более точными двусторонними оценками, действующими при всех номерах  $n \in \mathbf{N}$ . В качестве проверочного теста к таким оценкам удобно брать  $n = 50$ . Причины здесь как естественные, психологические, так и практические – значение  $n = 50$  достаточно велико для нахождения числа  $W_{50} = 2^{-100} C_{100}^{50}$  «вручную», но само это число всё ещё не слишком мало. Асимптотика (3) даёт приближение

$$W_{50} = 2^{-100} C_{100}^{50} \approx \frac{1}{\sqrt{50\pi}} = 0.07978845608028654 \dots \quad (6)$$

с бесконечным числом знаков после запятой. Современный компьютер позволяет найти это же значение точно:

$$W_{50} = 2^{-100} C_{100}^{50} = 0.0795892373871787614981270502421704614029315 \quad (7)$$

$$404247333213573478705171737601631321012973785400390625.$$

Две строчки записи рационального числа (7) содержат девяносто семь знаков после запятой. Как видим, приближение (6) даёт три верных знака. «Только три знака» или «сразу три знака» зависит от конкретных претензий на точность. В дальнейшем, рассматривая все прочие оценки числа (7), будем выделять верные знаки приближений **жирным шрифтом**.

Так сложилось, что число (7), обычно неизвестное с такой высокой точностью, любят выбирать в качестве теста для проверки получаемых аналитических оценок. Укажем, например, на известный школьный задачник [4] (см. там задачи 141, 142 и их решения на с. 249-252), где число  $W_{50} = 2^{-100} C_{100}^{50}$  взято для иллюстрации к элементарной оценке

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq 2^{-2n} C_{2n}^n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (8)$$

При  $n \geq 2$  оба неравенства будут строгими, и согласно (8) имеем

$$\mathbf{0.0707106781} \dots = \frac{1}{10\sqrt{2}} < 2^{-100} C_{100}^{50} < \frac{1}{\sqrt{151}} = \mathbf{0.0813788459} \dots$$

Точность здесь, конечно, весьма условная, но надо учесть, что оценка (8) получена в [4] простейшими «школьными» методами без опоры на ключевую асимптотику (3).

Сравнительно недавно ряд уточнений к (8) предложил Мачис [5]. Также пользуясь элементарными приёмами, он показал, в частности, что

при всех  $n \geq 3$  верна оценка

$$\frac{5\sqrt{3}}{16} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2^{-2n} C_{2n}^n \leq \frac{5\sqrt{10}}{16} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad (9)$$

с равенствами при  $n=3$  (см. [5, с. 288]). Отсюда при  $n=50$  находим чуть улучшенные границы

$$\mathbf{0.0765465545\dots} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2}} < 2^{-100} C_{100}^{50} < \frac{5}{8} \sqrt{\frac{5}{302}} = \mathbf{0.0804195332\dots}$$

Понятно, что оценки (8) и (9) весьма далеки от идеала; их главное достоинство – полная элементарность вывода.

В этой связи полезно знать, что число  $2^{-100} C_{100}^{50}$  оценивал ещё сам Эйлер. Его результат, полученный в [6, с. 318-322] на основе некоего варианта «формулы Эйлера – Маклорена», отличается удивительной точностью

$$2^{-100} C_{100}^{50} \approx \frac{1}{12.56451} = \mathbf{0.0795892557688\dots} \quad (10)$$

с семью верными знаками после запятой. Любопытная деталь: если поправить небольшое закругление, допущенное в [6, с. 322], то методом Эйлера получается ещё более точный ответ

$$2^{-100} C_{100}^{50} \approx \frac{1}{12.564512898} = \mathbf{0.07958923741\dots} \quad (11)$$

с девятью верными знаками после запятой (см. [1, с. 75-76]).

Из оценок Эйлера видно, что

$$\frac{1}{13} < 2^{-100} C_{100}^{50} < \frac{1}{12}. \quad (12)$$

Эти «красивые» границы обосновывались Мачисом в [5] независимым элементарным методом. Разумеется, в соотношении (12) нет и близко той точности, что была достигнута Эйлером в середине XVIII века. Качество результатов (10) и (11) не вызывает сомнений; единственная проблема – Эйлер не даёт общей оценки для последовательности (2), а лишь предлагает способ, как нужные неравенства можно получить при любом индивидуальном номере  $n \in \mathbf{N}$ .

Тем интереснее последующие результаты, где весьма точные оценки для чисел (2) устанавливаются сразу для всех номеров  $n \in \mathbf{N}$ . Перейдём к обзору возникающих возможностей.

Так, например, в работе [1] авторами отмечено двойное неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 - \frac{1}{8n+0.5}\right) < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 - \frac{1}{8n+1}\right), \quad (13)$$

верное при всех  $n \in \mathbf{N}$ . Применительно к примеру (7) оценка (13) даёт результат

$$\mathbf{0.079589233967726519269\dots} < 2^{-100} C_{100}^{50} < \mathbf{0.079589482374350658941\dots},$$

где нижняя граница содержит восемь верных знаков после запятой, а верхняя граница – шесть верных знаков. Оценка (13) проста по виду и удобна на практике. Она обеспечивает весьма неплохое приближение.

Другой, экспоненциальный формат оценок использован Сасвари в работе [7]. Там, в частности, показано, что

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8n}\right) < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8n} + \frac{1}{192n^3}\right) \quad (14)$$

также для всех номеров  $n \in \mathbf{N}$ . Применительно к примеру (7) оценка (14) означает, что

$$\mathbf{0.079589234071358431554\dots} < 2^{-100} C_{100}^{50} < \mathbf{0.079589237387576586948\dots}$$

Здесь нижняя граница даёт те же восемь верных знаков после запятой, а верхняя граница – уже двенадцать верных знаков. Вид оценки (14), конечно, сложнее, чем (13), но на верхней границе приближение получается заметно более точным.

Дальнейшее развитие формата (14) предложено в недавней работе Попова [8]. Там показано, что

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8n} + \frac{1}{192n^3} - \frac{1}{192n^3 + 640n^5}\right) < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8n} + \frac{1}{8n + 192n^3}\right) \quad (15)$$

при всех  $n \in \mathbf{N}$ . В тестовом примере (7) оценка (15) даёт двойное неравенство

$$\mathbf{0.079589237387178688509\dots} < 2^{-100} C_{100}^{50} < \mathbf{0.079589237387521317566\dots}$$

Здесь нижняя граница содержит пятнадцать верных знаков после запятой, а верхняя граница – двенадцать верных знаков. Точность нижней границы, как видим, сильно повысилась.

Для улучшения аппроксимации сверху можно использовать формулу

$$2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8n} + \frac{1}{192n^3} - \frac{1}{640n^5} + \frac{17}{14336n^7}\right), \quad (16)$$

верную при всех  $n \in \mathbf{N}$  и также найденную в работе [8]. При  $n = 50$  согласно (16) получим

$$2^{-100} C_{100}^{50} < \mathbf{0.079589237387178761567\dots}$$

уже с восемнадцатью верными знаками после запятой! Здесь точность приближения выглядит наиболее впечатляющей.

Перейдём к другому формату оценок, восходящему к небольшой, но знаковой заметке Казаринова [9]. Он указал (не вполне явно) на такой результат

$$\frac{1}{\sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}} < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi}}, \quad (17)$$

верный при всех  $n \in \mathbf{N}$ . Применительно к примеру (7) оценка (17) даёт

$$0.079392481149321437695... < 2^{-100} C_{100}^{50} < 0.079589729853699647960... ,$$

где нижняя граница содержит три верных знака после запятой, а верхняя – шесть верных знаков. Учитывая элементарность выражений в (17), отмеченная оценка может представлять интерес для каких-то простых практических расчётов. Способ небольших коррекций для нижней границы (17) предложил Ватсон в работе [10].

Здесь же упомянем заметно усиленное двойное неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{\left(n + \frac{1}{4} + \frac{1}{32n+8}\right)\pi}} < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{\left(n + \frac{1}{4} + \frac{1}{32n+8 + \frac{18}{4n+1}}\right)\pi}} , \quad (18)$$

также верное при всех  $n \in \mathbf{N}$ . Нижняя граница в (18) извлекается из интересной, но сжато написанной работы Славича [11]. Верхняя граница в (18) улучшает результаты Казаринова [9] и Славича [11]. Этот вариант был обоснован в обзоре авторов [1] (см. там с. 84-86 и с. 88-89) при помощи некоторых идей из работ [12–14]. Для примера (7) оценка (18) даёт ограничения

$$0.079589237359756963698... < 2^{-100} C_{100}^{50} < 0.079589237387183002105... ,$$

где нижняя граница содержит десять верных знаков после запятой, а верхняя граница – тринадцать верных знаков.

В том же ключе возможно дальнейшее усложнение структуры оценок. Например, согласно сравнительно недавним исследованиям Мортича [15], имеет место двойное неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\left(n^2 + \frac{n}{2} + \frac{1}{8}\right)\pi^2}} < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt[4]{\left(n^2 + \frac{n}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{128n}\right)\pi^2}} , \quad (19)$$

действующее при всех  $n \in \mathbf{N}$ . Из (19) следует, что

$$0.079589237362804433293... < 2^{-100} C_{100}^{50} < 0.079589238594012672378... ,$$

где нижняя граница даёт десять верных знаков после запятой, а верхняя граница – восемь верных знаков. Как видим, верхняя оценка в (19) заметно хуже верхней оценки в (18).

Имеются и более изощрённые варианты. Так, в совместной работе китайских математиков [16] установлена двусторонняя оценка

$$\frac{\sqrt{e}}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \frac{\sqrt{n-1}}{n} < 2^{-2n} C_{2n}^n \leq \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \frac{\sqrt{n-1}}{n} , \quad (20)$$

справедливая при всех  $n \geq 2$  с неулучшаемыми в данном формате константами  $\sqrt{e/\pi}$  и  $4/3$ . Выбранный шаблон использует идею второго замечательного предела и удивляет своей замысловатостью. При этом

в примере (7) оценка (20) означает, что

$$0.078787998897447349450\dots < 2^{-100} C_{100}^{50} < 0.11293446586567350808\dots ,$$

где нижняя граница даёт всего два верных знака после запятой, а верхняя граница – и вовсе ни одного. Такой результат представляется весьма сомнительным. Коэффициент  $4/3$  обеспечивает равенство в правой части (20) при  $n=2$ , но совсем не «чувствует» поведение последовательности (2) при достаточно больших номерах  $n$ .

Выбранный формат (20) совершенствовался в нескольких работах. Последний из известных нам результатов (см. [17]) таков:

$$\sqrt{\frac{e}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2(n+1/3)}\right)^{n+1/3} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{a_1}{n+b_1 + \frac{a_2}{n+b_2}}\right) < 2^{-2n} C_{2n}^n, \quad (21)$$

$$2^{-2n} C_{2n}^n < \sqrt{\frac{e}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2(n+1/3)}\right)^{n+1/3} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{a_1}{n+b_1 + \frac{a_2}{n+b_2 + \frac{a_3}{n+b_3}}}\right). \quad (22)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{1}{144}, \quad a_2 = \frac{781}{3600}, \quad a_3 = \frac{51396085}{89664267},$$

$$b_1 = \frac{1}{60}, \quad b_2 = -\frac{4309}{109340}, \quad b_3 = \frac{25682346121}{449571834712}.$$

Оба неравенства (21) и (22) верны при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Для примера (7) из них получаем

$$0.079589237387178673609\dots < 2^{-100} C_{100}^{50} < 0.079589237387178761528\dots ,$$

где нижняя граница содержит пятнадцать верных знаков после запятой, а верхняя граница – восемнадцать верных знаков. Наряду с прежним результатом (16) оценка (22) является своеобразным «рекордсменом». Однако формат, использованный в (21) и (22), представляется нарочито усложнённым и весьма искусственным.

В заключение приведём серию других известных нам оценок для нормированного центрального биномиального коэффициента (2). Эти результаты так или иначе дополняют предыдущие формулы (13)–(22). Прокомментируем список в конце, сразу после его завершения.

Итак, при всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливы следующие неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 - \frac{1}{8n}\right) < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 - \frac{1}{9n}\right), \quad (23)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left( 1 - \frac{1}{8n + 0,5 + \frac{11}{32n + 8}} \right) < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left( 1 - \frac{1}{8n + 0,5 + \frac{11}{32n}} \right), \quad (24)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{256n^2 + 48n + 7}{256n^2 + 80n + 15} < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{256n^2 - 16n + 11}{256n^2 + 16n + 11}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left( 1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} \right) < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left( 1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \frac{5}{1024n^3} \right), \quad (26)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left( n + \frac{1}{4} + \frac{1}{16n + 12} \right) \pi}} < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt{\left( n + \frac{1}{4} \right) \pi}}, \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{\left( n^3 + \frac{3n^2}{4} + \frac{9n}{32} + \frac{5}{128} \right) \pi^3}} < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt[6]{\left( n^3 + \frac{3n^2}{4} + \frac{9n}{32} + \frac{5}{128} - \frac{21}{2048n} \right) \pi^3}}, \quad (28)$$

$$\frac{1}{\sqrt[8]{\left( n^4 + n^3 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{8} + \frac{1}{100n} \right) \pi^4}} < 2^{-2n} C_{2n}^n < \frac{1}{\sqrt[8]{\left( n^4 + n^3 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{8} \right) \pi^4}}, \quad (29)$$

$$\sqrt{\frac{e}{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2(n+1/3)} \right)^{n+1/3} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2^{-2n} C_{2n}^n < \sqrt{\frac{e}{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2(n+1/3)} \right)^{n+1/3} \exp\left( \frac{1}{144n^3} \right), \quad (30)$$

$$\sqrt{\frac{e}{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2n} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left( \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{48n^3} + \frac{1}{160n^4} + \frac{1}{960n^5} \right) < 2^{-2n} C_{2n}^n. \quad (31)$$

Удобное, проверяемое на основе асимптотики (3), неравенство (23) относится к математическому фольклору (см. [1]; см. также [2, с. 155]). Оценки (24)–(26) развивают идею (13) и допускают элементарное (достаточно громоздкое) обоснование. Все эти результаты отмечены в обзоре авторов [1], причём (25) – это лишь другая форма записи (24), возможно, более удобная для восприятия. Оценка (26) согласуется с асимптотическим разложением

$$2^{-2n} C_{2n}^n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left( 1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \frac{5}{1024n^3} - \frac{2}{32768n^4} - \frac{399}{262144n^5} + o\left( \frac{1}{n^5} \right) \right), \quad (32)$$

действующим при  $n \rightarrow \infty$  (по поводу (32) см. обзор [1] и цитированную там литературу).

Оценка (27) указана Мачисом в [5]. Но особой новизны в ней нет – верхняя граница в (27) та же, что верхняя граница в (17), а нижняя граница очевидно хуже нижней границы в (18), давно найденной Славичем в работе [11].

Оценки (28), (29) опираются на результаты Мортича [15], развивая

выбранный формат (19). Наконец, весьма экзотические варианты (30) и (31) взяты из работы [18]. В том же ключе имеется работа [19].

Качество оценок (23)–(31) легко протестировать на примере (7). Не входя в подробности, отметим лишь, что наиболее точными здесь являются оценки (29) и (31), обеспечивающие порядка тринадцати верных знаков после запятой. Наши оценки (24)–(26) дают в районе десяти верных знаков после запятой.

Отметим также, что внимание исследователей привлекают различные теоретико-числовые свойства центрального биномиального коэффициента (1). Некоторым трудным задачам из этой области посвящены, например, работы [20–22].

### Литература

1. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г. Сравнительный анализ двусторонних оценок центрального биномиального коэффициента // Челябинский физ.-матем. журнал. 2020. Т. 5. Вып. 1. С. 70-95.
2. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Исследования по математическому анализу (Итоги науки. Юг России). Т. 8. Ч. 1. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126-175.
3. Shohat J.A., Tamarkin J.D. The problem of moments (Mathematical Surveys, Vol. 1). New-York: American Mathematical Society, 1943. 144 p.
4. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. М.: Наука, 1965. 455 с.
5. Mačys J.J. On estimates of factorial quotients // Lithuanian Math. Journal. 2005. Vol. 45, No. 3. P. 284-291.
6. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 580 с.
7. Sasvári Z. Inequalities for binomial coefficients // Journal of Math. Analysis and Applications. 1999. Vol. 236. No. 1. P. 223-226.
8. Попов А.Ю. Двусторонние оценки центрального биномиального коэффициента // Челябинский физ.-матем. журнал. 2020. Т. 5. Вып. 1. С. 56-69.
9. Kazarinoff D.K. On Wallis' formula // Edinburgh Mathematical Notes. 1956. Vol. 40. P. 19-21.
10. Watson G.N. A note on gamma function // Edinburgh Math. Notes. 1959. Vol. 42. P. 7-9.
11. Slavić D.V. On inequalities for  $\Gamma(x+1)/\Gamma(x+1/2)$  // Univ. Beograd. Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika. 1975. No. 498/541. P. 17-20.
12. Bauer G. Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis // Abhandlungen der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalische Klasse. 1872. Bd. 11. S. 97-116.
13. Berndt B.C. Ramanujan's Notebooks. Part II. New-York et al.: Springer-Verlag, 1989. 360 p.
14. Granath H. On inequalities and asymptotic expansions for the Landau constants // Journal of Math. Analysis and Applications. 2012. Vol. 386. No. 2. P. 738-743.
15. Mortici C. New approximation formulas for evaluating the ratio of gamma functions // Mathematical and Computer Modelling. 2010. Vol. 52. No. 1–2. P. 425-433.

16. Guo Senlin, Xu Jian-Guo, Qi Feng. Some exact constants for the approximation of the quantity in the Wallis' formula // Journal of Inequalities and Applications. 2013. Article ID 67. P. 1-7.

17. You Xu. Approximation and bounds for the Wallis ratio [Электронный ресурс] // arXiv.org. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1712.02107> (дата обращения: 27.02.2023).

18. Qi Feng, Mortici C. Some best approximation formulas and inequalities for the Wallis ratio // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 253. P. 363-368.

19. Guo Senlin. On the approximation of the Wallis ratio // Journal of Progressive Research in Math. 2019. Vol. 14. Iss. 3. P. 2408-2412.

20. Erdős P., Graham R. L., Ruzsa I.Z., Straus E.G. On the prime factors of  $\binom{2n}{n}$  // Mathematics of Computation. 1975. Vol. 29. No. 129. P. 83-92.

21. Granville A., Ramaré O. Explicit bounds on exponential sums and the scarcity of squarefree binomial coefficients // Mathematika. 1996. Vol. 43. Iss. 1. P. 73-107.

22. Ford K., Konyagin S. Divisibility of the central binomial coefficient  $\binom{2n}{n}$  // Transactions of the American Math. Society. 2021. Vol. 374. No. 2. P. 923-953.

**I.V. Tikhonov, V.B. Sherstyukov, D.G. Tsvetkovich**  
MSU, INR RAS

## **ANALYTICAL ESTIMATES OF THE CENTRAL BINOMIAL COEFFICIENT AND COMPUTER MATHEMATICS**

**Keywords:** *central binomial coefficient, two-sided estimates, systems of computer mathematics.*

**Abstract.** *The note is a special review. A number of different estimates of the central binomial coefficient are presented. Estimates are checked on one specific well-known example. It is shown that modern computer tools make it possible to quickly compare the quality of approximations. Given our materials, everyone can choose the result for further use. What has been done is of interest to specialists who encounter combinatorial values in research.*

**А.П. Шилин**  
*Белорусский государственный университет*

УДК 517.968.7

## **РЕШЕНИЕ НА ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ СПЕЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ**

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение, обобщенные формулы Сохоцкого, определитель Вронского, краевая задача Римана, линейное дифференциальное уравнение.*

Решено в явном виде линейное гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение порядка  $n \geq 3$  на замкнутой кривой в комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения имеют специальную структуру. Уравнение сведено к краевой задаче Римана для аналитических функций и линейным дифференциальным уравнениям. Для однородных уравнений найдены фундаментальные системы решений. Для неоднородных уравнений применен метод вариации произвольных постоянных, после чего учтены некоторые дополнительные условия на решения.

### 1. Постановка задачи. Схема решения

Пусть  $L$  – простая гладкая замкнутая кривая на комплексной плоскости. Обозначим  $D_+$  и  $D_-$  соответственно внутреннюю и внешнюю области комплексной плоскости по отношению к кривой  $L$ . Выберем ориентацию на кривой  $L$ , оставляющую область  $D_+$  слева. Считаем  $0 \in D_+$ . Зададим  $H$ -непрерывные (то есть удовлетворяющие условию Гельдера) функции  $a(t) \neq 0$ ,  $b(t) \neq 0$ ,  $f(t)$ ,  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $n \geq 3$ ,  $t \in L$ . Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^n \left[ (a(t)A_k(t) + b(t)B_k(t))\varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{\pi i} (a(t)A_k(t) - b(t)B_k(t)) \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \right] = f(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

в котором искомая функция  $\varphi(t)$ ,  $t \in L$ ,  $H$ -непрерывна вместе со своими производными до порядка  $n$  включительно, а интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару.

Схема исследования уравнения (1), основанная на обобщенных формулах Сохоцкого [1], содержится в [2]. По этой схеме исследованы, например, уравнения в [2–4]. Актуальным вопросом является указание функций  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$ , для которых возможно получение явного решения уравнения (1); число таких функций едва ли будет велико для произвольного  $n$ . Случай, когда функции  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$  являются постоянными, может быть решен как обобщение результата [5]. Если  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$  являются произвольными линейными функциями, то решение уравнения (1) автору неизвестно. Частный случай линейных функций  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$  в уравнении (1) решен в [6]. В настоящей работе решим уравнение (1) для нового случая линейных функций  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$ :

$$A_k(t) = (\alpha_k - (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_{k+1} + \lambda_1\lambda_2\alpha_{k+2})t + (k+1)(\alpha_{k+1} - (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_{k+2} + \lambda_1\lambda_2\alpha_{k+3}), \quad (2)$$

$$B_k(t) = (\beta_k - (\mu_1 + \mu_2)\beta_{k+1} + \mu_1\mu_2\beta_{k+2})t + (k+1)(\beta_{k+1} - (\mu_1 + \mu_2)\beta_{k+2} + \mu_1\mu_2\beta_{k+3}), \quad (3)$$

где  $k = \overline{0, n}$ . Здесь  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \alpha_k, \beta_k, k = \overline{0, n+3}$ , – заданные комплексные числа, причем  $\alpha_k = \beta_k = 0$  для  $k = 0, 1, n+1, n+2, n+3$ ,  $\alpha_n = \beta_n = 1$ . Согласно упомянутой схеме из [2], решение уравнения (1) сводится к последовательному решению краевой задачи Римана

$$F_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)} F_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)}, \quad t \in L, \quad (4)$$

и линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^n A_k(z) \Phi_+^{(k)}(z) = F_+(z), \quad z \in D_+, \quad (5)$$

$$\sum_{k=0}^n B_k(z) \Phi_-^{(k)}(z) = F_-(z), \quad z \in D_-. \quad (6)$$

Искомые функции  $F_{\pm}(z)$ ,  $\Phi_{\pm}(z)$  должны быть аналитическими в соответствующих областях  $D_{\pm}$  и иметь  $H$ -непрерывные предельные значения на  $L$ . Кроме того, на бесконечности функция  $F_-(z)$  должна быть ограниченной, а функция  $\Phi_-(z)$  обращаться в ноль. Если решения в (4) – (6) существуют, то решение уравнения (1) записывается по формуле  $\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t)$ .

Как условия разрешимости задачи (4) (если они возникают), так и ее решения (если они существуют) зависят от индекса  $\varkappa = \text{Ind}_L \frac{b(t)}{a(t)}$ , могут быть записаны в явном виде [7] и здесь не приводятся. Предположим, что эта задача разрешима, а ее решения найдены.

## 2. Решение дифференциальных уравнений

Обозначим  $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$  корни многочлена  $\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} \lambda^k$ . Предположим, что числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  попарно различны.

**Лемма 1.** *Фундаментальную систему решений однородного уравнения (5) образуют функции*

$$\frac{e^{\lambda_k z}}{z}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (7)$$

*Доказательство.* Для доказательства можно функции (7) непосредственно подставить в однородное уравнение (5), однако это будет связано с довольно громоздкими выкладками. Поступим по-другому. Преобразуем левую часть (5) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n (\alpha_k z + (k-1)\alpha_{k+1}) \Phi_+^{(k)}(z) + \\
& + \sum_{k=0}^n (2\alpha_{k+1} - (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_{k+1}z - k(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_{k+2}) \Phi_+^{(k)}(z) + \\
& + \sum_{k=0}^n (\lambda_1\lambda_2\alpha_{k+2}z + \lambda_1\lambda_2(k+1)\alpha_{k+3} - (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_{k+2}) \Phi_+^{(k)}(z) = \\
& = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} (z \Phi_+^{(k+2)}(z) + k \Phi_+^{(k+1)}(z)) + \\
& + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} (2\Phi_+^{(k+1)}(z) - (\lambda_1 + \lambda_2)z \Phi_+^{(k+1)}(z) - k(\lambda_1 + \lambda_2)\Phi_+^{(k)}(z)) + \\
& + \lambda_1\lambda_2 \left( \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} z \Phi_+^{(k)}(z) + \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_{k+2} k \Phi_+^{(k-1)}(z) \right) - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} (\lambda_1 + \lambda_2) \Phi_+^{(k)}(z) = \\
& = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} (z \Phi_+''(z))^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} ((2 - (\lambda_1 + \lambda_2)z) \Phi_+'(z))^{(k)} + \\
& + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} ((\lambda_1\lambda_2z - \lambda_1 - \lambda_2) \Phi_+(z))^{(k)}.
\end{aligned}$$

Следовательно, однородное уравнение (5) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} (z \Phi_+''(z) + (2 - (\lambda_1 + \lambda_2)z) \Phi_+'(z) + (\lambda_1\lambda_2z - \lambda_1 - \lambda_2) \Phi_+(z))^{(k)} = 0,$$

что позволяет далее свести его к последовательному решению двух более простых уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} \Omega^{(k)}(z) = 0, \quad (8)$$

$$z \Phi_+''(z) + (2 - (\lambda_1 + \lambda_2)z) \Phi_+'(z) + (\lambda_1\lambda_2z - \lambda_1 - \lambda_2) \Phi_+(z) = \Omega(z). \quad (9)$$

После решения уравнения (8), не составляющего проблемы, уравнение (9) примет вид

$$z \Phi_+''(z) + (2 - (\lambda_1 + \lambda_2)z) \Phi_+'(z) + (\lambda_1\lambda_2z - \lambda_1 - \lambda_2) \Phi_+(z) = \sum_{k=3}^n C_k e^{\lambda_k z}, \quad (10)$$

где  $C_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = \overline{3, n}$ . Фундаментальную систему решений однородного уравнения (10) образуют функции  $\frac{e^{\lambda_k z}}{z}$ ,  $k = 1, 2$ , – этот факт легко проверяется непосредственно. Частное решение уравнения (10) проще

всего искать в виде  $\sum_{k=3}^n D_k \frac{e^{\lambda_k z}}{z}$  с неопределенными коэффициентами  $D_k$ .

Подстановка такого частного решения в уравнение (10) даст

$$D_k = \frac{C_k}{\lambda_k^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_k + \lambda_1\lambda_2}, \quad k = \overline{3, n}.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения (5) имеет вид

$$\Phi_+(z) = \sum_{k=1}^2 C_k \frac{e^{\lambda_k z}}{z} + \sum_{k=3}^n \frac{C_k}{\lambda_k^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_k + \lambda_1\lambda_2} \frac{e^{\lambda_k z}}{z},$$

где  $C_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, 2$ , что и доказывает лемму.

