

Министерство образования и науки РФ
Администрация Смоленской области
Смоленский государственный университет

Системы компьютерной математики и их приложения

*Материалы XIII международной научной
конференции, посвященной 75-летию профессора
Э.И. Зверовича*

Выпуск 13

Смоленск
Издательство СмолГУ
2012

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета СмолГУ*

Редакционная коллегия: *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *И.Б. Болотин*, канд. физ.-мат. наук, доц., *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *В.П. Дьяконов*, д-р техн. наук, проф.; *Р.Е. Кристалинский*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Я.А. Васильев*, аспирант кафедры математического анализа.

Системы компьютерной математики и их приложения:
С 409 материалы XIII международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора Э.И. Зверовича. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2012. – Вып. 13. – 256 с.
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XIII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 18–20 мая 2012 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

© Авторы, 2012
© Издательство СмолГУ, 2012

МАТЕМАТИК И ПЕДАГОГ
К 75-летию профессора Э.И. Зверовича



30 декабря 2011 года исполнилось 75 лет видному советскому математику, известному педагогу высшей школы, замечательному человеку, доктору физико-математических наук, профессору Эдмунду Ивановичу Зверовичу.

Э.И. Зверович родился в Краснодарском крае. В 1960 году окончил Ростовский госуниверситет, получив квалификацию «Математик. Учитель математики средней школы». Затем обучался в аспирантуре в институте теоретической и экспериментальной физики АН СССР (г. Москва), которую окончил в 1963 году. После окончания аспирантуры до 1967 года работал в Ростовском госуниверситете, где в 1964 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Математический анализ». С 1967 по 1975 год преподавал математические дисциплины в вузах г. Одессы. В 1972 году защитил докторскую диссертацию в Белорусском госуниверситете. В 1974 году Э.И. Зверович был приглашен в Белорусский госуниверситет на должность заведующего кафедрой теории функций, чтобы заменить уходившего тогда на пенсию академика Ф.Д. Гахова. Этой кафедрой Эдмунд Иванович заведовал свыше 25 лет. В настоящее время работает профессором той же кафедры. Ученое звание профессора ему было присвоено в 1977 году.

Профессор Зверович внес немало новых методических идей в преподавание всех закрепленных за кафедрой учебных дисциплин (математический анализ, теория функций комплексного переменного,

интегральные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика, многочисленные спецкурсы). Одним из результатов этой работы явился подготовленный им шеститомник «Вещественный и комплексный анализ», который получил гриф Минвуза Республики Беларусь и широко используется не только в Беларуси, но и в России.

Э.И. Зверович является крупным специалистом в области теории аналитических функций на римановых поверхностях, имеющей большое теоретическое и прикладное значение. Он опубликовал около 200 работ, среди которых есть книги и обзорные статьи, лично подготовил 23 кандидата и 2 доктора наук, продолжает руководить аспирантами и докторантами. С 1976 года Э.И. Зверович входит в состав различных диссертационных советов, обеспечивая в них (в разное время) специальности: математический анализ, методика преподавания математики, механика деформируемого твердого тела. С 1976 года он является членом редколлегии журнала «Вестник БГУ. Серия 1».

Профессор Э.И. Зверович – активный участник всех двенадцати Международных конференций по системам компьютерной математики и их приложениям, проходивших в Смоленском университете.

СмолГУ благодарен Эдмунду Ивановичу за постоянный интерес к математикам СмолГУ, его участие в повышении их квалификации.

От всей души желаем нашему юбиляру дальнейших творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

ОРГКОМИТЕТ конференции СКМП-2012

СЕКЦИЯ 1

Системы компьютерной математики

УСЛОВИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГЕНЕРАЦИИ В СИСТЕМАХ, ОХВАЧЕННЫХ ЧАСТОТНО-ЗАВИСИМОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

М.А. АМЕЛИНА, С.А. АМЕЛИН

Филиал ФГБОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: amelina.marina@gmail.com

Широко известное в электронике условие возникновения генерации в системах структуры, изображенной на рисунке 1, называемое балансом амплитуд и фаз, звучит так: генерация возникает при условии (т.е. на той частоте), когда в разомкнутой в узле А системе петлевой коэффициент превосходит единицу при фазовом сдвиге, равном нулю градусов. Однако при экспериментальной проверке данного широко известного в электронике критерия оказалось, что он применим только в тех случаях, когда цепь частотно-зависимой обратной связи имеет вид, отличный от режекторного фильтра. Другими словами, критерий успешно может применяться к системам с частотно-зависимыми цепями в виде моста Вина, фазосдвигающими цепями двух видов (рис. 2, а–в) и пр., однако не может быть применен к системам со звеньями обратной связи в виде двойного Т-образного моста параллельного колебательного контура (рис. 2, г, д).

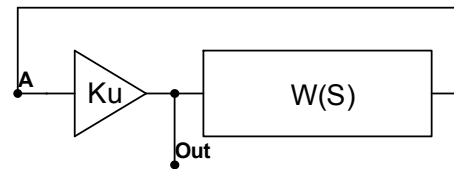


Рис. 1. Усилитель, охваченный частотно-зависимой обратной связью

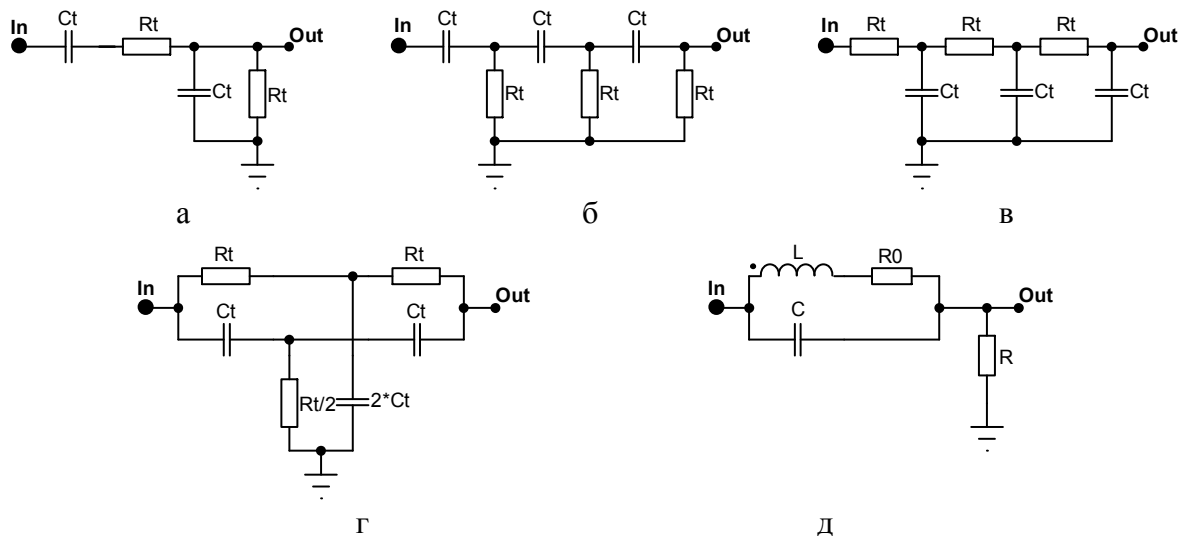


Рис. 2. Разновидности цепей обратной связи

При выполнении условия баланса амплитуд и фаз в системах со звеньями обратной связи (рис. 2, г, д) генерация не возникает. В то время как при его нарушении – при фазовом сдвиге, равном нулю – петлевой коэффициент передачи меньше единицы, наоборот, возникает (рис. 3, б, в). Получается, что для подобных цепей условие баланса амплитуд и фаз для возникновения генерации должно быть сформулировано прямо противоположным образом.

При этом, если подвергать разомкнутую в точке А систему (см. рис. 1; 3, а) проверке на выполнение критерия устойчивости Найквиста, то, как и следовало ожидать, генерация возникает тогда, когда названный критерий нарушен (рис. 3, г).

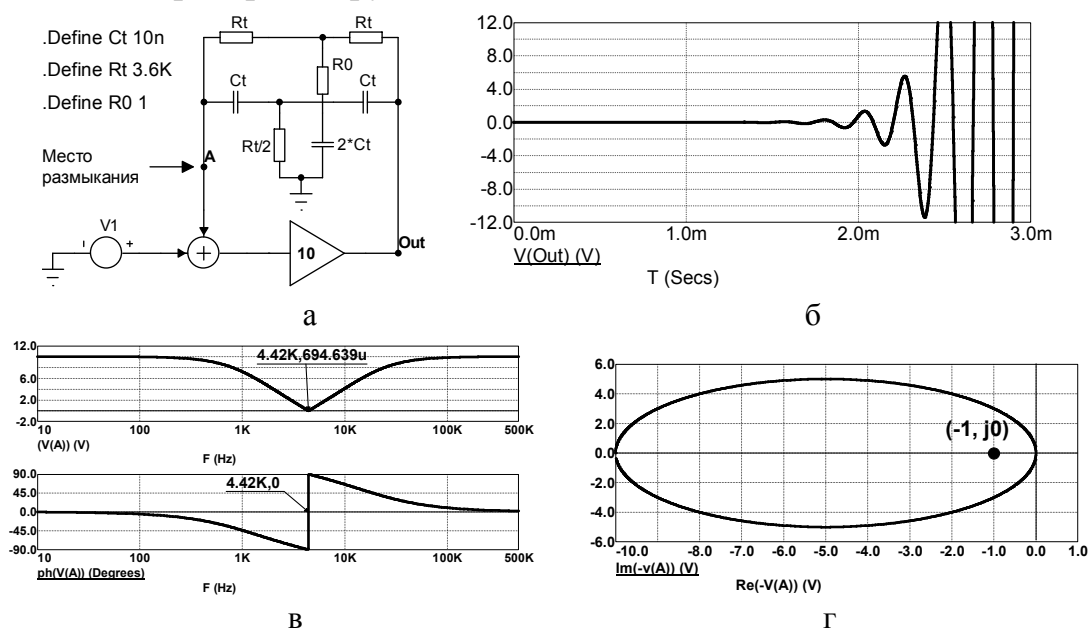


Рис. 3. К исследованию возникновения генерации в системе с двойным Т-образным мостом: а – схема; б – временные диаграммы; в – АЧХ и ФЧХ разомкнутой в точке А системы; АФХ разомкнутой в точке А системы

Таким образом, получается, что многие авторы учебников по электронике [1] в попытке упростить критерий устойчивости, предложили упрощенную его формулировку в виде баланса амплитуд и фаз, верную лишь для частных случаев цепей частотно-зависимой обратной связи. На наш взгляд, для обеспечения условия генерации колебаний следует либо использовать классический критерий Найквиста для устойчивых разомкнутых систем, либо условие баланса фаз и амплитуд следует переформулировать для случая звеньев обратной связи, имеющих режекторную характеристику.

Литература

1. Опадчий Ю.Ф., Глудкин О.П., Гуров А.И. Аналоговая и цифровая электроника (полный курс): учебник для вузов // под ред. О.П. Глудкина. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 768 с.

АВТОМАТИЗАЦИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ТРУБОК В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

В.А. БУШКОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
e-mail: dakra@inbox.ru

В группе профессора Игнатъева ранее разрабатывались методы интегрирования уравнений геодезических и их визуализации применительно к задачам дифференциальной геометрии, оптики и теории гравитации [1,2]. Однако в указанных работах для исследования и графического представления геодезических каждый раз задача решалась для конкретно заданной метрики, поверхности и начальных условий. В нашей работе мы представляем библиотеку программных процедур, позволяющих получить упорядоченную систему уравнений геодезических и основанного на этой системе численного решения и графического представления решения этой системы для релятивистских полей тяготения и для анизотропных оптических сред.

В библиотеке «Geodesic_lines» параметрами процедур являются: *Coord* – список координат (цилиндрические, сферические и т.д.), *S* – натуральный параметр, *G* – метрика (или параметрические уравнения поверхности), *Inits* – начальные условия (координаты начальной точки M_0 и направление $\frac{dv}{ds}$ геодезической в этой точке), *a* – начальный радиус трубки геодезических линий (лучей).

Представленная библиотека содержит процедуры: нахождение уравнений геодезических линий, приведение уравнений геодезических к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, численное решение системы ОДУ, графическое представление геодезических трубок по сгенерированным начальным условиям, динамическая визуализация движения касательного вектора к геодезической линии поверхности.

Приведем пример использования библиотеки «Geodesic_lines» для исследования геодезических трубок для тензора преломления

$$h = \begin{pmatrix} \frac{2 \sin x_1 + \cos x_1}{\cos^2 x_1} & 0 \\ 0 & 1 - \cos^2 x_1 \end{pmatrix}.$$

Результатом выполнения программы будут графические изображения геодезических трубок

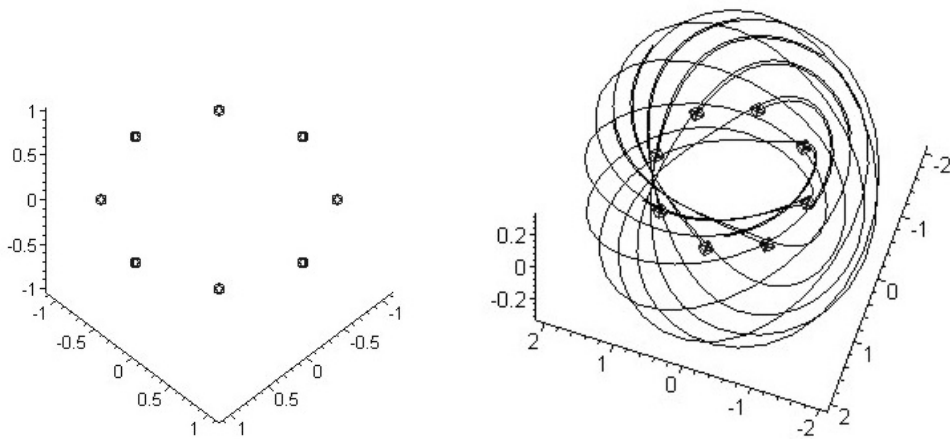


Рис. 1. Построение геодезической трубки по сгенерированным начальным условиям

Проиллюстрируем возможности библиотеки «Geodesic_lines» на примере интегрирования системы уравнений геодезических линий на торе: $x = (2 + \cos v)\cos u$, $y = (2 + \cos v)\sin u$, $z = \sin v$.

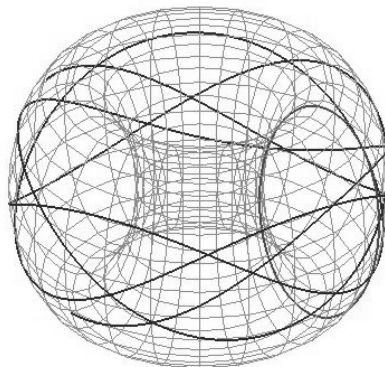


Рис. 2. Графическое исполнение команды `Geodesic_lines[Animate](sol,[u,v],[(2+cos(v))*cos(u),(2+cos(v))*sin(u),sin(v)],s,[[12,2],[1,1]])`

Разработанная библиотека программных процедур предназначена для проведения исследований в римановой геометрии и геометрической оптике средствами системы Maple.

Литература

1. Жаркова Т.А. Исследование геометрической оптики с помощью пакета программ символьной математики // Тезисы докладов III Всероссийской научной конференции. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. – С. 120.
2. Гумерова-Розакова Л. И., Игнатъев Ю. Г. Моделирование и анимация геодезической трубки в гравитационном поле Шварцшильда

средствами пакета Maple // Труды Второй Всероссийской научной конференции (1–3 июня 2005 г.). – Самара: СамГТУ, 2005. – С. 79–81.

3. Синг Дж. Классическая динамика. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 1963. – 448 с.

4. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – М., 1948. – 316 с.

5. Дьяконов В.П. Maple7. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2002. – 672 с.

6. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 203 с.

ЗАДАНИЕ, АНАЛИЗ И ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИКА 8

В.П. ДЬЯКОНОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: vpdyak@yandex.ru

В последнее время наблюдается тенденция к сближению аппаратных возможностей цифровых измерительных приборов с программными возможностями *систем компьютерной математики* (СКМ) MATLAB, Maple, Mathematica, Mathcad и др. За последние годы революционный прорыв в развитии таких систем сделала система компьютерной алгебры Mathematica. Ее разработчик – компания Wolfram Research Inc. (США) в последние три года выпустила три новые версии Mathematica 6,7 и 8, увеличила на почти 2000 число встроенных в ее ядро функций. Особое внимание уделено возможностям задания и обработки сигналов.

Сигналы в системе Mathematica задаются своими математическими выражениями и простыми фрагментами программного кода, например (рис. 1):

`Plot[SquareWave[x], {x,0,3}]` – для рис. 1а

`Plot[TriangleWave[x], {x,0,3}]` – для рис. 1б

`Plot[SawtoothWave[x], {x,-2,2}]` – для рис. 1в

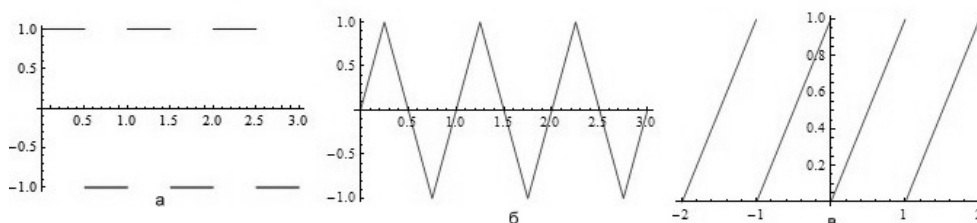


Рис. 1. Сигналы: меандр (а), треугольный (б) и пилообразный (в)

Сейчас для создания реальных сложных сигналов используются цифровые генераторы произвольных сигналов и функций. Но это довольно дорогие приборы, и они создают нужную кривую по точкам, что является трудоемким процессом. Куда удобнее создавать сложные

сигналы комбинацией математических выражений. На рисунке 2 показан пример создания двумерного массива data и построения с помощью графика с интерполяцией полиномом 5-го порядка. Обратите внимание на плавность изменения цветов поверхности, представляющей сигнал, и хорошую имитацию отражения света.

```
data=Table[Cos[j^2+i/2], {i,0,Pi,Pi/5}, {j,0,Pi,Pi/5}];
ListPlot3D[data,Mesh->None,InterpolationOrder->5,
ColorFunction->"SouthwestColors"]
```

```
data = Table[Cos[j^2 + i/2], {i, 0, Pi, Pi/5}, {j, 0, Pi, Pi/5}].
ListPlot3D[data, Mesh -> None, InterpolationOrder -> 5,
ColorFunction -> "SouthwestColors"]
```

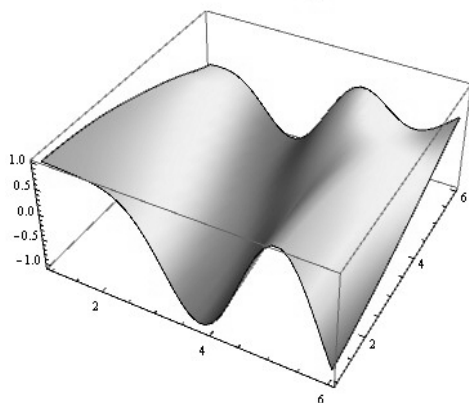


Рис. 2. Поверхность, описывающая интерполированный сигнал, представленный функцией двух переменных и массивом data

```
FourierSinSeries[SquareWave[x], x, 6,
FourierParameters -> {1, 2 Pi}]

$$\frac{4 \sin[2 \pi x]}{\pi} + \frac{4 \sin[6 \pi x]}{3 \pi} + \frac{4 \sin[10 \pi x]}{5 \pi}$$

```

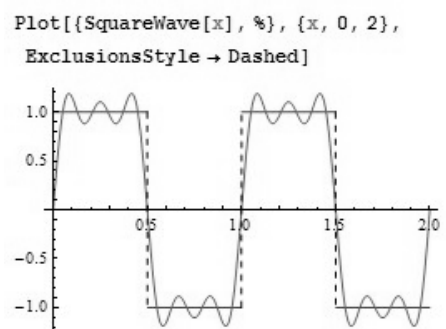


Рис. 3. Пример представления рядом Фурье меандра

Некоторые сигналы допускают аналитическое расширение:

FunctionExpand[Sinc[x],x≠0]

Sin[x]/x

FunctionExpand[SquareWave[x],x∈Reals]

Sign[Sin[2 π x]]

FunctionExpand[TriangleWave[x],x∈Reals]

(2 ArcSin[Sin[2 π x]])/π

FunctionExpand[SawtoothWave[x],x∈Reals]

x-Floor[x]

Представление сигналов явными функциями может иметь преимущества при математическом моделировании сигналов.

В Mathematica 8 возможны прямое и обратное непрерывные преобразования Фурье, синусные, косинусные и по базису Чебышева преобразования, дискретные Фурье-преобразования и преобразования в серии и последовательности. На рисунке 3 показано представление рядом Фурье с синусными членами сигнала в виде меандра. Число 6 в функции разложения – это максимальный номер гармоники. Изменяя его, легко проследить, насколько точно такой ряд описывает меандр.

Колебательный характер разложения носит фундаментальный характер и называется эффектом Гиббса.

Функция `FourierTransform` осуществляет в символьном (аналитическом) виде прямое преобразование Фурье:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt.$$

С помощью опции `FourierParametr->{a,b}` можно задавать формулу Фурье-преобразования с иной нормировкой:

$$\sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt.$$

Примеры применения функции `FourierTransform`:

`FourierTransform[a, t, ω]`

`a $\sqrt{2\pi}$ DiracDelta[ω]`

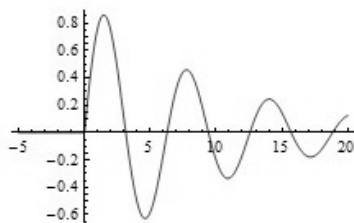
`FourierTransform[Sin(t)/t3/2, t, ω]`

`-(1/2) $\sqrt{\pi/2}$ Sin ω Sign[ω]`

`FourierCosTransform[Exp[-t2], t, ω]`

$$e^{-\frac{\omega^2}{4}} / \sqrt{2}$$

`Plot[Sin[t] Exp[-t/10] UnitStep[t], {t, -5, 20}]`



`FourierTransform[Sin[t] Exp[-t/10] UnitStep[t], t, ω]`

$$\frac{50 \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{101 - 20 i \omega - 100 \omega^2}$$

`LogLogPlot[Evaluate@Abs[%], { ω , 1-1, 12}]`

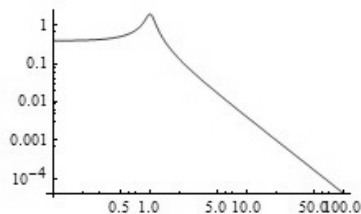


Рис. 4. Пример задания затухающей синусоиды, ее Фурье-преобразования и графиков исходной и преобразованной функций

На рисунке 4 дан интересный пример построения затухающей синусоиды при $t \geq 0$, осуществления ее Фурье-преобразования и построения графика как самой затухающей синусоиды, так и результата ее Фурье-преобразования. Последний построен с помощью функции построения двойного логарифмического графика `LogLogPlot` и представляет логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) фильтра второго порядка с реакцией, аналогичной вычисленной в этом примере.

Преобразование Фурье может быть многомерным, в частности двумерным (рис. 5). Построен сам трехмерный образ такого импульса (рисунок слева) и его Фурье-образ (рисунок справа).

```

square[{{imin_, imax_}, {jmin_, jmax_}}] :=
  Table[UnitStep[i - imin, imax - i] UnitStep[j - jmin, jmax - j], {i, 0, 20}, {j, 0, 20}]

{ListPlot3D[square[{{2, 5}, {3, 7}}], Mesh -> None, PlotStyle -> Yellow],
ListPlot3D[Abs@Fourier[square[{{2, 5}, {3, 7}}]], Mesh -> None, ColorFunction -> "Rainbow"]}

```

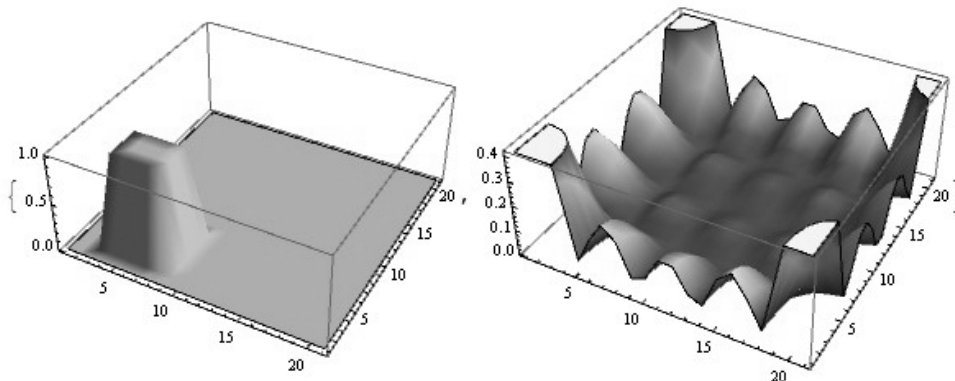


Рис. 5. Пример двумерного Фурье-преобразования прямоугольного импульса

При анализе сигналов и линейных систем, особенно в электротехнике, широчайшее применение находит преобразование Лапласа:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Оно преобразует в символьном виде сигнал или функцию времени $f(t)$ в функцию переменной $s=i\omega$. Например,

```

LaplaceTransform[Exp[-a*t]*Sin[b*t],t,s]
b/(b^2+(a+s)^2)

```

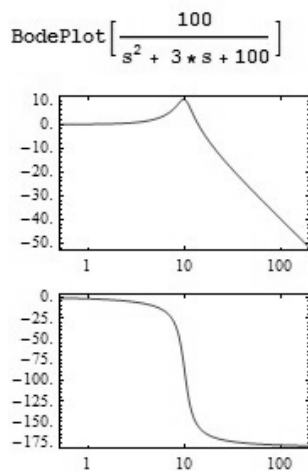


Рис. 6. Построение Бодэ-диаграмм системы второго порядка

По полученной функции переменной s можно построить логарифмическую амплитудно-частотную (ЛАЧХ) и фазо-частотную (ФЧХ) характеристики линейной системы или зависимость спектральной плотности сигнала от частоты – диаграмму Бодэ. В системе Mathematica для этого можно воспользоваться готовой функцией BodePlot построения диаграмм Бодэ (см. пример на рис. 6 для системы второго порядка).

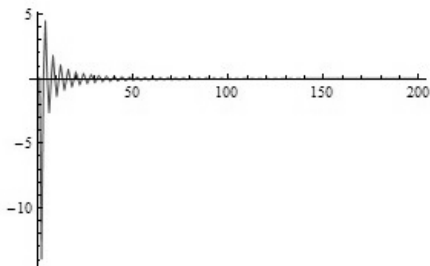
При анализе линейных систем и сигналов применяются и другие типы диаграмм, например диаграмма Найквиста. Она строится в плоскости амплитуда-фаза для частот от 0 до ∞ . В Mathematica для этого служит функция NyquistPlot (рис. 7). Диаграмму Найквиста часто используется для оценки устойчивости линейных систем.

Применение этих средств существенно облегчает анализ сигналов и характеристик линейных систем различного порядка. С помощью опций возможности функций, описанных выше, можно существенно расширить.

Функции `Fourier` и `InverseFourier` реализуют прямое и обратное дискретные преобразования Фурье. Исходный числовой массив, подвергнутый вначале прямому, а потом обратному дискретным преобразованиям Фурье, восстанавливает свои элементы с очень небольшой погрешностью. Например:

```
Fourier[{1,1.5,2,2,1,1,0,0}]
{3.0052+0. i, -0.375+1.33211 i, 0.+0.176777 i, 0.375-0.0821068 i,
-0.176777+0. i, 0.375+0.0821068 i, 0.-0.176777 i, -0.375-1.33211 i}
InverseFourier[%]
{1.,1.5,2.,2.,1.,1.,0.,-1.57009×10-16}
```

```
data = Table[ArcTan[x - 100], {x, 1., 200.}];
dct = FourierDCT[data]; ListLinePlot[dct, PlotRange -> All]
```



```
tdata = FourierDCT[PadRight[Take[dct, 20], 200, 0], 3];
ListLinePlot[{data, tdata}]
```

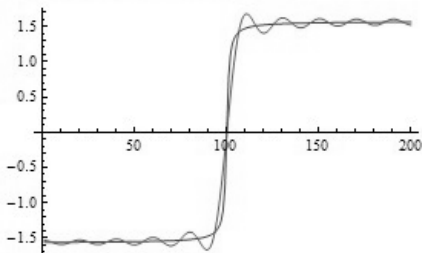


Рис. 8. Создание перепада конечной длительности и его преобразования с помощью функции `FourierDCT`

```
NyquistPlot[{{5/(s+1), 100/(s^2+3*s+100)}}]
```

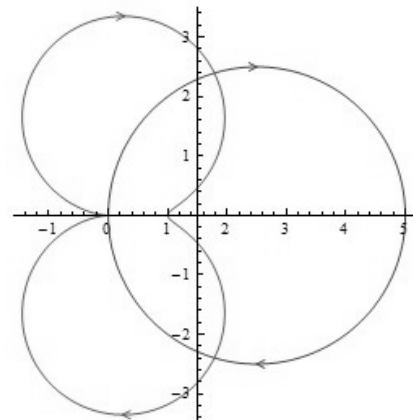


Рис. 7. Примеры построения диаграмм Найквиста для двух систем

Дискретное прямое преобразование Фурье дает представление сигнала, представленного временными отсчетами, в частотной области:

$$\frac{1}{n^{(1-a)/2}} \sum_{r=1}^n u_r e^{2\pi b(r-1)(s-1)/n}$$

Элементы массива такого преобразования — комплексные числа. Обратное дискретное преобразование Фурье реализуется по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\delta=1}^n v_s e^{-2\pi i(r-1)(s-1)/n}$$

и дает отсчеты во временной области. Если прямому преобразованию подвергается вектор, то обратное преобразование восстанавливает его с погрешностями порядка машинного нуля.

Mathematica 8 имеет также функции синусного и косинусного дискретного преобразования Фурье. Это функции `FourierDCT` (4 формы) и `FourierDST` (также 4 формы). На рисунке 8 показано задание смещенного перепада конечной длительности с помощью функции арктангенса, проведение косинусного преобразования этого перепада с выводом графика преобразования, а затем восстановление перепада и сравнение его с исходным перепадом.

```
Data = Table[Sin[50*2*Pi*n/256] +
  (1/2)*Sin[60*2*Pi*n/256] +
  3*(Random[] - 1/2), {n, 256}];
```

```
ListPlot[Data, Joined -> True]
```



```
ListPlot[Abs[Fourier[Data]]^2,
  Joined -> True, PlotRange -> All]
```

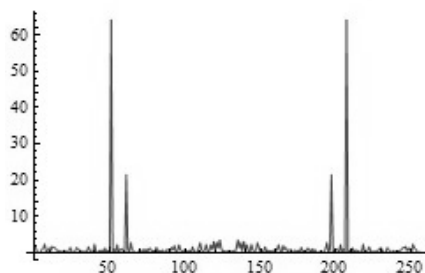


Рис. 9. Пример получения зашумленных двух синусоид и их выделение спектральным методом

Спектр сигнала часто позволяет в частотной области выявить особенности сигнала, которые малозаметны или совсем незаметны во временной области. Примером может служить обнаружение слабых синусоидальных сигналов на фоне сильных шумов – это одна из самых распространенных задач в радиотехнике, например, в космической связи. Смоделируем ее с помощью СКМ Mathematica.

На рисунке 9 показано создание двух синусоидальных сигналов с частотами 50 и 60 Гц, на которые наложен сильный шум, созданный генератором случайных чисел (функция `Random`). Создано 256 отсчетов такого сигнала и его временная зависимость показана на верхнем рисунке. О наличии в сигнале синусоидальных компонент в этом рисунке ничто не говорит – сигнал выглядит просто как шум.

Функции свертки и корреляции находят широкое применение в обработке сигналов. Функция свертки (`convolution`) в общей форме задается как $\sum_y K_y u_{s-y}$, а функция корреляции (`correlation`) – как $\sum_y K_y u_{s+y}$. Здесь функция K является ядром, относительно которого обрабатывается функция u . В Mathematica обе функции задаются списками `kernel` и `list`, а для получения списков свертки и корреляции используются функции:

ListConvolve[`kernel`,`list`] и **ListCorrelate[`kernel`,`list`]**.

Функция **ListDeconvolve[`kernel`,`list`]** дает обратную свертку.

На рисунке 10 показан пример создания зашумленного и его сглаживания с применением функции **ListCorrelate**.

```

x = N[Range[1000] / 1000];
data = RandomReal[{-1, 1}, 1000] + 2 Sin[7 x];

w = Exp[-.01 N[Range[-24, 24]^2]];
w /= Total[w];

smoother = ListCorrelate[w, data];

Show[ListLinePlot[Transpose[{x, data}]],
ListLinePlot[Transpose[{Take[x, {25, -25}], smoother}],
PlotStyle -> Yellow]]

```

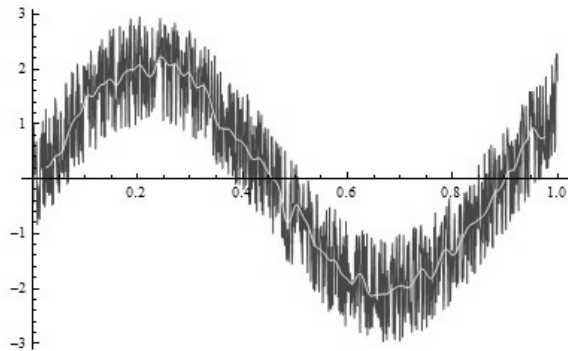


Рис. 10. Пример сглаживания сигнала применением функции `ListCorrelate`

MovingAverage[{a,b,c,d,e,f},3]
 $\{1/3 (a+b+c), 1/3 (b+c+d), 1/3 (c+d+e), 1/3 (d+e+f)\}$

В Mathematica есть также более мощная функция экспоненциального сглаживания:

ExponentialMovingAverage[list, α]

Начиная с Mathematica 6 в системах Mathematica проводится идеология динамической интерактивности. Для этого введен новый класс объектов (например, переменных) – динамические объекты. Они задаются списком параметров особой функции `Dynamic`. Изменение динамической переменной в любом месте блокнота ведет к изменению ее значения по всему блокноту.

```

DynamicModule[{pts = {{0, 0}, {1, 1}, {2, 0}, {3, 2}, {4, 0}}},
LocatorPane[Dynamic[pts],
Dynamic[Plot[InterpolatingPolynomial[pts, x], {x, 0, 4}, PlotRange -> 3]]]]

```

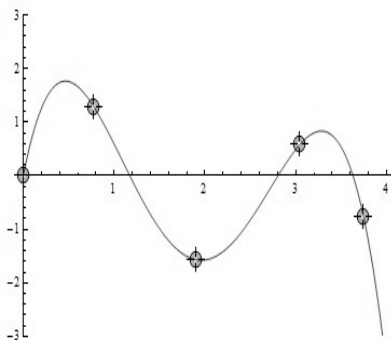


Рис. 11

С помощью функций `ListConvolve` и `ListDeconvolve` также можно осуществлять сглаживание.

Сглаживание сигнала часто применяется как средство очистки сигнала от шума. Простейшей операцией линейного сглаживания данных массива `list` является усреднение с помощью функции

MovingAverage[list, r]

Число подлежащих усреднению элементов массива с перемещающимся окном задается как `r`. Пример сглаживания усреднением в символьном виде при `r=3`:

Такое изменение можно осуществить множеством новых объектов контроля: слайдеров разного типа, движков, переключателей и т.д. Это и обеспечивает динамическую интерактивность, в частности рисунков с такими объектами, меняющих свой вид и содержание путем интерактивного управления ими с помощью элементов контроля.

На рисунке 11 дан пример полиномиальной аппроксимация с помощью функции `Interpolating Polynomial` для перемещаемых 2-координатными слайдерами узловых точек. Перемещение любой точки мышью (по вертикали и по горизонтали) тут же ведет к построению новой кривой, приближающей точки полиномом со степенью на 1 меньше числа точек (их 5). Процесс аппроксимации становится очень наглядным благодаря применению модуля `DynamicModule` динамической визуализации.

Аналогичным образом можно осуществить полиномиальную аппроксимации и регрессия с помощью функции `Fit`.

Литература

1. Дьяконов В.П. Энциклопедия компьютерной алгебры. – М.: ДМК-Пресс, 2009.
2. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6 в научно-технических расчетах. – Изд. 2-е перераб. и доп. – М.: Солон-Пресс, 2009.
3. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. – С.: ДМК-Пресс, 2009.
4. <http://www.wolfram.com/>. Интернет-сайт корпорации Wolfram Research Inc.

КОНТРОЛЬ РАБОТЫ МНОГОЯДЕРНЫХ МИКРОПРОЦЕССОРОВ В СКМ МАТЕМАТИКА И МАТЛАВ

В.П. ДЬЯКОНОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: vpdyak@yandex.ru

Современные СКМ поддерживают алгоритмы параллельных вычислений. Наиболее важной является поддержка многоядерных микропроцессоров, которые стали основой построения современных персональных компьютеров (ПК) и даже смартфонов и коммуникаторов. Поддержка многоядерных процессоров в СКМ направлена на решение сложных математических задач, например, обработки массивов, векторов и матриц больших размеров, изображений, специальных сумм и произведений, сложных определенных интегралов, решение систем дифференциальных и алгебраических уравнений, математическое моделирование различных систем и устройств.

В настоящее время в среде пользователей активно обсуждается вопрос: дает ли применение более дорогих ПК с многоядерным процессором выигрыш у скорости вычислений и адекватен ли он степени усложнения процессора и повышения стоимости ПК?

Некоторые пользователи считают, что параллельные вычисления реализованы недостаточно и что у многоядерных микропроцессоров реально загружено только одно ядро, что и показано ниже.

Основными показателями эффективности параллельных вычислений можно считать:

- время выполнения вычислений;
- степень загрузки микропроцессора;
- процент использования отдельных ядер микропроцессора.

В СКМ обычно контролируется только первый параметр. Однако он дает некоторую информацию только в том случае, когда тестовые задачи решаются на двух компьютерах – с одноядерным процессором и с многоядерным. В СКМ MATLAB для таких сравнительных испытаний полезна команда `bench`, которая реализует:

- LU – разложение матриц;
- FFT – быстрое преобразование Фурье;
- ODE – решение обыкновенных дифференциальных уравнений;
- Sparse – операции с разреженными матрицами;
- 2-D – двухмерная графика;
- 3-D – трехмерная графика.

Испытания проводились на двух ПК – с одноядерным процессором Intel и с 4-ядерным процессором той же фирмы. Уже первые испытания показали, что новые версии СКМ MATLAB R2011b и Mathematica 8 при работе на ПК с 4-ядерным процессором показывают ускорение вычислений в 3–4 раза по сравнению с работой этих СКМ на ПК с одноядерным микропроцессором. Уже одно это говорит о существенном улучшении скорости работы ПК при переходе на многоядерные процессоры. Однако является ли этот выигрыш максимально достижимым и сколько ядер на самом деле используется?

Наиболее полную информацию об использовании ядер многоядерного процессора дают специальные утилиты – гаджеты, например, CPU Meter или System Monitor. На рисунке 1 показано применение гаджета CPU Meter для контроля исполнения команды `bench` в MATLAB R2011b. Окно гаджета CPU Meter показано в правом верхнем углу рабочего окна Windows XP. Из него хорошо видно, что все 4 ядра используются с коэффициентами загрузки от 0 до 56 и даже 89 %. Заметим, что никаких специальных установок на применение многоядерности не делалось. Это говорит о том, что MATLAB R2011b поддерживает многоядерные процессоры по умолчанию. Хотя в разделе справки и самоучителе по параллельным вычислениям можно найти ряд способов и реализующих их средств, позволяющих обеспечить повышенную загрузку ядер многоядерных процессоров. Например, это ускоренный цикл типа `parfor`, входящий в пакет расширения MATLAB

по параллельным вычислениям Parallel Computing Toolbox. Структурно он подобен обычному циклу for.

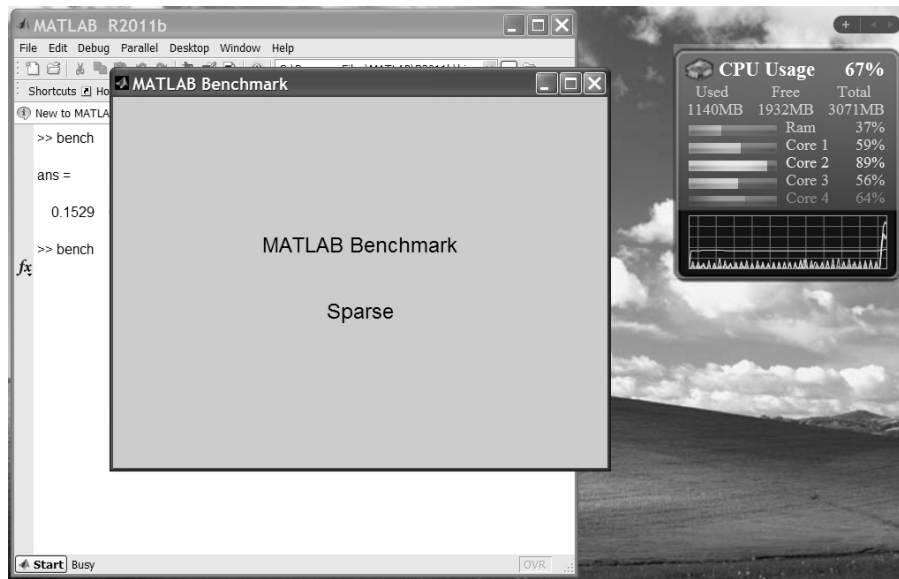


Рис. 1. Контроль исполнения команды bench в MATLAB R2011

В MATLAB входит основной пакет расширения по имитационному моделированию различных систем и устройств. Он использует матричные методы моделирования, и для его работы особенно полезны методы параллельных вычислений. На рисунке 2 показан контроль работы Simulink при моделировании крупной радарной системы с помощью гаджета CPU Meter. Нетрудно заметить, что загрузка процессора в этом примере невелика и что работают все 4 ядра. В операционной системе Windows 7 ситуация была аналогичной.

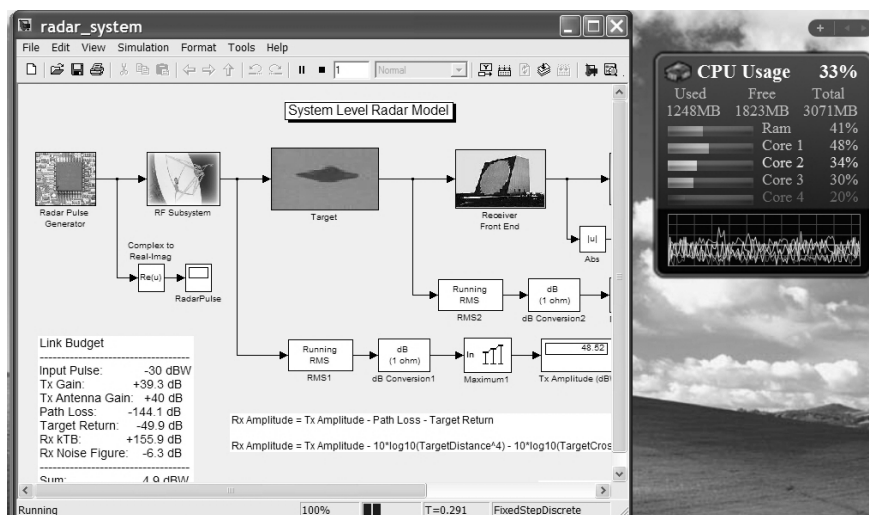


Рис. 2. Контроль исполнения моделирования в Simulink радарной системы

У СКМ Mathematica имеется специальная конструкция для оценки времени вычисления любого выражения:

выражение `//AbsoluteTime` – возвращает абсолютное время вычисления заданного выражения.

Ниже дан пример на суммирование 2 миллионов членов ряда синусоид:

```
Sum[Sin[i2/(i2+1.)],{i,1,2*10^6}]]//AbsoluteTiming  
{24.2968750,1.68294×106} (см. рис. 3 слева).
```

Оно заняло 24,3 с. Рисунок 3 слева показывает, что все ядра микропроцессора задействованы в данном случае. Заметим, что взят снимок момента максимальной загрузки микропроцессора. Следует учитывать что степень загрузки каждого ядра непрерывно меняется во времени и сильно различается для разных операций – практически от 0 до 100%.

Mathematica имеет средства принудительного задания параллелизма вычислений. Одним из таких средств является модуль `Parallelize`:

```
Parallelize[Sum[Sin[i2/(i2+1.)],{i,2*10^6}]]//  
AbsoluteTiming  
{3.7812500,1.68294×106} (см. рис. 3 справа).
```

Включенное в его состав выражение выполняется с принудительным вводом в работу всех ядер многоядерного микропроцессора. Как видно из правого рисунка 3, степень использования ядер повышается, а затраты памяти падают. Время исполнения данного ряда уменьшилось с 24,3 с до 3,78 с, т.е. более чем в 6 раз. Таким образом, введение средств обеспечения параллелизма вычислений вполне оправдано, несмотря на то, что такие средства частично задействованы по умолчанию.

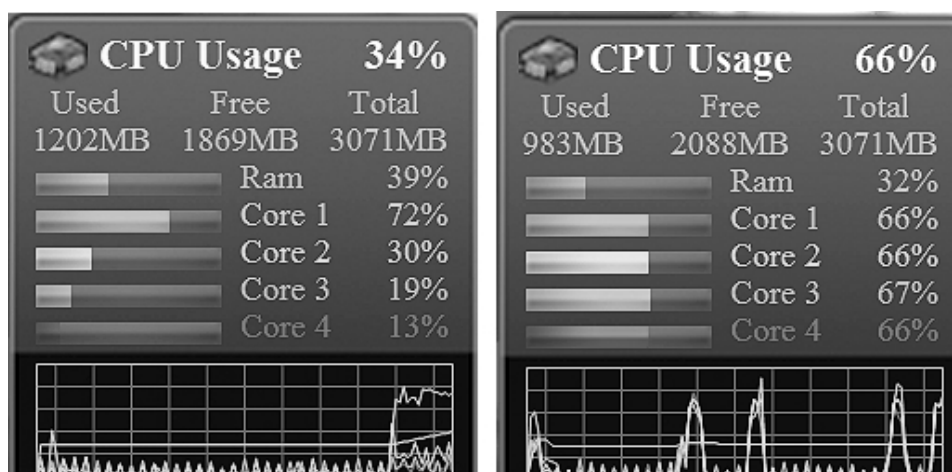


Рис. 3. Контроль за выполнение операции суммирования большого ряда: суммирование без модуля `Parallelize` и с модулем `Parallelize`

Тот же результат можно получить, используя функцию компиляции выражений `Compile` или функцию параллельного суммирования `ParallelSum`:

ParallelSum[Sin[i2/(i2+1.)], {i, 2*10^6}]/AbsoluteTiming
 {3.7968750, 1.68294*10^6}

Необходимость в поддержке работы всех ядер микропроцессора возникает при вычислении сложных интегралов, например, требующих вычисления по частям (рис. 4). Нетрудно заметить, что вычисление приведенного на рисунке 4 интеграла задействует до 100% все ядра процессора. Еще раз отметим, что это характерно для определенного момента вычислений. В некоторые моменты загрузка ядер может оказаться очень малой. Время вычисления интеграла составило 14,1 с. Без модуля Parallelize время вычисления составило 24 с, а загрузка ядер оказалась заметно меньшей.

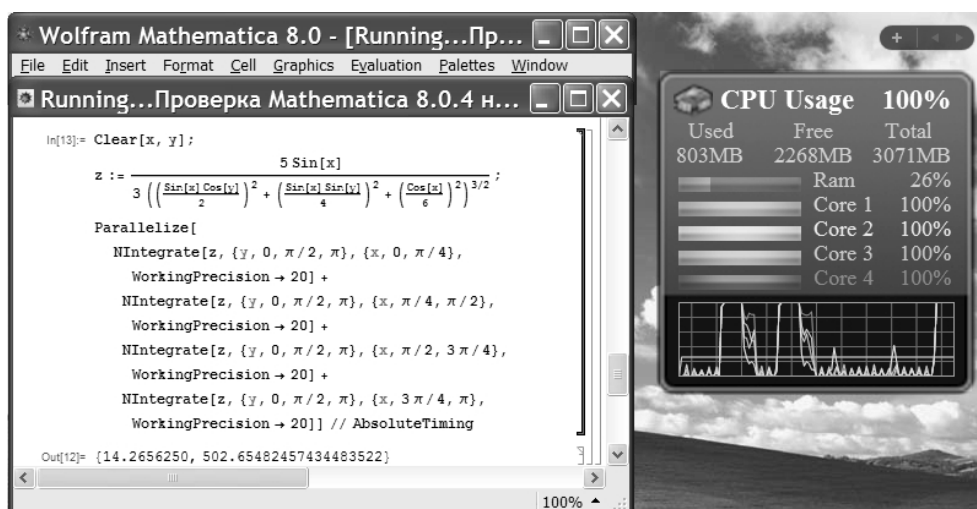


Рис. 4.

Mathematica 8 содержит и ряд других полезных функций для работы с многоядерными микропроцессорами. Например, следующая системная переменная `$ProcessorCount` имеет значение, равное числу ядер используемого на данном ПК процессора. В справке можно найти и другие полезные средства обеспечения параллельных вычислений в СКМ Mathematica и примеры их применения.

КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА В ОСЦИЛЛОГРАФАХ-АНАЛИЗАТОРАХ СПЕКТРА ТЕКТРОНИХ MDO4000

В.П. ДЬЯКОНОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: vpdyak@yandex.ru

В 2011 году корпорация Tektronix – лидер мировой осциллографии – объявила о выпуске нового революционного продукта – осциллографов смешанных сигналов с встроенными вполне полноценными

анализаторами спектра радиочастот. 14 декабря 2011 года на конкурсе Elektra European Electronics Industry Awards (Великобритания) новые приборы стали победителем в номинации «Лучший продукт года» среди контрольно-измерительного оборудования.

Многие возможности новых приборов в части обработки сигналов аналогичны присущим системам компьютерной математики (СКМ). Это дискретизация сигналов, автоматическое вычисление многих параметров сигналов, выполнение быстрого преобразования Фурье и проведение спектрального анализа, построение графиков сигналов и т.д. Приборы работают в трех разных областях определения сигналов:

Time Domain Analog – временная область определения аналоговых сигналов, в которой работают осциллографы.

Time Domain Digital – временная область определения цифровых и логических сигналов, в которой работают логические анализаторы.

Frequency Domain – частотная область определения сигналов, в которой работают анализаторы спектра радиочастот (аналоговые и цифровые).

Корпорация Tektronix выпустила серию осциллографов MDO из четырех моделей (см. табл. 1).

Таблица 1.

Основные параметры приборов серии MDO4000

Модели	На	Полоса	Фда	Нц	Фдц MagniV	Диапазон РЧ
MDO4054-3	4	0,5 ГГц	2,5 Гвыб/с	16	0,5 16,5 Гвыб/с	50 кГц...3 ГГц
MDO4054-6	4	0,5 ГГц	2,5 Гвыб/с	16	0,5 16,5 Гвыб/с	50 кГц...6 ГГц
MDO4104-3	4	1 ГГц	5 Гвыб/с	16	0,5 16,5 Гвыб/с	50 кГц...3 ГГц
MDO4104-6	4	1 ГГц	5 Гвыб/с	16	0,5 16,5 Гвыб/с	50 кГц...6 ГГц

Внешний вид приборов новой серии показан на рисунке 1.



Рис.1. Внешний вид осциллографа MDO4000

Они очень напоминают приборы серий DPO4000 и MSO4000 (осциллографы смешанных сигналов).

Левую половину передней панели занимает экран прибора. Справа от него и снизу расположены кнопки меню. Под нижними кнопками расположены разъемы USB, группа кнопок и разъем для подключения пробников цифровых и логических сигналов. Другую половину занимает рабочая панель с органами управления. На ней видна сдвоенная ручка Wave Inspector для ручной и автоматической прокрутки осциллограмм. В нижней части панели расположены органы управления четырьмя аналоговыми каналами (их входы обозначены цифрами от 1 до 4) и дополнительный радиочастотный вход RF анализатора спектра.

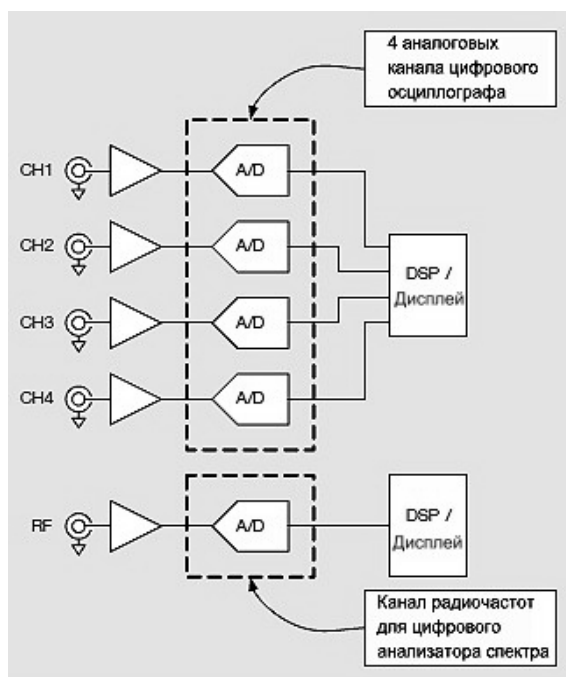


Рис. 2. Упрощенная аналоговая часть осциллографа MDO4000

При работе осциллографической части прибора он имеет возможности, присущие ранее описанным в [1] возможностям осциллографов DPO/MSO4000. Они позволяют наблюдать осциллограммы сигналов с редкими аномалиями сигналов – глюками. При этом, чем реже повторяются глюки, тем менее яркими выводятся их осциллограммы. Приборы имеют курсорные и автоматические измерения, математический редактор и удобную систему синхронизации.

Наличие в составе осциллографов серии MDO4000 анализатора спектра радиочастот – главная отличительная особенность приборов. На рисунке 3 показан типичный вид экрана осциллографа-анализатора спектра при исследовании почти прямоугольных импульсов и построении их спектра. Преимуществом MDO4000 является то, что прибор содержит отдельный канал вполне полноценного анализатора спектра с отдельным радиочастотным входом RF. Сразу отметим, что

На рисунке 2 показана функциональная схема упрощенной аналоговой части прибора. Она, как и у осциллографа DPO/MSO4000, содержит 4 аналоговых входа для сигналов, исследуемых осциллографической частью прибора. А под ними расположен новый радиочастотный канал анализатора спектра радиочастот.

Осциллограф комплектуется цифровым 16-канальным пробником и четырьмя аналоговыми пассивными пробниками.

Отдельно могут приобретаться и активные, дифференциальные, токовые, высоковольтные и другие пробники.

высококачественные анализаторы спектра с полосой частот в десятки и даже сотни ГГц, конечно, намного превосходят по своим характеристикам MDO4000 и сравнение с ними просто лишено смысла. Это все равно, что сравнивать «Жигули» с огромным карьерным самосвалом!

Поскольку между разными областями анализа обычно существует корреляция по времени, можно производить точные измерения временных интервалов, чтобы определить времена задержки и ожидания между событиями, оценивать времена прохождения команд и изменения радиочастотного спектра. Например, просмотр спектра при включении ГУН с ФАПЧ либо измерение переходных характеристик при скачкообразной перестройке частоты РЧ сигнала теперь являются достаточно простыми задачами.

Определение источника нерегулярных, аппаратно-зависимых электромагнитных помех никогда не было таким простым благодаря способности MDO4000 обеспечить полное исследование системы с временной корреляцией в обеих областях, что просто невозможно осуществить с помощью другой современной контрольно-измерительной аппаратуры.

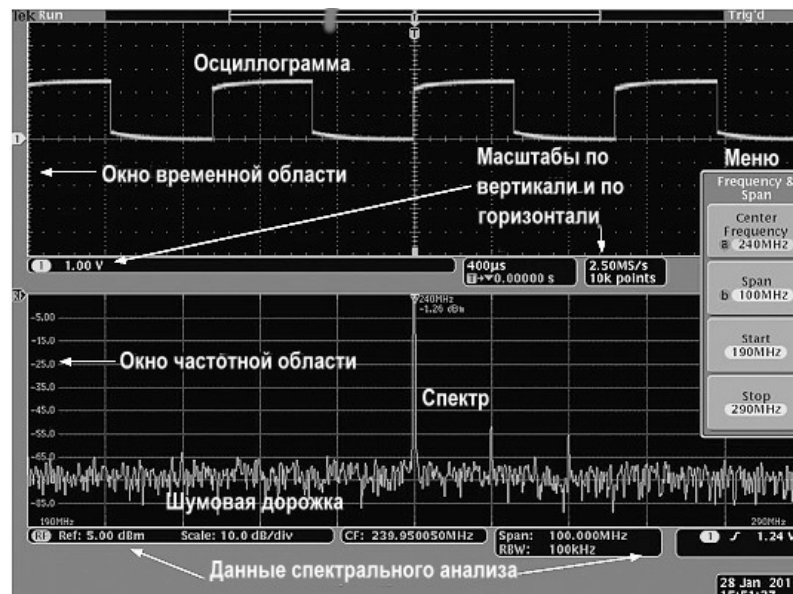


Рис 3. Вид экрана MDO4000

На рисунке 4 представлены данные о работе синтезатора синусоидального сигнала. Верхние осциллограммы отражают переходные режимы синтезатора, а спектр сигнала внизу дает частотное представление сигнала.

Одним из средств исследования спектров являются спектрограммы (рис. 5). Они строятся в плоскости время-частота с представлением уровня спектра цветом. Для этого используется быстрое оконное преобразование Фурье.

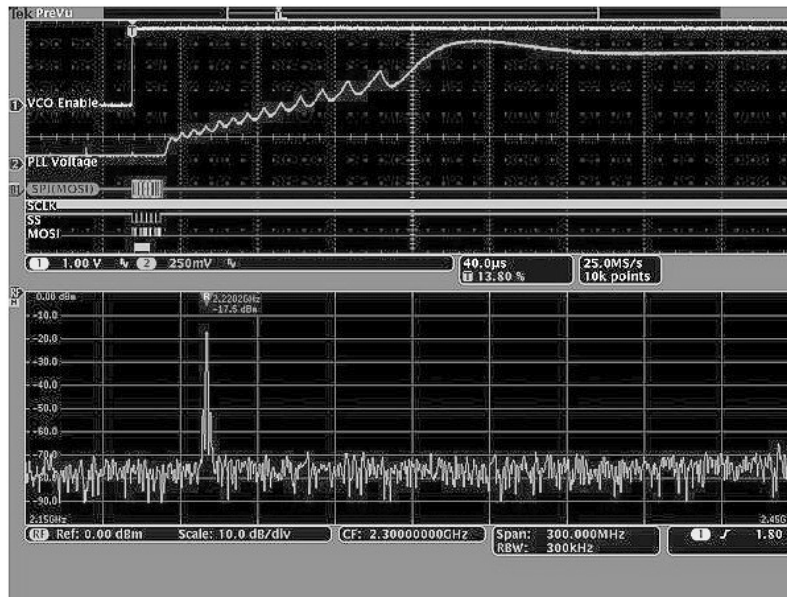


Рис. 4. Пример представления осциллограмм и спектра

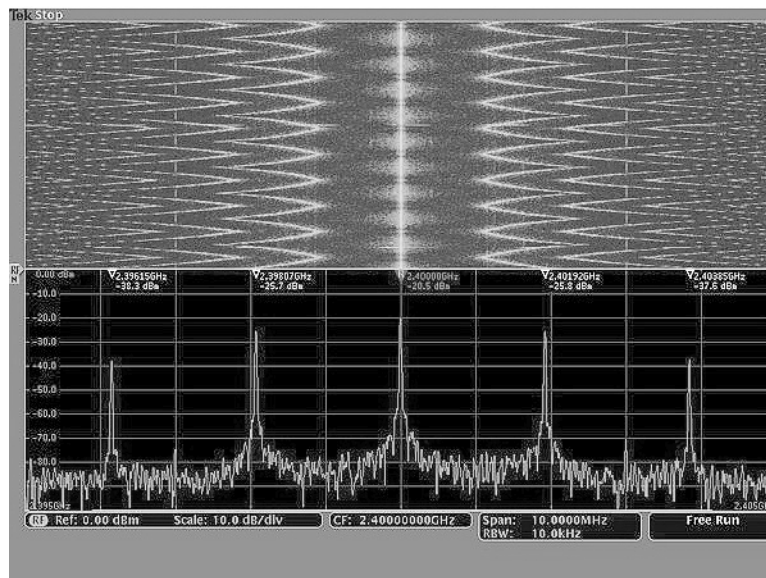


Рис. 5. Пример вывода окна спектрограммы

Нельзя не упомянуть еще одну важную возможность анализатора спектра осциллографов MDO4000 – просмотр спектров отдельных каналов в многоканальных системах связи. Некоторые из исследуемых сигналов сильно засорены шумами. Поэтому осциллограф имеет средства подавления шумов.

Осциллографы серии MDO4000 компании Tektronix – первые в мире комбинированные приборы, объединившие в себе функции обычных цифровых запоминающих осциллографов, анализаторов цифровых и логических сигналов и анализаторов спектра радиочастот. Это значительно расширяет области их применения. Приборы содержат наибольшее число средств компьютерной математики среди приборов

общего назначения, таких как цифровые осциллографы и анализаторы спектра.

Литература

1. Дьяконов В.П. Осциллографы компании Tektronix закрытой архитектурой // Компоненты и технологии. 2009. – № 12; 2010. – №1.
2. Fundamentals of the MDO4000 Series Mixed Domain Oscilloscope. Application Note. Tektronix, 2011.
3. Серия MDO4000. Осциллографы для смешанных типов сигналов. Руководство по эксплуатации. Tektronix, 2011.
4. Афонский В.П., Дьяконов В.П. Электронные измерения в нанотехнологиях и микроэлектронике // под ред. В.П. Дьяконова. – М.: ДМК-Пресс, 2011.
5. Афонский В.П., Дьяконов В.П. Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики // под ред. В.П. Дьяконова. – М.: ДМК-Пресс, 2011.

РЕАЛИЗАЦИЯ ОБМЕНА ДАННЫМИ МЕЖДУ MAPLET-ПРИЛОЖЕНИЕМ И БАЗОЙ ДАННЫХ MySQL

Г.Р. ЗАББАРОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
e-mail: gulshaton@mail.ru

В [1] описаны принципы моделирования системы аналитического тестирования [2] на основе математического пакета Maple. В качестве средства создания интерактивной среды тестирования были предложены маплеты. В [3] описана организация обмена данными системы с внешними приложениями, а именно рассмотрены вопросы импорта и экспорта данных в txt- и xls-файлы из маплетов. При дальнейшей разработке системы возникла необходимость организации более безопасного и структурированного хранения данных. В данной работе рассмотрены средства взаимодействия maplelet-приложения с базой данных MySQL.

СКМ Maple обладает возможностью обмена информацией с базой данных MySQL. Для работы с ней в Maple имеется пакет Database. Процедуры, входящие в данный пакет, позволяют создавать подключение к базе данных, а также осуществлять запись, чтение, обновление, удаление данных. Кроме этого, информация, хранящаяся в базе данных, является более защищенной, чем, например, данные, содержащиеся в текстовом файле.

В [1],[3] описана расширенная схема системы аналитического тестирования, включающая несколько специализированных библиотек.

Мы заменили текстовые файлы, содержащие наборы индивидуальных заданий по темам, файлы приложения MS Excel, содержащие списки студентов по группам, и файлы, хранящие максимальные баллы за задания в тестах по модулям, соответствующими таблицами базы данных. В maple-приложении были расширены функции роли тьютора, который теперь имеет возможность работать со списками студентов непосредственно из приложения. Это исключает необходимость работы с другими приложениями отдельно от маплета. К уже имеющимся библиотекам системы добавлена библиотека DBase, содержащая процедуры, осуществляющие соединение и обмен данными с базой данных.