**Лемма 2.** *Формула общего решения неоднородного уравнения (5) имеет вид*

$$\Phi_+(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k z} \left( C_k^+ + \gamma_k \int_0^z e^{-\lambda_k \zeta} F_+(\zeta) d\zeta \right), \quad (11)$$

где  $C_k^+$  – комплексные постоянные, связанные равенством

$$\sum_{k=1}^n C_k^+ = 0, \quad (12)$$

а в остальном произвольные,  $\gamma_k = \frac{(-1)^{n+1}}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (\lambda_m - \lambda_k)}$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

*Доказательство.* Вычислим вначале определитель Вронского  $W(z)$  функций (7):

$$W(z) = \begin{vmatrix} \sum_{j=0}^0 \frac{(-1)^j 0! \lambda_1^{0-j} e^{\lambda_1 z}}{(0-j)! z^{j+1}} & \dots & \sum_{j=0}^0 \frac{(-1)^j 0! \lambda_n^{0-j} e^{\lambda_n z}}{(0-j)! z^{j+1}} \\ \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j 1! \lambda_1^{1-j} e^{\lambda_1 z}}{(1-j)! z^{j+1}} & \dots & \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j 1! \lambda_n^{1-j} e^{\lambda_n z}}{(1-j)! z^{j+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j (n-1)! \lambda_1^{n-1-j} e^{\lambda_1 z}}{(n-1-j)! z^{j+1}} & \dots & \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j (n-1)! \lambda_n^{n-1-j} e^{\lambda_n z}}{(n-1-j)! z^{j+1}} \end{vmatrix}.$$

Представим записанный определитель в виде надлежащей суммы определителей, элементами которых будут отдельные слагаемые строк. В результате получим

$$W(z) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \begin{vmatrix} \frac{(-1)^{j_1} 0! \lambda_1^{0-j_1} e^{\lambda_1 z}}{(0-j_1)! z^{j_1+1}} & \dots & \frac{(-1)^{j_1} 0! \lambda_n^{0-j_1} e^{\lambda_n z}}{(0-j_1)! z^{j_1+1}} \\ \frac{(-1)^{j_2} 1! \lambda_1^{1-j_2} e^{\lambda_1 z}}{(1-j_2)! z^{j_2+1}} & \dots & \frac{(-1)^{j_2} 1! \lambda_n^{1-j_2} e^{\lambda_n z}}{(1-j_2)! z^{j_2+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^{j_n} (n-1)! \lambda_1^{n-1-j_n} e^{\lambda_1 z}}{(n-1-j_n)! z^{j_n+1}} & \dots & \frac{(-1)^{j_n} (n-1)! \lambda_n^{n-1-j_n} e^{\lambda_n z}}{(n-1-j_n)! z^{j_n+1}} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

В формуле (13) сумма распространяется на всевозможные наборы  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  целых чисел таких, что  $j_m = \overline{0, m-1}$ ,  $m = \overline{1, n}$ .

Если  $j_2 = 1$ , то 1-я и 2-я строки определителей в сумме (13) окажутся пропорциональными, поэтому такие определители обратятся в ноль. Отбросим эти определители в сумме, оставляя лишь определители с  $j_2 = 0$ . Если  $j_3 = 1$ , то 2-я и 3-я строки в оставшихся определителях будут пропорциональными, а если  $j_3 = 2$ , то пропорциональными будут 1-я и 3-я строки. Следовательно, теперь еще можно отбросить в сумме (13) определители с  $j_3 \neq 0$ , оставляя лишь определители с  $j_3 = 0$ . Продолжая подобные рассуждения, установим, что в сумме (13) ненулевым будет лишь определитель в случае  $j_m = \overline{0, m-1}$ , и тогда получим

$$W(z) = \begin{vmatrix} \frac{e^{\lambda_1 z}}{z} & \dots & \frac{e^{\lambda_n z}}{z} \\ \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 z}}{z} & \dots & \frac{\lambda_n e^{\lambda_n z}}{z} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 z}}{z} & \dots & \frac{\lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n z}}{z} \end{vmatrix} = \frac{e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)z} V}{z^n}, \quad (14)$$

где  $V$  – определитель Вандермонда чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Аналогично получится

$$W_k(z) = \frac{e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_{k+1} + \dots + \lambda_n)z} V_k}{z^{n-1}}. \quad (15)$$

где  $W_k(z)$  – определители Вронского функций  $e^{\lambda_m z}$ , а  $V_k$  – определители Вандермонда чисел  $\lambda_m$ ,  $m = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Применив к неоднородному уравнению (5) метод вариации произвольных постоянных, получим

$$\Phi_+(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k z} \left( C_k^+ + (-1)^{n+k} \int_0^z \frac{W_k(\zeta) F_+(\zeta) d\zeta}{W(\zeta) A_n(\zeta)} \right).$$

К формуле (11) придем, подставляя теперь под знак интеграла выражения для  $W_k(\zeta)$ ,  $W(\zeta)$ ,  $A_n(\zeta)$  согласно формулам (15), (14), (2) и делая несложные упрощения. Условие (12) нужно для того, чтобы устранить у функции  $\Phi_+(z)$  возможный полюс в точке  $z=0$ . Лемма доказана.

Обозначим  $\mu_3, \mu_4, \dots, \mu_n$  корни уравнения  $\sum_{k=0}^{n-2} \beta_{k+2} \mu^k = 0$ . Будем предполагать, что числа  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  попарно различны и не содержат нулевого числа. Решение уравнения (6) записывается по формуле

$$\Phi_-(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^n e^{\mu_k z} \left( C_k^- + \delta_k \int_{z_0}^z e^{-\mu_k \zeta} F_-(\zeta) d\zeta \right), \quad (16)$$

аналогичной формуле (11). Здесь  $C_k^-$  – произвольные комплексные

постоянные,  $\delta_k = \frac{(-1)^{n+1}}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (\mu_m - \mu_k)}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $z_0 \in D_-$ ,  $z_0 \neq \infty$ .

Формула (16) может дать функцию, неаналитическую в точке  $z = \infty$ . Добиваясь аналитичности в этой точке (с условием  $\Phi_-(\infty) = 0$ ), для дальнейшего предположим, во-первых, справедливость равенств

$$\operatorname{res}_{z=\infty} (e^{-\mu_k z} F_-(z)) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (17)$$

не допускающих точки ветвления на бесконечности и делающих функцию  $\Phi_-(z)$  однозначной. Во-вторых, устраним на бесконечности возможную существенно особую точку. Для этого функцию

$$\sum_{k=1}^n e^{\mu_k z} \left( C_k^- + \delta_k \int_{z_0}^z e^{-\mu_k \zeta} F_-(\zeta) d\zeta \right)$$

разложим в ряд Лорана в окрестности бесконечности и приравняем к нулю коэффициенты при положительных степенях  $z$  в этом разложении. В результате получим, что постоянные  $C_k^-$  перестанут быть произвольными и должны будут являться решением бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \mu_k^m C_k^- = \sigma_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

где

$$\sigma_m = -\frac{m!}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{dt}{t^{m+2}} \sum_{k=1}^n \delta_k e^{\mu_k t} \int_{z_0}^t e^{-\mu_k \zeta} F_-(\zeta) d\zeta,$$

$R$  – достаточно большое число.

Матрица системы (18)

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^m & \mu_2^m & \dots & \mu_n^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

имеет ранг  $n$ , поскольку ненулевым будет, например, ее минор из первых  $n$  строк:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^n & \mu_2^n & \dots & \mu_n^n \end{vmatrix} = \mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n U \neq 0,$$

где  $U$  – определитель Вандермонда чисел  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . Следовательно, система (18) имеет разве что единственное решение.

Отметим, что из формул для производных функций  $\Phi_{\pm}(z)$ , найденных методом вариации произвольных постоянных, легко может быть усмотрена  $H$ -непрерывность предельных значений этих производных (а тогда и функции  $\varphi(t)$ ) на кривой  $L$ .

### 3. Основной результат и заключительные замечания

Проведенные исследования позволяют сформулировать следующий результат.

**Теорема.** Если задача Римана (4) разрешима, условия (17) выполнены и система (18) совместна, то решение уравнения (1) с функциями (2), (3) существует и записывается по формуле

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n \left( e^{\lambda_k t} \left( C_k^+ + \gamma_k \int_0^t e^{-\lambda_k \zeta} F_+(\zeta) d\zeta \right) - e^{\mu_k t} \left( C_k^- + \delta_k \int_{z_0}^t e^{-\mu_k \zeta} F_-(\zeta) d\zeta \right) \right),$$

в которой постоянные  $C_k^+$  связаны лишь равенством (12), а постоянные  $C_k^-$  являются решениями системы (18).

Отметим, что при  $\varkappa \geq 0$  условия (17) в развернутом виде будут означать совместность системы линейных алгебраических уравнений для постоянных, входящих в решение задачи Римана (4).

Отметим также важный частный случай. Если окажется, что  $F_-(z) = K \in \mathbb{C}$ , то рассуждения, связанные с решением уравнения (6), упростятся. Условия (17) будут, очевидно, выполняться. Взяв в формуле (16)

$$C_k^- = -\frac{K \delta_k e^{-\mu_k z_0}}{\mu_k}, \quad k = \overline{1, n},$$

получим после интегрирования в этой формуле функцию

$$\Phi_-(z) = -\frac{K}{z} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{\mu_k}$$

с нужными свойствами. Следовательно, в случае  $F_-(z) = K$  уравнение (1) всегда разрешимо.

### Литература

1. Зверович Э.И. Обобщение формул Сохоцкого // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 24–28.
2. Шилин А.П. Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 48–56.
3. Шилин А.П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлера типа // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2020. Т. 56, № 1. С. 17–29.
4. Шилин А.П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с рекуррентными соотношениями в коэффициентах // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 6–15.
5. Зверович Э.И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами // Докл. НАН Беларусі. 2010. Т. 54, № 6. С. 5–8.
6. Шилин А.П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58, № 4. С. 358–369.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

**A.P. Shilin**

Belarusian State University

## SOLUTION ON A CLOSED CURVE OF A LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH COEFFICIENTS OF A SPECIAL STRUCTURE

**Keywords:** *integro-differential equation, generalized Sokhotsky formulas, Vronsky determinant, Riemann boundary problem, linear differential equation.*

**Abstract.** *A linear hypersingular integro-differential equation of order  $n \geq 3$  is solved explicitly on a closed curve in the complex plane. The coefficients of the equation have a special structure. The equation is reduced to Riemann boundary value problem for analytic functions and linear differential equations. Fundamental systems of solutions are found for homogeneous equations. For inhomogeneous equations, the method of variation of arbitrary constants is applied, after which some additional conditions of for solutions are taken into account.*

## РАЗДЕЛ 4

### Новые информационные технологии в образовании

М.М. Абдуллаева

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

УДК 159.9.072.43

#### ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ И СТУДЕНТОВ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

Ключевые слова: *взаимодействие, преподаватель, студент, аттестационная работа, критерии оценки, публичная презентация, семантический дифференциал.*

*Статья посвящена изучению критериев оценки итоговой работы, венчающей многолетнее взаимодействие студента со своим научным руководителем. В условиях современной образовательной среды оценивание текста и его публичной защиты со стороны преподавателей и студентов опирается на разную структуру общих критериев, что порождает проблему объективности оценки и ее справедливости. Результаты проведенного исследования позволяют увидеть рассогласование оценок студентов и преподавателей как в оценке текста, так и докладчика. Было показано, что основные проблемы студентов младших курсов связаны с организацией встреч с руководителем и плохим знанием формальных требований к курсовой работе, студентов выпускного курса – с планированием времени для написания текста и с подготовкой к защите. Полученные данные позволяют обосновать выделение трех направлений в работе научного руководителя со студентом в ходе подготовки совместной научной работы – подробное и специальное информирование об основных требованиях к работе, обучение тайм-менеджменту и тренировку навыков самопрезентации.*

Один из важных аспектов обучения в вузе – непосредственное общение между преподавателями, которые являются представителями профессионального сообщества, и студентами, ставшими его адептами. Многочисленные исследования показывают, что выпускники в своей самостоятельной профессиональной жизни выбирают стиль и форму коммуникации со своими «учениками» и коллегами, которые были характерны для их взаимодействия с научным руководителем [1–3]. Расширение возможностей контактов всех участников образовательной

среды с использованием современных технологий приводит к необходимости разработки понятных критериев оценки эффективности такого взаимодействия.

Самым насыщенным периодом общения студента с научным руководителем, осуществляющим обучающую и контролирующую функции, является период подготовки аттестационной работы, в которой студент должен продемонстрировать не только степень усвоенности научной методологии, но и свой профессиональный интерес, уровень креативности и готовности к самостоятельной работе. Этот период можно условно разделить на два этапа. Первый этап связан с написанием текста, завершающим сбор и анализ теоретического и эмпирического материала. При этом текст должен отвечать известным критериям – требуемому объему, научному языку и т.п. Второй этап – собственно оценивание работы – включает оценку самого текста и публичное представление основных результатов в виде презентации и ответов на вопросы аудитории автором текста.

Обращение к этому периоду взаимодействия научного руководителя и студента обусловлено общей проблемой подготовки востребованного специалиста, к «мягким навыкам» которого в настоящее время предъявляются особые требования – ясно выражать мысли как устно, так и письменно, правильно понимать собеседника и спорить с оппонентом, убедительно представлять результаты своей работы и т.п. Важными факторами успешности такого взаимодействия, на наш взгляд, являются адекватная оценка самой ситуации оценивания, а также единство критериев оценивания итогового продукта как исполнителями, так и членами экспертного совета.

**Цель нашей работы** состояла в изучении особенностей оценивания аттестационных работ студентами и преподавателями, которые строят свое взаимодействие на общем понимании требований к этой работе. В связи с тем, что преподаватели вуза, осуществляющие руководство работами студентов, являются носителями представлений об «эталонной» курсовой / дипломной работе и в ходе взаимодействия со студентами должны передать это представление в полном объеме, мы предположили, что рассогласование в оценивании работ будет связано с субъективностью и разной значимостью для участников отдельных критериев. Выявление и рефлексия существующих проблем в этой области будут иметь положительное влияние как на повышение качества самих аттестационных работ, так и на уровень профессиональной компетентности студентов.

**Программа исследования.** Структура оценки включает объект оценивания (в нашем случае это аттестационный текст и выступление студента по представлению своей работы экспертной комиссии), критерии, которые различаются в отношении этих объектов, и результат,

удовлетворяющий всех участников. Учитывая, что оценивание – это итог совместной работы, выделяются три рода оценок, связанных с отражением объект-объектных (формальные критерии), субъект-объектных (субъективные критерии, связанные с опытом оценщика) и субъект-субъектных (например, особенности взаимодействия в диаде «руководитель – студент») отношений. Для получения общей картины всех трех видов оценки нами были разработаны семантические дифференциалы (СД) для описания выделенных объектов, включающие 10 антонимичных прилагательных, выделенных в результате контент-анализа бесед с преподавателями и студентами по проблеме написания и представления курсовых / дипломных работ и студенческих интернет-форумов, посвященных проблемам, возникающим в тандеме «руководитель – студент» в ходе написания курсовых и дипломных работ.

В СД для описания «автора, успешно представившего свою работу» вошли шкалы: слабый – сильный, активный – пассивный, уверенный – сомневающийся, тревожный – спокойный, умный – глупый, веселый – грустный, многословный – лаконичный, обаятельный – отталкивающий, миролюбивый – воинственный, вялый – энергичный, наиболее часто упоминаемые в описании студентов, удачно или неудачно представивших свою работу. СД, предназначенный для описания «текста, заслуживающего высокой оценки», состоял из шкал, включавших не столько формальные критерии (соответствие темы содержанию, наличие необходимых глав, использование классической и новейшей литературы, обоснование программы исследования, грамотность анализа полученных данных и др.), сколько субъективные критерии: многозначный – однозначный, большой – маленький, подробный – лаконичный, простой – сложный, смелый – осторожный, структурированный – хаотичный, новаторский – консервативный, экспрессивный – нейтральный, глубокий – поверхностный, интересный – скучный.

**Выборка.** В опросе участвовали 90 студентов старших курсов и 20 преподавателей психологического факультета, имеющих опыт руководства научными работами студентов. Им было нужно оценить два объекта: «автора, успешно представившего свою работу» и «текст, заслуживающий высокой оценки» – по шкалам СД.

**Полученные результаты** свидетельствуют о том, что представления студентов о критериях качества текста работы не совпадают с системой оценок преподавателей. Например, все научные руководители отмечают необходимость хорошей теоретической проработки темы, этот критерий представлен только у 30% выборки студентов. На структурированность и логичность материала, культуру оформления текста, выделенные преподавателями, обращают внимание не больше 20% студентов. Новизна, интересность и практическая

значимость работы, важные для экспертов, волнуют около 10% студентов.

Ответы студентов на вопросы анкеты показали, что большинство студентов считают основной проблемой выполнение работы в кратчайшие сроки из-за постоянного откладывания сбора материала и написания текста на потом, причем эта тенденция усиливается от третьего курса к пятому. Затем они указывают на трудности, связанные с незнанием формальных требований, предъявляемых к работам, со сложностью организации встреч с научным руководителем, с подготовкой к процедуре публичной защиты, в ходе которой они не только должны справиться с волнением, доложить результаты своей работы, но и ответить на вопросы аудитории.

Ответы преподавателей на вопрос «Какие самые частые ошибки допускают студенты при защите?» касаются содержания самого доклада (отсутствие логики, структуры, плохое владение материалом и т.п.), особенностей выступления (отсутствие ориентации на слушателей, излишняя напористость или, напротив, неготовность защищать свои идеи, несоблюдение временного регламента) и самого студента (неуверенность, агрессивность, пассивность, несерьезность).

Ввиду того, что размер выборки преподавателей не позволял использовать процедуру факторизации их оценок «текста» и «автора» по шкалам СД, нами был предпринят поиск значимых различий в оценках студентов и преподавателей по непараметрическому критерию Манна – Уитни. Так, описания «успешного автора» студентов младших курсов статистически не различаются с оценками преподавателей. Значимые различия (на уровне значимости  $p < 0,05$ ) были получены при сравнении с оценками студентов пятого курса по шкалам «активный–пассивный», «тревожный – спокойный», «обаятельный – отталкивающий». Возможно, студенты младших курсов находятся под более сильным влиянием требований образовательной среды, менее критичны, стараются соответствовать формальным критериям, тогда как выпускники лучше понимают степень своей ответственности за конечный результат и допускают большую самостоятельность в работе, в частности, в выборе критериев, по которым оцениваются итоги работы.

Преподаватели описывают текст, заслуживающий высокой оценки, как более многозначный, сложный, смелый и глубокий, чем студенты (на уровне значимости  $p < 0,05$ ). А при оценке успешного автора хотят видеть его более активным, тревожным и менее обаятельным, чем студенты. Мы предполагали, что субъективные критерии оценок как «автора», так и «текста» будут различными у студентов разных курсов, но при этом ожидали роста согласованности этих оценок с экспертными оценками преподавателей в связи с приобретением студентами опыта по созданию и представлению работ при продвижении от младшего курса к старшему.

Но полученные результаты не подтверждают наше предположение: студенты выпускного курса ориентируются на собственные критерии, являющиеся предвестником самостоятельности специалиста.

**Выводы.** Результаты проведенного исследования позволяют утверждать, что студенты младших курсов не знают, как организовать встречи с руководителем и где самостоятельно найти информацию о формальных требованиях к тексту курсовой работы, студенты выпускного курса часто недооценивают количество времени, необходимого для оформления текста и подготовки к публичной защите. В описаниях *«автора, успешно представившего свою работу на защите»* были обнаружены рассогласования оценок студентов и преподавателей. Студенты склонны переоценивать роль обаяния и считают, что нужно быть абсолютно спокойными, преподавателям важно ощущать заинтересованность автора, он должен волноваться и быть более активным.

В описаниях студентами *«текста, заслуживающего высокой оценки»* отражаются основные критерии – это содержательная емкость текста, ясность основной идеи, объем, индивидуальный стиль автора, но в выраженности оценок с преподавателями они расходятся. Нужно отметить, что отношение к своей работе в целом по мере продвижения к выпускному курсу становится менее формальным, более личностным.

Полученные данные могут лечь в основу разработки практического курса для студентов, начинающих изучать основы создания письменных текстов. Этот курс должен включать: глубокую и серьезную проработку каждого критерия оценивания научной работы с разбором ошибок, которые обычно допускаются авторами; освоение техник целеполагания, планирования, соблюдения сроков, соотнесения сложности решаемых задач с наличными физическими и психическими ресурсами; тренировку навыков публичного выступления и самопрезентации.

### Литература

1. Зырянов В.В. Научный руководитель: между вызовами времени и реалиями высшего образования // Высшее образование в России. 2019. Т. 28, № 10. С. 25-37.
2. Макарова Л.Н. Влияние научного руководителя на формирование профессиональной направленности аспирантов // Психолого-педагогический журнал Гаудеамус. 2018. Т. 1, № 2(36). С. 17-21.
3. Dong G., Chiu D.K.W., Huang P.-S., Ho K.K.W., Lung M.M.-w. and Geng Y. Relationships between research supervisors and students from coursework-based master's degrees: information usage under social media // Information Discovery and Delivery. 2021. Vol. 49, No. 4. P. 319-327.

**M.M. Abdullaeva**

Lomonosov Moscow State University

## FEATURES OF PROFESSORS AND STUDENTS INTERACTION IN THE EDUCATIONAL ENVIRONMENT

**Keywords:** *communication, professors, students, certification work, evaluation criteria, public presentation, semantic differential.*

**Abstract.** *The article is devoted to the study of evaluation criteria of the final work, which crowns the long-term interaction of a student with his or her thesis advisor. In the modern educational environment assessment of the text and its public defense by teachers and students relies on a different structure of common criteria, which raises the problem of objectivity and fairness of assessment. The results of the study allow us to see the discrepancy in the assessment of students and teachers both in the evaluation of the text and in the situation of its defense. It was shown that the main problems of undergraduates are related to the organization of meetings with the supervisor and poor knowledge of the formal requirements for coursework, the graduate students - with the planning of time for writing the text and with the preparation for the defense. The data obtained allow us to justify the allocation of three directions in the work of the supervisor with the student during the preparation of a joint research paper - detailed and special information about the basic requirements for the paper, training in time management and training of self-presentation skills.*

**Н.В. Аксенов, О.М. Киселева**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 004.9

## ВИРТУАЛЬНЫЙ ПОМОЩНИК МЕДИЦИНСКОГО УЧРЕЖДЕНИЯ

**Ключевые слова:** *виртуальный помощник, мессенджер, графовые модели, информатизация.*

*В статье описана актуальность использования информационных онлайн-собеседников в медицинских учреждениях. Авторами представлены назначение и содержание чат-бота, дающего информацию об одной из поликлиник города Смоленска, данные о которой получены из открытых источников.*

Пандемия 2020 года оказала влияние на уровень цифровизации всех сфер жизни и деятельности человека [1]. Вынужденное ограничение личного общения стимулировало развитие онлайн-средств получения

информации [2; 3], разработку программных продуктов для выполнения удаленной деятельности [4; 5], реализацию дистанционного обучения [6; 7] и т.п. Современные медицинские учреждения также применяют в своей работе элементы электронной информационной поддержки. Например, одним из наиболее успешных начинаний является возможность электронной записи на прием к врачу, посредством портала государственных услуг Российской Федерации [8].

Наряду с уже давно внедренными элементами автоматизации деятельности медицинского учреждения [9] появляются новые программные продукты, специализированные для медицинской сферы и адаптируются приложения, успешно зарекомендовавшие себя в других областях. К ним можно отнести виртуальные информационные помощники, для работы с которым достаточно только мобильного телефона [10].

«Виртуальный собеседник, или чат-бот, – программа, имитирующая человеческое общение, алгоритм которой ориентирован на решение поставленных задач посредством ведения диалога» [11].

Информационный чат-бот может стать тем инструментом, который позволит перевести в автоматический режим рутинные процессы информирования пациентов. Современный виртуальный помощник медицинского учреждения позволяет частично реализовать следующие функции регистратуры:

- осуществление коммуникации между представителем поликлиники и пациентом, при этом информацию можно получать в любое удобное время, а не только в рабочие часы [12];

- предварительное заполнение карточки данными посетителя и проведение базовых элементов первичного опроса. Это ведет к увеличению скорости получения нужной информации, поскольку онлайн помощник одновременно способен вести диалог с большим числом собеседников;

- ведение статистики как посещений пациентов, так и работы врача, сбор отзывов и др.

Информационный чат-бот может стать эффективным дополнением уже существующих средств цифрового информирования населения и применяться наряду с возможностями в области здравоохранения портала государственных услуг Российской Федерации и сайтов медицинских учреждений.

В качестве примера реализации информационного виртуального помощника медика рассмотрим чат-бот, разработанный на базе материалов, находящихся в свободном доступе на сайте областного государственного бюджетного учреждения здравоохранения «Поликлиника № 6». В основу онлайн-собеседника положена графовая модель, которая позволяет имитировать диалог. Семантическая сеть дает

возможность моделировать структуру рассматриваемой предметной области, что делает алгоритмы, основанные на ней, наглядными и удобными для реализации. Благодаря этому она является востребованным инструментом моделирования в различных предметных областях. [13–16].

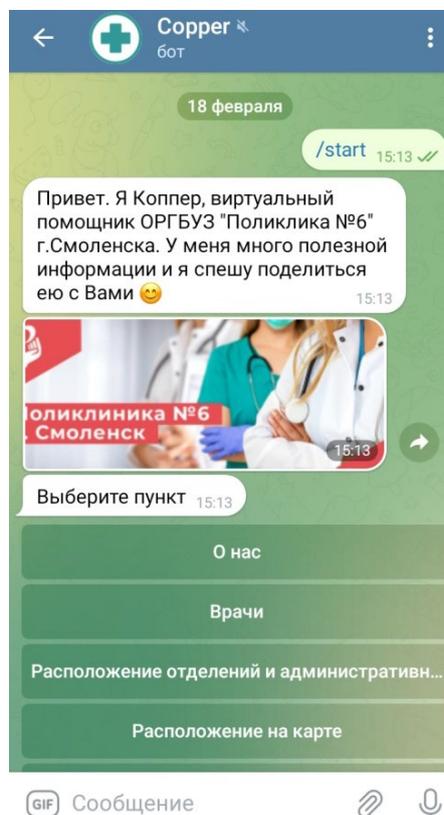


Рис. 1. Главная страница информационного виртуального собеседника медицинской организации

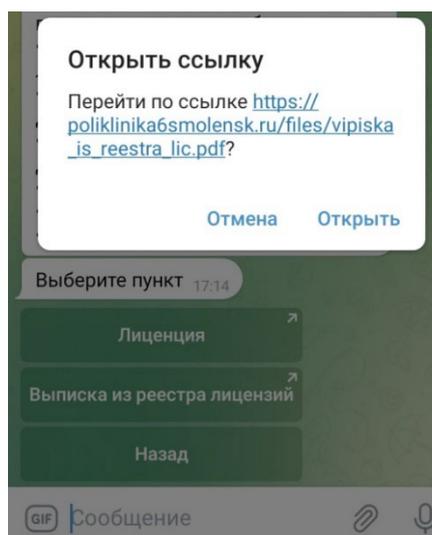


Рис. 2. Набор документов организации

Рассматриваемый информационный виртуальный помощник содержит:

- 1) главную страницу – меню с перечислением основных возможностей чат-бота (рис. 1);
- 2) пункт меню, позволяющий узнать подробнее об организации (рис. 2);
- 3) возможность ознакомиться с данными медицинского персонала;
- 4) данные о местоположении отделений и административных корпусов (рис. 3);
- 5) возможность связаться с регистратурой, задав вопрос в чате.

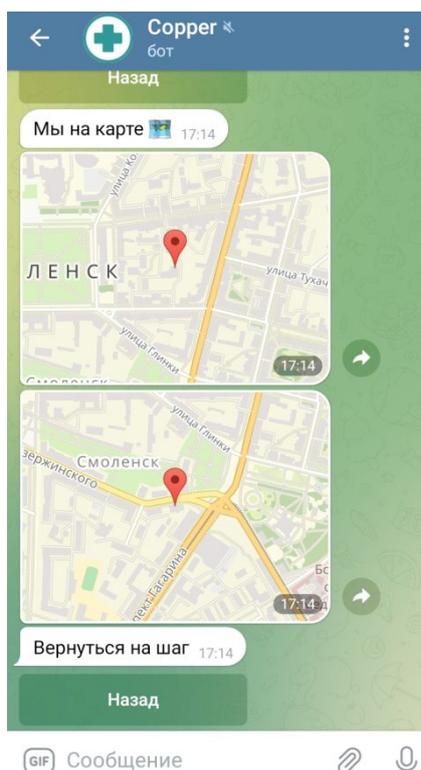


Рис. 3. Расположение на карте отделений и административных корпусов

Приводимый в качестве примера чат-бот информационной поддержки медицинского учреждения является демонстрационной версией и содержит ограниченное число функций, однако позволяет показать принципиальную возможность разработки подобных виртуальных помощников. Он разработан в конструкторе онлайн-собеседников *Botmother* и предназначен для использования в *Telegram*.

### Литература

1. Senkina G.E., Timofeeva N.M., Kiseleva O.M. Modernization of Traditional Educational Forms in the Context of Distance Learning // *Journal of Higher Education Theory and Practice*. 2022. Vol. 22, No. 3. P. 160-165.
2. Смолянкин Н.Н., Быков А.А., Киселева О.М. Проблемы, возникающие при переходе вузов на дистанционное обучение // *Современные проблемы науки и образования*. 2021. № 5. С. 18.
3. Сенчилов В.В., Тверской Е.А. Об одном способе разработки справочного мобильного приложения по физике для Android // *Развитие научно-технического*

творчества детей и молодежи: сборник материалов VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Смоленск, 22 апреля 2022 года. Вып. 6. Киров: Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2022. С. 167-173.

4. Самарина А.Е., Киселева М.П., Тимофеева Н.М. Использование информационных сетевых технологий в проекте изучения культуры родного края // Учитель и время. 2016. № 11. С. 210-213.

5. Киселева О.М., Солдатенкова Я.Г. Проектирование образовательных информационных систем // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: Сборник материалов V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Смоленск, 21 мая 2021 года. Вып. 5. Киров: Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2021. С. 93-98.

6. Киселева О.М. Программные средства поддержки удаленного обучения // Вызовы цифровой экономики: тренды развития в условиях последствий пандемии COVID-19: Сборник статей IV Всероссийской научно-практической конференции, приуроченной к Году науки и технологий в России, Брянск, 25 мая 2021 года. Брянск: Брянский государственный инженерно-технологический университет, 2021. С. 143-146.

7. Козлов С.В., Быков А.А. О проблеме формирования готовности студентов к использованию автоматизированных систем обучения в учебном процессе // Современные проблемы науки и образования. 2022. № 4. С. 17.

8. Киселева О.М., Быков А.А. Модель формирования готовности пожилого населения к деятельности в современной информационной среде // Мир науки. 2017. Т. 5, № 3. С. 13.

9. Сенчилов В.В., Григорьева Г.М., Ходченков В.Ю. О результатах внедрения в медицинскую практику методов интеллектуального анализа данных // Образование в цифровую эпоху: сборник статей по материалам Международной научно-практической конференции преподавателей, студентов, аспирантов, докторантов и заинтересованных лиц, Нижний Новгород, 10–11 декабря 2019 года. Нижний Новгород: Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина, 2019. С. 183-186.

10. Быков А.А., Киселева О.М. Применение мессенджеров в образовательном процессе // Современные наукоемкие технологии. 2022. № 5-1. С. 127-131.

11. Быков А.А., Киселева О.М. Оценка эффективности применения чат-бота как информационной поддержки преподаваемой дисциплины // Современные проблемы науки и образования. 2022. № 1. С. 34.

12. Козлов С.В., Резванцева А.А. Чат-боты как одна из тенденций развития современного образования // Международный журнал экспериментального образования. 2022. № 5. С. 44-49.

13. Киселева О.М., Сенькина Г.Е. Применение методов математического моделирования в педагогике // Вестник Поморского университета. Серия: Физиологические и психолого-педагогические науки. 2007. № 3. С. 32.

14. Киселева О.М., Тимофеева Н.М. Построение концептуальной модели учебных словарей по педагогическим дисциплинам // Концепт. 2013. № 3. С. 3216-3220.

15. Тимофеева Н.М. Попытка формализации педагогической науки путем систематизации ее терминосистемы // Информатика и образование. 2008. № 4. С. 105-107.

16. Тимофеева Н.М. Проектирование учебных словарей по педагогическим дисциплинам: дис. канд. пед. наук. Смоленск, 2004. 215 с.

**N.V. Aksenov, O.M. Kiseleva**  
Smolensk State University

## **VIRTUAL ASSISTANT OF A MEDICAL INSTITUTION**

**Keywords:** *virtual assistant, messenger, graph models, informatization.*

**Abstract.** *The article describes the relevance of using online information interlocutors for medical institutions. The authors present the purpose and content of a chatbot containing information about one of the polyclinics of the city of Smolensk, data about which are obtained from open sources.*

**М.В. Акуленок, М.Р. Тихонов, О.С. Шикла**  
*Московский институт электронной техники*

УДК 004:378

## **ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОННОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ДЛЯ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ПО НАПРАВЛЕНИЮ 27.04.02**

Ключевые слова: *диагностика, электронное тестирование, формирование компетенций, индикаторы, программные продукты.*

*В данной работе рассматривается вариант применения электронного тестирования с использованием программного продукта Moodle для диагностики сформированности компетенций студентов вуза по направлению 27.04.02 «Управление качеством». В статье проанализированы преимущества и недостатки разных подходов.*

Диагностика достижения запланированных результатов образовательных программ высших учебных заведений является одним из вариантов оценки, предназначенной для формирования представления о качестве предоставленной образовательной «услуги». Метод заключается в проведении итогового тестирования или опроса студентов, окончивших программу обучения целиком либо ее часть, достаточную для проверки сформированности компетенций.

Организация проведения тестирования [1] как с применением ИТ-технологий [2], так и классическим методом (аудиторно) является трудоемким и требовательным к методическим и правовым аспектам процессом, включающим в себя:

- назначение ответственных за проведение тестирования от образовательной организации;
- назначение ответственных за анализ полученных результатов;
- назначение ответственных за формирование контрольных материалов;
- перераспределение нагрузки исполнителей на формирование тестов, проведение тестирования и проверку результатов;
- формирование комплектов контрольных материалов с ответами-ключами;
- проверку контрольных материалов на соответствие рабочим программам дисциплин;
- организацию доступа к аудитории выпускников, либо студентов соответствующих курсов, включая выписку пропусков;
- организацию проведения непосредственного тестирования;
- сбор результатов тестирования;
- оценку результатов тестирования;
- анализ полученных результатов для формирования представления о качестве образовательной «услуги».

Кроме того, не следует забыть о требованиях и в отношении отчетности о контрольных мероприятиях. Все это создает дополнительную нагрузку:

- на исполнителей, по основной деятельности участвующих в образовательном процессе;
- на обеспечивающий персонал, ответственный за пропускной контроль, аудитории и материально-техническое обеспечение;
- на управленческий персонал, выполняющий либо общие управленческие функции, либо специально назначенный для координирования действий по диагностике.

Аудиторное тестирование имеет ряд недостатков, вызванных самой природой его очного выполнения:

- высокая нагрузка преподавателей, связанная с дополнительными действиями по формированию контрольных материалов (никто, кроме них, не сможет их разработать) и оценке полученных результатов;
- высокая нагрузка на методистов, которая заключается в ряде операций по приведению в соответствие полученных от преподавателей контрольных материалов и согласованию комплектов тестов;
- высокая нагрузка на аудиторный фонд и материально-техническое обеспечение при тотальном контроле сформированности компетенций всех выпускников;
- сложность и трудоемкость правок контрольных мероприятий при изменении нормативно-правовых требований, как внешних, так и внутренних.

Для преодоления перечисленных недостатков возможно применение систем электронного тестирования с разграниченным доступом и автоматическим формированием отчетов. Одним из таких средств является система Moodle. Зачастую такая система интегрирована в электронную среду высшего учебного заведения, что позволяет получить следующие преимущества:

- единая база учетных записей студентов, включая выпускников (при соответствующем решении о хранении таких записей со стороны руководства образовательной организации);

- возможность удаленного доступа к ресурсам дисциплин, формирующих компетенции, по которым проводится диагностика;

- возможность автоматической интеграции результатов тестирования и формирования отчетов по нему;

- возможность формирования временных учетных записей для доступа к контрольным мероприятиям сторонних опрашиваемых.

Помимо этого, сам электронный тест, созданный в программном продукте Moodle, позволяет сформировать набор разнообразных вопросов и заданий, охватывающий широкий спектр профессиональных задач: выбор решения, совокупности решений, предложение ответа, сопоставление и т.д.

Для проведения диагностики и оценки сформированности компетенций студентов МИЭТ по направлению 27.04.02 «Управление качеством» [3] с применением электронного тестирования на базе программного продукта Moodle были выбраны следующие компетенции:

- УК-6 «Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки», формируемая в дисциплине «Корпоративная культура»;

- ОПК-7 «Способен оценивать и управлять рисками в системах обеспечения качества», формируемая в дисциплине «Методы менеджмента риска»;

- ПК-3 «Способен разрабатывать и применять нормативно-техническую документацию по созданию системы обеспечения качества и контролю ее эффективности», формируемая в дисциплинах «Менеджмент качества программных продуктов» и «Отраслевые модели систем менеджмента качества».

По каждой дисциплине сформулированы индикаторы и разработаны задания как открытого, так и закрытого типов. Некоторые задания являются комплексными, так как ориентированы на два и более индикатора, например на индикаторы умений и опыта деятельности.

В качестве тестовых заданий, проверяющих сформированность компетенций в части опыта деятельности, учитывая невозможность применения классических типов вопросов, применялись кейс-задачи, основанные на реальных ситуациях и ориентированные на таксономию

Блума уровней «анализ», «синтез» и «оценка» [4]. Такие задачи предполагают открытый ответ.

Выбранные дисциплины изучаются студентами не в выпускных семестрах, в связи с чем для проведения диагностики и оценки сформированности компетенций были выбраны студенты, продолжающие обучение.

В программном продукте Moodle было создано три теста по указанным компетенциям. Вопросы и задания по дисциплинам объединялись в общий тест. Таким образом реализовывалась задача диагностики сформированности компетенций студентов в целом.

Выбранным группам было предложено пройти разработанные диагностические тесты. В результате были получены данные о правильных ответах (выполненных заданиях), на основе которых было принято решение о корректировке заданий и установлении ограничений по времени на ответ.

Применение электронного тестирования на базе программного продукта Moodle позволило получить следующие преимущества:

- создана единая база контрольных мероприятий для диагностики сформированности компетенций студентов, интегрированная в единую электронную среду вуза;

- при формировании комплектов тестов и контрольных заданий преподаватели имели возможность использовать ранее разработанные и реализованные в электронной среде ВУЗа фонды оценочных средств;

- методисты, обладая соответствующей учетной записью и ролью в системе, имели возможность контролировать подготовку и проведение контрольных мероприятий в виде теста программного продукта Moodle;

- упрощена процедура прохождения диагностики со стороны студентов, с применением уже существующего личного кабинета и доступа к тестам из электронных карточек дисциплин;

- интегрирован отчет по результатам диагностики в общую систему электронных журналов, что дало возможность выставлять оценки по пройденным контрольным мероприятиям;

- результаты тестирования доступны преподавателям и методистам соответствующих направлений подготовки для просмотра через электронную среду вуза.

Однако были выявлены следующие недостатки такого способа диагностики:

- низкая степень контроля за прохождением тестирования студентами при отсутствии соответствующего прокторинга;

- низкая мотивация студентов при прохождении тестирования.

Применение программного продукта Moodle позволило реализовать процедуру оценки сформированности компетенций студентов в рамках диагностической работы, исключая сложности очного проведения

тестирования. Интеграция Moodle с общей электронной средой вуза дала возможность осуществления контроля и формирования отчетов по результатам диагностики как в процессе формирования контрольных материалов, так и при проведении тестирования.

### Литература

1. Акуленок М.В., Ларионов Н.М., Шикула О.С. Статистический подход к оценке качества образовательных программ // Инженерное образование. 2012. №9. С. 66-71.
2. Акуленок М.В., Тихонов М.Р., Шикула О.С. Разработка и применение адаптивного электронного тестирования в учебном процессе // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2020. Вып. 21. С. 354-360.
3. Приказ Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 25 ноября 2021 №1094.
4. Newton Philip M., Da Silva Ana, Peters, Lee George. A pragmatic master list of action verbs for Bloom's taxonomy // Front. Educ. 2020. 10 July. Sec. Assessment, Testing and Applied Measurement.

**M.V. Akulenok, M.R. Tikhonov, O.S. Shikula**  
*National Research University of Electronic Technology*

## APPLICATION OF THE ELECTRONIC TESTING SYSTEM FOR DIAGNOSTIC WORK IN EDUCATIONAL DIRECTION 27.04.02

**Keywords:** *diagnostics, electronic testing, competency building, indicators, software products.*

**Abstract.** *This paper provides an option for using electronic testing using the Moodle software product to diagnose the formation of competencies of university students in the direction of study 27.04.02 «Quality Management». In addition, the article presents a number of discovered advantages and disadvantages.*

**Н.Н. Богданова**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 519.283

## РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СКМ WOLFRAM MATHEMATICA

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, однородные дифференциальные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, система компьютерной математики Wolfram Mathematica.*

*В данной статье на конкретных примерах рассматриваются возможности использования математического пакета Wolfram Mathematica при отыскании общих и частных решений дифференциальных уравнений.*

**1. Введение.** Дифференциальные уравнения – раздел математики, изучающий теорию и способы решения уравнений, содержащих искомую функцию и ее производные различных порядков одного аргумента (обыкновенные дифференциальные уравнения) или нескольких аргументов (дифференциальные уравнения в частных производных).

Так как дифференциальным уравнением описывается связь между неизвестной функцией и ее производными, то такие связи отыскиваются в различных областях знаний: в механике, физике, химии, биологии, экономике и многих других науках [1–3]. Дифференциальные уравнения применяются для математического описания природных явлений и являются эффективным инструментом математического моделирования. Например, простейшее уравнение  $y' = ky$  описывает рост народонаселения, динамику роста цен при постоянной инфляции, процесс радиоактивного распада и др.

**2. Решение задач.** Приведем некоторые примеры нахождения общих решений дифференциальных уравнений разных типов и построения интегральных кривых с помощью СКМ Wolfram Mathematica.

```
(*Пример 1*)
(*Зададим ДУ*)
DE1 = x * y' [x] - y[x] == 0;
(*Найдем общее решение данного дифференциального уравнения*)
sol = DSolve[DE1, y[x], x]
y1[x_] = y[x] /. sol[[1]];
Print["Общее решение ДУ имеет вид: y[x]=", y1[x]]
(*Построим графики интегральных кривых данного ДУ*)
Curves = List[];
(*Зададим несколько интегральных кривых, изменяя произвольную постоянную*)
For[i = -10, i ≤ 10, i++, t = y1[x];
 Curves = AppendTo[Curves, ReplaceAll[t, C[1] → i]]
]
G1 = Plot[Curves, {x, -3, 3}]
{{y[x] → x C[1]}}
```

Общее решение ДУ имеет вид:  $y[x]=x C[1]$

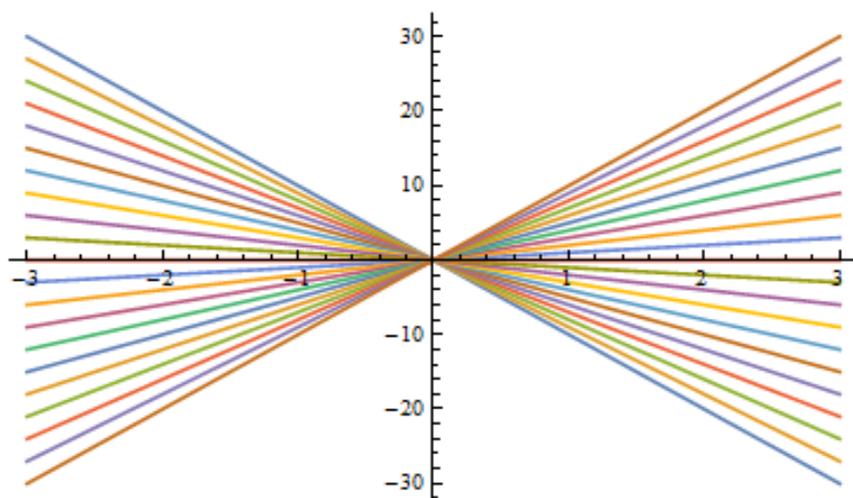


Рис. 1. Решение дифференциального уравнения и построение интегральных кривых

```
(*Пример 2*)
(*Построить поле направлений и изоклины*)
(*Зададим ДУ*)
DE3 = y'[x] == Sqrt[x^2 + y[x]^2]
f[x_, y_] = Sqrt[x^2 + y^2];
VP = VectorPlot[{1, f[x, y]} / Sqrt[1 + f[x, y]^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, VectorScale -> 0.025,
 VectorStyle -> Orange, StreamPoints -> 20, StreamScale -> Full];
CP = ContourPlot[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, Contours -> 5, ContourShading -> False];
Show[CP, VP]
```

$$y'[x] = \sqrt{x^2 + y[x]^2}$$

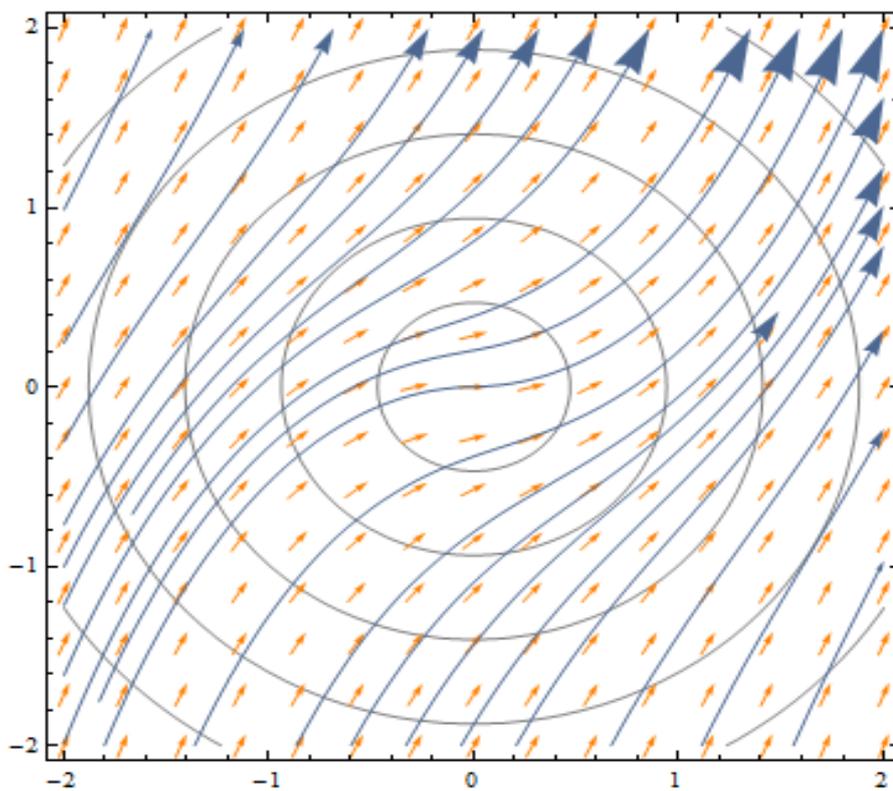


Рис. 2. Построение поля направлений и изоклин

```

(*Пример 3*)
(*Зададим уравнение*)
DE = y'[x] == ((y[x])^2 - x^2) / (2 * x * y[x]);
(*Проверим, является ли оно однородным уравнением относительно x и y*)
s = y'[x] /. Solve[DE, y'[x]][[1]]

$$\frac{-x^2 + y[x]^2}{2 x y[x]}$$

F[X_, Y_] = s /. {x -> X, y[x] -> Y};
If[FullSimplify[F[t * X, t * Y] - F[X, Y]] == 0, Print["Это уравнение однородное"],
 Print["Это уравнение не является однородным"]]
Это уравнение однородное
(*Решим это уравнение*)
sol = DSolve[DE, y[x], x];
Print["Общий интеграл уравнения имеет вид: ", sol]
Общий интеграл уравнения имеет вид: {{y[x] -> -sqrt(-x^2 + x C[1])}, {y[x] -> sqrt(-x^2 + x C[1])}}

```

Рис. 3. Решение однородного дифференциального уравнения первого порядка

```

(*Пример 4*)
(*Зададим ДУ*)
DE = 3 * x^2 * Exp[y[x]] + (x^3 * Exp[y[x]] - 1) * D[y[x], x] == 0
(*Проверим, является ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах*)
P[x_, y_] = 3 * x^2 * Exp[y];
Q[x_, y_] = x^3 * Exp[y] - 1;
dP[x_, y_] = D[P[x, y], {y, 1}]
dQ[x_, y_] = D[Q[x, y], {x, 1}]
If[dP[x, y] == dQ[x, y], Print["Это уравнение в полных дифференциалах"],
 Print["Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах"]]

$$3 e^{y[x]} x^2 + (-1 + e^{y[x]} x^3) y'[x] = 0$$

$$3 e^y x^2$$

$$3 e^y x^2$$

Это уравнение в полных дифференциалах
(*Реализуем алгоритм решения уравнения уравнения в полных дифференциалах*)
F[x_, y_] = Integrate[P[x, y], x] + phi[y]
phi0[y_] = phi'[y] /. Solve[D[F[x, y], y] == Q[x, y], phi'[y]][[1]]
F1[y_] = Integrate[phi0[y], y]
F[x_, y_] = F[x, y] /. phi[y] -> F1[y];
U[x_, y_] = F[x, y];
Print["Общий интеграл уравнения имеет вид: ", U[x, y], "=C"]

$$e^y x^3 + phi[y]$$

-1
-y
Общий интеграл уравнения имеет вид: $e^y x^3 - y = C$

```

Рис. 4. Решение уравнения в полных дифференциалах

```

(*Пример 5*)
(*Зададим ДУ*)
Clear[DE]
DE = (Sin[x] + Exp[y]) + Cos[x] * D[y[x], x] == 0
(*Проверим, является ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах*)
P[x_, y_] = Sin[x] + Exp[y];
Q[x_, y_] = Cos[x];
dP[x_, y_] = D[P[x, y], {y, 1}]
dQ[x_, y_] = D[Q[x, y], {x, 1}]
If[dP[x, y] === dQ[x, y], Print["Это уравнение в полных дифференциалах"],
 Print["Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах"]]
e^y + Sin[x] + Cos[x] y'[x] = 0
e^y
-Sin[x]
Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах
(*Найдем интегрирующий множитель*)
μ[x_, y_] = FullSimplify[(dQ[x, y] - dP[x, y]) / P[x, y]]
(*Реализуем алгоритм решения уравнения в полных дифференциалах*)
F[x_, y_] = Integrate[μ[x, y] * P[x, y], x] + φ[y]
φ0[y_] = φ'[y] /. Solve[D[F[x, y], y] == μ[x, y] * Q[x, y], φ'[y]][[1]]
F1[y_] = Integrate[φ0[y], y]
F[x_, y_] = F[x, y] /. φ[y] → F1[y];
U[x_, y_] = F[x, y];
Print["Общий интеграл уравнения имеет вид: ", U[x, y], "=C"]
DSolve[P[x, y[x]] + Q[x, y[x]] * D[y[x], x] == 0, y[x], x]
-1
-e^y x + Cos[x] + φ[y]
e^y x - Cos[x]
e^y x - y Cos[x]
Общий интеграл уравнения имеет вид: Cos[x] - y Cos[x]=C
{{y[x] → -Log[(x - C[1]) Sec[x]]}}

```

Рис.5. Решение дифференциального уравнения с помощью интегрирующего множителя

```

(*Пример 6*)
(*Зададим ДУ*)
DE2 = x^3 * y''[x] + x^2 * y'[x] == 1;
(*Найдем общее решение уравнения*)
sol2 = DSolve[DE2, y[x], x];
f2[x_] = y[x] /. sol2[[1]];
Print["Общее решение уравнения имеет вид: y(x)=", f2[x]]

```

(\*Зададим семейство интегральных кривых при различных значениях произвольных постоянных\*)  
`Curves = Table[f2[x] /. {C[1] → i, C[2] → j}, {i, -1, 1}, {j, -1, 1}];`  
`Print["Построим интегральные кривые при различных значениях произвольных постоянных"]`  
`Plot[Curves, {x, 0.1, 2}, PlotLegends → "Expressions"]`

Общее решение уравнения имеет вид:  $y(x) = \frac{1}{x} + C[2] - C[1] \text{Log}[x]$

Построим интегральные кривые при различных значениях произвольных постоянных

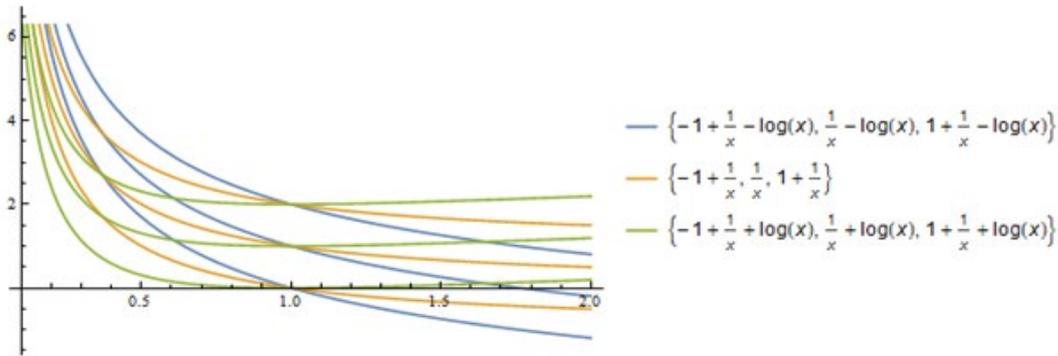


Рис.6. Решение дифференциального уравнения второго порядка и построение интегральных кривых

Подготовка выпускников физико-математических факультетов невозможна без изучения дифференциальных уравнений. Система компьютерной математики Wolfram Mathematica позволяет находить решения таких уравнений, причем в случае не только уравнений первого и высших порядков, но и систем дифференциальных уравнений, а также решения других задач теории дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

### Литература

1. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения/ СПб.: Лань, 1997.
2. Королев А.В. Дифференциальные и разностные уравнения. М.: Юрайт, 2019.
3. Глызин С.Д., Марушкина Е.А. Дифференциальные и разностные уравнения и системы в примерах и задачах. Ярославль: ЯрГУ, 2019.

**N.N. Bogdanova**  
 Smolensk State University

## SOLUTION OF DIFFERENCE EQUATIONS USING SCM WOLFRAM MATHEMATICA

**Keywords:** *difference equations, homogeneous differential equations, equations in total differentials, Wolfram Mathematica computer mathematics system.*

**Abstract.** *This article on generic examples discusses the possibilities of using Wolfram Mathematica math package when searching for special and single exceptions.*

## ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЛАНДШАФТ – СУЩНОСТЬ И ЗНАЧЕНИЕ

Ключевые слова: *информационная образовательная среда, цифровизация, образовательные карты, образовательный ландшафт, индивидуальные траектории обучения.*

*В статье рассматривается сущность и значение понятия «образовательный ландшафт» на современном этапе цифровизации. Понятие «образовательный ландшафт» увязывается с понятием «образовательная карта». Приводятся три основные технологии создания образовательного ландшафта: суперпозиция, включение и поглощение. Описывается пятиэтапная процедура формирования образовательного ландшафта в соответствии с поставленными целями, ориентированный на формирование и анализ индивидуальных и групповых траекторий обучения, анализ и прогнозирование групповой динамики знаний и навыков обучающихся и создание среды поддержки проектирования информационной образовательной среды.*

Современное состояние системы образования можно охарактеризовать в первую очередь наличием противоречия между изменением парадигмы образования, связанным с информатизацией и существенно ускоренном пандемией и сопряженными с ней процессами [1], и недостаточной проработанностью средств описания и учебного процесса, и системы образования в целом, отражающих отмеченное изменение парадигмы.

В связи с этим возникает необходимость разработки таких средств метаописания образовательного процесса, которые в полной мере отражали бы особенности этого процесса, обусловленные информатизацией. При этом разрабатываемый инструментальный метаописания образовательного процесса должен быть гармонизирован с актуальной задачей построения индивидуальных учебных траекторий и поддержания их реализации [2].

В качестве средства метаописания образовательного процесса, протекающего в условиях информатизации, которое было бы гармонизировано с задачей построения индивидуальных учебных траекторий, представляющего собой обобщённый и универсальный инструмент, позволяющий органично вписать агрегированные образовательные карты в структуру информационного образовательного

пространства, мы предлагаем рассматривать образовательный ландшафт [3].

Понятие «образовательный ландшафт» можно трактовать на трёх уровнях: как результат агрегирования нескольких образовательных карт [3]; как совокупность социальных институтов, реализующих задачи в области образования и объединенных по территориальному, организационному или функциональному признакам [4]; как учебное пространство, обладающее определенными свойствами [5].

Соответственно возникает возможность расширения контекста, в рамках которого рассматривается проблема построения индивидуальных образовательных траекторий. В качестве такого более широкого контекста и выступает образовательный ландшафт, как система социальных институтов, реализующих задачи в области образования. Использование образовательного ландшафта в предлагаемой нами трактовке позволяет обеспечить формирование пространства возможных индивидуальных траекторий обучения; анализ и прогнозирование групповой динамики знаний и навыков обучающихся; создание среды поддержки проектирования информационного образовательного пространства. Подобная трактовка понятия «образовательный ландшафт» хорошо согласуется с понятием «образовательная карта», под которым мы понимаем графическое представление информации учебного характера. Ключевыми элементами такого графического представления выступают «элементы знания» и отношения между ними. Под элементами знания мы понимаем «атомарные», неделимые блоки учебного материала (факты, утверждения, теоремы, аксиомы и т.п.). Всем структурным элементам образовательной карты приписываются цвета, которые содержат количественную характеристику следующих свойств:

- объективную значимость элемента образовательной карты, обусловленную как его положением в общей структуре материала, подлежащего изучению, так и целями обучения;

- субъективную значимость элемента образовательной карты для конкретного обучающегося с учетом его личностных особенностей и целевых установок;

- место и роль данного элемента образовательной карты (порядок изучения, связь с предшествующими и последующими элементами, значимость) в рамках конкретного образовательного маршрута конкретного обучающегося;

- текущую степень усвоения данного структурного элемента образовательной карты конкретным обучающимся в конкретный момент времени.