Способность СКМ Maple взаимодействовать с базой данных MySQL значительно расширяет круг возможностей системы аналитического тестирования [1],[3].

Литература

1. Адиятуллина Г.Р., Игнатъев Ю.Г. Принципы моделирования системы аналитического тестирования знаний на основе системы компьютерной математики Maple // Вестник ТГГПУ. – № 2(20). – 2010. – С. 6–12.

2. Игнатъев Ю.Г. Использование аналитических возможностей пакета Maple для создания программ аналитического тестирования, само тестирования и генерации индивидуальных заданий в курсах высшей математики // Проблемы информационных технологий в математическом образовании: учебное пособие / под ред. Ю.Г. Игнатъева. – Казань: ТГГПУ, 2005. – С. 9–24.

3. Адиятуллина Г.Р. Реализация обмена данными между maple-приложением и файлами формата .txt и .xls // «Лобачевские чтения-2011» Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казанское математическое общество, 2011. – Т. 44. – С. 54–56.

4. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006.

5. Кирсанов М.Н. Maple 13 и Maple. Решение задач механики. – М.:Физматлит, 2010.

6. Адиятуллина Г.Р. Система аналитического тестирования в форме маплетов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. – С. 5–8.

7. Адиятуллина Г.Р. Комплекс программ для тестирования знаний по высшей математике // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XII международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. – С. 265–266.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КРИВЫХ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ*, Э.Г. ИСРАФИЛОВА**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

e-mail: * elina88@yandex.ru, ** ignatev_yu@rambler.ru

Дифференциальная геометрия традиционно считается одним из наиболее трудных предметов на математических факультетах вузов. В ней интегрируются знания, полученные студентами на курсах алгебры, аналитической геометрии, математического анализа одной и нескольких переменных, дифференциальных уравнений. Кроме того, геометрические образы, а также соответствующие вычислительные процедуры, сопровождающие этот курс, являются чрезвычайно сложными и громоздкими. Все это делает указанный курс мало наглядным и сложным для усвоения, несмотря на чрезвычайную простоту и прозрачность основных идей дифференциальной геометрии. С другой стороны, методы дифференциальной геометрии кривых и поверхностей находят огромное количество приложений в самых различных областях прикладной математики, теории поля, механики, оптики и т.п. Поэтому задача повышения наглядности этого курса становится чрезвычайно важной. Эта задача может быть решена графическими средствами компьютерной математики, в частности, пакета Maple. В работе представлены авторские вычислительные процедуры в пакете Maple решения стандартных задач дифференциальной геометрии. К стандартным задачам дифференциальной геометрии следует отнести задачи, полностью построенные на аппарате векторной алгебры и дифференциального исчисления функций одной (дифференциальная геометрия кривых) и двух (дифференциальная геометрия поверхностей) переменных. К таковым задачам относятся: построение адаптированного репера кривой, вычисление кривизны и кручения кривой, нахождение первой и второй квадратичных форм поверхностей, ее векторной оснастки, геодезической, нормальной, главных кривизн поверхностей. Именно эти задачи и изучаются в стандартных курсах дифференциальной геометрии. В работе описаны основные принципы технологии создания оснащенных динамических моделей дифференциальной геометрии кривых и описаны основные соответствующие программные процедуры в системе Maple. Решена задача построения оснащенной динамической модели адаптированного репера кривой. Эта задача решается в созданном пакете программной процедурой **YuDifGeo[Anim NaturalReper](Line, param, mini, maxi, c, N, p)**, где *mini* – минимальное значение параметра *t* кривой, *maxi* – максимальное, *c* – цвет

изображения кривой, N – число кадров динамической модели. Параметр p может принимать значение 1 или любое другое, в том числе и буквенное. При $p=1$ в заголовок рисунка выносятся динамические значения кривизны, кручения и длины дуги. При любом другом значении этого параметра кривизна, кручение и длина дуги кривой отображаются динамическими объемными гистограммами с приложенными к ним динамически обновляемыми значениями указанных скаляров. Для автоматизации процесса построения оптимальной динамической модели необходимо было дать определения ряду графических параметров оснащенной графики, зависящих от конкретного уравнения кривой и заданных границ ее воспроизведения. Для решения этой задачи использовался следующий алгоритм. В каждом кадре определялись минимальные и максимальные значения координат для всех элементов фигуры с помощью встроенной процедуры `min` и `max`, затем составлялся список минимальных и максимальных значений координат фигур по всем кадрам и находились максимальные и минимальные координаты по всей динамической модели. Таким образом, можно было определить максимальные размеры динамического объекта по всем измерениям, что позволило оптимизировать размеры его добавочных элементов.

Литература

1. Проблемы информационных технологий в математическом образовании: учебное пособие / под ред. Ю.Г. Игнатьева. – Казань: ТГПУ, 2005. – 118 с.
2. Игнатьев Ю.Г., Исрафилова Э.Г. Математическое моделирование объектов дифференциальной геометрии кривых в системе компьютерной математики MAPLE // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета – 2011. – 4 (26). – С. 11–16.

СОРТИРОВКА ТРЕХМЕРНЫХ МАССИВОВ И ПОСТРОЕНИЕ НА ИХ ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ*, М.Л. МИХАЙЛОВ**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань,
e-mail: *ignatev_yu@rambler.ru, **meschgan@mail.ru

При обработке численной информации часто возникают задачи упорядочения и сортировки больших двумерных и трехмерных массивов чисел. В частном случае такие массивы получаются при численном решении задач, например, численном интегрировании. Для

графического представления результатов необходимо упорядочить такие массивы по первой или двум первым координатам. Далее возникает задача графического представления этого массива. Если для двумерных упорядоченных массивов такая задача решается стандартной командой Maple, то графическое представление трехмерных массивов требует разработки специальной программной процедуры. Этим двум задачам и посвящена данная работа. В работе описана созданная библиотека программных процедур `SSortArr`, средствами которой можно производить автоматическую сортировку двумерных и трехмерных массивов, быстро создавать их приближенным вычислением определенных интегралов и отображать их двумерными и трехмерными графиками.

Программная процедура `SortArray3D` упорядочивает неупорядоченный и не отсортированный массив `[..., [x,y,z],...]` по первым двум координатам. У процедуры всего единственный входной параметр, `Tab1` – заданный массив. Сначала процедура упорядочивает массив по первым двум координатам, а потом строит график по упорядоченному массиву. В случае, когда есть точки, выходящие за прямоугольную область построения графика, программа выдает сообщение о них и автоматически отбрасывает эти точки. Предварительные процедуры `SortFtArr` и `SortSdArr` сортируют по первой координате или по двум первым координатам. Пример выполнения второй процедуры:

```
M:=[[66,5,5],[2,1,2],[2,3,2],[3,1,2],[-
55.5,6,6.7]],[0,2,2],[0,1,2],[0,6,2],[0,0,2],[3,2,2],[1,2,2],[
2,0,2],[3,0,2],[2,2,2],[3,3,2],[7,0,2],[7,1,2],[7,2,2],[7,3,2
]];
SortSdArr(M);
[[-55.5, 6, 6.7], [0, 0, 2], [0, 1, 2], [0, 2, 2], [0, 6,
2], [1, 2, 2], [2, 0, 2], [2, 1, 2], [2, 2, 2], [2, 3, 2],
[3, 0, 2], [3, 1, 2], [3, 2, 2], [3, 3, 2], [7, 0, 2], [7, 1,
2], [7, 2, 2], [7, 3, 2], [66, 5, 5]]
```

Процедура `SurfacePlotPoint_Int`, в которой уже заложено численное интегрирование интеграла, зависящего от одного или двух параметров, строит график из получившегося массива чисел после интегрирования, в случае одного параметра – двумерный график, в случае двух параметров – трехмерный график. Параметрами процедуры являются:

1. `Func` – подынтегральная функция;
2. `Var` – имя переменной;
3. `Par` – задается в виде упорядоченного набора:
 - a. `[a, b]` – в случае двух параметров,
 - b. `[a]` – случай одного параметра.

4 `Ran_of_Def` – задается в общем случае в виде $[x1, x2, X, a1, a2, A, b1, b2, B]$, где $x1$ и $x2$ – границы отрезка изменения переменной интегрирования, X – число разбиений отрезка $[x1, x2]$, а $a1, a2$ – границы отрезка изменения первого параметра, A – соответствующее число разбиений этого отрезка и $b1, b2$ – границы для второго параметра и B – число разбиений соответственно.

5. `Sign` – число значащих цифр при табулировании.

6. `Graf_Op` – опции графики $[color= COLOR(RGB, a, b, c), Axes, style, \text{дополнительный параметр}]$, при вызове процедуры вместо формальных параметров перечисляем только $a, b, c, axes$ – стандартная опция функции `plot` языка Maple, `style` – в данной процедуре принимает два значения '0' или '1', случай когда '0' соответствует `style=PATCH`, случай '1' соответствует `style=WIREFRAME`, дополнительный параметр предназначен для корректировки результата, результат табулирования берется как функция десятичного логарифма, тогда значение параметра принимает 'log'.

Пакет программ предназначен для математиков и физиков, а также для системы образования РФ.

Литература

1. Проблемы информационных технологий в математическом образовании: учебное пособие / под ред. Ю.Г. Игнатьева. – Казань: ТГППУ, 2005. – 118 с.
2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М: Солон-Пресс, 2006. – 720 с.
3. Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А. Программирование и разработка приложений в Maple: монография. – Таллинн: Межд. акад. Ноосферы, 2007. – 458 с.
4. Аладьев В.З. Основы программирования в Maple. – Таллинн, 2006. – 299 с.

ТЕОРИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПАКЕТЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ*, А.Р. САМИГУЛЛИНА**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
e-mail: *ignitev_yu@rambler.ru, **alsu_sam@rambler.ru

Как известно, теория кривых (поверхностей) второго порядка, тесно связанная с теорией квадрик в евклидовом пространстве и теорией приведения их к канонической форме с помощью преобразований движения, находит многочисленные приложения в математическом

анализе, механике и теории поля. С другой стороны, теория кривых (поверхностей) второго порядка недостаточно хорошо усваивается студентами не только естественно-научных специализаций, но даже и студентами математических отделений. Повышение качества усвоения абстрактного математического материала возможно интегрированием методов математического моделирования и оснащенной динамической визуализации в компьютерном математическом пакете Maple [1]–[4]. Для создания компьютерных моделей с требуемыми свойствами необходима разработка многопараметрических программных процедур автоматизированного исследования кривых второго порядка и их визуализации, что позволит осуществить информатизацию этого важного модуля учебной программы. Решению этого вопроса и посвящена данная статья. Заметим, что в свое время была предложена программа автоматической оснащенной визуализации эллипса по его каноническим уравнениям [1], но задача о распознавании кривых второго порядка по их каноническим уравнениям и построения их в произвольной системе координат не решалась. Отметим также, что созданная библиотека программных процедур [5]–[6] одинаково хорошо работает во всех последних версиях Maple 10–14.

Созданный пакет программ предназначен для автоматизированного полного исследования общего уравнения второго порядка на плоскости с выводом результатов исследования, как в виде таблицы, содержащей информацию о типе кривой, формулах преобразования уравнения второго порядка к каноническому виду, параметрах кривой и всех ее канонических элементов, канонического уравнения кривой, так и в виде графика кривой с изображением всех ее элементов, исходной и канонической систем координат. При этом программа автоматически определяет оптимальные параметры изображения кривой и область ее изображения. Пакет отличается от известных прикладных математических пакетов, во-первых, простотой ввода программы, которая задается одной командой лишь с помощью общего уравнения на плоскости и параметров пользователя для вывода результатов исследования, во-вторых, полным представлением результатов исследования в текстовой, аналитической и графической формах. Эти результаты выводятся в виде матрицы, снабженной необходимыми текстовыми пояснениями, определяемыми результатами исследования кривой. Пакет программ предназначен для математиков – непрофессиональных программистов, а также для системы образования РФ. Исследование кривой осуществляется с помощью трехпараметрической процедуры $\text{AnalGeo CanonF}(Eq, X, X1, s)$, где Eq – общее уравнение кривой второго порядка, X – список координат в первоначальной системе координат в формате $[x, y]$, $X1$ – список координат в новой системе координат в формате $[x1, y1]$, s – имя переменной угла поворота системы координат. При выполнении

команды выводится название типа кривой; матрица ее параметров (список собственных значений квадратичной формы, каноническое уравнение кривой, преобразование движения, приводящее к каноническому уравнению, список параметров $[c, \varepsilon, d]$ – [расстояние от центра до фокусов, эксцентриситет, расстояние от центра до директрис], $[a, b, p]$ – [значения полуосей и параметра в каноническом уравнении параболы]. На рисунках 1, 2 показано исполнение этой команды.

$$\left[\begin{array}{l}
 [\lambda_1, \lambda_2] = [3, -1] \\
 \text{Уравнение} : \xi^2 - \frac{\eta^2}{3} = 1 \\
 x' = \frac{\xi \sqrt{2}}{2} - \frac{\eta \sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \\
 y' = \frac{\xi \sqrt{2}}{2} + \frac{\eta \sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \\
 [c, \varepsilon, d] = \left[2, 2, \frac{1}{2} \right] \\
 [a, b, p] = [1, \sqrt{3}] \\
 [\cos(\alpha), \sin(\alpha)] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\
 [x_0, y_0] = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}]
 \end{array} \right.$$

Рис. 1. Вывод результатов исследования уравнения второго порядка $x^2+y^2+4*x*y-8*x-4*y+1=0$ в форме матрицы

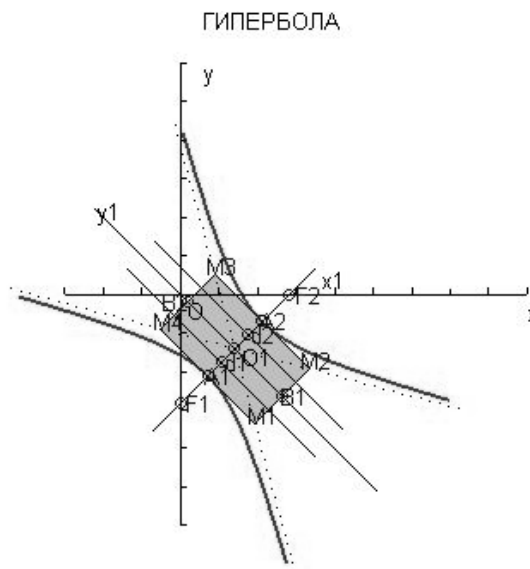


Рис. 2. Вывод результатов исследования уравнения второго порядка $x^2+y^2+4*x*y-8*x-4*y+1=0$ в форме рисунка

Из приведенных рисунков видны уникальные возможности представленного программного пакета: одной простой командой осуществляется полное исследование произвольного уравнения второго порядка на плоскости. При этом результаты представляются

одновременно в двух формах: аналитической в виде матрицы, определяющей: все элементы канонического вида квадрики, канонического движения, тип полученной геометрической фигуры и численное значение всех ее параметров, а также изображение полученной фигуры, оснащенное изображением всех ее элементов, первоначальной и канонической систем координат.

Литература

1. Проблемы информационных технологий в математическом образовании: учебное пособие / под редакцией Ю.Г. Игнатъева. – Казань: ТГГПУ, 2005. – 118 с.

2. Игнатъев Ю.Г. Пользовательские графические процедуры для создания анимационных моделей нелинейных физических процессов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2009. – Вып. 10. – С. 43–44.

3. Розакова Л.И. Методы математического и компьютерного моделирования в СКМ Maple графических и анимационных материалов для школьных курсов математики // Вестник ТГГПУ. – 2010. – № 3 (21). – С. 64–68.

4. Самигуллина А.Р. Математическое моделирование объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в системе компьютерной математики Maple. // Вестник ТГГПУ. – № 3 (21), 2010. – С.69 – 74.

5. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программное обеспечение в пакете компьютерной математики теории кривых второго порядка // Вестник ТГГПУ. – № 4 (23), 2011. – С. 53–60.

6. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А. Р. Программа автоматизированного полного исследования общего уравнения второго порядка на плоскости с выводом результатов исследования в табличном и графическом форматах всех элементов кривых, описываемых общим уравнением, включая формулы их преобразования к каноническому виду, изображения директрис, асимптот, фокусов, исходной и преобразованной систем координат, в математическом пакете Maple: св. о гос. рег. прог. для ЭВМ Рос. Фед. № 2012611664 от 14.02.12.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СТЕРЖНЕВОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ КОНСТРУКЦИИ В СИСТЕМЕ MAPLE

М.Н. КИРСАНОВ, П.Г. ЛЕОНОВ

Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва
e-mail: sqrle@mail.ru

Приводится аналитическое решение задачи статики для пространственной статически определимой упругой фермы. Для получения решения системы при произвольном числе стержней

применяется метод вырезания узлов. Используется система компьютерной математики Maple [1-4], которая существенно упрощает нахождение решения в символьном виде и помогает вывести основные формулы для произвольных размеров фермы. Для упрощения выражений (а это весьма актуально для сложных конструкций) применяем оператор simplify. Выбор системы Maple из множества аналогичных программ является произвольным. В частности, можно использовать бесплатную систему Maxima.

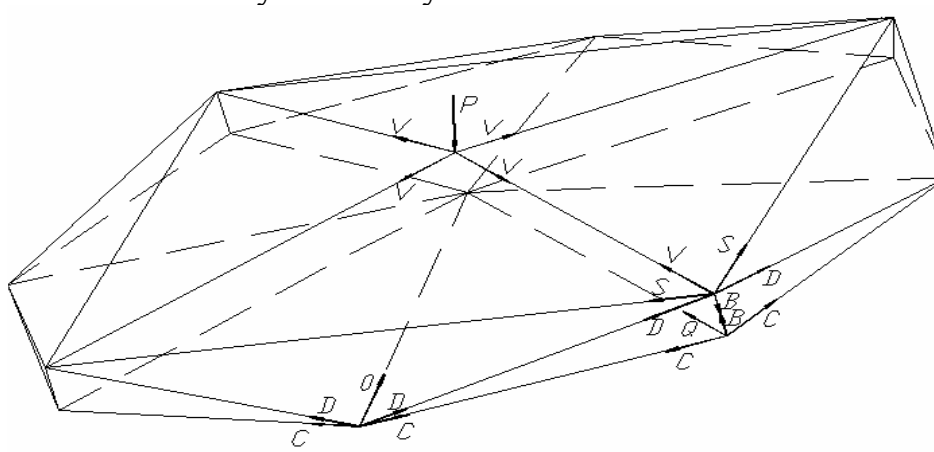


Рис. 1. Ферма при n=4

Данная ферма состоит из трёх ярусов: верхний, средний и нижний. Нижний ярус фермы вогнут внутрь и закреплён на сферическом шарнире. В верхней точке фермы – цилиндрический шарнир. Третья опора, моделируемая горизонтальным стержнем в плоскости нижнего контура, предотвращает вращение вокруг вертикальной оси. К вершине фермы приложена вертикальная сила P , в результате чего реакция опоры Z в сферическом шарнире равна ей по величине. Остальные реакции опор равны нулю. Опоры на рисунке не изображены.

Ферма содержит два контура. Усилия в стержнях верхнего контура обозначим S , нижнего – C . Контуров соединены n и $2n$ (симметричными и равными по длине) стержнями, усилия в которых обозначим B и D соответственно. Шарниры верхнего контура присоединены n стержнями с усилиями V к верхней опоре. Нижний контур присоединен к сферическому шарниру $2n$ стержнями с усилиями Q и O .

Все результаты получены в самом общем случае, но здесь для упрощения записи примем, что радиусы контуров равны, а для высот справедливо соотношение: $h_1 = h_2 = -h_3$. Введем обозначения для следующих безразмерных величин:

$$\varphi = \pi / n, \quad b = \operatorname{tg} \varphi + \sin \varphi, \quad c = \cos(\varphi(n-2) / 2), \quad d = \cos(\varphi(n-1) / 2). \quad (1)$$

Выпишем усилия в стержнях:

$$S = \frac{Pr}{2nhc}, \quad V = -\frac{P\sqrt{r^2 + h^2}}{nh}, \quad B = -\frac{Ph \sin \varphi}{nbh}, \quad D = -\frac{P \operatorname{tg} \varphi \sqrt{h^2 + 4r^2 \sin^2(\varphi / 2)}}{2nbh},$$

$$C = -\frac{Pr \sin \varphi}{2nhbd}, \quad O = \frac{Ptg \varphi \sqrt{h^2 + r^2}}{2nhbd}, \quad Q = \frac{P \sin \varphi \sqrt{h^2 + r^2}}{nhb}, \quad (2)$$

где r – радиус контура, h – высота яруса.

Прогиб (вертикальное перемещение точки приложения силы P) определяем по формуле Максвелла-Мора, принимая жесткость стержней постоянной:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{9n} \frac{S_i^2 l_i}{EF_i},$$

где S_i – усилия в стержнях от действия единичной силы, l_i – длины стержней, E – модуль упругости, F_i – площади сечений.

Имеем выражение для прогиба:

$$\Delta = \frac{P}{nh^2 EF} \left[(r^2 + h^2)^{3/2} + \frac{r^3 \sin \varphi}{2c^2} + \frac{r^3 \sin^2 \varphi \sin(\varphi/2)}{d^2 b^2} + \frac{2h^3 \sin^2 \varphi + 2(\sin^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi)(r^2 + h^2)^{3/2} + \operatorname{tg}^2 \varphi (h^2 + 4r^2 \sin^2(\varphi/2))^{3/2}}{2b^2} \right]. \quad (3)$$

Получено аналитическое решение для прогиба пространственной стержневой системы для произвольного количества стержней. Это позволяет выявлять особенности и анализировать оптимальные и предельные (по жесткости и прочности) характеристики конструкции.

Литература

1. Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple. – М.: Изд. дом МЭИ, 2011. – 208 с.
2. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК-Пресс, 2011. – 800 с.
3. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. – СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. – 644 с.
4. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 526 с.

АНАЛИЗ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ МАТЛАВ В 32- И 64-РАЗРЯДНЫХ ОПЕРАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ КОРПОРАЦИИ MICROSOFT

Д.Е. КОРОМБАЛЁВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: korombalev@yandex.ru

Среди операционных систем компании Microsoft пользователь в настоящее время может выбирать, использовать ли ему 32-разрядную или 64-разрядную операционную систему. Увеличение разрядности благоприятно сказывается на производительности приложений. В частности, программы по обработке графической, видео- и

аудиоинформации показывают значительный прирост в скорости работы – до 25 %. Однако для эффективной реализации всего потенциала 64-разрядных операционных систем и технологий EM64T/AMD64 процессоров Intel и AMD программное обеспечение также должно иметь поддержку 64-битных вычислений.

В докладе проводится сравнение быстродействия системы компьютерной математики (СКМ) MATLAB R2012a в средах Windows XP SP3 32bit и Windows 7 SP1 64bit. Данная версия пакета является новейшей на текущий момент. Для проведения исследования использовался компьютер следующей конфигурации: CPU Intel Core i3 – 540 3,06 ГГц; ОЗУ 2ГБ DDR3-1333 МГц; Chipset Intel H55M; HDD 500 ГБ SATA2.

В таблице 1 приведены данные выполнения команды *bench*. Это встроенная функция СКМ MATLAB для измерения производительности. Для каждой операционной системы команда выполнялась 5 раз, рассчитывалось среднее время выполнения, которое и приведено в таблице 1.

Таблица 1

Результаты выполнения команды Bench (функция измерения производительности)

	LU	FFT	ODE	Sparse	2-D	3-D
Время вычислений в среде Windows XP SP3 32bit (секунд)	0,1771	0,2111	0,1108	0,2113	0,292	0,5791
Время вычислений в среде Windows 7 SP1 64bit (секунд)	0,1831	0,199	0,1151	0,2118	0,3625	0,5719
Отношение времени вычислений в среде 32bit ко времени вычислений в среде 64bit	0,967	1,061	0,963	0,998	0,806	1,013

Как видно из результатов, команда *bench* не позволяет однозначно судить о приросте или снижении быстродействия. Поэтому было проведено измерение скорости вычисления значений отдельных, наиболее распространенных математических функций для первых 50 млн. натуральных чисел. Измерение времени производилось с помощью конструкций MATLAB *tic* (запускает таймер) и *toc* (возвращает время, прошедшее с момента пуска таймера) как для последовательного выполнения инструкций в цикле *for*, так и для случая применения векторизации, что способствует распараллеливанию вычислительных процессов. Каждая тестовая конструкция вызывалась 5 раз, после чего рассчитывалось среднее время ее исполнения. Результаты испытаний приведены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2

Последовательное вычисление 50 000 000 значений функций
(использование цикла for)

Функция	Время вычислений в среде Windows XP SP3 32bit (секунд)	Время вычислений в среде Windows 7 SP1 64bit (секунд)	Отношение времени вычислений в среде 32bit ко времени вычислений в среде 64bit
$y = \sin(x)$	17,900507	11,917824	1,502
$y = \cos(x)$	17,980029	11,740799	1,531
$y = \operatorname{tg}(x)$	18,815694	12,329959	1,526
$y = \lg(x)$	4,198534	3,622225	1,16
$y = \log_2(x)$	4,648316	4,058748	1,145
$y = \ln(x)$	3,507721	2,977505	1,178
$y = \operatorname{arsh}(x)$	4,38871	4,332185	1,013
$y = \operatorname{arch}(x)$	4,785452	4,31988	1,108
$y = 1/x$	1,543918	1,460169	1,057
$y = e^x$	1,926244	1,685646	1,143
$y = \sin(x) + \cos(x)$	35,44157	23,350957	1,518
$y = \sqrt{x}$	2,186961	1,906626	1,147
$y = x^2$	1,857389	1,791121	1,037
$y = 2^x$	6,831354	6,435718	1,061
$y = \Gamma(x)$	79,54178	71,427809	1,114
$\operatorname{randn}(1,1,1)$	41,392227	40,684028	1,017

Таблица 3

Вычисление 50 000 000 значений функций (использование векторизации)

Функция	Время вычислений в среде Windows XP SP3 32bit (секунд)	Время вычислений в среде Windows 7 SP1 64bit (секунд)	Отношение времени вычислений в среде 32bit ко времени вычислений в среде 64bit
$y = \sin(x)$	9,884825	5,772266	1,712
$y = \cos(x)$	10,30205	6,042971	1,705
$y = \operatorname{tg}(x)$	10,340798	6,168755	1,676
$y = \lg(x)$	1,525575	1,414939	1,078
$y = \log_2(x)$	1,688326	1,581567	1,068
$y = \ln(x)$	1,056758	1,087006	0,972
$y = \operatorname{arsh}(x)$	1,480267	1,396404	1,06
$y = \operatorname{arch}(x)$	1,458445	1,311636	1,112
$y = 1/x$	0,18331	0,18653	0,983
$y = e^x$	0,307935	0,263888	1,167

$y = \sin(x) + \cos(x)$	19,524661	11,847303	1,648
$y = \sqrt{x}$	0,380161	0,3323243	1,144
$y = x^2$	0,194637	0,189378	1,028
$y = 2^x$	2,953863	2,776307	1,064
$y = \Gamma(x)$	0,369575	0,353515	1,045
Randn(100,500,1000)	1,118099	0,960692	1,164

Из полученных данных видно, что в большинстве случаев имеет место прирост быстродействия при работе в 64-разрядной среде. Наиболее он выражен при вычислении тригонометрических функций, экспоненциальной функции, натурального логарифма при последовательном вычислении, квадратного корня, генерации массива случайных чисел. Важно отметить и тот факт, что для всех представленных в таблицах 2 и 3 функций наблюдается значительный прирост скорости вычисления их значений в случае векторного аргумента по сравнению с применением конструкции *for*, что свидетельствует об эффективном использовании параллельных вычислений СКМ MATLAB.

Литература

1. Дьяконов В.П. MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. Основы применения. Серия «Библиотека профессионала». – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 800 с.

ПОСТРОЕНИЕ УСТОЙЧИВОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.Е. КРИСТАЛИНСКИЙ, С.И. ЛОБОВА

Смоленский государственный университет, ВА ВПВО ВС РФ, г. Смоленск
e-mail: krist1940@rambler.ru

Пусть $l(y) = a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y$ – линейный дифференциальный оператор порядка n с постоянными коэффициентами. Фундаментальные функции этого оператора называются решением в обобщенных функциях следующего дифференциального уравнения

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = \Delta(x). \quad (1)$$

Фундаментальная функция линейного дифференциального оператора определяется не однозначно, а с точностью до общего

решения соответствующего однородного дифференциального уравнения.

На практике удобно бывает использовать устойчивые фундаментальные решения, то есть решения, не содержащие экспонент, которые имеют показатели с положительными вещественными частями. Для получения таких решений применяется следующий простой алгоритм:

1. Операционным методом находится общее решение уравнения (1).
2. Приравниваются нулю коэффициенты этого решения при экспонентах, содержащих показатели с положительными вещественными частями.
3. Решается полученная система линейных уравнений относительно коэффициентов при экспонентах с отрицательными вещественными частями.
4. Методом подстановки находится соответствующее решение уравнения (1).

Полученное решение является искомым.

Рассмотрим следующий пример. Найти устойчивое фундаментальное решение следующего линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y.$$

Решение в системе Mathematica приводится ниже.

```

Expand[(p-1)*(p-2)*(p+1)*(p+2)]
U=y''''[x] - 5*y''[x]+4*y[x]-DiracDelta[x]
y[0]=a; y'[0]=b; y''[0]=c; y'''[0]=d;
L=LaplaceTransform[U,x,p]
Y=Solve[L==0, LaplaceTransform[y[x],x,p]]
Y= LaplaceTransform[y[x],x,p]/.Y;
y1[x_]=InverseLaplaceTransform[Y,p,x]
u1=1/6*(-1+4a+4b-c-d); u2=1/12*(-1-2a-b+2c+d);
r=Solve[{u1==0,u2==0},{a,b,c,d}]
y1[x_]=y1[x]/.r
FullSimplify[%]
Expand[%]
-1/4 e^{-2x} - 1/4 c e^{-2x} - 1/4 d e^{-2x} + e^{-x} + 2c e^{-x} + d e^{-x}.

```

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATHCAD ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ НЕЧЕТКОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДАННЫХ

М.Ю. ЛЕБЕДЕВА

Филиал ФГБОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: marilieb@yandex.ru

Рассматривается традиционная математическая задача при оценке поведения сложных систем – нахождение аналитического соотношения, связывающего численные значения набора факторов, определяющих условия и режим функционирования системы, со значением результирующего показателя этой системы.

Такие соотношения, называемые функцией отклика, удобно представить в виде полинома Колмогорова-Габора [1].

Классическая задача регрессионного анализа состоит в вычислении коэффициентов уравнений регрессии, определяющих взаимосвязь зависимой переменной и множества независимых переменных в рассматриваемой точке.

Стандартный подход усложняется, если значения результирующего показателя оцениваются нечетко [2, 3]. При этом, оценки параметров уравнения регрессии также будут нечеткими числами. В этом случае при построения множественной регрессионной зависимости можно воспользоваться формулировкой задачи линейного программирования в следующем виде [4]:

$$S = N \cdot c_0 + \sum_{i=1}^N (c_1 |X_{i1}| + \dots + c_k |X_{ik}|) \rightarrow \min. \quad (1)$$

При ограничениях:

$$c_0 \geq 0, c_1 \geq 0, \dots, c_k \geq 0,$$

$$(m_0 - c_0) + (m_1 - c_1)X_{i1} + \dots + (m_k - c_k)X_{ik} \leq Y_{i,H}, i = 1 \div N, \quad (2)$$

$$(m_0 + c_0) + (m_1 + c_1)X_{i1} + \dots + (m_k + c_k)X_{ik} \geq Y_{i,B}, i = 1 \div N, \quad (3)$$

где $Y_{i,H}$ и $Y_{i,B}$ – нижние и верхние пределы для каждого нечеткого значения, соответственно, m_0, m_1, \dots, m_k – нечеткие центры коэффициентов регрессии, c_0, c_1, \dots, c_k – половины нечеткого основания коэффициентов регрессии

Целевая функция по выражению (1) является результатом минимизации полного нечеткого разброса.

Ограничения по выражениям (2) и (3) используются для заключения всех наблюдаемых нечетких данных в пределах нечеткой регрессионной модели.

В качестве иллюстрационного примера построения нечеткой регрессионной модели интервальных данных рассмотрим типичную задачу анализа экономической деятельности организации методами математической статистики. На основе исходных данных определяется зависимость прибыли (Y) от величины оборотных средств (X_1) и стоимости основных фондов (X_2) (табл. 1).

Таблица 1

Исходные данные

Организация	Величина оборотных средств, млн. руб., X_1	Стоимость основных фондов, млн. руб., X_2	Прибыль, млн. руб., Y	
			Нижняя граница	Верхняя граница
1	129	510	188	193,95
2	64	190	78	78,7
3	69	240	89,4	93
4	87	470	152	159,9
5	47	110	54,1	55
6	102	420	161	162,9

Задачу линейного программирования для построения множественной регрессионной зависимости сформулируем в следующем виде:

$$S = 6 \cdot c_0 + \sum_{i=1}^6 (c_1 \cdot X_{i1} + c_2 \cdot X_{i2}) \rightarrow \min. \quad (4)$$

При ограничениях:

$$c_0 \geq 0, c_1 \geq 0, c_2 \geq 0,$$

$$(m_0 - c_0) + (m_1 - c_1)X_{i1} + (m_2 - c_2)X_{i2} \leq Y_{i,H}, i = 1 \div 6, \quad (5)$$

$$(m_0 + c_0) + (m_1 + c_1)X_{i1} + (m_2 + c_2)X_{i2} \geq Y_{i,B}, i = 1 \div 6. \quad (6)$$

Листинг программы для решения задачи с помощью системы компьютерной математики MathCAD приведен на рисунке 1. Тождественные результаты были получены также в пакете электронных таблиц Excel с помощью инструмента «Поиск решения».

Таким образом, нечеткая регрессионная модель для верхней и нижней границы прибыли предприятия на основе интервальных данных с возможностью прогноза по нему имеет вид:

$$\left[\begin{matrix} y_k \\ y_k^- \end{matrix} \right] = [0.544 \pm 0.064] \cdot X_{1,k} + [0.237 \pm 0.0027] \cdot X_{2,k}, k = 1(1)6.$$

```

m0 := 0.1      c0 := 0
m1 := 0.6      c1 := 0.1
m2 := 0.23     c2 := 0.03

i := 1..6

X1i :=      X2i :=      Yнизi :=      Yверхi :=


|     |
|-----|
| 129 |
| 64  |
| 69  |
| 87  |
| 47  |
| 102 |



|     |
|-----|
| 510 |
| 190 |
| 240 |
| 470 |
| 110 |
| 420 |



|      |
|------|
| 188  |
| 78   |
| 89.4 |
| 152  |
| 54.1 |
| 161  |



|        |
|--------|
| 193.95 |
| 78.7   |
| 93     |
| 159.9  |
| 55     |
| 162.9  |



R(m0, c0, m1, c1, m2, c2) := 6·c0 + c1·∑i=16 X1i + c2·∑i=16 X2i

R(m0, c0, m1, c1, m2, c2) = 108

Given
c0 > 0      c1 > 0      c2 > 0
m0 - c0 + (m1 - c1)·129 + (m2 - c2)·510 ≤ 188
m0 - c0 + (m1 - c1)·64 + (m2 - c2)·190 ≤ 78
m0 - c0 + (m1 - c1)·69 + (m2 - c2)·240 ≤ 89.4
m0 - c0 + (m1 - c1)·87 + (m2 - c2)·470 ≤ 152
m0 - c0 + (m1 - c1)·47 + (m2 - c2)·110 ≤ 54.1
m0 - c0 + (m1 - c1)·102 + (m2 - c2)·420 ≤ 161
m0 + c0 + (m1 + c1)·129 + (m2 + c2)·510 ≥ 193.95
m0 + c0 + (m1 + c1)·64 + (m2 + c2)·190 ≥ 78.7
m0 + c0 + (m1 + c1)·69 + (m2 + c2)·240 ≥ 93
m0 + c0 + (m1 + c1)·87 + (m2 + c2)·470 ≥ 159.9
m0 + c0 + (m1 + c1)·47 + (m2 + c2)·110 ≥ 55
m0 + c0 + (m1 + c1)·102 + (m2 + c2)·420 ≥ 162.9

⎛ m0 ⎞
⎛ c0 ⎞
⎛ m1 ⎞
⎛ c1 ⎞
⎛ m2 ⎞
⎛ c2 ⎞
:= Minimize(R, m0, c0, m1, c1, m2, c2)
⎛ m0 ⎞
⎛ c0 ⎞
⎛ m1 ⎞
⎛ c1 ⎞
⎛ m2 ⎞
⎛ c2 ⎞
= ⎛ 0 ⎞
⎛ 0 ⎞
⎛ 0.544 ⎞
⎛ 0.064 ⎞
⎛ 0.237 ⎞
⎛ 2.763 × 10-3 ⎞

R(m0, c0, m1, c1, m2, c2) = 37.387

```

Рис. 1. Листинг программы в MathCAD

Литература

1. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применение / пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 547 с.
2. Серая О.В., Каткова Т.И., Бачкир Л.В. Оценивание состояния с использованием нечеткой регрессии // Вісник НТУ «КПІ». – Київ: ВЕК+. – 2008. – № 49. – С. 140 – 145.
3. Раскин Л.Г., Серая О.В. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. – Харьков: Парус, 2008. – 353 с.
4. Прикладной интервальный анализ / Жолен Л. [и др.]. – Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 468 с.

РЕАЛИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ПО ТЕМЕ «ДВИЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВОГО ПРОСТРАНСТВА» В ПАКЕТЕ «MAPLE» И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ «MAPLET»

А.А. ОСИПОВ

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
e-mail: osipov.and2012@yandex.ru

Поставленная задача включает в себя изучение и наглядное представление движения фигуры как на плоскости, так и в пространстве. Рассмотрим каждый вид движения отдельно.

Сначала рассмотрим движение графика, представленное на плоскости. На входе мы имеем функцию, заданную параметрически, угол поворота и вектор переноса. Для того чтобы получить конечную функцию, к которой уже применены поворот и перенос, воспользуемся следующими формулами:

$$x_1(t) = x(t) \cos \varphi + y(t) \sin \varphi + r_1, \quad (1)$$

$$y_1(t) = -x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi + r_2. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) $x(t)$ и $y(t)$ являются функциями, зависящими от переменной t . А полученные в результате применения этих двух формул функции $x_1(t)$ и $y_1(t)$, являются результирующими функциями для построения графика, полученного при движении фигуры.

$[r_1, r_2]$ – вектор перемещения фигуры вдоль координатных осей.

φ – угол поворота фигуры относительно координатных осей.

Фигуры, исходная и получившаяся при движении, строятся на плоскости в прямоугольной системе координат в визуально удобном для пользователя представлении.

Теперь рассмотрим более сложный вид движения фигуры – движение в пространстве. Этот вид движения состоит из перемещения фигуры вдоль каждой из трех координатных осей и поворота на заданный угол относительно каждой оси.

На входе мы имеем функцию, зависящую от двух переменных, список углов поворота относительно каждой из трех координатных осей и вектор движения, задающий перемещение вдоль каждой координатной оси.

Применяем для движения фигуры следующие три формулы:

$$x_1(t) = \cos \psi (x(t) \cos \varphi - y(t) \sin \varphi) - \sin \psi (\cos \theta (x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi) - z(t) \sin \theta) + r_1, \quad (4)$$

$$y_1(t) = \sin \psi (x(t) \cos \varphi - y(t) \sin \varphi) + \cos \psi (\cos \theta (x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi) - z(t) \sin \theta) + r_2, \quad (5)$$

$$z_1(t) = \sin \theta (x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi) + z(t) \cos \theta + r_3. \quad (6)$$

В формулах (4), (5) и (6) вектор $[r_1, r_2, r_3]$ является вектором перемещения заданной функции вдоль каждой из трех координатных осей. Список $[\varphi, \psi, \theta]$ выступает как список углов поворота фигуры относительно каждой координатной оси.

В результате выполнения программы мы получили новую фигуру, образованную в результате движения и поворота исходной фигуры с помощью формул (4), (5) и (6). Получившаяся и исходная фигуры также представлены в удобном для пользователя интерфейсе.

Литература

1. Кирсанов М.Н. Maple 13 и Maple. Решения задач механики. – М., 2010.– 503 с.
2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.

ИНТЕГРАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MATLAB+SIMULINK С СИСТЕМОЙ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ OrCAD 16.5

А.А. ПЕНЬКОВ, Н.Н. СТРОЕВ, К.Н. СТРОЕВ

Филиал ФГБОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: aapenkov@mail.ru

При моделировании различных электротехнических и электронных устройств часто оказывается, что часть модели требуется описать на схемотехническом уровне, а часть – удобно представить на функциональном уровне, в виде математических уравнений и алгоритмов (например, силовая часть источника питания и его система управления). Также нередко встречается ситуация, когда отдельный компонент модели имеет математическое описание, которое трудно или нецелесообразно реализовывать на схемотехническом уровне. Для решения задачи анализа таких систем и устройств целесообразно использовать совместное моделирование средствами математического пакета MATLAB+Simulink и системы схемотехнического проектирования OrCAD, которое осуществляется с помощью специального программного интерфейса PSpice SLPS Interface.

PSpice SLPS Interface – это средство для связи PSpice и среды моделирования MATLAB+Simulink, входящее в состав системы OrCAD 16.5. PSpice – основанный на языке SPICE симулятор для моделирования электрических и электронных схем, а пакет MATLAB традиционно используется для проектирования на системном уровне [1]. PSpice SLPS Interface интегрирует два средства моделирования для

проведения моделирования систем любого вида с электронными подсистемами.

Схемотехническая модель PSpice теперь может быть включена в функциональную модель Simulink. С другой стороны, PSpice SLPS Interface также позволяет в схеме PSpice использовать модели компонентов, работа которых описывается и моделируется с помощью MATLAB и Simulink. В результате, становится возможным проводить совместное моделирование разнородных электрических и механических систем. Такая среда совместного моделирования позволяет исследовать целые системы с более детальными моделями компонентов.

Процесс установки интерфейса заключается в задании путей поиска в пакете MATLAB. В командной строке MATLAB запускается m-файл `slpslib` из соответствующей папки установленного пакета OrCAD, который добавляет необходимые записи в список путей MATLAB. Это может быть выполнено и вручную с помощью команды меню Set Path. Для запуска системы интерфейса в последующем в командной строке MATLAB вводится команды `slpslib`, загружающая дополнительную библиотеку для Simulink с единственным блоком SLPS.

При совместном моделировании необходимо задать две части модели в среде OrCAD и MATLAB+Simulink соответственно. В среде OrCAD в схемном редакторе, например, OrCad Capture создается схема электронной части модели. Обязательно задание вида анализа и создание текстового схемного файла `.cir`. CIR файл (с расширением `.cir`) содержит информацию о настройках анализа PSpice и список соединений (`netlist`). CIR файл используется при задании схемы PSpice в блоке SLPS, которая будет моделироваться в PSpice.

В документации на систему интерфейса не указана необходимая настройка системы OrCAD, без которой невозможен запуск ни демонстрационных моделей, входящих в состав поставки, ни моделей устройств, созданных пользователем. Система интерфейса не может найти библиотеки компонентов, использованных в файлах проекта OrCAD, так как по умолчанию в настройках Simulating Settings схемного редактора OrCAD используется формат указания библиотек без полного пути к файлам. В CIR файлах директива подключения библиотек имеет в таком случае вид: `.lib "name_library.lib"`. Файл проекта при этом работоспособен в среде Pspice, но не может быть использован системой интерфейса – выводится сообщение об ошибке. В меню Simulating Settings следует указать полный путь к библиотекам, используемым в проекте OrCAD. С такой настройкой необходимо перезапустить все демонстрационные файлы, обновив CIR файлы. После этого директива подключения библиотек имеет вид, подобный следующему:

```
.lib "C:\Cadence\SPB_16.5\tools\pspice\library\nom.lib".
```

В Simulink задается функциональная часть модели, которая должна содержать один блок SLPS интерфейса с OrCAD. Параметры блока SLPS определяют настройки совместного моделирования, сам процесс расчетов также запускается из среды Simulink. Меню настроек блока SLPS позволяют выбрать источники тока и напряжения в схеме PSpice, для которых из среды Simulink будут передаваться значения токов и напряжений, а также указать токи, напряжения и мощности цепей, которые будут переданы из схемы в Simulink. Имеются средства управления сходимостью расчета в PSpice. Возможно просматривать результаты моделирования как в Simulink, так и в PSpice. При расчете PSpice создает файл данных .dat, который является входным для просмотра результатов расчетов. В Simulink невозможно увидеть результаты моделирования с шагом меньшим, чем тот был задан в расчётном модуле (Solver). Поэтому для более подробного наблюдения расчетов, выполненных PSpice с меньшим шагом, следует использовать именно PSpice. При анализе схем с обратной связью происходит задержка на один шаг моделирования Simulink между входом и выходом блока SLPS. Поэтому шаг моделирования в Simulink должен выбираться достаточно малым.

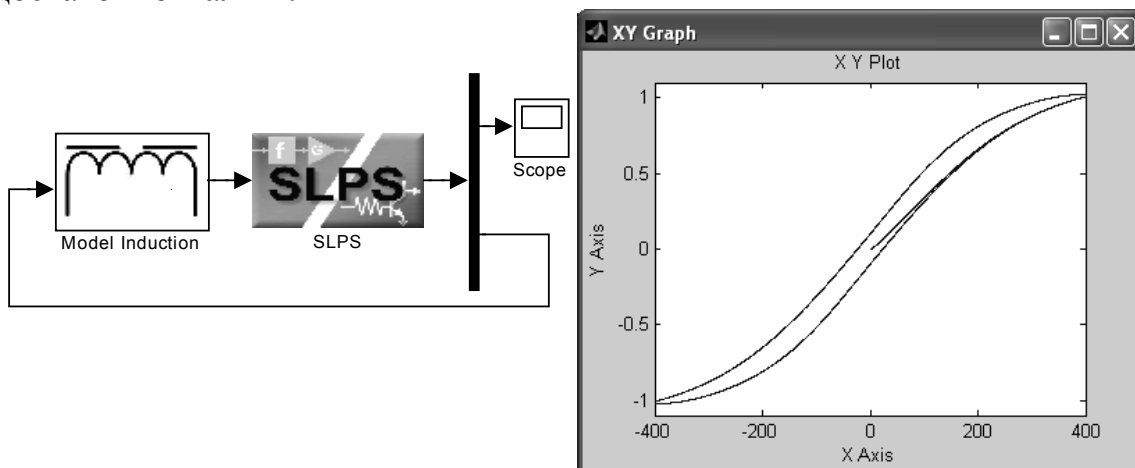


Рис. 1. Нелинейная модель катушки индуктивности в Simulink и петля перемагничивания

Одной из сложных задач, не решенных удовлетворительно в специализированных системах схемотехнического анализа и проектирования (OrCAD и др.), является моделирование схем с учетом частотных свойств электромагнитных компонентов, а точнее свойств магнитных материалов их сердечников. В работе [2] была получена модифицированная модель динамических процессов перемагничивания ферромагнетиков Джилса-Атертона, учитывающая изменение петли гистерезиса от частоты. Модель была реализована в среде Matlab+Simulink с использованием аппарата S-функций, что не позволяло применить её как макромоделю в системах схемотехнического

анализа. Интерфейс PSpice SLPS Interface позволяет использовать её при исследовании схем в среде OrCAD (рис. 1).

При совместном использовании двух пакетов удастся решать задачи, которые ранее вызывали сложности и у пользователей MATLAB+Simulink, и у пользователей OrCAD. Таким образом, применение для решения инженерных задач интегральных возможностей обоих пакетов одновременно имеет большую перспективу.

Литература

1. Дьяконов В.П., Пеньков А.А. Matlab и Simulink в электроэнергетике: справочник. – М.: Горячая линия-Телеком, 2009. – 816 с.

2. Пеньков А.А., Строев К.Н., Строев Н.Н. Моделирование в среде Simulink магнитных элементов с учётом частотных свойств материалов // Информационные технологии и электроника в образовании, науке и управлении: сб. научн. трудов. – Смоленск: Русич, 2003. – С. 73–80.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

О.А. САЧКОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
e-mail: sachkova.olga@mail.ru

В работе описаны основные принципы математического моделирования и программные процедуры автоматизированного нахождения общего решения однородного линейного дифференциального уравнения произвольного порядка с заданными пользователем именами произвольных констант в системе компьютерной математики Maple. При этом рассмотрены несколько форм оснащенной динамической реализации: анимированные фазовые траектории, динамические гистограммы и анимация цветом.

Графическая визуализация излагаемого материала с помощью системы компьютерной математики Maple, и особенно динамическая визуализация, способствует качественному усвоению абстрактного материала, а также более глубокому пониманию изучаемых объектов и явлений. В работе приведены примеры различных форм оснащенной динамической визуализации решения дифференциального уравнения.

Далее представлена иллюстрация визуализации решения дифференциального уравнения $y'' - 0,2y' + 10y - 74 \sin 3x = 0$ с начальными

условиями $y(0) = 6, y'(0) = 3$ в виде анимации фазовой траектории функции (рис. 1):

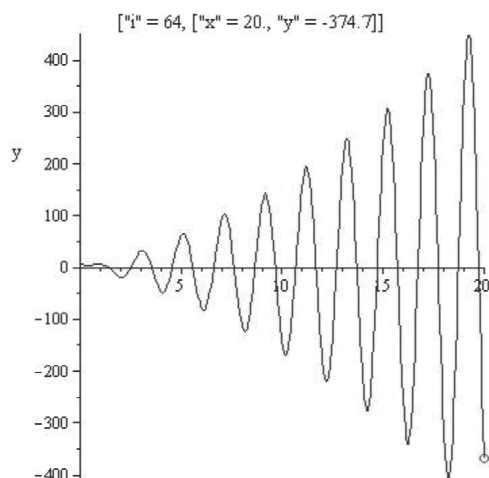


Рис. 1. Вывод решения дифференциального уравнения в виде анимации функции

Динамическая визуализация решения дифференциального уравнения в форме гистограммы может быть реализована в сочетании с анимацией цветом для большей наглядности. На рисунке 2 представлена графическая интерпретация решения дифференциального уравнения $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ с начальными условиями $y(2) = 2, y'(2) = 4$ на интервале $[0,3]$.

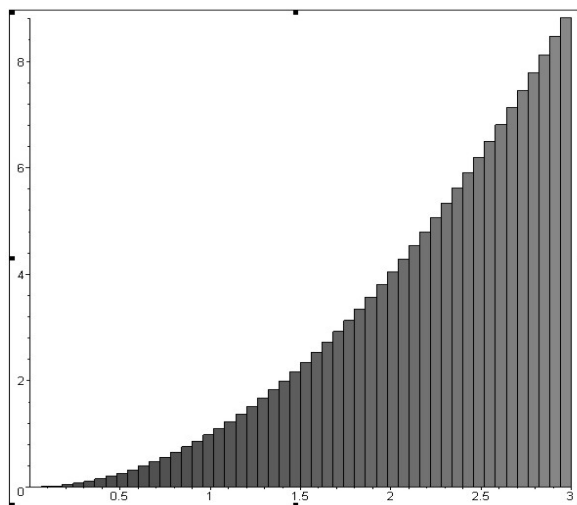


Рис. 2. Вывод решения дифференциального уравнения в виде динамической гистограммы изменения цвета

Таким образом, различные способы динамической визуализации с помощью системы компьютерной математики Maple позволяют наглядно представить решения дифференциальных уравнений, а следовательно, эффективнее усвоить данный раздел высшей математики.

Литература

1. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании – М.: СОЛОН-Пресс, 2006.

2. Сачкова О.А. Программные и графические процедуры по теме «Векторная алгебра» // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. – Вып. 11. – С. 28–30.

3. Сачкова О.А. Программирование объектов векторной алгебры и стереометрии в системе компьютерной математики Maple // Вестник ТГГПУ. – № 3 (21). – 2010. – С. 75–78.

4. Сачкова О.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения для нематематических специальностей в пакете Maple // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XII международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. – Вып. 12. – С. 316–317.

РЕАЛИЗАЦИЯ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ДЕЛОВЫХ ИГР И ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATHCAD

А.Г. СУХАНОВА, М.Б. СУХАНОВ

Северо-Западный институт – филиал Российской академии народного хозяйства и
государственной службы при Президенте РФ,
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (ТУ),
г. Санкт-Петербург
e-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru

Подготовка магистров финансового профиля предполагает использование компетентностного подхода, который возможен только с использованием в учебном процессе активных и интерактивных методов обучения. В настоящее время выпускники экономических вузов мало применяют математические методы в своей работе. Существующие интерактивные методы обучения, как правило, не предполагают математический анализ экономических проблем.

Для реализации компетентностного подхода в данной работе предлагается совместное использование в учебном процессе компьютерных деловых игр (КДИ), в частности, КДИ «Никсдорф Дельта», и экономических расчетов в системах компьютерной математики (СКМ). При этом управленческие решения в играх принимаются с учётом сделанных экономических расчётов.

Компьютерная деловая игра (КДИ) – это учебно-тренинговая компьютерная *система*, построенная на основе *математической*

модели, описывающей хозяйственный процесс и иные приближенные к реальности ситуации по определенным правилам.

Целью участников игры «Никсдорф Дельта» является разработка стратегии развития предприятия и ее последовательная реализация в условиях компьютерной модели. Как и в любой игре, в КДИ «Никсдорф Дельта» есть своя цель-оценка. Для этого используется рейтинг, который в итоге позволяет оценить правильность принятых управленческих решений. Рейтинг определяется исходя из значения интегрального показателя, который состоит из 17 показателей.

На рисунке 1 приведены управленческие решения, которые необходимо принимать руководителю виртуального предприятия в «Никсдорф Дельта».



Рис. 1. Решения, принимаемые руководителем виртуального предприятия в КДИ «Никсдорф Дельта»

В работе рассмотрена ситуация, когда в игре производятся два вида продукта. На рисунке 2 представлено окно КДИ «Никсдорф Дельта», в котором осуществляется планирование объемов производства Продукта 1 и Продукта 2 на период.

Рассмотрим решение задачи максимизации валовой прибыли путем моделирования плана выпуска продукции для получения наибольшей стоимости в компьютерной математической системе Mathcad, что показано на рисунке 3. Данные о наличии оборудования на рисунке 2 используются в расчете на рисунке 3 – вид 1 оборудования в наличии 5 шт., вид 2 в наличии 5 шт., вид 3 оборудования в наличии 3 шт.

		Продукт 1	Продукт 2		
<u>План на период</u>		12,500	4,000	млн.шт.	
<u>Ставка эксплчт. расходов</u>		43	промилле	<u>Ставка соц. расходов</u> 44 %	
<u>Оборудование</u>		(млн.ед.мощности)		<u>Потребность</u>	<u>Загрузка</u>
				(шт.)	(%)
<u>Вид 1</u>		6,221	7,925	5	94,31
<u>Вид 2</u>		2,488	1,981	5	89,39
<u>Вид 3</u>		0,311	0,396	3	78,59
				<u>Наличие</u>	<u>Утилизация</u>
				(шт.)	(№)
				5	0
				5	0
				3	0
<u>Сырье</u>		(млн.шт.)		<u>Потребность</u>	<u>Наличие</u>
					<u>Закупка</u>
<u>Тип 1</u>		12,441	11,888	24,330	5,000
<u>Тип 2</u>		87,090	19,814	106,904	50,000
					20
					57
<u>Персонал</u>		(тыс. человек)		<u>Потребность</u>	<u>Наличие</u>
					<u>Найм /Увольнение</u>
<u>Квалифицированные</u>		0,083	0,198	0,281	0,352
<u>Вспомогательные</u>		0,664	1,090	1,753	1,435
					679
				Не подлежат увольнению !!!	
<u>Издержки на осн.и вспом.материалы</u>		10,183	млн.руб.		
<u>Аккордная зарплата и социальные расходы</u>		12,629	млн.руб.		
<u>+ Расстановка кадров</u>		5,423	млн.руб.		
<u>= Затраты на персонал</u>		18,052	млн.руб.		
				<input type="button" value="Рассчитать"/>	

Рис. 2. Планирование объемов производства продукции в КДИ «Никсдорф Дельта»

На рисунке 3 показан упрощенный вариант расчета оптимальных объемов производства с ограничениями на количество имеющихся в наличии станков [2], так как по условиям игры при дозакупке новых станков они поступают на предприятие только в следующем периоде. При установлении таких ограничений необходимо учитывать коэффициенты производительности оборудования и максимальную мощность оборудования, которые установлены в параметрах игры [1]. Ограничения на сырье и персонал в упрощенном варианте можно не вводить ввиду того, что сырье можно дозакупить в данном периоде, а персонал можно нанять или уволить.

Таким образом, как показывает рисунок 3, для того, чтобы получить наибольшую стоимость продукции в 90 млн. руб. в случае реализации полного ее объема, необходимо производство Продукта 1 в объеме 0,677 млн. шт. и производство Продукта 2 в объеме 7,331 млн. шт. в условиях ограничений по имеющимся станкам. Из рисунка 3 также видно, что выгодно производить второй продукт, так как он идет по большей цене.

Но чтобы не потерять долю рынка по первому продукту, необходимо его производство не ниже некоторого объема, который мы также можем задать в ограничениях.

Целевая функция

Цена(Продукт1 , Продукт2) := 3·Продукт1 + 12·Продукт2

Начальные приближения **Продукт1 := 1 Продукт2 := 1**

Целевая функция до оптимизации

Цена(Продукт1 , Продукт2) = 15

Given Ограничения по ресурсам: станки

Продукт1 > 0 Продукт2 > 0

$$\frac{(0.5 \cdot \text{Продукт1} + 2 \cdot \text{Продукт2})}{3} \leq 5$$

$$\frac{(0.2 \cdot \text{Продукт1} + 0.5 \cdot \text{Продукт2})}{1} \leq 5$$

$$\frac{(0.025 \cdot \text{Продукт1} + 0.1 \cdot \text{Продукт2})}{0.3} \leq 3$$

$\begin{pmatrix} \text{Продукт1} \\ \text{Продукт2} \end{pmatrix} := \text{Maximize}(\text{Цена}, \text{Продукт1}, \text{Продукт2})$

$\begin{pmatrix} \text{Продукт1} \\ \text{Продукт2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.677 \\ 7.331 \end{pmatrix}$

Целевая функция после оптимизации

Цена(Продукт1 , Продукт2) = 90

Рис. 3. Планирование выпуска продукции с целью получения наибольшей стоимости (решение в Mathcad)

Интерактивные обучающие игры и экономические расчеты в СКМ целесообразно совместно использовать в подготовке выпускников вузов финансово-экономического профиля.

Литература

1. Рудая И.Л. Стратегическая деловая игра «Никсдорф Дельта»: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 280 с.
2. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 368 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРОДООХРАННЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATHCAD

В.А. ХОЛОДНОВ, Р.Ю. КУЛИШЕНКО

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (ТУ),
г. Санкт-Петербург
e-mail: holodnow@yandex.ru

Объектом исследования является модель одной ячейки реки, в которой учитывается экологическая обстановка вблизи очистных сооружений. На рисунке 1 представлена блок-схема объекта исследования.

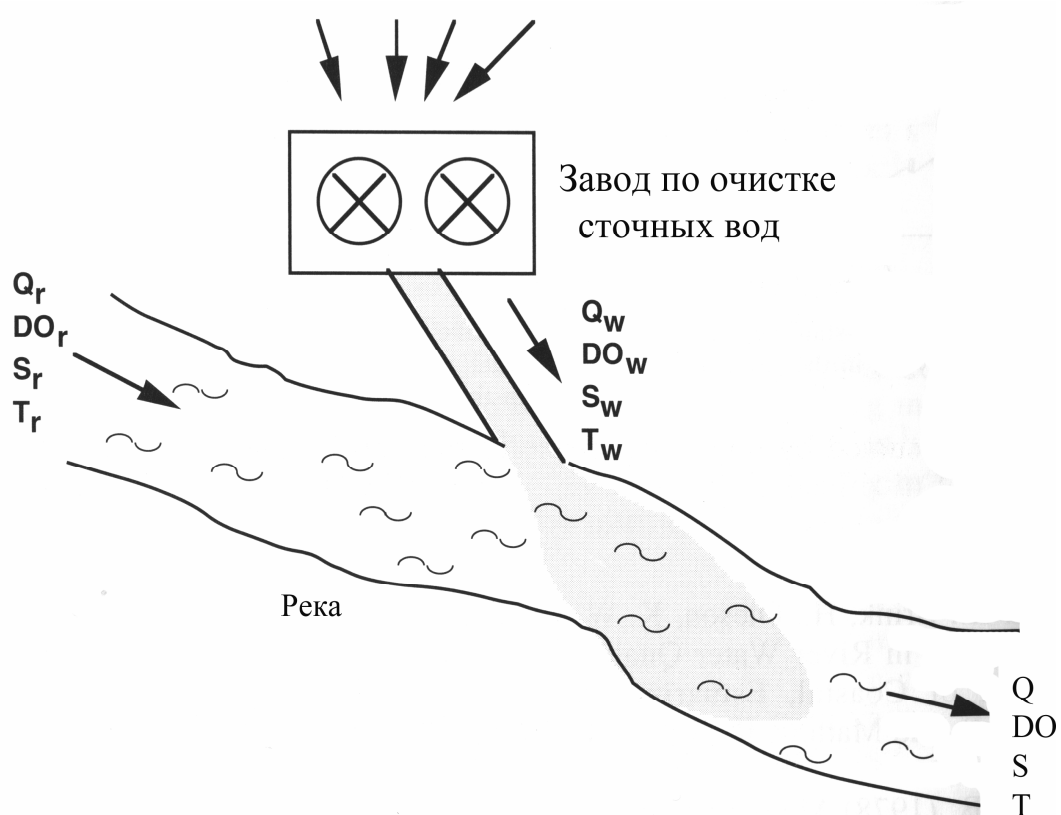


Рис. 1. Сброс очистных сооружений сточных вод в реку

Сточные воды очистных сооружений отличаются от речной воды температурой, биохимической потребностью кислорода – БПК (S)-показатель качества воды, характеризующий суммарное содержание в воде органических веществ, концентрациями растворенного кислорода – РК (DO) и нитратов (N).

Математическая модель рассматриваемого процесса состоит из следующих уравнений [1]. Общий баланс для объемного расхода:

$$Q = Q_r + Q_w. \quad (1)$$

Изменение концентраций РК (DO) , БПК(S) и нитратов (N) во времени (и по длине) в рассматриваемой ячейке смешения реки можно представить в следующем виде:

$$DO = \frac{DO_r Q_r + DO_w Q_w}{Q}, \quad (2)$$

$$S = \frac{S_r Q_r + S_w Q_w}{Q}, \quad (3)$$

$$T = \frac{T_r Q_r + T_w Q_w}{Q}, \quad (4)$$

$$N = \frac{N_r Q_r + N_w Q_w}{Q}. \quad (5)$$

Дефицит растворенного кислорода ε может быть определен как разница между насыщенной и фактической его концентрациями:

$$\varepsilon = DO_{нас.} - DO. \quad (6)$$

Насыщенная концентрация растворенного кислорода $O_{нас}$ зависит от температуры T (0С):

$$DO_{нас.} = 14.652 - 0.41 * T + 0.008 * T^2. \quad (7)$$

Кислород потребляется микроорганизмами и попадает в реку в результате предварительной аэрации поверхности. Скорость нитрификации и БПК предполагают первый порядок по концентрации со значениями констант скоростей, K_n и K_s , которые зависят от температуры.

Математическое описание рассматриваемого процесса можно представить в виде системы дифференциальных уравнений (8)–(10):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a \cdot K_n \cdot N + K_s \cdot S - K_a \cdot \varepsilon, \quad (8)$$

$$\frac{dN}{dt} = -K_n \cdot N, \quad (9)$$

$$\frac{dS}{dt} = -K_s \cdot S. \quad (10)$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (8)–(10) определяются по формулам (1)–(6).