Необходимо отметить, что цвета являются инструментом индивидуализации модели, позволяющим формализовать личностные особенности и установки конкретного обучающегося в конкретный

момент времени. В рамках такого подхода образовательная карта представляет собой пространство всех возможных индивидуальных траекторий обучения в рамках данного учебного материала. При этом возможна реализация следующих функций:

- проектирование индивидуальных образовательных траекторий;
- мониторинг динамики и направленности процесса формирования знаний обучающегося;
- прогнозирование развития процесса обучения во времени.

В качестве ведущих технологий создания образовательного ландшафта мы рассматриваем следующую триаду: суперпозиция, включение, поглощение [3].

Основываясь на изложенном выше понимании образовательного ландшафта, мы предлагаем следующий метод его формирования [3].

1. Структурный и содержательный анализ предметной области, в рамках которой будет осуществляться моделирование.

2. Определение основной технологии построения образовательного ландшафта, обусловленное теми задачами, которые ставятся в процессе композиции образовательного ландшафта:

- технология поглощения, если основной задачей является построение и поддержание индивидуальных и групповых траекторий обучения;

- технология суперпозиции, если основной задачей является мониторинг и прогнозирование групповой динамики знаний, умений и навыков обучающихся;

- технология включения, если основной задачей является формирование, проектирование и поддержка функционирования информационной образовательной среды.

3. Композиция образовательного ландшафта на основе избранной технологии.

4. Совместная интеграция информационной образовательной среды и сформированного образовательного ландшафта.

5. Этап обратной связи:

- мониторинг актуального состояния и прогнозирование групповой динамики знаний, умений и навыков обучающихся;

- формирование и анализ среды, объединяющей возможные индивидуальные образовательные траектории (построенные как для отдельного учащегося, так и для группы обучающихся). Заметим, что такая среда содержит в себе формализованное описание не только актуальных траекторий обучения (то есть тех траекторий обучения, которые на практике осуществлены или находятся в процессе реализации обучающимися), но и потенциальных траекторий обучения (всех возможных альтернатив актуальным образовательным траекториям);

– формирование, проектирование и поддержка функционирования информационной образовательной среды. Данная среда должна содержать в себе всю необходимую информацию, описывающую индивидуальные особенности своих субъектов (к числу которых относится и обучающийся). Соответствующая информация на уровне метаописания отражена в образовательном ландшафте. В силу этого в процессе теоретической разработки и композиции информационной образовательной среды образовательный ландшафт является ключевым источником информации о субъектах этой среды. Осознание этого факта позволяет ставить вопрос о внесении существенных изменений в сложившиеся на данный момент представления о сущности и структуре процесса педагогического проектирования информационной образовательной среды.

В заключение отметим, что предлагаемая нами трактовка образовательного ландшафта как средства метаописания образовательного процесса, в полной мере отражающего особенности этого процесса, обусловленные информатизацией и ориентированного на построение индивидуальных траекторий обучения, позволяет создавать информационные образовательные среды, поддерживающие индивидуальные траектории обучения и отражающие особенности современного этапа цифровизации образования.

### Литература

1. Pokhrel S., Chhetri R. A Literature Review on Impact of COVID-19 Pandemic on Teaching and Learning Higher Education for the Future. 2021. Vol, 8 is. 1. P. 133-141. URL: <https://doi.org/10.1177/2347631120983481> (дата обращения: 12.02.2023).

2. Бояринов Д.А. Индивидуальные образовательные траектории и образовательные карты // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 371-375. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44238006> (дата обращения: 12.02.2023).

3. Boyarinov D.A. (2021). Educational Landscapes in the Context of the Digital Educational Environment in Society. Integration. Education. Proceedings of the International Scientific Conference, Rezekne, Rezekne Academy of Technologies. Vol. V, May 28<sup>th</sup>-29<sup>th</sup>, 2021. P. 295-307.

4. Будзинская О.В., Мартынов В.Г., Шейнбаум В.С. «Образовательный ландшафт» в эпоху технологической трансформации // Вестник ВГУ. Серия: Экономика и управление. 2018. №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obrazovatelnyy-landshaft-v-epohu-tehnologicheskoy-transformatsii> (дата обращения: 12.02.2023).

5. Сергеева О.А. Особенности современного педагогического ландшафта // Педагогические исследования (сетевое издание). 2020. № 2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-sovremennogo-pedagogicheskogo-landshafta> (дата обращения: 12.02.2023).

**D.A. Boyarinov**  
Smolensk State University

## **EDUCATIONAL LANDSCAPE - ESSENCE AND SIGNIFICANCE**

**Keywords:** *information educational environment, digitalization, educational maps, educational landscape, individual learning paths.*

**Abstract.** *The essence and meaning of the concept of "educational landscape" at the present stage of digitalization are discussed in the article. The concept of "educational landscape" is connected to the concept of "educational map". Three main technologies for creating an educational landscape are given: superposition, inclusion and absorption. A five-stage algorithm for the formation of an educational landscape in accordance with the set goals is described, focused on the formation and analysis of individual and group learning trajectories, analysis and prediction of the group dynamics of knowledge and skills of students and the creation of a space to support the design of an educational information environment.*

**З.И. Гарипова, А.М. Нигмедзянова**  
*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

УДК 004 + 374

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОНЛАЙН-ПЛАТФОРМЫ COREAPP ВО ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ**

**Ключевые слова:** *цифровые платформы в обучении, онлайн-платформа Coreapp, внеурочная деятельность, возможности Coreapp, конструктор уроков.*

*В данной работе рассматривается пример внедрения цифровых технологий во внеурочную деятельность. Для использования выбрана онлайн-платформа Coreapp. Дается краткая характеристика платформы, описывается её возможности и функционал. Основной практический результат проиллюстрирован на примере элективного курса «VBA программирование в Excel» для школьников.*

В результате внедрения цифровой технологии в процесс образования происходят значительные изменения в содержании процесса образования, включая обновление планируемых образовательных результатов и содержания образования, методов и форм работы. Это, по

сути, является главным компонентом цифровой трансформации обучения [4].

Для эффективного построения образовательного процесса в условиях цифровой трансформации необходимо совершенствование учебного процесса, в том числе через внедрение различных цифровых платформ, создавая уникальный и продуктивный контент [3].

Рассмотрим применение функциональных возможностей онлайн-конструктора цифровых образовательных материалов во внеурочной деятельности школьников на примере образовательной платформы Coreapp.

Coreapp – адаптивная онлайн-платформа конструирования образовательных материалов и проверки знаний с аналитической системой выработки индивидуальных рекомендаций для пользователей. Данный конструктор был основан в 2017 году в рамках проекта «Национальная открытая школа». Платформа позволяет учителям создавать образовательные материалы онлайн, делиться ими с учениками, отслеживать выполнение заданий и анализировать результаты обучения. Платформа Core вышла из акселерационной программы Рыбаков Фонда в апреле 2018 года. Является проектом Агентства стратегических инициатив (АСИ). Команда Core поддерживает миссию Фонда – сделать качественное образование доступным, а школу – центром социума [1].

Платформа Coreapp эффективна тем, что бесплатна для создания уроков и не требует каких-то особых знаний компьютерных программ. Любой учитель сможет разобраться в работе данной платформы и научиться создавать свои уроки в виде отдельных алгоритмов по освоению учебной программы. На платформе – простейшая форма для регистрации, с которой справится любой, имеющий электронный адрес в сети. Регистрация обучающихся также не обязательна. Они могут присоединяться к уроку по ссылке или по коду, указав свое имя и фамилию.

Рассмотрим возможности платформы на примере материалов элективного курса «VBA программирование в Excel».

После выбора урока перед нами откроется рабочий лист. При конструировании уроков используется интуитивно понятный интерфейс. Интерактивные элементы платформы нужно добавить перетаскиванием на чистый лист урока с боковой панели (рис. 1).

Занятие можно начинать с постановки вопроса и далее включить теоретический материал в виде изложения текста с добавлением картинок либо прикрепить презентацию в формате pdf, doc, docx, ppt, pptx. Огромный плюс платформы состоит в том, что в файл урока можно добавить ссылку на какой-то внешний ресурс: картинку, документ, обучающее видео, а также интерактивные задания с сайта

<https://learningapps.org>, то есть задание откроется прямо на уроке и не надо переходить на другие ресурсы.

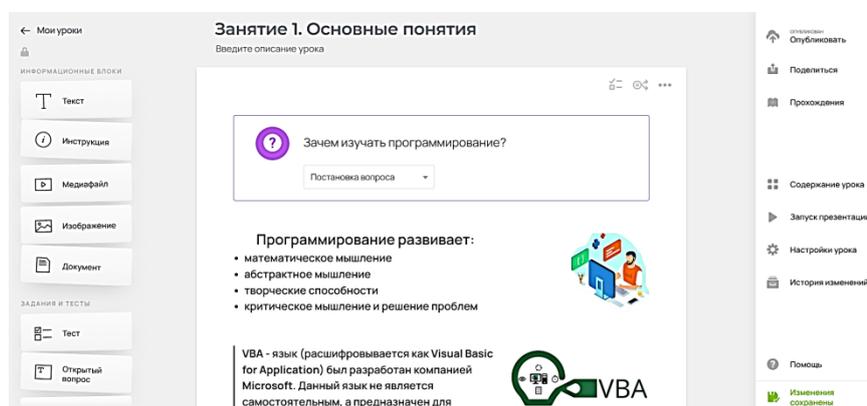


Рис. 1. Интерфейс платформы

Используя инструктивный блок, можно сделать акцент на важные элементы урока. Этот блок включает в себя такие подпункты, как «Тема урока», «Информация», «Инструкция», «Целеполагание» и «Постановка вопроса». На рисунке можно увидеть пример подпункта «Инструкция», где четко сформулирована инструкция и требования, прикреплены файлы по вариантам для решения в парах (рис. 2).

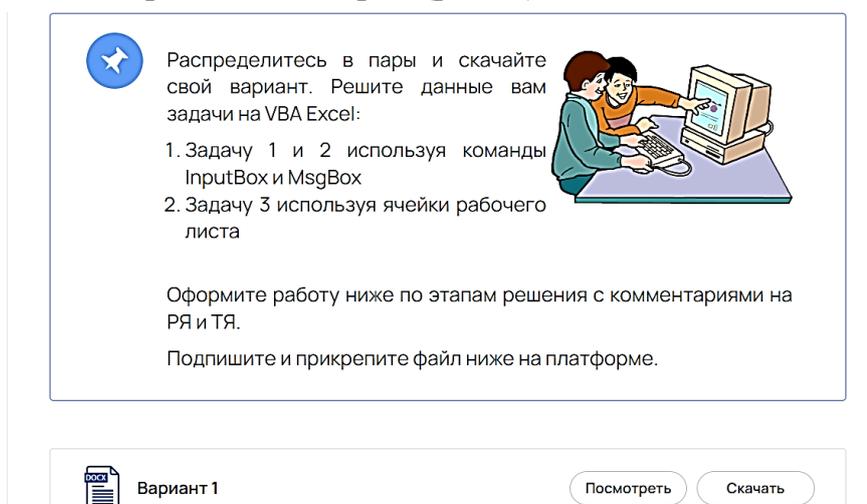


Рис. 2. Пример подпункта «Инструкция»

На платформе имеется база шаблонов для контроля знаний.

Тест – нужно ответить на поставленный вопрос, выбрав один или несколько правильных ответов.

Открытый вопрос – учащийся должен написать ответ с клавиатуры либо прикрепить файл с ответом.

Классификация – нужно распределить элементы по соответствующим корзинам.

Заполни пропуски – необходимо в текст с пропусками самому вписать правильные слова либо выбрать из представленных.

Диалоговый тренажер – мини-игра, в которой только после правильного ответа на вопрос открывается следующий. Здесь учащийся сможет сразу увидеть свой результат в баллах.

Например, на рисунке 3 изображено, как в среде выглядит упражнение «Открытый вопрос». В нашем случае у ученика есть два варианта прикрепления решения: написать код программы в поле для ответа или решить на Excel-файле и его же прикрепить к заданию (рис. 3).

### Задача 3.

Написать программу, которая определяет тип треугольника (остроугольный, тупоугольный, прямоугольный) в зависимости от заданного угла.



Поле для ответа (заполняется учениками при прохождении)

 У ученика будет возможность прикрепить файлы к ответу

Рис. 3. Упражнение «Открытый вопрос»

Учитель может легко контролировать прохождение заданий обучающимися, комментировать, принимать или отправлять на доработку ответы. Таким образом, он может получать информацию и статистику о выполненных работах [2].

Для организации рефлексии можно включить упражнения, которые помогут обучающемуся сделать вывод о том, насколько хорошо он усвоил материал. Также здесь можно оставить свои вопросы либо пожелания (рис. 4).

Что нового вы узнали на занятии?

Остались ли у вас вопросы? Если да, то какие?

Введите описание

Поле для ответа (заполняется учениками при прохождении)



Ученик

 У ученика будет возможность прикрепить файл

Рис. 4. Рефлексия на занятии

Образовательная платформа Coreapp – это помощник учителя для проведения как уроков, так и внеурочных занятий. С её помощью легко оживить и разнообразить процесс обучения, потому что наполненный контентом урок – эффективное средство повышения мотивации и самостоятельности у обучающихся. Также данная платформа позволяет организовать деятельность обучающихся на продуктивном уровне.

## Литература

1. Core – отечественный конструктор интерактивных уроков. URL: <http://didaktor.ru/core-otechestvennyj-konstruktor-interaktivnyx-urokov>.
2. CoreApp. URL: <https://coreapp.ai/>.
3. Дурноглазов Е.Е., Кузнецов Е.А., Шевердин И.В. Цифровая образовательная среда электронного обучения: методическое пособие. Курск: ОГБУ ДПО КИРО, 2019. 64 с.
4. Уваров А.Ю. Трудности и перспективы цифровой трансформации образования / Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики», Ин-т образования. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2019. 343 с.

**Z.I. Garipova, A.M. Nigmedzyanova**  
Kazan Federal University

### USING THE COREAPP ONLINE PLATFORM IN EXTRACURRICULAR ACTIVITIES OF SCHOOLCHILDREN

**Keywords:** *digital learning platforms, Coreapp online platform, extracurricular activities, Coreapp capabilities, lesson builder.*

**Abstract.** *This paper considers an example of the introduction of digital technologies in extracurricular activities. The Coreapp online platform has been selected for use. At the beginning, a brief description of the platform is given, its capabilities and functionality are considered. The main practical result is illustrated by the example of the elective course «VBA programming in Excel» for schoolchildren.*

**А.И. Капитанов, И.И. Капитанова**  
Национальный исследовательский университет МИЭТ

УДК 378.147:004.9

### ПОВЫШЕНИЕ МОТИВАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ЗА СЧЕТ ПРИМЕНЕНИЯ СОРЕВНОВАТЕЛЬНОГО ПОДХОДА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON

**Ключевые слова:** *программирование, дистанционное обучение, соревновательный подход, Python.*

*В данной работе излагается опыт проведения контрольных мероприятий по программированию на языке Python в соревновательном режиме на онлайн-платформе Яндекс.Контест. Рассматривается целесообразность применения соревновательного подхода при разработке основных и дополнительных образовательных программ.*

**1. Актуальность проблемы.** В последние годы существует тенденция разработки новых и актуализации действующих основных и дополнительных образовательных программ. Данная тенденция является следствием изменений в высшем образовании, которые обусловлены новыми требованиями к организации обучения в условиях распространения новой коронавирусной инфекции (COVID-19) [1]. Применение электронного обучения и дистанционных образовательных технологий значительно повышает доступность общеобразовательных программ, однако тем самым увеличивает нагрузку на преподавателей.

Проблемная ситуация заключается в повышенной информационной нагрузке на преподавателей высшей школы. В результате существенно страдает качество проверки контрольных мероприятий, в том числе домашних и контрольных работ обучающихся. Одним из важных факторов, влияющих на мотивацию студентов, является подбор теоретического и практического материала соразмерно уровню владения компетенциями студента. Внедрение дополнительных (необязательных к изучению) материалов позволяет расширить диапазон заинтересованности студентов. Основная (обязательная) часть нацелена на средний и выше среднего уровни подготовки студентов, в свою очередь, дополнительная часть ориентирована на высокий уровень. Подготовка и применение дополнительных материалов значительно повышают информационную нагрузку на преподавателей. При этом для больших групп (сотни обучающихся на одну дисциплину) такой способ мотивации обучающихся практически невозможен.

**2. Применение автоматизированных систем.** В связи с частичным переходом на дистанционные образовательные технологии и, как следствие, повышением количества слушателей актуальным способом решения проблем с информационной нагрузкой является применение автоматизированных систем проверки контрольных мероприятий, в частности iSpring [2], Moodle [3], Stepik [4] и других. Одним из главных минусов применения подобных систем является первоначальная проработка материалов в формат, соответствующий требованиям используемого сервиса. Как правило, подобные системы адаптированы под вопросы формата тестов (выбор одного или нескольких вариантов ответа) и вопросы со свободным ответом. Большинство из них не позволяют выполнять программный код на облачных платформах, что усложняет как выполнение контрольных мероприятий для студента, так и их проверку преподавателем.

В последние годы для решения данных проблем крупнейшие образовательные организации создают собственные платформы для автоматизации проверки контрольных мероприятий. Создание и поддержание собственной системы является уникальным и дорогостоящим решением.

Предлагаемое решение заключается в применении бесплатной для образовательных организаций платформы автоматизированной проверки контрольных мероприятий, включающей выполнение программного кода на стороне сервиса. Повышение мотивации обучающихся достигается за счет применения соревновательного подхода. Автоматические зачетные баллы начисляются, в частности, за наилучшее программное решение с точки зрения оптимизации по памяти, количества и скорости выполненных задач.

**3. Платформа Яндекс.Контест.** Яндекс. Контест – это сервис для автоматизированной проверки программного кода, предназначенный для проведения экзаменов, олимпиад, индивидуальных и командных соревнований по программированию, дистанционной работы с учениками и студентами [5].

Яндекс.Контест поддерживает более двадцати языков программирования и предусматривает гибкую настройку правил зачета работ: ограничение по времени доступа к заданиям, ограничение времени исполнения программы и объема используемой памяти, количество попыток и другие критерии.

Автоматическая проверка решений – по заранее подготовленным наборам тестов – значительно повышает скорость приема работ преподавателем. С помощью Яндекс.Контеста имеется возможность автоматически проверять соответствие заданному стилю программирования, а также автоматизировать выставление оценок и проверку на плагиат. Система позволяет создавать соревнования в различных форматах: домашнее задание, которое допускается выполнить в любое время до определенного срока сдачи, контрольные работы со строго зафиксированным временем начала и окончания приема или ограниченным временем на выполнение.

**4. Опыт применения.** Для подключения обучающихся к платформе необходимо в личном кабинете преподавателя заполнить список участников, состоящий из логинов от учетных записей Яндекс. В системе имеется возможность объединять студентов в группы для дальнейших массовых операций, в частности добавления отдельных групп к соревнованиям.

После добавления пользователей (студентов) в группы необходимо создать задачи. Сервис поддерживает два основных типа задач: задачи по программированию и задачи с полем ввода.

*Задачи по программированию* в свою очередь разделяются на «стандартные» и «интерактивные» задачи. В задачах первого типа система запускает код решения обучающегося и подает на вход данные из тестов, которые заранее подготовил преподаватель. Полученный ответ сравнивается с эталонным, указанным в системе. В задачах второго типа, кроме текста задачи и тестов, преподавателю необходимо подготовить

специальную «программу-интерактор». Система сначала запускает эту программу, затем полученные данные подает на вход решения участника, получает ответ и подает его обратно в «интерактор».

*Задачи с полем ввода* разделяются на задачи следующих типов: с выбором одного или нескольких правильных ответов; с открытым вариантом (с полем для ввода); с сопоставлением вариантов.

Для повышения мотивации студентов писать не только рабочий программный код, но и оптимальный с точки зрения таких ресурсов, как время и память, предусмотрены следующие ограничения: по времени (ожидание, компиляция, выполнение); по памяти; на объем вывода (в байтах). Наиболее трудозатратным с точки зрения подготовки материалов является написание качественных тестов к задачам. Тесты представляют собой набор входных и выходных файлов определенного формата. Для самопроверки при редактировании задач, генерации файлов ответа и использовании генератора тестов предусмотрен раздел с «авторским решением». Объединение задач в отдельные группы называется «набором задач» и предназначено для применения в режиме «соревнование». Соревнование представляет собой мероприятие, нацеленное на решение задач из прикрепленного набора с ограничениями на выполнение. Сервис Яндекс.Контест предоставляет следующий набор ограничений: время участия (фиксированное или интервал), время на выполнение задач, возможность дорешивания задач, максимальное количество попыток. Подобный формат удобен не только для проведения соревнований (олимпиад), но и для обычных контрольных мероприятий (домашние и контрольные работы).

**5. Результаты и практические рекомендации.** Решения студентов отображаются на экране раздела «Монитор» (рис. 1) в режиме онлайн. Для каждой задачи отображается количество верных решений относительно количества отправленных попыток, баллы или штраф по каждому участнику. Участникам доступен актуальный статус решения своих задач и задач одноклассников.

| № | Участник | A               | B               | C               | D               | E               | Очки |
|---|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------|
|   |          | 10/361          | 1/44            | 10/158          | 7/98            | 4/52            |      |
| 1 |          | 44<br>4д. 17ч.  | 56<br>29д. 23ч. | 35<br>21д.      | 46<br>21д. 2ч.  | 44<br>20д. 23ч. | 225  |
| 2 |          | 42<br>19д. 9ч.  | —               | 46<br>17д. 14ч. | 50<br>19д. 13ч. | 50<br>19д. 13ч. | 188  |
| 3 |          | 38<br>16д. 12ч. | -9<br>1м. 13д.  | 50<br>1д. 6ч.   | 50<br>1д. 11ч.  | 34<br>2д. 10ч.  | 172  |

Рис. 1. Экран раздела «Монитор»

В разделе «Посылки» преподавателю отображаются все отправленные попытки решений (рис. 2). В колонке «Вердикт» указан результат проверки: ОК (решение зачтено), WA (Wrong Answer, неверный результат), TL (Time Limit, превышен лимит времени выполнения) и другие.

| Время отправки    | Участник | Компилятор      | Вердикт   | Баллы | Время выполнения | Память |
|-------------------|----------|-----------------|-----------|-------|------------------|--------|
| 02.12.22 01:55:29 |          | Python 3.11.2 ▼ | OK ▼ ☺    | 34    | 165 мс           | 3.9 Мб |
| 30.11.22 21:54:30 |          | Python 3.7.3 ▼  | TL 13 ▼ ☺ |       | 1.07 с           | 4.2 Мб |
| 30.11.22 21:44:40 |          | Python 3.7.3 ▼  | TL 13 ▼ ☺ |       | 1.03 с           | 4.1 Мб |
| 30.11.22 21:41:27 |          | Python 3.7.3 ▼  | TL 13 ▼ ☺ |       | 1.08 с           | 4.2 Мб |

Рис. 2. Экран раздела «Посылки»

Конкурентная среда позволяет повысить качество отправляемых решений. На практике до внедрения в курс «Язык программирования Python» автоматизированной системы и соревновательного подхода студенты зачастую останавливались на первом «рабочем» варианте программы, не делая упор на его оптимизацию. При этом проверка оптимизации программы вручную является более сложной задачей, чем проверка корректности её выполнения. После внедрения платформы вычисление времени выполнения перешло на сторону сервиса. Из значимых проблем, с которыми столкнулись как студенты, так и преподаватели, – нестабильная работа при вычислении времени между различными отправками программного кода. Решение данной проблемы заключается в увеличении временных диапазонов при формировании соответствующих входных наборов тестов.

### Литература

1. Рекомендации по осуществлению деятельности организаций, находящихся в ведении Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, в целях предупреждения распространения новой коронавирусной инфекции (COVID-19). URL: [https://fgosvo.ru/uploadfiles/COVID-19/rekom\\_minobr\\_29072021.pdf](https://fgosvo.ru/uploadfiles/COVID-19/rekom_minobr_29072021.pdf) (дата обращения: 27.02.2023).
2. Программы для онлайн-обучения iSpring [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.ispring.ru/> (дата обращения – 27.02.2023).
3. Moodle – Open-space learning platform | Moodle.org. URL: <https://moodle.org/> (дата обращения: 27.02.2023).
4. Конструктор онлайн-курсов Stepik. URL: <https://teach.stepik.org/ru> (дата обращения: 27.02.2023).
5. Яндекс. Контест – сервис для проведения состязаний. URL: <https://academy.yandex.ru/journal/yandeks-kontest-servis-dlya-provedeniya-sostyazaniy> (дата обращения: 27.02.2023).

**A.I. Kapitanov, I.I. Kapitanova**

National Research University of Electronic Technology

## INCREASING THE MOTIVATION OF STUDENTS THROUGH THE USE OF A COMPETITIVE APPROACH WHEN LEARNING THE PYTHON PROGRAMMING LANGUAGE

**Keywords:** *programming, distance learning, competitive approach, Python.*

**Abstract.** *This paper describes the experience of conducting control events in Python programming in a competitive mode on the Yandex.Contest online platform. We consider expediency of applying a competitive approach in the development of basic and additional educational programs.*

**С.В. Козлов**

*Смоленский государственный университет*

**А.А. Быков**

*Филиал Национального исследовательского университета «МЭИ»*

*в г. Смоленске*

УДК 004.421:372.8

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СОСТАВЛЕНИЯ АЛГОРИТМА ДЛЯ ФОРМАЛЬНОГО ИСПОЛНИТЕЛЯ СРЕДСТВАМИ ЯЗЫКА PYTHON**

**Ключевые слова:** *компьютерное ЕГЭ, алгоритм, программирование, язык Python, строковый тип данных, двоичная запись числа, бит четности.*

*В статье обсуждаются вопросы применения инструментов языка программирования Python для выполнения алгоритма формальным исполнителем. В качестве примера рассмотрены особенности решения пятого задания компьютерного ЕГЭ по информатике на выполнение и анализ простых алгоритмов. Особое внимание уделено использованию встроенных методов языка программирования Python для обработки целочисленных и строковых данных.*

Задания ЕГЭ по информатике в компьютерной форме требуют от ученика владения разными подходами к решению практических задач [1; 2]. Так, на экзамене в ряде заданий использование специализированного программного обеспечения обязательно [3; 4]. Это могут быть инструменты текстового редактора, функции электронных таблиц [5] или средства языков программирования [6; 7]. В то же время в остальных заданиях, которые не предполагают применение специальных программных приложений, выбор и использование компьютерных средств остается за учеником [8]. Он может вообще, по своему усмотрению, как использовать, так и не использовать их для получения решения задачи. При этом следует заметить, что одни задания более эффективно решать без использования компьютера, а применение в других инструментов IT-технологий, наоборот, ускорит процесс реализации задуманного алгоритма.

Примером задания ЕГЭ по информатике в компьютерной форме, в котором применение специализированных инструментов прикладного программного обеспечения необязательно, может служить задача 5. Она предполагает демонстрацию умений выполнять и анализировать простые алгоритмы для формального исполнителя. Задание состоит в следующем: требуется формально исполнить алгоритм для исполнителя с указанной системой команд. При этом решение задачи без использования компьютерных средств требует от ученика следующих умений:

1. Перевод десятичного числа в двоичную запись.
2. Определение бита четности.
3. Определение четности исходного десятичного числа.
4. Дописывание разрядов к двоичному коду преобразуемого числа.
5. Изменение разрядов двоичного кода преобразуемой записи.
6. Перевод двоичного числа в десятичную запись.

С помощью встроенных алгоритмических структур и функций языка программирования Python эти действия можно формализовать. Таким образом, сложность выполнения поставленной задачи сместится в плоскость навыков записи алгоритма в выбранной инструментальной среде. В то же время отметим, что учащийся должен обладать знаниями основных алгоритмических конструкций и методами обработки числовых и символьных данных.

Рассмотрим пример. На вход исполнителю алгоритма подается натуральное число  $N$ . Исполнитель строит по нему новое число  $R$  следующим образом.

1. Строится двоичная запись числа  $N$ .
2. К этой записи дописываются еще четыре разряда по следующему правилу:
  - а) если число  $N$  четное, то слева дописываются символы 10, а справа – 01;
  - б) если число  $N$  нечетное, то слева – символы 11, а справа – 10.

Полученная таким образом запись (в ней на четыре разряда больше, чем в записи исходного числа  $N$ ) является двоичной записью искомого числа  $R$ . Укажите минимальное число  $N$ , после обработки исполнителем которого получается число, большее 97. В ответе запишите это число в десятичной системе.

Решение на языке программирования Python может быть представлено следующим образом:

```
for n in range(1, 100):
 s = bin(n)[2:]
 if n % 2 == 0: s = '10' + s + '01'
 else: s = '11' + s + '10'
 r = int(s, 2)
 if r > 97:
```

```
print(n)
break
```

Ответом на поставленный в задании вопрос будет служить число 5, выведенное после обработки данных на экран.

Остановимся более подробно на методах языка Python, используемых в реализации алгоритма.

Основу программы составляет цикл с параметром `for`, который служит в задаче для перебора натуральных чисел на интервале  $[1; 100)$ . При этом если левый конец промежутка определен условием задачи, то правый можно при необходимости увеличить в том случае, когда программа закончила свое выполнение с кодом 0, то есть отработала правильно, но не вывела искомым значений. Для перевода натурального числа  $n$  в двоичную запись служит команда `bin()`. При этом специфика данной команды состоит в том, что после перевода мы получаем данные в текстовом формате. Отметим, что полученная строка начинается с префикса `0b`, который свидетельствует о двоичном формате числа. В языке программирования Python аналогичные префиксы `0o` и `0x` предусмотрены для записи чисел в восьмеричной и шестнадцатеричной системе счисления соответственно. Получить такие записи можно с помощью команд `oct()` и `hex()`. Однако для дальнейшей обработки полученного значения в формате строки, связанного с подсчетом количества нулей, эти префиксы необходимо удалить. Это можно осуществить, применив срез, который оставит только символы, начиная со второго. Если этого не сделать, то при определении количества нулей в анализируемой строке мы получим значение, которое на единицу больше искомого значения.

Для определения четности исходного числа в программе применена команда `n % 2`, которая в случае равенства вычисленного остатка показывает, что исходное число было четным, а в противном случае нечетным. Заметим, что в проверке условия числа  $n$  на четность можно было бы использовать факт окончания двоичной записи на 0 или 1. Если двоичное число оканчивается на 0, то исходное натуральное десятичное число было четным, а в противном случае – нечетным. В этом случае команда выглядела бы как `s[-1] == '0'`.

Команда `r = int(s, 2)` осуществляет перевод полученной после применения правил алгоритма записи из двоичной системы счисления обратно в десятичный формат. После этого остается только проверить, что полученный результат – число  $r$  – будет больше указанного в условии числа 97. При этом, чтобы получить на экране только минимальное число, удовлетворяющее условиям задачи, внутри оператора `if` используется команда `break`, которая прерывает выполнение программы при получении искомого значения переменной  $n$ .

Также заметим, что в ряде заданий ЕГЭ данного типа требуется определить не исходное число  $n$ , а полученный результат – число  $r$ . Для этого в завершающем условном операторе цикла с параметром `for` необходимо поменять вывод значения, указав вместо команды `print(n)` команду `print(r)`. Остальные строки программного кода приложения на языке Python изменять не следует. В этом случае программа выведет на поставленный таким образом вопрос ответ для переменной  $R = 118$ . Кроме того, если в условии задания потребуются определить наибольшее значение исходного числа  $N$ , для которого результат будет меньше числа 97, то это приведет лишь к изменению знака «>» на знак «<» в завершающем программный код операторе `if`. При этом для вывода значения переменной  $R$ , а не исходного числа  $N$  также будет необходимо только изменить в операторе вывода переменную.

Итак, рассмотренный пример демонстрирует понятность записи применяемых команд и эффективность использования сред программирования, таких как Python, при решении задач анализа алгоритмов, составленных для формального исполнителя. Это позволяет формировать навыки их решения оптимальным образом [9; 10] и учитывать при проектировании современных образовательных систем [11; 12]. Системы программирования позволяют в сложносоставных условиях не исследовать их, а анализировать результат их применения к указанным наборам данных и выбрать из полученного списка значений необходимый ответ на вопрос, поставленный в условии задания. Таким образом, реализация алгоритма в инструментальной среде с помощью составления программы значительно облегчает ход рассуждений в описанной в условии задания последовательности действий.

## Литература

1. Козлов С.В. Особенности обучения школьников информатике в профильной школе // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2014. № 1. С. 31-35. URL: <http://e-koncept.ru/2014/14006.htm>.
2. Киселева О.М., Быков А.А. Готовность педагогов к применению методов математического моделирования в образовательном процессе // Интернет-журнал Науковедение. 2014. № 1 (20). С. 97.
3. Максимова Н.А. Возможности формирования компетенций XXI века при изучении дисциплины «Цифровые технологии в образовании» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2021. № 4. С. 88-100.
4. Козлов С.В. Цифровые трансформации системы школьного образования // Цифровой регион: опыт, компетенции, проекты. Сборник трудов IV Международной научно-практической конференции, приуроченной к Году науки и технологий в России. Брянск, 2021. С. 299-305.
5. Козлов С.В., Быков А.А. Решение задач динамического программирования ЕГЭ по информатике средствами электронных таблиц // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2022. Вып. 23. С. 356-361.

6. Суин И.А., Козлов С.В. Основные направления использования возможностей современных сред программирования в организации учебного процесса // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник научных трудов II Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. 2018. С. 115-120.

7. Козлов С.В., Быков А.А. Вопросы обучения программированию в профильной школе // Актуальные проблемы теории и практики обучения физико-математическим и техническим дисциплинам в современном образовательном пространстве: сборник статей V Всероссийской (с международным участием) научно-практической конференции. Курск, 2021. С. 263-268.

8. Козлов С.В., Быков А.А. Организация обучения в профильной школе в условиях цифровизации системы образования // Аксиологические проблемы педагогики. 2020. № 11. С. 102-110.

9. Козлов С.В. Применение методов функционального анализа при формировании оптимальных стратегий обучения школьников // Международный журнал экспериментального образования. 2016. № 3-2. С. 182-185.

10. Козлов С.В. Концептуальные возможности использования цифровых технологий в сфере образования // Цифровой регион: опыт, компетенции, проекты: сборник статей III Международной научно-практической конференции, посвященной 90-летию Брянского государственного инженерно-технологического университета. Брянск, 2020. С. 396-402.

11. Киселева О.М., Солдатенкова Я.Г. Проектирование образовательных информационных систем // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи – НТТДМ 2021: сборник материалов V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Киров, 2021. С. 93-98.

12. Козлов С.В. Педагогическое проектирование индивидуального тестирования в личностно ориентированной обучающей системе: дис. ... канд. пед. наук. Смоленск, 2006. 204 с.

**S.V. Kozlov**

Smolensk State University

**A.A. Bykov**

Branch of the National Research University «Moscow Power Engineering Institute» in Smolensk

## **SOLVING THE PROBLEMS OF COMPILING AN ALGORITHM FOR A FORMAL EXECUTOR USING THE PYTHON LANGUAGE**

**Keywords:** *computer exam, algorithm, programming, Python language, string data type, binary representation of a number, parity bit.*

**Abstract.** *The article discusses the issues of using the tools of the Python programming language to execute the algorithm by a formal executor. As an example, the features of solving the fifth task of the computerized exam in computer science for the execution and analysis of simple algorithms are considered. Particular attention is paid to the use of built-in methods of the Python programming language for processing integer and string data.*

**В.В. Коротков, И.В. Ланева, М.Ю. Ястребов**  
*Санкт-Петербургский государственный университет  
морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова*

УДК 519.2:372.851:371.3

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ИЛЛЮСТРАЦИИ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ КУРСА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Ключевые слова: *теория вероятностей, относительная частота, закон больших чисел, учебный процесс, компьютерное моделирование.*

*В данной работе обсуждаются возможности использования программно-реализуемых случайных чисел в вузовском курсе теории вероятностей в режиме реального времени для моделирования и иллюстрации эмпирического закона больших чисел, схемы независимых испытаний Бернулли, локальной и интегральной теорем Лапласа, закона распределения дискретной случайной величины, свойств среднего арифметического независимых случайных величин, закона больших чисел в формах Чебышёва и Бернулли.*

Повсеместное оснащение вузов компьютерными классами, наличие у многих студентов ноутбуков создают благоприятные возможности для непосредственного моделирования и демонстрации в режиме реального времени многих свойств вероятности, изучаемых в рамках соответствующего раздела курса математики студентами технических, информационных и экономических специальностей во время практических / лабораторных учебных занятий.

Учитывая, что многие студенты владеют к этому моменту навыками программирования, задание студентам на разработку программ, иллюстрирующих отдельные положения теории, обеспечивает успешное осуществление межпредметных связей с такой дисциплиной, как программирование. Авторами уже накоплен положительный опыт соответствующей работы студентов при обсуждении некоторых парадоксов теории вероятностей [1]. У них даже возникает (естественное, впрочем, в среде программистов) соревнование по быстрдействию и по качеству интерфейса.

**1. Иллюстрация эмпирического закона больших чисел.** Эмпирический закон больших чисел (ЭЗБЧ), будучи нематематическим утверждением, обобщает опыт многовековых наблюдений за поведением относительных частот – сначала в азартных играх, затем в страховом деле и далее во многих других приложениях. Он декларирует, что в ситуациях, когда теоретическая вероятность  $p$  случайного события может быть

вычислена по схеме равновозможных исходов либо на основании более глубоких вероятностных теорем, его относительная частота  $w_n = \frac{m}{n}$  ( $n$  – число испытаний,  $m$  – число наступлений события) при большом числе испытаний устойчиво колеблется вблизи (вокруг) теоретического  $p$ .

Эта объективная закономерность может рассматриваться как закон природы, который постоянно проявляется в человеческой практике.

Обратно, устойчивость относительной частоты события  $A$  при большом числе испытаний, если она имеет место, позволяет сделать следующие выводы.

1. Событие действительно является случайным по отношению к условиям испытания.

2. Имеет объективный смысл количественная оценка вероятности при помощи определённого числа.

3. Значение вероятности должно быть выбрано как число, вокруг которого колеблется относительная частота  $w_n(A)$ .

В методическом плане студентам целесообразно рекомендовать класть в основу построения программных средств для всех иллюстраций, в том числе и ЭЗБЧ, алгоритм многократного воспроизведения (разыгрывания) случайного события, имеющего вероятность  $p$  (в других терминах – разыгрывание дискретной случайной величины с законом распределения  $\{0,1; 0,p\}$ ). Для сравнения в программе полезно параллельно использовать как встроенную (библиотечную) функцию, дающую случайное число  $r$ , равномерно распределённое на отрезке  $[0,1]$ , так и получение  $r$  «вручную», например, методом середины квадрата. Отрезок  $[0,1]$  разбивается на две части  $[0,p]$  и  $[p,1]$ ; событие  $A$  наступает, если  $r \in [0,p]$ .

Пользователь задаёт вероятность  $p$  и серию возрастающих значений количества испытаний  $n$  с определённым шагом для наблюдения эффекта стабилизации относительной частоты. Заметим, что результаты проводимых в аудитории опытов с подбрасыванием монеты, тасовкой карточной колоды и т.п., как правило, неубедительны, так как устойчивость относительной частоты «не успевает» проявиться ввиду малого значения  $n$ .

В этой связи представляется полезным обсуждение в аудитории вопроса о том, почему стабилизация относительной частоты для вероятности, заданной в виде рационального числа  $1/k$  при большом знаменателе проявляется существенно позже, чем при малом, во всех случаях должно быть  $n \gg k$  [2].

Важным и интересным для аудитории аспектом в этой теме является преодоление психологического заблуждения относительно того, что в случайной двоичной последовательности «не должно» идти подряд много

единиц либо много нулей. Известны теоремы, гарантирующие высокую вероятность появления такой подпоследовательности при большом числе испытаний [3, 4]. Это также может быть продемонстрировано в ходе машинного эксперимента.

Другим психологическим заблуждением, связанным с предыдущим, является мнение неподготовленной аудитории о том, что внешне регулярная двоичная подпоследовательность (например, идущие подряд номера в заполненной карточке спортлото) имеет меньшую вероятность наступления (выигрыша), чем внешне нерегулярная (но *заранее оговорённая!*) подпоследовательность. Обсуждение этой темы естественно подводит аудиторию к определению случайности последовательности через длину порождающей её программы.

**2. Схема независимых испытаний Бернулли.** Если вероятность наступления случайного события («успеха») в отдельном испытании равна  $p$ ,  $0 < p < 1$ , то вероятность наступления ровно  $k$  успехов в  $n$  испытаниях по схеме Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Согласно ЭЗБЧ, вблизи этого теоретического значения должна стабилизироваться относительная частота. При фиксированных  $p$  и  $k$  для возрастающей последовательности значений количества серий  $N$  с заданным шагом на экран выводятся значения относительной частоты для сравнения с  $p$ .

Важно обратить внимание студентов на то, что речь идёт не о длине отдельной серии из  $n$  «первичных» испытаний (типичная ошибка, серия может быть и короткой), а о количестве  $N$  серий постоянной длины  $n$  каждая, которое должно быть велико. Таким образом, отдельным «вторичным» испытанием оказывается серия из  $n$  «первичных».

Здесь представляется интересным для студентов следующий дополнительный машинный эксперимент. При компьютерном моделировании большого количества серий  $N$  их объединённая совокупность может рассматриваться как протокол длины  $Nn$  наступления / ненаступления успеха. Возникает двоичная 1/0 последовательность, по которой, во-первых, возможно проверить по относительной частоте качество моделирования события, имеющего заданную вероятность  $p$ , а во-вторых, сдвинуть номер первого первичного испытания первой серии с 1 на  $k$  (незначительно уменьшая количество наблюдаемых серий с  $N$  до  $N' = [(N - k + 1) / n]$ ) и повторно сравнить новую относительную частоту с той же теоретической вероятностью. Попутно это даёт возможность обсудить подход к аксиоматическому определению вероятности по Мизесу и связанный с этим критерий отбора двоичных последовательностей [4; 5].

**3. Локальная теорема Лапласа.** Согласно этой теореме, для вероятности  $P_n(k)$  в схеме Бернулли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(k)}{1 / \sqrt{np(1-p)}\varphi(x)} = 1,$$

где  $\varphi(x)$  – дифференциальная функция Лапласа; это означает, что с ростом  $N$  уменьшается погрешность приближённого равенства

$$P_n(k) \approx 1 / (\sqrt{np(1-p)}\varphi(x)).$$

В иллюстрирующих примерах (например, для протоколов и относительных частот, описанных в п. 2) при фиксированных  $p$  и  $k$  для возрастающей последовательности значений количества серий  $N$  на экран выводятся теоретические значения вероятности  $P_n(k)$  и наблюдаемые значения относительной частоты.

**4. Интегральная теорема Лапласа.** Для вероятности  $P_n(k_1, k_2)$  того, что количество успехов  $k$  в  $n$  испытаниях по схеме Бернулли окажется в пределах  $k_1 \leq k \leq k_2$ , выполняется предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{P_n(k)}{1 / \sqrt{np(1-p)}\varphi(x)} - (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) \right) = 0,$$

так что с ростом количества серий  $N$  повышается точность приближённого равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left((k_2 - np) / \sqrt{np(1-p)}\right) - \Phi\left((k_1 - np) / \sqrt{np(1-p)}\right).$$

Здесь полезно обратить внимание аудитории на то, как сужение отрезка  $[k_1, k_2]$  вызывает уменьшение относительной частоты события  $k \in [k_1, k_2]$ .

**5. Статистический смысл математического ожидания.** Для дискретной случайной величины  $X$  с законом распределения  $(p_i, x_i)$  относительные частоты  $w_i = n_i / N$  реализации отдельных её значений при большом числе испытаний  $N$  близки к теоретическим вероятностям  $p_i$ ; при этом среднее арифметическое реализованных значений

$$\bar{x} = \left( \sum_i n_i x_i \right) / N = \sum_i (n_i / N) x_i = \sum_i w_i x_i$$

близко к величине  $\sum_i p_i x_i$ , что и является основанием для определения

математического ожидания.

В иллюстрирующем примере для заданного пользователем через интерфейс распределения, например,  $(p : 0.1, 0.4, 0.6; x : 100, 400, 200)$  для возрастающего с заданным шагом количества испытаний  $N$  отображаются соответствующие значения среднего арифметического всех реализаций.

**6. Закон больших чисел в форме Чебышёва.** В практических приложениях большое значение имеют случайные события, вероятности которых близки к единице или нулю и которые возникают в результате наложения большого количества независимых случайных факторов. Круг теорем, называемых в совокупности законом больших чисел, даёт достаточные условия для статистической устойчивости средних значений.

Частный закон больших чисел в форме Чебышёва утверждает, что для независимых случайных величин  $X_i$  с одинаковым математическим ожиданием  $m$  и с одинаковой дисперсией имеет место сходимость по вероятности их среднего арифметического к  $m$ , то есть для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m \right| < \varepsilon\right) = 1.$$

В иллюстрирующем примере пользователь задаёт одинаковые параметры одинакового для всех распределения (например, нормального показательного и т.д.), значение  $\varepsilon$ , верхнюю границу изменения  $n$  и шаг  $h$ , с которым на экран выводится относительная частота выполнения неравенства  $\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m \right| < \varepsilon$  для сравнения её с единицей.

**7. Закон больших чисел в форме Бернулли.** Соответствующая теорема является следствием частного закона больших чисел Чебышёва. Если теоретическая вероятность события  $A$  в отдельном испытании равна  $p$ , то для случайной величины  $W_n$  – относительной частоты наступления  $A$  в серии из  $n$  независимых испытаний – имеет место сходимость по

вероятности:  $W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(P)} p$ .

Таким образом, с ростом количества  $N$  серий из  $n$  испытаний по наблюдению  $A$ , каждая из которых доставляет отдельное реализованное значение  $W_n$  относительная частота  $u_N$  выполнения неравенства  $|W_n - p| < \varepsilon$  – уже другое случайное событие! – приближается к единице.

В иллюстрирующем примере пользователь задаёт значения  $\varepsilon$ ,  $p$ ,  $n$ , верхней границы количества серий  $N$ , и шага  $h$ , с которым на экран выводится относительная частота события  $|W_n - p| < \varepsilon$ .

В заключение ещё раз подчеркнём простоту программирования соответствующих алгоритмов на уровне начальных упражнений по программированию циклов.

### Литература

1. Ястребов М.Ю., Ланева И.В. Анализ парадоксов теории вероятностей в курсе высшей математики // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXIII Международной научной конференции. Вып. 23. Смоленск, СмолГУ, 2022. С. 398-403.

2. Алимов Ю.И. Альтернатива методу математической статистики. М.: Знание, 1980. 64 с.

3. Шень А.Х. Частотный подход к определению понятия случайной последовательности // Семиотика и информатика. Вып. 18. М.: ВИНТИ, 1982. С. 14–42.

4. Колмогоров А.Н., Успенский В.И. Алгоритмы и случайность // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32, вып. 3. С. 425-453/

**V.V. Korotkov, I.V. Laneva, M.Y. Yastrebov**  
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping

## **COMPUTER SIMULATION OF RANDOM EVENTS AND RANDOM VARIABLES TO ILLUSTRATION THE MAIN PROVISIONS OF THE PROBABILITY THEORY COURSE**

**Keywords:** *probabilite theory, method of teaching, paradoxes, machine experiment, law of large numbers.*

**Abstract.** *This paper discusses the possibilities of using software-implemented random numbers in a university course in real-time probability theory for modeling and illustrating the empirical law of large numbers, Bernoulli's scheme of independent tests, Laplace's local and integral theorems, the law of distribution of a discrete random variable, the properties of the arithmetic mean of independent random variables, the law of large numbers in the forms of Chebyshev and Bernoulli.*

**А.С. Кузнецова**  
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

УДК 159.9:331.101.3

## **ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ ПРИЕМАМ ПСИХОЛОГИЧЕСКОЙ САМОРЕГУЛЯЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Ключевые слова:** *технологии дистанционного обучения, психологическая саморегуляция, функциональное состояние, эффективность саморегуляции, психологические ресурсы, утомление, тревожность.*

*Анализ эффективности тренинговой программы дистанционного обучения новым приемам психологической саморегуляции функционального состояния проведен на основе эмпирических данных по группе работников производственной сферы. Цель исследования: выявление признаков снижения тревожности и восстановления*

*психологических ресурсов путем применения новых для участников обучающей программы приемов саморегуляции. Результаты показали, что в условиях дистанционной среды накопление эффектов рабочей нагрузки развивается по линии кумуляции эмоционального напряжения, вызванного сменой привычных форм коммуникационного взаимодействия, неизбежным ростом рабочей нагрузки и увеличением постоянного контроля со стороны руководства. Оценка возможностей предложенной программы дистанционного обучения приемам саморегуляции показала высокую эффективность данной формы обучающей технологии для минимизации эффектов ситуативной напряженности и утомления после окончания рабочего дня.*

**Актуальность проблемы исследования.** В настоящее время интенсивное развитие технологий дистанционного обучения с неизбежностью заставляет искать ответы на вопросы о том, возможно ли без существенных потерь модифицировать готовые тренинговые технологии для внедрения в цифровую среду и какова будет эффективность дистанционных модулей обучения [6]. В сфере психологических технологий одним из перспективных направлений является разработка тренинговых программ для освоения приемов и способов осознанной и целенаправленной психологической саморегуляции (ПСР) функционального состояния (ФС), применяемых для поддержания высокой работоспособности и сохранения здоровья [2; 3]. Задачи «цифровизации» психологических программ развития навыков самоуправления состоянием крайне актуальны. Важно подчеркнуть, что обязательным условием, позволяющим рекомендовать применение подобных программ, становится проведение процедур оценки их эффективности [1; 5].

**Цель исследования** – оценка эффективности дистанционного модуля, разработанного на базе комплексной программы обучения навыкам ПСР ФС, автор программы – А.Б. Леонова [5]. Назначение дистанционной программы: освоение и самостоятельное применение разнотипных приемов саморегуляции ФС, рекомендованных для снятия напряженности и восстановления работоспособности после завершения рабочего дня – в те периоды, когда работа выполняется в домашних условиях, а контроль за ходом выполнения трудовых задач осуществляется в дистанционном режиме.

**Организация исследования.** Исследование проведено на выборке специалистов непромышленной сферы. Общее количество участников исследования – 215 человек: 150 женщин и 65 мужчин в возрасте от 24 до 55 лет. В соответствии с целями обучения дистанционная программа включала:

1) блоки онлайн-занятий с психологом-методистом, во время которых были объяснены возможности разных приемов саморегуляции ФС (содержательные особенности и специфика применения) и предложены методики для оценки эффектов действия приемов ПСР;

2) блоки самостоятельных занятий по применению приемов ПСР в домашних условиях после окончания рабочего дня с обязательной диагностикой эффектов.

Для диагностики были предложены 2 методики самооценки состояния:

а) опросник для оценки ситуативной тревожности;

б) опросник для оценки острого умственного утомления.

Диагностические методики заполнялись участниками 2 раза: до начала и после окончания самостоятельного применения приемов ПСР. Продолжительность одного занятия в режиме онлайн – 30–40 минут; самостоятельно – 25 минут (15 минут – применение приемов ПСР; 10 минут – заполнение опросников). Важным элементом программы следует считать самооценку участников занятий тех факторов содержания и условий труда, которые в дни самостоятельных занятий были причинами роста эмоциональной напряженности во время работы.

**Результаты.** Прежде всего, следует отметить, что наиболее значимые факторы развития неблагоприятных ФС во время рабочих часов в основном относятся к вполне типичным причинам развития напряженности, и не связаны со сменой привычной офисной среды на работу в домашних условиях. К числу таких факторов относятся:

1) особенности профессионально-специфичного содержания трудовых задач, стрессогенный характер которых не имеет отношения к типу рабочей обстановки (отметили 50% опрошенных);

2) переживания за результаты выполненной работы (7%).

Иными словами, более половины выборки считают главными причинами негативной динамики ФС не столько дистанционный характер труда, сколько те его особенности, которые неспецифичны относительно условий работы.

Вместе с тем часть опрошенных отмечают и те стрессоры, которые связаны с изменениями привычных условий труда:

1) увеличение времени работы, вызванное отвлечениями и помехами со стороны «домашней» среды: перерывы для «неустрашимого» общения с членами семьи, выполнения домашних обязанностей, о которых просят родственники (13%);

2) непривычные и вынужденные домашние условия работы (4%);

3) проблемы с использованием компьютерной техники и интернет-ресурсов, с которыми сложно справиться без помощи находящихся «под рукой» специалистов (8%);

4) выполнение коммуникативных задач в непривычной цифровой среде и полностью дистанционное взаимодействие с коллегами, включая увеличившееся число звонков от руководства с целью сохранения постоянного контроля за процессом работы (18%).

По мнению участников исследования, это те причины, которые провоцируют развитие стресса, а также приводят к непривычному и ощутимому росту ежедневного утомления.

Самостоятельное применение приемов ПСР, первичное освоение которых было целью обучающих онлайн-занятий, показало выраженный и статистически значимый оптимизационный результат в изменении показателей ФС [4]. Все типы приемов ПСР приводят к снижению умственного утомления и ситуативной тревожности на уровне значимости  $< 0,001$  (статистическое сравнение показателей до и после занятия проведено при помощи t-критерия Стьюдента). При этом оба показателя ФС снижаются от уровня высоких оценок к значениям внутри диапазона низкой тревожности и отсутствия утомления. Важно то, что стандартное отклонение от среднего как мера вариабельности ответов у разных участников исследования в замерах после применения приемов ПСР существенно снижается, что свидетельствует о сходном типе выраженности оптимизационного эффекта.

Таким образом, собранные данные лают возможность говорить о том, что дистанционный тренинговый модуль в составе блоков обучающих онлайн-занятий и самостоятельного применения приемов ПСР позволяет добиться освоения новых вариантов эффективного устранения накопленных за время рабочих часов утомления и напряженности. Стоит отметить, что высокая мотивация участников к самостоятельной работе, сохраняющаяся в течение всего времени программы (общая длительность – 2 недели), дает основания считать, что первый опыт внедрения дистанционной программы был успешен. Кроме того, предложенные участникам и освоенные ими приемы ПСР эффективны в преодолении состояний, вызванных перечисленными выше факторами содержания труда и дистанционных условий его выполнения: несмотря на явное негативное действие рабочих стрессоров, приемы ПСР вполне способны снизить компоненты тревожности и значительно минимизировать эффекты накопленного утомления у большинства участников.

**Основные выводы.** Итоги анализа опубликованных материалов и собранных эмпирических данных позволяют сделать следующие выводы.

1. Освоенные при помощи обучающего дистанционного модуля приемы психологической саморегуляции ФС эффективны для преодоления тревожности и снижения утомления в условиях дистанционной работы.

2. Успешность освоения данных приемов можно рассматривать как основу для совершенствования дистанционных тренинговых программ, развивающих адаптационный потенциал профессионалов при переходе к цифровой среде коммуникационного взаимодействия в процессе работы.

3. Обязательное условие разработки эффективных дистанционных модулей обучения новым навыкам ПСР – высокий уровень профессиональной подготовки психологов-методистов, имеющих опыт практической работы по обучению представителей разных видов профессионального труда в традиционных условиях непосредственного взаимодействия методиста и обучающихся.

### Литература

1. Злоказова Т.А. Оптимизация функционального состояния профессионалов в процессе бизнес-тренингов // Прикладная юридическая психология. 2008. № 2. С. 122–137.

2. Кузнецова А.С., Титова М.А., Злоказова Т.А. Психологическая саморегуляция функционального состояния и профессиональная успешность // Вестник Московского университета. Серия 14: Психология. 2019. № 1. С. 51–68.

3. Прохоров А.О. Структурно-функциональная модель ментальной регуляции психических состояний субъекта // Психологический журнал. 2020. Т. 41, № 1. С. 5–18.

4. Кузнецова А.С. Эффективность приемов психологической саморегуляции состояния в преодолении стресса дистанционной работы в условиях пандемии // Бехтерев и современная психология: сборник статей VI Всероссийской научно-практической конференции / под ред. Л.М. Попова и И.Р. Абитова. Казань: НОУ ДПО «Центр социально-гуманитарного образования», 2020. С. 173–175.

5. Leonova A.B., Kuznetsova A.S., Barabanshchikova V.V. Job specificity in human functional state optimization by means of self-regulation training // Procedia – Social and Behavioral Sciences. 2013. Vol. 86. P. 29–34.

6. Vargas O. Employee-friendly working time flexibility: prevalence and policies // Foundation Focus. 2016. Vol. 19. P. 8–9.