Параметры математического описания даются формулами (11)–(14):

$$K_n = K_{n20} 1.07^{(T-20)}, \quad (11)$$

$$K_s = K_{s20} 1.05^{(T-20)}, \quad (12)$$

$$K_{a20} = 2.26 \cdot v \cdot d^{-0.667}, \quad (13)$$

$$K_a = \frac{K_{a20}}{24} e^{0.024(T-20)}. \quad (14)$$

Таблица 1

Список условных обозначений

ε	Дефицит кислорода	мг
Q_r	Расход потока воды в реке	м ³ /час
Q_w	Расход сточной воды	м ³ /час
Q	Общий расход воды	м ³ /час
a	Стехиометрический коэффициент	-
DO	Концентрация растворенного кислорода	мг
$DO_{нас}$	Насыщенная концентрация растворенного кислорода	мг
N	Концентрация нитратов	мг/л
S	Концентрация биохимической потребности кислорода	мг/л
Ka	Коэффициент реэрации	час ⁻¹
Kn	Константа скорости нитрификации	час ⁻¹
Ks	Константа скорости биодеградации	час ⁻¹
t	Время	час
T	Температура	°C
v	Линейная скорость потока	м/с
b	Ширина участка реки	м
d	Глубина участка реки	м
z	Расстояние вниз по течению реки	км

Линейная скорость потока определяется формулой

$$v = \frac{Q}{3600 d * b}. \quad (15)$$

Расстояние вниз по течению реки определяется по формуле:

$$z = 3.6 v * t. \quad (16)$$

На рисунках 2, 3 представлены некоторые результаты моделирования рассматриваемого процесса с помощью системы компьютерной математики MathCAD [2].

```

Река
Qr := 1900   DOr := 8   Tr := 22   Nr := 0.1   Sr := 3

Стоки
Qw := 500   DOW := 2   Tw := 25   Nw := 10   Sw := 40

Исходные данные
Ks20 := 0.01   Kn20 := 0.005   a := 4.3
d := 2.5       b := 1       Q := Qr + Qw

Результаты вычислений

DO := (Qr·DOr + Qw·DOW) / Q   S := (Qr·Sr + Qw·Sw) / Q

T := (Qr·Tr + Qw·Tw) / Q   N := (Qr·Nr + Qw·Nw) / Q

DOнас := 14.652 - 0.41·T + 0.008·T2   v := Q / (3600·d·b)

Ka20 := 2.26·v / d0.667   Ks := Ks20·1.05(T-20)

Kn := Kn20·1.07(T-20)   Ka := Ka20 / 24 · exp[0.024·(T - 20)]

C := ( DOнас - DO
      N
      S )   D(t, C) := ( a·Kn·C2 + Ks·C3 - Ka·C1
                       -Kn·C2
                       -Ks·C3 )

Z := Rkadapt(C, 0, 500, 1000, D)

t := Z(1)   DO := DOнас - Z(2)   Nitrati := Z(3)   БПК := Z(4)

```

Рис. 2. Листинг программы моделирования с помощью MathCAD влияния сброса сточных вод очистных сооружений на экологию реки

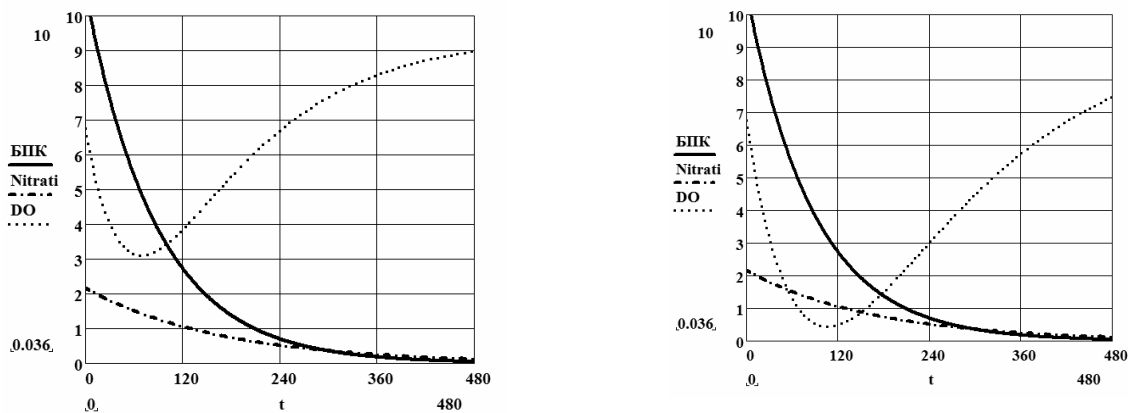


Рис. 3. Динамика изменения концентраций БПК, нитратов и растворенного кислорода за 20 суток при номинальных значениях параметров – слева и при d=2.5, b=2 – справа

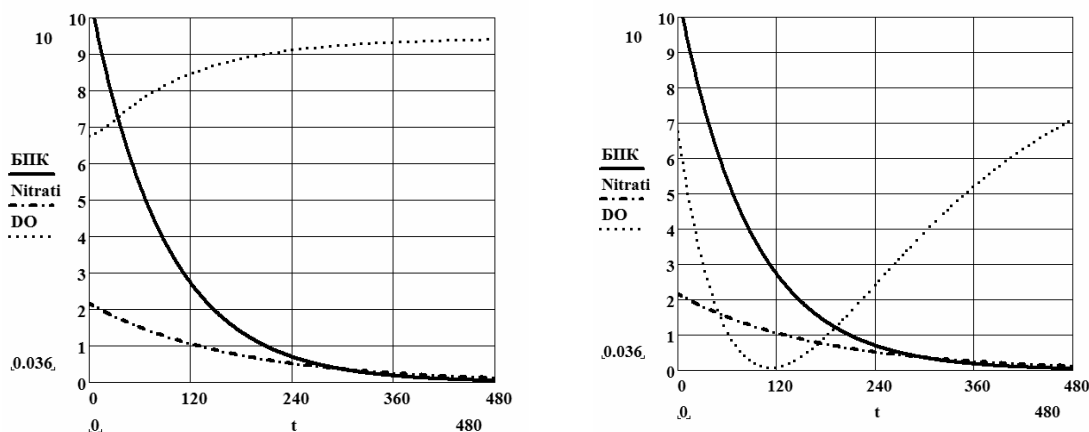


Рис. 4. Влияние размеров реки на динамику изменения концентраций БПК, нитратов и растворенного кислорода за 20 суток при $d=1$, $b=1$ – слева и $d=4$, $b=1$ – справа

Литература

1. V.Snape Jonatan [et al]. – Dynamics of Environmental Bioprocesses. Modelling and Simulation. Weinheim–New York, Basel, Cambridge, Tokyo, 1995. – 396 p.
2. Математическое моделирование и оптимизация химико-технологических процессов. Практическое руководство / В.А. Холоднов. – СПб.: АПО НПО «Профессионал», 2003. – 486 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ РЕКТИФИКАЦИОННОЙ КОЛОННОЙ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATHCAD

В.А. ХОЛОДНОВ, Р.Ю. КУЛИШЕНКО

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (ТУ),
г. Санкт-Петербург
e-mail: holodnow@yandex.ru

С помощью системы компьютерной математики Mathcad исследовался процесс управления в 8-тарельчатой ректификационной колонне для разделения трехкомпонентной смеси бензол-толуол-ксилол.

При таком разделении в качестве дистиллята получается практически чистый бензол, а в качестве кубового остатка – смесь толуола с ксилолом.

Целью исследования является определение влияния возмущений по расходу входного потока на процесс ректификации и анализ полученных результатов.

Математическое описание объекта управления ректификационной колонной имеет следующий вид:

$$V = V1, \quad D = V / (R + 1), \quad L = V - D, \quad L1 = L + F, \quad W = L1 - V1,$$

$$VB_i(B_i, T_i) = 2.75 \cdot B_i / (2.75 \cdot B_i + T_i + 0.4 \cdot (1 - B_i - T_i)),$$

$$VT_i(B_i, T_i) = T_i / (2.75 \cdot B_i + T_i + 0.4 \cdot (1 - B_i - T_i)),$$

$$R = KP \cdot (B_{зад} - B_0) + \frac{KP}{\tau} \cdot \int_0^{\tau} (B_{зад} - B_0) \cdot dt \quad \rightarrow \quad \frac{dR}{dt} = -KP \cdot \frac{dB_0}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot (B_{зад} - B_0).$$

$$\text{Качество регулирования } I = \int_0^{\tau} (B_{зад} - B_0)^2 dt \quad \rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = (B_{зад} - B_0)^2.$$

Дефлегматор-тарелка 0

$$\frac{dB_0}{dt} = (V \cdot VB_1(B_1, T_1) - (L + D) \cdot B_0) / M0, \quad \frac{dT_0}{dt} = (V \cdot VT_1(B_1, T_1) - (L + D) \cdot T_0) / M0.$$

Тарелки 1-4

$$\frac{dB_i}{dt} = (L \cdot (B_{i-1} - B_i) + V \cdot (VB_{i+1}(B_{i+1}, T_{i+1}) - VB_i(B_i, T_i))) / M,$$

$$\frac{dT_i}{dt} = (L \cdot (T_{i-1} - T_i) + V \cdot (VT_{i+1}(B_{i+1}, T_{i+1}) - VT_i(B_i, T_i))) / M.$$

Тарелка питания

$$\frac{dB_i}{dt} = (F \cdot BF + L \cdot B_4 - L1 \cdot B_5 + V1 \cdot VB_6(B_6, T_6) - V \cdot VB_5(B_5, T_5)) / M,$$

$$\frac{dT_i}{dt} = (F \cdot TF + L \cdot T_4 - L1 \cdot T_5 + V1 \cdot VT_6(B_6, T_6) - V \cdot VT_5(B_5, T_5)) / M.$$

Тарелки 6-8

$$\frac{dB_i}{dt} = (L1 \cdot (B_{i-1} - B_i) + V1 \cdot (VB_{i+1}(B_{i+1}, T_{i+1}) - VB_i(B_i, T_i))) / M,$$

$$\frac{dT_i}{dt} = (L1 \cdot (T_{i-1} - T_i) + V1 \cdot (VT_{i+1}(B_{i+1}, T_{i+1}) - VT_i(B_i, T_i))) / M.$$

Куб-тарелка 9

$$\frac{dB_9}{dt} = (L1 \cdot B_8 - V1 \cdot VB_9(B_9, T_9) - W \cdot B_9) / M9,$$

$$\frac{dT_9}{dt} = (L1 \cdot T_8 - V1 \cdot VT_9(B_9, T_9) - W \cdot T_9) / M9.$$

Таблица 1

Спецификация принятых обозначений

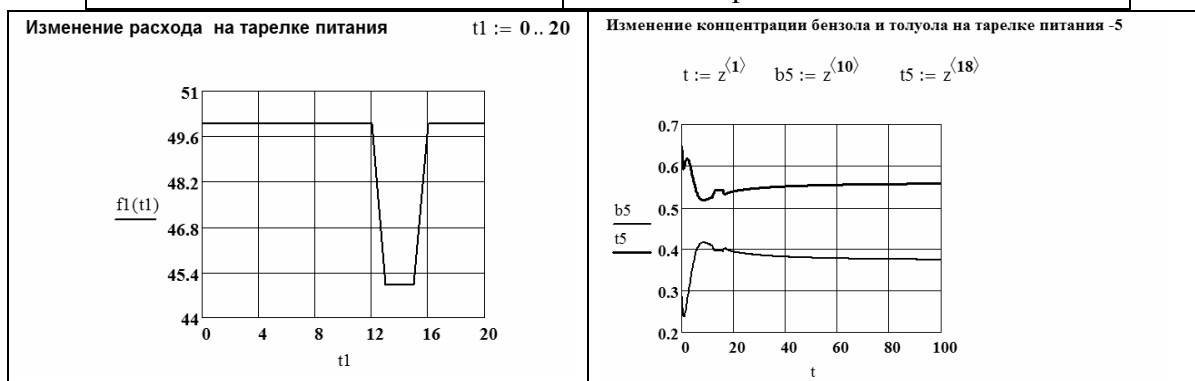
Обозначения	Наименование	Размерность
M	Мольная доля	кмоль
L	Расход жидкой фазы	$\frac{\text{кмоль}}{\text{ч}}$
X	Концентрация жидкой фазы	$\frac{\text{кмоль}}{\text{ч}}$
Y	Концентрация газовой фазы	$\frac{\text{кмоль}}{\text{ч}}$

V	Расход газовой фазы	$\frac{\text{КМОЛЬ}}{\text{Ч}}$
R	Флегмовое число	-
α	Относительная летучесть	$\frac{\text{КМОЛЬ}}{\text{Ч}}$
D	Расход дистиллята	$\frac{\text{КМОЛЬ}}{\text{Ч}}$
$I-8$	Номера тарелок	-
KP	Коэффициент пропорциональности регулятора	-
τ	Время изодрома регулятора	-

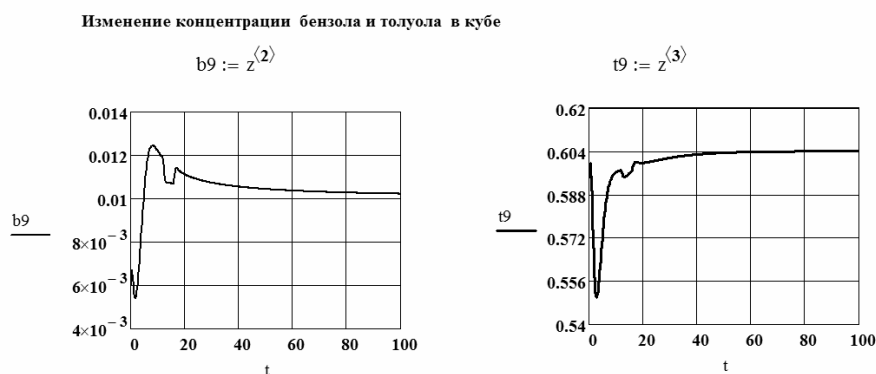
Таблица 2

Исходные данные

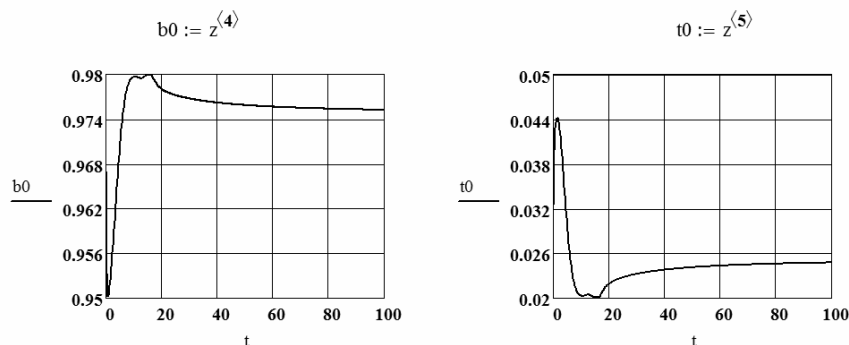
Значение	Описание
$F=50$	Расход питающего потока колонны
$BF=0.6, TF=0.25$	Питающий состав
$R=5$	Флегмовое число
$\lambda_1 = 2.75, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0.4$	Относительные летучести
$M0=75, M9=150, M=30$	Удерживающая способность тарелок
$V1=150$	Расход пара



$uzad := 0.01$ заданное значение концентрации бензола в кубе



Изменение концентрации бензола и толуола в дефлегматоре



Из графиков видно, что система управления с помощью пропорционально-интегрального регулятора позволяет получить заданное количество бензола в кубе колонны даже при наличии кратковременных возмущений.

Литература

1. Системный анализ и принятие решений. Компьютерное моделирование и оптимизация объектов химической технологии в Mathcad и Excel // В.А. Холоднов [и др.]: учебное пособие. – СПб.: СПбГТИ (ТУ), 2007. – 434 с.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КАЧЕНИЯ ШАРА ПО ПОВЕРХНОСТИ СРЕДСТВАМИ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

В.В. ЧЕРКАСОВА

Орловский государственный университет, г. Орел
e-mail: cher_vl@mail.ru

Ранее в статье [2] рассматривалось качение шара радиуса R , с центром которого связан ортонормированный репер $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Шар двигался без проскальзывания по поверхности S , заданной параметрическими уравнениями $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $u, v \in D \subset R^2$ вдоль замкнутой кривой γ ($\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t))$, $t \in [a; b]$), принадлежащей этой поверхности. В конце пути репер, связанный с шаром, примет новое положение и целью являлось найти матрицу перехода от начального положения репера к конечному с применением мультипликативного интеграла [1].

На основе положений инфинитезимального исчисления Вольтера была построена математическая модель качения шара. Однако необходимо было визуализировать полученные результаты. С помощью средств системы компьютерной математики Maple разработана

пользовательская библиотека *RollinsSphere*, которая содержит процедуры и функции, визуализирующие качение шара по поверхности [3]. Дополнительно предусмотрены функции, вычисляющие координаты векторов репера, связанного с шаром, координаты центра шара, длину участка кривой, вдоль которой шар катится, основные инварианты поверхности качения (гауссова и средняя кривизны), матрицу перехода от начального положения репера к конечному.

В соответствии с математической моделью качение шара будет представлять собой суперпозицию большого числа линейных преобразований вида: $Y^k = Y_1^k \cdot Y_2^k$, $k = \overline{1; n}$.

Первое из них Y_1^k представляет собой вращение относительно мгновенной оси $\overline{\omega}$, проходящей через точку касания шара с поверхностью. Мгновенная ось представляет собой вектор $\overline{\omega} = [\overline{v}, \overline{N}]$, где $\overline{v} = \frac{dr(u(t), v(t))}{dt}$ – вектор скорости кривой γ , $\overline{N} = \frac{[\overline{r}_u, \overline{r}_v]}{[\overline{r}_u, \overline{r}_v]}$ – вектор нормали к поверхности S , операция $[]$ – векторное произведение.

Матрица вращения Y_1^k находится по формуле:

$$Y_1^k = \cos \varphi^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \varphi^k) \begin{pmatrix} \omega_1^k \omega_1^k & \omega_1^k \omega_2^k & \omega_1^k \omega_3^k \\ \omega_2^k \omega_1^k & \omega_2^k \omega_2^k & \omega_2^k \omega_3^k \\ \omega_3^k \omega_1^k & \omega_3^k \omega_2^k & \omega_3^k \omega_3^k \end{pmatrix} + \\ + \sin \varphi^k \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3^k & \omega_2^k \\ \omega_3^k & 0 & -\omega_1^k \\ -\omega_2^k & \omega_1^k & 0 \end{pmatrix},$$

причем $\overline{\omega}^k = (\omega_1^k, \omega_2^k, \omega_3^k)$ – направляющие косинусы мгновенной оси вращения, φ^k – угол поворота, $k = \overline{1; n}$.

В *RollinsSphere* нахождение координат репера вращения реализуется процедурой *RollRep*, результатом исполнения которой является список, содержащий координаты трех векторов $(\overline{v}, \overline{N}, \overline{\omega})$ в заданной точке поверхности и кривой при значении параметра $t = t_0$. Вспомогательная процедура *rep_rol(p, phi, w)* вычисляет координаты вектора с начальным списком координат p при его повороте на угол phi относительно оси вращения со списком направляющих косинусов w .

Второе преобразование Y_2^k является параллельным переносом на некоторый вектор и используется при нахождении координат центра шара и репера и реализуется в процедуре *CoordCent*. Непосредственно

анимация задается процедурой *Cadr_Arm_Sphere_Anim*, зависящей от глобальных параметров поверхности r, u, v, uu, vv ; кривой ρ, t, tt ; p – начальных координат векторов ортонормированного репера; a – радиуса шара.

В библиотеке предусмотрена возможность выбора стороны поверхности, по которой будет катиться шар; за выбор отвечает параметр q . При $q = 1$ шар катится по внешней стороне поверхности S , при $q = -1$ – по внутренней.

Вычисление инвариантов поверхности качения и матрицы перехода в случае, если контур замкнут, определяется процедурами *Inv_curve* и *Trans_matr*.

Литература

1. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл. // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. – № 22. – М., 1990. – С. 167–215.
2. Черкасова В.В. О связностях, индуцированных качением шара по поверхности. // Известия ВУЗов. Математика. – 2009. – № 11. – С. 79–84.
3. Черкасова В.В. Мультипликативный интеграл в дифференциальной геометрии и прикладных задачах // Вестник ТГГПУ. – 2010. – № 3 (21). – С. 79–83.

СЕКЦИЯ 2

Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

НЕЧЕТКИЕ КОГНИТИВНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМ

А.А. АВРАМЕНКО

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: a-submariner@mail.ru

Разработка различных способов и средств анализа мультиагентных систем (МАС) является одним из наиболее перспективных направлений исследования сложных систем. МАС нашли свое применение в различных прикладных отраслях: логистике, геоинформационных системах, задачах военной обороны, моделировании социальных структур и др. Одна из основных задач для исследования в рамках самой теории МАС – это кооперация и коммуникация агентов.

Известно, что на решение задач анализа конфликтных ситуаций и согласования целей агентов ориентированы методы теории игр и когнитивного моделирования, однако они не решают проблему учета и анализа коллективного поведения агентов. Теория кооперативных игр рассматривает лишь задачи оптимального распределения средств внутри коалиций и не занимается такими важными вопросами, как анализ взаимодействия самих коалиций и игроков, поиска оптимальных стратегий формирования коалиций и др. Когнитивные модели, в свою очередь, позволяют формализовать сложную систему в виде множества концептов, отображающих системные факторы, и предназначены для выявления причинно-следственных отношений (отношений влияния) между ними с учетом воздействия на эти факторы или изменения характера отношений.

Для более полного анализа МАС, а именно их коалиционной составляющей, предлагается использовать обобщенные нечеткие продукционные когнитивные карты с использованием возможностей имитационно-динамического моделирования для учета взаимодействия агентов в коалициях [1].

Для анализа и динамического моделирования МАС используется гибридизация игровых и когнитивных моделей [2], а также их системные показатели [3]. В нечеткой когнитивной модели выделяются концепты-коалиции, исходя из анализа соответствующих α -уровней отношений, сформированных по результатам анализа системных показателей. В предлагаемой модели возможно рассмотрение

взаимодействия агентов в составе коалиции, а также конфронтация отдельных коалиций. Вводятся дополнительные системные показатели, такие как: консонанс (диссонанс) влияния агента на коалицию, влияние коалиции на систему в целом и др.

Предлагаемая модель учитывает динамику взаимодействия между агентами. В зависимости от рассматриваемой ситуации может изменяться интенсивность и направленность связей между агентами. При сближении целей агентов взаимозависимость между ними может возрасти. Например, необходимость совместного использования ресурсов ради решения сложной задачи может привести к изменению веса отношения между агентами в пользу их кооперации.

Таким образом, предлагаемая нечеткая когнитивная модель позволяет определять оптимальные составы коалиций агентов МАС, а также наилучшие стратегии поведения как отдельных агентов, так и множества агентов.

Литература

1. Борисов В.В., Федулов А.С. Обобщенные нечеткие когнитивные карты // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2004. – № 4. – С. 3–20.
2. Борисов В.В., Устиненков Е.С. Анализ взаимодействий в сложных системах на основе нечетких когнитивных и игровых моделей // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2009. – № 8. – С. 4–11.
3. Силов В.Б. Принятие стратегических решений в нечеткой обстановке. – М.: ИНПРО-РЕС, 1995.

МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СТОИМОСТИ ПЕРСПЕКТИВНОГО ОБРАЗЦА ВООРУЖЕНИЯ И ВОЕННОЙ ТЕХНИКИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

В.И. АЛЕКСАНДРОВА*, В.Р. КРИСТАЛИНСКИЙ**

*ВА ВПВО ВС РФ, г. Смоленск,

**Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: kristvr@rambler.ru

Разработка и производство вооружения и военной техники (ВВТ), как правило, сопровождается технико-экономическим обоснованием, целью которого является оценка степени достижимости предъявляемых тактико-технических требований (ТТТ) разрабатываемого образца ВВТ с учетом выделяемых финансовых средств [1].

Очевидно, что на стоимость перспективного образца вооружения и военной техники (ВВТ) оказывает влияние большое количество факторов, поэтому оценка затрат на развитие образца ВВТ относится к классу задач

многокритериальной оптимизации и осуществляется в условиях неопределенности [2].

Предлагаемая методика позволяет расширить факторное пространство при прогнозировании стоимости перспективного образца ВВТ, то есть увеличить число учитываемых показателей, влияющих на стоимость перспективного образца ВВТ, что должно привести к повышению качества прогнозирования стоимости.

Для решения задачи прогнозирования стоимости перспективного образца ВВТ зачастую используется информация не только статистического характера, но и качественная информация, характеризующаяся различного рода неопределенностью.

По этой причине получение большинства исходных данных для прогнозирования затруднительно, еще сложнее определить истинность полученной информации. Эти задачи обычно решаются различными методами.

Все эти методы требуют сложных математических вычислений и большого числа экспериментов, что не всегда реально. Это приводит к неточности и неполноте используемой при прогнозировании стоимости перспективного образца ВВТ информации.

Поэтому в предлагаемой методике прогнозирования стоимости перспективного образца ВВТ для получения информации, на основе которой проводится прогнозирование, используются экспертные методы.

Полученная экспертная информация используется для формирования нечеткой модели, с помощью которой в методике проводится определение агрегированного показателя прогнозируемого роста стоимости. Возможность применения математического аппарата нечеткой логики при прогнозировании стоимости перспективного образца ВВТ определяется теоремой Б. Коско, доказавшего, что любая система может быть аппроксимирована системой, основанной на нечеткой логике [4].

Входными данными в нечеткую модель определения агрегированного показателя прогнозируемого роста стоимости перспективного образца ВВТ являются степени изменения определенных структурных элементов для достижения требуемых ТТТ. Выходной характеристикой является агрегированный показатель прогнозируемого роста стоимости перспективного образца ВВТ.

Для построения нечеткой модели необходимо [5]:

1. Создать базу данных на основе экспертных методов, содержащую:

– перечень тактико-технических требований к перспективному образцу ВВТ [3];

– перечень показателей, характеризующих структурные элементы образца ВВТ, изменение (включение) которых необходимо для достижения тактико-технических требований;

– степени изменения показателей, характеризующих структурные элементы образца ВВТ, необходимой для достижения тактико-технических требований к перспективному образцу ВВТ;

– степени влияния определенных структурных элементов на стоимость перспективного образца ВВТ.

2. Сформировать терм-множества и логико-лингвистические шкалы входных переменных.

Для этого используются гауссовы функции принадлежности нечетких множеств. Число термов для описания всех переменных используется одно и то же {низкий, средний, высокий}.



Рис. 1. Структурно-логическая схема методики прогнозирования стоимости образца перспективного ВВТ

3. Сформировать базу продукционных правил.

Операция агрегирования реализуется на основе нечеткого вывода Мамдани [5], который позволяет дефазифицировать (привести к четкости) центроидным методом и получить на выходе нечеткой оценочной модели агрегированный показатель прогнозируемого роста стоимости перспективного образца ВВТ в численном диапазоне [0,1].

Используя значение стоимости типового образца и полученный показатель прогнозируемого роста стоимости перспективного образца ВВТ, определяется прогнозируемая стоимость перспективного образца ВВТ.

Достоинством предлагаемой нечеткой оценочной модели прогнозирования стоимости перспективного образца ВВТ является ее блочно-модульный тип.

Таким образом, в методике прогнозирования стоимости перспективного образца ВВТ на основе нечеткой оценочной модели реализуется интегрированный подход, то есть стоимость формируется на основе учета совокупности тактико-технических требований. Это позволяет гибко и адекватно прогнозировать стоимость, что в значительной степени повышает качество (точность) прогнозирования стоимости перспективного образца ВВТ.

Литература

1. Сорокин В.П. Моделирование систем вооружения и боевых действий войск противовоздушной обороны сухопутных войск. – Киев: ВА ВПВО, 1991.
2. Вилкас Э.Й., Майминас У.З. Решения: теория, информация, моделирование. – М.: Радио и связь, 1981.
3. Надежность и эффективность в технике: справочник. /под ред. Уткина В.Ф., Крючкова Ю.В. – М.: Машиностроение, 1988. – Т. 3. – 289 с.
4. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедуры принятия решений: сб. переводов / Под ред. И.Ф. Шахнова. – М.: Мир, 1976.
5. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И СПЛАЙНЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Т.К. БИРЮКОВА*, М.М. ГЕРШКОВИЧ*, В.И. КИРЕЕВ**

*Институт проблем информатики РАН, г. Москва
e-mail: biryukova@amsd.com; makmg@mail.ru

**Московский государственный горный университет, г. Москва
e-mail: Vladimir-Kireyev@mail.ru

Математическое описание функционирования территориально-распределенных информационных систем во многих случаях основано на аппроксимации непрерывных одномерных и двумерных алгебраических функций. Для решения таких задач, в частности, при идентификации динамических объектов в настоящее время широко используется теория сплайнов [1; 2; 3] и вейвлетов [4].

В данном докладе в развитие исследований [5] предлагаются разработанные авторами одномерные и двумерные многочлены и сплайны произвольной четной степени, основанные на совокупности интегральных и дифференциальных условий согласования с исходной функцией. Интегральные условия обеспечивают симметричность соотношений, определяющих параметры сплайнов четных степеней и, как следствие, устойчивость одномерных и двумерных интегро-дифференциальных сплайнов (ИД-сплайнов), узлы которых совпадают с узлами исходной сеточной функции. ИД-сплайны сохраняют интегральные свойства исходных кривых и поверхностей, то есть обладают свойством консервативности. Формулы звеньев ИД-сплайнов в этом случае достаточно просты, и их построение не требует сложных вычислений.

Для функции $f(x)$, заданной на сетке $\Delta_1: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, выведена формула интегро-дифференциального многочлена (ИД-многочлена) одной переменной $S_{2mИД,i}(x)$ степени $2m$, аппроксимирующего $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ и удовлетворяющего условиям:

1) интегральному условию согласования:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_{2mИД,i}(x) dx = I_i^{i+1}, \text{ где } I_i^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad (1)$$

2) условиям интерполяции и равенства производных от многочлена и аппроксимируемой функции до порядка $m-1$ в точках x_i, x_{i+1} :

$$S_{2mИД,i}^{(p)}(x_i) = f^{(p)}(x_i), \quad S_{2mИД,i}^{(p)}(x_{i+1}) = f^{(p)}(x_{i+1}), p = 0, \dots, m-1.$$

ИД-многочлен степени $2m$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеет вид:

$$S_{2mИД,i}(x) = \frac{1}{h_{i+1}} \varphi_{(-1)}(u) I_i^{i+1} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i+1}^{\alpha} [\varphi_{\alpha}(u) f_i^{(\alpha)} + \psi_{\alpha}(u) f_{i+1}^{(\alpha)}], \quad (2)$$

где $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, $u = \frac{x - x_i}{h_{i+1}}$ ($0 \leq u \leq 1$);

$$\psi_{\alpha}(u) = (-1)^{\alpha} \varphi_{\alpha}(1-u), \quad \alpha = 0, \dots, m-1;$$

$$\varphi_{(-1)}(u) = \frac{1}{\sum_{k=0}^m C_m^k \frac{(-1)^k}{m+k+1}} u^m (1-u)^m \quad \left(C_m^k = \frac{m!}{k! (m-k)!} \right);$$

$$\varphi_{\alpha}(u) = (1-u)^m \left\{ \sum_{\beta=0}^{m-\alpha-1} \frac{1}{\alpha!} C_{m-1+\beta}^{\beta} \cdot u^{\alpha+\beta} - \left[\frac{1}{\sum_{k=0}^m C_m^k \frac{(-1)^k}{m+k+1}} \cdot \sum_{\beta=0}^{m-\alpha-1} \left(\frac{1}{\alpha!} C_{m-1+\beta}^{\beta} \cdot \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{(-1)^k}{\alpha+\beta+k+1} \right) \right] \cdot u^m \right\} \\ (\alpha = 0, \dots, m-1).$$

Сплайн $S_{2m\text{ИД}}(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{2m\text{ИД},i}(x)$ на сетке $\Delta_1: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,

составленный из многочленов $S_{2m\text{ИД},i}(x)$ как из звеньев, является интерполяционным, имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ (то есть $S_{2m\text{ИД}}(x) \in C_{[a,b]}^{m-1}$) и удовлетворяет интегральному условию согласования (1) на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, \dots, n-1$).

Дефект сплайна можно уменьшить, если его параметры вычислять из условий непрерывности производных.

Двумерные ИД-многочлены и ИД-сплайны произвольной четной степени строятся следующим образом.

Пусть в прямоугольной области $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ на сетке узлов

$$\Delta_2 = \Delta_x \times \Delta_y, \text{ где } \Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_x} = b, \Delta_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n_y} = d$$

задана функция двух переменных $\{f_{i,j} = f(x_i, y_j)\}_{i=0, j=0}^{n_x, n_y}$. Сетка делит область Ω на прямоугольники (частичные области) $\Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.

Двумерный ИД-многочлен $S_{2m,2m \text{ ИД},(i,j)}(x, y)$ степени $2m$ по x и y , аппроксимирующий функцию $\{f_{i,j} = f(x_i, y_j)\}_{i=0, j=0}^{n_x, n_y}$ в частичной области $\Omega_{i,j}$, имеет вид:

$$S_{2m,2m \text{ ИД},(i,j)}(x, y) = \varphi^T(u) F \varphi(v),$$

где

$$\varphi^T(u) = \left[\frac{\varphi_{(-)}(u)}{h_{xi+1}} \quad \varphi_0(u) \quad \varphi_1(u) \quad h_{xi+1} \varphi_2(u) \quad h_{xi+1} \varphi_3(u) \quad h_{xi+1}^2 \varphi_4(u) \quad h_{xi+1}^2 \varphi_5(u) \quad \dots \quad h_{xi+1}^{m-1} \varphi_{m-1}(u) \quad h_{xi+1}^{m-1} \varphi_m(u) \right]$$

$$\varphi^T(v) = \left[\frac{\varphi_{(-)}(v)}{h_{yj+1}} \quad \varphi_0(v) \quad \varphi_1(v) \quad h_{yj+1} \varphi_2(v) \quad h_{yj+1} \varphi_3(v) \quad h_{yj+1}^2 \varphi_4(v) \quad h_{yj+1}^2 \varphi_5(v) \quad \dots \quad h_{yj+1}^{m-1} \varphi_{m-1}(v) \quad h_{yj+1}^{m-1} \varphi_m(v) \right]$$

$$F = \begin{pmatrix} I_{xi(j)}^{i+1, j+1} & I_{xi(j)}^{i+1} & I_{xi(j+1)}^{i+1} & dI_{xi(j)}^{i+1} & dI_{xi(j+1)}^{i+1} & d^2 I_{xi(j)}^{i+1} & d^2 I_{xi(j+1)}^{i+1} & \dots & d^{m-1} I_{xi(j)}^{i+1} & d^{m-1} I_{xi(j+1)}^{i+1} \\ I_{yj(i)}^{j+1} & f_{i,j} & f_{i,j+1} & f_{i,j}^{(0,1)} & f_{i,j+1}^{(0,1)} & f_{i,j}^{(0,2)} & f_{i,j+1}^{(0,2)} & \dots & f_{i,j}^{(0,m-1)} & f_{i,j+1}^{(0,m-1)} \\ I_{yj(i+1)}^{j+1} & f_{i+1,j} & f_{i+1,j+1} & f_{i+1,j}^{(0,1)} & f_{i+1,j+1}^{(0,1)} & f_{i+1,j}^{(0,2)} & f_{i+1,j+1}^{(0,2)} & \dots & f_{i+1,j}^{(0,m-1)} & f_{i+1,j+1}^{(0,m-1)} \\ dI_{yj(i)}^{j+1} & f_{i,j}^{(1,0)} & f_{i,j+1}^{(1,0)} & f_{i,j}^{(1,1)} & f_{i,j+1}^{(1,1)} & f_{i,j}^{(1,2)} & f_{i,j+1}^{(1,2)} & \dots & f_{i,j}^{(1,m-1)} & f_{i,j+1}^{(1,m-1)} \\ dI_{yj(i+1)}^{j+1} & f_{i+1,j}^{(1,0)} & f_{i+1,j+1}^{(1,0)} & f_{i+1,j}^{(1,1)} & f_{i+1,j+1}^{(1,1)} & f_{i+1,j}^{(1,2)} & f_{i+1,j+1}^{(1,2)} & \dots & f_{i+1,j}^{(1,m-1)} & f_{i+1,j+1}^{(1,m-1)} \\ d^2 dI_{yj(i)}^{j+1} & f_{i,j}^{(2,0)} & f_{i,j+1}^{(2,0)} & f_{i,j}^{(2,1)} & f_{i,j+1}^{(2,1)} & f_{i,j}^{(2,2)} & f_{i,j+1}^{(2,2)} & \dots & f_{i,j}^{(2,m-1)} & f_{i,j+1}^{(2,m-1)} \\ d^2 I_{yj(i+1)}^{j+1} & f_{i+1,j}^{(2,0)} & f_{i+1,j+1}^{(2,0)} & f_{i+1,j}^{(2,1)} & f_{i+1,j+1}^{(2,1)} & f_{i+1,j}^{(2,2)} & f_{i+1,j+1}^{(2,2)} & \dots & f_{i+1,j}^{(2,m-1)} & f_{i+1,j+1}^{(2,m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^{m-1} I_{yj(i)}^{j+1} & f_{i,j}^{(m-1,0)} & f_{i,j+1}^{(m-1,0)} & f_{i,j}^{(m-1,1)} & f_{i,j+1}^{(m-1,1)} & f_{i,j}^{(m-1,2)} & f_{i,j+1}^{(m-1,2)} & \dots & f_{i,j}^{(m-1,m-1)} & f_{i,j+1}^{(m-1,m-1)} \\ d^{m-1} I_{yj(i+1)}^{j+1} & f_{i+1,j}^{(m-1,0)} & f_{i+1,j+1}^{(m-1,0)} & f_{i+1,j}^{(m-1,1)} & f_{i+1,j+1}^{(m-1,1)} & f_{i+1,j}^{(m-1,2)} & f_{i+1,j+1}^{(m-1,2)} & \dots & f_{i+1,j}^{(m-1,m-1)} & f_{i+1,j+1}^{(m-1,m-1)} \end{pmatrix}$$

$\varphi_{(-)}(t), \varphi_\alpha(t), \varphi_\alpha(t)$ ($t = u, v$), $\alpha = 0, \dots, m-1$ - те же, что и в формуле (2) одномерного ИД-многочлена $S_{2m\text{ИД},i}(x)$ степени $2m$.

Параметры ИД-многочлена $S_{2m,2m}^{ИД,(i,j)}(x,y)$ представляют собой:

$I_{i,j}^{i+1,j+1}$ – двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по частичной области $\Omega_{i,j}$:
$$I_{i,j}^{i+1,j+1} = \iint_{\Omega_{i,j}} f(x,y) dx dy \quad (i = 0, \dots, n_x - 1, j = 0, \dots, n_y - 1);$$

$I_{xi(j)}^{i+1}$ – интеграл от функции $f(x,y)$ вдоль оси x на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$

при фиксированном значении $y = y_j$:
$$I_{xi(j)}^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y_j) dx$$

$(i = 0, \dots, n_x - 1, j = 0, \dots, n_y - 1);$

$I_{yj(i)}^{j+1}$ – интеграл от функции $f(x,y)$ вдоль оси y на отрезке $[y_j, y_{j+1}]$

при фиксированном значении $x = x_i$:
$$I_{yj(i)}^{j+1} = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y) dy$$

$(i = 0, \dots, n_x - 1, j = 0, \dots, n_y - 1);$

$f_{i,j}^{(P_x, P_y)}$ $(i = 0, \dots, n_x, j = 0, \dots, n_y)$ – значения функции $f(x,y)$ и ее частных

производных в узлах сетки Δ_2 :
$$f_{i,j}^{(P_x, P_y)} = \frac{\partial^{P_x + P_y} f(x,y)}{\partial x^{P_x} \partial y^{P_y}} \Big|_{x=x_i, y=y_j};$$

$d^p I_{xi(j)}^{i+1}$ – частная производная по y порядка p от интеграла от функции $f(x,y)$ вдоль оси x на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ при фиксированном

значении $y = y_j$:
$$d^p I_{xi(j)}^{i+1} = \frac{\partial^p \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y) dx \right)}{\partial y^p} \Big|_{y=y_j} = \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^p f(x,y)}{\partial y^p} dx \right) \Big|_{y=y_j}$$

$(i = 0, \dots, n_x - 1, j = 0, \dots, n_y - 1);$

$d^p I_{yj(i)}^{j+1}$ – частная производная по x порядка p от интеграла от функции $f(x,y)$ вдоль оси y на отрезке $[y_j, y_{j+1}]$ при фиксированном

значении $x = x_i$:
$$d^p I_{yj(i)}^{j+1} = \frac{\partial^p \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y) dy \right)}{\partial x^p} \Big|_{x=x_i} = \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial^p f(x,y)}{\partial x^p} dy \right) \Big|_{x=x_i}$$

$(i = 0, \dots, n_x, j = 0, \dots, n_y - 1).$

ИД-многочлен $S_{2m,2m\text{ИД},(i,j)}(x,y)$ удовлетворяет при $r_x, r_y = 2m$ условиям:

– двумерному интегральному условию согласования:

$$\delta S_{r_x, r_y}^{(-1,-1)}(i,j)(x_i, x_{i+1}, y_j, y_{j+1}) = \iint_{\Omega_{i,j}} [S_{r_x, r_y}(i,j)(x,y) - f(x,y)] dx dy = 0; \quad (3)$$

– одномерным интегральным условиям согласования на границах частичных областей $\Omega_{i,j}$ по направлениям x и y (в плоскостях $y = y_j, y = y_{j+1}$ и $x = x_i, x = x_{i+1}$):

$$\delta S_{r_x, r_y}^{(-1,0)}(i,j)(x_i, x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S_{r_x, r_y}(i,j)(x, y_l) - f(x, y_l)] dx = 0, \quad l = j, j+1, \quad (4)$$

$$\delta S_{r_x, r_y}^{(0,-1)}(i,j)(y_j, y_{j+1}) = \int_{y_j}^{y_{j+1}} [S_{r_x, r_y}(i,j)(x_k, y) - f(x_k, y)] dy = 0, \quad k = i, i+1, \quad (5)$$

– при $p_{1x} = 0, \dots, m-1; p_{1y} = 0, \dots, m-1$ условию:

$$\delta S_{r_x, r_y}^{(p_{1x}, p_{1y})}(i,j)(x_k, y_l) = S_{r_x, r_y}^{(p_{1x}, p_{1y})}(i,j)(x_k, y_l) - f^{(p_{1x}, p_{1y})}(x_k, y_l) = 0 \quad (k = i, i+1; l = j, j+1)$$

(p_{1x}, p_{1y} – порядки производных по x и по y , принимающие целые значения из интервалов $0 \leq p_{1x} \leq m_x, 0 \leq p_{1y} \leq m_y$ соответственно).

Из ИД-многочленов $S_{2m,2m\text{ИД},(i,j)}(x,y)$, как из звеньев, можно

составить двумерный ИД-сплайн $S_{2m,2m\text{ИД}}(x,y) = \bigcup_{i=0}^{n_x-1} \bigcup_{j=0}^{n_y-1} S_{2m,2m\text{ИД},(i,j)}(x,y)$,

имеющий дефект $m+1$ по x и y (то есть $S_{2m,2m\text{ИД}}(x,y) \in C_{\Omega}^{m-1, m-1}$). ИД-сплайн $S_{2m,2m\text{ИД}}(x,y)$ по построению является интерполяционным, удовлетворяет двумерному интегральному условию согласования (3) в каждой частичной области $\Omega_{i,j}$ ($i = 0, \dots, n_x - 1, j = 0, \dots, n_y - 1$) и одномерным интегральным условиям согласования (4), (5) на границах частичных областей $\Omega_{i,j}$.

Литература

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Новосибирск: Наука, 1980. – 350 с.
2. Субботин Ю.Н. Некоторые экстремальные и аппроксимативные свойства сплайнов и интерполяционные регулярные и нерегулярные всплески // Методы сплайн-функций. Российская конференция, посвященная 80-летию со дня рождения Ю.С. Завьялова (Новосибирск, 31 января – 2 февраля 2011 г.): тезисы докладов. ИМ СО РАН. – Новосибирск, 2011. – С. 89.

3. Войтишек А.В. Использование сплайнов в дискретно-стохастических численных алгоритмах // Методы сплайн-функций. Российская конференция, посвященная 80-летию со дня рождения Ю.С. Завьялова (Новосибирск, 31 января – 2 февраля 2011 г.): тезисы докладов. ИМ СО РАН. – Новосибирск, 2011. – С. 31–32.

4. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB // М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.

5. Бирюкова Т.К., Киреев В.И., Гершкович М.М., Синицин В.И. Интегродифференциальные сплайны и их применение в прикладных задачах анализа данных в территориально-распределенных информационных системах // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XII международной научной конференции (СКМП-2011). – Смоленск: СмолГУ, 2011. – С. 82–84.

КЛАССИФИКАЦИЯ УСЛОВИЙ И МЕТОДОВ УЧЕТА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ АНАЛИЗЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. БОРИСОВ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г.Смоленск

e-mail: vbor67@mail.ru

Функционирование сложных организационно-технических систем может осуществляться в условиях определенности, риска либо неопределенности.

В том случае, если известны все исходы для каждой из альтернатив (ситуаций, состояний), говорят, что система функционирует в условиях определенности. Обычно такие условия называются условиями без риска.

Если известны вероятности появления каждой из альтернатив или известен закон распределения вероятностей их появления и сумма этих вероятностей равна единице, то для каждой из альтернатив известна вероятность исхода. Такие условия принято называть условиями риска. Когда вероятность появления исходов неизвестна или не может быть задана для каждого исхода, то говорят об условиях неопределенности. В свою очередь, условия риска можно определить как условия стохастической неопределенности, порожденные случайными факторами, которые при их массовом появлении обладают свойством статистической устойчивости и описываются каким-либо законом распределения вероятности.

Наиболее распространенной является статистическая интерпретация вероятности, которая отождествляется с относительной

частотой появления массового случайного события при достаточно длительных испытаниях. Однако в условиях ограниченного эксперимента удастся получить лишь выборочные оценки параметров плотности распределения или ее моментов. Поэтому при статистическом описании такого неопределенного фактора вместо математического ожидания и дисперсии получают лишь их оценки, точность которых зависит от плана эксперимента, числа опытов, метода оценивания. Достоверность статистических выводов на основе полученных оценок существенно зависит от вида постулируемых законов распределения и чувствительна к нарушению исходных допущений. С этой точки зрения индивидуальное событие не обладает частотой и не имеет смысла говорить о его вероятности. Значит, статистическая вероятность может быть использована только для количественной оценки таких альтернатив, для которых существует статистическая информация. Такие условия неопределенности, при которых закон распределения вероятностей для неопределенных факторов неизвестен, определяются как условия статистической неопределенности.

Условия статистической неопределенности, в свою очередь, делится на два вида: во-первых, с известными параметрами распределения (математическое ожидание, дисперсия и другие характеристики случайной величины); во-вторых, с неизвестными параметрами распределения.

В случае отсутствия объективной информации, вероятности таких событий могут оцениваться субъективно и, соответственно, называются субъективными вероятностями. Если они известны, то для определения их значений можно использовать правила, аналогичные объективным вероятностям и основанные на вычислении математического ожидания.

Если неопределенные факторы относятся к неслучайным, не обладают статистической устойчивостью и не описываются каким-либо законом распределения вероятности, то об этих неопределенных факторах невозможно получить достаточно достоверной информации. А вероятность событий, связанных с воздействием этих факторов, с требуемой точностью определить невозможно. В этом случае говорят об условиях нестохастической неопределенности.

Следует выделить следующие причины возникновения нестохастической неопределенности при функционировании сложных организационно-технических систем:

- неполнота и недостаточность информации о системе;
- нечеткость, неоднозначность или противоречивость выделения и описания границ системы или ее состояний, а также входных и выходных воздействий, условий ее функционирования, поведения или реакций окружающей среды.

Неполнота и недостаточность информации о системе зависит от такого свойства информации, как ее объем, приемлемый для

адекватного описания системы, ее управления и поведения, а также построения ее модели. А нечеткость, неоднозначность или противоречивость описания системы зависит от достоверности информации.

Исторически первыми для оценки неопределенности применялись вероятностно-статистические методы. Так, методы теории вероятностей использовались для оценки факторов в условиях стохастической неопределенности, а методы математической статистики – для оценки в условиях статистической неопределенности. Очевидно, именно поэтому анализируемые факторы «автоматически» наделялась свойством случайности, а любая неопределенность долгое время «сводилась» к стохастической или статистической.

Если нет оснований или недостаточно информации для того, чтобы рассматривать факторы неопределенности как случайные, то наиболее общей формой описания неопределенных факторов является их представление в интервальной форме, когда задается диапазон возможных значений переменных или зависимостей. Данный подход к формализации неопределенности позволяет повысить обоснованность применения методов теории вероятностей в задачах анализа функционирования сложных организационно-технических систем за счет расширения вероятностных величин на интервально-вероятностные величины. Использование интервально-вероятностного подхода к учету неопределенности также позволяет ослабить допущение о статистической однородности событий для построения вероятностных гипотез.

Если отсутствует объективная информация и вероятностные гипотезы основываются на экспертных оценках, то может приниматься субъективная интерпретация вероятности и вероятностных распределений. При этом субъективная вероятность интерпретируется как «мера доверия» к тому или иному значению анализируемого фактора. Эти вероятностные формализмы не имеют частотного смысла, а представляют собой либо результат виртуального пари по Сэвиджу, либо вероятность относительно свидетельства в смысле Кайберга, либо точечную оценку, основанную на принципе максимума энтропии Гиббса–Джейнса. Существуют и другие подходы к оценке субъективной информации Кейнса, Рамсея, Вальда, Фишберна. При этом большинство результатов из теории вероятностей перекочевало в теорию субъективных вероятностей, в частности, логико-вероятностные схемы дедуктивного вывода интегральных вероятностей сложных событий.

Помимо указанных подходов к учету неопределенности на основе неклассических вероятностей, существенный интерес был отмечен к минимаксным методам. Из совокупности допустимых сценариев минимаксные методы позволяют выбрать два, при которых эффект принимает последовательно максимальное или минимальное значение.

При этом лицо, принимающее решение (ЛПР), должен отреагировать на ситуацию таким образом, чтобы добиться наилучших результатов в наихудших условиях.

Однако при использовании минимаксных методов ожидание наихудших может привести к неоправданно высоким уровням создаваемых резервов. Компромиссным подходом здесь является использование метода Гурвица, когда наихудший и наилучший сценарии учитываются совместно, а в качестве веса в свертке сценариев выступает задаваемый параметр. Чем больше значение этого параметра, тем оптимистичнее будет решение. Модифицированный интервально-вероятностный метод Гурвица учитывает дополнительную информацию о соотношении вероятностей сценариев, с учетом неизвестности точного значения сценарных вероятностей.

В последнее время для анализа функционирования сложных организационно-технических систем в условиях различного рода неопределенности (не только нестохастической) широкое применение находит теория нечетких множеств и нечеткого моделирования для построения соответствия между нечеткими лингвистическими описаниями и специальными функциями, выражающими степень принадлежности значений измеряемых параметров данным нечетким описаниям. Кроме того, уже на начальном этапе развития этой теории были введены так называемые лингвистические вероятности – вероятности, заданные не количественно, а на основе нечеткой оценки и ее лингвистической интерпретации.

Еще одним направлением развития теории нечетких множеств стало создание нечеткой арифметики и теории нечетких вычислений, основанных на понятии нечетких чисел и операциях над ними. Это, в свою очередь, позволило перейти от вероятностных мер к нечетким вероятностным мерам. Изначально нечеткие вероятностные меры были ориентированы на представление и оценку случайных величин в условиях статистической неопределенности с нечеткими параметрами распределения (математическое ожидание, дисперсия и др.). При этом нечеткие вероятностные меры базировались на понятиях нечеткого случайного события и четкой вероятности нечеткого события, которые впервые ввел Заде. В дальнейшем Ягер предложил трактовку нечеткой вероятности нечеткого события, что позволило использовать нечеткие вероятностные меры для учета и нестохастической неопределенности.

Помимо этого теория нечетких множеств была использована в качестве основы для построения других теорий и, прежде всего, теории возможностей. Затем получила развитие теория нечеткой меры, позволяющая с единых позиций установить взаимосвязь между теорией вероятностей и другими теориями, основанными на нечетком подходе (теория свидетельств Демпстера и Шеффера, теория возможностей, теория полезности), а также на сочетании вероятностного и нечеткого

подходов для представления и оценки различного типа неопределенности. С тех пор понятия вероятности, возможности и необходимости, доверия и правдоподобия получили теоретическое разграничение.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗНАНИЙ

В.В. БОРИСОВ*, В.И. МУНЕРМАН, В.В. СЕЛИВАНОВ**

*Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск

**Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: **vymoon@gmail.com, *vbor67@mail.ru

Рассмотрена модель представления знаний, основанная на алгебре многомерных матриц с произвольными типами элементов. Для построения модели использованы следующие предположения:

1) существуют абстрактные знания о предметной области, отражающие ее свойства в виде описания свойств и процедур взаимодействия отдельных объектов, а также событий, вызывающих эти взаимодействия и изменяющих свойства объектов;

2) существуют конкретные знания субъекта о той же предметной области, обусловленные его опытом взаимодействия с ней;

3) абстрактные и конкретные знания о предметной области имеют структуру, соответствующую некоторой математической структуре, в дальнейшем – многомерной матрице;

4) элементы этой структуры могут быть произвольных типов, в том числе и стохастических или нечетких.

5) единственное требование к типам элементов состоит в том, что они должны образовывать универсальные алгебраические системы с двумя операциями, интерпретируемыми как аддитивная и мультипликативная.

На основе этих предположений разрабатывается многомерно матричная модель представления, хранения и обработки знаний.

Модель представления знаний. Обозначим произвольную совокупность знаний о некоторой предметной области K_1, \dots, K_m , где K_i ($i = 1, \dots, m$) – знание, применимое при решении задач в данной предметной области. Например, знаниями о предметной области **базы данных** могут быть: знание моделей данных – K_1 , знание языков манипулирования данными – K_2 , знание математической логики – K_3 . Знание K_3 можно отнести также и к другим предметным областям, например, теории доказательств, программированию и другим. То есть, знания связаны с некоторым набором предметных областей A_1, \dots, A_n .

Применение знания непосредственно связано с наступлением некоторого события или группы событий. Каждое событие возникает с определенной вероятностью. Рассмотрим совокупность событий E_1, \dots, E_q и шкалу значений вероятностей p_1, \dots, p_r ($0 \leq p_i < 1$, $i = 1, \dots, r$) возникновения этих событий. Величина r зависит от решаемой задачи и определяется точностью задания значений вероятностей событий E_1, \dots, E_q .

Можно определить значение V_{ijkl} , задающее величину применения знания K_i ($i = 1, \dots, m$) в предметной области A_j ($j = 1, \dots, n$) при наступлении события E_k ($k = 1, \dots, r$) с вероятностью p_l ($l = 1, \dots, r$). Совокупность таких значений при всех значениях индексов i, j, k, l можно представить как четырехмерную матрицу $V = \parallel V_{ijkl} \parallel$. Эту матрицу можно представить как совокупность двумерных сечений вида

$$\left\| \left[\begin{array}{ccc} V_{1111} & \dots & V_{111n} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{11m1} & \dots & V_{11mn} \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{ccc} V_{11k1} & \dots & V_{1k1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{1km1} & \dots & V_{1kmn} \end{array} \right] \right\|.$$

$$\left\| \left[\begin{array}{ccc} V_{l111} & \dots & V_{l11n} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{l1m1} & \dots & V_{l1mn} \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{ccc} V_{lk1} & \dots & V_{lk1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{lkn1} & \dots & V_{lknm} \end{array} \right] \right\|.$$

Рассмотренная модель позволяет дать описание «объективных» знаний о каждой предметной области. То есть общих знаний, выработанных за все время изучения этих предметных областей. Аналогичный подход позволяет дать описание знаний о предметных областях некоторого множества людей, то есть задать «субъективные» знания каждого человека (субъекта) обо всех предметных областях. Таким образом, возможно построение матрицы субъектов $S = \parallel S_{i_1 \dots i_p} \parallel$, $i_\alpha = 1, \dots, n_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, p$). Среди измерений матрицы S , очевидно, будут встречаться измерения матрицы V или, по крайней мере, некоторые из них.

Элементами матриц V и S могут быть произвольные объекты, удовлетворяющие требованию предположения 5. Таким образом, становится возможным использование алгебры многомерных матриц с произвольными типами элементов и сигнатурой $\Omega_M = \langle \text{транспонирование, сечение, свертка, сложение, } (\lambda, \mu)\text{-свернутое произведение} \rangle$ [1].

Система $U_M = \langle M; \Omega; \Pi \rangle$, состоящая из семейства основных множеств $M = \{A_\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2, \dots$), сигнатуры Ω операций, определенных на семействе M так, что каждая n -арная операция из Ω является отображением декартова произведения n множеств из семейства M в множество из того же семейства $A_{\alpha_1} \times \dots \times A_{\alpha_n} \rightarrow A_{\alpha_r}$ и сигнатуры Π

n -местных предикатов $\pi : A_{\alpha_1} \times \dots \times A_{\alpha_n} \rightarrow \{0,1\}$, называется *многоосновой алгебраической системой*.

Абстрактные типы данных (они же *объекты* или *классы*), сокращенно АТД, определяются как многоосновные алгебраические системы.

Назовем *универсальной алгебраической машиной* АТД, двухосновные алгебраические системы вида $E = \langle S, T; \Omega; \Pi \rangle$. Основу S назовем *структурой*, а T – *типом*. Структура представляет собой некоторую конструкцию, составленную из элементов *типа*. Типичные примеры такого рода структур – векторы матрицы, графы. Выбор *типа* определяется особенностями решаемой задачи. Очевидно, что если S – структура, а T_1, \dots, T_n – допустимые для этой структуры типы, то T_1, \dots, T_n – однотипные алгебраические системы. Так как типы T_1, \dots, T_n гомоморфные универсальные алгебраические системы, то становится возможным использование универсальных алгебраических машин для моделирования представления знаний.

Таким образом, построена алгебраическая модель представления знаний. В этой модели знания представляются двумя главными матрицами (предметных областей и субъектов), построенными по принципу построения абстрактных алгебраических машин. При необходимости могут быть построены и другие матрицы, уточняющие модель. Преобразование знаний задается алгебраическими выражениями в алгебре многомерных матриц. Например, накопление знаний субъектом может быть реализовано сложением матриц, анализ знаний субъекта операциями транспонирования, сечения и свертки, анализ соответствия «субъективных» знаний «объективным» операцией умножения матриц предметных областей и субъектов. Механизм абстрактных алгебраических машин позволяет использовать в качестве элементов матриц не только детерминированные типы, но и широко применяемые в задачах моделирования знаний стохастические и нечеткие типы данных.

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТОКА ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО УМНОЖИТЕЛЯ В НАПРЯЖЕНИЕ

Р.В. ГОЛОВЕНКОВ, В.С. ПОДОПРИГОРОВ, Ю.В. ТРОИЦКИЙ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: troickii_yurii@mail.ru

Фотоэлектронный умножитель (ФЭУ) – очень распространенный во многих областях науки и техники детектор излучения. Он позволяет регистрировать и предельно слабые и довольно интенсивные потоки

фотонов. ФЭУ можно представить источником тока с бесконечным внутренним сопротивлением с диапазоном изменения токов от единиц или долей наноампера (темновой ток) до десятков миллиампер.

Наиболее простой способ измерения тока ФЭУ состоит в преобразовании его в более удобную величину – напряжение с помощью преобразователя ток – напряжение на базе операционного усилителя (рис 1а).

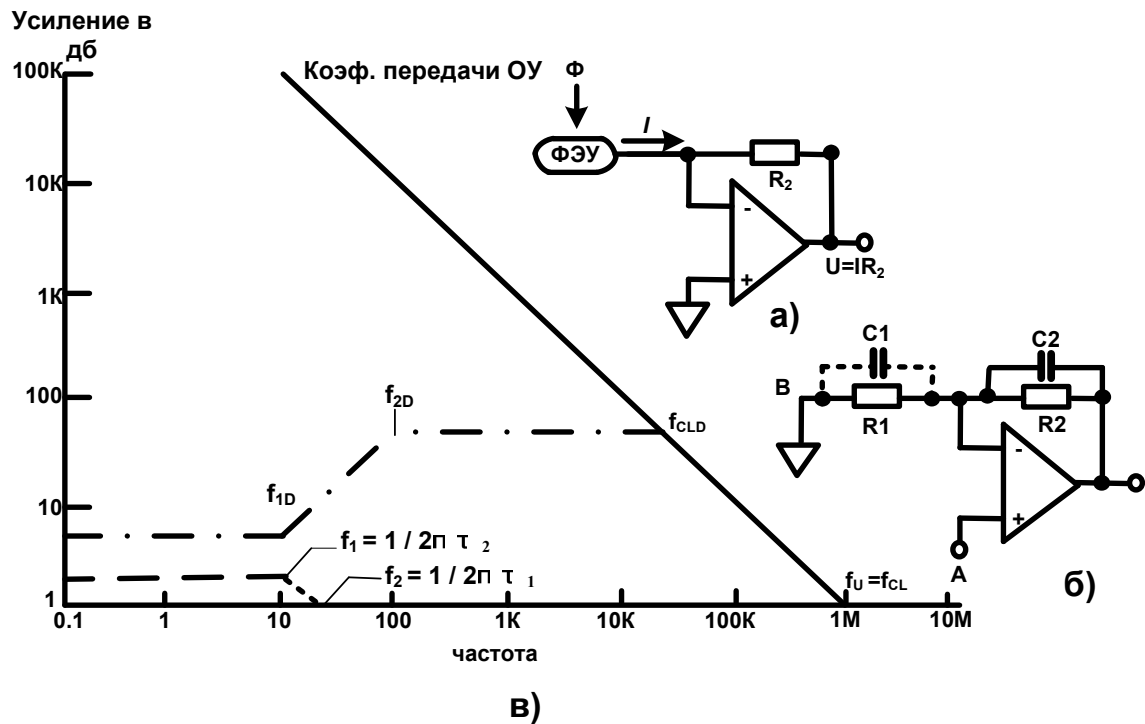


Рис.1. Преобразователь тока хемилюминесценции в напряжение (а), эквивалентная схема (б), обобщенная диаграмма Боде для шумового усиления (NG) (в)

Преобразование малых сигналов требует тщательного исследования всех источников шума, которые влияют на точность преобразования.

В схеме (рис. 1а) ФЭУ рассматривается как источник тока с бесконечным внутренним сопротивлением. Однако, существенная зависимость этого тока от напряжения питания [1], вызываемого шумами ОУ $e_{ш}$, требует учета его дифференциального внутреннего сопротивления R_i , величина которого лежит в пределах от единиц ГОм в районе темновых токов до десятков Мом в районе типовых режимов работы.

Шумовое усиление равно усилению для сигнала с включением ОУ в режиме повторения напряжения (усиление от точки «А» до выхода) (рис. 1б).

Полосу шумового усиления f_{CL} (рис. 1в) обычно определяют по точке пересечения логарифмической амплитудно-частотной

характеристики (ЛАЧХ) замкнутой системы (линии 2,3) с ЛАЧХ разомкнутого усилителя (рис. 1в) [2].