**A.S. Kuznetsova**

Lomonosov Moscow State University

## EFFICIENCY OF DISTANCE LEARNING IN TECHNIQUES OF PSYCHOLOGICAL SELF-REGULATION OF HUMAN FUNCTIONAL STATES

**Keywords:** *distant training technologies, psychological self-regulation, human functional state, self-regulation efficiency, psychological resources, fatigue, anxiety.*

**Abstract.** *An analysis of the efficiency of the distance learning training program for new means of psychological self-regulation of human functional state was carried out on the basis of empirical data on a group of workers in the non-productive sphere. The purpose of the study: to identify signs of*

*reducing anxiety and restoring psychological resources through the use of new self-regulation techniques for participants in the training program. The results showed that in a remote environment, the accumulation of workload effects develops along the line of cumulation of emotional stress caused by a change in the usual forms of communication interaction, the inevitable increase in workload and an increase in constant control by management. The assessment of the possibilities of the proposed distance learning program for self-regulation techniques showed the high efficiency of this form of learning technology to minimize the effects of situational tension and fatigue after the end of the working day.*

**С.В. Литвинов, А.А. Бондарь, В.О. Скрипачев, К.В. Авдеев,  
Г.А. Милорадов, Ю.А. Полевода, О.В. Семёнова, А.Д. Ярлыков**  
*Российский технологический университет – МИРЭА*

УДК 378.046.4

## **РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММЫ «ОБСЛУЖИВАНИЕ СИСТЕМ ИНТЕРНЕТА ВЕЩЕЙ» В РАМКАХ ПРОЕКТА «ЦИФРОВЫЕ КАФЕДРЫ» НАЦИОНАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ «ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ» В РТУ МИРЭА**

*Ключевые слова: РТУ МИРЭА, цифровые кафедры, подготовка ИТ-специалистов, дополнительная профессиональная программа профессиональной переподготовки, дополнительная квалификация.*

*Проект «Цифровые кафедры» как часть федерального проекта «Развитие кадрового потенциала ИТ-отрасли» национальной программы «Цифровая экономика Российской Федерации» направлен на обеспечение приоритетных отраслей экономики высококвалифицированными кадрами, обладающими цифровыми компетенциями. В статье рассматривается опыт реализации программы «Обслуживание систем интернета вещей» Цифровой кафедры РТУ МИРЭА.*

### **1. Цифровая кафедра**

Одна из главных задач программы «Приоритет-2030» – это кадровое обеспечение приоритетных направлений развития науки, технологий, техники, отраслей экономики, социальной сферы. Формированием будущих кадров, то есть специалистов в различных сферах общественной деятельности, заняты образовательные учреждения. Поэтому задача подготовки новых кадров в рамках программы «Приоритет-2030» лежит именно на образовательных учреждениях [1].

«Цифровая кафедра» РТУ МИРЭА – это программы профессиональной переподготовки, предусмотренные федеральным проектом «Развитие кадрового потенциала ИТ-отрасли» национальной программы «Цифровая экономика Российской Федерации» [2]. Проект предполагает, что студенты университета смогут, обучаясь по основной образовательной программе высшего образования, получить вторую квалификацию, связанную с ИТ-индустрией.

Концепция проекта предполагает разработку и реализацию ведущими вузами РФ, являющимися участниками программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030», дополнительных профессиональных программ профессиональной переподготовки (ДПП ПП) по ИТ-профилю для студентов, обучающихся очно и очно-заочно.

«Цифровая кафедра» РТУ МИРЭА предлагает обучение на различных программах от администрирования отечественных операционных систем и обслуживания интернета вещей до программирования мобильных приложений и разработки веб-приложений.

## **2. Программа «Обслуживание систем интернета вещей»**

Сотрудниками Института радиоэлектроники и информатики (ИРИ) РТУ МИРЭА разработана ДПП ПП «Обслуживание систем интернета вещей». Программа рассчитана на 256 часов, длительность обучения составляет 36 недель. Обучение по программе доступно как студентам ИРИ, так и студентам других институтов РТУ МИРЭА.

С 1 сентября 2022 года на данную программу в нашем университете были зачислены 98 студентов. 100% профессорско-педагогического состава, привлеченного к реализации программы, имеют высшее профильное образование в ИТ-сфере. Все преподаватели ДПП ПП прошли повышение по программе «Проектирование и реализация программ переподготовки по ИТ-профилю» в АНО ВО «Университет Иннополис».

Целью ДПП «Обслуживание систем интернета вещей» является формирование у слушателей, обучающихся по специальностям и направлениям подготовки, не отнесенным к ИТ-сфере, цифровых компетенций, необходимых для выполнения нового вида профессиональной деятельности в соответствии с перечнем областей цифровых компетенций:

- совокупность методов и средств для разработки, сопровождения и эксплуатации программного обеспечения систем интернета вещей;
- разработка программного кода для устройств промышленного интернета вещей на формальном алгоритмическом языке;
- отладка программного кода для устройств промышленного интернета вещей;

– разработка комплекта технической документации на эксплуатацию программного обеспечения для устройств промышленного интернета вещей.

Программа прошла успешное рецензирование в компаниях–партнерах университета: ООО «Спутникс» и ООО «ЭРЕМЕКС», успешную экспертизу в АНО ВО «Университет Иннополис», а также согласование в отраслевой рабочей группе «Информационно-коммуникационные технологии» под председательством заместителя министра Минцифры РФ Н.С. Яцененко.

Рецензенты отмечают: «Учитывая, что цифровая трансформация чрезвычайно актуальна на сегодняшний день и нарастающий интерес к ней, рост количества устройств IoT и спад числа технических специалистов, востребованность специалиста после прохождения программы на рынке труда через 3 года будет высока».

Программа состоит из пяти модулей.

1. Радиоинформационные технологии в среде GNU Octave.
2. Язык программирования Python для разработки приложений и нейронных сетей.
3. Программирование в среде GNU Radio.
4. Объектно-ориентированное программирование и приложений на языке C++.
5. Программирование микроконтроллеров на языке C++.

### **3. Модули программы [3]**

Первый модуль («Радиоинформационные технологии в среде GNU Octave») имеет своей целью обучение применению пакета программ GNU Octave для решения различных математических и экономических задач, работе с высокоуровневой графикой, освоение программирования в среде разработки GNU Octave. В результате освоения данного модуля обучающиеся познакомятся со способами разработки алгоритмов и компьютерных программ, пригодными для практического применения, научатся создавать блок-схемы, М-функции, двумерные и трехмерные графики, гистограммы, получат навыки цифровой обработки сигналов, создания фильтров для шумоподавления.

Второй модуль («Язык программирования Python для разработки приложений и нейронных сетей») даст студентам возможность приобрести необходимые компетенции для ведения нового вида профессиональной деятельности в сфере систем интернета вещей, автоматизированных систем управления. Студенты узнают о принципах написания программного кода с использованием графической среды разработки и основных конструкциях языка программирования высокого уровня Python, изучат принципы построения и создания программной части систем автоматизированного управления, интернета вещей. По окончании модуля студенты смогут разрабатывать консольные

приложения на языке Python различного назначения, создавать, редактировать, модифицировать программы автоматизированных систем управления, интернета вещей.

Третий модуль («Программирование в среде GNU Radio») формирует у студентов знания, умения и навыки, необходимые для ведения нового вида профессиональной деятельности в сфере разработки, проектирования, исследования и эксплуатации радиоэлектронных средств и радиоэлектронных систем интернета вещей, на основе программно-определяемых радиотехнологий в среде GNU Radio. Результатом прохождения модуля является приобретение студентами знаний об архитектуре программно-определяемых радиотехнологий и правилах архитектурного проектирования в среде GNU Radio. Также студенты смогут научиться проводить регистрацию и анализ данных SDR-устройств и пользоваться встроенными контрольно-измерительными приборами при исследовании принимаемых сигналов.

Четвёртый модуль («Объектно-ориентированное программирование и приложений на языке C++») знакомит студентов с объектно-ориентированным подходом в программировании, а также с общими принципами функционирования фреймворка Qt, в том числе методами разработки приложений. На практических занятиях модуля обучающиеся освоят навыки разработки программных приложений различного назначения, в том числе приложений для систем интернета вещей и разовьют умение разрабатывать консольные приложения обработки информации и приложения с графическим интерфейсом пользователя.

Пятый модуль («Программирование микроконтроллеров на языке C++») направлен на получение студентами представлений о принципах построения и создания программной, а также аппаратной частей систем автоматизированного управления, интернета вещей. На семинарских занятиях модуля обучающиеся освоят различные подходы к решению задач по созданию и редактированию программной и аппаратной составляющих автоматизированных систем управления, интернета вещей.

#### **4. Практика**

Практические занятия проводятся в лабораториях Учебно-научного центра космического мониторинга «Космоцентр». Студенты получают практические навыки по работе с микроконтроллерами, инициализации портов ввода / вывода, использованию устройств отображения, устройств ввода данных, подключению датчиков, управлению нагрузкой, применению шаговых двигателей. Обучающиеся работают с интерфейсами передачи данных и беспроводными модулями, создают 3D-графики в Octave, проводят расчёт и построение корреляционной функции, определяют периодичность зашумленного сигнала и строят

АКФ изучаемых сигналов. Для студентов проходят практические занятия на языке Python с использованием встроенных типов данных и операций с ними, а также с подключением библиотек и импортом модулей. Обучающиеся разрабатывают структуру и принцип работы нейронных сетей, создают нейронные сети для решения задач регрессии. Они работают в среде визуального программирования программно-определяемых SDR-систем GNU Radio, управляют и настраивают параметры SDR-модулей (блоков) в среде GNU Radio, разрабатывают приложения с использованием фреймворка Qt и элементами графического интерфейса.

Итоговый проект представляет собой создание системы мониторинга или управления. В состав системы входит микропроцессор, устройства ввода (датчики, клавиатура, радиомодули – не менее 3 штук), устройства вывода (дисплеи, светодиоды, звуковой излучатель, радиомодули), исполнительные устройства (шаговый двигатель). Система должна осуществлять либо мониторинг информации, поступающей с устройств ввода (самый простой вариант), либо управление исполнительными устройствами. Также возможно сочетание мониторинга и управления (автономная система). Мониторинг и управление должны осуществляться через локальный сервер, который реализуется на микропроцессоре с помощью модуля Wi-Fi.

После успешной сдачи итогового экзамена в форме публичной защиты проекта студенты получают диплом государственного образца о профессиональной переподготовке.

### **Заключение**

Проект «Цифровая кафедра», реализующий ДПП «Обслуживание систем интернета вещей», имеет первоочередную цель сформировать у студентов, учащихся не по ИТ-профилю, представление об общих принципах работы систем интернета вещей в целом и о возможности применения технологии интернета вещей в сфере радиотехники и радиопромышленности. Таким образом, студенты, прошедшие обучение в рамках данного проекта, будут являться специалистами, не только компетентными в области своей основной образовательной программы, но и знающими на базовом уровне смежные дисциплины и направления подготовки. В будущем таким специалистам будет легче адаптироваться к деятельности, находящейся на стыке нескольких научных направлений, что приведёт к упрощению взаимодействия между научными и производственными подразделениями и, как следствие, к повышению качества работы как научных, так и промышленных организаций.

### **Литература**

1. Участники программы «Приоритет 2030» запускают новый масштабный проект «Цифровые кафедры». URL: <https://minobrnauki.gov.ru/press-center/news/novostipodvedomstvennykh-uchrezhdeniy/50232/>.

2. В РТУ МИРЭА откроется «Цифровая кафедра».  
URL: <https://www.mirea.ru/mediapage/press-service/v-rtu-mirea-otkroetsya-tsifrovaya-kafedra/>.

3. Обслуживание систем интернета вещей. URL:  
<https://www.mirea.ru/education/programs-of-additional-education-and-professional-training/program/tsifrovaya-kafedra/programmy/obsluzhivanie-sistem-interneta-veshchey/>.

**S.V. Litvinov, A.A. Bondar, V.O. Skripachev, K.V. Avdeev,  
G.A. Miloradov, Yu.A. Polevoda, O.V. Semenova, A.D. Yarlykov**  
MIREA – Russian Technological University

## **IMPLEMENTATION OF THE «INTERNET OF THINGS SYSTEM MAINTENANCE» PROGRAM WITHIN THE FRAMEWORK OF THE PROJECT «DIGITAL CHAIRS» OF THE NATIONAL PROGRAM «DIGITAL ECONOMY OF THE RUSSIAN FEDERATION» AT RTU MIREA**

**Keywords:** *RTU MIREA, digital departments, IT specialist training, additional professional retraining program, additional qualifications.*

**Abstract.** *The project «Digital Chairs» as a part of the federal project «Development of Human Resources for the IT Industry» of the national program «Digital Economy of the Russian Federation» is aimed at providing priority sectors of the economy with highly qualified personnel with digital competences. The article discusses the experience of the «Maintenance of Internet of Things Systems» program of the Digital Chair of RTU MIREA.*

**Г.И. Миннибаева, А.М. Нигмедзянова**  
*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

УДК 004.946 + 372.851

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ В ОБУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ**

**Ключевые слова:** *виртуальная реальность, технологии виртуальной реальности, пространственное мышление, стереометрия.*

*В работе рассмотрено влияние обучающих разработок в области виртуальной реальности на усвоение учебного материала при обучении стереометрии. Кроме того, в статье представлены возможности использования VR-технологий на уроках математики. Основной теоретический результат проиллюстрирован на примере решения стереометрической задачи.*

Школьный курс обучения стереометрии был и остается одним из проблемных разделов методики преподавания математики. Практические навыки, приобретаемые учащимися в процессе обучения, являются ключевыми в образовании, особенно при изучении стереометрии.

Обучение становится более эффективным, когда задействовано большее число чувств восприятия [3]. Для учащихся визуальные образы – забавный способ стимулировать органы чувств. К тому же школьники часто сталкиваются с проблемой пространственного мышления, то есть они не могут представить в воображении трехмерные фигуры. Использование технологий виртуальной реальности способствует не только успешному решению многих геометрических задач, но и точному представлению чертежа каждой задачи.

Использование и внедрение технологии виртуальной реальности в учебный план способствует повышению интереса и вовлеченности учащихся в образовательный процесс, увеличению скорости и эффективности процесса обучения и дают возможность представить абстрактные и сложные предметы, которые трудно или почти невозможно воспроизвести с помощью инструментов реального мира.

**Основы виртуальной реальности.** Виртуальная реальность – новый инструмент для образования. Он не может полностью заменить существующие методы преподавания, но уже сегодня эти технологии могут существенно дополнять обучение и сделать его более доступным, простым и увлекательным. Виртуальная реальность не является самоцелью, это лишь дополнение к обучению предмету. Это такое же средство, как учебник, интерактивная доска или мобильное приложение [2].

Виртуальная реальность (VR) – это компьютерная среда, в которую участники полностью погружены и могут взаимодействовать с ней. Эта среда может быть результатом воображения или имитации нашего мира с соблюдением физических законов. Приложения виртуальной реальности пытаются отделить своих пользователей от реального мира (иногда физически) и погрузить их в цифровую среду. Для полного погружения пользователей в виртуальную реальность задействуются такие органы чувств, как зрение, слух и осязание, и создается ощущение нахождения в виртуальной среде [1].

VR можно разделить на несколько категорий в соответствии с различными техническими и воспринимаемыми характеристиками: VR с эффектом полного погружения и VR без погружения. Для первого случая необходимо наличие трёх факторов: правдоподобная симуляция мира с высокой степенью детализации; высокопроизводительный компьютер, действия пользователя и реагировать на них в режиме реального времени; специальное оборудование, соединенное с компьютером, которое

обеспечивает эффект погружения в процессе исследования среды. Не каждому и не всегда необходимо полное погружение в альтернативную реальность. К типу «без погружения» относятся симуляции с качественным изображением, звуком и контроллерами, в идеале транслируемые на широкоформатный экран.

Чтобы попасть в уникальный мир трехмерных изображений, необходимо использовать специальное оборудование и инструменты: очки в комплекте со смартфоном – самый недорогой вариант. VR-очки позволяют человеку буквально погрузиться в виртуальное пространство с головой, видя перед собой трехмерное изображение. Пользователь может увидеть сложные геометрические объекты, ближе рассмотреть их отдельные детали.

Для достижения такого результата в виртуальных очках применяются две асферические линзы. Они подают картинку каждому глазу отдельно, что и позволяет добиться трехмерного эффекта. Наши глаза не могут воспринимать одно изображение в полной мере, так как фокусируются на чем-то среднем.



Рис. 1. Виртуальные очки VR – BOX

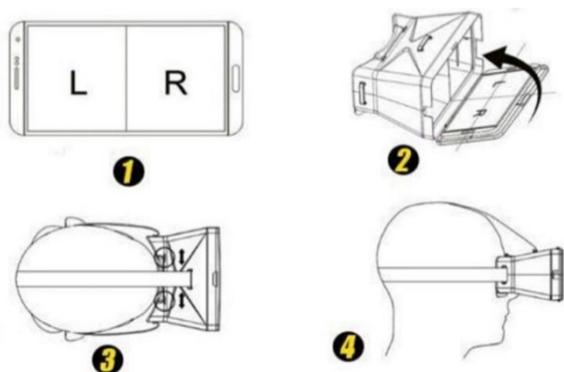


Рис. 2. Схема использования виртуальных очков

Важность изучения темы «Тела вращения» в школе невозможно переоценить. Уже самые простые факты, такие как, например, осевое сечение цилиндра, требуют усилия воображения, чтобы его увидеть наглядно, и нуждаются в строгом доказательстве. Иллюстрация задач стереометрии на конкретных моделях не только способствует развитию пространственного мышления, но и повышает интерес учащихся к предмету. Тема «Тела вращения» усваивается учащимися неплохо. Однако анализ состояния знаний учащихся показывает, в частности,

недостаточно сформированные навыки в решении стереометрических задач (неумение выполнить чертеж рассматриваемого тела вращения).

Рассмотрим использование технологий виртуальной реальности при решении следующей задачи: «Радиус основания цилиндра равен 15, а его образующая равна 19. Сечение, параллельное оси цилиндра, удалено от неё на расстояние, равное 9. Найдите площадь этого сечения». Чтобы виртуальные объекты стали доступны для просмотра, необходимо использование специальных компьютерных программ, таких как Geogebra, Cabri 3D или Blender.

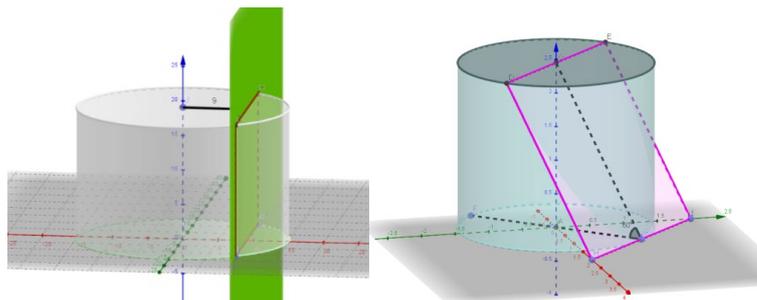


Рис. 3. Иллюстрация модели задачи

В них преподавателю необходимо создать требуемые модели (рис. 3) и сохранить их в формате Gif или видеофайла. Для того, чтобы использовать VR-очки, необходимо в приложении Camarada преобразовать необходимый видеофайл.

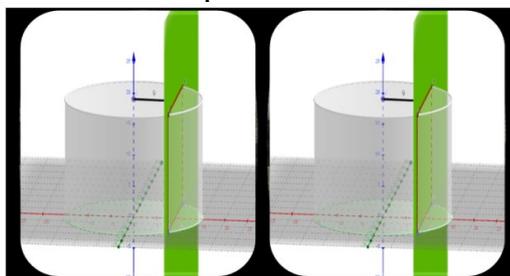


Рис. 4. Пример изображения в VR-очках

Запустив готовый видеофайл, необходимо вставить телефон в специальное отверстие очков (как показано на рис. 2.). Теперь на экране отображается трехмерный объект, представляющий собой визуализацию задачи, в нашем случае сечение цилиндра, параллельное его оси.

Значение внедрения технологии виртуальной реальности в математику заключается в том, что такие инновационные инструменты, несомненно, будут мотивировать учащихся к изучению стереометрии, к тому же поспособствуют повышению качества обучения за счет синтеза различных форм представления информации. Основное преимущество использования технологии виртуальной реальности в стереометрии в том, что она очень наглядна, информативна и интерактивна, что позволяет развивать образное мышление и пространственное воображение учащихся.

## Литература

1. Richter-Trummer T. Instant Mixed Reality Lighting from Casual Scanning / T. Richter-Trummer, D. Kalkofen, J. Park, D. Schmalstieg. Packt Publishing, 2016.
2. Гринфилд А. Радикальные технологии: устройство повседневной жизни / пер. с англ. И. Кушнareвой. М.: Издательский дом «Дело», РАНХиГС, 2018. 424 с.
3. Крапивенко А.В. Технологии ощущений: учебное пособие. 4-е изд., электрон. М.: Лаборатория знаний, 2020. 274 с.
4. Васильева Н.Н., Рожкова Г.И. Восприятие виртуальных стереообъектов: особенности взаимодействия зрительных механизмов и пространственные перцептивные эффекты // Экспериментальная психология. 2021. Т. 14, № 3. С. 79-90.
5. Селиванов В.В., Селиванова Л.Н. Виртуальная реальность как метод и средство обучения // Образовательные технологии и общество (Educational Technology & Society). Т. 17, № 3. С. 378-391. URL: <http://ifets.ieee.org/russian/periodical/journal.html>.
6. Побоккин П.А. Виртуальное и визуальное мышления на уроках математики // Вестник Череповецкого государственного университета. Череповец, 2014. № 6. (59). С. 133-136.

**G.I. Minnibaeva, A.M. Nigmedzyanova**  
Kazan Federal University

## THE USE OF VIRTUAL REALITY TECHNOLOGIES IN TEACHING STEREOOMETRY

**Keywords:** *virtual reality, virtual reality technologies, spatial thinking, stereometry.*

**Abstract.** *The paper considers the influence of educational developments in the field of virtual reality on the assimilation of educational material when teaching stereometry. In addition, the article presents the possibilities of using VR technologies in math lessons. The main theoretical result is illustrated on specific models.*

**Г.Е. Сенькина**  
Смоленский государственный университет

УДК 378, 372.8, 37.02

## ФОРМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦЕНТРОВ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ РАБОТНИКОВ В ЕДИНОЙ ФЕДЕРАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ НА ПРИМЕРЕ ЦЕНТРА СМОЛГУ

Ключевые слова: *научно-методическое сопровождение, педагогические работники, единая федеральная система, направления деятельности, стратегические сессии, вебинары, прикладные исследования.*

*Статья посвящена проблеме становления центров научно-методического сопровождения педагогических работников в рамках Единой федеральной системы. Показаны возможные формы организации взаимодействия центров Единой федеральной системы научно-методического сопровождения педагогических работников на примере СмолГУ. Представлен опыт и особенности реализации программы деятельности Центра НМС СмолГУ в рамках основных направлений. Намечены перспективы развития модели взаимодействия центров Единой федеральной системы с образовательными организациями, представителями системы дополнительного профессионального образования.*

Научно-методические центры сопровождения педагогических работников и управленческих кадров были организованы в соответствии с Указом Президента Российской Федерации от 21 июля 2020 года № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года» и Концепцией Единой федеральной системы научно-методического сопровождения [1], разработанной во исполнение этого указа.

Согласно Концепции ЕФС, *научно-методический центр сопровождения педагогических работников* (далее – научно-методический центр) – это структурное подразделение образовательных организаций, реализующих образовательные программы высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 44.00.00 «Образование и педагогические науки», обладающее потенциалом научного, проектного и методического развития и *осуществляющее проведение прикладных исследований образовательных систем*, тиражирование образовательных практик, внедрение научных достижений и передовых педагогических технологий в сферу образования [2].

Тем самым в новой редакции Концепции ЕФС подчеркивается роль *прикладных исследований*, проводимых научно-методическими центрами, созданными на базе вузов. Такое уточнение было востребовано для разведения функций этих центров с региональными Центрами непрерывного повышения педагогического мастерства (ЦНППМ), которые в большей степени занимаются научно-методическим сопровождением педагогов в рамках программ дополнительного профессионального образования.

Предполагалось изначально, что научно-методические центры взаимодействуют между собой, а также с ЦНППМ, вузами, другими образовательными организациями. Основной формой организации взаимодействия центров становятся *вебинары*, которые раскрывают содержание их деятельности и разработки в рамках основных

направлений, закрепленных за каждым центром. Так, в 2022 году проведены тематические вебинары, вызвавшие большой интерес со стороны педагогов регионов России (табл. 1).

Особый интерес вызвал вебинар по моделям и технологиям обучения в цифровой среде, в котором приняли участие более 2000 педагогов из различных регионов России. Научно-методический центр на базе СмолГУ представил три основных направления деятельности: психолого-педагогические методы и методики эффективного взаимодействия педагога с семьей обучающегося, модели и технологии обучения в цифровой среде, технологии формирования управленческих компетенций руководителей образовательных организаций.

*Таблица 1*

**Проведение вебинаров для представителей системы ДПО (ЦНППМ / ИРО / ИПК / методических служб / педагогических вузов) по презентации и рассмотрению разработок федеральных центров**

| № п/п | Дата проведения | Направление деятельности федеральных центров                                                                              | Исполнители                                                                            |
|-------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | 21.09           | Развитие естественнонаучной грамотности обучающихся в контексте преемственности начального и основного общего образования | ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, ЮУрГГПУ                                                       |
| 2     | 28.09           | Развитие школьных воспитательных систем                                                                                   | ВГСПУ, КГУ, НГПУ им. К.Минина, НГПУ (Новосибирск), ОГПУ, ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, МПГУ |
|       |                 | Научно-методическое сопровождение воспитания в структуре экосистемы подготовки педагога                                   |                                                                                        |
| 3     | 05.10           | Научно-методическая поддержка учителя сельской школы                                                                      | БГПУ им. М. Акмуллы, НГПУ (Набережные Челны), ЯГПУ им. К.Д. Ушинского                  |
| 4     | 12.10           | Современные технологии раннего развития детей                                                                             | БГПУ им. М. Акмуллы, ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского, РГПУ им. А.И. Герцена, ШГПУ  |
| 5     | 19.10           | Психолого-педагогические методы и методики эффективного взаимодействия педагога с семьей обучающегося                     | АГГПУ им. В.М. Шукшина, СмолГУ, ТГПУ, УрГПУ                                            |
| 6     | 26.10           | Методы и технологии коррекции трудностей в обучении школьников                                                            | ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского, МГППУ                                             |
| 7     | 02.11           | Модели и технологии обучения в цифровой среде                                                                             | АГГПУ им. В.М. Шукшина, ВГСПУ,                                                         |

|   |       |                                                                                              |                                                        |
|---|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
|   |       |                                                                                              | НГПУ им. К. Минина, ОмГПУ, СмолГУ, ТГПУ, УрГПУ         |
| 8 | 09.11 | Технологии формирования управленческих компетенций руководителей образовательных организаций | НГПУ им. К. Минина, СмолГУ, НГПУ (Новосибирск), ОГПУ   |
| 9 | 16.11 | ЭКОсистемный подход в работа классного руководителя                                          | Центр продуктивного образования, ЧГПУ (Грозный), УрГПУ |

Еще одной значимой формой взаимодействия с вузами, субъектами Единой федеральной системы научно-методического сопровождения педагогических работников явились *стратегические сессии*. Они проводятся в течение года 13 российскими вузами и охватывают все регионы России. Так, Научно-методический центр на базе СмолГУ был прикреплен к одному из операторов стратегических сессий – ФГБОУ ВО «Государственный университет просвещения». За Научно-методическим центром сопровождения педагогических работников при СмолГУ в рамках стратегических сессий закреплено 11 субъектов Российской Федерации: Московская, Владимирская, Ивановская, Калужская, Костромская, Рязанская, Смоленская, Тамбовская, Тверская и Сахалинская области, а также Чукотский автономный округ.

Представители региональных субъектов ознакомились с общей программой стратегических сессий на 2023 год, а также особенностями Единой федеральной системы сопровождения педагогических работников и управленческих кадров. Представлены доклады по тематике: ЕФС как инструмент реализации государственной политики в сфере образования; ЕФС: единое образовательное пространство ДПО; вовлечение организаций высшего образования в развитие региональных сегментов ЕФС: ключевые вызовы и перспективные направления.

О прикладных исследованиях в системе непрерывного профессионального образования рассказала руководитель Центра научно-методического сопровождения педагогических работников при Смоленском государственном университете Г.Е. Сенькина. Более подробно аспекты применения прикладных исследований для построения модели управленческих компетенций руководителей образовательных организаций раскрыла С.В. Кошевенко, декан факультета экономики и управления Смоленского государственного университета.

Таким образом, складывается модель взаимодействия центров научно-методического сопровождения педагогических работников в рамках Единой федеральной системы: от прикладных исследований по направлениям деятельности центров – к представлению результатов исследований и методических разработок на вебинарах и стратегических

сессиях. Очевидно, что модель является открытой и будет развиваться по мере становления центров и востребованности результатов их деятельности субъектами РФ. Перспективы развития модели связаны с формированием взаимодействия с социальными партнерами центров – образовательными организациями различного уровня, органами управления образования, открытием инновационных площадок, экспертной деятельностью.