Линия 1 на рисунке соответствует случаю использования в качестве источника тока фотодиода, рассматриваемого чаще в литературе, линия 2 иллюстрирует работу ФЭУ. Передаточная функция $NG(s)$ для обоих случаев имеет вид

$$NG = 1 + \frac{R_2(R_1C_1s + 1)}{R_1(R_2C_2s + 1)} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau_1s + 1}{\tau_2s + 1}$$

где
$$\tau_1 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}(C_1 + C_2), \quad \tau_2 = R_2C_2.$$

Если для преобразователя тока фотодиода $R_2 < R_1$, то для ФЭУ $R_1 < R_2$. Кроме того, как правило, ФЭУ не шунтируется конденсатором ($C_1 = 0$). В результате этого в отличие от фотодиодной характеристики постоянная времени $\tau_1 < \tau_2$. Соответственно, в этом случае ЛАЧХ (линия 3, рис. 1в) будет принципиально отличаться от соответствующей диаграммы фотодиодного преобразователя (линия 2, рис. 1в). В результате значительно будут отличаться полосы пропускания для каждого случая f_{CLD} и f_{CL} , соответственно, но при этом интегральная площадь распределения полосы пропускания в случае ФЭУ будет меньше. С достаточно высокой точностью можно считать, что во всей полосе пропускания усилителя шумы проходят на его выход с единичным коэффициентом передачи. Полученные результаты анализа полностью подтвердились при испытании опытного образца хемилюминометра, построенного на базе ФЭУ.

Литература

1. Заглубский А.А., Цыганенко Н.М., Чернова А.П. Детекторы излучения: учебное пособие. – СПб., 2007. – 41 с.
2. Методы практического конструирования при нормировании сигналов с датчиков. <http://www.autex.ru>. (По материалам семинара «Practical techniques for sensor signal conditioning». <http://www.analog.com>.)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ АКТИВНЫМ ВЫПРЯМИТЕЛЕМ

С.В. ДРОЗДЕЦКИЙ, А.О. ШИРЯЕВ
Филиал «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске
e-mail: thrush007@yandex.ru

В настоящее время к выпрямителям предъявляются требования обеспечения синусоидального потребляемого тока, стабилизации и

регулирования напряжения на нагрузке, поддержания близкого к единице коэффициента мощности. Указанные проблемы позволяет решить активный выпрямитель. На рисунке 1 приведена силовая часть трехфазного активного выпрямителя напряжения.

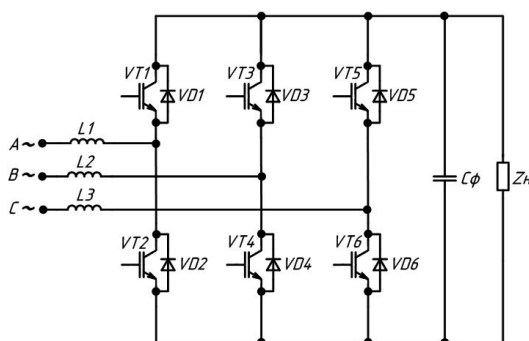


Рис. 1. Силовая часть трехфазного активного выпрямителя

На входе включены небольшие высокочастотные индуктивности L1-3. На выходе – большая емкость Cφ, предназначенная для фильтрации низкочастотных сетевых пульсаций. В мощных преобразователях в качестве ключей используются IGBT-транзисторы. Применение полностью управляемых ключей позволяет обеспечить произвольный фазовый сдвиг между фазным током и напряжением. Преобразователь может работать в выпрямительном режиме с поддержанием близкого к единице коэффициента мощности, в инверторном, а также в режиме компенсатора реактивной мощности.

В устройствах силовой электроники не всегда требуется возможность работы активного выпрямителя во всех указанных режимах. При работе преобразователя в выпрямительном режиме система управления должна обеспечивать поддержание близкого к единице коэффициента мощности и стабилизацию выходного напряжения на заданном уровне. При этом должна быть достигнута электромагнитная совместимость выпрямителя с сетью.

Широкое применение получили системы управления по компонентам обобщенного вектора тока в синхронно вращающейся системе d, q – координат, а также использующие метод прямого управления мощностью [1]. Но практическая реализация таких систем управления имеет определенные трудности. Достаточно сложные математические преобразования в реальном времени требуют применения цифровых сигнальных процессоров либо быстродействующих специализированных микроконтроллеров. Проблемы проектирования, отладки и моделирования цифровых систем управления в конечном итоге сказываются на стоимости и надежности разработанных преобразователей. Поэтому аналоговые системы управления по-прежнему актуальны.

На рисунке 2 представлена функциональная схема аналоговой системы управления активным выпрямителем. Для виртуального эксперимента использовалась среда Matlab/Simulink.

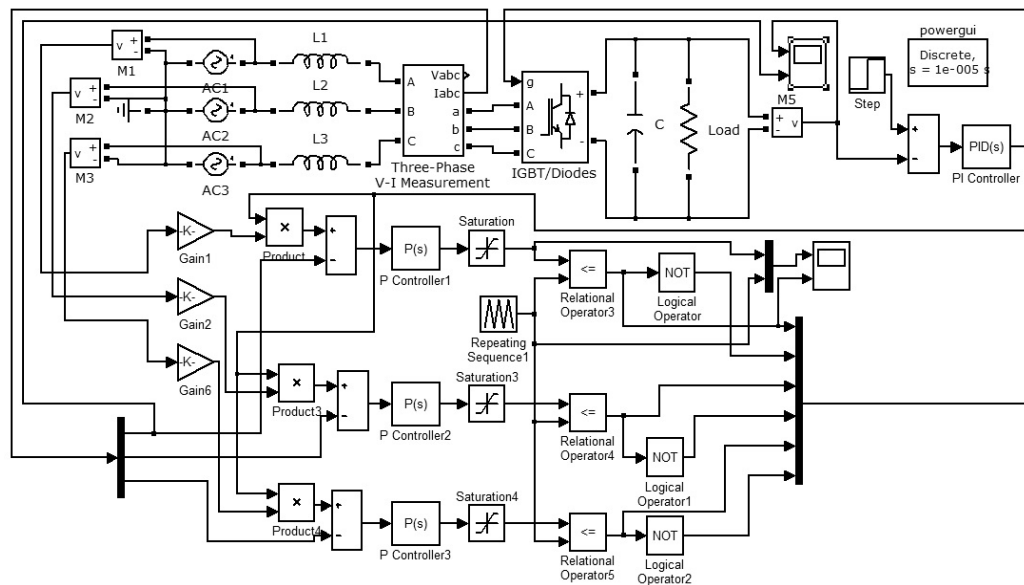


Рис. 2. Функциональная схема активного выпрямителя с аналоговой системой управления

На вход ПИД-регулятора поступает разностный сигнал уставки и выходного напряжения. При настройке ПИД-регулятора предпочтение отдавалось качеству переходного процесса, а не точности поддержания выходного напряжения. Усиленный сигнал рассогласования поступает на блоки умножения каждого из трех каналов управления. Также на блоки умножения подаются сигналы с датчиков фазных напряжений. Выходные сигналы представляют собой синусоидальные уставки тока с соответствующими фазовыми сдвигами 0 , 120° , -120° . Далее вычисляется разность между током задания и реальным током, масштабируется П-регулятором, поступает на блок ограничения. Максимальные выходные значения блока ограничения меньше амплитуды треугольного сигнала. Компараторы сравнивают сигнал разности между током задания и реальным током с треугольным сигналом и формируют импульсы управления ключами.

Частота опорного пилообразного сигнала определяет частоту переключения IGBT-транзисторов. Для моделирования выбрана частота коммутации около 5 кГц. В реальных преобразователях рабочие частоты ключей могут достигать десятков килогерц.

На рисунке 3 приведены временные диаграммы выходного напряжения и потребляемого из сети тока фазы А.

Преобразователь быстро выходит на режим, перерегулирование мало, фазовый сдвиг небольшой. В середине интервала моделирования увеличивается уставка напряжения, выходное напряжение переходит к

новому значению. Искажения потребляемого из сети тока не превышают нескольких процентов.

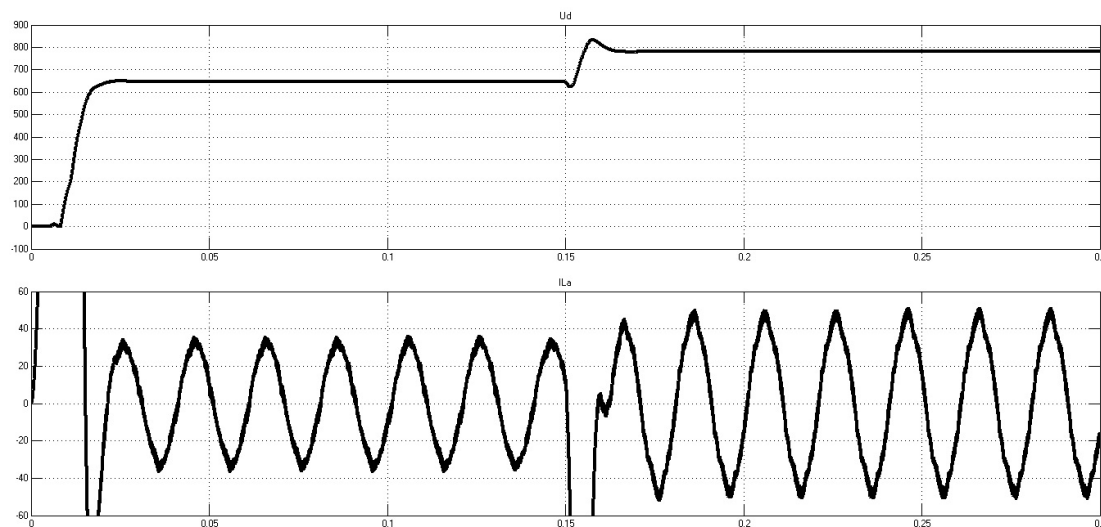


Рис. 3. Выходное напряжение и потребляемый из сети ток фазы А

Широкие функциональные возможности активного выпрямителя позволяют использовать его не только как ККМ, но и как компенсатор реактивной мощности, активный фильтр, а также в приводе постоянного тока с возможностью рекуперации энергии в сеть и в частотно-регулируемом приводе [2]. Если от преобразователя требуется только выпрямительный режим, целесообразно применить рассмотренную выше достаточно простую аналоговую систему управления.

Литература

1. Шрейнер Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. – Екатеринбург: УРО РАН, 2000. – 654 с.
2. Крутиков К.К, Рожков В.В. Применение многофункциональных силовых активных фильтров в составе мощного частотно-регулируемого привода // Электричество. – 2011. – №2. – С. 32–38.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: ypy1101@gmail.com

Роль визуализации в преподавании трудно переоценить. Хорошая визуализация может значительно облегчить понимание. Такая визуализация вооружает учащегося правильными моделями,

помогающими ему делать интуитивные догадки относительно изучаемого объекта.

Придумать хорошую визуализацию непросто. Удачная визуализация – это, как правило, продукт серьезных размышлений. Примерами открытий в области визуализации служат таблица Менделеева в химии, интерфейс Norton Commander в информатике, позиционная система счисления в математике.

Пример с позиционной системой счисления заслуживает более подробного обсуждения. Эта визуализация, несомненно, является одним из величайших достижений в математике, может быть, даже самым великим.

Поясним сказанное. В средние века для обозначения чисел использовалась римская система счисления. Правила действия над числами в этой системе были очень сложными. Чтобы научиться выполнять арифметические операции над числами, надо было закончить университет. При этом не каждый европейский университет давал такие знания. С изобретением другой визуализации чисел – позиционной десятичной системы счисления – операции над натуральными числами стали доступны выпускникам детского сада.

Автору неизвестны более яркие примеры полезности визуализации в преподавании – новая визуализация сложного объекта, доступного для понимания лишь университетским выпускникам, сделала его понятным детям из детского сада.

При изучении определенной предметной области следует учитывать много факторов, в том числе и прошлый опыт изучаемого в визуализации объектов данной предметной области.

Преподаватели иностранного языка настолько часто сталкиваются с такими проблемами визуализации, что даже ввели специальное понятие «неправильная визуализация». Поясним суть этого понятия на примере. Если преподаватель читает с арабскими студентами какой-нибудь текст про русскую школьницу Машу, ученицу третьего класса, они всё понимают. Все слова знакомые, вопросов нет, с виду всё хорошо. Но про себя студенты (невольно) всё время представляют себе арабскую девочку, в арабской одежде, с арабской книжкой, причём ещё такого возраста, какого бывают их третьеклассницы (что, почти наверняка, не совпадает с возрастом российских третьеклассниц).

Другим примером неправильной визуализации в математике, по мнению автора, являются попытки представить прямую как множество точек. Такое представление противоречит известным «физическим моделям» прямой (туго натянутая нить, луч света и т.п.). Естественно представлять прямую как самостоятельный объект, а не как множество точек. Прямая находится в некотором отношении с точками (называемом отношением инцидентности), а не состоит из точек.

В известной аналитической модели евклидовой плоскости прямая представляется тройкой $\langle a, b, c \rangle$ действительных чисел ($a^2 + b^2 \neq 0$),

а точка - парой (x, y) действительных чисел. Совершенно неестественно в такой модели считать, что прямая состоит из точек.

При изучении нового полезно давать несколько визуализаций изучаемого объекта. Например, расширенная несобственными точками и несобственной прямой евклидова плоскость является хорошей визуализацией проективной плоскости. Но указанная визуализация обладает одним недостатком – несобственная прямая в ней играет особую роль. Указанный недостаток легко устраняется с помощью аналитической визуализации. При изучении геометрии проективных плоскостей удобно использовать оба варианта визуализации. Первый вариант подключает нашу геометрическую интуицию, второй – алгебраическую.

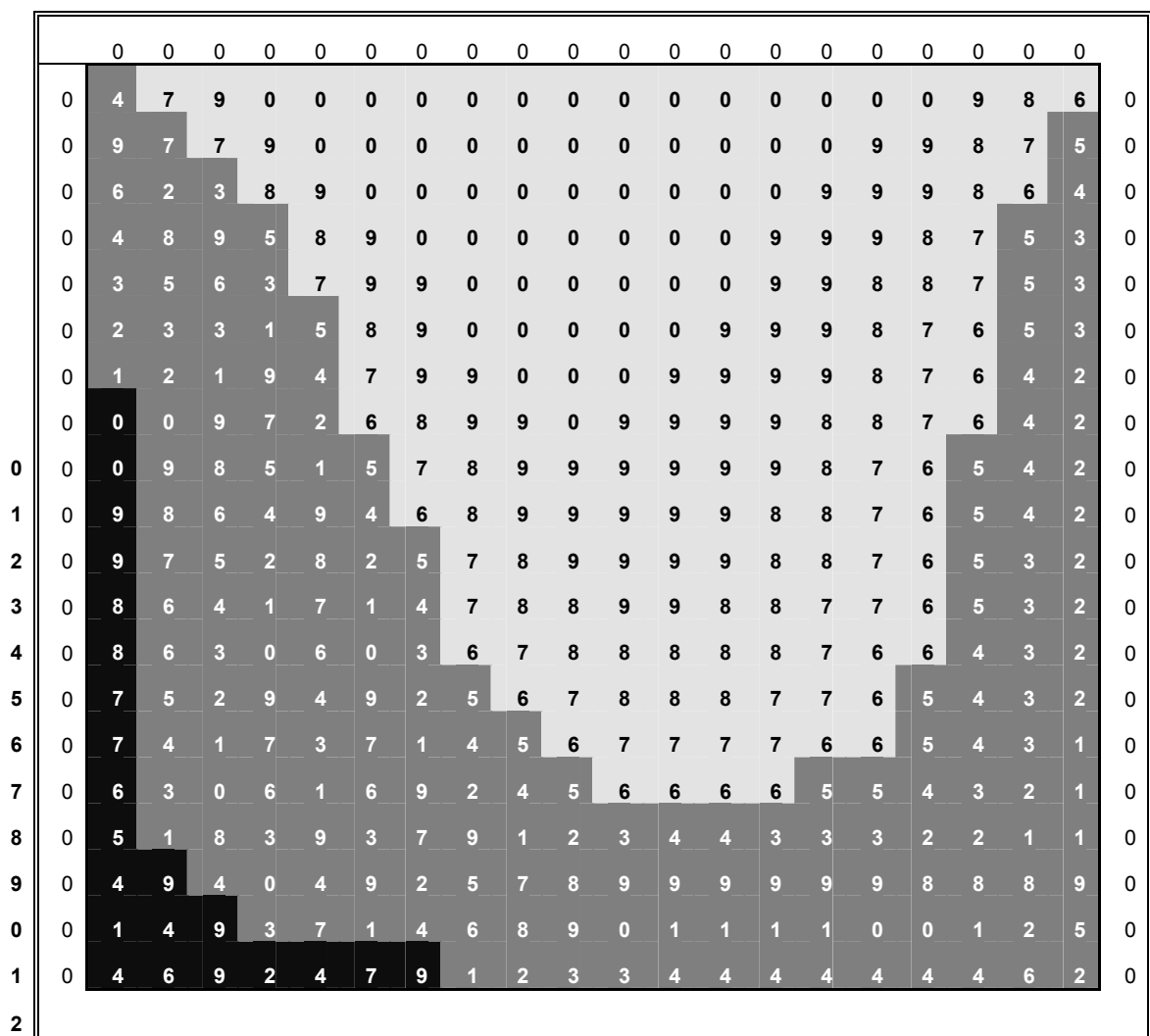


Рис. 1. Пластинка, подогреваемая с четырех сторон

Наилучший эффект в обучении достигается, если к процессу визуализации объекта подключается ученик. В последние годы для визуализации часто привлекается компьютер, значительно расширяющий возможности визуализации.

Проиллюстрируем использование компьютера для визуализации на примере решения задачи о распределении температуры на прямоугольной пластинке.

Задача о распределении температуры. Имеется прямоугольная пластина (рис. 1). С четырех сторон пластина подогревается источниками с различной температурой. Требуется визуализировать распределение температуры на пластине и выделить цветом три диапазона температур.

Идея дискретизации приводит школьников к необходимости разбить пластину на маленькие прямоугольники, а для вычислений воспользоваться электронными таблицами.

Построим электронную таблицу так, чтобы в каждом маленьком прямоугольнике отображалась его температура в текущий момент времени. Предоставим пользователю также возможность изменения температур пластины с четырех сторон, верхней границы среднего диапазона температур и нижней границы среднего диапазона температур. Закраску диапазонов произведем с помощью условного форматирования.

На рисунке 1 показан результат визуализации распределения температуры при следующих значениях параметров: температура пластины с северной стороны - 70° ; температура пластины с восточной стороны - 60° ; температура пластины с южной стороны - 0° ; температура пластины с западной стороны - 20° ; верхняя граница среднего диапазона температур - 65° ; нижняя граница среднего диапазона температур - 31° .

Рассмотренный вариант визуализации позволяет мгновенно получать картину распределения температуры на пластине в зависимости от заданных пользователем шести параметров.

Очевидно, что предложенную модель визуализации легко модернизировать, например, для пластинки произвольной формы или для источников подогрева сложной конфигурации.

В заключение отметим, что в настоящее время пока еще недостаточно изучены возможности использования визуализации в учебном процессе. Указанное направление ожидает своих исследователей.

О ВЫЧИСЛЕНИЯХ В МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ, Е.Н. ДАНИЛЕНКОВА, Д.А. ЛАГУТКИН

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: ypy1101@gmail.com

Пусть имеется множество процессов (задач) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, характеризующихся некоторыми параметрами, например,

необходимым временем $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{mn}$ выполнения процесса на процессоре (машине) p_1, p_2, \dots, p_n заданного типа или объемом v_1, v_2, \dots, v_m требуемой памяти. Требуется выполнить все процессы с помощью многопроцессорной вычислительной системы S .

Выполнение процессов начинается с их качественного распределения по процессорам. Чаще всего в качестве критерия качества распределения выбирается время выполнения всего набора задач, хотя используются и другие критерии: минимальное время простоя различных устройств вычислительной системы; минимальное среднее время ожидания решения для всего набора задач; минимальное число используемых процессоров при заранее заданном времени окончания решения задач и т. д. Иногда используются обобщенные критерии в виде функции, устанавливающей зависимость между отдельными частными критериями. В этом случае большую сложность представляет процедура обоснованного формирования функции, задающей обобщенный критерий.

В связи с необходимостью распределения процессов по процессорам возникает несколько задач.

1. Построить распределение R_1, R_2, \dots, R_k процессов по процессорам p_1, p_2, \dots, p_k , учитывая параметры процессов, так, чтобы минимизировать некоторый итоговый параметр, например, общее время выполнения всех процессов из множества A .

2. Для фиксированного n построить распределение R_1, R_2, \dots, R_n процессов из множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ по n процессорам p_1, p_2, \dots, p_n , минимизирующее общее время выполнения всех процессов, с учетом параметров процессов и времени d_1, d_2, \dots, d_m поступления для выполнения процессов из множества A .

Задачи распределения процессов по процессорам называют задачами диспетчирования. Выделяют два подхода к решению задач диспетчирования: статический и динамический.

При статическом диспетчировании процессы начинают выполняться только после окончания диспетчирования всего входного набора. Оптимальное решение задачи статического диспетчирования можно получить разными способами, например, полным перебором возможных вариантов.

В случае параллельных вычислений для решения второй задачи чаще всего используются методы теории расписаний. Наибольший эффект при этом достигается, если задачи из множества A на распределение поступают одновременно.

Для конкретной вычислительной системы при заданном входном наборе процессов задача статического диспетчирования может быть представлена как «задача о назначениях» и решена известными

методами целочисленного программирования. Однако с ростом числа процессов во входном наборе время решения задачи диспетчирования становится большим, чем временной выигрыш, полученный в результате ее решения. Поэтому подход, основанный на методах динамического диспетчирования, считается более перспективным.

При динамическом диспетчировании процессы назначаются для выполнения по мере освобождения процессоров. Применение динамического диспетчирования приводит, как правило, к субоптимальному решению задачи о назначениях. При динамическом диспетчировании применяются алгоритмы со сравнительно малой трудоемкостью. Во многих случаях примером такого алгоритма может служить жадный алгоритм, посылающий на освободившийся процессор процесс с наибольшей длительностью.

В заключение отметим, что в настоящее время вопрос об эффективной диспетчеризации процессов в общем случае остается открытым.

РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ НЕЧЁТКИХ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ

А.С. ЗАХАРОВ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: auth1989@yandex.ru

Использование нечётких байесовских сетей (НБС) для поддержки принятия решений (ППР) имеет ряд достоинств по сравнению с использованием классических байесовских сетей для ППР [1]. Однако имеется ряд недостатков, которые не позволяют говорить об эффективном использовании НБС в задачах ППР.

Таковыми недостатками, в частности, являются: невозможность учёта изменчивости пользовательских предпочтений с течением времени, а также невозможность учёта изменений, происходящих в моделируемой системе.

Для решения указанных недостатков предлагаются динамические нечёткие байесовские сети, способные повысить качество поддержки принятия решений.

Базовая модель НБС для ППР. Пусть имеется множество переменных предметной области – сущностей, которые можно выделить в предметной области и между которыми возможно установить причинно-следственные зависимости: $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ – узлы байесовской сети. $S_i = \{S_i^1, \dots, S_i^m\}$ – набор состояний i -го узла, m –

число состояний i -го узла. $P_i = \{P_i^1, \dots, P_i^m\}$ – распределение вероятностей для i -го узла, подчиняющееся условиям нормировки, P_i^j – вероятность нахождения i -го узла в j -ом состоянии. $Par_i = \{u_l\}, l \neq i$ – совокупность узлов, влияющих на распределение вероятностей i -го узла (совокупность родительских узлов).
 $V_i = \{ \langle V_{i,1}^{par_1^1 \dots par_n^1}, \dots, V_{i,1}^{par_1^r \dots par_n^s} \rangle, \dots, \langle V_{i,m}^{par_1^1 \dots par_n^1}, \dots, V_{i,m}^{par_1^r \dots par_n^s} \rangle \}$ – таблица условных вероятностей (совокупность условных вероятностей), отражающая количественную зависимость нахождения i -го узла в том или ином состоянии.

Выделим в исходном множестве U : подмножество альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и подмножество исходов $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Для всех элементов множеств A и R должно выполняться следующее условие: наличие причинно-следственной связи между выбором некоторой альтернативы $a_i \in A$ и наступлением исхода $r_j \in R$.

Каждый узел в байесовской сети помимо вероятности может характеризоваться рядом параметров $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$ где π_i – конкретный параметр (например, вероятность, полезность, цена, надёжность). Очевидно, конкретный набор параметров должен определяться целями, которые ставит лицо, принимающее решение. При этом данные параметры должны не «выводиться» друг из друга, а основываться на независимых или слабо коррелированных характеристиках системы.

Базовая модель БС для ППР может быть дополнена различными компонентами, позволяющими отразить различные особенности решаемой задачи. Формируя набор необходимых конструктивов в зависимости от решаемой задачи, мы в конечном итоге получаем модель, наиболее полно удовлетворяющую наши потребности. Ниже приводится описание заявленных компонентов.

Динамика априорных вероятностей. В базовой модели априорные вероятности задаются однократно и в процессе использования модели не подлежат изменению. Однако, зачастую, требуется ещё на этапе построения заложить в модель возможность её самомодификации. Это можно назвать динамикой развития модели. Она проявляется в том, что часть параметров модели в процессе её функционирования может меняться.

Пусть $P_i^j(t)$ – величина, характеризующая априорную вероятность нахождения i -го узла в j -ом состоянии (как правило, это значение нечёткой или чёткой вероятностной меры).

$P_i^j(t+1) = F(P_i^j(t))$ – зависимость, характеризующая изменение значения величины, идентифицирующей текущее j -ое состояние узла.

F – функция, удовлетворяющая условиям нормировки для чёткой/нечёткой вероятностной меры.

Тогда из условия нормировки ($\sum_{j=1}^n P_i^j(t) = 1, \sum_{j=1}^n P_i^j(t+1) = 1$) можно найти: $\delta = \frac{P_i^j(t+1) - P_i^j(t)}{n-1}$, где n – общее число узлов, δ – величина, на которую должна измениться априорная вероятность нахождения узла в каждом из оставшихся состояний (для которых не задан закон изменения вероятности).

Данный случай легко обобщить на случай, когда закон изменения априорной вероятности задан для нескольких состояний.

Динамика взаимовлияний (связей между узлами). В базовой модели влияния между узлами задаются с помощью так называемых таблиц условных вероятностей. При этом сами условные вероятности, определяющие количественно зависимость между узлами, задаются однократно в процессе построения модели.

Очевидно, что существует класс задач, в которых взаимовлияние узлов количественно изменяется с течением времени. Этот тип динамики также можно назвать динамикой развития модели.

Пусть $V_{i,k}^{par_1^q \dots par_n^q}$ – значение условной вероятности, характеризующее влияние всех родительских узлов для i -го узла, находящихся в q -ом состоянии, на нахождение i -го узла в k -ом состоянии. Тогда $V_{i,k}^{par_1^q \dots par_n^q}(t+1) = F(V_{i,k}^{par_1^q \dots par_n^q}(t))$ – зависимость, характеризующая изменение влияния родительских узлов в q -ом состоянии на i -й узел в k -ом состоянии с течением времени. F – функция, удовлетворяющая условиям нормировки для чёткой/нечёткой вероятностной меры.

Также должно выполняться условие нормировки: $\forall j: \sum_{q=1}^m V_{i_j}^{par_1^q \dots par_n^q}(t) = 1, \forall j: \sum_{q=1}^m V_{i_j}^{par_1^q \dots par_n^q}(t+1) = 1$, где m – число состояний каждого из родительских узлов (предполагается одинаковым для упрощения записи), j – число состояний i -го узла, n – число родительских узлов.

Данные формулы легко обобщить на случай нескольких влияющих узлов.

Отражение динамики предметной области. Динамика системы определяется следующими составляющими [2]:

- состояние системы;
- отображение перехода;
- отображение выхода.

Обозначим состояние как $z(t)$. Тогда $y(t) = \pi(t, z(t))$ – отображение выхода, $z(t) = \mu_{\tau,t}(z_\tau, x^*)$ – отображение перехода. Опишем каждый из компонентов динамики в контексте его отражения в БС.

Состояние БС $z(t)$ определяется следующими факторами: состояние узлов сети $S = \{S_1^j, \dots, S_n^m\}$, где n – количество узлов сети, S_i^j – состояние i -го узла сети, P_i – распределение вероятностей по состояниям i -го узла сети, связи между узлами, т.е. факт влияния одного узла на другой, условные вероятности, отражающие степень взаимовлияния узлов сети ($V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$) – множество характеристик влияния узлов (т.е. по сути таблиц условных вероятностей), $V_i = \{ \langle V_{i,1}^{par^1 \dots par^1}, \dots, V_{i,1}^{par^1 \dots par^s} \rangle, \dots, \langle V_{i,m}^{par^1 \dots par^1}, \dots, V_{i,m}^{par^1 \dots par^s} \rangle \}$ – таблица условных вероятностей i -го узла, m – число состояний i -го узла, $V_{i,j}^{par^k \dots par^k}$ – характеристика влияния на j -е состояние i -го узла со стороны родительских узлов, находящихся в k -ом состоянии. $S_i^j = \{F(P_{1,1}, \dots, P_{r,1}), \dots, F(P_{1,t}, \dots, P_{r,t})\}$, где F – некоторое отображение, ставящее в соответствие совокупности состояний родительских узлов некоторую численную характеристику нахождения i -го узла в j -ом состоянии ($P_{r,t}$ – вероятность нахождения r -го узла в t -ом состоянии). Выделение этих компонентов в качестве факторов, определяющих состояние сети, позволяет достичь гибкости в описании динамики системы и учесть влияние на состояние системы различных групп внешних воздействий.

Выходом НБС, учитывающей систему пользовательских предпочтений, которая также может меняться с течением времени, при решении ДЗППР может являться, в зависимости от вида решаемой задачи, либо информация о наилучшей альтернативе, либо упорядоченная совокупность альтернатив. При этом отображение выхода зависит от пользовательских предпочтений. Таким образом, отображение выхода принимает следующий вид: $y(t) = \pi(t, z(t), SP(t))$, где $SP(t)$ – состояние системы пользовательских предпочтений в момент времени t .

Отражение в модели НБС динамики системы пользовательских предпочтений позволит решать класс ДЗППР, в которых предпочтения лица принимающего решения, меняются с течением времени.

Отображение перехода характеризует то, в какое состояние переходит система с течением времени при определённых входных воздействиях. В ДНБС отображение перехода определяет зависимость состояний узлов, условных вероятностей и связей между узлами в

некоторый момент времени от вышеперечисленных характеристик в предыдущий момент времени и значений входов НБС, к которым относятся свидетельства о состояниях тех или иных узлов. Отражение в НБС влияния характеристик компонентов сети, определяющих состояние сети в текущий момент времени, на характеристики компонентов сети в последующий момент времени позволяет адекватно описать процессы функционирования и развития реальной системы, моделью которой является НБС. $P_i(t+1) = \gamma(<P_i(t), \{P_k(t)\} >, \{P_r(t+1)\})$ – обобщённая зависимость, показывающая, что состояние узла в момент времени $t+1$ может быть определено не только на основании влияния родительских узлов в момент времени $t+1$, но и предысторией состояний самого узла, а также «обратными связями», т.е. состояниями других узлов в момент времени t . При этом оператор γ может реализовывать одну из моделей динамики, описанную, например, Робертсом.

Зависимость состояния узла от состояния влияющего узла. В классической модели БС влияние одного узла на другой определяется прежде всего тем, в каком состоянии находится влияющий узел. При этом схема влияния, т.е. значения условных вероятностей, остается постоянной.

Вышеописанный подход вполне адекватен, однако на практике часто возникают задачи, в которых необходимо учитывать не только то, в каком состоянии сейчас находится влияющий узел, но и то, «насколько» он в данном состоянии находится.

Пусть $V_i = \{<V_{i,1}^{par_1^1 \dots par_n^1}, \dots, V_{i,1}^{par_1^r \dots par_n^s} >, \dots, <V_{i,m}^{par_1^1 \dots par_n^1}, \dots, V_{i,m}^{par_1^r \dots par_n^s} >\}$ – таблица условных вероятностей i -го узла, n – число родительских узлов. В случае, когда не требуется учитывать «степень нахождения» узла в том или ином состоянии, может использоваться единственная таблица условных вероятностей и не использоваться дополнительных конструктивов. Вне зависимости от распределений вероятностей $\{P_1, \dots, P_k\}$ влияющих узлов количественная характеристика зависимости от данных распределений (схема влияния) будет оставаться постоянной.

Однако при необходимости разграничения схем влияния следует вводить дополнительные механизмы, способные это разграничение поддержать.

Пусть $V_i = \{V_{i_1}, \dots, V_{i_k}\}$ – совокупность схем влияния для i -го узла, k – число возможных схем влияния. *Rul* – правило, которое для всех возможных комбинаций состояний (а точнее, вероятностей,

характеризующих данные состояния) влияющих узлов ставит в соответствие единственную схему влияния $V_{ij} : Rul(P_1, \dots, P_k) = V_{ij}$.

Для различных сочетаний состояний влияющих узлов могут быть сопоставлены одинаковые схемы влияния: $Rul(P_1, \dots, P_k) = Rul(P'_1, \dots, P'_k) = V_{ij}$. Данное правило полностью определяется семантикой предметной области.

Литература

1. Захаров А.С. Поддержка принятия решений на основе нечётких байесовых сетей доверия: материалы 11-й международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения». – Смоленск, 17-19 мая 2010 г. – С. 112–114.

2. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989. – 367с.

МЕТОДЫ ПРОВЕДЕНИЯ ПЕРЕГОВОРОВ В ПРОЦЕССЕ СОГЛАСОВАНИЯ ЭКСПЕРТНЫХ ДАННЫХ В ЗАДАЧАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ ГРУППОВЫХ РЕШЕНИЙ

В.А. ЗЕРОВ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: draculea@list.ru

В процессе согласования экспертных данных одной из главных составляющих является проведение переговоров, часто очень длительных и трудных. Так как групповые решения составляют весомую долю всех решений, принимаемых политиками, бизнесменами, менеджерами, инженерами и другими специалистами, то значительную часть своей жизни они тратят на проведение самых разных по тематике и значимости переговоров. В ходе ведения переговоров им приходится учитывать очень большое количество факторов, интересов и сложных противодействующих сил, оказывающих влияние на ход переговоров и принимаемые в них решения.

Для успешного проведения переговоров по согласованию решений необходимо предложить формализованные процедуры, по которым мог бы осуществляться поиск наилучшей альтернативы. В настоящее время разрабатываются процедуры согласования этих решений [1]. Методы переговоров могут быть следующими:

- без изменения правил в процессе переговоров;
- с изменением правил в процессе переговоров;

- проводимые в один этап (без перерывов);
- проводимые в несколько этапов (с длительными перерывами);
- с одновременным объявлением нескольких новых предложений;
- с последовательным объявлением каждого нового предложения;
- с информацией, открытой для всех участников;
- с возможностью отдельных переговоров для некоторой группы участников.

Классификация систем поддержки принятия групповых решений (СППГР) по методам переговоров может быть столь же разветвленной за счет их комбинаций. Каждый метод требует реализации в СППГР своих программных особенностей [2].

Можно различать следующие типы общения при многосторонних переговорах:

- «одно время – одно пространство», когда все участники переговоров находятся в одном помещении;
- «одно время – разное пространство», когда участники территориально разобщены;
- «разное время – то же самое пространство», когда участники периодически встречаются в одном помещении, а в перерывах определяют свою позицию после очередной встречи и работают с документами;
- «разное время – разное пространство», когда участники периодически обсуждают общие проблемы при территориальной разобщенности, а в перерывах готовятся к очередной встрече.

Для обмена информацией между участниками обсуждения должна быть определена структура передаваемой информации.

При проведении переговоров в несколько этапов особенно важно учитывать изменения в обстановке, произошедшие за время между очередными раундами переговоров. Если положение партнера уже не соответствует данным о нем, то изменения вносятся в базу данных и оценивается необходимость изменения тактики ведения переговоров, поскольку изменение тактики может сказаться на последующей оценке вариантов решений. Если соглашение будет достигнуто, проводится оформление документов, фиксирующих результаты переговоров.

Таким образом, компьютерные системы поддержки принятия решения позволяют решать задачи на основе накапливаемой базы

знаний, отражающей опыт работы экспертов в рассматриваемой отрасли и находят успешное применение в следующих областях:

- обучение и консультация неопытных пользователей;
- распространение и использование уникального опыта экспертов;
- автоматизация работы экспертов по принятию решений;
- оптимизация решения проблемы, выдвижение и проверка гипотез [2; 3].

Но центральной проблемой в СППГР была и остается проблема поиска наиболее оптимального алгоритма согласования экспертных данных.

Литература

1. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. – М., 1974. – 248 с.
2. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений. – М.: СИНТЕГ, 1998. – 376 с.
3. Трахтенгерц Э.А. Многоагентные системы поддержки принятия решений // Известия АН. Теория и системы управления. – 1998. – № 5.

ЗАДАЧА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНОГО ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

А.В. КОВАЛЕВ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: drfent@mail.ru

Задача последовательностного принятия решений возникает во многих областях человеческой деятельности, в частности в диагностике. Процесс последовательностного принятия решений, как следует из его названия, сводится к последовательности промежуточных решений, которые необходимы для уточнения информации и принятия верного окончательного решения в данной ситуации (например, о выборе метода лечения).

Если рассматривать процесс принятия решений с позиций статистики, то его можно представить следующим образом: если априорные вероятности ранее верно принятых окончательных решений $P(d_j)$ в данной ситуации могут быть получены из статистических данных, то энтропия сложившейся системы будет равна

$$H(S) = - \sum_{j=1}^n P(d_j) \log_2 P(d_j).$$

В результате окончательного принятия решения после последовательности принятых решений K энтропия стремится к нулю.

Таким образом, внесенная в процессе последовательного принятия решений информация равняется изначальной энтропии системы.

Из этого следует, что количество информации, которую необходимо получить при последовательном принятии решений, является заданным и требуется построить оптимальный процесс его накопления. Накопление информации происходит при последовательном принятии решений об уточнении сложившейся ситуации.

Введем величину c_{ij} – коэффициент сложности принятия решения x_j для принятия окончательного решения d_i . Данный коэффициент характеризует трудоемкость и стоимость получения данных, длительность выполнения действия в результате принятого решения и другие факторы. Предполагается, что данный коэффициент не зависит от принятых ранее решений.

Тогда назовем коэффициентом оптимальности принятого решения x_j для принятия окончательного решения d_i величину:

$$\lambda_{ij} = J_{d_i}(x_j) / c_{ij},$$

где $J_{d_i}(x_j)$ – количество информации, приносимое в систему при принятии решения x_j в целях принятия окончательного решения d_i , в общем случае определяется с учетом результатов предыдущих принятых решений.

Тогда коэффициент оптимальности принятого решения x_j вычисляется путем усреднения информации и сложности принятия решения по возможным в рассматриваемой ситуации окончательным решениям:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^n P(d_i) J_{d_i}(x_j) / \sum_{i=1}^n P(d_i) c_{ij} = J_{d_i}(x_j) / C_j.$$

Для последовательности решений K , состоящей из ν решений, коэффициент оптимальности будет определяться как:

$$\lambda = J_S(K^{(\nu)}) / \sum_{j=1}^{\nu} C_j,$$

где $J_S(K^{(\nu)})$ – количество информации, получаемое при последовательном принятии решений.

Очевидно, что коэффициент будет наибольшим, если необходимое количество информации получается при наименьшем числе отдельных принятых решений (применительно к деревьям решений это означает наименьшую глубину дерева решений).

Оптимальный процесс последовательного принятия решений должен обеспечить получение наибольшего значения коэффициента оптимальности всей последовательности решений, это и является условием его оптимальности.

Исходя из этого, оптимальный процесс последовательного принятия решений в случае максимизации величины:

$$\lambda = \frac{J_s(x_1) + J_s(x_2/x_1') + J_s(x_3/x_1'x_2') + \dots}{C1 + C2 + C3 + \dots}.$$

Поскольку результаты принятых решений заранее не всегда известны, может быть использовано построение процесса, близкого к оптимальному, с предсказанием на несколько шагов. Аналог одношагового алгоритма используется в деревьях решений.

Литература

4. Биргер И.А. Техническая диагностика. – М.: Машиностроение, 1978.
5. Юнкеров В.И., Григорьев С.Г. Математико-статистическая обработка данных медицинских исследований. – СПб.: ВМедА, 2002.

ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ СИЛОВОГО ТРАНСФОРМАТОРА В ОБРАТНОХОДОВОМ «КОСОМ МОСТЕ»

И.А. КРУГЛИКОВ, А.О. ШИРЯЕВ
Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: ilja-k90@mail.ru

В настоящее время в сетевых источниках питания средней мощности сложилась тенденция вытеснения двухтактного полумостового преобразователя однократным сдвоенным («косым мостом») [1].

В традиционном «косом мосте» (рис. 1а) транзисторные ключи открываются и закрываются одновременно (рис. 1б). Однако при таком способе управления не удастся устранить перерегулирование выходного напряжения при быстром выходе на режим (рис. 1в).

В режиме двойной модуляции (М2) (см. рис. 1г) у однократного сдвоенного обратного преобразователя наряду с традиционными интервалами накопления (1–2) и передачи энергии в нагрузку (3–5) возможен третий интервал (2–3 или 5–6) – хранение энергии, когда один транзистор открыт, а другой заперт. При этом ток первичной обмотки циркулирует по контуру: VD1-VT2-WI или VD2-VT1-WI. Транзистор, входящий в контур, может длительное время находиться в открытом

состоянии. Более удобен контур с VT1, для которого возможна непосредственная связь транзистора с системой управления.

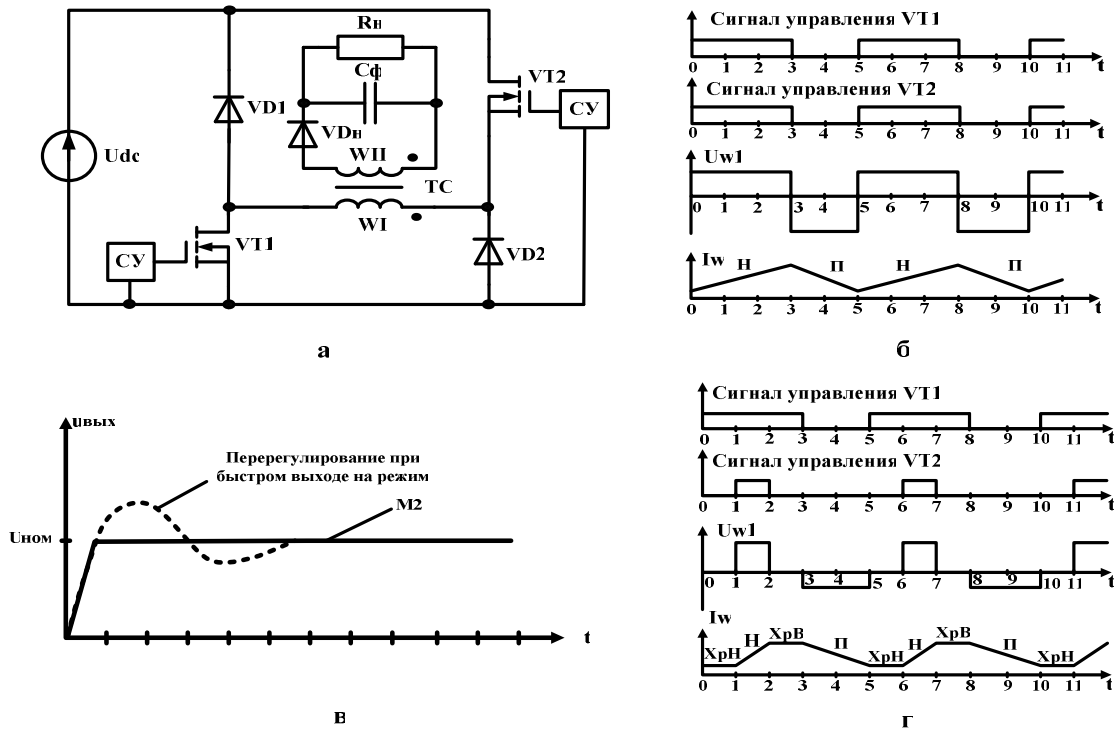


Рис. 1. Схема преобразователя (а) и временные диаграммы его работы в обычном режиме (б, в) и в режиме двойной модуляции (г)

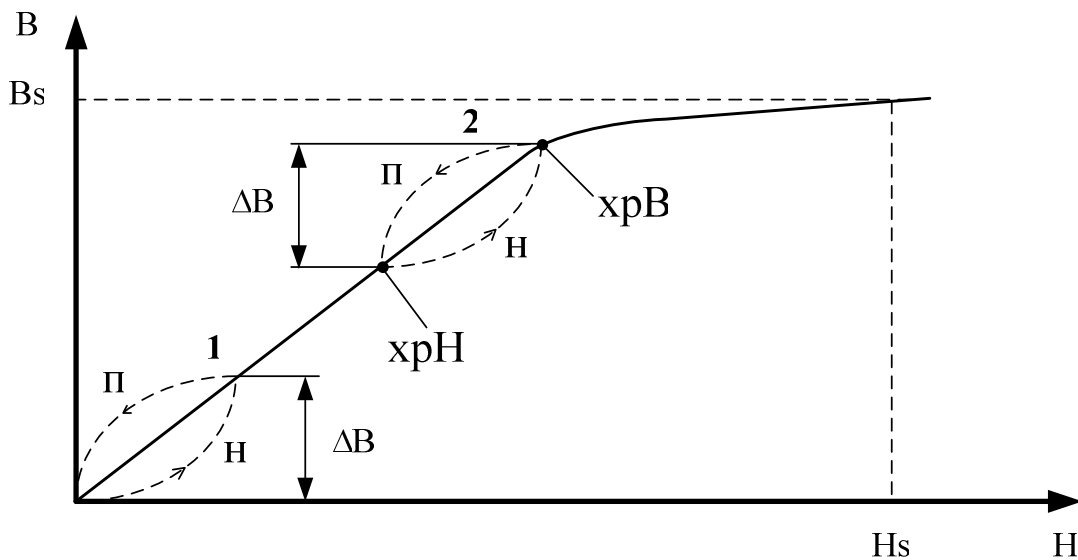


Рис. 2. Кривая намагничивания сердечника трансформатора

Потери на перемагничивание сердечника

$$P = \alpha \cdot \Delta B^2,$$

где α – эмпирический коэффициент, зависящий от параметров трансформатора, ΔB – рабочий перепад индукции [2]. Для уменьшения

потерь в сердечнике в практических схемах ΔB выбирается меньше максимально возможного (цикл 1 на рис. 2). Остальная часть кривой намагничивания не используется.

В режиме двойной модуляции в сердечник необходимо закачивать большую постоянную составляющую индукции. При этом потери на перемагничивание увеличиваться не будут, так как перепад ΔB остается неизменным (цикл 2 на рис. 2). Однако работа сердечника вблизи индукции насыщения требует более тщательного расчета параметров трансформатора.

Виртуальный эксперимент подтвердил возможность получения уникальных динамических свойств преобразователя в режиме двойной модуляции (рис. 1в), что позволяет сделать вывод о перспективности использования данного алгоритма управления в быстродействующих источниках питания с улучшенными динамическими свойствами.

Литература

1. Гончаров А. Начальная школа построения импульсных DC/DC преобразователей // Электронные компоненты. – М. – 2003. – № 5. – С. 106–109.

2. Поликарпов А.Г., Сергиенко Е.Ф. Импульсные регуляторы и преобразователи постоянного напряжения. – М.: Изд-во МЭИ, 1998.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИИ ОПЕРАЦИИ СОЕДИНЕНИЯ

Д.И. МАКАРОВ, В.И. МУНЕРМАН

Смоленский государственный университет, г.Смоленск

e-mail: vimoon@gmail.com

Рассмотрена операция *соединения* как операция *слияния нестрого упорядоченных файлов* [1; 2]. Пусть X_K и Y_L – файлы, упорядоченные (возможно строго) по множествам ключей K и L , причем выполняется условие $K \cap L \neq \emptyset$, и пусть M – множество ключей, связанное с множествами K и L соотношениями:

1. $M \subseteq K \cup L$,
2. $M \cap K \neq \emptyset$ и $M \cap L \neq \emptyset$.

По крайней мере, один файл X_M или Y_M нестрого упорядочен по множеству ключей M . Если $K \not\subseteq L$ и $L \not\subseteq K$, то оба файла нестрого упорядочены по множеству ключей M . Слияние файлов производится по множеству ключей M . Пусть M^* – фиксированный экземпляр множества ключей M , а K^* и L^* – такие экземпляры множеств ключей K и L , что значения одноименных ключей в M^* , K^* и L^* совпадают. Тогда можно задать вычисление класса эквивалентности файла Z_M по следующему правилу:

$$Z_{M^*} = \begin{cases} \Theta_{M^*}, & \text{если } X_{K^*} = \Theta_{K^*}, \text{ или } Y_{L^*} = \Theta_{L^*} \\ f(X_{K^*}, Y_{L^*}), & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Функция $f(X_{K^*}, Y_{L^*})$ определена на классах эквивалентности X_{K^*} и Y_{L^*} , а ее значение – класс эквивалентности Z_M , состоящий из элементов, каждый из которых вычисляется из пары элементов, принадлежащей декартову произведению $X_{K^*} \times Y_{L^*}$. Тогда

$$Z_{M^*} = \bigcup_{i=1}^k f(X_{K_i^*}, Y_{L_i^*}), \text{ где } k \text{ – число классов эквивалентности в каждом из}$$

файлов, включая классы эквивалентности Θ_{M^*} , его структура показана в таблице 1.

Таблица 1

Структура нестрого упорядоченного файла

Логический номер записи	Класс эквивалентности	Номер записи в классе эквивалентности
1	1	1
...		
m_1	1	m_1
...		
$\sum_{i=1}^{n-1} m_i + 1$	n	1
...		
$\sum_{i=1}^n m_i$	n	m_n

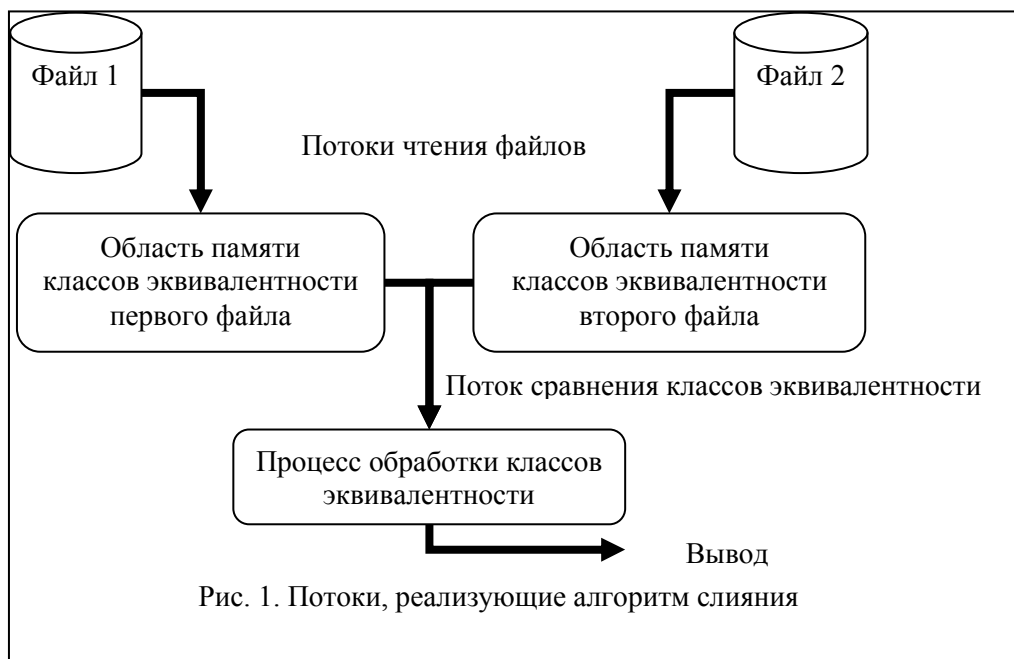


Рис. 1. Потоки, реализующие алгоритм слияния

Параллельная реализация заключается в разделении алгоритма слияния на три независимых потока как это показано на рисунке 1:

– потоки чтения файлов в память «зачерпывают» классы эквивалентности файлов в буферные зоны памяти;

– поток сравнения классов эквивалентности выбирает пары классов эквивалентности с одинаковыми значениями ключей, которые передаются потоку слияния;

– поток слияния выполняет декартово произведение классов эквивалентности и сохраняет результат.

Узлы, реализующие потоки, могут реплицироваться при наличии достаточного числа свободных процессоров.

Потоки чтения файлов могут читать индексно-последовательные файлы, вместо чтения файлов с классами эквивалентности. При этом процесс сравнения классов эквивалентности будет передавать в поток обработки информацию о расположении классов эквивалентности. Поток обработки будет производить чтение необходимых классов эквивалентности обоих файлов, выполнять декартово произведение этих классов и сохранять результаты.

Литература

1. Мунерман В.И. Теоретико-множественная модель обработки данных // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2008. – Вып. 9. – С. 114–116.

2. Емельченков Е.П., Левин Н.А., Мунерман В.И. Алгебраический подход к оптимизации разработки и эксплуатации систем управления базами данных. Системы и средства информатики /дополнительный выпуск. – М.: Изд-во ИПИ РАН. – 2009. – С. 114–137.

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ НЕЙРОСЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ СЛОЖНОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А.Е. МИСНИК

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: anton@misnik.by

Создание и управление сложными техническими объектами и системами невозможно без использования моделирования. При этом процесс моделирования характеризуется следующими особенностями:

- сложностью структуры, многокомпонентностью, большим числом параметров и переменных;
- изменением структуры системы в процессе жизненного цикла;

- неполнотой исходной информации;
- нестохастическим характером воздействий;
- наличием сложных нелинейных зависимостей;
- необходимостью принятия решений в реальном времени;
- ограниченными возможностями проведения эксперимента.

Для учета указанных выше особенностей предлагается использовать подход к моделированию использованием иерархической нейросетевой модели.

Данный способ основан на предварительной декомпозиции технической системы на подсистемы (элементы), функционирование каждой из которых можно описать с помощью системы уравнений. Решение таких уравнений занимает существенный промежуток времени, а результаты могут дать только приблизительную оценку процессам, происходящим в подсистеме.

Однако результаты решения системы уравнений могут быть использованы для первичного обучения нейронной сети, которая также может описывать техническую подсистему. Такая нейронная сеть определяется набором входных и выходных параметров подсистемы, а внутренняя топология сети определяется эвристически на основе соотношения входных и выходных параметров. Входные параметры должны представлять собой как статические технические характеристики, так и динамические характеристики, зависящие от режима функционирования системы.

Результаты решения системы уравнений в разных начальных условиях не могут позволить обучить нейронную сеть до состояния, когда она сможет успешно моделировать функционирование технической подсистемы. Поэтому дополнительное обучение нейронной сети должно проводиться с использованием реальных данных о функционировании технической подсистемы.

Нейросетевая модель всей сложной технической системы формируется на основе композиции нейросетевых моделей ее подсистем. Корректность объединения моделей и их композиции в единую модель достаточно тяжело проверить без специального инструментария. Таковым является нейронная сеть-супервизор, входами которой служат все входные параметры подсистем сложной системы, а выходами – выходы последней подсистемы в «цепочке».

Подобный подход позволяет сформировать библиотеку типизированных нейросетевых моделей, представляющих собой подсистемы (элементы) сложной технической системы, обученных до состояния, когда их можно «подключить» к обобщенной модели системы. В дальнейшем, опираясь на реальные данные о функционировании технической системы, подключенный нейросетевой

модуль должен быть дообучен, для того чтобы «приблизить» его поведение к поведению реальной технической подсистемы.

Полученная в результате иерархическая нейросетевая модель, существенно повышающая гибкость управления, способна стать основной системы поддержки принятия решений, которая позволит принимать решения по управлению технологическими процессами в технических системах в реальном масштабе времени, кроме того, она обладает возможностями по дополнительной настройке в процессе функционирования системы.

ОБЪЕКТНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ МАССОВОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

В.И. МУНЕРМАН, Н.Н. ОМЕЛЬЧЕНКО

Смоленский государственный университет, г.Смоленск
e-mail: vimoona@gmail.com

Известны два способа определения объекта (класса, абстрактного типа данных):

– *интуитивный*, появившийся из технологических нужд программирования, позволяющий на основе простых понятий дать описание того, что такое объект и каковы манипуляции, необходимые для технологического использования объектов в практическом программировании [1; 2];

– *строгий*, позволяющий создавать новые технологии благодаря манипулированию понятием объекта в строгих математических терминах, использованных в автоматизации программирования [3; 4].

Интуитивные определения приводят к разделению понятий «абстрактный тип данных», «классе», «объект». Считается, что каждый объект – это экземпляр класса. Формальный подход позволит рассматривать эти понятия как синонимы.

Поэтому для построения объектного моделирования выбран формальный подход, согласно которому абстрактный тип данных рассматривается как универсальная многоосновная алгебраическая система.

Определяется абстрактная алгебраическая машина как двухосновная алгебраическая система вида $E = \langle S, T; \Omega; \Pi \rangle$, состоящая из структуры S , типа T и множеств (сигнатур) операций и предикатов [5]. Абстрактная алгебраическая файл-машина для моделирования и оптимизации процессов массовой обработки данных строится на основе теоретико-множественной модели обработки файлов [6]. Определяются понятия: поля записи как пара $F = \langle N_i, A_i \rangle$ ($i=1, \dots, p$), где N_i – имя, а A_i –

множество значений поля; записи типа R как кортежа $R = \{F_1, \dots, F_p\}$ и экземпляра записи типа R как кортежа вида $R^* = \{ \langle N_1, A_1^* \rangle, \dots, \langle N_p, A_p^* \rangle \} (A_i^* \in A_i, i = 1, \dots, p)$.

Определяется множество однотипных записей X как множество экземпляров записей типа R . Множество ключей $K = \{K_1, \dots, K_m\}, (m < p)$ определяется как часть записи, его элементы называются ключами. На основе определения множества ключей определяется эквивалентность записей. Файл определяется как фактор-множество множества однотипных записей X по отношению эквивалентности, заданному множеством ключей. Определяется строгая и нестрогая упорядоченность файла. Даются конструктивные определения операций сортировки, выборки, сжатия (квантификации), слияния строго упорядоченных файлов и слияния нестрого упорядоченных файлов.

Определяются аддитивная и мультипликативная операции над записями и предикаты на множествах записей и файлов. В результате построена абстрактная алгебраическая файл-машина, реализация которой достаточно проста во всех современных языках программирования.

Такой подход обеспечивает возможность повышения эффективности решения задач массовой обработки данных за счет параллельной реализации операций над структурой (файлами). При этом сохраняется простота программирования, так как для разработки конкретной задачи достаточно определить только операции над записями.

Литература

1. Barbara Liskov, Stephen N. Zilles: Programming with Abstract Data Types. SIGPLAN Notices 9(4): 50-59.
2. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на C++. 2-е изд. / пер. с англ. – М.: Изд-во Бинум; СПб.: Невский диалект, 2000. – 560 с.: ил.
3. Агафонов В.Н. Спецификация программ. – Новосибирск: Наука, 1987.
4. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки. Программирование. – Киев: Наукова думка, 1989. – 376 с.
5. Емельченков Е.П., Левин Н.А., Мунерман В.И. Алгебраический подход к оптимизации разработки и эксплуатации систем управления базами данных. Системы и средства информатики /дополнительный выпуск. – М.: Изд-во ИПИ РАН. – 2009. – С. 114–137.
6. Емельченков Е.П., Левин Н.А., Мунерман В.И. Математические модели для проектирования информационных систем // Системы и

средства информатики. Специальный выпуск «Математические модели в информационных технологиях»: – М.: Наука, 2006. – С. 210–225.

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ АЛГОРИТМОВ НА ГРАФАХ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ

В.И. МУНЕРМАН, Ю.С. ОНИЩУК, Е.В. ХАНИНКОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: vimoona@gmail.com, tatsam@hotmail.ru

Алгоритмы поиска кратчайших путей в графе, известные как поиск в ширину, поиск в глубину, алгоритм Дейкстры, алгоритм Форда-Беллмана, алгоритм Флойда и другие, широко используются при решении оптимизационных задач [1]. При явных достоинствах этих алгоритмов их вычислительная сложность имеет порядок n^3 , распараллеливание относится скорее к области искусства программирования, чем к области технологии.

Исключение составляет алгоритм, основанный на транзитивном замыкании матрицы графа – сумме отличных от нулевой степеней этой матрицы, который легко распараллеливается, причем с возможным применением параллельных вычислительных систем с ассоциативным распределением ресурсов. Недостаток этого алгоритма состоит в том, что его результат – матрица стоимостей путей между двумя вершинами – не содержит информации о пути между этими вершинами. Выход из этой ситуации возможен, если вместо обычных матриц использовать многомерные [2].

p -мерная матрица $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$, содержащая $n_1 \times \dots \times n_p$ элементов – это совокупность индексированных элементов $a_{i_1 \dots i_p}$, над которыми определены две операции, одна из которых рассматривается как аддитивная, а вторая как мультипликативная, индексы i_1, \dots, i_p принимают значения от 1 до n_α ($\alpha = 1, \dots, p$) соответственно.

Сложение и умножение многомерных матриц определяются следующим образом.

p -мерная матрица $C = \left\| c_{i_1 \dots i_p} \right\|$ с тем же набором индексов, что и две p -мерные матрицы $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$ и $B = \left\| b_{i_1 \dots i_p} \right\|$ с одинаковыми наборами индексов i_1, \dots, i_p , элементы которой вычисляются по формуле $c_{i_1 \dots i_p} = a_{i_1 \dots i_p} + b_{i_1 \dots i_p}$.

Матрица $C = \|c_{lsm}\|$, элементы которой вычисляются по формуле $c_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} \times b_{scm}$ из элементов p -мерной и q -мерной матриц $A = \|a_{i_1 \dots i_p}\|$ и $B = \|b_{i_1 \dots i_q}\|$, при выполнении следующих условий:

1. совокупности индексов i_1, \dots, i_p и i_1, \dots, i_q матриц A и B разбиты на четыре группы $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$, $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$, $c = (c_1, \dots, c_\mu)$ и $m = (m_1, \dots, m_\nu)$, содержащие соответственно κ , λ , μ и ν индексов;
2. $\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0$, $\kappa + \lambda + \mu = p$, $\lambda + \mu + \nu = q$;
3. индексы групп s и c в матрицах A и B полностью совпадают.

При возведении в степень используется операция произведения с разбиениями индексов $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$, $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$ и $m = (m_1, \dots, m_\nu)$, в которой не выполняется групповая аддитивная операция. На каждом шаге размерность матрицы-степени увеличивается на 1 в результате умножения, а размерность матрицы-суммы также увеличивается на единицу искусственным путем, причем элементы, которым не соответствуют значения стоимостей путей, принимают нейтральные значения.

Такой подход позволяет эффективно распараллелить алгоритм поиска кратчайших путей в графе.

Литература

1. Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms. 2-е изд. — М.: Вильямс, 2006, С. 1296.
2. Емельченков Е.П., Левин Н.А., Мунерман В.И. Алгебраический подход к оптимизации разработки и эксплуатации систем управления базами данных. Системы и средства информатики /дополнительный выпуск. — М.: Изд-во ИПИ РАН. — 2009. — С. 114–137.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДСТВ БАЗ ДАННЫХ В РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА ТРАНЗИТИВНОГО ЗАМЫКАНИЯ

В.И. МУНЕРМАН, Т.А. САМОЙЛОВА

Смоленский государственный университет, г.Смоленск
e-mail: vimoon@gmail.com, tatsam@hotmail.ru

Рассматривается алгоритм поиска путей в графе, основанный на транзитивном замыкании матрицы графа $\hat{G} = \sum_{i=1}^k G^i$ [1]. Здесь G – матрица

смежности (или весов ребер) графа, G^k – последняя, отличная от нуль-матрицы степень матрицы G . Этот алгоритм может быть использован для решения широкого класса задач: маршрутизация в Internet, поиск в гипертекстовых системах, доступность объектов в геоинформационных системах, «разузлование» в АСУП и многих других [2]. Достоинство этого алгоритма заключается в возможности его простой реализации различными средствами и простым распараллеливании.

Далее показана возможность реализации алгоритма транзитивного замыкания средствами SQL, при этом предлагаемая реализация может быть как чистым SQL-решением, если сервер баз данных содержит механизм рекурсий для общих табличных выражений (например, механизм CTE в SQL – Server), так и решением с использованием алгоритмического языка для итерационного выполнения SQL.

Вычисление очередной степени матрицы графа производится SQL-запросом

```
SELECT G1.i, G2.j,  $\oplus$  ([G1]![w]  $\otimes$  [G2]![w]) AS w
INTO G3
FROM G1 INNER JOIN G2 ON G1.i = G2.j
GROUP BY G1.i, G2.j
ORDER BY G1.i, G2.j;
```

Здесь $G1$, $G2$ – исходный граф и его копия, представленные отношением со схемой (i,j,w) , где i и j – индексы связанных вершин, w – расстояние между ними, \oplus и \otimes – аддитивная и мультипликативная операции.

Суммирование степеней матрицы реализуется добавлением оператора *INSERT INTO* таблицы $G3$ в таблицу-результат с последующей группировкой.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий вышеприведенный алгоритм.

Исходный граф $G1$ приведен на рисунке 1.

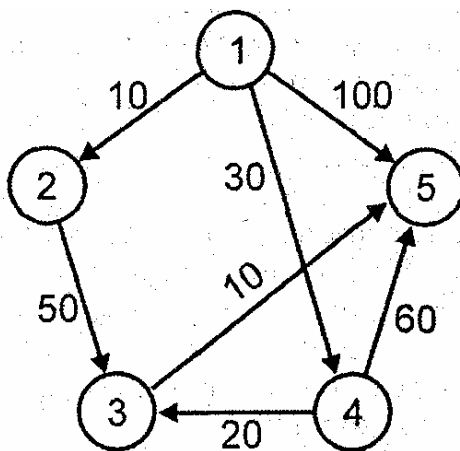


Рис. 1. Связный ориентированный нагруженный граф

Таблица $G1$ базы данных, соответствующая матрице весов этого графа, и таблицы – степени $G1$ имеют вид:

Исходная таблица			Первая итерация			Вторая итерация			Третья итерация		
$G1$			$G3=G1^2$			$G3=G1^3$			$G3=G1^4$		
i	j	w	i	j	w	i	j	w	i	j	w
1	2	10	1	3	50	1	5	60	<i>Пустая таблица</i>		
1	5	100	1	5	90						
2	3	50	2	5	60						
3	5	10	4	5	30						
4	3	20									
4	5	60									

После второй итерации получена окончательная таблица вида:

<i>Результат</i>		
i	j	w
1	2	10
1	3	50
1	4	30
1	5	60
2	3	50
2	5	60
3	5	10
4	4	20
4	5	30

Пустая таблица, полученная на третьей итерации, свидетельствует о завершении процесса вычисления транзитивного замыкания.

Предложенный подход позволяет решить проблему реализации задач поиска путей в графе с помощью простых средств, реализованных в СУБД. Кроме того, поскольку процесс добавления очередной степени матрицы графа к результату может происходить одновременно с процессом вычисления следующей степени матрицы графа, открываются широкие возможности для использования конвейерных и матричных методов распараллеливания вычислительного процесса.

Литература

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.
2. Емельченков Е.П., Левин Н.А., Мунерман В.И. Математические модели для проектирования информационных систем // Системы и средства информатики. Специальный выпуск «Математические модели в информационных технологиях» – М.: Наука, 2006. – С. 210–225.

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ АЛГЕБРЫ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ

В.И. МУНЕРМАН, А.Н. СИМАХОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: vimoon@gmail.com

В [1] утверждается, что при возникновении параллелизма в компьютерах от пользователя требуется предоставление дополнительной информации о структуре используемых им алгоритмов. Это нужно для того, чтобы эффективно использовать заложенный в компьютер параллелизм. Однако пользователь знает эту информацию далеко не всегда. Особенно это проявляется в тех случаях, когда для решения задачи используются искусственные приемы, не использующие традиционные алгебраические подходы.

Решение этой проблемы возможно, если формализовать задачу в известной алгебраической системе, носитель и сигнатура операций которой допускает эффективное распараллеливание. В качестве такой алгебраической системы может использоваться алгебра многомерных матриц.

В общем виде p -мерная матрица задается как совокупность элементов $a_{i_1 \dots i_p}$, где индексы i_1, \dots, i_p принимают значения от 1 до n_α ($\alpha = 1, \dots, p$) соответственно. p -мерная матрица содержит $n_1 \times \dots \times n_p$ элементов и обозначается $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$.

Рассмотрим бинарные операции алгебры многомерных матриц.

Суммой двух p -мерных матриц $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$ и $B = \left\| b_{i_1 \dots i_p} \right\|$ с одинаковыми наборами индексов i_1, \dots, i_p называется p -мерная матрица $C = \left\| c_{i_1 \dots i_p} \right\|$ с тем же набором индексов, элементы которой вычисляются по формуле $c_{i_1 \dots i_p} = a_{i_1 \dots i_p} + b_{i_1 \dots i_p}$.

Пусть даны p -мерная матрица $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$ и q -мерная матрица $B = \left\| b_{i_1 \dots i_p} \right\|$. Можно разбить совокупности индексов i_1, \dots, i_p и i_1, \dots, i_q на четыре группы, содержащие соответственно κ , λ , μ и ν индексов ($\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0$). Причем $\kappa + \lambda + \mu = p$, а $\lambda + \mu + \nu = q$. Разбиение порождает четыре группы индексов: $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$, $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$, $c = (c_1, \dots, c_\mu)$ и $m = (m_1, \dots, m_\nu)$. Индексы разбиений s и c принадлежат обеим матрицам. Тогда матрицы A и B можно представить в виде $A = \left\| a_{lsc} \right\|$ и $B = \left\| b_{scm} \right\|$.

Матрица $C = \|C_{lsm}\|$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} \times b_{scm}, \text{ называется произведением матриц } A \text{ и } B.$$

Для реализации этих операций можно использовать различные методы, такие как:

- 1) прямое программирование с использованием объекта thread;
- 2) использование стандартных библиотек:
 - a) OpenMP – директивы компилятора для простого параллельного программирования [2],
 - b) MPI – библиотечные подпрограммы для реализации высокоэффективной переносимости [3],
 - c) Gala – библиотека параллельного программирования для Delphi (Windows 95/98/NT). [4].

Для предоставления пользователю широкого спектра возможностей при работе с матрицами с различными типами элементов целесообразно использовать метод, названный абстрактной алгебраической машиной.

Абстрактная алгебраическая машина – двухосновная алгебраическая система вида $E = \langle S, T; \Omega; \Pi \rangle$. Основа S называется *структурой*, а T – *типом* [5].

Тогда многомерная матрица есть базовый объект, в котором реализованы операции (методы) сложения и умножения матриц, в которых выполняются только операции над индексами элементов. То есть программируются только операции над структурой (матрицей), без учета операций над элементами. Задача пользователя в этом случае сводится к построению объекта-наследника, в котором реализованы операции над элементами матрицы.

Операции сложения и умножения многомерных матриц распараллеливаются по тем же правилам, что и аналогичные операции над плоскими матрицами, но при распараллеливании операции умножения учитывается тот факт, что в результате могут быть получены матрицы разных размерностей, в зависимости от структуры индексов матриц-операндов.

Литература

1. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
2. http://www.parallel.ru/tech/tech_dev/openmp.html
3. http://www.parallel.ru/tech/tech_dev/mpi.html
4. http://www.parallel.ru/tech/tech_dev/ifaces.html#gala
5. Левин Н.А., Мунерман В.И. Универсальные алгебраические машины и семантика систем обработки данных // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2009. – Вып. 10. – С. 141–143.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАПРОСОВ В МАССОВОЙ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ

В.И. МУНЕРМАН, К.Р. УСТЯН

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: vimoona@gmail.com

Рассматривается решение задачи оптимизации запросов к базе данных в условиях массовой обработки. Выбран часто встречающийся тип запросов, реализованных в виде последовательности операций соединения – *Join*. Для простоты и без нарушения общности рассматривается разновидность операции соединения – *Inner Join*, синтаксис которой задается следующим образом

Таблица1 Inner Join Таблица2

On Таблица1.Поле1 <оператор сравнения> Таблица2.Поле2.

Подробно эта операция рассмотрена в [1]. К числу недостатков этой операции относятся:

- сложность распараллеливания;
- невозможность построения эффективной последовательности выполнения нескольких последовательных операций в одном запросе.

Далее рассматривается метод построения эффективных последовательностей операций соединения. Пусть $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ – таблицы-операнды в операции соединения, а $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ – поля, по которым производится сравнение записей. Тогда в общем виде рассматриваемый тип запроса можно представить следующим образом:

*Select **

From ((R₁ Inner Join R₂ On R₁.K₁ = R₂.K₂) Inner Join R₃ On R₂.K₂ = R₃.K₃) ...

R_{n-1} Inner Join R_n On R_{n-1}.K_{n-1} = R_n.K_n;

Решение задачи оптимизации такого запроса возможно посредством использования модели на основе алгебры многомерных матриц [2]. Для этого каждой таблице ставится в соответствие многомерная матрица. Известно, что единственный способ идентифицировать определённую запись в этой таблице – это указать набор значений одного или нескольких полей, который был бы уникальным для этой записи. Такой набор полей таблицы, совокупность значений которых определена для любой строки этой таблицы и различна для любых двух строк, называется первичным ключом. Поскольку домены полей – конечные множества, их можно пронумеровать. Тогда каждой таблице соответствует многомерная матрица.

Для простоты рассматривается случай, когда первичный ключ состоит из двух полей. В этом случае матрица-модель таблицы – двумерная. Для таких матриц решена задача минимизации сложности

цепочек умножения методом динамического программирования [3]. Этот метод также применим и к многомерным матрицам.

Таким образом, решена задача оптимизации достаточно большого класса запросов к базам данных при массовой обработке. Кроме того, предложенный подход открывает возможности параллельной реализации подобных запросов.

Литература

1. Гарсия-Молина Г., Ульман Дж., Уидом Дж. Системы баз данных. Полный курс: пер. с англ. – М.: Издательский дом Вильямс, 2003. – 1088 с.

2. Емельченков Е.П., Левин Н.А., Мунерман В.И. Алгебраический подход к оптимизации разработки и эксплуатации систем управления базами данных. Системы и средства информатики /дополнительный выпуск. – М.: Изд-во ИПИ РАН. – 2009. – С.114–137.

3. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

ОБНАРУЖЕНИЕ ОБЪЕКТОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ В СРЕДЕ MATLAB R2011b

А.С. НАБАТЧИКОВ, И.В. ЯКИМЕНКО
Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: nabatchicov@rambler.ru

Цифровая обработка изображений является одной из наиболее актуальных и быстро развивающихся областей науки и техники. Это вызвано как многообразием практических задач, требующих анализа визуальной информации, так и все возрастающими возможностями оптики и вычислительной техники. Это такие области науки, как исследование природы и космоса, автономная навигация, оптическая локация, управление движением воздушных средств.

Преимущество MATLAB при ее использовании в качестве среды для работы с изображениями состоит в разнообразном наборе функций обработки многомерных числовых массивов, а изображения (двумерные числовые массивы) являются важным частным случаем таких объектов [1].

Изображение можно определить как двумерную функцию $f(x,y)$, где x и y – это пространственные (плоскостные) координаты, а амплитуда f для каждой пары координат (x,y) называется интенсивностью или яркостью изображения в точке с этими координатами [2].

Результатом дискретизации и квантования является матрица чисел. Отсчет пикселей в матрицах начинается с левого верхнего угла, но если в книгах отсчет начинается с нуля, то в пакете IPT – с единицы (см. рис. 1)

Представление матрицы изображения в математической форме имеет вид:

$$f = \begin{bmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \dots & f(1,N) \\ f(2,1) & f(2,2) & \dots & f(2,N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M,1) & f(M,2) & \dots & f(M,N) \end{bmatrix}$$

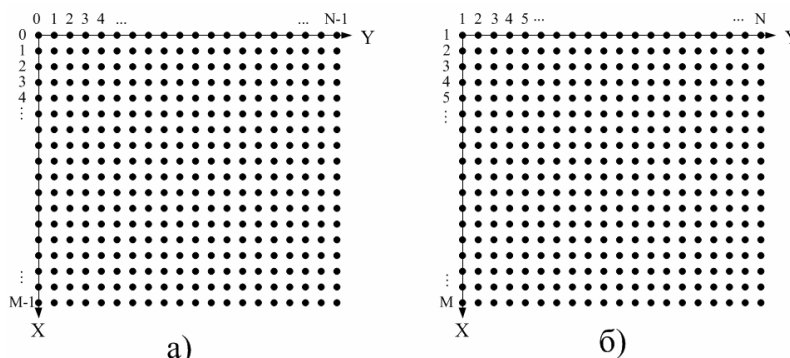


Рис. 1. Координатное представление картинки в основных книгах (а), координатное представление в IPT (б)

Таблица 1

Основные графические форматы, распознаваемые средой MATLAB

Формат изображения	Расшифровка изображений	Допустимые изображения
TIFF	Tagged image File Format	.tif, .tiff
JPEG	Joint Photographic Experts Group	.jpg, .jpeg
GIF	Graphics Interchange Format	.gif
BMP	Windows Bitmap	.bmp
PNG	Portable Network Graphics	.png
XWD	X Window Dump	.xwd

Важным условием по преобразованию изображения является его сегментация.

Сегментация делит изображение на составные части и объекты. Степень детализации этого деления зависит от решаемой задачи. Иными словами, сегментацию стоит остановить, когда интересующие объекты уже выделены или изолированы. Точность сегментации во многом определяет успех конечных процедур анализа изображения [3].

Если сегментация изображения выполнена безошибочно, то бинарное изображение содержит исчерпывающую информацию, позволяющую, вычислить практически любые пространственные параметры изображений наблюдаемых объектов. Представление результатов сегментации в виде бинарных изображений является достаточно громоздким и часто обладает значительной избыточностью

для решения поставленных задач. Часто потребителя интересуют не все, а лишь некоторые характеристики присутствующих на изображении сегментов. К наиболее важным характеристикам сегментов относят координаты центра, размеры, среднюю яркость, дисперсию яркости и т.д.

В пакете Image Processing Toolbox собраны функции, расширяющие возможности вычислительной среды MATLAB. Эти функции, а также широкие возможности языка MATLAB делают многие сложные операции по обработке изображений вполне доступными; их можно записать в весьма ясной и краткой форме, что делает систему MATLAB почти идеальной средой для написания модельных прототипов реальных приложений для решения задач обработки изображений.

Литература

1. Алпатов Б.А., Бабаян П.В., Балашов О.Е., Степашкин А.И. Методы автоматического обнаружения и сопровождения объектов. Обработка изображений и управление – М.: Радиотехника, 2008. – 176 с.
2. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.
3. Яне Б. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2007. – 584 с.

МАКРОМОДЕЛЬ ШИМ-КОНТРОЛЛЕРА UC3524 ДЛЯ ПРОГРАММЫ MICRO-CAP

Е.В. НАЙДЁНОВ, В.Г. ЛИПОВОЙ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: nzettez@gmail.com

Имитационное моделирование в настоящее время является неотъемлемой частью процесса проектирования электронных устройств, в том числе импульсных источников питания (ИИП). Важной частью схем ИИП являются специализированные широтно-импульсные контроллеры (ШИМ-контроллеры). ШИМ-контроллер – устройство, предназначенное для управления широтно-импульсной модуляцией, когда импульсы следуют с определённой частотой и меняется лишь величина их длительности. Состав каждого ШИМ-контроллера примерно одинаков, дополнительные компоненты обеспечивают его работу в зависимости от особенностей применения.

Однако для существенной части ШИМ-контроллеров математических моделей пока не существует. Поэтому как практический, так и теоретический интерес представляет создание таких моделей. В частности, не существовало математической модели и для микросхемы ШИМ-контроллера UC3524 (рис. 1), представляющего собой контроллер для управления как одноканальными, так и

двухтактными преобразователями постоянного напряжения в режиме Voltage Mode. В ней частота переключения каждого из силовых транзисторов равна половине частоты тактового генератора. Особенность UC3524 заключается в способности управлять всеми типами преобразователей напряжения: Boost, Flyback, Forward, Full-Bridge, Half-Bridge, Push-Pull. ШИМ-контроллер может работать с тактовой частотой до 450 кГц, имеет малый ток потребления в режиме Standby – всего 50 мкА [1].

Математическая (или SPICE) модель ИС строится на основе функциональной схемы ШИМ-контроллера (рис. 1). Однако использование компонентов из стандартных библиотек программ схемотехнического анализа не позволяет создавать модели, обладающие приемлемыми характеристиками при использовании их в сложных схемах устройств преобразовательной техники. Для этих целей была разработана специализированная библиотека компонентов [2]. Данная библиотека включает в себя упрощённые оптимизированные модели функциональных блоков, сочетающих высокую скорость расчётов, хорошую сходимость и достаточную точность. Использование данной библиотеки позволяет достаточно просто создавать модели практически любых существующих на данный момент ШИМ-контроллеров.

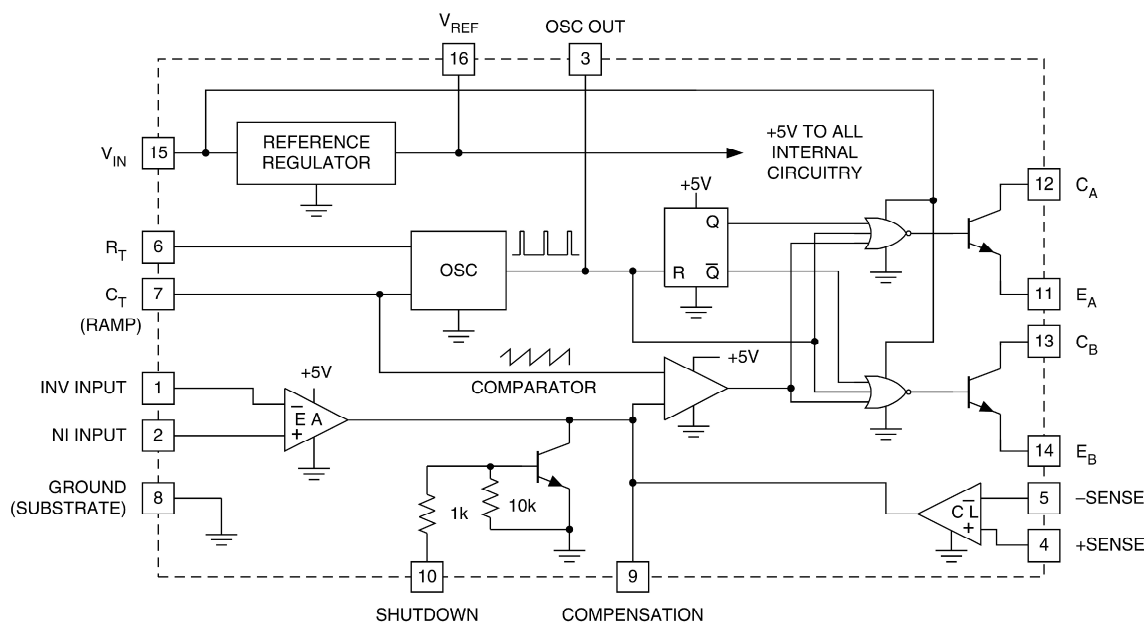


Рис. 1. Блок-схема ШИМ-контроллера UC3524

Разработанная макромодель микросхемы UC3524, построенная на основе блоков специализированной библиотеки пакета Micro-CAP, представлена на рисунке 2.

Адекватность построенной макромодели микросхемы UC3524 была проверена в схеме импульсного стабилизатора постоянного напряжения на основе BOOST-регулятора для рассчитанных значений входного и выходного напряжения. Для этого была построена имитационная модель

ИИП в среде Micro-CAP на основе созданной макромоделли ШИМ-контроллера. Результаты имитационного моделирования показали совпадение поведения модели и макетного образца (рис. 3).

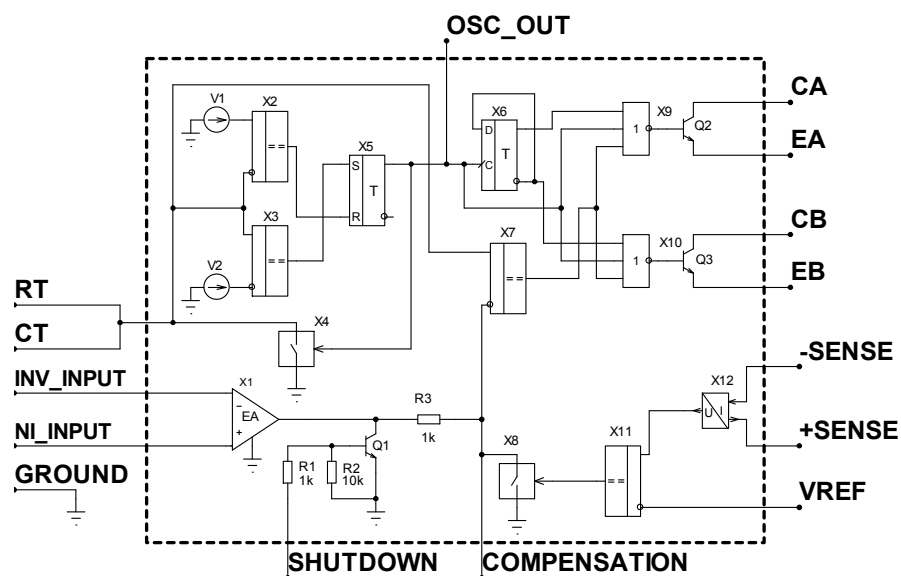


Рис. 2. Макромоделль ШИМ-контроллера UC3524 для программы Micro-CAP

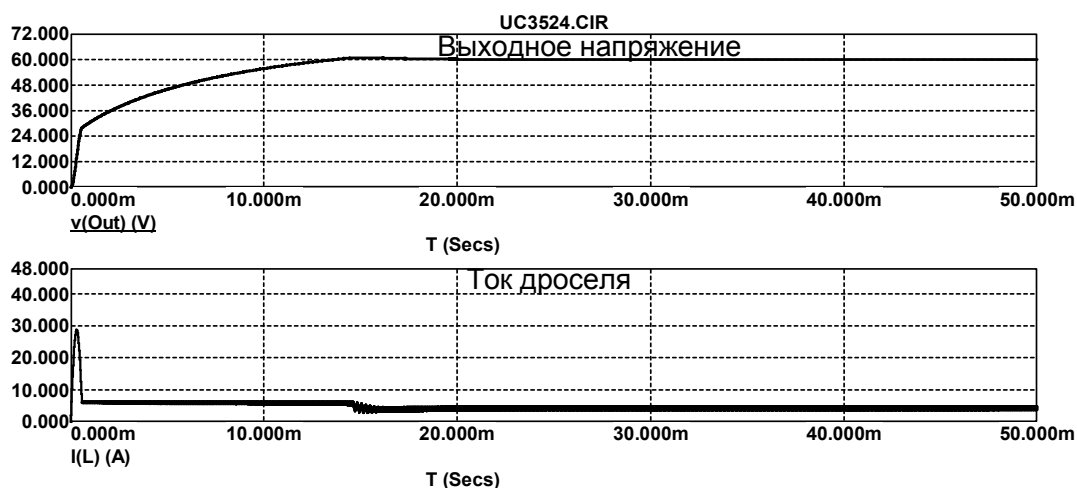


Рис. 3. Пусковая характеристика из нулевых начальных условий

Это говорит о том, что разработанная модель контроллера может успешно применяться при разработке и анализе импульсных источников вторичного электропитания.

Литература

1. Амелин С.А., Емельянова А.В. Оптимизация макромоделли ШИМ-контроллера // Энергетика, информатика, инновации-2011: сб. трудов Междунар. науч.-техн. конф. В 2 т. Т. 2. Смоленск РИО филиала ГОУВПО МЭИ(ТУ) в г. Смоленске, 2011. – С. 6–9.

2. Datasheet UC3524. TEXAS INSTRUMENT URL: <http://www.ti.com/product/uc3524> (дата обращения: 09.03.2012).

3. Амелина М.А., Амелин С.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 9 – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 464 с.

СИСТЕМА SAS КАК ЭФФЕКТИВНЫЙ ИНСТРУМЕНТ РАБОТЫ С ДАННЫМИ. КРАТКИЙ АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ ПАКЕТА

А.А. СИЗОВ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: aclion@yandex.ru

Программный язык SAS (Statistical Analysis System), который относят к языкам четвертого поколения (4GL), ориентирован на выполнение четырех основных задач:

- доступ к данным;
- управление данными;
- анализ данных;
- представление данных.

При выполнении указанных задач язык отличается от таких универсальных языков высокого уровня, как, например, язык С, исключительной простотой и гибкостью. В то же время, несмотря на свою специфичность, язык SAS позволяет создавать программы, решающие многие задачи стандартных языков программирования, таких как С++, FORTRAN, Visual Basic.

Программа на языке SAS представляет собой последовательность шагов обработки данных. Каждый из шагов обработки данных является либо «шагом данных» (data step), либо «шагом процедуры» (proc step).

Шаг данных – мощное средство обработки данных в рамках SAS System. Шаг данных – это неявный цикл по записям источника данных (существующего набора данных SAS, таблицы другой СУБД или внешнего файла) с возможностью осуществления произвольных операций на каждой итерации этого цикла. Возможности шага данных позволяют эффективно реализовать любой алгоритм обработки данных.

Шаг процедуры представляет собой вызов одной из процедур продукта Base SAS (или других продуктов SAS System). Каждая процедура реализует некоторый специализированный вид обработки данных или обеспечивает генерацию стандартных отчетов.

В качестве примера, демонстрирующего преимущества работы с данными в SAS в сравнении с С++, в [1] приводятся программы, реализующие чтение данных из файла и вывод на экран монитора.

Пусть в файле gpa.dat хранятся данные о студентах – имена, возраст и средние оценки. Сведения о каждом студенте располагаются на отдельной строке и отеляются пробелами.

Программа на языке SAS

```
DATA grades;
INFILE 'c:\MyRawData\gpa.dat';
INPUT Name $ Age Gpa;
PROC PRINT DATA = grades;
RUN;
```