### Литература

1. Об утверждении Концепции создания единой федеральной системы научно-методического сопровождения педагогических работников и управленческих кадров. URL:

<https://fioco.ru/Media/Default/Documents/для%20новостей/Концепция%20создания%20Единой%20федеральной%20системы%20научно-методического%20сопровождения%20пед.%20работников.pdf> (дата обращения: 13.03.2023).

2. Концепция создания единой федеральной системы научно-методического сопровождения педагогических работников и управленческих кадров. URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/3fc484bc2dcf592bee7e324ca2bfda90/download/5420/> (дата обращения: 13.03.2023).

3. Об утверждении методических рекомендаций по реализации мероприятий по формированию и обеспечению функционирования единой федеральной системы научно-методического сопровождения педагогических работников и управленческих кадров. URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/51d3c15a6842dce2585500acd9236624/download/3508/> (дата обращения: 13.03.2023).

**G.E. Senkina**

Smolensk State University

## FORMS OF INTERACTION WITH THE CENTERS OF SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL SUPPORT OF PEDAGOGICAL WORKERS IN A UNIFIED FEDERAL SYSTEM ON THE EXAMPLE OF THE CENTER SMOLGU

**Keywords:** *scientific and methodological support, teaching staff, unified federal system, areas of activity, strategic sessions, webinars, applied research.*

**Abstract.** *The article is devoted to the problem of the formation of centers for scientific and methodological support of pedagogical workers within the framework of the Unified Federal System. Possible forms of organization of interaction between the centers of the Unified Federal System of Scientific and Methodological Support of Pedagogical Workers are shown on the example of Smolensk State University. The experience and features of the implementation of the program of activities of the Center for NMS of Smolensk State University within the framework of the main directions are presented. Prospects for the development of a model of interaction between the centers of the Unified*

*Federal System with educational organizations, representatives of the system of additional professional education are outlined.*

**Н.М. Тимофеева**

*Смоленский государственный университет*

УДК 004.9

## **О ВЛИЯНИИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПОДДЕРЖКИ РАБОТЫ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ НА КАЧЕСТВО СЕТЕВОГО ОБУЧЕНИЯ**

*Ключевые слова: оценка качества образования, качество содержания образования, качество результатов образования, качество образовательных технологий, системы автоматизации поддержки работы преподавателя, сетевое обучение.*

*В данной работе рассматривается влияние элементов системы автоматизации поддержки работы (САПР) преподавателя на основные показатели качества сетевого образования. Повышение показателя качества содержания образования возможно за счет ориентированного на обучаемость и обученность ученика, авторского, соответствующего потребностям учебного процесса контента цифровой образовательной платформы, разработанной на основе комплексного использования системы индивидуального тестирования, коррекции результатов в форме индивидуального и группового обучения. Повышение показателя результативности образования происходит из-за исключения факторов формальности, субъективности и рутинности в автоматическом оценивании, за счет ориентации при диагностике, построении образовательного процесса на индивидуальный подход в обучении. Показатель качества образовательных технологий повышается из-за появившейся в результате использования САПР преподавателя возможности применения адаптивных технологий и технологий индивидуального обучения, как наиболее проблемных для реализации в сетевом формате.*

Повсеместное внедрение сетевого обучения в образовательный процесс, частичное или полное, – данность сегодняшнего времени. Как при этом не снизить качество образования – основной вопрос, стоящий перед педагогическим сообществом. Одним из возможных вариантов его решения может стать применение цифровой образовательной платформы на основе комплексного использования систем автоматизации поддержки

работы преподавателя (САПР). Отметим, что за последние несколько десятилетий в Смоленском государственном университете сложилась научно-методическая школа по САПР под руководством Г.Е. Сенькиной, Е.П. Емельченкова, и ее наработки, такие, например, как автоматизированное индивидуальное тестирование (система «Advanced Tester», автор С.В. Козлов), коррекция результатов обучения в форме индивидуального и группового обучения (системы «Задачник», автор Д.А. Бояринов, «Траектория обучения», автор О.М. Киселева), могут оказаться полезными, в том числе и при организации сетевого взаимодействия между обучающим и обучающимися [1–3].

Дадим определения основным используемым понятиям и системам.

«Сетевое обучение (*on-line learning*) – обучение с помощью информационно-телекоммуникационной сети» [4].

«Качество образования – интегральная характеристика системы образования, отражающая степень соответствия реально достигаемых образовательных результатов нормативным требованиям, социальным и личностным ожиданиям» [5].

«САПР – система автоматизированной поддержки работы преподавателя, при этом часть операций по выполнению учебной деятельности автоматизируется, а часть может и всегда будет выполняться человеком. При этом в более совершенных системах доля работ, выполняемых человеком, будет меньше, но содержание этих работ будет более творческим, а роль человека в большинстве случаев – более ответственной» [6].

*Автоматизированная система обучения «Advanced Tester»* – дидактическая система индивидуального тестирования, построенная на математической основе теории графов, соответствий Галуа, аппарате импликативных матриц. Позволяет проектировать индивидуальные тесты в автоматическом режиме. Система служит для выявления динамики обучения (обучаемость) и уровня сформированности знаний и умений (обученность) учащихся с последующей коррекцией полученных результатов [7].

*Автоматизированная система обучения «Задачник»* – состоит из двух программных продуктов, построенных на математической основе теории графов. Позволяет автоматизировать процесс отбора учебных заданий в соответствии с образовательным запросом обучающегося; обеспечивает обучение решению задач в индивидуальной, лично ориентированной методике обучения; осуществляет отбор систем базисных задач по данной теме с учётом индивидуальных особенностей знаний учащихся [8].

*Автоматизированная система обучения «Траектория обучения»* – автоматизированная лично ориентированная система обучения, построенная на математической основе теории графов. Позволяет

производить построение модели знаний учеников группы, траектории индивидуального выравнивания знаний каждого ученика относительно знаний группы, а также траектории обучения группы в целом [9].



Рис. 1. Показатели качества образования

Традиционно при раскрытии понятия «качество образования» выделяют три группы показателей: *качество содержания образования, качество результатов образования; качество образовательных технологий* (рис. 1) [5].

Рассмотрим, как указанные выше САПР могут положительно влиять на повышение качества сетевого образования.

**Показатель качества содержания сетевого образования:** контент цифровой платформы, объединяющей в себе индивидуальное тестирование, коррекцию результатов обучения в форме построения траекторий индивидуального и группового обучения, наполняется самим преподавателем в соответствии с образовательным запросом, уровнем обучаемости и обученности школьника, в зависимости от целей и задач, которые стоят перед участниками образовательного процесса. У педагога есть возможность сделать образовательный контент авторским, задействовать множество дополнительных источников. За счет всего перечисленного содержание обучения может быть улучшено, если станет лично ориентированным, отвечающим насущным потребностям.

**Показатель результативности сетевого образования** повышается за счет автоматизации рутинных процессов оценивания, а также за счет исключения фактора субъективности при автоматическом оценивании учебных достижений обучающихся. Кроме этого ориентация при диагностике, построении образовательного процесса на индивидуальный подход (учет индивидуальных особенностей школьников, удовлетворение их личностных запросов и др.) оптимизирует процесс обучения, делая его более результативным. Таким образом, недостатки сетевого обучения, состоящие в формальности, снижении планки при оценивании [5, 10, 11, 12], нивелируются, пусть не полностью, но частично.

**Применение адаптивных технологий  
и индивидуального подхода в сетевом обучении (в %)**

| Какие элементы адаптивных технологий и индивидуального подхода вы используете / встречали в сетевом обучении? |                                                      |                                                                                                     |                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
|                                                                                                               | Применение элементов технологии "перевернутый класс" | Применение элементов программированного обучения (отказ от линейности, вариативность онлайн-курсов) | Другое, указать что |
| Преподаватели                                                                                                 | 63                                                   | 94                                                                                                  | 31                  |
| Студенты                                                                                                      | 63                                                   | 77                                                                                                  | 0                   |

Рассмотрим **показатель качества используемых образовательных технологий** в сетевом обучении. Исследуя его при анкетировании 16 педагогов и 30 студентов старших курсов педагогических специальностей, было выявлено, что среди наиболее проблемных в сетевом формате выделяют адаптивные технологии и технологии индивидуального подхода. Для нивелирования этого недостатка респондентами предлагалось использовать введение модулей по выбору, отказ от линейности при построении онлайн курсов, применение элементов технологий программированного обучения и «перевернутого класса» (таблица 1). Среди прочего анкетированные действующие и будущие педагоги указывали, что благодаря применению личностно-ориентированных САПР, исчезает фактор обезличенности в сетевом обучении, а, следовательно, проблемные для сетевого формата технологии перестают быть проблемными, повышается качество используемых образовательных технологий.

Таким образом, идея объединения в единую цифровую платформу систем автоматизации поддержки работы преподавателя [13], многолетний опыт по внедрению и сопровождению программных продуктов в поддержку работы преподавателей оказались применимы, востребованы и оказывают положительное влияние на качество образования в условиях сетевого формата обучения.

### Литература

1. Козлов С. В. Педагогическое проектирование индивидуального тестирования в личностно ориентированной обучающей системе: дис. ... канд. пед. наук. Смоленск, 2006. 204 с.
2. Бояринов Д.А. Проектирование личностно ориентированной обучающей системы: дис. ... канд. пед. наук. Смоленск, 2004. 204 с
3. Киселева О.М. Применение методов математического моделирования в обучении: дис. ... канд. пед. наук. Смоленск, 2007. 180с.
4. ГОСТ Р 52653-2006. Информационно-коммуникационные технологии в образовании. Термины и определения. М.: Стандартинформ, 2006. 9 с.

5. Тимофеева Н.М. Оценка качества электронного обучения и возможности его повышения // Современные проблемы науки и образования. 2022. № 4. С. 6.
6. Емельченков Е.П. О системе автоматизированной поддержки работы преподавателя // Математическая морфология. 2011. Т.10. Вып. 3. URL: <http://sgma.alpha-design.ru/MMORPH/N-31-html/yemelchenkov/yemelchenkov.htm>.
7. Козлов С. В. Педагогическое проектирование индивидуального тестирования в личностно ориентированной обучающей системе: автореферат дис. ... канд. пед. наук. Смоленск, 2006. 18 с.
8. Бояринов Д.А. Проектирование личностно ориентированной обучающей системы: автореф. дисс. ... канд. пед. наук. Смоленск, 2004. 16 с.
9. Киселева О.М. Применение методов математического моделирования в обучении: автореф. дис.... канд. пед. наук. Смоленск, 2007. 16 с.
10. Senkina G.E., Timofeeva N.M., Kiseleva O.M. Modernization of traditional educational forms in the context of distance learning. Journal of Higher Education Theory and Practice. 2022. V. 22, № 3. 160-165.
11. Faulconer E.K., Griffith J.C., Wood B.L., Acharyya S., Roberts D.L. Comparison of online and traditional chemistry lectures and laboratory work // Chemical Education Research and Practice. 2018. № 19 (1). P. 392-397.
12. Markus V.B., Atan N.A., Talib R., Latif A.A. Promote students' general skills by integrating an e-learning platform. International // Journal of Emerging Technologies in Learning. 2019. № 14 (20). P. 4-17.
13. Сенькина Г.Е. О создании федерального центра научно-методического сопровождения педагогических работников на базе СмолГУ: цели, задачи, направления // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск, 2022. Вып. 23. С. 381-386.

**N.M. Timofeeva**  
Smolensk State University

## ON THE INFLUENCE OF THE ELEMENTS OF THE AUTOMATION SYSTEM SUPPORTING THE WORK OF THE TEACHER ON THE QUALITY OF ON-LINE LEARNING

**Keywords:** *assessment of the quality of education, the quality of the content of education, the quality of the results of education, the quality of educational technologies, automation systems to support the teacher's work, online learning.*

**Abstract.** *In this paper, the influence of elements of the teacher's work support automation system on the main indicators of the quality of on-line education is considered. The improvement of the quality index of the educational content is possible due to the student's learnability-oriented, author's content corresponding to the needs of the educational process of the digital educational platform, developed on the basis of the integrated use of the system of individual testing, correction of results in the form of individual and group training. The increase in the educational performance indicator is due to the exclusion of the factors of formality, subjectivity and routine in automatic assessment, due to the orientation in diagnostics, the construction of the*

*educational process on an individual approach to learning. The indicator of the quality of the educational technologies used is increasing due to the possibility of using adaptive technologies and technologies of individual training, which appeared as a result of the use of the teacher's work support automation system, as the most problematic for implementation in a on-line format.*

**Н.А. Шерстнёва**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 519.677

## **РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ WOLFRAM MATHEMATICA**

Ключевые слова: *система компьютерной математики Wolfram Mathematica, решение задач математического анализа в математических пакетах.*

*Статья продолжает цикл публикаций автора [1–3], посвящённых решению задач математического анализа средствами математических пакетов, в частности идёт речь о решении математических задач в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica. Приводятся примеры математических проблем из различных разделов дисциплины, изучаемых на таких направлениях подготовки, как 44.03.05 Педагогическое образование с двумя профилями (профили «Математика и информатика», «Физика и информатика») и 01.03.02 Прикладная математика и информатика (профиль «Математическое и информационное моделирование»).*

Последнее десятилетие характеризуется бурным развитием ИТ-технологий и их активным внедрением в различные сферы жизни. Реальный мир неизбежно меняется, а значит, трансформироваться должен и образовательный процесс, в частности изменяются основные образовательные программы в вузах. Стандарты последних поколений делают упор на компьютерное математическое образование, предполагая внедрение в образовательный процесс лабораторных занятий и вычислительных практик по решению математических задач в различных математических пакетах.

Мы в своей педагогической деятельности опираемся на систему компьютерной математики Wolfram Mathematica. Этот инструмент существенно облегчает математические выкладки, позволяет эффективно визуализировать математический контекст, сокращает время решения

математической проблемы. Как отмечает сам автор пакета Конрад Вольфрам: «Нет никаких сомнений в том, что современные компьютеры раздвинули границы того, что большинство считало типичными человеческими мыслительными способностями» (запись в сообществе VK Wolfram Mathematica).

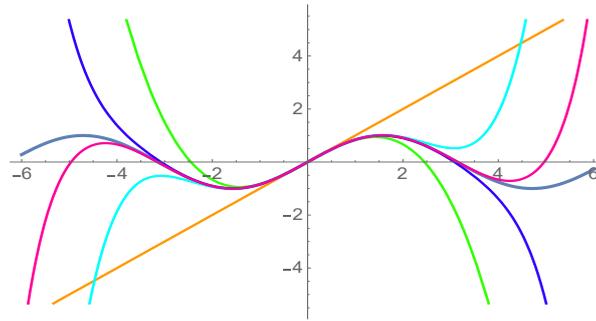
Работа с системами компьютерной математики предусмотрена на различных направлениях физико-математической подготовки. В частности, она реализована на таких направлениях бакалавриата, как 44.03.05 Педагогическое образование с двумя профилями (профили «Математика и информатика», «Физика и информатика») и 01.03.02 Прикладная математика и информатика (профиль «Математическое и информационное моделирование»). Студенты физико-математического факультета учатся решать в системе Wolfram Mathematica такие задачи математического анализа, как алгебраические вычисления; решение уравнений, неравенств и систем; вычисление пределов числовых последовательностей и функций одной и нескольких переменных; вычисление производных и частных производных различных порядков; исследование на монотонность, экстремумы, выпуклость, вогнутость; вычисление различных интегралов для функции одной и нескольких переменных; исследование на сходимости числовых и функциональных рядов; решение обыкновенных дифференциальных уравнений и другие проблемы математического анализа.

Приведём некоторые примеры из преподавательской деятельности автора в Смоленском государственном университете. Данная статья продолжает цикл работ по данной тематике [1–3].

**Пример 1** (глава «Числовые и функциональные ряды»). Разложить функцию  $y = \sin x$  в ряд Маклорена; приблизить многочленом 7-го порядка; изобразить график функции и её приближения многочленами 1-го, 3-го, 5-го, 7-го и 9-го порядков; построить графики соответствующих остаточных членов.

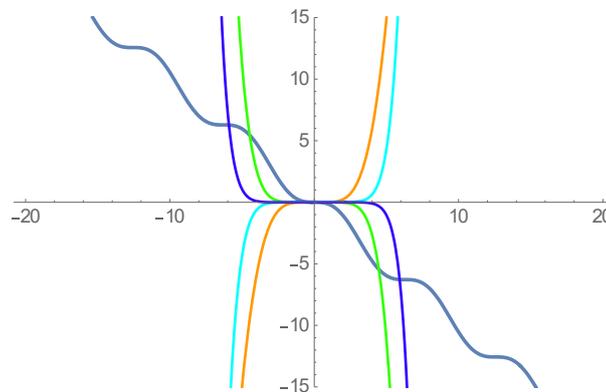
*Решение*

```
#ряд Маклорена и приближение многочленом 7-го порядка#
Series[Sin[x],{x,0,7}]
x-x^3/6+x^5/120-x^7/5040+ [[O[x]]] ^8
#построение многочленов Маклорена 1,3,5,7 и 9-го порядков#
ser[x_,n_]:=Normal[Series[Sin[x],{x,0,n}]]
r[x_,n_]:=Sin[x]-ser[x,n]
#построение графика функции и полученных приближений#
Plot[Evaluate[Join[{Sin[x]},Table[ser[x,n],{n,1,9,2}]]],{x,-
6,6},PlotStyle->{Thickness[0.006],Hue[0.1],Hue[0.3],Hue[0.5],Hue[0.7],Hue
[0.9]}]
```



#построение графиков остаточных членов#

```
Plot[Evaluate[Table[r[x,n],{n,1,9,2}]],{x,-
20,20},PlotStyle->{Thickness[0.006],Hue[0.1],Hue[0.3],Hue[0.5],Hue[0.7],
Hue[0.9]},PlotRange->{-15,15}]
```



**Пример 2** (глава «Функции нескольких переменных»). Найти точку локального условного экстремума функции  $f = 18x_1^2 + 19x_2^2$  при ограничении типа равенства  $g = x_1 + x_2 - 36$ .

*Решение*

$$F = 18x_1^2 + 19x_2^2;$$

$$g = x_1 + x_2 - 36;$$

```
GradientG = Table[D[g, xi], {i, 2}]
```

[табл... |дифференцировать

```
{1, 1}
```

(\*Градиент линейно независим,

значит можно воспользоваться классической функцией Лагранжа\*)

$$L = F + \lambda * g;$$

```
Solve[{∂x1 L == 0, ∂x2 L == 0, g == 0}, {x1, x2, λ}]
```

|решить уравнения

$$\left\{ \left\{ x_1 \rightarrow \frac{684}{37}, x_2 \rightarrow \frac{648}{37}, \lambda \rightarrow -\frac{24624}{37} \right\} \right\}$$

```
Dg = Sum[D[g, xi] * dxi, {i, 2}];
```

|с... |дифференцировать

$$dx_1 + dx_2$$

```
Solve[Dg == 0]
```

|решить уравнения

$$\left\{ \left\{ dx_2 \rightarrow -dx_1 \right\} \right\}$$

```
DF = Sum[D[L, xi, xj] * dxi * dxj, {i, 2}, {j, 2}];
```

```
dx1 = -dx2;
```

```
DF
```

```
74 dx22
```

(\*Дифференциал второго порядка больше нуля для всех ненулевых решений, значит  $(\frac{684}{37}, \frac{648}{37})$  – точка локального условного минимума\*)

**Пример 3** (глава «Нелинейное программирование»). Автосалон реализует автомобили оптом и в розницу. При розничной продаже  $x$  автомобилей издержки автосалона равны  $4x + x^2$  у.е. При оптовой реализации  $y$  автомобилей расходы составляют  $y^2$  у.е. Найдите оптимальный план продажи автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число автомобилей, имеющихся в автосалоне, равно 200.

*Решение*

```
Animate[ContourPlot[{4 * x1 + x12 + x22 == a, x1 + x2 == 200},
[анимируемый контурный график
```

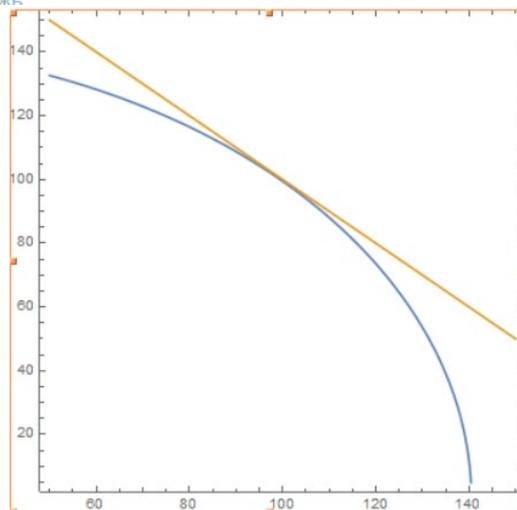
```
{x1, -5, 5}, {x2, -5, 5},
```

```
PerformanceGoal -> "Quality"], {a, -3, 3},
```

```
[целевая установка производительности
```

```
AnimationRunning -> False]
```

```
[показывание анимации [показать
```



#Минимум достигается в точке  $z = 20398$  при  $x_1 = 99$ ,  $x_2 = 101$ #

#Для минимизации издержек требуется продавать 99 автомобилей оптом и 101 автомобиль в розницу#.

## Литература

1. Шерстнёва Н.А. Применение системы Wolfram Mathematica в преподавании математического анализа // Сборник материалов III Всероссийской научно-

практической конференции с международным участием «Развитие научно-технического творчества детей и молодёжи». Киров, 2020. Вып.3. С. 144–148.

2. Шерстнёва Н.А. Решение математических задач средствами системы компьютерной математики Wolfram Mathematica // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. Вып.21. С. 422–427.

3. Шерстнёва Н.А. Визуализация математического материала посредством систем компьютерной математики // Сборник материалов V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Развитие научно-технического творчества детей и молодёжи». Киров: Изд-во Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2021. Вып.4. С. 131–136.

**N.A. Sherstneva**  
Smolensk State University

## **SOLUTION OF MATHEMATICAL PROBLEMS IN THE SYSTEM OF COMPUTER MATHEMATICS WOLFRAM MATHEMATICA**

**Keywords:** *computer mathematics system Wolfram Mathematica, solving problems of mathematical analysis in mathematical packages.*

**Abstract.** *The article continues the cycle of the author's publications devoted to solving problems of mathematical analysis using mathematical packages, in particular, we are talking about solving mathematical problems in the Wolfram Mathematica computer mathematics system. Examples of mathematical problems from various sections of the discipline studied in such areas of training as 44.03.05 Pedagogical education with two profiles (profiles «Mathematics and Computer Science», «Physics and Computer Science») and 01.03.02 Applied Mathematics and Informatics (profile «Mathematical and information modeling»).*

## РАЗДЕЛ 5

### Персоналии

**К.М. Расулов, С.А. Гомонов**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 929.7

#### ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА МАРКА БЕНЕВИЧА БАЛКА

*Ключевые слова: комплексная область, интерполяция, полианалитические функции, динамика космического полета, геометрия масс.*

*В статье рассказывается о жизненном и творческом пути замечательного смоленского математика М.Б. Балка, столетний юбилей которого отмечался на Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 26–27 мая 2023 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета.*

– Нет незаменимых.

– Да, но есть неповторимые.

*Из разговора знатоков*

Если захочется назвать основные черты и свойства характера Марка Беневича Балка, то на память сразу приходят такие слова, как ученый, педагог, замечательный организатор, эрудит и полиглот. Именно такие люди, как Марк Беневич, отдавшие всю свою жизнь, труд и талант математическому образованию на Смоленщине, сделали имя нашему вузу (Смоленскому государственному педагогическому институту, а ныне Смоленскому государственному университету). Достаточно сказать, что Марк Беневич Балк явился создателем одной из Смоленских математических школ, 14 его учеников-аспирантов успешно защитили диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, а двое стали докторами физико-математических наук (В.Е. Балабаев, К.М. Расулов).



Профессор М.Б. Балк

В непростое время проходили становление и развитие таланта М.Б. Балка. Вот основные вехи его жизни, учебы и творчества.

Родился Марк (Ицхок-Меер) Беневич Балк 27 января 1923 года в местечке Полонное Каменецк-Подольской (Хмельнитской) области на Украине. Его отец – счетовод полонской артели «Пищепром». Мать была домохозяйкой.

С 1930 года по 1938 год М.Б. Балк обучался в средней школе местечка Полонное, затем переехал в Киев, где с отличием окончил среднюю школу № 124.

В 1939 году поступил на мехмат Киевского университета. С третьего курса в возрасте 18 лет ушел добровольцем в часть Особого назначения НКВД (часть действовала в тылу врага в районе Городница – Новгород-Волынский). Служил рядовым в РККА в 3 истребительном полку Особого назначения НКВД с 10 июля по 5 октября 1941 года. После того как полк покинул территорию, занятую оккупантами, М.Б. Балк был (в сентябре 1941 года в Харькове) медицинской комиссией освобожден от воинской обязанности (по зрению) и направлен в глубокий тыл на лечение в госпиталях и санаториях.

Забегая вперед, стоит сказать, что признание факта службы в армии Марку Беневичу пришлось ждать многие годы, и только 23 марта 1989 года Балк Ицхок-Меер Беневич (так написано в документе) получил от Смоленского облвоенкомата удостоверение (серия Н № 312823) участника Великой Отечественной войны, а 27 ноября 1989 года Орден Отечественной войны II степени.

После нескольких месяцев лечения М.Б. Балк был направлен в Ташкент учиться на физмате Средне-Азиатского университета, где обучался с октября 1941 по декабрь 1942 года. Затем он был переведен в Омский педагогический институт (физмат, 1943–1944 годы), по окончании которого получил специальность преподавателя математики.

Стоит подчеркнуть, что с декабря 1942 года по август 1944 года обучение в вузах М.Б. Балку приходилось совмещать с работой вначале строителем, а затем рабочим на Омском железнодорожном узле.

С октября 1944 года по август 1945 года М.Б. Балк – преподаватель кафедры математики Омского педагогического института. Затем переезжает в Москву и с октября 1945 года по октябрь 1948 года обучается в аспирантуре при кафедре математического анализа Московского областного педагогического института и одновременно работает в нем с мая 1946 года по сентябрь 1948 года старшим преподавателем кафедры математического анализа. После окончания аспирантуры М.Б. Балк получает направление в Смоленский пединститут, и вот уже 15 октября 1948 года он – старший преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного педагогического института.

11 мая 1950 года на заседании ученого совета физико-математического факультета Московского областного педагогического института состоялась успешная защита кандидатской диссертации

М.Б. Балком «Некоторые вопросы интерполяции аналитических функций в комплексной области», а 27 сентября 1952 года Марк Беневич Балк был утвержден в ученном звании доцента по кафедре «математика» Смоленского государственного педагогического института. В 1948–1996 годах М.Б. Балк занят научными изысканиями и преподавательской работой в Смоленском пединституте (нынче Смоленском государственном университете). Именно в эти годы он создает Смоленскую математическую школу по изучению свойств так называемых полианалитических функций – одного из обобщений аналитических функций комплексного переменного.

По результатам изучения свойств полианалитических функций М.Б. Балк опубликовал около 50 статей, три монографических обзора: в журнале «Успехи математических наук» (1970 год), в академическом ежегоднике «Современные проблемы математики» (1991 год), а также в журнале «Mathematica Research» (на английском языке, Берлин, 1991 год).

С 1972 по 1985 год М.Б. Балк заведовал математическими кафедрами СГПИ (ныне СмолГУ). Признанный популяризатор математической науки, он писал методические статьи и книги для учителей и школьников, интересовался проблемами космоса и организацией школьных математических олимпиад. Статьи М.Б. Балка печатались в журналах «Математика в школе» и «Квант». Всего им было опубликовано свыше 100 работ в Советском Союзе, Японии и Германии.

Задорный, энергичный, чуткий, внимательный, он был полиглотом: свободно общался на трех иностранных языках (английском, французском и немецком); любил литературу, пробовал писать рассказы и стихи. Вот одно из его четверостиший:

*Забыл я песнь и стих, что в сердце трепетали.  
Растаял в памяти сожженный отчий дом.  
Но я вернусь в свой край – носителем печали,  
Живым свидетелем о прошлом, о былом.*

Говорят, что в России надо жить долго, чтобы получить признание, так вот Марк Беневич успел его получить – это и научное звание профессора (в 1991 году), и почетное звание «Заслуженный работник высшей школы РФ» (1996 год).

С 1997 года Марк Беневич жил в США (штат Юта, город Солт-Лейк-Сити), куда его пригласил младший сын Александр Маркович (1960 г.р.), ставший математиком, профессором университета Юты. Старший его сын – Валерий Маркович (1955 г.р.) тоже пошел по научной стезе, но оказался не чужд и писательской деятельности. Жена М.Б. Балка – Галина Давидовна Балк (1930–2006) была преподавателем и педагогом, помощником и соавтором мужа. Завершил свой жизненный путь Марк Беневич Балк 16 января 2018 г. в Солт-Лейк-Сити (США).