Программа на языке C++

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <iomanip>
using namespace std;
const int N=100;
struct student
{
char name[32];
int age;
double GPA;
};
void main(void)
{
student grades[N];
ifstream in("gpa.dat");
if (in.fail())
exit(-1);
int i=0;
while (!in.eof() && i<N)
{
in>>grades[i].name>>grades[i].age>>grades[i].GPA;
cout<<setw(10)<<left<<grades[i].name
<<setw(10)<<grades[i].age
<<fixed<<setprecision(2)<<grades[i].GPA<<endl;
++i;
}
in.close();
}
```

Данный пример наглядно демонстрирует эффективность пакета SAS при вводе, анализе, манипулировании и представлении данных.

Литература

1. Delwiche L.D., Slaughter S.J. The Little SAS Book: A Primer, Third Edition. Cary, NC: SAS Institute Inc., 2003.

РАЗВИТИЕ СРЕДСТВ ИНТЕГРИРОВАННОЙ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКИ ИЗДЕЛИЙ НАУКОЕМКОЙ ПРОДУКЦИИ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ¹

**И.Н. СИНИЦЫН, А.С. ШАЛАМОВ, И.В. СЕРГЕЕВ, В.В. БЕЛОУСОВ,
Е.С. АГАФОНОВ**

Институт проблем информатики РАН, г. Москва
e-mail: sinitsin@dol.ru

Как известно [1], в последние годы, несмотря на грянувший экономический кризис, темпы развития систем компьютерной математики (СКМ) в целом существенно выросли. Некоторые системы, например MathCad, Maple и MATLAB, развивались настолько быстро, что их новые версии выходили ежегодно, а иногда и более часто. Наряду с положительными (быстрое обновление систем и рост их функциональности) это имеет и отрицательные моменты – некоторые версии систем выходят довольно сырыми, замеченные в предшествующих версиях недостатки и недоработки вовремя не устраняются, в новые версии вносятся мало действительно новых возможностей, затрудняется выпуск литературы по новым версиям.

Наиболее популярны СКМ, изначально ориентированные на решение задач в образовательной сфере, и мощные СКМ для выполнения серьезных расчетов и нацеленные на реализацию математического моделирования сложных систем и устройств.

Несколько необычной кажется большая и постоянно растущая популярность мощной матричной системы MATLAB, явно ориентированной на численные вычисления и впитавшей в себя все возможности матричных вычислений, созданные за полвека. Как и в MathCad, в MATLAB есть ограниченные возможности аналитических вычислений с помощью пакета расширения SymbolicMath Toolbox с встроенным ядром символьных вычислений системы Maple (а в последних реализациях еще и MuPAD). Несомненно, большой популярности MATLAB способствовали тщательно отработанные со времен создания больших ЭВМ методы матричных вычислений для

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-07-00021) и программы ОНИТ РАН «Интеллектуальные информационные технологии, системный анализ и автоматизация» (проект 1.7).

матриц больших размеров и наличие одного из лучших пакетов блочного математического имитационного моделирования Simulink.

В технике проведения научных расчетов СКМ стали своего рода суперкалькуляторами, практически мгновенно решающими сложные уравнения, вычисляющими интегралы и производные, строящими графики любых функций и т.д. В новейших реализациях MATLAB появились средства моделирования электрических и электронных цепей и схем с использованием физических моделей компонентов и моделей, применяемых в программах схемотехнического моделирования PSPICE.

MATLAB стала признанным во всем мире средством и языком решения научно-технических вычислений и осуществления визуально-ориентированного блочного математического моделирования различных явлений, систем и устройств.

В [2] был дан обзор работ ИПИ РАН в области стохастических информационных технологий научных исследований в среде MATLAB.

Рассматриваемые СКМ находят успешное применение не только в научной и образовательной сфере, но и в финансово-промышленном секторе. Практически все крупные, территориально распределенные организации рано или поздно сталкиваются с необходимостью построения учетно-аналитических информационных систем для грамотного управления и оптимизации распределения и расходования своих ресурсов. При реализации таких систем приходится осуществлять сбор большого объема разнородной информации в некоторой центральной подсистеме, выполнять статистическую обработку данных, вычислять различные аналитические показатели текущего состояния, строить прогнозы дальнейшего развития, осуществлять визуализацию полученных результатов.

Если MATLAB ориентирован на объемные численные вычисления с матрицами, то система управления базами данных (СУБД) Oracle занимает лидирующие позиции в тех случаях, когда необходимо осуществлять хранение и быструю обработку очень больших объемов информации.

Совместное использование MATLAB и СУБД Oracle для построения описываемых информационных систем позволяет получать удачные и надежно работающие решения в данной области.

В [4; 5] дано описание выполненных в ИПИ РАН работ, связанных с созданием системы управления активами крупной организации банковского сектора.

В начале 2012 года вышла книга [3]. В ней дается систематическое изложение теоретических основ одного из новейших направлений в области экономики послепродажного обслуживания изделий наукоемкой продукции (ИНП) длительного использования – интегрированной логистической поддержки. Приводятся также

результаты работ, выполненных в институте проблем информатики Российской академии наук в рамках Программы «Информационные технологии и анализ сложных систем» Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН.

Интегрированная логистическая поддержка (ИЛП) – это система научно-исследовательских, проектно-конструкторских, организационно-технических, производственных и информационно-управленческих технологий, средств и практических мероприятий, используемых (применяемых) в течение жизненного цикла ИМП, направленных на достижение минимальных затрат по обслуживанию и ремонту ИМП при обеспечении требуемых характеристик и показателей функционального качества и технической готовности продукции при ее эксплуатации.

Излагаемые новые научные подходы позволяют кардинально реформировать традиционные системы создания и эксплуатации ИМП путем внедрения методов рационального и, по возможности, оптимального управления процессами расходования временных, материальных, трудовых и др. ресурсов на всех стадиях жизненного цикла (ЖЦ) изделий по критериям экономической целесообразности и эффективности.

Первыми на этот путь вступили западные страны, когда в 90-х годах XX века были резко сокращены бюджеты военных ведомств, что вынудило их искать возможности экономии финансовых ресурсов, сохраняя при этом основные показатели обороноспособности. Были выработаны новые стандарты по созданию вооружений и военной техники (ВВТ), обеспечивающие снижение стоимости ее ЖЦ. Контракты, заключаемые с поставщиками ВВТ, стали содержать требования по неукоснительному соблюдению правил и процедур, обеспечивающих заданные характеристики и показатели качества и экономичности продукции. В настоящее время на этот путь переводятся и отрасли экономики гражданского назначения. В основу серии этих международных стандартов легла CALS-методология (ИПИ-методология) как первооснова современных глобальных интегрированных информационно-коммуникационных систем (CALS – Continuous Acquisition and Life cycle Support – интегрированная поддержка изделий) – непрерывная информационная поддержка поставок и жизненного цикла. Эта методология позволяет создавать виртуальные предприятия (ВП) из фирм-участников ЖЦ ИМП, интегрируя их на информационной основе.

Основные принципы ИЛП и интеграции ВП изложены в стандартах MIL STD 1388 (США) и DEF STAN 00-60 (общеевропейский стандарт).

Стандарт DEF STAN 00-60 тесно связан со спецификациями ASD (AeroSpace and Defense Industries Association of Europe – Европейской ассоциации аэрокосмической и оборонной промышленности):

S1000D «International specification for technical publications utilizing a Common Source Data Base» («Международная спецификация на технические публикации, использующие общую исходную базу данных»);
S2000M «International specification for Material management» («Международная спецификация на организацию управления материально-техническим обеспечением») и др.

Важно отметить, что в этих стандартах отсутствуют указания на методы и средства, позволяющие достигать реального минимума затрат.

Участники ВП, по сути, самостоятельно пытаются решать свои проблемы или прибегают к услугам фирм – разработчиков программных средств для решения частных (сервисно-ориентированных) задач по управлению процессами. При этом, как правило, информация об использовании каких-либо методов решения этих задач остается закрытой, что приводит к неопределенности при оценке покупателем гарантий достоверности таких программ. Таким образом, напрашивается вывод об определенной неполноте современного содержания CALS, выражаемой отсутствием теоретических обоснований путей достижения провозглашаемых ею целей. Для полноценного использования преимуществ данной методологии необходима разработка теории систем ИЛП, включающей в себя единый комплекс современных методов и средств информационного и математического моделирования, оценивания и оптимального управления процессами на всех стадиях ЖЦ комплексной системы «ИНП – системы послепродажного обслуживания (СППО)», вносящих основной вклад в ее стоимость и качество.

В книге, помимо общих понятий, вводящих читателя в курс дела, даются постановки и решения практически по всему комплексу задач ИЛП, обеспечивающих управление стоимостью ЖЦ ИНП и ее минимизацию.

В части 1 «Интегрированная логистическая поддержка» (главы 1–3) излагаются элементы современной системы послепродажного обслуживания изделий, рассматриваются основы современной ИЛП. Особое внимание уделяется управлению ЖЦ, системам послепродажного обслуживания и их информационному моделированию.

Часть 2 (главы 4–6) посвящена теории гибридных стохастических систем и компьютерной поддержке исследований и разработок. Приводятся необходимые сведения из теории вероятностей, стохастического анализа и стохастических уравнений. Даются вероятностные распределения процессов в гибридных стохастических системах. Рассматриваются задачи, методы и средства компьютерной поддержки исследований и разработок.

В части 3 «Основы математического моделирования, анализа и синтеза систем послепродажного обслуживания» (главы 7–9) рассматриваются вопросы математического моделирования процессов в системах послепродажного обслуживания, моделирование систем послепродажного обслуживания со смешанными потоками расходования, восстановления и пополнения ресурсов, а также статистический анализ и синтез систем послепродажного обслуживания.

Часть 4 (главы 10–12) посвящена определению и анализу показателей экспортного потенциала ИМП при проектировании. Проводится анализ технико-экономических факторов, определяющих экспортный потенциал ИМП. Рассматриваются вопросы разработки математической модели процессов эксплуатации ИМП для оценки показателей экспортного потенциала, а также оценки влияния эксплуатационно-технических характеристик на экспортный потенциал ИМП.

В заключительной части 5 (главы 13 и 14) рассматриваются задачи управления поддержкой послепродажного обслуживания на стороне заказчика и на стороне поставщика, а также моделирование инвестиционных процессов ИЛП в условиях современных финансовых рынков.

Особенностью отечественного подхода к решению основной задачи ИЛП является широкое использование методов математического программирования и теории гибридных стохастических систем. При этом упомянутые технико-экономические модели приобретают динамический характер.

Результаты решения задачи моделирования и оптимизации интегрального качества и стоимости ППО ИМП на примере одной из типовых распределенных систем прикладной информатики показывают, что поставленные цели минимизации затрат могут действительно достигаться в рамках использования стандартизированной CALS-концепции. Но это возможно лишь за счет дополнительного включения информационно-вычислительного комплекса прогнозирования процессов и формирования долговременной Программы поставок потребных ресурсов на произвольном периоде эксплуатации. Кроме того, решение этой задачи оптимального планирования позволяет также существенно повысить ритмичность производства ИМП, что является весьма критичным для изготовителей наукоемкой продукции, а также эффективность планирования ее использования по назначению.

Литература

1. Дьяконов В.П. Системы компьютерной математики на выходе из кризиса // Системы компьютерной математики и их приложения:

материалы XII международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. – Вып. 12. – С. 16–24.

2. Сеницын И.Н., Сеницын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Агафонов Е.С. Стохастические информационные технологии в среде MATLAB в задачах компьютерной поддержки научных исследований // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XII международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. – Вып. 12. – С. 57–59.

3. Сеницын И.Н., Шаламов А.С. Лекции по теории систем интегрированной логистической поддержки. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. – 624 с.

4. Быстров И.И., Сеницын И.Н., Агафонов С.А., Сычев В.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Шоргин В.С., Макаренко И.В., Агафонов Е.С., Андреев В.М., Веселов В.Н., Тимофеев А.Е., Белов В.В. Управление ИТ-активами информационно-телекоммуникационной системы крупного предприятия – М.: ИПИ РАН, 2009. – 163 с.

5. Быстров И.И., Сеницын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Шоргин В.С., Агафонов Е.С. Развитие систем управления информационными активами крупных предприятий // Сборник докладов X Международной научно-технической конференции «Кибернетика и высокие технологии XXI века» (С&Т – 2009). – Воронеж: НПФ «Саквоее» ООО 2009. – Т. 1. – С.148–159.

НЕЧЕТКИЕ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СЕТИ ПЕТРИ ДЛЯ ФОРМАЛИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ВУЗА

Д.Е. СКАЧКОВ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: demiteli87@gmail.com

Сети Петри и их многочисленные модификации являются одним из классов моделей, неоспоримым достоинством которых является возможность адекватного представления не только структуры сложных организационно-технологических систем и комплексов, но также и логико-временных особенностей процессов их функционирования. Сети Петри представляют собой математическую модель для представления структуры и анализа динамики функционирования систем в терминах «условие-событие». Эта модель может быть успешно использована для описания так называемых динамических дискретных систем различных классов, таких как: вычислительные процессы и программы, технологические процессы,

информационные, экономические, биологические, социальные и технические системы.

Модели сетей Петри позволяют исследовать работоспособность моделируемых систем, оптимальность их структуры, эффективность процесса их функционирования, а также возможность достижения в процессе функционирования определенных состояний. Сети Петри и их обобщения являются удобным и мощным средством моделирования асинхронных, параллельных распределенных и недетерминированных процессов, позволяют наглядно представить динамику функционирования систем и составляющих их элементов. Свойство иерархического вложения сетей Петри позволяет рассматривать модели различной степени детализации, обеспечивая тем самым необходимую декомпозицию сложных систем и процессов. Перспективным направлением решения указанных задач является использование подхода, основанного на гибридизации моделей различных типов, а также на интеграции их для решения задач анализа, ориентированных на различные уровни иерархии анализируемых систем и процессов. Представление базы правил в форме нечетких сетей Петри (НСП) предоставляет наглядность и визуализацию всех промежуточных этапов и результатов решаемой задачи.

В данной статье предложены нечёткие иерархические сети Петри (НИСП) для анализа многоуровневых процессов на примере компетентностной модели выпускника вуза.

Разработанный способ анализа многоуровневых процессов на основе механизма нечетких сетей Петри состоит из следующих этапов.

Этап 1. Построение модели верхнего уровня НИСП посредством НСП типа V_F , которая определяется как

$$V_F = (N, M_0),$$

где N – структура, в которой P – конечное множество позиций; T – конечное множество переходов, I – входная функция переходов и O – выходная функция переходов. M_0 – матрица начальной маркировки. Здесь каждая строка матрицы M_0 может рассматриваться как значения функции принадлежности нечёткого множества маркеров для соответствующей позиции НСП V_F .

Этап 2. Выбор позиций НСП V_F , в которых нечёткое наличие маркеров подразумевает использование моделей нижнего уровня, т.е. каждый маркер в такой позиции сам является сетью.

Этап 3. Формирование моделей нижнего уровня НИСП, которые имеют дело с НСП типа C_f . Данная НСП определяется как

$$C_f = (N, f, \lambda, m_0),$$

где N – структура, аналогичная вышерассмотренной; f – вектор значений функции принадлежности нечёткого срабатывания переходов;

λ – вектор значения порога срабатывания; m_0 – вектор начальной маркировки, каждая компонента которого определяется значением функции принадлежности нечёткого наличия одного маркера в соответствующей позиции данной НСП S_F .

Этап 4. Задание начальной маркировки модели верхнего уровня НИСП – НСП V_F в соответствии с требованиями решаемой при помощи НИСП задачи анализа.

Этап 5. Запуск НСП V_F и осуществление её работы до появления маркеров в позициях, рассмотренных на этапе 2.

Этап 6. Переход на модели нижнего уровня для анализа соответствующих процессов, происходящих на этом уровне. Осуществление работы данных моделей.

Этап 7. Переход на верхний уровень с учётом полученных результатов моделирования. Осуществление работы модели.

Этап 8. Проведение анализа результатов работы сети.

Рассмотрим использование НИСП на примере работы выпускника по направлению подготовки 071800 Социально-культурная деятельность, с квалификацией (степенью) – «Бакалавр». В этом случае согласно компетентностной модели выпускник должен обладать набором общекультурных и профессиональных компетенций. Для упрощения выделим пять общекультурных компетенций (ОК): владеть культурой мышления, быть способным к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1); уметь логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь (ОК-2); быть готовым к кооперации с коллегами, работе в коллективе (ОК-3); быть способным находить организационно-управленческие решения в нестандартных ситуациях и готовым нести за них ответственность (ОК-4); уметь использовать нормативные правовые документы в своей деятельности (ОК-5).

Результатом освоения компетенций является общий уровень освоения дисциплин: пороговый (уровень оценки «удовлетворительно»), продвинутый (уровень оценки «хорошо») и высокий (уровень «отлично»), который формирует степень знания и понимания, а также интеллектуальные навыки выпускника.

Данную модель представим при помощи НСП типа V_F .

В данной сети позиции P1-P5 – являются соответствующими общекультурными компетенциями ОК1-ОК5, позиции P6-P8 – соответствуют пороговому, продвинутому и высокому уровням освоения. Выходные позиции НСП V_F показывают уровень знания и понимания (P9), а также интеллектуальные навыки (P10). Общее количество вводимых в рассмотрение маркеров позиций сети $d=3$. Для каждой позиции-компетенции начальная маркировка равна трём.

Степень нечёткого наличия одного маркера в соответствующей позиции означает степень освоения порогового уровня соответствующей общекультурной компетенции, двух маркеров – степень освоения продвинутого уровня и, наконец, трёх – степень освоения высокого уровня. При этом нечёткие маркеры в позициях P1–P5 сами являются сетями.

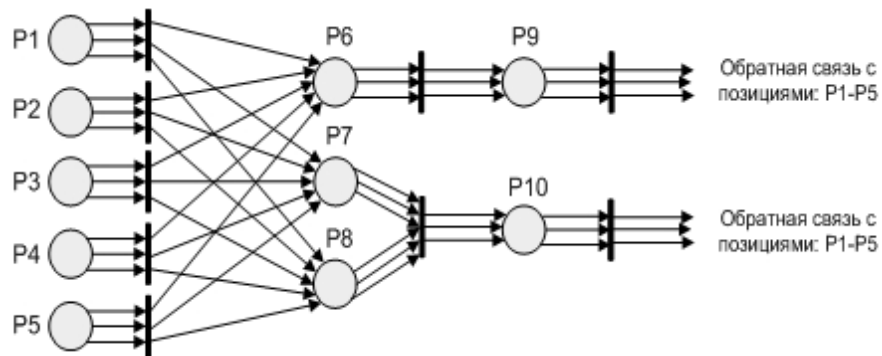


Рис. 1. Сеть компетентностной модели выпускника (верхний уровень НИСП)

Рассмотрим степень наличия одного маркера в позиции P1, соответствующей ОК-1. У каждого уровня есть ряд основных признаков, которые становятся входными позициями сети нижнего уровня иерархии. Таким образом, для моделирования порогового уровня ОК-1 будем использовать НСП типа C_F .

Для упрощения будем рассматривать данные сети со значениями функции принадлежности нечёткого срабатывания переходов равными 1 и значения порога срабатывания, равными 0 (при необходимости можно добавить другие значения).

Тогда НСП C_F , описывающая пороговый уровень освоения ОК-1, будет выглядеть, как представлено на рисунке 2.

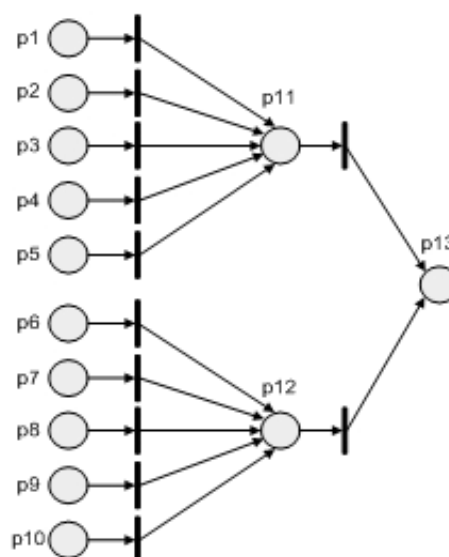


Рис. 2. НСП C_F порогового уровня освоения ОК-1 (нижний уровень НИСП)

Аналогичным образом получим НСП C_F для оставшихся уровней ОК-1, а также для всех уровней рассматриваемых общекультурных компетенций. Таким образом получим НСП, представленную на рисунке 3.

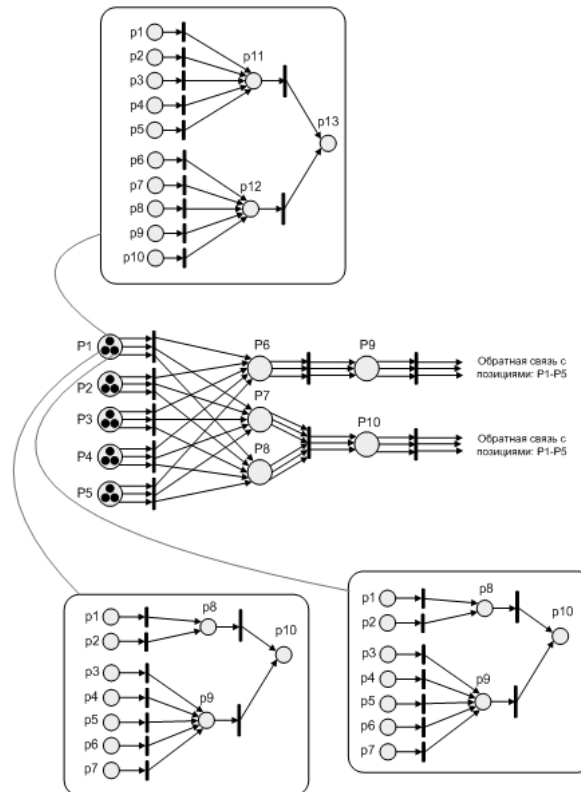


Рис. 3. НСП компетентностной модели выпускника

В результате введения значений начальных маркировок сетей нижнего уровня в каждой подсети получаем значения нечёткого наличия соответствующего числа маркеров в позициях, ассоциированных с компетенциями. Далее, в результате работы сети верхнего уровня, будут выявлены значения общего уровня знания и интеллектуальных навыков студента-выпускника вуза по рассматриваемым направлениям подготовки, а также проведены попытки корректировки проблемных мест в освоении компетенций.

Литература

1. Байденко В.И. Болонский процесс: результаты обучения и компетентностный подход / под ред. В.И. Байденко. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2009.
2. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 284 с.
3. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

4. Ломазова И.А. Моделирование мультиагентных динамических систем вложенными сетями Петри // Программные системы: Теоретические основы и приложения: Наука. Физматлит, 1999.

ПОДХОД К РЕАЛИЗАЦИИ РАСШИРЯЕМОСТИ И МАСШТАБИРУЕМОСТИ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В.В. СЫСКОВ, Д.В. КОВАЛЕНКО

Центральный научно-исследовательский институт экономики,
информатики и систем управления, г. Москва
e-mail: syskov@cniieisu.ru

В настоящее время существует проблема эффективного унифицированного взаимодействия имитационных моделей и использования полученных результатов моделирования в подсистемах сложной системы, решающей, например, задачи автоматизации аналитической и управленческой деятельности. Одними из направлений решения указанной проблемы являются реализация расширяемости и масштабируемости программных средств (ПС) моделирования на основе общепринятых концепций проектирования сложных систем и международных стандартов разработки программного обеспечения. В области моделирования к ним относятся – DSBA, JSTEB, LVC-IA, XMSF, ALSP, DIS, IEEE1278, HLA, IEEE1516.

Построение современных ПС имитационного моделирования требует применения подобных стандартов, которые, с одной стороны, позволяют унифицировать способы разработки моделей, а с другой – использовать действующие модели. Отдельным вопросом при этом остается оценка возможности применения того или иного стандарта для обеспечения конкретной функциональной возможности системы.

Установлено, что построение ПС имитационного моделирования для решения задач автоматизации управления целесообразно проводить на основе стандарта IEEE1516, который базируется на архитектуре HLA версии 1.3. Применение данного стандарта в различных сферах (наука, производство, транспорт, авиация, космос) позволяет унифицировать и интегрировать разработанные ранее и разрабатываемые имитационные модели, а также средства их разработки и взаимодействия.

Для решения большинства задач автоматизации управления, как правило, требуется использование набора аналитических и, в большей степени, имитационных моделей, не интегрированных на уровне кода в

среду их исполнения. Это обусловлено тем, что при моделировании необходимо разделять общие возможности ПС специфические функциональные возможности [1]. Такой подход позволяет при добавлении новых или изменении существующих моделей избежать перекомпиляции, а также повторной сертификации всей системы.

Реализация общих функциональных возможностей ПС имитационного моделирования возлагается на унифицированную инфраструктуру (УИ), разработанную на основе инфраструктуры RTI, описанной в стандарте IEEE1516. Она, подобно распределенной операционной системе, обеспечивает функциональность, необходимую для взаимодействия различных компонентов [1], в том числе моделей.

При этом функции, связанные с выполнением и взаимодействием имитационных моделей, отделены от функций взаимодействия компонентов более высокого уровня – федератов. Для обеспечения функционирования первых используется имитационно-моделирующий комплекс (ИМК), представляющий открытую среду функционирования связанных общей логикой моделей, а функции, обеспечивающие взаимодействие федератов, реализуются с помощью указанной УИ.

В соответствии с этим обобщенная структура ПС имитационного моделирования включает УИ, набор ИМК, образующих федерацию, систему пользовательского интерфейса, базу данных, систему контроля, анализа и представления информации, а также инструментарий разработчика имитационных моделей (рис. 1).

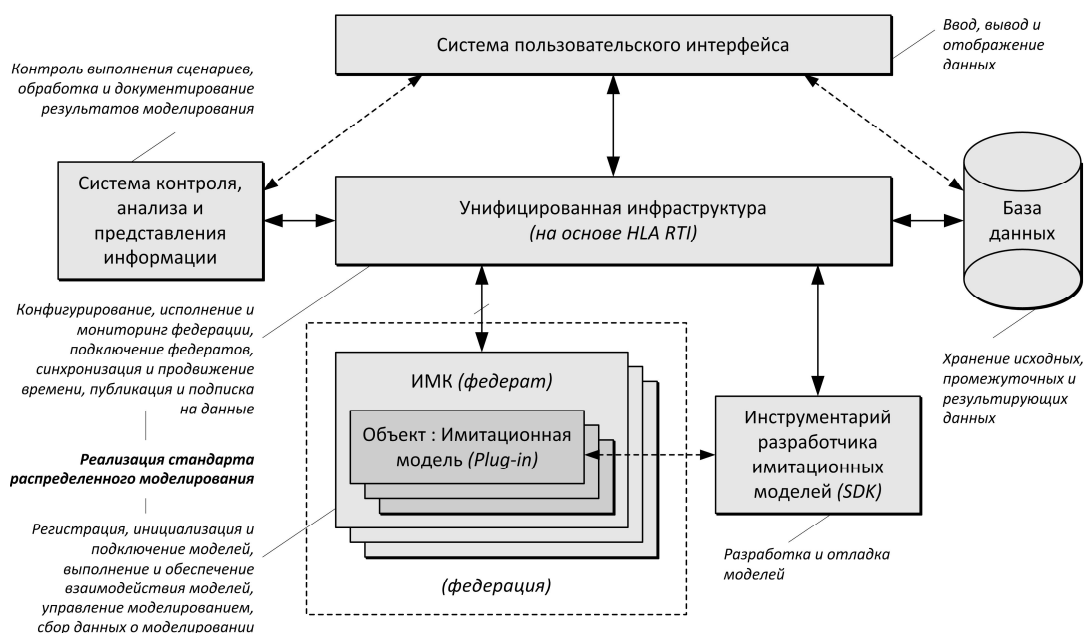


Рис. 1. Обобщенная структура ПС имитационного моделирования

Предложенный подход позволяет на архитектурном уровне отделять имитационные модели, выполняемые в виде подключаемых модулей, от среды их исполнения за счет применения стандарта

IEEE1516, что, в свою очередь, обеспечивает расширяемость, масштабируемость и унификацию ПС имитационного моделирования.

Литература

1. Афанасьев А.П., Ваньков А.И., Волошинов В.В., Кривцов В.Е. Современные технологии построения распределенных программных систем. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 53 с.

ЛОГОМЕТРИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ ПРОВОЛОЧНЫХ ТЕНЗОДАТЧИКОВ

В.А. СМОЛИН, Ю.В. ТРОИЦКИЙ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: smolin.vofka@yandex.ru

Проволочные тензометрические датчики широко используются для контроля за состоянием различных несущих конструкций и механических устройств различного назначения. Основной особенностью этих датчиков является их относительно малое (в пределах десятых долей процента) изменение величины сопротивления от воздействия измеряемого параметра (давления, деформации конструкции и т.д.). Для выделения этого приращения используют обычно полно-, полу- и четверть мостовые схемы [1].

Мостовые схемы могут быть запитаны от источника напряжения или источника тока. Во втором случае обеспечивается в два раза большая чувствительность схемы и меньшая нелинейность зависимости напряжения с выхода моста от приращения сопротивления датчика.

Последовательное включение мостовой схемы и эталонного резистора, с которого снимается опорное напряжение АЦП U_{ref} , обеспечивает логометрический способ преобразования, при котором результат преобразования N пропорционален частному от деления U_{in}/U_{ref} :

$$N = k \cdot U_{in}/U_{ref} = k \cdot I \cdot R^D / (I \cdot R_{ref}) = k \cdot R^D / R_{ref} \quad (1)$$

где $k = k_{yc} / (2^n - 1)$; n – эффективная разрешающая способность АЦП; k_{yc} – коэффициент усиления встроенного или внешнего усилителя.

Выражение (1) показывает, что метод позволяет устранить влияние нестабильности тока I на точность преобразования.

Удвоение чувствительности схемы измерения параметров и устранение нелинейности достигается в схеме с токовой петлей с последовательным включением резистивного датчика $(R + \Delta R)$, эталонного резистора R и резистора R_{ref} ,

$$U_{in} = I \cdot \Delta R. \quad (2)$$

В схеме используется лишь один прецизионный эталонный резистор, который оказывает основное влияние на точность преобразования. Действительно, если диапазон измеряемых приращений лежит в пределах десятых долей процента, то эталонный резистор следует выбирать с точностью в тысячные доли процента, чтобы обеспечить точность преобразования порядка процента. Такой выбор не оправдан как с экономической точки зрения, так и с технической. Действительно, погрешность сопротивления самого датчика лежит в пределах от одного до нескольких процентов. Следовательно, и эталонный резистор может быть выбран того же класса точности.

При использовании аналого-цифрового преобразователя микроконверторов семейства *ADuC 80xx*, *ADuC 7060/7061* или *MSC12xx* [2], имеющих по два встроенных источника тока и высокую (до 24 разрядов) разрешающую способность можно использовать двухконтурную схему (рис. 1).

В схеме на рисунке 1а обеспечивается независимость от нестабильности суммарного тока (I_1+I_2), что, конечно, не устраняет погрешность от нестабильности каждого из них. Этот недостаток устраняется в схеме на рисунке 1б. Измерение при этом происходит в 2 этапа. Первое измерение происходит при положении переключателей (а1 и а2), второе – в положении (б1 и б2).

Помимо устранения влияния нестабильности источника тока и линеаризации зависимости результатов преобразования от измеряемого параметра, в схеме сокращается количество прецизионных элементов и повышается ее чувствительность.

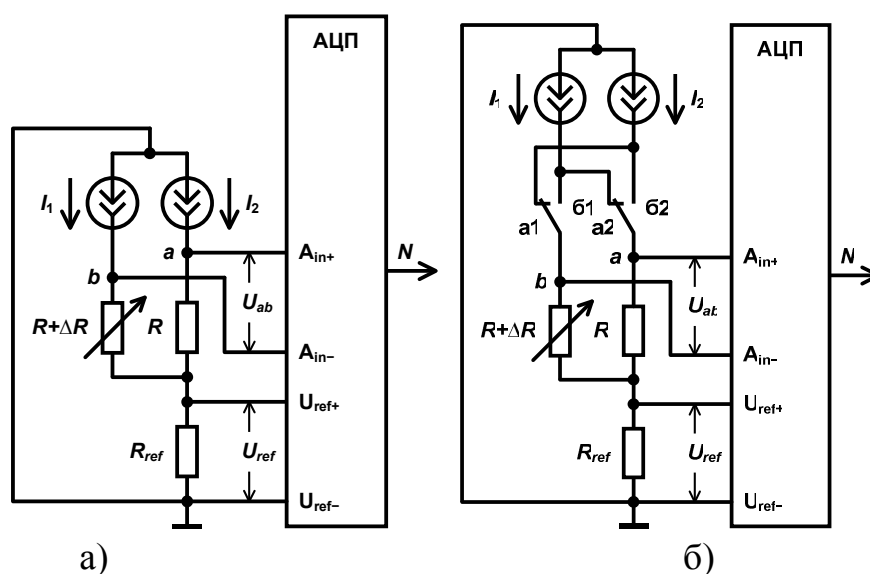


Рис. 1. Логметрическая схема с компенсацией постоянной составляющей сопротивления датчика с двумя токовыми ветвями: с компенсацией нестабильности суммарного тока ветвей (а), с компенсацией нестабильности каждого тока (б)

Литература

1. Методы практического конструирования при нормировании сигналов с датчиков. <http://www.autex.ru>. (По материалам семинара «Practical techniques for sensor signal conditioning». <http://www.analog.com>.)

2. Редькин П.П. Прецизионные системы сбора данных семейства MSC12xx Texas Instruments: архитектура, программирование, разработка приложений. – М.: Додэка-XXI, 2006.

СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ОЦЕНОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ С УЧЕТОМ СОГЛАСОВАННОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОЦЕНКИ И ВОЗМОЖНОСТЬЮ ОБРАТНОГО ВЫВОДА

Я.А. ФЕДУЛОВ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: fedulov_yar@mail.ru

В настоящее время вследствие развития средств автоматизации и компьютеризации общества возрастает роль сложных организационно-технических систем (ОТС). Отличием данных систем является то, что решаемые в них задачи являются слабоструктурированными и трудноформализуемыми, что затрудняет процесс оценки и последующего принятия решения в данных системах.

Поэтому растёт необходимость в использовании методов построения моделей объектов, работающих в условиях неопределённости и допускающих неточность, неполноту и противоречивость входных данных.

Для решения задач оценки и принятия решений в этих условиях широко применяются методы, основанные на теории нечётких множеств, нечёткой логики и нечёткой арифметики.

Задачи, возникающие в процессе оценивания, условно можно разбить на два класса: прямые задачи и обратные задачи. Для нечётких систем эти задачи формулируются как задачи нечёткого (прямого и обратного) вывода. При этом общего подхода к решению задач нечёткого обратного вывода с учетом взаимовлияния оцениваемых параметров для произвольных нечётких систем не существует.

Целью исследования была выбрана разработка способа построения универсальной оценочной модели, рассматривающей согласованные параметры оценки и позволяющей реализовывать как прямой, так и обратный выводы.

На основе анализа применяемых методов и с учетом недостатков и достоинств подходов к построению оценочных моделей в исследовании

были сформированы требования к оценочным моделям сложных ОТС [1]. Проблема согласованности частных показателей заключатся в том, что на практике одновременное достижение двух и более целей обычно невозможно ввиду их противоречивости. Для её решения к общим требованиям построения оценочных моделей были добавлены условия нормировки, неубывания, непрерывности, коммутативности и ассоциативности для отображения, представляющего связь между двумя критериями.

На предмет удовлетворения предъявленным требованиям были исследованы наиболее распространённые свертки, представляющие операции над нечеткими множествами [2; 3]. В результате было выбрано шесть базисных свёрток, на основе которых был сформирован способ построения модели оценки сложных ОТС. Модель представляет собой иерархическую структуру, отражающую взаимные связи между показателями оценки и может быть представлена в виде обобщённой операции их попарного свертывания.

На основе построенной модели задача прямого вывода может быть решена подстановкой в обобщенную операцию оценивания полного набора оценок по критериям. В зависимости от предпочтений лица, принимающего решение, и того, какие показатели следует свёртывать в первую очередь, предложенный способ гибко адаптируется к условиям конкретной задачи.

Задача нечёткого обратного вывода сводится к определению значения или диапазонов значений входных критериев, обуславливающих требуемый результат. Данный процесс происходит циклически, последовательно просматриваются все свёртки в обобщённой операции, поскольку возможно несколько вариантов диапазонов на каждом шаге, составляется дерево решений.

Графическое представление задачи обратного вывода для исследуемой предметной области представлено на рисунке 1.

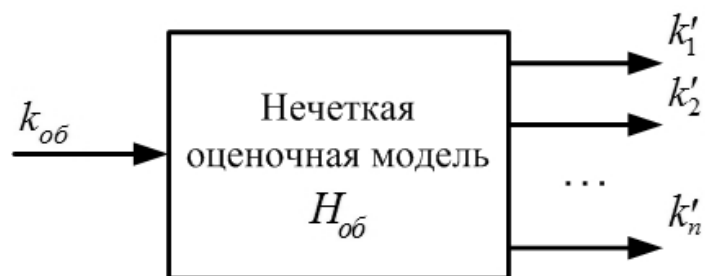


Рис. 1. Задача обратного вывода при получении оценки

Рисунок 1 иллюстрирует формальное представление задачи в виде $k'_{об} \xrightarrow{H'_{об}} k'_1, k'_2, \dots, k'_n$. В данном случае нечеткая модель оценки характеризуется некоторой построенной обобщенной операцией оценки $H'_{об}$, а k'_1, k'_2, \dots, k'_n – искомые диапазоны значений входных критериев.

Литература

1. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007.
2. Дюбуа Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – М.: Радио и связь, 1990.
3. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.

АППАРАТНАЯ ПОДДЕРЖКА ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ДАННЫХ

А.Е. ШИРАЙ, А.О. ПРОВОТОРОВА, Т.И. ГАЙДАЕНКО

ООО «СайнГрейн», г. Москва

e-mail: alexander@sciengrain.ru, anna@sciengrain.ru, tatiana@sciengrain.ru

В настоящее время базы данных (БД) все шире используются не только в серверах, предназначенных для хранения данных, но и в серверах приложений, включая серверы, используемые в системах реального времени.

Серверы приложений часто работают со сложно структурированными данными. Векторно-матричная модель представления данных, описанная в [1], позволяет существенно ускорить обработку запросов к этим данным за счет применения алгебры многомерных матриц.

Архитектуры современных микропроцессоров не в полной мере соответствуют решаемым задачам.

При работе с БД микропроцессор должен эффективно решать как задачи манипулирования сложно структурированными данными, так и задачи массовой числовой обработки данных.

Можно выделить 3 основные группы запросов к серверу от клиентов.

1. Выборка данных.
2. Выборка и предварительная обработка данных.
3. Обработка данных и выдача результатов обработки.

С точки зрения архитектурных решений запросы первой и второй групп требуют максимальной производительности при работе серверных приложений с подсистемой памяти и не требуют очень высокой производительности вычислительных устройств, так как число операций с отдельными данными и индексами в таких задачах невелико. На решение задач этого класса ориентированы архитектуры микропроцессоров SUN NIAGARA [2]. Эти микропроцессоры

обеспечивают высокую коллективную производительность для большого числа приложений, выполняющихся одновременно.

В серверах приложений, обеспечивающих не только выборку, но и обработку данных, используются процессоры, которые содержат несколько вычислительных ядер с глубоким конвейером команд и тремя уровнями кеш-памяти объемом десятки мегабайт и высокоскоростными портами памяти. Наряду с достоинствами, эти процессоры имеют недостаток – при работе со сложно структурированными данными, такими как деревья, содержащие цепочки ссылок, производительность системы падает на 2–3 порядка из-за большого числа промахов в кеш-памяти верхних уровней, расположенных в ядрах микропроцессоров.

Векторно-матричная модель представления данных предполагает хранение структуры данных в виде многомерных матриц, над которыми определены операции алгебры многомерных матриц. В работе [1] показано, что многомерные матрицы можно хранить в виде иерархических структур, для которых определены все операции алгебры многомерных матриц. При этом данные могут храниться в виде векторов или разреженных векторов в формате, принятом в конкретной СУБД.

Важным достоинством векторно-матричной модели представления данных является то, что отношения в ней представляются в виде алгебраических выражений, позволяющих производить оптимизацию запросов на уровне формул.

При выполнении операций, связанных с поиском вершин деревьев и манипулированием данными без их модификации, накладные расходы на передачу данных в ядра микропроцессора и обратно значительно превышают время их обработки в ядре, что ведет к потере эффективности. Выполнение этих действий лучше перенести на уровень, максимально приближенный к оперативной памяти – модуль управления памятью микропроцессора и кеш-памяти уровня L3, содержащей непосредственное отображение страниц оперативной памяти системы. Проблема состоит в том, что обработка информации должна производиться в определенном контексте по определенному алгоритму, что усложняет аппаратную реализацию.

Для решения этой задачи разработана новая подсистема управления памятью, реализующая функции сервера. Каждый сегмент памяти в контексте процесса представляется в виде объекта, имеющего собственный номер, тип, интерфейс и вектор состояния. Тип сегмента определяет его структуру, набор параметров, значения которых хранятся в векторе состояния сегментов, и множество методов обработки. В частности предусмотрена и группа типов сегментов, имеющих традиционный интерфейс памяти и структуру виртуального адреса.

Для многопоточных задач предусмотрены типы thread-safe объектов, интерфейс которых не предусматривает передачи потокам глобальных переменных. Управление ими сосредоточено внутри сервера памяти, который гарантирует их бесконфликтное использование без обращения к операционной системе (объектам синхронизации), что снижает накладные расходы на параллельную обработку данных.

Данный подход позволяет решить целый ряд задач управления сегментами, включая межпоточную синхронизацию обращений к ним, манипулирование данными на уровне подсистемы памяти, аппаратную поддержку выполнения функций ОС.

Применительно к СУБД, использующей векторно-матричную модель представления данных, можно отметить следующие возможности.

- Ассоциативный поиск вершин дерева по ключу.
- Сборка вектора ключей.
- Выборка данных в отдельный сегмент по ссылкам на другие сегменты.
- Коммуникации с другими процессорами.

Для реализации данного подхода в структуру сервера памяти входит многопоточный адресный процессор и векторное АЛУ, которое является расширением набора схем сравнения, используемых в кеш-памяти современных процессоров. Векторное АЛУ позволяет производить поиск ключа в векторе и выполнять некоторые другие операции.

Реализация данного проекта потребует разработки новых оптимизирующих компиляторов с существующих языков программирования и, возможно, послужит толчком для разработки новых языков параллельного программирования.

Достоинствами предлагаемой архитектуры являются:

- сокращение времени выполнения операций работы с адресами и всевозможных операций пересылок в многоядерном микропроцессоре за счет сокращения числа пересылок в исполнительные ядра процессора и исполнения их непосредственно в сервере ОП;
- сокращение накладных системных расходов на управление подсистемой памяти за счет аппаратной поддержки, реализованной в сервере памяти;
- сокращение накладных расходов на синхронизацию потоков при обращении к общим данным за счет аппаратной поддержки, исключающей конфликтные ситуации;
- повышение уровня интерфейса между ядрами процессора и подсистемой памяти, позволяющее сократить число обращений в память и сократить загрузку системы коммутации сообщений;

- возможность аппаратной поддержки функционирования виртуальных машин, наиболее широко используемых для создания клиент-серверных приложений (JVM, Dot-Net framework), включая аппаратную поддержку средств работы с метаданными исполняемого приложения

- возможность реализации высокоэффективного сервера приложений с векторно-матричной СУБД.

Литература

1. Сергеев В.П., Гайдаенко Т.И., Левин Н.А., Мунерман В.И., Оздемир С.М., Провоторова А.О., Ширай А.Е. Система представления данных в базе данных. Описание полезной модели к патенту RU 82 355 U1 М.: Изд-во ФС по ИСП и ТЗ РФ, 2009. – Бюллетень № 11 от 20.04.2009.

2. Stokes J. (February 9, 2010). «Two billion-transistor beasts: POWER7 and Niagara 3».

3. Ширай А.Е. Использование объектно-ориентированного подхода в архитектуре многоядерного микропроцессора для ускорения параллельных конвейерных вычислений // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2011. – Вып. 12.

4. http://www.opensparc.net/pubs/t2/docs//OpenSPARCT2_Core_Micro_Arch.pdf.

5. http://www.spscicomp.org/ScicomP16/presentations/Power7_Performance_Overview.pdf.

АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПО РЕЛЬСОВОЙ ЛИНИИ

А.Н. ШТЕМПЕЛЬ

Филиал ФГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: sht-alexey@mail.ru

Рельсовые пути являются линиями с распределенными параметрами, для которых характерны различные состояния.

Рассмотрим длинную линию, в которой рельсовые пути выполняют функцию проводников. Таким образом, продольными параметрами являются удельное сопротивление и индуктивность рельсовой петли, а поперечными параметрами будут проводимость между двумя рельсами и емкость между ними. Представим бесконечно малый участок рельсовой линии на рисунке 1 [1].

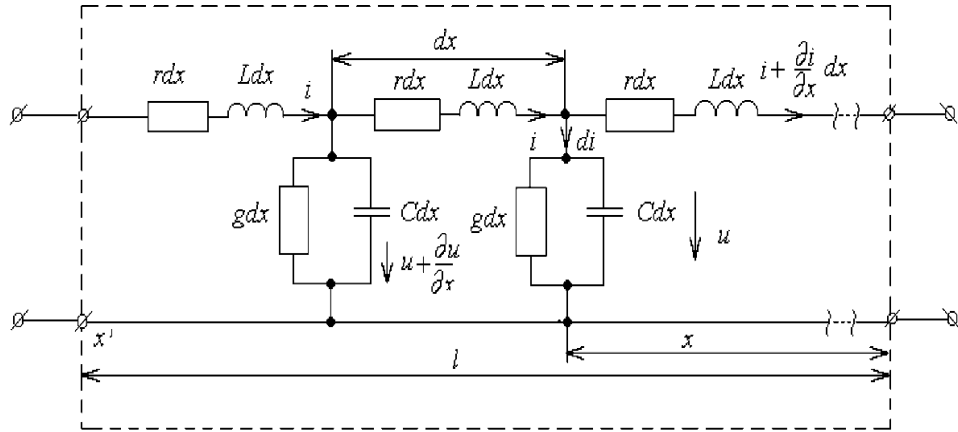


Рис. 1. Схема замещения дискретного участка рельсовой линии

Пусть на входе дискретного участка подключен источник гармонического напряжения, тогда запишем уравнения для распределения напряжений и токов вдоль рельсовой линии:

$$\dot{U} = \dot{U}(x); \quad (1)$$

$$\dot{I} = \dot{I}(x); \quad (2)$$

$$-\frac{dU}{dx} = Z_0 I; \quad (3)$$

$$-\frac{dI}{dx} = Y_0 I; \quad (4)$$

где $\frac{dU}{dx}$ – скорость изменения напряжения в направлении x ;

$\frac{dI}{dx}$ – скорость изменения тока в направлении x [2].

Комплексные параметры рельсовой линии на единицу длины имеют вид:

$$Z_0 = r + j\omega l \text{ Ом/км} \quad (5)$$

$$Y_0 = g + j\omega C \text{ См/км} \quad (6)$$

Решая уравнения (5), (6), находим зависимость напряжения и тока в начале рельсовой линии от напряжения и тока в ее конце:

$$U_1 = U_2 \operatorname{ch} \gamma l - I_2 \operatorname{sh} \gamma l \quad (7)$$

$$I_1 = I_2 \operatorname{ch} \gamma l - (U_2 / Z_0) \operatorname{sh} \gamma l \quad (8)$$

Выражения (7) и (8) представлены в общем виде и устанавливают взаимную связь токов и напряжений с параметрами линии r , L , C и g и позволяют вычислить напряжения и токи в произвольной точке при любой длине рельсовой цепи в зависимости от значений напряжений и токов в начале или в конце линии [1].

Уравнения (7), (8) верны при любых нагрузках на концах рельсовой цепи. Из этих равенств следует, что распространение энергии по рельсовой линии, а также ток и напряжение в любой ее точке

описываются аналитически при помощи гиперболических функций от комплексных аргументов.

Литература

1. Тарасов Е.М., Математическое моделирование рельсовых цепей с распределенными параметрами рельсовых: учебное пособие. – Самара: СамГАПС, 2003. – 118 с.
2. Аркатов В.С., Котляренко Н.Ф., Баженов А.И. Рельсовые цепи магистральных железных дорог: справочник. – М.: Транспорт, 1982. – 360 с.

СЕКЦИЯ 3

Математика и её приложения

О РЕШЕНИИ ВИДОИЗМЕНЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИКЬЕ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н.Г. АНИЩЕНКОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: nadezhdaadhzedan@gmail.com

1. Постановка задачи. Пусть $L = \{t: |t| = 1\}$, $D^+ = \{z: |z| < 1\}$ и $D^- = \bar{C} \setminus (D^+ \cup L)$. В дальнейшем будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1].

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все бианалитические функции $F^+(z)$, принадлежащие классу $A_2(D^+) \cap I^{(2)}(L)$ (см. [2]), ограниченные вблизи узлов и удовлетворяющие во всех обыкновенных точках контура L краевому условию*

$$\Delta F^+(t) + G(t)\overline{F^+(t)} = g(t), \quad (1)$$

где $G(t)$, $g(t)$ – заданные функции класса H_0 , $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор

Лапласа.

Заметим, что при $G(t) \equiv 0$ задача (1) представляет собой неклассическую задачу типа Рикье (см. [1, с. 16]) в классе бианалитических функций. Поэтому при $G(t) \neq 0$, $t \in L$ сформулированную задачу будем называть *видоизмененной задачей Рикье для бианалитических функций с разрывными коэффициентами*, или короче – задачей R . При этом, если $g(t) \equiv 0$, то задачу (1) назовем однородной.

В случае, когда функции $G(t)$ и $g(t)$ принадлежат классу $H(L)$, задача (1) была подробно рассмотрена в [3].

2. О решении задачи R в круге. Известно (см., например, [1; 4]), что всякую бианалитическую в области D^+ функцию $F^+(z)$ можно представить в виде:

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), \quad (2)$$

где $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ – аналитические в области D^+ функции, называемые аналитическими компонентами бианалитической функции $F^+(z)$.

Будем искать решение задачи (1) в виде:

$$F^+(z) = f_0^+(z) + (z\bar{z} - 1)f_1^+(z). \quad (3)$$

Тогда функции $f_0^+(z)$ и $f_1^+(z)$ будут связаны с аналитическими компонентами искомой бианалитической функции по формулам:

$$\varphi_0^+(z) = f_0^+(z) - f_1^+(z), \quad (4)$$

$$\varphi_1^+(z) = zf_1^+(z). \quad (5)$$

Так как (см., например, [4]) $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ и с учетом того, что для всех точек t контура L выполняется условие $t \cdot \bar{t} = 1$, равенство (1) примет вид:

$$4 \left(f_1^+(t) + t \cdot \frac{df_1^+(t)}{dt} \right) + G(t) \overline{f_0^+(t)} = g(t). \quad (6)$$

Введем новые функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ по формулам:

$$\Phi^+(z) = f_1^+(z) + z \cdot \frac{df_1^+(z)}{dz}, \quad (7)$$

$$\Phi^-(z) = \overline{f_0^+ \left(\frac{1}{z} \right)}. \quad (8)$$

С учетом формул (7) – (8) равенство (6) примет вид:

$$\Phi^+(t) = -\frac{1}{4} G(t) \Phi^-(t) + \frac{1}{4} g(t). \quad (9)$$

Заметим, что равенство (9) представляет собой краевое условие обычной скалярной задачи Римана с разрывными коэффициентами относительно кусочно аналитической функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ с линией скачков L , имеющей на бесконечности полюс первого порядка.

Таким образом, получен следующий основной результат.

Теорема. Пусть $L = \{t: |t| = 1\}$. Тогда решение задачи R сводится к решению скалярной задачи Римана с разрывными коэффициентами в классах кусочно аналитических функций с линией скачков L , имеющих полюс первого порядка на бесконечности и бесконечность интегрируемого порядка в узлах контура.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Болотин И.Б. Кусочно непрерывные краевые задачи типа Римана в классах бианалитических функций: дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01: защищена 21.06.04. – Смоленск, 2004. – 106 с.
3. Расулов К.М., Сенчилов В.В. О решении одной видоизмененной краевой задачи типа Рикье для метааналитических функций в круге // Исследования по крайевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям / Смоленский гос. пед. ун-т. – Смоленск, 2002. – Вып. 4. – С. 62–68.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

О ТЕОРЕМЕ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ РАВНЫХ ПО МОДУЛЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ

В.М. АДУКОВ

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: vicmikhad@mail.ru

Рассматривается линейное разностное уравнение второго порядка с предельно постоянными коэффициентами

$$u(n+2) + (a + \alpha(n))u(n+1) + (b + \beta(n))u(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $a, b, \alpha(n), \beta(n) \in \mathbb{C}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(n) = 0$. Многочлен $\lambda^2 + a\lambda + b$ называется *характеристическим многочленом*, а его корни λ_1, λ_2 – *характеристическими корнями* уравнения (1).

Фундаментальным результатом в асимптотической теории уравнения (1) является теорема Пуанкаре, которая утверждает, что если $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$, то для любого решения $\{u(n)\}_{n=0}^{\infty}$ уравнения (1), либо $u(n) = 0$ для всех достаточно больших n , либо существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n+1)}{u(n)}$, причем он равен одному из характеристических корней. Простые примеры показывают, что это утверждение становится неверным в случае $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.

В докладе изучено асимптотическое поведение последовательности $\left\{ \frac{u(n+1)}{u(n)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ в случае $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ и получено описание множества \mathbf{A} всех предельных точек данной последовательности при следующем ограничении на коэффициенты уравнения:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha(n)|} \leq q < 1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\beta(n)|} \leq q < 1. \quad (2)$$

Условие (2) гарантирует, что производящая функция $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^n$ любого решения $\{u(n)\}_{n=0}^{\infty}$ будет мероморфной в круге $|z| < q^{-1}|\lambda_1^{-1}|$ функцией с возможными полюсами в точках $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$ [1].

Этот факт позволяет применить к исследуемой проблеме теорию сходимости одной из строк таблицы Паде, разработанную в [2]. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть $|\lambda_1| = |\lambda_2| \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и выполнено условие (2). Пусть $\{u(n)\}_{n=0}^{\infty}$ – любое нетривиальное решение (1). Обозначим через A_k вычеты производящей функции $U(z)$ в точках λ_k^{-1} , $k = 1, 2$, и $\rho = \left| \frac{A_2}{A_1} \right|$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существует конечный или бесконечный $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u(n+1) - \lambda_1 u(n)|}{|u(n+1) - \lambda_2 u(n)|} = \rho$.

2. Если $\rho = 0$, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n+1)}{u(n)} = \lambda_1$.

3. Если $\rho = \infty$, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n+1)}{u(n)} = \lambda_2$.

4. Если $0 < \rho < \infty$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ – примитивный корень из единицы степени σ ,

то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n+1)}{u(n)} = \lambda_2 \frac{A_1 \varepsilon^{p(j+2)} + A_2}{A_1 \varepsilon^{p(j+1)} + A_2}, \quad n \equiv j \pmod{\sigma}.$$

Здесь $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{\sigma}\right)$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \varepsilon^p$, $p \in \{0, 1, \dots, \sigma-1\}$, $(p, \sigma) = 1$.

Множество \mathbf{A} состоит из σ предельных точек, лежащих на окружности Аполлония $\left| \frac{z - \lambda_1}{z - \lambda_2} \right| = \rho$.

Точка ∞ принадлежит \mathbf{A} , если для некоторого j_0 выполнено условие $A_1 \varepsilon^{p(j_0+1)} + A_2 = 0$. В этом случае окружность Аполлония есть прямая ($\rho = 1$), и 0 также принадлежит \mathbf{A} .

5. Если $0 < \rho < \infty$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ – не корень из единицы, то множество \mathbf{A} совпадает с окружностью Аполлония.

Литература

1. Буслаев В.И., Буслаева С.Ф. О теореме Пуанкаре о разностных уравнениях // Математические заметки. – 2005. Т. 78, № 6. – С. 877–882.

2. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Pade table. J. Approx. Theory. V. 122. – 2003. – P. 160–207.

ГРАНИЧНАЯ ТЕОРЕМА ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.П. ВАСИЛЕНКОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Граничное поведение полианалитических функций изучалось рядом авторов. Подробный список работ по этой тематике приведен в [1].

В этой статье обсуждается возможность распространения теоремы, доказанной Г.Ц. Тумаркиным для аналитических функций, на полианалитические функции [2].

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая и ограничена в некотором угле AOB . Существует предел граничных значений функции $f(z)$, равный a ,

когда z приближается к точке O по множеству E , где E находится на стороне угла и точка O для него – точка положительной плотности.

Тогда $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = a$, когда точка $z \rightarrow 0$ к вершине угла по любому пути, некасательному к сторонам угла.

Для полианалитических функций это не так. Например, бианалитическая функция $f(z) = \frac{z}{z}$ ограничена в угле с вершиной в начале координат и со сторонами, совпадающими с положительными полуосями OX и OY . На оси OX $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, тем не менее предел этой функции по биссектрисе данного угла равен $-i$. Этот пример показывает, что в обычной формулировке теорема неверна для полианалитических функций.

Естественным и простым обобщением этой теоремы на случай полианалитических функций является, например, утверждение, в котором условие теоремы Г.Ц. Тумаркина накладывается на саму функцию и её формальные производные.

Тогда заключение указанной теоремы остается верным и в классе полианалитических функций. Справедливость указанного обобщения доказывается достаточно тривиально.

На наш взгляд, более интересными и трудными являются теоремы, в которых выполнимость теоремы Г.Ц. Тумаркина достигается либо за счет специального строения множества E на сторонах угла, либо за счет скорости стремления граничных значений данной функции по множеству E , лежащих на сторонах угла.

Определение. Будем говорить, что точка O является точкой положительной плотности для множества E порядка не ниже n , если существуют не менее n неколлинеарных лучей OA_i (OA_i принадлежат углу AOB), на каждом из которых существует множество $E_i \subset E$, ($i=1, 2, \dots, n$), такое, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes} E_i(0; r)}{r} > 0,$$

где $E_i(0; r)$ – множество тех точек $z \in E_i$, для которых $|z - 0| < r$. Используя это понятие, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть 1) $f(z)$ – ограниченная в угле AOB полианалитическая функция порядка n ; 2) вершина угла $z=0$ – точка положительной плотности порядка не ниже n ; 3) существуют граничные значения функции $f(z)$ и они стремятся к числу a , когда z стремится к вершине угла по множеству $E = \bigcup_{i=1}^n E_i, E_i \subset OA_i$.

Тогда функция $f(z)$ будет стремиться к тому же самому пределу, а при приближении точки z – к вершине угла по любому некасательному к сторонам угла пути.

Замечание. Представляет интерес случай, когда один или два луча совпадают со сторонами угла.

Теорема 2. Пусть 1) $f(z)$ – ограниченная полианалитическая функция порядка n в угле AOB ; 2) вершина угла $z=0$ является точкой положительной плотности для множества E , находящегося на стороне угла AO ; 3) существует предел граничных значений функции $\frac{f(z)}{\rho^{n-1}(z,OA)}$, где $\rho(z,OA)$ – расстояние от точки z до луча OA , когда z приближается к вершине угла по множеству E .

Тогда функция $f(z)$ будет стремиться к тому же самому пределу по любому некасательному к сторонам угла пути.

Следствие. Пусть 1) функция $f(z)$ – ограниченная полианалитическая функция порядка n в угле AOB ; 2) вершина угла является точкой положительной плотности для множеств E_1 и E_2 , находящихся на сторонах угла OA и OB ; 3) существует предел а граничных значений функции $\frac{f(z)}{\rho^{k_1}(z,OA)}$ и $\frac{f(z)}{\rho^{k_2}(z,OB)}$ при стремлении к вершине угла по множеству E_1 и E_2 , соответственно и $k_1 + k_2 = n-1$.

Тогда $f(z)$ стремится к числу a , когда z стремится к вершине угла по любому некасательному к сторонам угла пути.

Литература

1. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ/Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальное направление» Т. 85. – М.:ВИНИТИ. – С.187-246.

2. Тумаркин Г.Ц. О граничных свойствах последовательности аналитических функций. – М.: ДАН СССР, 1957. Т. 114. № 3.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ КАРТИНЫ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Я.А. ВАСИЛЬЕВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: Vasiliev.Yaroslav.A@yandex.ru

В основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [2].

Пусть T^+ (T^-) – внутренность (внешность) единичного круга на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, L – единичная окружность.

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача $GR_{1,2}$. Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, $F^+(0) = 0$, $F^-(\infty) = 0$ и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} - G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \int_L A_1(t, \tau) \frac{\partial F^+(\tau)}{\partial x} d\tau + \int_L B_1(t, \tau) \frac{\partial F^-(\tau)}{\partial x} d\tau = g_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} - G_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + \int_L A_2(t, \tau) \frac{\partial F^+(\tau)}{\partial y} d\tau + \int_L B_2(t, \tau) \frac{\partial F^-(\tau)}{\partial y} d\tau = ig_2(t), \quad (2)$$

где $G_k(t)$, $g_k(t)$ ($k=1, 2$) – заданные на L функции, причем $G_k(t)$, $g_k(t) \in H^{(1)}(L)$, $G_k(t) \neq 0$ на L ; $A_k(t, \tau)$, $B_k(t, \tau)$ – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(1)}(L \times L)$.

Отметим, что рассматриваемая задача была подробно исследована в работе [1].

Обозначим через $\chi_1 = \text{Ind}G_1(t)$ и $\chi_2 = \text{Ind}G_2(t)$ частные индексы задачи $GR_{1,2}$; через p число условий разрешимости неоднородной задачи $GR_{1,2}$, а через l – число линейно независимых (над полем \bar{C}) решений соответствующей однородной задачи $GR_{1,2}^0$ ($g_1 \equiv g_2 \equiv 0$).

В работе [1] установлено, что картина разрешимости задачи $GR_{1,2}$ (т.е. значения чисел p и l) зависит от значений частных индексов χ_k , $k=1, 2$. Кроме того, получены оценки для чисел p и l в каждом случае.

В настоящей заметке приводятся примеры, когда $\chi_1 < 0$ и $\chi_2 < 0$, и числа p и l достигают своих пограничных значений.

Литература

1. Васильев Я.А., Расулов К.М. Первая обобщенная краевая задача типа Римана для бианалитических функций в круге // Известия СмолГУ. – 2011. – № 2. – С. 119–130.
2. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОБОБЩЕННЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ю.М. ВУВУНИКЯН

Гродненский государственный университет, г. Гродно
e-mail: vuv64@mail.ru

Пусть X – пространство финитных слева бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси. **Полиномиальным**

эволюционным оператором Вольтерра – Винера степени m будем называть оператор A , определяемый равенством

$$Ax = \sum_{n=1}^m S_n(a_n * x^{\otimes n}) \quad (x \in X),$$

где $x^{\otimes n}$ – n -я тензорная степень функции $x \in X$, a_n – обобщенная функция на пространстве R^n , носитель которой содержится в положительном гипероктанте $[0; +\infty)^n$, $*$ – операция свертки, S_n – оператор сокращения переменных степени n : $S_n f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t, t, \dots, t)$.

Отметим, что полиномиальным эволюционным оператором Вольтерра – Винера удовлетворяют важному условию причинности [1]: если $\text{supp } x \subset [t_0, +\infty)$, то $\text{supp } Ax \subset [t_0; +\infty)$.

Множество всех полиномиальных эволюционных операторов Вольтерра – Винера степени m будем обозначать V_m .

Обобщенную функцию a_n назовем **импульсной характеристикой порядка n** оператора A , а семейство (a_n) – **системой импульсных характеристик** оператора A .

Линейный оператор A_1 , определяемый равенством

$$A_1 x = a_1 * x,$$

называется **первой операторной компонентой оператора A** .

Билинейный оператор A_2 , определяемый равенством

$$A_2(x_1, x_2) = S_2(a_2 * (x_1 \otimes x_2)) \quad (x_1, x_2 \in X),$$

называется **второй операторной компонентой оператора A** .

В общем случае, для любого натурального числа $n \leq m$ определим полиномиальный оператор A_n ,

$$A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = S_n(a_n * (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n)) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \in X),$$

который будем называть **n -й операторной компонентой оператора A** .

В случае, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, будем обозначать $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Тогда имеем:

$$A_n x^n = S_n(a_n * x^{\otimes n}),$$

и, следовательно,

$$Ax = \sum_{n=1}^m A_n x^n \quad (x \in X).$$

Рассмотрим тензорное произведение двух полиномиальных эволюционных операторов Вольтерра – Винера.

Пусть A и B – полиномиальные эволюционные операторы Вольтерра – Винера степени m_1 и m_2 соответственно:

$$Ax = \sum_{n=1}^{m_1} S_n(a_n * x^{\otimes n}), \quad Bx = \sum_{j=1}^{m_2} S_j(b_j * x^{\otimes j}).$$

И пусть $u = Ax$, $v = Bx$.

Рассмотрим тензорное произведение $u \otimes v$. В силу билинейности тензорного произведения имеем:

$$\begin{aligned} u \otimes v &= Ax \otimes Bx = \sum_{n=1}^{m_1} S_n(a_n * x^{\otimes n}) \otimes \sum_{j=1}^{m_2} S_j(b_j * x^{\otimes j}) = \\ &= \sum_{n=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} S_n(a_n * x^{\otimes n}) \otimes S_j(b_j * x^{\otimes j}) = \sum_{n=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} S_{n,j}((a_n * x^{\otimes n}) \otimes (b_j * x^{\otimes j})), \end{aligned} \quad (1)$$

где $S_{n,j}$ – оператор сокращения переменных, действие которого на произвольную функцию f , имеющую $n+j$ независимых переменных, определяется следующей формулой:

$$S_{n,j}f(t_1, t_2, \dots, t_n, s_1, s_2, \dots, s_j) = f(t, t, \dots, t, s, s, \dots, s).$$

Рассмотрим теперь выражение $(a_n * x^{\otimes n}) \otimes (b_j * x^{\otimes j})$. Для его преобразования мы применим общую лемму. Аналогично случаю обобщенной функции одной переменной будем говорить, что обобщенная вектор-функция n переменных **финитна слева**, если носитель ее содержится в конусе $[t_0; +\infty)^n$, где t_0 – некоторое фиксированное число.

Лемма 1. Пусть a^k ($k=1, 2, \dots, i$) и w^k ($k=1, 2, \dots, i$) – финитные слева обобщенные функции n_k переменных соответственно.

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\bigotimes_{k=1}^i (a^k * w^k) = \left(\bigotimes_{k=1}^i a^k \right) * \left(\bigotimes_{k=1}^i w^k \right). \quad (2)$$

Применяя равенство (2) (в случае $i = 2$) к соотношению (1), получаем

$$u \otimes v = Ax \otimes Bx = \sum_{n_1, n_2=1}^{m_1, m_2} S_{n_1, n_2}((a_{n_1} \otimes b_{n_2}) * (x^{\otimes n_1} \otimes x^{\otimes n_2})). \quad (3)$$

Полагая же в равенстве (3) $y = x$, имеем:

$$\begin{aligned} Ax \otimes Bx &= \sum_{n_1, n_2=1}^{l, j} S_{n_1, n_2}((a_{n_1} \otimes b_{n_2}) * (x^{\otimes n_1} \otimes x^{\otimes n_2})) = \\ &= \sum_{n_1, n_2=1}^{l, j} S_{n_1, n_2}((a_{n_1} \otimes b_{n_2}) * x^{\otimes(n_1+n_2)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы распространить равенство (4) на любое конечное число тензорных сомножителей, рассмотрим понятие **композиции** [2, с. 67]

натурального числа n , под которым понимается такой конечный набор $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l)$ натуральных чисел, что $|\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$.

Полезно отметить, что так как $n_1, n_2, \dots, n_l \geq 1$, то $n \geq l$.

Натуральные числа n_1, n_2, \dots, n_l называются **частями композиции** числа n . Множество всех композиций натурального числа n с l частями будем обозначать $\Xi_{n,l}$. Отметим, что мощность множества $\Xi_{n,l}$ равна

$$C_{n-1}^{l-1} = \frac{(n-1)!}{(l-1)!(n-l)!}.$$

Рассмотрим также понятие **композиции с ограничениями**. Пусть $m = (m_1, m_2, \dots, m_l)$ – фиксированный конечный набор натуральных чисел. Будем говорить, что композиция $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l) \in \Xi_{n,l}$ **удовлетворяет ограничению m** , если $n_k \leq m_k$ ($k = 1, 2, \dots, l$). Множество всех композиций натурального числа n с l частями, удовлетворяющих ограничению m , будем обозначать $\Xi_{n,l,m}$.

С помощью множества $\Xi_{n,2,m}$ формулу (4) можно записать в следующем виде:

$$Ax \otimes Bx = \sum_{n=2}^{|m|} \sum_{(n_1, n_2) \in \Xi_{n,2,m}} S_{n_1, n_2} ((a_{n_1} \otimes b_{n_2}) * x^{\otimes n}) \quad (5)$$

Таким образом, мы получили следующую теорему о тензорном произведении двух эволюционных операторов:

Теорема 1. Пусть A и B – полиномиальные эволюционные операторы степеней m_1 и m_2 соответственно:

$$Ax = \sum_{n=1}^{m_1} S_n(a_n * x^{\otimes n}), \quad Bx = \sum_{j=1}^{m_2} S_j(b_j * x^{\otimes j}).$$

Тогда справедлива формула (5).

Формула (5) доказана для случая тензорного произведения двух эволюционных операторов. Рассмотрим теперь общий случай произвольного конечного числа операторов.

Пусть $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l)$.

Введем оператор сокращения переменных S_α , действие которого на произвольную функцию f , имеющую $|\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$ независимых переменных, определяется формулой

$$S_\alpha f(t_1, t_2, \dots, t_{n_1}, t_{n_1+1}, t_{n_1+2}, \dots, t_{n_1+n_2}, \dots, t_{n_1+n_2+\dots+n_{l-1}+1}, t_{n_1+n_2+\dots+n_{l-1}+2}, \dots, t_{n_1+n_2+\dots+n_{l-1}+n_l}) = f(s_1, s_1, \dots, s_1, s_2, s_2, \dots, s_2, \dots, s_l, s_l, \dots, s_l).$$

Сформулируем и докажем следующую теорему о тензорном произведении любого конечного числа эволюционных операторов:

Теорема 2. Пусть A^1, A^2, \dots, A^l – полиномиальные эволюционные операторы степеней m_1, m_2, \dots, m_l соответственно:

$$A^k x = \sum_{n_k=1}^{m_k} S_{n_k} (a_{n_k}^k * x^{\otimes n_k}) \quad (k=1, 2, \dots, l).$$

Тогда для тензорного произведения этих операторов справедливо следующее равенство:

$$\bigotimes_{k=1}^l A^k x = \sum_{n=1}^{|m|} \sum_{\alpha \in \Xi_{n,l,m}} S_{\alpha} ((\bigotimes_{k=1}^l a_{n_k}^k) * x^{\otimes n}), \quad (6)$$

где $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l)$, $n = |\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_l$, $m = (m_1, m_2, \dots, m_l)$, $|m| = m_1 + m_2 + \dots + m_l$.

Доказательство. В силу билинейности тензорного произведения имеем:

$$\bigotimes_{k=1}^l A^k x = \bigotimes_{k=1}^l \sum_{n_k=1}^{m_k} S_{n_k} (a_{n_k}^k * x^{\otimes n_k}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=1}^{m_1, m_2, \dots, m_l} S_{n_1, n_2, \dots, n_l} (\bigotimes_{k=1}^l (a_{n_k}^k * x^{\otimes n_k})). \quad (7)$$

Применяя к правой части равенства (7) лемму 1, получим

$$\bigotimes_{k=1}^l A^k x = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=1}^{m_1, m_2, \dots, m_l} S_{n_1, n_2, \dots, n_l} ((\bigotimes_{k=1}^l a_{n_k}^k) * (\bigotimes_{k=1}^l x^{\otimes n_k})). \quad (8)$$

Рассмотрим

$$\bigotimes_{k=1}^l x^{\otimes n_k} = x^{\otimes n_1} \otimes x^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes x^{\otimes n_l} = x^{\otimes (n_1 + n_2 + \dots + n_l)} = x^{\otimes n}.$$

Следовательно, равенство (8) можно записать в следующем виде:

$$\bigotimes_{k=1}^l A^k x = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=1}^{m_1, m_2, \dots, m_l} S_{n_1, n_2, \dots, n_l} ((\bigotimes_{k=1}^l a_{n_k}^k) * x^{\otimes n}). \quad (9)$$

Упорядоченный набор $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l)$ натуральных чисел является композицией натурального числа n и содержит ровно l частей. Кроме того, $n_k \leq m_k$ ($k=1, 2, \dots, l$). Значит, $\alpha \in \Xi_{n,l,m}$, где $n = |\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ и $m = (m_1, m_2, \dots, m_l)$. В силу того, что $n_k \leq m_k$ ($k=1, 2, \dots, l$) имеем:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_l \leq m_1 + m_2 + \dots + m_l = |m|. \quad (10)$$

А в силу того, что $n_k \geq 1$ ($k=1, 2, \dots, l$), имеем:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_l \geq l. \quad (11)$$

Таким образом, исходя из соотношения (9) и неравенств (10) и (11), получаем, что имеет место соотношение (6), что и требовалось доказать.

Применяя S_l – оператор сокращения переменных кратности l к обеим частям равенства (6) и учитывая, что

$$S_l S_{\alpha} = S_n,$$

так как $n = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ а также соотношение

$$S_l(\bigotimes_{k=1}^l A^k x) = \prod_{k=1}^l A^k x,$$

получим общую формулу для произведения эволюционных операторов:

$$\prod_{k=1}^l A^k x = \sum_{n=l}^{lm} S_n \left(\left(\sum_{\alpha \in \Xi_{n,l,m}^*} \bigotimes_{k=1}^l a_{n_k}^k \right) * x^{\otimes n} \right).$$

В качестве следствия из теоремы 2 также получаем теорему о тензорных степенях полиномиального эволюционного оператора.

Для этого обозначим через $\Xi_{n,l,m}^*$ множество всех композиций натурального числа n с l частями, каждое из которых не превосходит натурального числа m .

Теорема 3. Пусть A – полиномиальный эволюционный оператор Вольтерра – Винера степени m :

$$Ax = \sum_{n=1}^m S_n(a_n * x^{\otimes n}).$$

Тогда для тензорной степени l справедлива следующая формула:

$$(Ax)^{\otimes l} = \sum_{n=l}^{lm} \sum_{\alpha \in \Xi_{n,l,m}^*} S_\alpha \left(\left(\bigotimes_{k=1}^l a_{n_k} \right) * x^{\otimes n} \right),$$

где $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l)$, $n = |\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_l$.

Литература

1. Вувуникян Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками: монография. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 224 с.
2. Эндриус Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ДАВЛЕНИЯ

И.И. ГРИГОРЬЕВ, О.Ю. БУШУЕВ

Южно-Уральский Государственный университет, г. Челябинск

e-mail: igrig90@gmail.com

Динамическая характеристика является одним из важнейших параметров линейной системы, так как, с одной стороны, определяет ее реакцию на изменение внешних воздействий, а с другой – несет информацию о конструкции систем [1]. В то же время при моделировании преобразователей давления обычно исследуется лишь статическая их характеристика.

В настоящей работе описываются результаты работы по моделированию тензопреобразователя давления, направленные на исследование его динамических характеристик и соотнесения ее частотных диапазонов с элементами конструкции.

Расчеты выполнялись методом конечных элементов с использованием программного комплекса ANSYS. Производилось моделирование двухмембранного тензопреобразователя давления. Его устройство предполагает передачу внешнего воздействия на чувствительные элементы с помощью слоя несжимаемой жидкости и штока, соединяющего давление жидкости с приёмной мембраной. Измерительная система помещена в титановый корпус и связана с ним резьбовым соединением. Конструктивные элементы соединены сварными швами с глубиной проплавления 0,5 мм. Геометрическая модель представлена на рисунке 1.

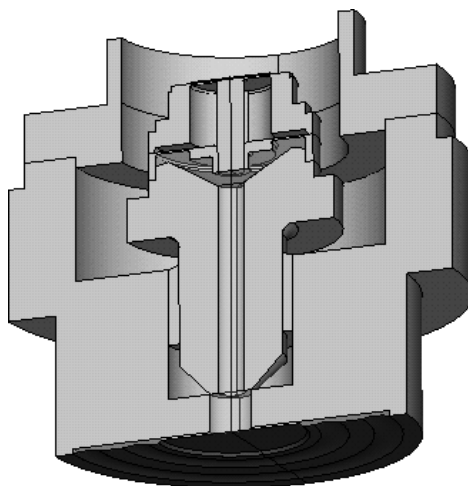


Рис. 1. Геометрическая модель, используемая для расчёта

Использовались 2 типа конечных элементов – 10-узловые тетраэдры и элементы типа «тонкая упругая оболочка». Размер элементов подбирался путем построения последовательности решений с уменьшающимися размерами так, чтобы результаты расчетов содержали как минимум 3 стабильные (не зависящие от размера элементов) значащие цифры.

При расчете собственных частот амплитуды колебаний полагаются малыми для того, чтобы можно было пренебречь нелинейными эффектами деформирования конструкции, поэтому при описании жидкости была исключена возможность ее перетекания и сохранены лишь деформации, связанные со сжимаемостью. Для оценки влияния такого допущения на результаты были выполнены расчеты собственных частот для конструкции с жидкостью (описанной как указано выше) и без жидкости (что можно рассматривать как абсолютную свободу перетекания). Сравнение результатов показало, что допущение об

отсутствии перетекания сильно сказывается на колебаниях мембраны, но практически не влияет на частоты колебаний корпуса.

В расчете использовались справочные механические характеристики материалов. Свойства металлических материалов (титан, нержавеющая сталь X18H9 для корпуса и 36НХТЮ для мембраны) изучены достаточно хорошо и отражены в многочисленных справочниках. Столь же подробной информации о свойствах кремнийорганической жидкости не имелось, в расчет были заложены данные по плотности и сжимаемости, взятые с сайта одного из производителей таких жидкостей.

В качестве внешней нагрузки рассматривалось воздействие на мембрану давления, меняющееся по гармоническому закону. Это позволяет применить технологию гармонического анализа для получения амплитудно-частотной характеристики в желаемом диапазоне частот без трудоемкого расчета переходных процессов. Амплитуда входного сигнала полагалась не зависящей от частоты.

В результате расчёта была получена оценка собственных частот колебания датчика. На рисунке 2 представлена расчётная АЧХ (сплошная линия), наложенная на экспериментальный спектр сигнала с датчика (прерывистая линия).

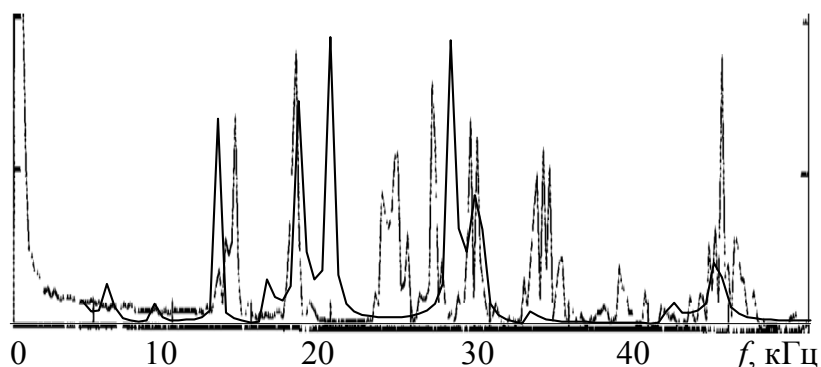


Рис. 2. Экспериментальный спектр сигнала и расчётная АЧХ

Изучение связи элементов конструкции с частотными диапазонами передаточной характеристики проводилось путем варьирования параметров конструкции, в частности изменением радиальной податливости резьбы, внесения дефектов сварки в шов, изменения параметров диафрагмы.

Выявленные в результате расчетов зависимости между конструктивными элементами и частотными диапазонами отражены на рисунке 3 в виде пронумерованных отрезков. На этом же рисунке приведены и экспериментальные характеристики трех различных экземпляров датчика.

Для определения экспериментальной частотной характеристики датчика был разработан специализированный стенд [1]. Мембрану

датчика погружали в жидкость и подавали на датчик возбуждающий импульс давления, генерируемый с помощью кварцевого преобразователя. С информационных выходов датчика принимался отклик и рассчитывался его спектр.

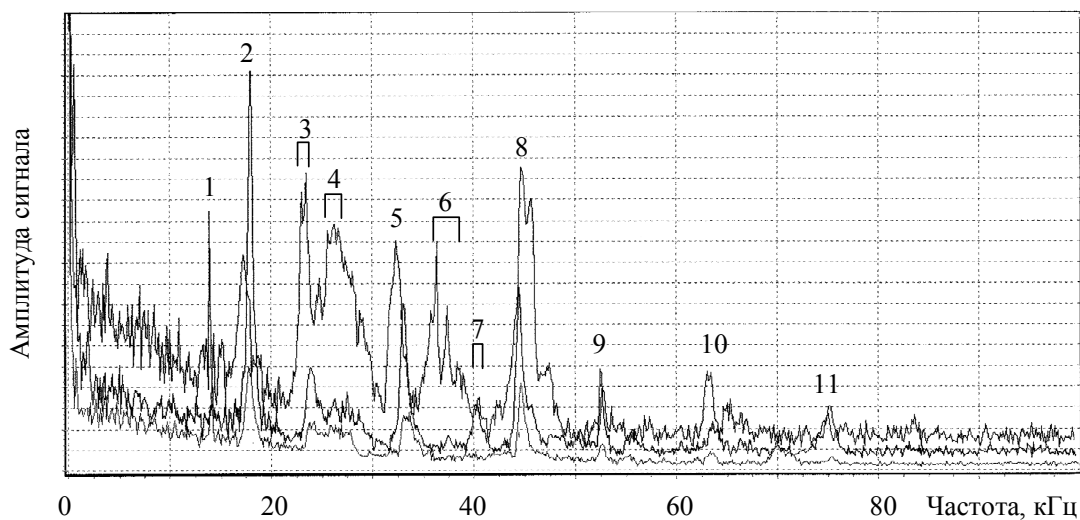


Рис. 3. Экспериментальная спектральная характеристика различных датчиков

Сопоставление результатов моделирования и экспериментальных переходных характеристик, в соответствии с нумерацией пиков на рисунке 3 позволяет сделать следующие заключения по возможности диагностики состояния элементов некоторых конструкций:

- 1, 5 – диагностика плотности резьбового соединения;
- 2 – диагностика отсутствия пузырьков воздуха в кремнийорганической жидкости;
- 3, 4, 7 – диагностика развития дефектов в сварном шве корпуса;
- 8, 9 – диагностика сварных швов измерительного преобразователя;
- 11 – диагностика сварного шва внутри измерительного преобразователя.

Таким образом, можно предположить, что контроль частотной характеристики в указанных областях позволит контролировать состояние соответствующих конструктивных элементов.

Кроме того, достаточно хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов позволяет говорить о том, что разработанная модель может быть использована и для отработки алгоритмов самодиагностики датчиков давления других типов.

Литература

1. Бушуев О.Ю., Семенов А.С., Шестаков А.Л. Экспериментальная оценка динамических характеристик тензопреобразователей давления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». – 2011. – № 1.

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ НА ПОЛУОСИ

О.Б. ДОЛГОПОЛОВА, Э.И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский Государственный Университет, г. Минск
e-mail: Dolgopolova@tut.by

В настоящее время некоторые авторы проявляют интерес к *исключительному* случаю краевой задачи Римана [1], которая иначе называется *задачей линейного сопряжения*.

Чтобы показать, насколько они далеки от реальности, здесь будет впервые решена в замкнутой форме одна из простейших задач такого типа. Сначала поставим однородную задачу линейного сопряжения.

Требуется найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую вне положительного луча $[0, +\infty)$, непрерывно продолжимую сверху и снизу на луч $(0, +\infty)$, по следующему условию сопряжения:

$$\Phi(t^+) = t^\alpha \cdot \Phi(t^-), \quad t \in (0, +\infty), \quad (1)$$

где верхние индексы $+$ и $-$ символизируют предельные значения сверху и снизу соответственно, а $\alpha \neq 0$ – константа.

Желая сделать эту задачу определенной, потребуем, чтобы неизвестная функция $\Phi(z)$ нигде при $z \neq 0$ не обращалась в нуль, а в точках $z = 0$ и $z = \infty$ имела наименее сложные особенности. Пусть, кроме того, $\Phi(1) = 1$.

Из равенства (1) очевидно, что обе функции $\Phi(t^\pm)$ допускают аналитическое продолжение через луч $(0, +\infty)$, причем $\Phi(t^+)$ вниз, а $\Phi(t^-)$ – вверх. Так как $\Phi(z)$ при $z \neq 0$ нигде не обращается в нуль, то любой функциональный элемент $\ln \Phi(z)$ допускает неограниченное аналитическое продолжение в односвязной области $C \setminus [0, +\infty)$. до однозначной аналитической в этой области ветви (в силу теоремы о монодромии [2, 170]). Беря эту ветвь и логарифмируя равенство (1), получим сравнение

$$\ln \Phi(t^+) - \ln \Phi(t^-) \equiv \alpha \ln t, \quad t \in (0, +\infty), \quad (2)$$

принимаемое по модулю постоянного неопределенного слагаемого, целократного $2\pi i$. Чтобы эту неопределенность устранить, продифференцируем сравнение (2), в результате чего получим задачу «о скачке»

$$\frac{\Phi'(t^+)}{\Phi(t^+)} - \frac{\Phi'(t^-)}{\Phi(t^-)} = \frac{\alpha}{t}, \quad t \in (0, +\infty) \quad (3)$$

для нахождения логарифмической производной $\frac{d}{dz} \ln \Phi(z)$. Как известно [1], задача о скачке решается интегралом типа Коши, плотностью которого является правая часть (когда она суммируема). Однако в задаче о скачке (3) правая часть *не суммируема на* $(0, +\infty)$. Покажем, что это обстоятельство не мешает найти общее решение задачи (3) в виде

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{\alpha}{2\pi i} \cdot pf \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(t-z)} + \Psi(z), \quad (4)$$

где $\Psi(z)$ – произвольная однозначная аналитическая при $z \neq 0$ функция, а буквы *pf* означают, что интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. Желая его вычислить, зададим малое $\varepsilon > 0$ и тогда получим

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dt}{t(t-z)} = \frac{1}{z} \int_{\varepsilon}^{+\infty} d \ln \frac{t-z}{t} = \frac{1}{z} \ln \frac{t-z}{t} \Big|_{t=\varepsilon}^{t=+\infty} = -\frac{1}{z} \ln \frac{\varepsilon-z}{\varepsilon} = -\frac{1}{z} \ln(\varepsilon-z) + \frac{1}{z} \ln \varepsilon.$$

Входящая сюда величина $\frac{1}{z} \ln \varepsilon$ – бесконечно большая при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Отбрасывая ее, затем переходя к пределу в последнем равенстве при $\varepsilon \rightarrow +0$, получим

$$pf \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(t-z)} = -\frac{\ln(-z)}{z} = \frac{\pi i - \ln z}{z}. \quad (5)$$

Здесь в правой части ветвь логарифма находится из того условия, чтобы при $z < 0$ интеграл принимал чисто вещественные значения, т.е. чтобы было $\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z$, где $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.

Подставим значения интеграла (5) в равенство (4) и положим там $\Psi(z) \equiv 0$ (для обеспечения того условия, чтобы $\Phi(z)$ имела наименее сложные особенности при $z=0$ и при $z=\infty$). Тогда получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{\alpha}{2z} - \frac{\alpha}{2\pi i} \cdot \frac{\ln z}{z}, \quad \Phi(1) = 1,$$

единственное решение которого находится с помощью одной квадратуры

$$\ln \Phi(z) = \frac{\alpha}{2} \ln z - \frac{\alpha}{4\pi i} (\ln z)^2.$$

Отсюда находим единственное решение задачи (1).

$$\Phi_0(z) = \exp \left\{ \frac{\alpha}{2} \left[\ln z - \frac{1}{2\pi i} (\ln z)^2 \right] \right\} = z^{\frac{\alpha}{2}} \cdot z^{-\frac{\alpha}{4\pi i} \ln z} \quad (6)$$

Из (6) видно, что решение задачи (1) состоит из двух множителей степенного и степенно-показательного. Это последнее обстоятельство существенно отличает решение однородной задачи сопряжения в исключительном случае от решения аналогичных задач в неисклительных случаях. Напомним, что решение однородной задачи сопряжения в неисклительных случаях может содержать только степенные особенности и притом в конечном числе, т.е. не очень сильно отличается от рациональной функции.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу линейного сопряжения, соответствующую задаче (1)

$$\Phi(t^+) = t^\alpha \cdot \Phi(t^-) + g(t), \quad t \in (0, +\infty). \quad (7)$$

Будем искать ее частное решение $\Phi_1(z)$, аналитическое вне луча $[0, +\infty)$ и имеющее при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$ не более сложные особенности, чем их имеет решение (6) однородной задачи (1). Будем считать, что функция $g(t)$ H – непрерывна и ограничена на $[0, +\infty)$. Тогда при $0 < \operatorname{Re} \alpha < 2$ задача (7) оказывается разрешимой. Чтобы найти ее частное решение $\Phi_1(z)$, произведем факторизацию коэффициента t^α с помощью решения (6) и сведем ее к следующей задаче о «скачке»

$$\frac{\Phi_1(t^+)}{t^{\frac{\alpha}{2}} \cdot t^{-\frac{\alpha}{4\pi i} \ln t}} - \frac{\Phi_1(t^-)}{t^{\frac{\alpha}{2}} \cdot t^{-\frac{\alpha}{4\pi i} \ln t}} = \frac{g(t)}{t^{\frac{\alpha}{2}} \cdot t^{-\frac{\alpha}{4\pi i} \ln t}}, \quad t \in (0, +\infty). \quad (8)$$

Решение этой задачи найдем в виде интеграла типа Коши

$$\frac{\Phi_1(z)}{z^{\frac{\alpha}{2}} \cdot z^{-\frac{\alpha}{4\pi i} \ln z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{\frac{\alpha}{2}} \cdot t^{-\frac{\alpha}{4\pi i} \ln t}} \cdot \frac{dt}{t-z}, \quad (9)$$

который сходится при $0 < \operatorname{Re} \alpha < 2$. Из (9) находится частное решение неоднородной задачи (7), а ее общее решение имеет вид

$$\Phi(z) = C\Phi_0(z) + \Phi_1(z) = z^{\frac{\alpha}{2}} \cdot z^{-\frac{\alpha}{4\pi i} \ln z} \left[C + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{\frac{\alpha}{2}} \cdot t^{-\frac{\alpha}{4\pi i} \ln t}} \cdot \frac{dt}{t-z} \right],$$

где C – произвольная постоянная. Высказанное выше требование, чтобы решение $\Phi_1(z)$ имело при $z \rightarrow 0$ и при $z \rightarrow \infty$ «не более сложные особенности, чем их имеет решение $\Phi_0(z)$ », выполняется в силу того, что интеграл из (9) имеет при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$ асимптотику $O\left(z^{-\frac{\operatorname{Re} \alpha}{2}}\right)$.

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.
2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. – М.: Наука, 1976.

СРЕДНИЕ СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Г.С. ЕВДОКИМОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Рассмотрим систему массового обслуживания, состоящую из n однородных элементов:

1) каждый элемент может находиться либо в состоянии s_1 , либо в состоянии s_2 ;

2) переход из состояния s_1 в состояние s_2 осуществляется под воздействием пуассоновского потока событий с периодической интенсивностью $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \lambda(t + \tau);$$

3) переход из состояния s_2 в состояние s_1 происходит под воздействием пуассоновского потока с интенсивностью $\mu(t, x_2)$, где t – время, x_2 – величина, показывающая, сколько элементов находится в состоянии s_2 ;

4) допускаем $\mu(t, x_2) = \frac{\mu C}{x_2}$.

Теорема. Пусть дана система, удовлетворяющая условиям 1 – 4. Тогда при $t \rightarrow \infty$ математические ожидания $m_1(t)$ и $m_2(t)$ состояний s_1 и s_2 будут периодическими функциями.

Доказательство Вполне естественно можно задать следующие начальные условия:

$$m_1(0) = n, \quad m_2(0) = 0. \quad (1)$$

Записав уравнения динамики средних состояний s_1 и s_2 для рассматриваемой системы

$$\begin{cases} \overset{o}{m_1} = -\lambda(t)m_1 + \frac{\mu C}{x_2}m_2, \\ \overset{o}{m_2} = \lambda(t)m_1 - \frac{\mu C}{x_2}m_2 \end{cases} \quad (2)$$

и нормировочное условие

$$m_1(t) + m_2(t) = n, \quad (3)$$

замечаем, что в (2) присутствует случайная величина x_2 .

Воспользуемся тем, что n достаточно велико и x_2 , следовательно, имеет малый разброс около $m_2(t)$, т.е. воспользуемся принципом квазирегулярности, благодаря которому можно с достаточной степенью точности положить, что $x_2 = m_2(t)$.

Тогда уравнения динамики средних состояний s_1 и s_2 примут вид:

$$\begin{cases} 0 \\ m_1 = -\lambda(t)m_1 + \mu C, \\ \\ 0 \\ m_2 = \lambda(t)m_1 - \mu C. \end{cases} \quad (4)$$

Выразим в (3) $m_1(t)$ через $m_2(t)$ и подставим во второе уравнение системы (4). Получаем дифференциальное уравнение

$$0 \dot{m}_2 + \lambda(t)m_2 = \lambda(t)n - \mu C. \quad (5)$$

Частным решением этого уравнения, удовлетворяющим начальным (1) условиям, будет

$$m_2(t) = \varphi(t) \int_0^t [\lambda(v)n - \mu C] \varphi(v) dv. \quad (6)$$

Лемма. Пусть $\lambda(t)$ – периодическая функция с периодом τ и $\lambda(t) \geq 0$ для всех $t > 0$. Тогда, если

$$f(t) = \frac{\int_0^t e^{\int_0^v \lambda(s) ds} dv}{e^{\int_0^t \lambda(s) ds}},$$

то существует функция $\psi(t)$, имеющая период τ , и такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) - \psi(t)| = 0.$$

Нетрудно убедиться, воспользовавшись леммой, что при $t \rightarrow \infty$
 $m_2(t) = n - \mu C \psi(t)$, $m_1(t) = \mu C \psi(t)$,

$$\psi(t) = \frac{\int_0^\tau \varphi(t-u) du}{\varphi(t) [1 - e^{-\bar{\lambda} \tau}]},$$

что и доказывает теорему.

Таким образом, $m_1(t)$ и $m_2(t)$ в установившемся режиме представляют периодические функции.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2005. 400 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения – М.: Академия, 2003. – 464 с.
3. Ермаков С.М. Элементы теории массового обслуживания. – С.-Петербург. гос. ун-т, 1998. 296 с.

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ И ФУНКЦИЯ БЕЙКЕРА – АХИЕЗЕРА

Э.И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет, г. Минск
e-mail: Dolgopolova@tut.by

На замкнутой римановой поверхности \mathfrak{R} рода $h \geq 1$ зафиксируем каноническое рассечение, т.е. совокупность $2h$ простых замкнутых кусочно-гладких кривых

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_h \quad (1)$$

с единственной особой точкой, причем поверхность

$$\mathfrak{R} \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_h \cup \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_h) - \quad (2)$$

связная и односвязная. Кривые (1) ориентированы так, что каждая кривая α_ν пересекает соответствующую кривую β_ν слева направо. Край поверхности (2) можно представить в виде

$$\alpha_1^+ \beta_1^+ (\alpha_1^-)^{-1} (\beta_1^-)^{-1} \dots \alpha_h^+ \beta_h^+ (\alpha_h^-)^{-1} (\beta_h^-)^{-1},$$

где верхние индексы + и – означают берега соответствующих разрезов, а показатель степени (-1) указывает на изменение ориентации.

В теории солитонов большое значение имеют так называемые *функции Бейкера – Ахиезера*. Дадим определение простейшей из них. Зафиксируем точку $Q \in \mathfrak{R}$, не лежащую на линиях (1). Зафиксируем также параметрическую окрестность U этой точки и параметрический гомеоморфизм $z = z(p) : U \rightarrow z(U) \subset \mathbb{C}$. Потребуем, чтобы было $z(Q) = 0$. Обозначим через $p = p(z)$, $Q = p(0)$ – обратное отображение. Локальный параметр z окрестности U изменять не будем. Пусть $q_1 q_2 \dots q_h -$ неспециальный дивизор на $\mathfrak{R} \setminus U$. *Функцией Бейкера – Ахиезера*

называется мероморфная функция $\psi: \mathfrak{R} \setminus Q \rightarrow \mathbb{C}$, кратная дивизору $(q_1 q_2 \dots q_h)^{-1}$, которая в окрестности U точки Q имеет следующее представление

$$\psi(p) = \varphi(p) \cdot e^{\frac{x}{z}}, \text{ где } p = p(z) \in U \setminus Q, \quad (3)$$

причем $\varphi(p): U \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторая аналитическая функция, а $x \neq 0$ – параметр.

Эта и другие функции Бейкера – Ахиезера построены в работах [1,2] с помощью аппарата тэта-функции и применялись к решению нелинейных задач математической физики. В настоящее время я рассматриваю уравнение (3) как однородную задачу линейного сопряжения и решаю ее методом, разработанным в [3; 4]. Тем самым строится определенная здесь функция Бейкера – Ахиезера и дается метод для построения других, более общих функций Бейкера – Ахиезера.

Обозначим через $d\omega_1(p), \dots, d\omega_h(p)$, базис абелевых дифференциалов 1-го рода римановой поверхности \mathfrak{R} . Пусть он нормирован относительно канонического рассечения (1), т.е.

$$\int_{\alpha_\nu} d\omega_\mu(t) = \delta_{\mu\nu}, \quad \int_{\beta_\nu} d\omega_\mu(t) = B_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, h,$$

где матрица $(\delta_{\mu\nu})_{\mu, \nu=1}^h$ – единичная, а матрица $(B_{\mu\nu})_{\mu, \nu=1}^h$ – симметричная с положительно определенной мнимой частью. Зафиксируем точку $q_0 \in \mathfrak{R} \setminus U$, отличную от точек Вейерштрасса, и введем вектор $\bar{\omega}(q) = (\omega_1(q), \dots, \omega_h(q))$, где $\omega_\nu(q) = \int_{q_0}^q d\omega_\nu(t)$, а также *разрывный аналог ядра Коши*

Коши

$$d\mathfrak{G}_{q_0}(p) := \frac{1}{h} d_p \ln \frac{\theta(\bar{\omega}(p) - h\bar{\omega}(q) - \bar{k})}{\theta(\bar{\omega}(p) - h\bar{\omega}(q_0) - \bar{k})},$$

где $\theta(\bar{\omega}(p) - \bar{e})$ – тэта-функция Римана, а \bar{k} – вектор римановых констант. Разрывный аналог ядра Коши и в самом деле обладает всеми свойствами ядра Коши, кроме одного: по переменной q он имеет разрывы на линиях α_ν канонического рассечения (1). Скачки на этих линиях даются формулами:

$$d\mathfrak{G}_{t^+ q_0}(p) - d\mathfrak{G}_{t^- q_0}(p) = -2\pi i d\omega_\nu(p), \quad t \in \alpha_\nu, \nu = 1, \dots, h. \quad (4)$$

Считая, что уравнение (3) задано на окружности $|z| = p$ достаточно малого радиуса p , ориентированной по часовой стрелке, введем кусочно-аналитическую функцию

$$(q) = \exp \left\{ \frac{x}{2\pi i} \int_{|z|=p} \frac{1}{z} d\mathfrak{G}_{qq_0}(p(z)) \right\}, \quad (5)$$

имеющую линии разрыва $|z|=p$ и $\cup \alpha_v$. На линии $|z|=p$ в силу формул Сохоцкого имеем

$$X(p^+) = X(p^-) \cdot e^{\frac{x}{z}}, \quad p = p(z), \quad |z|=p. \quad (6)$$

Используя равенства (4), будем иметь

$$X(t^+) = X(t^-) \cdot \exp \left\{ -x \int_{|z|=p} \frac{d\omega_v(p(z))}{z} \right\}, \quad t \in \alpha_v, \quad v=1, \dots, h. \quad (7)$$

Разделив равенство (3) на (6) и (7), получим

$$\frac{\psi(t^+)}{X(t^+)} = \frac{\varphi(t^-)}{X(t^-)}, \quad |t|=p, \quad (8)$$

и

$$\frac{\psi(t)}{X(t^+)} = \frac{\psi(t)}{X(t^-)} \cdot \exp \left\{ x \int_{|z|=p} \frac{d\omega_v(p(z))}{z} \right\}, \quad t \in \alpha_v, \quad v=1, \dots, h. \quad (9)$$

В силу теоремы об аналитическом продолжении равенство (8) можно отбросить, а интеграл из (9) – вычислить с помощью вычетов. Тогда получим

$$\frac{\psi(t)}{X(t^+)} = \frac{\psi(t)}{X(t^-)} \cdot e^{-2\pi i x \omega'(p(0))}, \quad t \in \alpha_v, \quad v=1, \dots, h. \quad (10)$$

Для устранения этих разрывов введём новую функцию

$$\tilde{\varphi}(q) = \frac{\psi(q)}{X(q)} \exp \left\{ \sum_{\mu=1}^h \int_{q'_\mu}^{q_\mu} d\mathfrak{G}_{qq_0}(p) \right\}, \quad (11)$$

И попытаемся подобрать точки q'_1, \dots, q'_h и пути интегрирования так, чтобы функция $\tilde{\varphi}(q)$ оказалась непрерывной на линиях α_v , т.е. чтобы было:

$$\frac{\psi(t)}{X(t^+)} \cdot \exp \left\{ \sum_{\mu=1}^h \int_{q'_\mu}^{q_\mu} d\mathfrak{G}_{t^+q_0}(p) \right\} = \frac{\psi(t)}{X(t^-)} \cdot \exp \left\{ \sum_{\mu=1}^h \int_{q'_\mu}^{q_\mu} d\mathfrak{G}_{t^-q_0}(p) \right\}, \quad t \in \alpha_v, \quad v=1, \dots, h. \quad (12)$$

Отсюда, учитывая (10), находим

$$\exp \{ -2\pi i x \omega'(p(0)) \} = \exp \left\{ \sum_{\mu=1}^h \int_{q'_\mu}^{q_\mu} [d\mathfrak{G}_{t^-q_0}(t) - d\mathfrak{G}_{t^+q_0}(t)] \right\}, \quad t \in \alpha_v, \quad v=1, \dots, h.$$

Учитывая равенства (4), будем иметь

$$\exp[2\pi i x \omega'_v(p(0))] = \exp\left\{2\pi i \sum_{\mu=1}^h \int_{q'_\mu}^{q_\mu} d\omega_v(p)\right\}, v=1, \dots, h.$$

Приравнявая здесь показатели степеней, после сокращения получим следующую систему уравнений

$$\sum_{\mu=1}^h \int_{q'_\mu}^{q_\mu} d\omega_v(p) = x \omega'_v(p(0)) + n'_v, v=1, \dots, h, \quad (13)$$

где n'_v – неопределенные целые числа. Вводя абелевы интегралы $\omega_v(q) = \int_{q_0}^q d\omega_v(t)$ по пути, не пересекающем линий (1), перепишем систему (13) в виде

$$\sum_{\mu=1}^h \omega_v(q'_\mu) - n'_v - \sum_{\mu=1}^h m_\mu B_{\mu v} = \sum_{\mu=1}^h \omega_v(q_\mu) - x \omega'_v(p(0)), v=1, \dots, h, \quad (14)$$

где n'_v, m_μ – неопределенные целые числа. Относительно неизвестных точек q'_μ и чисел n'_v и m_μ система (14) – это классическая проблема обращения Якоби. Она разрешима при любой правой части, и почти для всех правых частей ее решение – единственное. Считая её решенной, из (11) заключаем, что $\tilde{\varphi}(q)$ – произвольная мероморфная на \mathfrak{R} функция, краткая дивизору $(q'_1 \dots q'_h)^{-1}$. В силу теоремы Римана–Роха такие функции существуют при любом таком дивизоре, и почти для всех таких дивизоров все такие функции – постоянные. В этом случае функция Бейкера–Ахиезера определяется однозначно (с точностью до постоянного множителя) и выражается в явном виде через тэта-функцию Римана и абелевы интегралы 1-го рода:

$$\begin{aligned} \psi(q) &= C \cdot X(q) \exp\left\{-\sum_{\mu=1}^h \int_{q'_\mu}^{q_\mu} d\mathfrak{G}_{q_{q_0}}(p)\right\} = \\ &= C \cdot \exp\left\{\frac{x}{2\pi i} \int_{|z|=p} \frac{1}{z} d\mathfrak{G}_{q_{q_0}}(p(z)) + \sum_{\mu=1}^h \int_{q_\mu}^{q'_\mu} d\mathfrak{G}_{q_{q_0}}(p) + \sum_{\mu=1}^h m_\mu \int_{b_\mu} d\mathfrak{G}_{q_{q_0}}(p)\right\} = \\ &= C \cdot \exp\left\{-x \frac{d}{dz} \mathfrak{G}_{q_{q_0}}(p(z)) \Big|_{z=0} + \sum_{\mu=1}^h [\mathfrak{G}_{q_{q_0}}(q'_\mu) - \mathfrak{G}_{q_{q_0}}(q_\mu)] + 2\pi i \sum_{\mu=1}^h m_\mu \omega_\mu(q)\right\} = \\ &= C' \cdot \exp\left\{-x \frac{d}{dz} \mathfrak{G}_{q_{q_0}}(p(z)) \Big|_{z=0} + \frac{1}{h} \ln \frac{\theta(\bar{\omega}(q'_\mu) - h\bar{\omega}(q) - \bar{k})}{\theta(\bar{\omega}(q_\mu) - h\bar{\omega}(q) - \bar{k})} + 2\pi i \sum_{\mu=1}^h m_\mu \omega_\mu(q)\right\} = \\ &= C' \cdot \left[\prod_{\mu=1}^h \frac{\theta(\bar{\omega}(q'_\mu) - h\bar{\omega}(q) - \bar{k})}{\theta(\bar{\omega}(q_\mu) - h\bar{\omega}(q) - \bar{k})} \right]^{\frac{1}{h}} \exp\left\{-x \frac{d}{dz} \mathfrak{G}_{q_{q_0}}(p(z)) \Big|_{z=0} + 2\pi i \sum_{\mu=1}^h m_\mu \omega_\mu(q)\right\}. \end{aligned}$$

Литература

1. Ахиезер Н.И. Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов / ДАН СССР. 1961, – Т.141, № 2. С. 263–266.
2. Дубровин Б.А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 152 с.
3. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи матем. Наук. – 1971. Т. XXVI. Вып. 1(157). С. 113–179.
4. Zverovich E.I. The Problem of Linear Conjugation on a Closed Riemann Surface. Complex Analysis and Operator Theory. 2008 – Vol. 2, No. 4 (2008), P. 709–732.

О ВЫЧИСЛЕНИИ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ В МЕТОДЕ ПАДЕ – ЛАПЛАСА

О.Л. ИБРЯЕВА

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: oli@bvbpower.ru

При нахождении параметров A_j, γ_j сигналов вида $f(t) = \sum_{j=1}^N A_j e^{\gamma_j t}$ с помощью метода Паде – Лапласа приходится сталкиваться с так называемыми *дуплетами Фруассара*. Это близкие нули и полюсы аппроксимации Паде [1] преобразования Лапласа функции $f(t)$, которые из-за ошибок вычислений оказываются лишь примерно равными. Для их устранения и определения истинных полюсов γ_j аппроксимации Паде обычно приходится вычислять не только аппроксимацию Паде нужного типа, но и другие, «соседние» с ней. В работах [2; 3] нами был предложен алгоритм вычисления аппроксимации Паде со знаменателем минимальной степени, позволяющий избежать появления дуплетов, вызванных неединственностью знаменателя аппроксимации Паде.

В настоящей работе мы уделим внимание следующей проблеме. Из-за приближенных вычислений некоторые нулевые коэффициенты числителя и знаменателя аппроксимации Паде могут оказаться лишь близкими к нулю. Это может вызвать появление лишних, больших по абсолютной величине, нулей многочленов. Например, при вычислении в системе *Mathematica* аппроксимации Паде типа (4,4) для функции $f(z) = \frac{(z+1)(z-2)}{(z+2.1)(z-1)}$ получаем дробь со степенью числителя, равной 4, и знаменателя, равной 3. При этом старший коэффициент числителя оказывается равным $-3.33067 \cdot 10^{-16}$, что приводит к появлению большого

по модулю нуля среди нулей числителя: $-9.64247 \cdot 10^{14}$, -1.48273 , -1 , 2 . Дуплет Фруассара повторяется и среди нулей знаменателя: -2.1 , -1.48273 , 1 . Предлагаемый нами в [2; 3] алгоритм позволит избавиться от дуплетов Фруассара в этом примере, однако хотелось бы, чтобы и такие лишние корни, как $-9.64247 \cdot 10^{14}$, также не появлялись. Следующая теорема дает критерий равенства нулю коэффициентов числителя и знаменателя.

Обозначим $T_k = \|c_{i-j}\|_{\substack{i=k, \dots, m+n, \\ j=0, \dots, n-m+k-1}}$, $m-n+1 \leq k \leq m+n$, ($c_k = 0$, если $k < 0$).

Напомним [3], что индекс μ_1 находится по формуле: $\mu_1 = m - n + \kappa$, где κ – ранг матрицы T_m . Обозначим через $T_{\mu_1+1}^{(k)}$ матрицу, полученную из T_{μ_1+1} удалением ее k -го столбца, $k = 1, \dots, \kappa+1$, и через $T_{\mu_1+1}^{[k]}$ матрицу, полученную из T_{μ_1+1} , приписыванием сверху строки $(c_k \ c_{k-1} \ \dots \ c_{k-\kappa})$, $k = 0, \dots, m$.

Теорема: Пусть $Q_1(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q_\kappa z^\kappa$ – знаменатель минимальной степени аппроксимации Паде типа (m, n) , а $P_1(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m$ – соответствующий ему числитель. Тогда $q_k = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{rank } T_{\mu_1+1}^{(k+1)} = \kappa - 1$, $k = 0, \dots, \kappa$. Коэффициент числителя $p_k = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{rank } T_{\mu_1+1}^{[k]} = \kappa$, $k = 0, \dots, m$.

Доказательство следует из одномерности ядра матрицы T_{μ_1+1} .

Приведем алгоритм вычисления аппроксимации Паде типа (m, n) для ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ в точке $z = a$.

1. По коэффициентам c_k составляем матрицу $T_m = \|c_{i-j+m}\|_{\substack{i=1, \dots, n+1, \\ j=1, \dots, n}}$.
2. Находим ее ранг $\kappa = \text{rank } T_m$ и индекс $\mu_1 = m - n + \kappa$.
3. Составляем матрицу $T_{\mu_1+1} = \|c_{i-j+\mu_1+1}\|_{\substack{i=1, \dots, m+n-\mu_1, \\ j=1, \dots, n-m+\mu_1+1}}$.
4. Находим базис одномерного ядра матрицы T_{μ_1+1} – вектор $(q_0 \ q_1 \ \dots \ q_{n-m+\mu_1})^T$ и далее знаменатель $Q_1(z) = \sum_{k=0}^{n-m+\mu_1} q_k (z-a)^k$ аппроксимации Паде, имеющий минимальную степень. Пользуясь приведенной теоремой, убираем нулевые коэффициенты знаменателя.
5. Коэффициенты p_k числителя $P_1(z) = \sum_{k=0}^m p_k (z-a)^k$ вычисляем по формуле $p_k = c_k q_0 + c_{k-1} q_1 + \dots + c_{k-\kappa} q_\kappa$ и убираем среди них нулевые.

Можно убедиться, что для $f(z) = \frac{(z+1)(z-2)}{(z+2.1)(z-1)}$ найденная по данному

алгоритму аппроксимация Паде типа $(4,4)$ не содержит дуплетов Фруассара и совпадает с аппроксимируемой функцией. Более того, приведенный алгоритм был протестирован на некоторых модельных

примерах обработки сигналов методом Паде – Лапласа и, как оказалось, позволил избавиться от дуплетов Фруассара.

Литература

1. А.Л. Шестаков О дуплетах Фруассара в методе Паде – Лапласа // Тезисы докладов международной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения». – Смоленск, 2011. – С. 257–259.

2. Ибряева О.Л. Новый алгоритм вычисления аппроксимаций Паде и его реализация в Matlab // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2011 – № 37. – С. 99 – 107.

3. Ibrayeva O.L., Adukov V.M. An algorithm for computing Pade approximants with minimal degree denominator // Journal of Computational and Applied Mathematics, submitted for publication.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ 3-ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В.В. КАРАЧИК

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: karachik@susu.ru

В работе [1] с помощью формулы Альманси были построены полиномиальные решения уравнения Пуассона $\Delta u(x) = Q(x)$, полигармонического уравнения $\Delta^m u(x) = Q(x)$ и неоднородного уравнения Гельмгольца $\Delta u(x) + \lambda u(x) = Q(x)$, где $Q(x)$ - произвольный полином. На этой основе в работе [2] были построены полиномиальные решения задачи Дирихле, а также обобщенной третьей краевой задачи для уравнения Пуассона, а в работе [3] исследовалась задача Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре. Настоящая работа является продолжением этих исследований на задачу Дирихле для 3-гармонического уравнения $\Delta^3 u(x) = Q(x)$ в единичном шаре $\Omega \subset R^n$.

Рассмотрим полиномы $Q(x)$, $P(x)$, $R(x)$ и $S(x)$. По ним построим следующие полиномы

$$P_{(0)}(x) = P(x) + \frac{1-|x|^2}{2} \Delta P(x) + \frac{(1-|x|^2)^2}{2} (\Delta^2 + 2\Delta)P(x) \quad (1)$$

и

$$P_{(1)}^{\alpha,s}(x) = \left(\Delta(\Delta^2 + 2\Delta) - 2 \frac{1-\alpha}{2s+4} \Delta^2 \Delta + \frac{(1-\alpha)^2}{(2s+4)(2s+6)} \Delta^3 \right) P(x), \quad (2)$$

где $\alpha \in [0,1]$, $s \in N_0 \equiv N \cup \{0\}$ и оператор Δ имеет вид $\Delta = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, а

также полиномы вида

$$R_{(0)}(x) = \frac{1-|x|^2}{2} R(x) + \frac{(1-|x|^2)^2}{8} (2\Lambda + 1) R(x), \quad S_{(0)}(x) = \frac{(1-|x|^2)^2}{8} S(x) \quad (3)$$

$$R_{(1)}^{\alpha,s}(x) = \left(\Delta(2\Lambda + 1) - 2 \frac{1-\alpha}{2s+4} \Delta^2 \right) R(x), \quad S_{(1)}(x) = \Delta S(x), \quad (4)$$

где $|x|$ – евклидова норма, т.е. $|x|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Решение следующей задачи Дирихле*

$$\begin{aligned} \Delta^3 u(x) &= Q(x), \quad x \in \Omega; \\ u|_{\partial\Omega} &= P(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = R(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\partial\Omega} = S(x) \end{aligned}$$

в единичном шаре $\Omega \subset R^n$, где ν – внешняя единичная нормаль к сфере $\partial\Omega$ с полиномиальными данными $Q(x)$, $P(x)$, $R(x)$ и $S(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= P_{(0)}(x) - R_{(0)}(x) + S_{(0)}(x) + \\ &+ \frac{(1-|x|^2)^3}{16} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s (1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!} \Delta^s (P_{(1)}^{\alpha,s} - R_{(1)}^{\alpha,s} + S_{(1)} - Q_{(1)}^{\alpha,s}) (\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

где полиномы $P_{(0)}(x)$, $R_{(0)}(x)$ и $S_{(0)}(x)$ определяются по формулам (1), (3), полиномы $P_{(1)}^{\alpha,s}(x)$, $R_{(1)}^{\alpha,s}(x)$ и $S_{(1)}(x)$ определяются по формулам (2), (4), а полином $Q_{(1)}^{\alpha,s}(x)$ имеет вид

$$Q_{(1)}^{\alpha,s}(x) = \frac{(1-\alpha)^2}{(2s+4)(2s+6)} Q(x).$$

Пример. С помощью пакета «Mathematica» вычислим решение следующей задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta^3 u(x) &= x_1^2 - 2x_3^2, \quad x \in \Omega \subset R^3; \\ u|_{\partial\Omega} &= x_1^4 x_2^2 - x_2 x_3^5, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = x_1^6 + 2x_2^4 x_3^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\partial\Omega} = x_2 x_3^5 - 3x_1^2 x_2^4, \end{aligned}$$

по формуле (5). Обозначая для краткости $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и опуская промежуточные вычисления, будем иметь

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= x_1^4 x_2^2 - x_2 x_3^5 + \frac{(|x|^2 - 1)}{2} (x_1^6 - 6x_1^4 x_2^2 + 2x_2^4 x_3^2 + 6x_2 x_3^5) - \\ &- \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (13x_1^6 - 48x_1^4 x_2^2 + 3x_1^2 x_2^4 + 26x_2^4 x_3^2 + 47x_2 x_3^5) + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{665280} \times \\ &\times (71269 + 870840x_1^4 + 210600x_2^4 - 592200x_2^3 x_3 + 4715x_3^2 - 48960x_3^4 + \\ &+ 1800x_2 x_3 (253 + 1645x_3^2) - 5x_1^2 (-57979 + 458064x_2^2 + 118440x_2 x_3 + 57888x_3^2) + \\ &+ 15x_2^2 (317 + 74784x_3^2)). \end{aligned}$$

Литература

1. Карачик В.В., Антропова Н.А. О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения

Гельмгольца. Дифференциальные уравнения. – 2010. - Т. 46, № 3. – С. 384–395.

2. Карачик В.В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // ЖВМиМФ. – 2012. - Т. 51, № 9. – С. 1674–1694.

3. Карачик В.В., Антропова Н.А. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре. Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2011 Вып. 32(249), № 5. С. 39-50.

ЧИСЛОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

Э. КИРЬЯЦКИЙ

Вильнюсский технический университет, г. Вильнюс
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Пусть N – множество натуральных чисел. Определим на этом множестве оператор O , который переводит элемент $A \in N$ в элемент $B \in N$, т.е. $O(A) = B$. Будем применять последовательно оператор несколько раз. Возможны следующие случаи:

1) $O(A_1) = A_1$; 2) $O(A_1) = A_2$, $O(A_2) = A_1$; 3) $O(A_1) = A_2$, $O(A_2) = A_3$, $O(A_3) = A_1$; 4) $O(A_1) = A_2$, $O(A_2) = A_3$, $O(A_3) = A_4$, $O(A_4) = A_1$ и так далее. В первом случае мы говорим, что оператор O имеет неподвижную точку A_1 или неподвижный цикл $[A_1]$. Во втором, третьем и четвертом случаях мы говорим, что оператор O имеет неподвижные циклы $[A_1; A_2]$, $[A_1; A_2; A_3]$, $[A_1; A_2; A_3; A_4]$ и так далее. Оператор, имеющий циклы, назовем циклическим оператором. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если некоторое множество M имеет конечное число элементов, то оператор O является циклическим.*

Любое натуральное число A можно записать в виде

$$A = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10 + a_n, \quad (1)$$

где a_1, \dots, a_n – целые числа и $0 < a_1 \leq 9$, $0 \leq a_2 \leq 9$, ..., $0 \leq a_{n-1} \leq 9$, $0 \leq a_n \leq 9$.

Числа a_1, a_2, \dots, a_n называются цифрами числа A . Длиной натурального числа назовем количество его цифр. Обозначим через $l(A)$ длину числа A .

Рассмотрим числовые операторы

$$F_k(A) = F(a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10 + a_n) = a_1^k + a_2^k + \dots + a_{n-1}^k + a_n^k,$$

$$F_k^*(A) = F(a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10 + a_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)^k.$$

Сначала рассмотрим оператор

$$F_k(A) = F(a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10 + a_n) = a_1^k + a_2^k + \dots + a_{n-1}^k + a_n^k.$$

Здесь n - длина числа A , т.е. $l(A) = n$. Пусть $M(n \geq k+2)$ - множество всех чисел, длины которых удовлетворяют неравенству $n \geq k+2$. Пусть $G(n \leq k+1)$ - множество всех чисел, длины которых удовлетворяют неравенству $n \leq k+1$. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Оператор $F_k(A)$ является циклическим. Этот оператор образует циклы среди чисел из конечного множества $G(n \leq k+1)$. Среди чисел из бесконечного множества $M(n \geq k+2)$ оператор $F_k(A)$ циклов не образует.*

Для нахождения циклов лучше всего использовать компьютерную программу. Рассмотрим случаи, когда $k = 1, 2, 3$.

Пусть $k = 1$. Ищем циклы среди элементов множества $G(l \leq 2)$.
Найдены девять циклов:

$$[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9].$$

Пусть $k = 2$. Ищем циклы среди элементов множества $G(l \leq 3)$.
Найдены два цикла:

$$[1], [4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20].$$

Пусть $k = 3$. Ищем циклы среди элементов множества $G(l \leq 4)$.
Найдены циклы:

$$[1], [153], [370], [371], [407], [136; 244], [919; 1459], [55; 250; 133], [160; 217; 352].$$

Особый интерес представляют собой одноэлементные циклы, например циклы: [370], [371]. Здесь мы видим связь с уравнениями Диофанта. Уравнению

$$10^2 x_1 + 10x_2 + x_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

удовлетворяют только тройки чисел: (0, 0, 1), (1, 5, 3), (3, 7, 0), (3, 7, 1), (4, 0, 7).

Уравнению

$$10^3 x_1 + 10^2 x_2 + 10x_3 + x_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$$

удовлетворяют только четверки чисел: (0, 0, 0, 1), (1, 6, 3, 4), (8, 2, 0, 8), (9, 4, 7, 4).

Одноэлементные циклы обладают важным свойством: $F_k(A) = A$.

Примеры:

$$F_1(1) = 1, F_1(7) = 7, F_2(1) = 1, F_3(407) = 407, F_4(8208) = 8208.$$

Такие одноэлементные циклы называются неподвижными точками оператора F_k .

Рассмотрим теперь оператор

$$F_k^*(A) = F(a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10 + a_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)^k.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Оператор F_k^* является циклическим.*

Рассмотрим отдельно случаи $k = 2, 3, \dots$. Пусть $k = 2$. Циклы ищем среди элементов множества $G(l \leq 5)$. Найдены следующие циклы: [1], [81], [169; 256].

Диофантово уравнение $10x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2$ имеет единственное решение $x_1 = 8, x_2 = 1$. Пусть $k = 3$. Ищем циклы среди элементов множества $G(l \leq 7)$. Найдены циклы:

[1], [512], [4913], [5832], [17576], [19683], [6859; 21952].

Диофантово уравнение

$$100x_1 + 10x_2 + x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3$$

имеет единственный ответ $x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Диофантово уравнение

$$1000x_1 + 100x_2 + 10x_3 + x_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3$$

имеет только два ответа:

$$x_1 = 4, x_2 = 9, x_3 = 1, x_4 = 3,$$

$$x_1 = 5, x_2 = 8, x_3 = 3, x_4 = 2.$$

Диофантово уравнение

$$10000x_1 + 1000x_2 + 100x_3 + 10x_4 + x_5 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^3$$

имеет только два ответа:

$$x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = 5, x_4 = 7, x_5 = 6,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 9, x_3 = 6, x_4 = 8, x_5 = 3.$$

Рассмотрим оператор

$$U(A) = U(10^{n-1}a_1 + \dots + 10a_{n-1} + a_n) = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Оператор U является циклическим.*

Для того чтобы отыскать все циклы, надо проверить только все числа от единицы до девяти. Так как для таких чисел $U(A) = A$, то получим девять одноэлементных циклов

[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9].

Других циклов нет. Таким образом, оператор U имеет только девять неподвижных точек:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Мы рассмотрели операторы вида

$$F_k(A) = a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k, F_k^*(A) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^k, U(A) = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Мы установили, что эти операторы являются циклическими. С помощью этих операторов были решены диофантовы уравнения.

Можно рассмотреть также числовые операторы более общего вида. Запишем оператор

$$O(A) = f(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

где $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ есть числовая функция от переменных a_1, a_2, \dots, a_n . Предполагаем также, что все значения функции $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ являются целыми числами. Если удастся доказать, что оператор циклический, то это приведет нас к решению диофантовых уравнений.

О РОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ С ОТЛИЧНЫМИ ОТ НУЛЯ РАЗДЕЛЕННЫМИ РАЗНОСТЯМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Э. КИРЬЯЦКИЙ, Е. КИРЬЯЦКИЙ

Вильнюсский технический университет, г. Вильнюс

e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Разделенную разность n -го порядка аналитической в односвязной области D функции $f(z)$ определим следующей рекуррентной формулой ([1])

$$[f(\xi); \zeta_0, \dots, \zeta_n] = \frac{1}{2\pi!} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - \zeta_0) \dots (\xi - \zeta_n)},$$

где Γ – простой замкнутый контур, лежащий в области D и охватывающий все точки ζ_0, \dots, ζ_n . Пусть E – единичный круг $|\omega| < 1$ и Π – полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Дробно – линейные функции

$$z = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}, \quad \omega = \frac{z - 1}{1 + z}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между единичным кругом E и полуплоскостью Π . Пусть $K_n(E)$ – класс аналитических в E функций

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,n} \omega^{n+k}, \quad b_{1,n} = 1,$$

у которых разделенная разность $[G(\omega); \omega_0, \dots, \omega_n] \neq 0, \forall \omega_0, \dots, \omega_n \in E$.

Пусть $K_n(\Pi)$ – класс аналитических в Π функций

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n} (z-1)^{n+k}, \quad a_{1,n} = 1,$$

у которых разделенная разность $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0, z_0, \dots, z_n \in \Pi$.

Функции $G(\omega)$, $F(z)$ мы называем родственными. Связь между введенными классами $\tilde{K}_n(E)$ и $\tilde{K}_n(\Pi)$ устанавливается с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. Если $G(\omega) \in \tilde{K}_n(E)$, то

$$F(z) = 2(z+1)^{n-1} G\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \in \tilde{K}_n(\Pi).$$

Если $F(z) \in \tilde{K}_n(\Pi)$, то

$$G(\omega) = \frac{1}{2^n} (1-\omega)^{n-1} F\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right) \in \tilde{K}_n(E).$$

В следующей теореме устанавливается зависимость между коэффициентами родственных функций.

Теорема 2. Пусть $F(z) \in \tilde{K}_n(\Pi)$, $G(z) \in \tilde{K}_n(E)$ и

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n} (z-1)^{n+k}, \quad a_{1,n} = 1, \quad G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,p} \omega^{n+k}, \quad b_{1,n} = 1.$$

Тогда

$$a_{k+1,n} = \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^k (-1)^{k+m} C_k^m b_{m+1,n}, \quad b_{k+1,n} = \sum_{m=0}^k 2^m C_k^m a_{m+1,n}.$$

Оценим коэффициенты функции $F(z)$, опираясь на оценки коэффициентов родственной функции $G(\omega)$.

Теорема 3. Пусть

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n} (z-1)^{n+k} \in \tilde{K}_n(\Pi) \text{ и } G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,n} \omega^{n+k} \in \tilde{K}_n(E)$$

и для коэффициентов функции $G(\omega)$ выполняются неравенства

$$|b_{k+1,n}| \leq 1 + |b|k, \quad k = 1, 2, \dots, (p-1).$$

Тогда

$$\left| a_{p,n} - \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^m (-1)^{p-1+k} C_{p-1}^k \sum_{j=0}^k 2^j C_k^j a_{j+1,n} \right| \leq \frac{|b|(p-1)+2}{2} - \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^m C_{p-1}^k (1+|b|k), \quad (1)$$

где $a_{1,n} = 1$, $0 \leq m \leq p-2$, $p = 2, 3, \dots$.

Для того чтобы при некоторых m_0 и p_0 , $0 \leq m_0 \leq p_0 - 2$, в (1) имел место знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы

$$b_{k+1,n} = (-1)^k (1+|b|k) e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad k = (m_0 + 1), \dots, (p_0 - 1).$$

Теорема 4. Пусть

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n} (z-1)^{n+k} \in \tilde{K}_n(\Pi) \text{ и } G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,p} \omega^{n+k} \in \tilde{K}_n(E).$$

Если для коэффициентов функции $G(\omega)$ имеют место неравенства

$$|b_{k+1,n}| \leq \left(1 + \frac{2k}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

то справедливы неравенства

$$|a_{p,n}| \leq \frac{p+n}{n+1}, \quad p = 2, 3, \dots \quad (2)$$

Для того чтобы в (2) имел место знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы

$$b_{k+1,n} = (-1)^k \left(1 + \frac{2k}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, p,$$

$$a_{p,n} = (-1)^{p-1} \frac{p+n}{n+1}.$$

Теорема 5. Пусть

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,1} (z-1)^{1+k} \in \tilde{K}_1(\Pi) \text{ и } G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,1} \omega^{1+k} \in \tilde{K}_1(E).$$

Тогда для коэффициентов функции $F(z)$ имеют место следующие утверждения.

Утверждение (А). Справедливы неравенства

$$\left| a_{p,1} - \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^m (-1)^{p-1+k} C_{p-1}^k \sum_{j=0}^k 2^j C_k^j a_{j+1,1} \right| \leq \frac{p+1}{2} - \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^m C_{p-1}^k (k+1), \quad (3)$$

где $a_{1,1} = 1$, $0 \leq m \leq p-2$, $p = 2, 3, \dots$

Если для некоторых m и p , $0 \leq m = p-2$, в (3) имеет место знак равенства, то

$$F(z) = \frac{2(z^2 - 1)}{(1 - e^{i\alpha} + (1 + e^{i\alpha})z)^2}. \quad (4)$$

Если для некоторых m и p , $0 \leq m < p-2$, в (3) имеет место знак равенства, то

$$F(z) = \frac{z^2 - 1}{2z^2}. \quad (5)$$

Утверждение (В). Справедливы неравенства

$$|a_{p,1}| \leq \frac{p+1}{2}, \quad p = 2, 3, \dots \quad (6)$$

Если для некоторого $p \geq 2$ в (6) имеет место знак равенства, то функция $F(z)$ имеет вид (4).

Утверждение (С). Справедливы неравенства

$$\left| a_p - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1} \right| \leq \frac{p+1}{2} - \frac{1}{2^{p-1}}, \quad p = 2, 3, \dots \quad (7)$$

Для $p=2$ знак равенства в (7) реализуется функцией $F(z)$ вида (4). Для некоторого $p > 2$ знак равенства в (7) реализуется функцией (5).

Между родственными функциями устанавливается взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем нам предстоит изучить свойства этих функций. Основное внимание мы будем уделять коэффициентам родственных функций. На первый взгляд может показаться, что, зная достаточно хорошо поведение коэффициентов функций из класса $\tilde{K}_n(E)$, можно также получить достаточно полную информацию о поведении коэффициентов функций из класса $\tilde{K}_n(\Pi)$. В некоторых случаях это действительно так, но в общем случае простой перенос результатов из одного класса в другой приводит к значительным трудностям. На этот счет имеется много примеров. Приведем один частный пример, когда $n=1$. Областью значений функционала $b_{k+1,1}(G)$ на классе $\tilde{K}_1(E)$ однолистных в E функций является круг $|\omega| \leq k+1$. Этот результат получен совсем недавно американским математиком Л. Бранжем. Тем самым была решена знаменитая гипотеза Бибербаха о коэффициентах однолистных функций. Однако, нахождение, например, области значений соответствующего функционала

$$a_{p+1,1} = \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} C_p^k b_{k+1,1}(G)$$

является более трудной задачей.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМЫ ЧЕБЫШЕВА

Д. КИРЬЯЦКИС

Гродненский университет им. Янки Купалы, г. Гродно

Во всех примерах мы будем пользоваться следующим правилом. Вначале записывается однородное линейное дифференциальное уравнение, затем указывается его фундаментальная система решений и та область, в которой эта система является системой Чебышева.

Система аналитических в области D функций $u_0(z), u_1(z), \dots, u_n(z)$ называется системой Чебышева в области D , если уравнение

$$c_0 u_0(z) + c_1 u_1(z) + \dots + c_n u_n(z) = 0$$

имеет в области D не более n корней (случай $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ исключается). В дальнейшем исследуется система функций $1, z, \dots, z^{n-1}, f(z)$, где $f(z)$ – отличная от константы аналитическая в области D функция. Очевидно, функции $1, z, \dots, z^{n-1}, f(z)$ образуют систему Чебышева в области D , если при любых c_0, c_1, \dots, c_{n-1} уравнение $c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + f(z) = 0$ имеет в области D не более n корней.

Условимся в обозначениях. Пусть D_0 – область $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$, D_1 – область $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, D_2 – область $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$, $D(k)$ – область $-\frac{\pi}{2k} < \arg z < \frac{\pi}{2k}$, D^* – область $x > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$, E – единичный круг $|z| < 1$.

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$Y^{(n+1)}(z) - \frac{f^{(n+1)}(z)}{f^{(n)}(z)} Y^{(n)}(z) = 0, \quad f^{(n)}(z) \neq 0.$$

Очевидно, что функции $1, z, \dots, z^{n-1}, f(z)$ образуют фундаментальную систему решений. Общее решение имеет вид

$$y(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n f(z).$$

Пример 1. Дифференциальное уравнение

$$Y^{(n+1)}(z) - Y^{(n)}(z) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $1, z, \dots, z^{n-1}, e^z$, которая является системой Чебышева в области D_0 .

Пример 2. Дифференциальное уравнение

$$Y^{(n+1)}(z) - \frac{(\sin z)^{(n+1)}}{(\sin z)^{(n)}} Y^{(n)}(z) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $1, z, \dots, z^{n-1}, \sin z$, которая является системой Чебышева в области D_1 , если n – четное число, и системой Чебышева в области D_2 , если n – нечетное число.

Пример 3. Дифференциальное уравнение

$$Y^{(n+1)}(z) - \frac{(\cos z)^{(n+1)}}{(\cos z)^{(n)}} Y^{(n)}(z) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $1, z, \dots, z^{n-1}, \cos z$, которая является системой Чебышева в области D_2 , если n – четное число, и системой Чебышева в области D_1 , если n – нечетное число.

Пример 4. Дифференциальное уравнение

$$Y^{(n+1)}(z) - \frac{(chz)^{(n+1)}}{(chz)^{(n)}} Y^{(n)}(z) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $1, z, \dots, z^{n-1}, chz$, которая является системой Чебышева в области D_0 , если n – четное число, и системой Чебышева в области D^* , если n – нечетное число.

Пример 5. Дифференциальное уравнение

$$Y^{(n+1)}(z) - \frac{(shz)^{(n+1)}}{(shz)^{(n)}} Y^{(n)}(z) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $1, z, \dots, z^{n-1}, shz$, которая является системой Чебышева в области D^* , если n – четное число, и системой Чебышева в области D_0 , если n – нечетное число.

Пример 6. Дифференциальное уравнение

$$Y^{(n+1)}(z) - \frac{k}{z} Y^{(n)}(z) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $1, z, \dots, z^{n-1}, z^{n+k}$, которая является системой Чебышева в области $D(k)$.

Пример 7. Дифференциальное уравнение

$$Y^{(n+1)}(z) + \frac{n+1}{z} Y^{(n)}(z) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $1, z, \dots, z^{n-1}, \frac{1}{z}$, которая является системой Чебышева в любой области с выключенной точкой $z = 0$.

Пример 8. Дифференциальное уравнение

$$Y^{(n+1)}(z) + \frac{(n+1)(n+1+z)}{(n+z)(1-z)} Y^{(n)}(z) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $1, z, \dots, z^{n-1}, \frac{z}{(1-z)^2}$, которая является системой Чебышева в единичном круге E .

Пример 9. Дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(c_k - z)^{n+1}} Y^{(n+1)}(z) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(c_k - z)^{n+2}} Y^{(n)}(z) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $1, z, \dots, z^{n-1}, f(z)$, где $f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{c_k - z}$, $A_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, и числа ζ, c_1, \dots, c_m удовлетворяют условию $|c_k - \zeta| \leq R$, $k = 1, \dots, m$. Эта система является системой Чебышева в области

$$|z - \zeta| > \frac{R}{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}}.$$

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУНКЦИИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ ЛИНЕЙНОМУ ОДНОРОДНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Д. КИРЬЯЦКИС

Гродненский государственный университет, г. Гродно

e-mail: dmitr.kir@gmail.com

Теорема 1. Пусть функция

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + a_{n+3} z^{n+3} + \dots, \text{ где } a_n = 1,$$

удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению

$$Z^{(n+1)}(z) + c_n Z^{(n)}(z) + \dots + c_1 Z^{(1)}(z) + c_0 Z(z) = 0$$

с числовыми коэффициентами $c_{n+1}, c_n, \dots, c_1, c_0$, где $c_{n+1} = 1$, и корни $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ характеристического многочлена $L_{n+1}(\lambda)$ являются положительными числами. Тогда последовательность коэффициентов a_{n+k} , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, функции $f(z)$ является логарифмически выпуклой вверх последовательностью, т.е.

$$\ln a_{n+k} \geq \frac{1}{2} (\ln a_{n+k-1} + \ln a_{n+k+1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Теорема 2. Если коэффициенты дифференциального уравнения удовлетворяют условию $c_m^2 \geq c_{m+1} c_{m-1}$, то характеристический многочлен $L_{n+1}(\lambda)$ не имеет корней в угловой области

$$-\frac{2\pi}{n+2} < \arg z < \frac{2\pi}{n+2}.$$

Теорема 3. Если все корни характеристического многочлена $L_{n+1}(\lambda)$ принадлежат угловой области $0 < \arg z < \frac{2\pi}{k+1}$, то $a_{n+k} \neq 0$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЙ КОМПЛЕКС ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ДАВЛЕНИЯ

Е.С. КОРОВЧЕНКО, О.Ю. БУШУЕВ

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: daganet.74@gmail.com

Одним из основных параметров, характеризующих любой измерительный преобразователь, является его динамическая характеристика, которую можно описать набором собственных частот (характеристических параметров) [1]. Очевидно, что значения этих частот определяются конструкцией преобразователя. Таким образом,

при изменении характеристик конструкции, в частности возникновения неисправности (разрыв сварного шва, дефекты мембраны и др.), значения этих частот должны изменяться. Следовательно, отклонение динамической характеристики от эталонной может служить критерием исправности датчика и основанием для решения о возможности его дальнейшего использования [2].

Если преобразователь представить в виде электромеханической системы, то информация о параметрах собственных частот содержится в выходном сигнале тензопреобразователя давления при условии воздействия на мембрану импульса давления с необходимым спектром, который можно сформировать с помощью генератора и пьезокерамического излучателя.

Проблемы, связанные с практическим применением данного способа, заключаются в необходимости сопоставления собственных частот с элементами конструкции на фоне ложных спектральных пиков в условиях низкого соотношения сигнал/шум. Следовательно, требуется создание и исследование алгоритмов обработки такого сигнала с последующим статистическим анализом полученных данных. Кроме того, существует проблема формирования и контроля возмущающего воздействия с нужными нам параметрами.

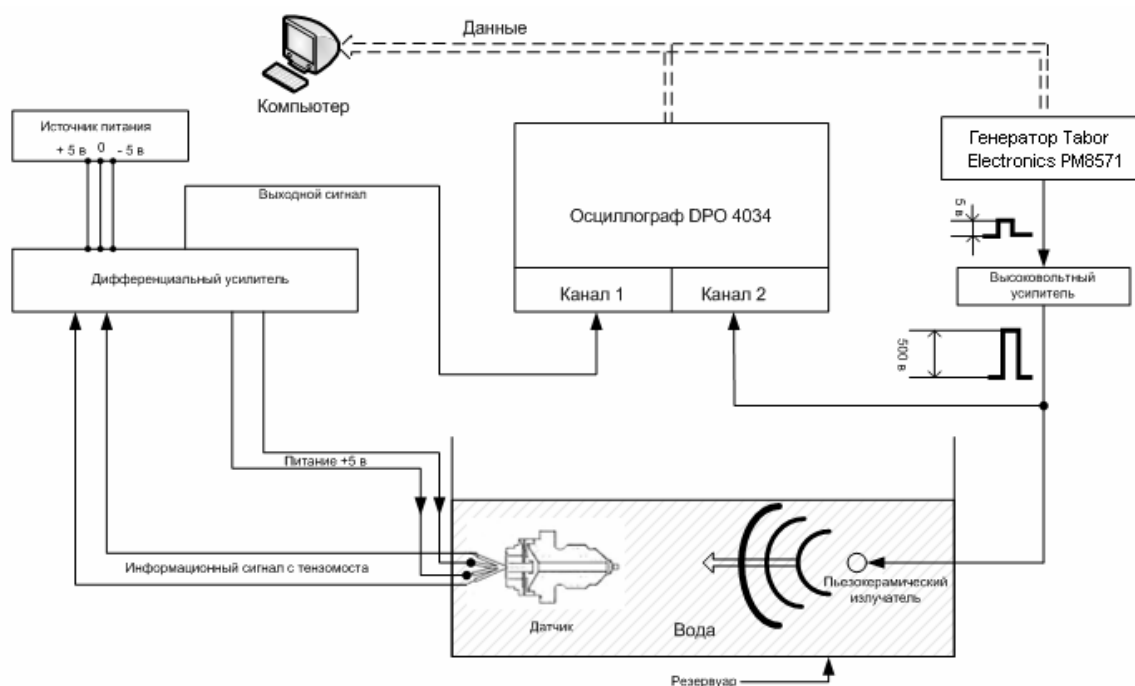


Рис. 1. Схема автоматизированного стенда для измерения входного и выходного сигналов

На первом этапе исследований для регистрации выходных параметров с датчика использовался осциллограф, который сохранял экспериментальные данные на съемном накопителе. При переносе информации в компьютер возникала проблема идентификации того или

иногo эксперимента, а также хранения и обработки большого массива данных. Это приводило к большим временным затратам и задержке исследований.

Для ускорения работ было принято решение о разработке программно-аппаратного комплекса, автоматизирующего большую часть исследований.

В качестве программной основы комплекса было решено выбрать пакет математической обработки Matlab. Это обусловлено тем, что Matlab является очень гибким языком программирования с возможностью графического представления результатов эксперимента и наличием средств связи с внешней аппаратурой.

Используя комплект драйверов осциллографа Tertronix DPO 4034 и разработав программу в среде Matlab, мы решили задачу управления осциллографом, получения сигнала непосредственно на компьютере и автоматической обработки полученных данных. Для связи осциллографа с Matlab был использован протокол VISA, разработанный компанией National Instruments и стандартизированный в качестве открытого промышленного стандарта систем VXIplug&play.

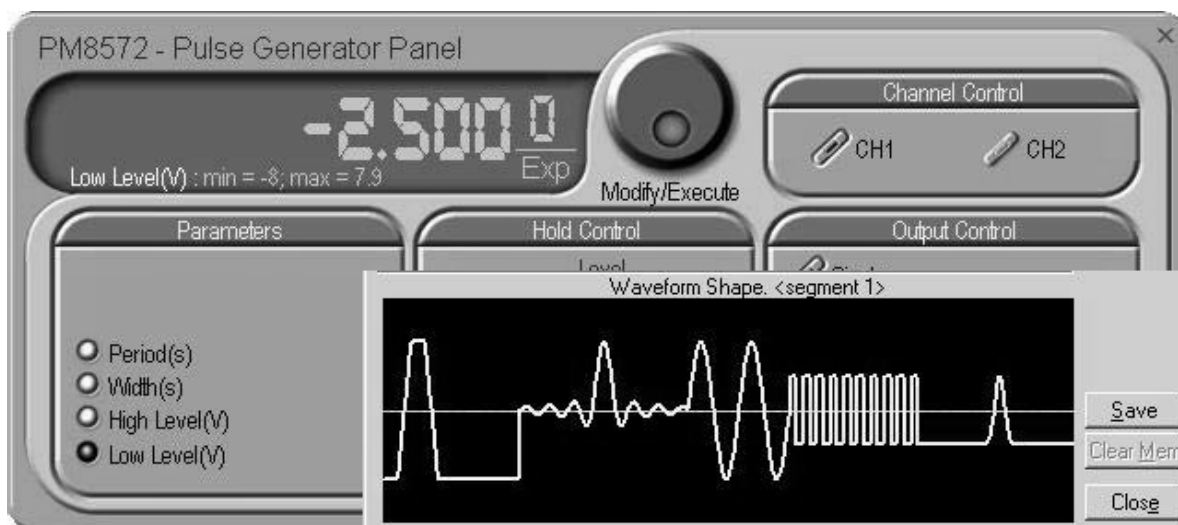


Рис. 2. Интерфейс работы с генератором сигналов

Так же с помощью протокола VISA и программного кода в среде Matlab была реализована возможность формирования сигнала произвольной формы непосредственно с компьютера, управляя генератором Tabor Electronics PM8571.

Таким образом, в результате проделанной работы был разработан автоматизированный стенд для исследования динамических характеристик тензопреобразователей давления. Примеры оценок таких характеристик изображены на рисунке 3.

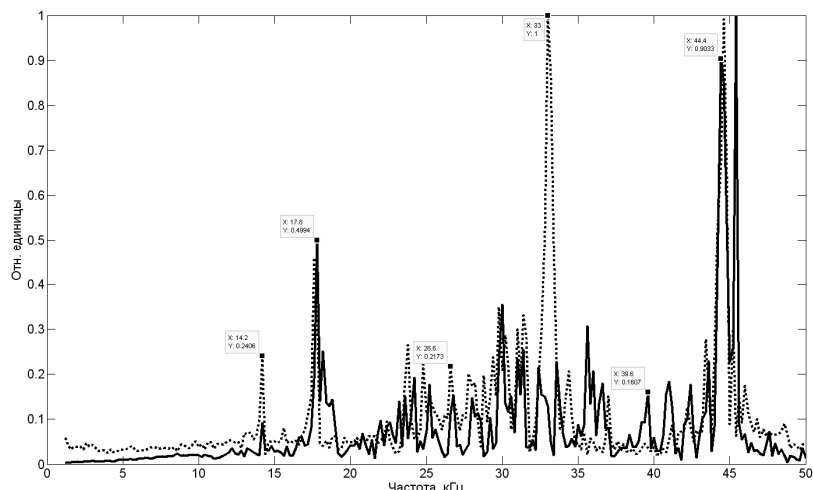


Рис. 3. Оценки частотной характеристики тензопреобразователя (Сплошная линия – оценка, полученная с помощью возмущающего воздействия синусоиды. Пунктирная линия – полученная с помощью импульса)

Полученные результаты являются основой для разработки алгоритмов оценки состояния датчика давления непосредственно в ходе технологического процесса.

Литература

1. Пирогов А.В., Стучебников В.М. Экспериментальное определение собственных частот двухмембранных тензопреобразователей давления // Датчики и системы. – 2006. – № 4.
2. Бушуев О.Ю., Семенов А.С., Шестаков А.Л. Экспериментальная оценка динамических характеристик тензопреобразователей давления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». – 2011. – № 1.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА В КЛАССЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА

О.Н. КУПРИКОВА

Филиал МИИТ в г. Смоленске

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L .

Напомним (см., например, [1]), что *квазигармоническими функциями рода n в области T^+* называются регулярные в области T^+ решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, n – некоторое фиксированное неотрицательное целое число. Известно [1], что всякую квазигармоническую функцию рода n в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где $A_k^n := (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, которая называется *аналитической компонентой* соответствующей квазигармонической функции $W(z)$.

Определение 1. Будем говорить, что квазигармоническая функция $W(z)$ принадлежит классу $C^m(T^+ + L)$, если в представлении (2) аналитическая компонента $\varphi^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Задача N. Требуется найти все квазигармонические функции рода n ($n \geq 1$), принадлежащие классу $C^{n+1}(T^+ + L)$ и удовлетворяющие на L условию:

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n} = g(t), \quad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к L , а $g(t)$ – заданная на контуре L функция класса $H(L)$ (т.е. $g(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на L).

В работе [1] задача N была решена при $n=2$ и $T^+ = \{z: |z| < 1\}$. В настоящем сообщении получен конструктивный метод решения задачи N в случае $n=3$. А именно установлен следующий основной результат.

Теорема 1. Если $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ и $g(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_L g(t) \cdot t^{m-4} dt = 0, \quad m = 0, 2, 4, 6, 7, \dots \quad (4)$$

и

$$\left| \frac{z}{8} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz - \frac{z^3}{4} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz + \frac{z^5}{8} \int \frac{g_1(z)}{z^6} dz \right| \leq \frac{M_1}{(1-r)^{1-\alpha_1}},$$

$$\left| \frac{1}{8} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz - \frac{3z^2}{4} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz + \frac{5z^4}{8} \int \frac{g_1(z)}{z^6} dz \right| \leq \frac{M_2}{(1-r)^{1-\alpha_2}},$$

$$\left| -\frac{3z}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz + \frac{5z^2}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^6} dz \right| \leq \frac{M_3}{(1-r)^{1-\alpha_3}}, \quad (5)$$

$$\left| \frac{g_1(z)}{z^3} - \frac{3}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz + \frac{15z^2}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^6} dz \right| \leq \frac{M_4}{(1-r)^{1-\alpha_4}},$$

$$\left| \frac{3g_1(z)}{z^4} + \frac{g_1'(z)}{z^3} + 15z \int \frac{g_1(z)}{z^6} dz \right| \leq \frac{M_5}{(1-r)^{1-\alpha_5}},$$

где $g_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^2 g(t)}{t-z} dt$, $r = |z|$, а M_k, α_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) - некоторые положительные постоянные, причем $0 < \alpha_k \leq 1$, то общее решение неоднородной задачи Неймана \mathbf{N} при $n=3$ можно задавать в виде

$$W(z) = \frac{C_0 \bar{z}^3 + (C_2 z - C_1 \bar{z})[1 - 3z\bar{z} + (z\bar{z})^2] + C_3 z^3}{(1+z\bar{z})^3} +$$

$$+ \frac{5\bar{z}^3}{2(1+z\bar{z})^3} \int g_1(z) dz + \frac{3z\bar{z}^2 - 3\bar{z}(1-z\bar{z})^2}{2(1+z\bar{z})^3} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz +$$

$$+ \frac{3z^2\bar{z} - 3z(1-z\bar{z})^2}{2(1+z\bar{z})^3} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz + \frac{5z^3}{2(1+z\bar{z})^3} \int \frac{g_1(z)}{z^6} dz;$$
(6)

здесь C_0, C_1, C_2, C_3 - произвольные комплексные постоянные, $\int g_1(z) dz$, $\int \frac{g_1(z)}{z^2} dz$, $\int \frac{g_1(z)}{z^4} dz$ и $\int \frac{g_1(z)}{z^6} dz$ - фиксированные первообразные мероморфных в круге T^+ функций $g_1(z)$, $\frac{g_1(z)}{z^2}$, $\frac{g_1(z)}{z^4}$ и $\frac{g_1(z)}{z^6}$ соответственно.

Литература

1. Куприкова О.Н., Расулов К.М. О задаче типа Неймана в классе квазигармонических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Вып. 12. - Смоленск, 2011. - С. 206-212.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ В ВЕСОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

С.М. КУРИЛЕНКО

Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, г. Брянск
e-mail: SergKurilenko@gmail.com

Пусть C_n - n -мерное комплексное пространство, B_n - единичный шар в C_n , т.е. $B_n = \{z \in B_n : |z| < 1\}$. Обозначим через $H(B_n)$ множество всех голоморфных в B_n функций. Хорошо известно, что если $f \in H(B_n)$, то f допускает разложение $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, где $f_k(z)$ являются однородными многочленами от z_1, \dots, z_n .

Следуя работам [1 – 3], назовем дробной производной порядка β следующую аналитическую функцию

$$D^\beta f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+k)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)} f_k(z).$$

Скажем, что положительная суммируемая на интервале $(0,1)$ функция ω принадлежит классу Ω , если для нее существуют числа m_ω , M_ω , q_ω , причем $m_\omega, q_\omega \in (0,1)$, такие, что $m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega$ для всех $r \in (0,1)$,

$\lambda \in [q_\omega, 1]$. Обозначим $\alpha_\omega = \frac{\ln m_\omega}{\ln q_\omega}$.

Весовым классом Бесова аналитических функций $B_{p,q}^s(\omega)$ назовем класс аналитических в B_n функций, для которых

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\omega)} = \left(\int_0^1 (1-r)^{Nq} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{qs+1}} \left(\int_{S_n} \left| \frac{\partial^m f}{\partial z^m} \right|^p d\sigma(z) \right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1} dr \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Для данного класса функций нами установлены следующие факты.

Теорема 1. Положим $0 < p, q < +\infty$ и f – голоморфная в B_n функция. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

- 1) $f \in B_{p,q}^s(\omega)$;
- 2) функция $D^t f$ принадлежит весовому пространству Лебега $L_{tq-(qs+1)}^{p,q}(\omega)$ для некоторого $t > s$;
- 3) функция $D^t f$ принадлежит весовому пространству Лебега $L_{tq-(qs+1)}^{p,q}(\omega)$ для всех $t > s$,

где

$$\|f\|_{L_{tq-(qs+1)}^{p,q}(\omega)} = \left(\int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{tq-(qs+1)} \left(\int_{S_n} |f(z)|^p d\sigma(z) \right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1} dr \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Из данной теоремы можно получить следствие.

Следствие 1. Пространство $B_{p,q}^s(\omega)$ является замкнутым подпространством пространства $L_{-(qs+1)}^{p,q}(\omega)$.

Рассмотрим оператор

$$A_\alpha(f)(z) = \int_{B_n} \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha f(\zeta) d\nu(\zeta)}{(1-\langle \zeta, z \rangle)^{\alpha+n+1}}.$$

Нами доказана также следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\omega \in \Omega$ и

- $1 < p, q < +\infty, \alpha > \alpha_\omega$ или
- $0 < p, q \leq 1, \alpha > \frac{\alpha_\omega + 1}{q} + n(\frac{1}{p} - 1) - 1$ или
- $1 < p < +\infty, 0 < q \leq 1, \alpha > \frac{\alpha_\omega + 1}{q} - 1$ или
- $0 < p \leq 1, 1 < p' < +\infty, \alpha > \frac{\alpha_\omega}{q} + n(\frac{1}{p} - 1) - \frac{1}{q'}$, где $q' = \frac{q}{q-1}$,

тогда $B_{p,q}^s(\omega) = A_\alpha L_{-(qs+1)}^{p,q}(\omega)$.