Отмечая ныне 100-летний юбилей М.Б. Балка, мы уверены, что светлая память о замечательном Математике и Учителе многие годы будет

жить в сердцах многочисленных его учеников и последователей как на Смоленщине, так и во всей нашей необъятной стране. Кроме того, научные труды профессора М.Б. Балка еще долго послужат основой для изысканий молодых ученых, изучающих свойства полианалитических функций комплексного переменного и их обобщений.

Книги, написанные М.Б. Балком как индивидуально, так и в соавторстве.

1. *Аргунов Б.И., Балк М.Б.* Геометрические построения на плоскости. М.: Учпедгиз, 1957.
2. *Балк М.Б.* Геометрические приложения понятия о центре тяжести. М., 1959. (Библиотека математического кружка).
3. *Балк М.Б.* Элементы динамики космического полёта. М.: Наука, 1965.
4. *Балк М.Б., Балк Г.Д.* Математика после уроков: пособие для учителей. М.: Просвещение, 1971.
5. *Балк М.Б., Демин В.Г., Куницын А.Л.* Сборник задач по небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1972.
6. *Балк М.Б., Петров В.А., Полухин А.А.* Задачник-практикум по теории аналитических функций. М.: Просвещение, 1976.
7. *Балк М.Б.* Поиск решения. М.: Рипол Классик, 1983.
8. *Балк М.Б., Виленкин Н.Я., Петров В.А.* Математический анализ: теория аналитических функций. М.: Просвещение, 1985.
9. *Балк М.Б., Болтянский В.Г.* Геометрия масс. М.: Наука, 1987 (выпуск 61 серии «Библиотечка Квант»).
10. *Балк М.Б., Балк Г.Д., Полухин А.А.* Реальные применения мнимых чисел. Киев, 1988.
11. *Balk M.B.* Polyanalytic Functions. Berlin: Akademie Verlag, 1991.
12. *Балк М.Б., Петров В.А., Балк А.М.* Метрические пространства. Смоленск: Изд-во СГПИ, 1996.

Достаточно подробный перечень научных статей М.Б. Балка содержится в библиографическом списке в монографии [11].

**K.M. Rasulov, S.A. Gomonov**  
Smolensk State University

## **IN MEMORY OF PROFESSOR MARK BENEVICH BALK**

**Keywords:** *complex domain, interpolation, polyanalytic functions, space flight dynamics, mass geometry.*

**Abstract.** *The article tells about the life and creative path of the remarkable Smolensk mathematician M.B. Balk, whose centenary was celebrated at the International Scientific Conference "Systems of Computer Mathematics and Their Applications", which took place on May 26–27, 2023 in Smolensk at the Physics and Mathematics Department of Smolensk State University.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Mastafa Al-Imari** – аспирант факультета математики и информатики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. E-mail: wanli19930806@gmail.com.

**Абдуллаева Мехирбан Махаметжановна** – доцент, кандидат психологических наук, МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: mehirban@rambler.ru.

**Авдеев Константин Вячеславович** – ассистент кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: Avdeev@mirea.ru.

**Аксенов Никита Владимирович** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: aksionov.08@mail.ru.

**Акуленок Марина Викторовна** – кандидат технических наук, доцент, доцент Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: amv@s2q.ru.

**Алмохамед Муатаз** – ассистент кафедры математического анализа Московского технического университета связи и информатики. E-mail: mssrmtz@gmail.com.

**Андрун Абед** – аспирант кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: abed.androon@yandex.com.

**Баин Александр Михайлович** – доцент Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: pufadd@gmail.com.

**Банару Галина Анатольевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com.

**Банару Михаил Борисович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com.

**Блинов Александр Олегович** – ассистент кафедры Технологических машин и оборудования филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: alex-blinov67@yandex.ru.

**Богданова Надежда Николаевна** – старший преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: nadingioia@yandex.ru.

**Бондарь Александр Александрович** – старший преподаватель кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: Bondar\_A@mirea.ru.

**Борисов Андрей Валерьевич** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики филиала Национального

исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: BorisowAndrej@yandex.ru.

**Борисов Вадим Владимирович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной техники филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: vbor67@mail.ru.

**Бояринов Дмитрий Анатольевич** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: dmboyarinov@mail.ru.

**Буатта Мохамед Адел** – аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов. E-mail: adelbouatta.rudn@mail.ru.

**Булименко Алексей Дмитриевич** – студент магистратуры физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: mekyne92@gmail.com.

**Бушинский Андрей Сергеевич** – аспирант кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: andrewbushinsky@gmail.com.

**Быков Александр Александрович** – кандидат педагогических наук, завкафедрой физики филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: alex1by@mail.ru.

**Васильев Сергей Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов. E-mail: vasilyev-sa@rudn.ru.

**Волков Александр Сергеевич** – ассистент Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: alex.volkov9595@inbox.ru.

**Вувуникян Юрий Микиртычевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. E-mail: vuv64@mail.ru.

**Гагарина Лариса Геннадьевна** – профессор, доктор технических наук, директор Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: gagar@bk.ru.

**Гарипова Залида Ильсуровна** – студент Института филологии и межкультурной коммуникации (математическое отделение в билингвальной образовательной среде) Казанского федерального университета. E-mail: garipova.zalida@gmail.com.

**Гомонов Сергей Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: gomonov.serg@yandex.ru.

**Гончаров Евгений Игоревич** – студент магистратуры Смоленского государственного университета. E-mail: drbenvey1996@mail.ru.

**Городилов Алексей Владиславович** – кандидат технических наук, Институт системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ», ИП Каверин В.И. «Русская мода». E-mail: kaverina@mail.ru.

**Грибер Юлия Александровна** – доктор культурологии, профессор кафедры социологии и философии Смоленского государственного университета. E-mail: griber@gmail.com.

**Евдокимова Галина Семеновна** – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: evgalsema@yandex.ru.

**Жилинский Владислав Олегович** – аспирант Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ», научный сотрудник отдела метрологического обеспечения навигационных и радиотехнических измерительных средств ГЛОНАСС ФГУП «ВНИИФТРИ». E-mail: vladzhilinsky@mail.ru.

**Жорнова Юлия Олеговна** – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: zhornovay@mail.ru.

**Зайкова Светлана Алексеевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры системного программирования и компьютерной безопасности Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. E-mail: sunny@mf.grsu.by.

**Захаров Виктор Николаевич** – доктор технических наук, доцент, ученый секретарь Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: vzakharov@ipiran.ru.

**Иванова Татьяна Михайловна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки НИЯУ «МИФИ». E-mail: ivatatiana@gmail.com.

**Ильин Павел Леонидович** – студент магистратуры физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: zub.dayu@mail.ru.

**Казанцев Игорь Алексеевич** – аспирант кафедры компьютерных систем ИКТЗИ, КНИТУ-КАИ. E-mail: Rexitt@yandex.ru.

**Капитанов Андрей Иванович** – кандидат технических наук, старший преподаватель Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета МИЭТ. E-mail: andrey@kapdx.ru.

**Капитанова Илона Ильдусовна** – старший преподаватель Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: kapitanovai@ya.ru.

**Карпенко Анатолий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Системы автоматизированного проектирования» МГТУ им. Н.Э. Баумана. E-mail: arkarpenko@mail.ru.

**Кирикова Анастасия Викторовна** – аспирант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: anastasiakiricova52@gmail.com.

**Кирьяцкий Эдуард Григорьевич** – доктор физико-математических наук, профессор Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса. E-mail: eduard.kiriyatzkii@mail.ru.

**Киселева Ольга Михайловна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: foxu03@yandex.ru.

**Классен Роман Константинович** – доцент кафедры компьютерных систем ИКТЗИ, КНИТУ-КАИ, кандидат технических наук. E-mail: klassen.rk@gmail.com.

**Козлов Сергей Валерьевич** – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: svkozlov1981@yandex.ru.

**Кокин Виталий Владимирович** – старший преподаватель Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: kokinvv@gmail.com.

**Колосова Ирина Сергеевна** – аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов. E-mail: i.se.kolosova@gmail.com.

**Кононова Александра Игоревна** – доктор физико-математических наук, Институт системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: illinc@bk.ru.

**Кончина Лариса Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Технологических машин и оборудования филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: la\_kon@mail.ru.

**Конюхов Евгений Владимирович** – аспирант Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: incos@miee.ru.

**Коротков Виталий Валерьевич** – доцент кафедры комплексного обеспечения информационной безопасности Санкт-Петербургского государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. E-mail: korotkovvv@gumrf.ru.

**Костин Андрей Борисович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки НИЯУ «МИФИ». E-mail: abkostin@yandex.ru.

**Кристалинская Дарья Владимировна** – студент Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. E-mail: kristvr@rambler.ru.

**Кристалинский Владимир Романович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: kristvr@rambler.ru.

**Кузнецова Алла Спартакевна** – кандидат психологических наук, доцент кафедры психологии труда и инженерной психологии факультета психологии МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: kuznetsovamsu@rambler.ru.

**Курицын Сергей Юрьевич** – старший преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: kuritsynsergey@icloud.com.

**Ланева Ирина Владимировна** – кандидат экономических наук, доцент кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. E-mail: lanir@list.ru.

**Лимар Иван Александрович** – аспирант Университета ИТМО, ассистент научно-образовательного центра математики Университета ИТМО. E-mail: ivan.limar95@gmail.com.

**Литвинов Святослав Викторович** – преподаватель кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: Litvinov\_S@mirea.ru.

**Макаров Александр Ильич** – аспирант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: al.makarov8@yandex.ru.

**Маслова Ксения Сергеевна** – студентка кафедры технологических машин и оборудования филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: maslowaksusha1@yandex.ru.

**Милорадов Глеб Андреевич** – ассистент кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: Miloradov@mirea.ru.

**Миннибаева Гульназ Илшатовна** – студент Института филологии и межкультурной коммуникации (математическое отделение в билингвальной образовательной среде) Казанского федерального университета. E-mail: minnibaeva.gulnaz@mail.ru.

**Миронов Артем Игоревич** – аспирант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: 615153@mail.ru.

**Михалёва Татьяна Игоревна** – аспирант кафедры математического анализа физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tat.timopheeva@yandex.ru.

**Мунерман Виктор Иосифович** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: vimoona@gmail.com.

**Мунерман Даниил Викторович** – стажер-исследователь, Смоленский государственный университет. E-mail: danvmoon@gmail.com.

**Нагорная Татьяна Романовна** – старший преподаватель кафедры математического анализа физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tani7n@gmail.com.

**Нгуен Дык Хай** – аспирант кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета – МИРЭА. E-mail: duchai09011997@gmail.com.

**Нгуен Хоанг Хыонг** – аспирант Института радиоэлектроники и информатики Российского технологического университета – МИРЭА. E-mail: khuongksqs@gmail.com.

**Недаа Ибрагим** – аспирант Российского технологического университета – МИРЭА. E-mail: nedaaoebraheem92@gmail.com.

**Нигмедзянова Айгуль Махмутовна** – кандидат физико-математических наук, доцент Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета. E-mail: aigmani23@rambler.ru.

**Николаев Константин Сергеевич** – аспирант Московского института электронной техники, ассистент института СПИНТех. E-mail: knpreacher@gmail.com.

**Новикова Марина Александровна** – старший преподаватель кафедры Технологических машин и оборудования филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: mar.novikova@ro.ru.

**Перевозникова Валерия Витальевна** – студентка физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: valeria.lisitsina2013@yandex.ru.

**Писаренкова Екатерина Дмитриевна** – студентка Института математики и информатики Московского педагогического государственного университета. E-mail: ekaterinapisarenkova@gmail.com.

**Полевода Юрий Александрович** – ассистент кафедры радиоволновых процессов и технологий Российского технологического университета – МИРЭА. E-mail: Polevoda@mirea.ru.

**Портнов Евгений Михайлович** – доктор технических наук Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: evgen\_uis@mail.ru.

**Поцейко Павел Геннадьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы. E-mail: rahamatby@gmail.com.

**Расулов Карим Магомедович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: kahrimanr@yandex.ru .

**Ровба Евгений Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной

математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Email: rovba.ea@gmail.com.

**Садекова Екатерина Халиловна** – старший преподаватель кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки НИЯУ «МИФИ». E-mail: EKSadekova@mephi.ru.

**Самойлова Татьяна Аркадьевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: tatsamoilova24@gmail.com.

**Светлаков Алексей Владимирович** – магистрант научно-исследовательского университета «Московский институт электронной техники». E-mail: seferlian@mail.ru.

**Семёнова Ольга Викторовна** – ассистент кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета – МИРЭА. E-mail: Semyonova@mirea.ru.

**Сенчилов Владислав Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: senchilov.vv@gmail.com.

**Сенькина Гульжан Ержановна** – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информационных и образовательных технологий, руководитель Федерального центра научно-методического сопровождения педагогических работников на базе Смоленского государственного университета. E-mail: gulzhan.senkina@gmail.com.

**Скрипачев Владимир Олегович** – кандидат технических наук, доцент кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета – МИРЭА. E-mail: Skripachev@mirea.ru.

**Сорокина Марина Михайловна** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского. E-mail: mmsorokina@yandex.ru .

**Сорокина Валерия Николаевна** – магистрант физико-математического факультета Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского. E-mail: lera.koshechkina.00@mail.ru.

**Тимотин Андрей Максимович** – инженер по качеству научно-производственного предприятия «Грань». E-mail: antej82@yandex.ru.

**Тимофеева Наталья Михайловна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: nat.timopheeva@yandex.ru.

**Тихонов Иван Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики факультета ВМК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. E-mail: ivtikh@mail.ru.

**Тихонов Мартин Робертович** – кандидат технических наук, доцент Института системной и программной инженерии Национального

исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: kurotenshi91@yandex.ru.

**Тихонова Ольга Вадимовна** – доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета – МИРЭА. E-mail: o\_tikhonova@inbox.ru.

**Тищенко Владимир Александрович** – кандидат технических наук, научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, сотрудник кафедры Информатики ПСТГУ. E-mail: vtischenko@isa.ru.

**Туева Мария Александровна** – студентка физико-математического факультета Смоленского государственного университета, E-mail: tueva.maria26@gmail.com.

**Усачев Валерий Игнатьевич** – доцент кафедры прикладной математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: usa-vi@yandex.ru.

**Фам Тхань Туан** – аспирант кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Института радиоэлектроники и информатики Российского технологического университета – МИРЭА. E-mail: anhsequayve.ru@gmail.com.

**Ферамузов Давид Элифханович** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: feramuzovdavid@yandex.ru.

**Хвостик Павел Михайлович** – соискатель Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: pkhvastik@gmail.com.

**Ходченков Валерий Юрьевич** – аспирант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tansdf@mail.ru.

**Цветкович Диана Горановна** – стажер-исследователь лаборатории фотоядерных реакций Института ядерных исследований РАН. E-mail: dianacve@inbox.ru.

**Черновалова Маргарита Витальевна** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: 0208margarita@bk.ru.

**Чжень Ваньли** – аспирант факультета математики и информатики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. E-mail: wanli19930806@gmail.com.

**Шевнина Юлия Сергеевна** – кандидат технических наук, доцент Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: yusm@rambler.ru.

**Шерстнева Наталья Александровна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: MathSmolgu@gmail.com.

**Шерстюков Владимир Борисович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. E-mail: shervb73@gmail.com.

**Шикула Ольга Сергеевна** – старший преподаватель Института системной и программной инженерии Национального исследовательского университета «МИЭТ». E-mail: oshik78@mail.ru.

**Шилин Андрей Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета. E-mail: a.p.shilin@gmail.com

**Ярлыков Алексей Дмитриевич** – старший преподаватель кафедры радиоволновых процессов и технологий Российского технологического университета – МИРЭА. E-mail: Yarlykov@mirea.ru.

**Ястребов Михаил Юрьевич** – кандидат экономических наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О.Макарова. E-mail: mikyast@gmail.com.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                             |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>РАЗДЕЛ 1. Системы компьютерной математики</b>                                                                                                                                            | <b>3</b>  |
| <i>Андрун Абед, Тихонова О.В.</i> Использование компьютерных математических моделей для сотовых систем 5G: всесторонний обзор                                                               | 3         |
| <i>Бондарь А.А.</i> Модель системы цифровой связи с гибким выбором корректирующих алгоритмов                                                                                                | 9         |
| <i>Волков А.С., Портнов Е.М., Кокин В.В.</i> Разработка математической модели прогнозирования координат объектов, движущихся по поверхности земли                                           | 14        |
| <i>Евдокимова Г.С., Усачев В.И.</i> Статистический пакет Jamovi: новый уровень взаимодействия с R                                                                                           | 22        |
| <i>Жилинский В.О.</i> Сравнение моделей машинного обучения для компенсации остаточной погрешности определения псевдодальности                                                               | 27        |
| <i>Зайкова С.А.</i> Интеллектуальные алгоритмы для обработки неструктурированных данных                                                                                                     | 35        |
| <i>Кристалинский В.Р., Кристалинская Д.В.</i> Разработка и анализ сетевых моделей в системе Mathematica                                                                                     | 40        |
| <i>Нгуен Дык Хай.</i> Анализ помехоустойчивости системы передачи данных с помощью пакета MATLAB                                                                                             | 47        |
| <i>Нгуен Х.Х.</i> Адаптивные системы связи для коротковолновых каналов                                                                                                                      | 50        |
| <i>Недаа Ибрагим</i> Неортогональный множественный доступ для систем 5G                                                                                                                     | 54        |
| <i>Тимотин А.М.</i> Метод контроля плохо обусловленных плоскостей координатно-измерительными машинами на примере сотовых структур                                                           | 60        |
| <i>Фам Тхань Туан, Тихонова О.В.</i> Верификация модели приема сигналов квадратурной амплитудной модуляции при наличии помех                                                                | 65        |
| <b>РАЗДЕЛ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры</b>                                                                                                                          | <b>73</b> |
| <i>Баин А.М., Портнов Е.М., Кокин В.В.</i> Разработка метода повышения быстродействия передачи данных при контроле состояния сложных объектов                                               | 73        |
| <i>Борисов В.В., Черновалова М.В.</i> Методы сопоставления нечетких проектных ситуаций и выбора прецедентных решений                                                                        | 78        |
| <i>Булименко А.Д.</i> Экспериментальное исследование распознавания речевых, лицевых и текстовых эмоций на основе моделей глубокого обучения и их классификация по шкале тонов Рона Хаббарда | 86        |
| <i>Бушинский А.С.</i> Использование направленного ациклического графа для синтеза программного обеспечения                                                                                  | 92        |
| <i>Гончаров Е.И.</i> Средства разработки современных кроссплатформенных десктоп приложений                                                                                                  | 98        |

|                                                                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Городилов А.В., Кононова А.И.</i> Рост компьютерной сети во времени и пространстве                                                                                      | 102 |
| <i>Жорнова Ю.О., Самойлова Т.А.</i> Разработка веб-сервиса для обнаружения объектов с использованием алгоритма YOLO                                                        | 107 |
| <i>Захаров В.Н.</i> О некоторых юбилейных событиях 2023 года в российской информатике                                                                                      | 112 |
| <i>Ильин П.Л.</i> Сингулярное разложение многомерных матриц и его приложения                                                                                               | 121 |
| <i>Казанцев И.А., Классен Р.К.</i> Применение бинарных файлов для ускорения обработки запросов в параллельной СУБД класса BigData Clusterix-N к БД объемом 1 ТБ            | 128 |
| <i>Карпенко А.П.</i> Параметрический синтез популяционных алгоритмов глобальной оптимизации                                                                                | 135 |
| <i>Кирикова А.В., Миронов А.И.</i> Использование введенного понятия веса элемента для оптимизации поиска                                                                   | 149 |
| <i>Конюхов Е.В.</i> Особенности определения параметров нечеткого контура управления на основе субтрактивной кластеризации                                                  | 156 |
| <i>Макаров А.И.</i> Некоторые применения $(0, \mu)$ произведения многомерных матриц для решения задач теории графов                                                        | 161 |
| <i>Мунерман В.И., Мунерман Д.В.</i> Один пример доказательства соответствия моделей данных                                                                                 | 166 |
| <i>Николаев К.С.</i> Исследование и разработка модели фильтрации объектов для интеллектуальных рекомендательных систем                                                     | 171 |
| <i>Перевозникова В.В., Сенчилов В.В.</i> Об особенностях разработки кроссплатформенной информационной системы поддержки сетевой торговли                                   | 175 |
| <i>Самойлова Т.А., Грибер Ю.А.</i> Автоматизированный метод оценки результатов теста нарушений цветового зрения                                                            | 180 |
| <i>Тищенко В.А.</i> Одновременное геокодирование подмассивов названий с учетом ретроспективного аспекта для создания локальной базы геоданных НИКА быстрого геокодирования | 188 |
| <i>Туева М.А., Самойлова Т.А.</i> Разработка рекомендательной системы с использованием поиска ассоциаций для неявных данных                                                | 192 |
| <i>Хвостик П.М.</i> Особенности графового представления автоматизированных систем управления технологическими процессами и производствами                                  | 197 |
| <i>Ходченков В.Ю.</i> О возможности разработки векторной модели вычислений с использованием SIMD регистров                                                                 | 202 |
| <i>Шевнина Ю.С., Гагарина Л.Г.</i> К вопросу о моделировании нелинейных систем различной сложности                                                                         | 205 |

|                                                                                                                                                                                          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>РАЗДЕЛ 3. Математика и её приложения</b>                                                                                                                                              | <b>211</b> |
| <i>Альмохамед М., Тихонов И.В.</i> Специальные примеры обратных задач для дифференциальных уравнений четвертого порядка                                                                  | 211        |
| <i>Банару М.Б., Банару Г.А.</i> О контактной геометрии гиперповерхностей келеровых многообразий                                                                                          | 216        |
| <i>Блинов А.О., Борисов А.В., Кончина Л.В., Маслова К.С.</i> Электрическая подсистема управления моделью экзоскелета                                                                     | 220        |
| <i>Блинов А.О., Борисов А.В., Кончина Л.В., Новикова М.А.</i> Модель экзоскелета с пятью звеньями переменной длины и регулируемой посредством магнитно-реологической жидкости жесткостью | 225        |
| <i>Васильев С.А., Буатта М.А., Колосова И.С.</i> Анализ решений задачи Штурма – Лиувилля для уравнения Кадышевского с периодическими краевыми условиями                                  | 230        |
| <i>Вувуникян Ю.М., Al-Imari Mastafa</i> Тензорное произведение ортонормальных систем Лежандра и их применение к сжатию изображений                                                       | 237        |
| <i>Вувуникян Ю.М., Чжень Ваньли</i> Нелинейное интегральное уравнение Вольтерра и порождающий эволюционный оператор математической модели Е.М. Ижикевича импульсной нейронной сети       | 242        |
| <i>Гомонов С.А.</i> О некоторых свойствах предельных множеств полианалитических полиномов нескольких переменных                                                                          | 247        |
| <i>Иванова Т.М.</i> Описание области решений одного симметричного неравенства                                                                                                            | 256        |
| <i>Кирьяцкий Э.Г.</i> Решение одной проблемы из теории игр                                                                                                                               | 261        |
| <i>Костин А.Б., Садекова Е.Х., Шерстюков В.Б.</i> О приближении в метрике Хаусдорфа начального условия решением задачи Коши для уравнения теплопроводности                               | 268        |
| <i>Курицын С.Ю., Расулов К.М.</i> Об условиях нетеровости обобщенной краевой задачи типа Римана для метааналитических функций второго типа                                               | 273        |
| <i>Лимар И.А.</i> Вероятностный подход к анализу информационной сложности в минимаксной постановке                                                                                       | 281        |
| <i>Михалёва Т.И., Расулов К.М.</i> О неустойчивости решений краевой задачи типа Газемана для квазигармонических функций в круговых областях                                              | 286        |
| <i>Мунерман В.И., Расулов К.М., Ферамузов Д.Э.</i> Об одном алгоритме решения модельной краевой задачи типа Римана для бианалитических функций                                           | 292        |
| <i>Нагорная Т.Р., Расулов К.М.</i> О задаче с косой производной для обобщенных гармонических функций в круговых областях                                                                 | 300        |
| <i>Поцейко П.Г., Ровба Е.А.</i> О некоторых методах рациональной аппроксимации сопряженной функции на отрезке                                                                            | 305        |
| <i>Светлаков А.В., Банару Г.А.</i> О синтаксическом анализе LR(0)-грамматик                                                                                                              | 325        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Сорокина В.Н., Сорокина М.М.</i> Свойства $\omega$ – формаций конечных групп                                                                                                                                                                                                                         | 332 |
| <i>Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Писаренкова Е.Д.</i> Полиномы Эйлера и их применение в нелокальных задачах математической физики                                                                                                                                                                       | 337 |
| <i>Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г.</i> Аналитические оценки центрального биномиального коэффициента и компьютерная математика                                                                                                                                                              | 344 |
| <i>Шилин А.П.</i> Решение на замкнутой кривой линейного интегро-дифференциального уравнения с коэффициентами специальной структуры                                                                                                                                                                      | 353 |
| <b>РАЗДЕЛ 4. Новые информационные технологии в образовании</b>                                                                                                                                                                                                                                          | 362 |
| <i>Абдуллаева М.М.</i> Особенности взаимодействия преподавателей и студентов в образовательной среде                                                                                                                                                                                                    | 362 |
| <i>Аксенов Н.В., Киселева О.М.</i> Виртуальный помощник медицинского учреждения                                                                                                                                                                                                                         | 367 |
| <i>Акуленок М.В., Тихонов М.Р., Шидула О.С.</i> Применение системы электронного тестирования для диагностической работы по направлению 27.04.02                                                                                                                                                         | 372 |
| <i>Богданова Н.Н.</i> Решение дифференциальных уравнений с помощью СКМ WolframMathematica                                                                                                                                                                                                               | 376 |
| <i>Бояринов Д.А.</i> Образовательный ландшафт – сущность и значение                                                                                                                                                                                                                                     | 382 |
| <i>Гарипова З.И., Нигмедзянова А.М.</i> Использование онлайн платформы Coreapp во внеурочной деятельности школьников                                                                                                                                                                                    | 386 |
| <i>Капитанов А.И., Капитанова И.И.</i> Повышение мотивации обучающихся за счет применения соревновательного подхода при изучении языка программирования Python                                                                                                                                          | 390 |
| <i>Козлов С.В., Быков А.А.</i> Решение задач составления алгоритма для формального исполнителя средствами языка Python                                                                                                                                                                                  | 395 |
| <i>Коротков В.В., Ланева И.В., Ястребов М.Ю.</i> Компьютерное моделирование случайных событий и случайных величин для иллюстрации основных положений курса теории вероятностей                                                                                                                          | 400 |
| <i>Кузнецова А.С.</i> Эффективность дистанционного обучения приемам психологической саморегуляции функционального состояния                                                                                                                                                                             | 405 |
| <i>Литвинов С.В., Бондарь А.А., Скрипачев В.О., Авдеев К.В., Милорадов Г.А., Полевода Ю.А., Семёнова О.В., Ярлыков А.Д.</i> Реализация программы «Обслуживание систем интернета вещей» в рамках проекта «Цифровые кафедры» национальной программы «Цифровая экономика Российской Федерации» в РТУ МИРЭА | 410 |
| <i>Миннибаева Г.И., Нигмедзянова А.М.</i> Использование технологий виртуальной реальности в обучении стереометрии                                                                                                                                                                                       | 415 |

|                                                                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Сенькина Г.Е.</i> Формы взаимодействия центров научно-методического сопровождения педагогических работников в единой федеральной системе на примере центра СмолГУ | 419 |
| <i>Тимофеева Н.М.</i> О влиянии элементов системы автоматизации поддержки работы преподавателя на качество сетевого обучения                                         | 424 |
| <i>Шерстнева Н.А.</i> Решение математических задач в системе компьютерной математики WolframMathematica                                                              | 429 |
| <b>РАЗДЕЛ 5. Персоналии</b>                                                                                                                                          | 434 |
| <i>Расулов К.М., Гомонов С.А.</i> Памяти профессора Марка Беневича Балка                                                                                             | 434 |
| <b>Сведения об авторах</b>                                                                                                                                           | 438 |

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 24

Издательство Смоленского государственного  
университета

Редакторы *О.В. Папко, И.В. Марусова*

---

Подписано к печати 28.04.2023. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать ризографическая.  
Усл. п. л. 28,25. Уч.-изд. л. 28,25. Тираж 300 экз.  
Заказ №

---

Отпечатано с готового оригинал-макета  
ИП Суркова Н.Н.  
214000 г. Смоленск, ул. Б. Советская, д. 12/1  
Тел.: 8-951-697-22-23