В работе мы использовали методы и результаты из работ [1; 2]. Отметим, что в работе [3] представлен частный случай наших результатов для пространств B^p (без смешанной нормы, параметра s и веса ω).

Литература

1. Антоненкова О.Е., Шамоян Ф.А. Преобразование Коши линейных непрерывных функционалов и проекторы в весовых пространствах аналитических функций // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 6. С. 1208–1234.
2. Шамоян Ф.А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31, № 2. – С. 197–215.
3. Kehe Zhu. Spaces of holomorphic functions in the unit ball. Springer, 2004.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ N-ГАРМОНИЧЕСКИХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ

Е.В. ПОВПРИЦ

Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, г. Брянск
e-mail: mishinae.v@yandex.ru

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n, |z_j| < 1, 1 \leq j \leq n\}$ – единичный поликруг n -мерного комплексного пространства C^n , $T^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n, |z_j| = 1, 1 \leq j \leq n\}$ – граница Шилова области U^n , $H(U^n)$ – множество всех голоморфных в U^n функций, $h(U^n)$ – множество всех голоморфных и n -гармонических в поликруге функций, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ – некоторая вектор-функция, заданная на $Q_n = [0; 1]^n$.

Обозначим через Ω множество всех положительных функций $\tilde{\omega}$, суммируемых на интервале $(0, 1)$, для которых существуют положительные числа $m_{\tilde{\omega}}, M_{\tilde{\omega}}, q_{\tilde{\omega}}$, причем $m_{\tilde{\omega}}, q_{\tilde{\omega}} \in (0, 1)$, такие, что

$$m_{\tilde{\omega}} \leq \frac{\tilde{\omega}(\lambda r)}{\tilde{\omega}(r)} \leq M_{\tilde{\omega}}, \quad \forall r \in (0, 1), \quad \lambda \in [q_{\tilde{\omega}}, 1]$$

Свойства функции $\tilde{\omega}$ хорошо изучены в монографии [1].

Если

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n, \quad z_j = r_j e^{i\varphi_j}, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in C^n, \quad \zeta_j = \rho_j e^{i\theta_j}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n,$$

то

$$z^\alpha := z^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z^{\alpha_n}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad (1 - |z|^2)^\alpha := \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^{\alpha_j}, \quad (1 - \zeta z)^{\alpha+2} := \prod_{j=1}^n (1 - \zeta_j z_j)^{\alpha_j+2},$$

$$\omega_\Pi(1-r) = \prod_{j=1}^n \omega_j(1-r_j), \quad r = (r_1, \dots, r_n) \in Q_n.$$

Пусть $0 < p, q < +\infty$, $S(U^n)$ – пространство всех измеримых функций в U^n , тогда

$$L^{p,q}(\omega) = \left\{ f \in S(U^n) : \int_{Q_n} \omega_\Pi(1-r) \left(\int_{T^n} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right)^{\frac{q}{p}} r dr < +\infty \right\}.$$

Через $A^{p,q}(\omega) = H(U^n) \cap L^{p,q}(\omega)$, $h^{p,q}(\omega) = h(U^n) \cap L^{p,q}(\omega)$.

В этой работе мы исследуем поведение интегральных операторов следующего вида в пространствах n -гармонических функций $h^{p,q}(\omega)$

$$T_\alpha(f)(z) = \int_{U^n} \frac{\omega_\Pi(1-|\zeta|)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}} f(\zeta) dm_{2n}(\zeta), \quad z \in U^n, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (\alpha_j > -1, j = \overline{1, n}).$$

Такие операторы возникают при исследовании различных вопросов анизотропных пространств голоморфных в поликруге и шаре функций (см., например, [2; 3]).

Основные результаты работы сформулированы в виде двух следующих теорем.

Теорема 1. Пусть $\omega_j \in \Omega$, удовлетворяет условию

$$\int_{Q_n} \omega_\Pi^p(1-r)(1-r)^{2p-2} r dr < +\infty, \quad \alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j} + 1}{q} + \frac{1}{p} - 2, \quad j = \overline{1, n}, \quad 0 < p, q \leq 1.$$

Тогда оператор

$$T_\alpha(f)(z) = \int_{U^n} \frac{\omega_\Pi(1-|\zeta|)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}} f(\zeta) dm_{2n}(\zeta), \quad z \in U^n,$$

отображает пространство $h^{p,q}(\omega)$ в пространство $A^{p,q}(\omega_\alpha)$, причем

$$\|T_\alpha f\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)} \leq c(p, \alpha) \|f\|_{h^{p,q}(\omega)}, \quad \omega_{\alpha_j}(t) = \omega_j(t) \left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)} \right)^q, \quad t \in (0, 1), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Теорема 2. Пусть $\omega_j \in \Omega$. Предположим, что

$$1) \quad \text{если } 1 < p < +\infty, \quad 0 < q \leq 1, \quad \text{то } \alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j} + 1}{q} - 1, \quad 1 \leq j \leq n,$$

2) если $0 < p \leq 1$, $1 < q < +\infty$, то $\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q'} - 1$, $1 \leq j \leq n$, $q' = \frac{q}{q-1}$.

Тогда оператор $T_\alpha(f)(z) = \int_{U^n} \frac{\omega_\Pi(1-|\zeta|)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}} f(\zeta) dm_{2n}(\zeta)$, $z \in U^n$,

отображает пространство $h^{p,q}(\omega)$ в пространство $A^{p,q}(\omega_\alpha)$, причем

$$\|T_\alpha f\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)} \leq c(p, \alpha) \|f\|_{h^{p,q}(\omega)}, \quad \omega_\alpha(t) = \omega_j(t) \left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)} \right)^q, \quad t \in (0,1), 1 \leq j \leq n.$$

Литература

1. Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н. Введение в теорию весовых L^p -классов мероморфных функций. Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009.

2. Шамоян Ф.А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журн. Т. 31, № 2. С. 197-215(1990).

3. Антоненкова О.Е., Шамоян Ф.А. Преобразование Коши линейных непрерывных функционалов и проекторы в весовых пространствах аналитических функций // Сиб. мат. журн. Т. 46, № 6. С. 1208-1234 (2005).

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМ ИЗ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ

Л.А. ПОПЛАВСКАЯ

Белорусский государственный университет, г. Минск

e-mail: poplaskaya@gmail.com

Исследуется аналитическая структура остающихся при всех $t \geq t_0$ или $t \leq t_0$ в достаточно малой окрестности начала координат решений системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + f_1(x, y, Z), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, Z), \\ \frac{dZ}{dt} = AZ + F(x, y, Z) \end{cases}$$

с голоморфными в окрестности начала координат скалярными f_1 и f_2 и n -мерной векторной F функциями, не содержащими в своих разложениях по степеням x , y и компонент вектора Z членов ниже второго порядка, в случае, когда матрица A имеет два нулевых собственных числа с непростым элементарным делителем, а остальные собственные числа имеют отрицательные вещественные части.

Устойчивость нулевого решения данной системы во всех случаях, кроме трансцендентного, изучена А.М. Ляпуновым [1] и Г.В. Каменковым [2], а в трансцендентном случае изучена В.А. Плиссом [3].

Путем взаимно-однозначного голоморфного преобразования исходная система сводится сначала к системе, в которой

$$f_1(x, y, Z) = P_m(x, y) + \varphi_1(x, y, Z),$$

$$f_2(x, y, Z) = Q_m(x) + Q_{m-1}(x)y + Q_{m-2}(x, y)y^2 + \varphi_2(x, y, Z),$$

где $P_m(x, y)$ и $Q_m(x)$ – полиномы степени m , $Q_{m-1}(x)$ и $Q_{m-2}(x, y)$ – полиномы степеней $m-1$ и $m-2$ соответственно и такие, что $Q_m(x) = a_0x^\alpha + a_1x^{\alpha+1} + \dots$, $Q_{m-1}(x) = b_0x^\beta + b_1x^{\beta+1} + \dots$, $2 \leq \alpha \leq m$, $1 \leq \beta \leq m-1$, $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ – некоторые постоянные, причем $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, φ_1, φ_2, F – голоморфные в окрестности начала координат функции, не содержащие в своих разложениях по степеням x, y и компонент вектора Z членов ниже m -го порядка, где $m > 1$,

причем m можно взять произвольно, $F(x, y, 0) = \sum_{i+j=k+1}^{\infty} c_{ij}x^i y^j$, $2 \leq k \leq m$,

c_{ij} – некоторые постоянные, а затем с помощью взаимно-однозначного голоморфного с периодическими коэффициентами преобразования к удобной для исследования системе

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = g_0 u^n + g_1 u^{2n-1} + u^{2n+p-1} \psi_1(u, \delta(v), W), \\ \frac{dv}{dt} = u^{n+1} + u^{2n+p} \psi_2(u, \delta(v), W), \\ \frac{dW}{dt} = AW + F_1(u, \delta(v), W) \end{cases}$$

с голоморфными в окрестности $u=0, W=0$ и периодическими по v функциями ψ_1, ψ_2 и F_1 , $p > 0$ – целое число, $\delta(v)$ – ω -периодическая функция v .

Доказывается, что в случае $\alpha=2n-1, \beta=n-1, b_0^2 + 4a_0(\beta+1) < 0$, n – нечетное, исходная система в окрестности начала координат имеет:

• при $g_0 < 0$ общее решение, определенное при всех $t \geq t_0$ и представимое в виде абсолютно сходящихся при всех v_0 и $t \geq t_0$ и достаточно малых $|u_0|, |C_1|, \dots, |C_n|$ рядов

$$\begin{cases} x(t) = R_X(t, u_0, v_0) + \sum \Omega_X^{(m_1, \dots, m_n)}(t, u_0, v_0) e^{\sum_{j=1}^n m_j \operatorname{Re}(\lambda_j) t} C_1^{m_1} \dots C_n^{m_n}, \\ y(t) = R_Y(t, u_0, v_0) + \sum \Omega_Y^{(m_1, \dots, m_n)}(t, u_0, v_0) e^{\sum_{j=1}^n m_j \operatorname{Re}(\lambda_j) t} C_1^{m_1} \dots C_n^{m_n}, \\ Z(t) = R_Z(t, u_0, v_0) + \sum \Omega_Z^{(m_1, \dots, m_n)}(t, u_0, v_0) e^{\sum_{j=1}^n m_j \operatorname{Re}(\lambda_j) t} C_1^{m_1} \dots C_n^{m_n}, \end{cases}$$

в которых функции R_X , R_Y , R_Z асимптотически представимы при достаточно малых u_0 равномерно относительно $t \geq t_0$ и всех v_0 рядами по степеням $u(t, u_0)$ с периодическими по $v(t, u_0, v_0)$ коэффициентами, а функции $\Omega_X^{(m_1, \dots, m_n)}$, $\Omega_Y^{(m_1, \dots, m_n)}$ и $\Omega_Z^{(m_1, \dots, m_n)}$ непрерывны при всех v_0 , $t \geq t_0$ и достаточно малых u_0 и их характеристические числа не более нуля, причем суммирование распространяется на все целые неотрицательные числа m_1, \dots, m_n , для которых $m_1 + \dots + m_n > 0$ и данные ряды представляют собой непрерывные функции t , стремящиеся к нулю при $t \rightarrow +\infty$;

при $g_0 > 0$ и $t \geq t_0$ n -параметрическое семейство решений, определенное при всех $t \geq t_0$ и стремящееся к нулю при $t \rightarrow +\infty$;

при $g_0 > 0$ и $t \leq t_0$ двухпараметрическое семейство решений, определенное при всех $t \leq t_0$, стремящееся к нулю при $t \rightarrow -\infty$ и асимптотически представимое при $u_0 \rightarrow 0$ равномерно относительно $t \leq t_0$ и всех v_0 рядами по степеням $u(t, u_0)$ с периодическими по $v(t, u_0, v_0)$ коэффициентами.

Литература

1. Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н. Введение в теорию весовых L^p -классов мероморфных функций. Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009.

2. Шамоян Ф.А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журн. Т. 31, № 2. С. 197-215(1990).

3. Антоненкова О.Е., Шамоян Ф.А. Преобразование Коши линейных непрерывных функционалов и проекторы в весовых пространствах аналитических функций // Сиб. мат. журн. Т. 46, № 6. С. 1208-1234 (2005).

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ СОСТОЯНИЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ

Л.А. ПОПЛАВСКАЯ, Г.А. ВЕЛИГУРСКИЙ, Р.Э. САДКОВА

Белорусский государственный университет, г. Минск

e-mail: poplaskaya@gmail.com

Рассматривается структурно-сложная система S , состоящая из n любых устройств (элементов), соединения между которыми образуют сложные структуры. Каждый элемент системы характеризуется конечным числом состояний, к которым можно отнести различные уровни работоспособности и разного типа отказы, и структурно связан с другими элементами системы через свои входы и выходы. Состояние элемента в системе определяется его выходным состоянием и зависит от

его внутренних и входных состояний. Входные состояния элемента характеризуются выходными состояниями других элементов, структурно связанных с рассматриваемым, а внутренние состояния элемента характеризуются различными процессами старения и износа, происходящими непосредственно в самом элементе. В результате таких процессов элемент из состояния исправности переходит в состояние отказа разных типов. К множеству отказов состояний элемента системы могут быть отнесены необнаруженный отказ, ложное срабатывание, короткое замыкание, состояние обрыва и т.д.

Метод построения математических моделей состояний рассматриваемых сложных систем был изложен на СКМП-2011.

В данной работе с целью анализа надежности рассматриваемых систем все множество состояний системы разбивается на k подмножеств состояний, из которых выделяется одно подмножество исправных (работоспособных) состояний системы и $(k-1)$ подмножеств отказов состояний. Задача заключается в определении вероятности нахождения системы в одном из k подмножеств состояний. Последнее предполагает построение структурных функций, отображающих условие нахождения системы в определенном состоянии в зависимости от состояний ее элементов.

Для построения структурных функций состояний исследуемой системы в качестве модели системы выбирается сеть, структура которой отображает топологическую связь между элементами системы, а множество состояний элементов сети описывается через соответствующие логические операторы L , отображающие логику перехода рассматриваемого элемента из одного состояния в другое, что позволяет учитывать при исследовании надежности системы несколько отказов состояний в отличие от общепринятой модели, и особенности функционирования того или иного элемента. На основе такой модели рассматриваются логико-вероятностные методы расчета точных значений показателей безотказности сложных систем с многими состояниями элементов, а также расчет характеристик безотказности сложных систем с учетом временной последовательности наступления отказов элементов.

Пусть выходные, внутренние и входные состояния v -го элемента системы в фиксированный момент времени t описываются переменными y_v, z_v, x_v , принимающими значения из множества состояний системы $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$. Тогда каждый элемент s_v системы может принимать k_v всевозможных состояний из множества Γ , где $k_v < k, v=1, \dots, n$, а состояние всех элементов системы в момент времени t задается n -мерным вектором $\vec{y}(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$, в котором $y_v(t) = L(x_1(t), \dots, x_U(t); z_1(t), \dots, z_\omega(t))$, где U и ω – число входных и внутренних состояний v -го элемента системы, $v=1, \dots, n$, L – логический оператор, отображающий

всевозможные наборы входных $x(t)$ и внутренних $z(t)$ состояний системы.

Введя в рассмотрение случайную переменную $Y_S(t)$, принимающую различные состояния из множества Γ и называемую структурной функцией состояний системы, функционально связывающей выходное состояние системы с выходными состояниями элементов системы, состояние системы S в момент времени t однозначно определяется переменными $y_1(t), \dots, y_n(t)$ и принимает вид $Y_S(t) = Y_S(y_1(t), \dots, y_n(t)) = Y_S(\bar{y}(t))$.

Понижая порядок матрицы узловых связей, структурная функция Y_S l -го состояния системы принимает вид $Y_S^{(l)} = Y_1^{(l)} \cup \dots \cup Y_m^{(l)}$, $l=1, \dots, k$, в котором $Y_j^{(l)} = y_{j_1}^{(l_1)} y_{j_2}^{(l_2)} \dots y_{j_s}^{(l_s)} = \prod_{t=1}^s y_{j_t}^{(l_t)}$, $l_t = \{1, \dots, k\}$, $j=1, \dots, m$, представляет собой минимальный набор элементарных событий, приводящих систему в l состояние, m – минимально возможное число элементов, обеспечивающее нормальное функционирование системы.

Расчет вероятности нахождения системы в l -ом состоянии по формуле вероятностей суммы событий $P_S^{(l)} = P(Y_S = \gamma_l) = P(Y_1^{(l)} \cup \dots \cup Y_m^{(l)})$ при достаточно большом числе слагаемых является сложной задачей и решается методом ортогонализации, благодаря которому структурная функция преобразовывается в ортогональную структурную функцию, с помощью которой объединение совместных событий $Y_j^{(l)}$ сводится к эквивалентному объединению несовместных событий $F_j^{(l)}$:

$$P_S^{(l)} = P\left(\bigcup_{j=1}^m Y_j^{(l)}\right) = \sum_{j=1}^m P\{F_j^{(l)}\},$$
 где $P\{F_j^{(l)}\}$ есть произведение вероятностей элементарных событий, входящих в $F_j^{(l)}$, $j=1, \dots, m$.

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ «ЛОВУШЕК» ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: kahrimanr@yandex.ru

*Посвящается 75-летию
Эдмунда Ивановича Зверовича*

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная, односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L , а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Всюду в дальнейшем класс аналитических в области T^+ функций $F(z)$, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающихся на контур L , будем обозначать символом $A(T^+) \cap H(L)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все аналитические в области T^+ функции $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$, удовлетворяющие на L условию*

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)} + h(t), \quad (1)$$

где $A(t), B(t), h(t)$ - заданные на L функции класса $H(L)$ (Гельдера), $\alpha(t)$ - прямой или обратный сдвиг контура L , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \quad (2)$$

причем $\alpha'(t) \neq 0$ и $\alpha'(t) \in H(L)$.

Сформулированную задачу (1), (2) будем называть *трехэлементной односторонней задачей Карлемана* или, короче, *задачей K_3* , а соответствующую *однородную задачу ($h(t) \equiv 0$)* – *задачей K_3^0* .

Сразу отметим, что в частном случае, когда $A(t) \equiv 0$ или $B(t) \equiv 0$ из (1) получаются *основные двухэлементные односторонние краевые задачи*, впервые подробно изученные в работах Э.И. Зверовича и Г.С. Литвинчука [1; 2].

В монографии Г.С. Литвинчука [3, с. 294–318] построена теория Нетера для *трехэлементной задачи K_3* при различных предположениях относительно коэффициентов $A(t), B(t), H(t)$ и функции сдвига $\alpha(t)$. В частности, в [3] установлено, что краевое условие (1) задачи K_3 легко приводится к виду

$$A_1(t)F^+(t) = B_1(t)\overline{F^+(t)} + h_1(t), \quad (3)$$

где

$$A_1(t) = 1 - A(t) \cdot A[\alpha(t)] - \overline{B(t)} \cdot B[\alpha(t)], \quad (4)$$

$$B_1(t) = A[\alpha(t)] \cdot B(t) + \overline{A(t)} \cdot B[\alpha(t)], \quad (5)$$

$$h_1(t) = A[\alpha(t)] \cdot h(t) + B[\alpha(t)] \cdot \overline{h(t)} + h[\alpha(t)]. \quad (6)$$

Следовательно, если на контуре L выполняются условия

$$A_1(t) \neq 0, \quad B_1(t) \neq 0, \quad h_1(t) \neq 0, \quad (7)$$

то задача K_3 «вырождается» в хорошо исследованную *двухэлементную краевую задачу* вида (3). Поэтому в случае выполнения условий (7) (мы в дальнейшем называем этот случай *вырожденным*), используя известные методы решения *двухэлементных краевых задач* вида (3) (см., например,

[1 – 6]), устанавливаются конструктивные методы решения и исходной задачи K_3 .

Предположим теперь, что на контуре L выполняются тождества $A_1(t) \equiv 0$, $B_1(t) \equiv 0$, $h_1(t) \equiv 0$, которые с учетом обозначений (4) – (6) можно переписать в следующей «развернутой» форме:

$$A(t) \cdot A[\alpha(t)] + \overline{B(t)} \cdot B[\alpha(t)] \equiv 1, \quad (8)$$

$$A[\alpha(t)] \cdot B(t) + \overline{A(t)} \cdot B[\alpha(t)] \equiv 0, \quad (9)$$

$$A[\alpha(t)] \cdot h(t) + B[\alpha(t)] \cdot \overline{h(t)} + h[\alpha(t)] \equiv 0. \quad (10)$$

Известно (см., например, [3, с. 296]), что из условий (8) и (9) следует, что коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ всюду на контуре L удовлетворяют одному из следующих неравенств:

$$|A(t)| > |B(t)| \quad \text{или} \quad |A(t)| < |B(t)|. \quad (11)$$

Насколько нам известно, до сих пор не был получен общий метод решения задачи K_3 в невырожденном случае (т.е. при выполнении условий (8) – (10)).

Основной целью настоящей работы является разработка *общего метода решения задачи K_3* (который мы называем *методом интегральных «ловушек»*) в невырожденном случае лишь при выполнении одного из условий: либо $B(t) \neq 0$, либо $A(t) \neq 0$. В некоторых частных случаях идея этого метода была анонсирована в работах автора [7; 8].

В дальнейшем для определенности будем предполагать, что $L = \{t : |t| = 1\}$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, так как общий случай с помощью конформного отображения всегда можно привести к этому. Кроме того, обозначим через T^- дополнение $\overline{T^+} = \{z : |z| \leq 1\}$ до полной комплексной плоскости.

2. Решение невырожденной задачи K_3 в случае прямого сдвига и $B(t) \neq 0$. Пусть $\alpha(t)$ – прямой сдвиг контура L , выполняются условия (8) – (10) и $B(t) \neq 0$. При указанных предположениях краевое условие (1) можно переписать в следующем виде

$$F^+[\alpha(t)] = B(t) \overline{F^+(t)} + g(t), \quad (12)$$

где

$$g(t) = h(t) + A(t)F^+(t).$$

Если временно предположить, что $g(t)$ – известная функция, то равенство (12) представляет собой краевое условие *двухэлементной*

задачи типа Карлемана, теория которой изложена, например, в §14 монографии [3].

Известно (см., например, [3, с. 172]), что при исследовании и решении двухэлементной задачи (12) представляют интерес следующие три случая:

а) $B[\alpha(t)] \cdot \overline{B(t)} - 1 \equiv 0$;

б) $B[\alpha(t)] \cdot \overline{B(t)} - 1 \neq 0, \quad t \in L$;

в) когда $B[\alpha(t)] \cdot \overline{B(t)} - 1$ обращается в нуль в отдельных точках контура L (как, например, в случае $\alpha(t) = -t, \quad A(t) = i\sqrt{2} \cdot \left(t - \frac{1}{t}\right), \quad B(t) = 2 - \frac{1}{t^2}$ и $h(t) = \frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + i\sqrt{2} - t - i\sqrt{2} \cdot t^2$).

2.1. О решении задачи K_3 в случае $B[\alpha(t)] \cdot \overline{B(t)} - 1 \equiv 0$. Очевидно, что при выполнении условия (8) из тождества $B[\alpha(t)] \cdot \overline{B(t)} - 1 \equiv 0$ вытекает $A(t) \equiv 0$. Следовательно, в случае а) исходная задача K_3 равносильна хорошо изученной (см., например, §14 монографии [3]) двухэлементной краевой задаче типа Карлемана вида

$$F^+[\alpha(t)] = B(t)\overline{F^+(t)} + h(t). \quad (13)$$

2.2. Метод интегральных «ловушек» для решения задачи K_3 в случае $B[\alpha(t)] \cdot \overline{B(t)} - 1 \neq 0, \quad t \in L$. В этом случае в силу (8) имеем $A(t) \neq 0$ всюду на L , т.е. во всех точках контура L имеет место одно из следующих соотношений:

$$|A(t)| > |B(t)| > 0 \quad (14)$$

или

$$|B(t)| > |A(t)| > 0. \quad (15)$$

Прежде чем построить общий конструктивный алгоритм решения K_3 (при выполнении любого из неравенств (14) или (15)), заметим (см. также [3, с. 298]) одно важное в дальнейших рассуждениях и очевидное утверждение.

Утверждение 1. Все решения краевой задачи K_3 можно получить, если решить краевую задачу

$$\Phi^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)} + h(t), \quad t \in L, \quad (16)$$

для двух неизвестных аналитических функций $F^+(z)$ и $\Phi^+(z)$ из класса $A(T^+) \cap H(L)$, а затем потребовать, чтобы $F^+(z) \equiv \Phi^+(z), \quad z \in T^+ \cup L$.

Следуя [3], в дальнейшем краевую задачу (16) для пары аналитических функций $F^+(z)$ и $\Phi^+(z)$ будем называть *вспомогательной*

и обозначать для краткости символом \mathbf{GK}_3 , а соответствующую ей однородную задачу ($h(t) \equiv 0$) - \mathbf{GK}_3^0 .

Важно отметить, что основное «родство» между задачами \mathbf{K}_3 и \mathbf{GK}_3 определяется следующими двумя леммами.

Лемма 1. Если для коэффициентов $A(t), B(t)$ выполняются условия (8), (9) и хотя бы одно из неравенств (14) или (15), то для любых комплексных функций $F^+(t)$ и $\Phi^+(t)$, определенных на L , и любого $\alpha(t)$, удовлетворяющего условию (2), равенства

$$\Phi^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)}, \quad t \in L, \quad (17)$$

и

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)\Phi^+(t) + B(t)\overline{\Phi^+(t)}, \quad t \in L, \quad (18)$$

равносильны, т.е. (17) \Leftrightarrow (18).

Доказательство. Предположим, что для пары функций $(\Phi^+(t), F^+(t))$ имеет место равенство (17). Тогда, с учетом (2), из (17) будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= A[\alpha(t)]F^+[\alpha(t)] + B[\alpha(t)]\overline{F^+[\alpha(t)]}, \quad t \in L, \\ A(t)\Phi^+(t) &= A(t)A[\alpha(t)]F^+[\alpha(t)] + A(t)B[\alpha(t)]\overline{F^+[\alpha(t)]}, \quad t \in L, \\ B(t)\Phi^+(t) &= B(t)A[\alpha(t)]\overline{F^+[\alpha(t)]} + B(t)B[\alpha(t)]F^+[\alpha(t)], \quad t \in L. \end{aligned}$$

Складывая последние два равенства и учитывая равенства (8) и (9), получаем равенство (18), т.е. (17) \Rightarrow (18). Совершенно аналогичными рассуждениями устанавливается (18) \Rightarrow (17). Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает (см. также [1, с. 298]) важное следствие.

Следствие 1. Если пара $(\Phi^+(z), F^+(z))$ аналитических в круге T^+ функций образует решение однородной задачи \mathbf{GK}_3^0 , то и пары вида

$$(F^+(z), \Phi^+(z)), \quad \left(\frac{F^+(z) + \Phi^+(z)}{2}, \frac{F^+(z) + \Phi^+(z)}{2} \right), \quad \left(\frac{F^+(z) - \Phi^+(z)}{2i}, \frac{F^+(z) - \Phi^+(z)}{2i} \right)$$

также образуют решения этой задачи.

На основании леммы 1 и следствия 1 Г.С. Литвинчуку [3, с. 300] удалось установить следующее важное утверждение.

Лемма 2. При выполнении условий (8), (9) и $B(t) \neq 0$ общее решение однородной краевой задачи \mathbf{K}_3^0 содержит в два раза меньше произвольных действительных постоянных, чем общее решение однородной вспомогательной задачи \mathbf{GK}_3^0 . Фундаментальные системы решений однородных задач \mathbf{K}_3^0 и \mathbf{GK}_3^0 всегда можно выбрать одинаковыми; тогда общее решение задачи \mathbf{K}_3^0 или \mathbf{GK}_3^0 выражается формулой

$$(F^+(z), \Phi^+(z)) = \sum_{k=1}^l (c_k F_k^+(z), \bar{c}_k F_k^+(z)), \quad (19)$$

где c_k ($k=1, 2, \dots, l$) - соответственно действительные или комплексные произвольные постоянные.

Точно так же, как лемма 1, устанавливается лемма 3.

Лемма 3. Если для коэффициентов $A(t), B(t), h(t)$ выполняются условия (8) – (10) и хотя бы одно из неравенств (14) или (15), то для любых комплексных функций $F^+(t)$ и $\Phi^+(t)$, определенных на L , и любого $\alpha(t)$, удовлетворяющего условию (2), равенства

$$\Phi^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)} + h(t), \quad t \in L, \quad (20)$$

и

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)\Phi^+(t) + B(t)\overline{\Phi^+(t)} + h(t), \quad t \in L, \quad (21)$$

равносильны, т.е. (20) \Leftrightarrow (21).

Из леммы 3 вытекает полезное в дальнейшем следствие.

Следствие 2. Если пара $(\Phi^+(z), F^+(z))$ аналитических в круге T^+ функций образует решение неоднородной задачи \mathbf{GK}_3 , то и пара вида $(F^+(z), \Phi^+(z))$ также образует решения этой задачи.

Общая идея предлагаемого ниже метода решения задачи \mathbf{K}_3 состоит в следующем. Сначала строится интегральное уравнение типа Фредгольма («первая интегральная ловушка»), позволяющее среди всех аналитических функций класса $A(T^+) \cap H(L)$ выделить («выловить») те, которые являются решениями вспомогательной задачи \mathbf{GK}_3 . Затем строится второе интегральное уравнение типа Фредгольма («вторая интегральная ловушка»), позволяющее выделить («выловить») среди решений первого интегрального уравнения лишь те, которые являются граничными значениями решений исходной задачи \mathbf{K}_3 .

Переходим теперь к построению основного алгоритма решения задачи \mathbf{K}_3 в рассматриваемом случае.

Так как $A(t) \neq 0$ и $B(t) \neq 0$ на L , то краевое условие (16) задачи \mathbf{GK}_3 можно переписать в виде

$$F^+(t) = G(t)\overline{F^+(t)} + G_1(t)\Phi^+[\alpha(t)] + h_1(t), \quad (22)$$

где

$$G(t) = -\frac{B(t)}{A(t)}, \quad G_1(t) = \frac{1}{A(t)}, \quad h_1(t) = -\frac{h(t)}{A(t)}. \quad (23)$$

Предположим, что задача \mathbf{GK}_3 разрешима и пара аналитических функций $(F^+(z), \Phi^+(z))$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ образует некоторое ее решение. Далее выясним, каким образом можно восстановить значения аналитической в круге T^+ функции $F^+(z)$, если известны граничные значения функции $\Phi^+(z)$. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную аналитическую в области T^- функцию

$$F^-(z) = \overline{F^+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad z \in T^-, \quad (24)$$

граничные значения которой во всех точках окружности $L = \{t: |t|=1\}$ удовлетворяют условию «симметрии» (см., например, [5, с. 97]):

$$F^-(t) = \overline{F^+(t)}, \quad t \in L. \quad (25)$$

С учетом (25) краевое условие (22) можно переписать так:

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \quad (26)$$

где

$$g(t) = G_1(t)\Phi^+[\alpha(t)] + h_1(t). \quad (27)$$

Очевидно, что для любой функции $\Phi^+(z)$ из $A(T^+) \cap H(L)$ функция $g(t) = G_1(t)\Phi^+[\alpha(t)] + h_1(t)$ будет принадлежать классу Гельдера $H(L)$. Следовательно, если временно предположим, что $g(t)$ - известная функция, то равенство (26) представляет собой обычную скалярную задачу Римана («задачу сопряжения») относительно кусочно аналитической функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ (см., например, [5, с. 106]).

Пусть $\chi = \text{Ind}G(t) = \chi_2 - \chi_1$, где $\chi_1 = \text{Ind}A(t)$ и $\chi_2 = \text{Ind}B(t)$. Тогда, как известно (см., например, [5, с. 111]), при $\chi \geq 0$ (т.е. $\chi_2 \geq \chi_1$) задача Римана (26) безусловно разрешима и ее общее решение задается формулами:

$$F^+(z) = \frac{X^+(z)}{2\pi i} \int_L \frac{G_1(\tau)\Phi^+[\alpha(\tau)] + h_1(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X^+(z)P_\chi(z), \quad z \in T^+, \quad (28)$$

$$F^-(z) = \frac{X^-(z)}{2\pi i} \int_L \frac{G_1(\tau)\Phi^+[\alpha(\tau)] + h_1(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X^-(z)P_\chi(z), \quad z \in T^-, \quad (29)$$

где $X^\pm(z)$ – канонические функции задачи Римана (26), а $P_\chi(z) = \sum_{k=0}^{\chi} C_k z^k$ – произвольный многочлен степени не выше χ .

Если же $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$, то при выполнении $-\chi - 1$ условий вида

$$\int_L \frac{G_1(t)\Phi^+[\alpha(t)]}{X^+(t)} t^{k-1} dt = - \int_L \frac{h_1(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2, \dots, -\chi - 1, \quad (30)$$

единственное решение задачи Римана (26) задается формулами (28) и (29), где нужно положить $P_\chi(z) \equiv 0$.

Из формул (28) и (30), с учетом леммы 1, вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. Пусть для коэффициентов $A(t), B(t), h(t)$ выполняются условия (8) – (10) и хотя бы одно из неравенств (14) или (15). Тогда в случае $\chi = \text{Ind}G(t) \geq 0$ для любого решения $(F^+(z), \Phi^+(z))$ задачи \mathbf{GK}_3 значения аналитической функции $F^+(z)$, $z \in T^+$, выражаются через граничные значения $\Phi^+[\alpha(t)]$ функции $\Phi^+(z)$ по формуле (28). Если же $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$, то для любого решения $(F^+(z), \Phi^+(z))$ задачи \mathbf{GK}_3 значения аналитической функции $F^+(z)$, $z \in T^+$, выражаются через граничные значения $\Phi^+[\alpha(t)]$ функции $\Phi^+(z)$ по формуле (28), где нужно положить $P_\chi(z) \equiv 0$, причем функция $\Phi^+[\alpha(t)]$ должна при этом удовлетворять $-\chi - 1$ условиям вида (30).

Поскольку $\alpha(t)$ - прямой сдвиг контура L , причем $\alpha'(t) \in H(L)$, то для любой функции $\Phi^+(z) \in A(T^+) \cap H(L)$ справедливы равенства (см., например, [3, с. 40]):

$$\frac{1}{2}\Phi^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad \frac{1}{2}\Phi^+[\alpha(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+[\alpha(\tau)] \alpha'(\tau) d\tau}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}. \quad (31)$$

Теперь, с учетом равенств (31) и формул Сохоцкого (см., например, [5, с. 38]), из формул (28) и (29) находим предельные значения $F^+(z)$ и $F^-(z)$ при $z \rightarrow t \in L$:

$$F^+(t) = \frac{1}{A(t)} \varphi(t) + \int_L K^+(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau + q^+(t), \quad t \in L, \quad (32)$$

$$F^-(t) = \int_L K^-(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau + q^-(t), \quad t \in L, \quad (33)$$

где $\varphi(t) = \Phi^+[\alpha(t)]$, $K^+(t, \tau) = X^+(t)K(t, \tau)$, $K^-(t, \tau) = X^-(t)K(t, \tau)$,

$$K(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{A(\tau)X^+(\tau)} \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{A(t)X^+(t)} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right), \quad (34)$$

$$q^+(t) = \frac{1}{2} h_1(t) + \frac{X^+(t)}{2\pi i} \int_L \frac{h_1(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + X^+(t) P_\chi(t), \quad (35)$$

$$q^-(t) = -\frac{1}{2} \frac{X^-(t)}{X^+(t)} h_1(t) + \frac{X^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{h_1(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + X^-(t) P_\chi(t), \quad (36)$$

причем в формулах (35) – (36) в случае $\chi < 0$ нужно положить $P_\chi(t) \equiv 0$.

Нетрудно проверить (см. [7; [8]) , что при сделанных в условии задачи \mathbf{K}_3 предположениях относительно функции сдвига $\alpha(t)$ и коэффициентов $A(t), B(t), h(t)$ краевого условия (1) ядра $K^+(t, \tau)$ и $K^-(t, \tau)$

будут фредгольмовыми, т.е. $K^+(t, \tau), K^-(t, \tau) \in H_*(L \times L)$, а функции $q^+(t), q^-(t) \in H(L)$.

Далее среди функций $F^+(t)$ и $H^-(L)$, задаваемых формулами (32) и (33), «отбираем» те, которые удовлетворяют условию «симметрии» (25). В силу формул (32) и (33) равенство (25) принимает вид следующего интегрального уравнения типа Фредгольма относительно функции $\varphi(t)$:

$$(N\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int_L n_1(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau + \int_L \overline{n_2(t, \tau)\varphi(\tau)}d\tau = q(t), \quad (37)$$

где $q(t) = A(t)[\overline{q^-(t)} - q^+(t)]$, $n_1(t, \tau) = A(t)K^+(t, \tau)$, $n_2(t, \tau) = -\overline{A(t)K^+(t, \tau)}$.

Вывод уравнения (37) (с учетом следствия 2) является одновременно доказательством следующего утверждения.

Лемма 5. Если $(F^+(z), \Phi^+(z))$ - решение вспомогательной задачи \mathbf{GK}_3 , то граничные значения $\Phi^+[\alpha(t)]$ и $F^+[\alpha(t)]$ функций $F^+(z)$ и $\Phi^+(z)$ соответственно представляют собой решения интегрального уравнения типа Фредгольма (37).

Замечание 1. Здесь важно отметить, что теория разрешимости интегральных уравнений вида (37) хорошо известна (см., например, [6, с. 364]).

Введем в рассмотрение однородное интегральное уравнение, союзное с уравнением (37) (см. также [6, с. 365]):

$$(N'\mu)(t) \equiv \mu(t) + \int_L n_1(\tau, t)\mu(\tau)d\tau + \int_L \overline{n_2(\tau, t)\mu(\tau)}d\tau = 0. \quad (38)$$

Как известно (см., [6, с. 370]), для разрешимости неоднородного интегрального уравнения (37) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\operatorname{Re} \int_L q(t)\mu_j(t)dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (39)$$

где $\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_m(t)$ – полная система линейно независимых (над полем \mathbf{R}) решений однородного уравнения (38).

Замечание 2. Отметим, что если $\chi \geq 0$, то некоторые из условий разрешимости (39) можно удовлетворить за счет определенного выбора значений произвольных постоянных, входящих в выражение $q(t)$.

Предположим, что интегральное уравнение (37) разрешимо (т.е. выполняются условия (39)) и уже найдено его общее решение (см., например, [6, с. 372]):

$$\varphi(t) = q(t) + \int_L \gamma_1(t, \tau)q(\tau)d\tau + \int_L \overline{\gamma_2(t, \tau)q(\tau)}d\tau + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_{k0}(t), \quad (40)$$

где $\gamma_1(t, \tau)$ и $\gamma_2(t, \tau)$ - обобщенные резольвенты уравнения (37), а $\sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_{k0}(t)$ - общее решение соответствующего однородного уравнения $(N\varphi)(t) = 0$ (т.е. здесь $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ - произвольные действительные постоянные).

Пусть $\hat{\varphi}_j(t) = \hat{\Phi}_j^+[\alpha(t)]$ ($j = 1, 2, \dots, n$), где $n \leq m$, - те из функций вида (40), для которых $\hat{\varphi}_j[\alpha(t)] = \hat{\Phi}_j^+(t) \in H^+(L)$, т.е. $\hat{\Phi}_j^+(t)$ - граничные значения аналитических функций класса $A(T^+) \cap H(L)$. Тогда в силу леммы 4 пары $(\hat{F}_j^+(z), \hat{\Phi}_j^+(z))$, где

$$\hat{F}_j^+(z) = \frac{X^+(z)}{2\pi i} \int_L \frac{G_1(\tau) \hat{\varphi}_j(\tau) + h_1(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X^+(z) P_\chi(z), \quad z \in T^+, \quad (41)$$

$$\hat{\Phi}_j^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\hat{\varphi}_j[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad z \in T^+, \quad (42)$$

образуют решения вспомогательной задачи \mathbf{GK}_3 . При этом в случае $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$ в формуле (41) нужно положить $P_\chi(z) \equiv 0$, причем функция $\hat{\varphi}(t) = \hat{\Phi}^+[\alpha(t)]$ должна удовлетворять еще и $-\chi - 1$ условиям вида (30).

Предположим теперь, что $(\tilde{F}^+(z), \tilde{\Phi}^+(z))$ - общее решение вспомогательной краевой задачи \mathbf{GK}_3 . Для того чтобы выделить («выловить») среди решений $(\tilde{F}^+(z), \tilde{\Phi}^+(z))$ задачи \mathbf{GK}_3 функции $F^+(z)$, являющиеся решениями исходной задачи \mathbf{K}_3 , нужно потребовать, чтобы $\tilde{F}^+(z) \equiv \tilde{\Phi}^+(z)$, $z \in T^+$, или $\tilde{F}^+(t) = \tilde{\Phi}^+(t) = \tilde{\varphi}[\alpha(t)]$, $t \in L$. Но в силу (32) последнее равенство равносильно тому, что функции вида $\tilde{F}^+(t) = \tilde{\varphi}[\alpha(t)]$ должны быть решениями интегрального уравнения

$$\tilde{\varphi}[\alpha(t)] = \frac{1}{A(t)} \tilde{\varphi}(t) + \int_L K^+(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau + q^+(t), \quad t \in L. \quad (43)$$

С учетом (2), (8) и $B(t) \neq 0$ уравнение (43) легко приводится к следующему равносильному ему уравнению

$$(M\varphi)(t) \equiv \tilde{\varphi}(t) + \int_L M(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau = \omega(t), \quad t \in L, \quad (44)$$

где

$$M(t, \tau) = \frac{A(t)}{B(t)B[\alpha(t)]} \{K^+(t, \tau) + A[\alpha(t)]K^+[\alpha(t), \tau]\},$$

$$\omega(t) = -\frac{A(t)}{B(t)B[\alpha(t)]} \{q^+(t) + A[\alpha(t)]q^+[\alpha(t)]\}.$$

Действительно, перепишем сначала (43) в виде

$$A(t)\tilde{\varphi}[\alpha(t)] = \tilde{\varphi}(t) + \int_L A(t)K^+(t, \tau)\tilde{\varphi}(\tau)d\tau + A(t)q^+(t). \quad (45)$$

С другой стороны, в силу (2) из уравнения (45) будем иметь:

$$-\tilde{\varphi}[\alpha(t)] = -A[\alpha(t)]\tilde{\varphi}(t) + \int_L A[\alpha(t)]K^+[\alpha(t), \tau]\tilde{\varphi}(\tau)d\tau + A[\alpha(t)]q^+[\alpha(t)]. \quad (46)$$

Наконец, умножив обе части (46) на $A(t)$ и почленно складывая полученное уравнение с уравнением (45), в силу тождества (8) получим уравнение (44).

Вывод уравнения (44) является одновременно доказательством следующего утверждения.

Лемма 6. Если функция $F^+(z)$ - решение задачи \mathbf{K}_3 , то ее граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $t \in L$, представляют собой решение интегрального уравнения Фредгольма (43) (или, что то же самое, (44)).

На основании лемм 5 и 6 нетрудно установить следующее важное утверждение.

Теорема 1. Если $\chi = \text{Ind}G(t) \geq 0$, то для того чтобы функция $F^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ была решением краевой задачи \mathbf{K}_3 , необходимо и достаточно, чтобы ее граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $t \in L$, удовлетворяли системе интегральных уравнений типа Фредгольма, составленной из (37) и (44), т.е. системе

$$\begin{cases} (N\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int_L n_1(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau + \int_L \overline{n_2(t, \tau)\varphi(\tau)}d\tau = q(t), \\ (M\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int_L M(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau = \omega(t). \end{cases} \quad (47)$$

Если же $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$, то для того чтобы функция $F^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ была решением краевой задачи \mathbf{K}_3 , необходимо и достаточно, чтобы ее граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $t \in L$, удовлетворяли системе интегральных уравнений (47), где нужно положить $P_\chi(t) \equiv 0$, и, кроме того, функция $F^+[\alpha(t)] = \varphi(t)$ должна удовлетворять $-\chi - 1$ условиям вида

$$\int_L \frac{G_1(t)\varphi(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = - \int_L \frac{h_1(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2, \dots, -\chi - 1. \quad (48)$$

Доказательство. Необходимость вытекает из утверждений лемм 5 и 6. Установим далее достаточность.

Пусть $\chi = \text{Ind}G(t) \geq 0$, и предположим, что граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $t \in L$, некоторой функции $F^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$

удовлетворяют системе интегральных уравнений (47). Покажем, что тогда $F^+(z)$ - решение задачи \mathbf{K}_3 .

Действительно, поскольку второе уравнение из системы (47) равносильно уравнению (43), то будем иметь:

$$F^+(t) = \frac{1}{A(t)} F^+[\alpha(t)] + \int_L K^+(t, \tau) F^+[\alpha(\tau)] d\tau + q^+(t), \quad t \in L, \quad (49)$$

Но тождество (49), в силу соотношений (см., например, [3, с. 40])

$$\frac{1}{2} F^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F^+(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad \frac{1}{2} F^+[\alpha(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F^+[\alpha(\tau)] \alpha'(\tau) d\tau}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}, \quad t \in L \quad (50)$$

и формулы (28), где в правой части вместо $\Phi^+[\alpha(t)]$ положено $F^+[\alpha(t)]$, равносильно следующему:

$$\frac{F^+(t)}{X^+(t)} = \frac{1}{2} \frac{F^+[\alpha(t)]}{A(t)X^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F^+[\alpha(\tau)]}{A(\tau)X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{q^+(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L. \quad (51)$$

С другой стороны, так как функция $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$ удовлетворяет первому интегральному уравнению из системы (47), то это равносильно тому, что для аналитической функции $F^-(z)$ класса $A(T^-) \cap H(L)$, задаваемой формулой

$$F^-(z) = \frac{X^-(z)}{2\pi i} \int_L \frac{G_1(\tau) F^+[\alpha(\tau)] + h_1(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X^-(z) P_\chi(z), \quad z \in T^-, \quad (52)$$

справедливо равенство (25). Но в силу формул Сохоцкого (см., например, [5, с. 38]) из (52) имеем:

$$\frac{F^-(t)}{X^-(t)} = -\frac{1}{2} \frac{F^+[\alpha(t)]}{A(t)X^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F^+[\alpha(\tau)]}{A(\tau)X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{q^-(t)}{X^-(t)}, \quad t \in L. \quad (53)$$

Вычитая из (51) равенство (53), с учетом формул (35) и (36), получаем

$$\frac{F^+(t)}{X^+(t)} - \frac{F^-(t)}{X^-(t)} = \frac{F^+[\alpha(t)]}{A(t)X^+(t)} + \frac{h_1(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L. \quad (54)$$

Наконец, с учетом равенства (25) и $G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$, умножив обе части равенства (54) на $X^+(t)$, будем иметь:

$$F^+(t) = \overline{G(t)F^+(t)} + G_1(t)F^+[\alpha(t)] + h_1(t), \quad t \in L. \quad (55)$$

Но последнее равенство означает, что функция $F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F^+(t)}{t - z} d\tau$, $z \in T^+$, является решением задачи \mathbf{K}_3 .

Пусть теперь $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$, и предположим, что граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $t \in L$, некоторой функции $F^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (47) и

$-\chi - 1$ условиям вида (48). Тогда, рассуждая точно так же, как и в предыдущем случае, можно убедиться, что $F^+(z)$ удовлетворяет краевому условию (55), т.е. $F^+(z)$ - решение задачи \mathbf{K}_3 . Теорема полностью доказана.

Итак, для решения задачи \mathbf{K}_3 в рассматриваемом случае можно использовать следующий алгоритм.

1. Находим индекс $\chi = \text{Ind}G(t)$, канонические функции $X^+(z)$, $X^-(z)$ задачи Римана (26) и по формулам (34) - (36) функции $K^+(t, \tau)$, $K^-(t, \tau)$, $q^+(t)$, $q^-(t)$. Затем переходим к пункту 2.

2. Составляем интегральное уравнение типа Фредгольма (37). Решая его (в случае его разрешимости), находим все его решения $\varphi(t)$ и переходим к пункту 3. Если же интегральное уравнение (37) неразрешимо, то в силу леммы 5 неразрешима и задача \mathbf{K}_3 .

3. Если $\chi = \text{Ind}G(t) \geq 0$, то среди решений $\varphi(t)$ интегрального уравнения (37) выбираем только те $\tilde{\varphi}(t)$, которые удовлетворяют и уравнению (44) (т.е. находим решения системы уравнений (47)), а затем переходим к пункту 4. Если же $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$, то сначала среди решений $\varphi(t)$ интегрального уравнения (37) выбираем только те, для которых выполняются условия (30), а затем из выбранных таким образом решений интегрального уравнения (37) отбираем те $\tilde{\varphi}(t)$, которые являются также решениями интегрального уравнения (44) (т.е. являются решениями системы уравнений (47)), и переходим к пункту 4. В случае, когда ни одно решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения (37) не удовлетворяет уравнению (44) (т.е. когда система (47) неразрешима), задача \mathbf{K}_3 в силу леммы 6 также неразрешима.

4. Находим общее решение искомой задачи \mathbf{K}_3 по формуле

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{\varphi}(\tau)}{t-z} d\tau, \quad z \in T^+.$$

Таким образом, в данном случае получили следующий основной результат.

Теорема 2. Пусть $\alpha(t)$ - прямой сдвиг контура L , удовлетворяющий условию (2), всюду на этом контуре выполняются условия (8) - (10) и одно из неравенств (14) или (15). Тогда решение задачи \mathbf{K}_3 сводится к решению системы интегральных уравнений типа Фредгольма (47). При этом если $\chi \geq 0$, то для разрешимости задачи \mathbf{K}_3 необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система интегральных уравнений (47); если же $\chi < 0$, то для разрешимости задачи \mathbf{K}_3 необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система

интегральных уравнений (47) и для решений этой системы выполнялись $\chi-1$ условий вида (48).

2.3. О решении невырожденной задачи K_3 методом интегральных «ловушек» в исключительном случае, т.е. когда $B[\alpha(t)] \cdot \overline{B(t)} - 1$ обращается в нуль в отдельных точках L . В силу условия (8) в тех точках $t_k \in L$, где $B[\alpha(t_k)] \cdot \overline{B(t_k)} - 1 = 0$, будем иметь $A(t_k) = 0$. Но поскольку $B(t) \neq 0$, то в данном случае во всех точках окружности L будет иметь неравенство вида

$$|B(t)| > |A(t)|. \quad (56)$$

В дальнейшем предположим, что в краевом условии (1) функция $A(t)$ имеет вид:

$$A(t) = A_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j}, \quad t, \beta_j \in L, \quad (57)$$

где $A_1(t) \in H(L)$ и $A_1(t) \neq 0$ на L ; β_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) - некоторые точки на L , которые будем называть нулями функции $A(t)$ на L , а ρ_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) - фиксированные натуральные числа.

Далее построим конструктивный алгоритм решения краевой задачи K_3 , предположив, что в краевом условии (1) коэффициенты $A(t), B(t), h(t)$ удовлетворяют условиям (8) - (10), причем $B(t) \neq 0$, а коэффициент $A(t)$ имеет вид (57). Кроме того, будем предполагать, что $\alpha(t), A_1(t), B(t), h(t) \in H^{(s)}(L)$ (т.е. $\alpha(t), A_1(t), B(t), h(t)$ удовлетворяют на L условию Гельдера вместе со своими производными до порядка s включительно), где $s = \max_j \{\rho_j\}$.

Сначала, переходя к комплексно-сопряженным значениям, перепишем краевое условие (1) задачи K_3 в виде

$$\overline{F^+[\alpha(t)]} = \overline{A(t)} \overline{F^+(t)} + \overline{B(t)} \overline{F^+(t)} + \overline{h(t)}.$$

Но поскольку $B(t) \neq 0$, то последнее равенство можно переписать так:

$$F^+(t) = G_2(t) \overline{F^+(t)} + G_3(t) \overline{F^+[\alpha(t)]} + h_2(t), \quad (58)$$

где

$$G_2(t) = -\frac{\overline{A(t)}}{B(t)}, \quad G_3(t) = \frac{1}{B(t)}, \quad h_2(t) = -\frac{\overline{h(t)}}{B(t)}. \quad (59)$$

Замечание 3. Так как для точек единичной окружности L выполняется соотношение $\bar{t} = \frac{1}{t}$, то из (57) имеем:

$$\overline{A(t)} = \overline{A_1(t)} \cdot \prod_{j=1}^{\nu} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\beta_j}\right)^{\rho_j} = \frac{(-1)^{\rho} \overline{A_1(t)}}{\beta^{\rho} t^{\rho}} \cdot \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j}, \quad (60)$$

где $\rho = \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j$, $\beta = \prod_{j=1}^{\nu} (\beta_j)^{\rho_j}$. Из равенств (57) и (60) видно, что функции $A(t)$ и $\overline{A(t)}$ имеют на L одни и те же нули (с одинаковыми кратностями).

Введем снова в рассмотрение *вспомогательную задачу* \mathbf{GK}_3 для двух неизвестных аналитических функций $F^+(z)$ и $\Phi^+(z)$. Перепишем ее краевое условие (16) в данном случае в виде

$$F^+(t) = G_2(t)\overline{F^+(t)} + G_3(t)\overline{\Phi^+[\alpha(t)]} + h_2(t), \quad (61)$$

где $G_2(t)$, $G_3(t)$, $h_2(t)$ определяются по формулам (59).

Введем в рассмотрение аналитическую в области T^- функцию вида (24). Тогда с учетом (25) и (57) краевое условие (61) можно записать так:

$$F^+(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \cdot G^*(t)F^-(t) + g_1(t), \quad (62)$$

где

$$G^*(t) = \frac{(-1)^{\rho+1} \overline{A_1(t)}}{\beta \cdot t^{\rho} \overline{B(t)}}, \quad g_1(t) = G_3(t)\overline{\varphi(t)} + h_2(t), \quad (63)$$

$$\varphi(t) = \Phi^+[\alpha(t)]. \quad (64)$$

Предположим временно, что в (62) $g_1(t)$ - известная функция класса $H(L)$. Тогда равенство (62) представляет собой краевое условие скалярной задачи Римана относительно кусочно аналитической функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ в так называемом «*исключительном случае*» (см., например, [5, с. 133]).

Пусть $\chi^* = \text{Ind}G^*(t) = \chi_2 - \chi_1^* - \rho$, где $\chi_1^* = \text{Ind}A_1(t)$ и $\chi_2 = \text{Ind}B(t)$. Если $\chi^* \geq 0$ (т.е. $\chi_2 \geq \chi_1^* + \rho$), то, как известно (см., например, [5, с. 136]), равенство (62) имеет место для тех и только тех пар аналитических функций $(F^+(z), F^-(z))$, которые определяются следующей системой равенств:

$$\begin{cases} F^+(z) = Y^+(z) + X_1^+(z) \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \cdot P_{\chi^*}^*(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = Y^-(z) + X_1^-(z) P_{\chi^*}^*(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (65)$$

где $X_1^{\pm}(z)$ - канонические функции обычной однородной задачи Римана с коэффициентом $G^*(t)$, $P_{\chi^*}^*(z)$ - произвольный многочлен степени χ^* с комплексными коэффициентами, а функции $Y^+(z)$ и $Y^-(z)$ определяются по формулам:

$$Y^+(z) = X_1^+(z)[\Psi^+(z) - Q_{\rho-1}(z)], \quad z \in T^+, \quad (66)$$

$$Y^-(z) = \frac{X_1^-(z) \cdot [\Psi^-(z) - Q_{\rho-1}(z)]}{\prod_{j=1}^{\nu} (z - \beta_j)^{\rho_j}}, \quad z \in T^-, \quad (67)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}; \quad (68)$$

здесь $Q_{\rho-1}(z) = C_{\rho-1}z^{\rho-1} + C_{\rho-2}z^{\rho-2} + \dots + C_1z + C_0$ - определенный многочлен степени $\rho-1$, для которого выполняются равенства:

$$Q_{\rho-1}^{(m)}(\beta_j) = \Psi^{-(m)}(\beta_j), \quad (m=0, 1, \dots, \rho_j-1; \quad j=1, 2, \dots, \nu). \quad (69)$$

Пусть теперь $\chi^* < 0$ (т.е. $\chi_2 < \chi_1^* + p$) и выполняются следующие $-\chi^* - 1$ условий разрешимости задачи Римана (62):

$$C_{\rho-1} = C_{\rho-2} = \dots = C_{\rho+\chi^*+1} = 0, \quad (70)$$

где C_k - коэффициенты разложения

$$\Psi^-(z) - Q_{\rho-1}(z) = -C_{\rho-1}z^{\rho-1} - C_{\rho-2}z^{\rho-2} - \dots - C_0 + C_{-1}\frac{1}{z} + C_{-2}\frac{1}{z^2} + \dots;$$

здесь приняты обозначения: $C_{-k} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau) \cdot \tau^{k-1}}{X_1^+(\tau)} d\tau \quad (k=1, 2, \dots)$. При

выполнении условий (70) лишь единственная пара функций $F^+(z) = Y^+(z)$ и $F^-(z) = Y^-(z)$ удовлетворяет краевому условию (62), т.е. единственное решение задачи Римана (62) также задается формулой (65), где нужно положить $P_{\chi^*}(z) \equiv 0$.

Далее находим предельные значения при $z \rightarrow t \in L$ функции $\Psi(z)$, задаваемой по формуле (68). Так как для точек окружности L выполняется соотношение $\bar{t} = \frac{1}{t}$, то, с учетом формул Сохоцкого, обозначений (63) и равенств (31), будем иметь:

$$\Psi^+(t) = \overline{\left(\frac{1}{2} \frac{\varphi(t)}{B(t)X_1^+(t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{B(\tau)X_1^+(\tau)} \left(\frac{1}{\tau-t} - \frac{1}{\tau} \right) d\tau \right)} + \quad (71)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \frac{h_2(t)}{X_1^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h_2(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-t} \right) = \int_L \overline{K_1(t, \tau) \varphi(\tau)} d\tau + W_1^+(t),$$

$$\Psi^-(t) = \overline{\left(-\frac{1}{2} \frac{\varphi(t)}{B(t)X_1^+(t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{B(\tau)X_1^+(\tau)} \left(\frac{1}{\tau-t} - \frac{1}{\tau} \right) d\tau \right)} + \quad (72)$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} \frac{h_2(t)}{X_1^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h_2(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-t} \right) = -\frac{\overline{\varphi(t)}}{B(t)X_1^+(t)} + \int_L \overline{K_1(t, \tau) \varphi(\tau)} d\tau + W_1^-(t),$$

где

$$K_1(t, \tau) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{B(\tau)X_1^+(\tau)} \frac{1}{\tau-t} - \frac{1}{B(t)X_1^+(t)} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{B(\tau)X_1^+(\tau)} \frac{1}{\tau}, \quad (73)$$

$$W_1^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \frac{h_2(t)}{X_1^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h_2(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Нетрудно проверить, что если $\alpha(t), A_1(t), B(t) \in H^{(s)}(L)$, то ядро $K_1(t, \tau) \in H_*^{(s)}(L \times L)$. Действительно, из (73) имеем:

$$K_1(t, \tau) = -K_{11}(t, \tau) - K_{12}(t, \tau) + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{B(\tau)X_1^+(\tau)} \frac{1}{\tau}, \quad (74)$$

где

$$K_{11}(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{B(\tau)X_1^+(\tau)} - \frac{1}{B(t)X_1^+(t)} \right) \frac{1}{\tau - t},$$

$$K_{12}(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{B(t)X_1^+(t)} \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right).$$

Но известно (см., например, §7 монографии [6]), что если $\alpha(t), A_1(t), B(t) \in H^{(s)}(L)$, то ядра $K_{12}(t, \tau), K_{12}(t, \tau) \in H_*^{(s)}(L \times L)$. Тогда в силу (74) имеем: $K_1(t, \tau) \in H_*^{(s)}(L \times L)$.

Теперь найдем предельные значения при $z \rightarrow t \in L$ функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$, задаваемых по формулам (65). С учетом (71) и (72) из (65) получим

$$F^+(t) = X_1^+(t) \left(\int_L \overline{K_1(t, \tau) \varphi(\tau)} d\tau + W_1^+(t) - Q_{\rho-1}(t) \right) + X_1^+(t) \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \cdot P_{\chi^*}^+(t), \quad (75)$$

$$F^-(t) = \frac{X_1^-(t)}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j}} \left(-\frac{\overline{\varphi(t)}}{B(t)X_1^+(t)} + \int_L \overline{K_1(t, \tau) \varphi(\tau)} d\tau + W_1^-(t) - Q_{\rho-1}(t) \right) + X_1^-(t) P_{\chi^*}^-(t), \quad (76)$$

причем в формулах (75) и (76) в случае $\chi^* < 0$ нужно положить $P_{\chi^*}^\pm(t) \equiv 0$.

Наконец, потребовав от функций $F^+(t) \in H^+(L)$ и $F^-(t) \in H^-(L)$, задаваемых формулами (75) и (76), чтобы они удовлетворяли условию «симметрии» (25), получим следующее интегральное уравнение типа Фредгольма относительно функции $\varphi(t) = \Phi^+[\alpha(t)]$:

$$\frac{\overline{X_1^-(t)}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j}} \left(-\frac{\varphi(t)}{B(t)X_1^+(t)} + \int_L \overline{K_1(t, \tau) \varphi(\tau)} d\tau + \overline{W_1^-(t) - Q_{\rho-1}(t)} \right) + \overline{X_1^-(t) P_{\chi^*}^-(t)} =$$

$$= X_1^+(t) \left(\int_L \overline{K_1(t, \tau) \varphi(\tau)} d\tau + W_1^+(t) - Q_{\rho-1}(t) \right) + X_1^+(t) \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \cdot P_{\chi^*}^+(t)$$

или

$$(D\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int_L d_1(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau + \int_L \overline{d_2(t, \tau) \varphi(\tau)} d\tau = Q(t), \quad (77)$$

где

$$d_1(t, \tau) = -B(t) \overline{X_1^+(t) K_1(t, \tau)}, \quad d_2(t, \tau) = \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \overline{G^*(t) B(t) X_1^+(t) K_1(t, \tau)},$$

$$Q(t) = B(t) \overline{X_1^+(t)} \left(\overline{W_1^-(t)} - \overline{Q_{\rho-1}(t)} \right) + \overline{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \cdot P_{\chi^*}(t)} B(t) \overline{X_1^+(t)} - \quad (78)$$

$$- \overline{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} X_1^+(t) B(t) G^*(t) \left(W_1^+(t) - Q_{\rho-1}(t) \right) - X_1^+(t) \left| \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \right|^2 \cdot \overline{G^*(t) B(t) P_{\chi^*}(t)}}.$$

Замечание 4. Важно отметить, что в силу равенств (69) интегральное уравнение (77) будет уравнением типа Фредгольма.

В силу обозначения (64) и следствия 2 вывод уравнения (77) является одновременно доказательством следующего утверждения.

Лемма 7. Если $(F^+(z), \Phi^+(z))$ - решение вспомогательной задачи \mathbf{GK}_3 в исключительном случае, то граничные значения $\Phi^+[\alpha(t)]$ и $F^+[\alpha(t)]$ функций $F^+(z)$ и $\Phi^+(z)$ соответственно представляют собой решения интегрального уравнения типа Фредгольма (77).

Предположим, что $(\tilde{F}^+(z), \tilde{\Phi}^+(z))$ - общее решение вспомогательной краевой задачи \mathbf{GK}_3 в исключительном случае. Для того чтобы выделить («выловить») среди решений $(\tilde{F}^+(z), \tilde{\Phi}^+(z))$ задачи \mathbf{GK}_3 функции $F^+(z)$, являющиеся решениями исходной задачи \mathbf{K}_3 в исключительном случае, нужно потребовать, чтобы $\tilde{F}^+(z) \equiv \tilde{\Phi}^+(z)$, $z \in T^+$, или $\tilde{F}^+(t) = \tilde{\Phi}^+(t) = \tilde{\varphi}[\alpha(t)]$, $t \in L$. Но последнее равенство в силу (75), в свою очередь, равносильно тому, что функции вида $\tilde{F}^+(t) = \tilde{\varphi}[\alpha(t)]$, $t \in L$, должны быть решениями интегрального уравнения типа Фредгольма

$$(R\tilde{\varphi})(t) \equiv \tilde{\varphi}^+(t) + \int_L R(t, \tau) \tilde{\varphi}^+(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in L, \quad (79)$$

где

$$R(t, \tau) = \overline{X_1^+[\alpha(t)]} \cdot K_1[\alpha(t), \tau], \quad f(t) = X_1^+(t) \left(\overline{W_1^+(t)} - \overline{Q_{\rho-1}(t)} \right) + X_1^+(t) \overline{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{\rho_j} \cdot P_{\chi^*}(t)}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 8. Если функция $F^+(z)$ - решение задачи \mathbf{K}_3 в исключительном случае, то ее граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $t \in L$, представляют собой решение интегрального уравнения типа Фредгольма (79).

Далее, повторив рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2, можно установить следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\alpha(t)$ - прямой сдвиг контура L , удовлетворяющий условию (2), всюду на этом контуре выполняются условия (8) - (10), $B(t) \neq 0$ и $A(t)$ имеет вид (57). Тогда решение задачи \mathbf{K}_3

сводится к решению системы интегральных уравнений типа Фредгольма, составленной из (77) и (79), т.е. вида

$$\begin{cases} (D\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int_L d_1(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau + \int_L \overline{d_2(t, \tau) \varphi(\tau)} d\tau = Q(t), \\ (R\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int_L \overline{R(t, \tau) \varphi(\tau)} d\tau = f(t). \end{cases} \quad (80)$$

При этом если $\chi^* = \text{Ind}G^*(t) \geq 0$, то для разрешимости задачи K_3 необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система интегральных уравнений (80); если же $\chi^* = \text{Ind}G^*(t) < 0$, то для разрешимости задачи K_3 необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система интегральных уравнений (80) и для решений этой системы выполнялись $-\chi^* - 1$ условий вида (70).

Пример 1. Решить в классе $A(T^+) \cap H(L)$ следующую краевую задачу

$$F^+[\alpha(t)] = i\sqrt{2} \cdot \left(t - \frac{1}{t}\right) F^+(t) + \left(2 - \frac{1}{t^2}\right) \overline{F^+(t)} + \frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + i\sqrt{2} - t - i\sqrt{2} \cdot t^2, \quad t \in L, \quad (81)$$

где $L = \{t: |t|=1\}$, $\alpha(t) = -t$.

Решение. Переходя в (81) к комплексно-сопряженным значениям, а затем, разделив обе части полученного уравнения на $(2-t^2)$, будем иметь:

$$F^+(t) = \frac{i\sqrt{2}(1-t^2)}{t(2-t^2)} \overline{F^+(t)} + \frac{1}{2-t^2} \overline{F^+[\alpha(t)]} + t + \frac{1}{2-t^2} \left\{ i\sqrt{2} + \frac{1}{t} - \frac{i\sqrt{2}}{t^2} \right\}, \quad t \in L. \quad (82)$$

Далее, введя в рассмотрение вспомогательную аналитическую в области T^- функцию (24), краевое условие (82) можно переписать так:

$$F^+(t) = (t^2 - 1)G_1^*(t)F^-(t) + g_1(t), \quad t \in L, \quad (83)$$

где приняты обозначения:

$$G_1^*(t) = \frac{i\sqrt{2}}{t(t^2 - 2)}, \quad g_1(t) = -\frac{1}{t^2 - 2} \overline{F^+[\alpha(t)]} + t - \frac{1}{t^2 - 2} \left\{ i\sqrt{2} + \frac{1}{t} - \frac{i\sqrt{2}}{t^2} \right\}, \quad t \in L. \quad (84)$$

Так как $\chi = \text{Ind}G_1(t) = -1$, то, считая временно $\overline{F^+[\alpha(t)]}$ известной функцией и решая задачу Римана (83) методом Ф.Д. Гахова (см., например, [5; с. 136]), получим

$$F^+(z) = X^+(z)[\Psi^+(z) - Q_1(z)], \quad z \in T^+, \quad (85)$$

$$F^-(z) = X^-(z) \frac{\Psi^-(z) - Q_1(z)}{z^2 - 1}, \quad z \in T^-, \quad (86)$$

где $X^+(z) = \frac{i\sqrt{2}}{z^2 - 2}$, $z \in T^+$, $X^-(z) = z$, $z \in T^-$,

$$\Psi(z) = -\frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{F^+[\alpha(\tau)]}}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau(\tau^2 - 2)}{i\sqrt{2}(\tau - z)} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(1 + \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}\right) \frac{d\tau}{\tau - z}. \quad (87)$$

а $Q_1(z) = a_1 z + a_0$ - многочлен, удовлетворяющий следующим двум условиям:

$$\Psi^-(-1) = Q_1(-1) \quad \text{и} \quad \Psi^-(1) = Q_1(1). \quad (88)$$

Так как $F^+(t) \in H^+(L)$, то в силу $\alpha(t) = -t$ имеют место следующие соотношения (см., например, [5; с. 40]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F^+(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F^+(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \frac{1}{2} F^+[\alpha(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F^+[\alpha(\tau)]}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} d[\alpha(\tau)] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F^+[\alpha(\tau)]}{\tau - t} d\tau, \\ \frac{1}{2} \overline{F^+[\alpha(t)]} &= -\frac{t}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{F^+[\alpha(\tau)]}}{\tau(\tau - t)} d\tau, \quad t \in L. \end{aligned} \quad (89)$$

С учетом (89), согласно формулам Сохоцкого (см., например, [5; с. 40]), из (87) при $z \rightarrow t \in L$ получим

$$\Psi^+(t) = -\frac{1}{i\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F^+[\alpha(\tau)]}{\tau} d\tau \right\} + \frac{t(t^2 - 2)}{i\sqrt{2}} - 1, \quad t \in L, \quad (90)$$

$$\Psi^-(t) = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left\{ \overline{F^+[\alpha(t)]} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F^+[\alpha(\tau)]}{\tau} d\tau \right\} + \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}, \quad t \in L. \quad (91)$$

В силу (91) равенства (88) равносильны следующим двум равенствам:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{i2\sqrt{2}} \left\{ \overline{F^+[\alpha(1)]} - \overline{F^+[\alpha(-1)]} + 2 \right\}, \\ a_0 &= \frac{1}{i2\sqrt{2}} \left\{ \overline{F^+[\alpha(1)]} + \overline{F^+[\alpha(-1)]} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{F^+[\alpha(\tau)]}{\tau} d\tau - i2\sqrt{2} \right\}. \end{aligned} \quad (92)$$

Теперь, с учетом (89) - (92), находим граничные значения функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$, задаваемых по формулам (85) и (86):

$$\begin{aligned} F^+(t) &= \frac{i\sqrt{2}}{t^2 - 2} \left\{ \frac{t(t^2 - 2)}{i\sqrt{2}} - 1 \right\} - \\ &- \frac{1}{t^2 - 2} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \overline{F^+[\alpha(1)]} - \overline{F^+[\alpha(-1)]} + 2 \right\} \cdot t + \frac{1}{2} \left\{ \overline{F^+[\alpha(1)]} + \overline{F^+[\alpha(-1)]} - i2\sqrt{2} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (93)$$

$$F^-(t) = \frac{t}{t^2-1} \left\{ \frac{1}{i\sqrt{2}} \overline{F^+[\alpha(t)]} + \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right\} - \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{t}{t^2-1} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \overline{F^+[\alpha(1)]} - \overline{F^+[\alpha(-1)]} + 2 \right\} \cdot t + \frac{1}{2} \left\{ \overline{F^+[\alpha(1)]} + \overline{F^+[\alpha(-1)]} - i2\sqrt{2} \right\} \right\}. \quad (94)$$

Из (94), переходя к комплексно-сопряженным значениям, получим

$$\overline{F^-(t)} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{t}{t^2-1} F^+[\alpha(t)] + \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{t^3}{t^2-1} - \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{t}{t^2-1} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ F^+[\alpha(1)] - F^+[\alpha(-1)] + 2 \right\} \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \left\{ F^+[\alpha(1)] + F^+[\alpha(-1)] + i2\sqrt{2} \right\} \right\}. \quad (95)$$

В силу (93) и (95) нетрудно проверить, что система интегральных уравнений (80) в данном случае будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{aligned} F^+[\alpha(t)] &= -t - i\sqrt{2}t^2 + \frac{1}{2} \left\{ F^+[\alpha(1)] - F^+[\alpha(-1)] + 2 \right\} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \left\{ F^+[\alpha(1)] + F^+[\alpha(-1)] + i2\sqrt{2} \right\} - \\ &\quad - \frac{2(t^2-1)}{t(t^2-2)} \left\{ \frac{t(t^2-2)}{i\sqrt{2}} - \frac{1}{i2\sqrt{2}} \left\{ \overline{F^+[\alpha(1)]} - \overline{F^+[\alpha(-1)]} + 2 \right\} \cdot t - \frac{1}{i2\sqrt{2}} \left\{ \overline{F^+[\alpha(1)]} + \overline{F^+[\alpha(-1)]} \right\} \right\}, \\ F^+[\alpha(t)] &= -\frac{i\sqrt{2}}{t^2-2} \left\{ \frac{t(t^2-2)}{i\sqrt{2}} + 1 \right\} + \\ &\quad + \frac{i\sqrt{2}}{t^2-2} \left\{ \frac{1}{i2\sqrt{2}} \left\{ \overline{F^+[\alpha(1)]} - \overline{F^+[\alpha(-1)]} + 2 \right\} \cdot t - \frac{1}{i2\sqrt{2}} \left\{ \overline{F^+[\alpha(1)]} + \overline{F^+[\alpha(-1)]} - i2\sqrt{2} \right\} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (96)$$

Из первого уравнения системы (96) видно, что функция $\varphi(t) = F^+[\alpha(t)]$ будет граничным значением аналитической в T^+ функции тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\left\{ \begin{aligned} F^+[\alpha(1)] - F^+[\alpha(-1)] + 2 &= 0, \\ \overline{F^+[\alpha(1)]} + \overline{F^+[\alpha(-1)]} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (97)$$

Решая систему (97), получаем

$$F^+[\alpha(1)] = -1, \quad F^+[\alpha(-1)] = 1. \quad (98)$$

Наконец, подставив найденные по формулам (98) значения $F^+[\alpha(1)]$ и $F^+[\alpha(-1)]$ в правые части уравнений из системы (96), нетрудно убедиться, что единственным решением системы уравнений (96) является функция $F^+[\alpha(t)] = -t$ или $F^+(t) = t, t \in L$.

Таким образом, краевая задача (81) имеет единственное решение вида $F^+(z) = z$.

Литература

1. Зверович Э.И., Литвинчук Г.С. Об односторонних краевых задачах теории аналитических функций // ДАН СССР. – 1962. - Т.145, № 2. – С. 266-269.
2. Зверович Э.И., Литвинчук Г.С. Односторонние краевые задачи теории аналитических функций // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1964. - Т. 28, № 5. – С. 1003-1036.
3. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. - М.: Наука, 1977. – 448 с.
4. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 343 с.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
7. Расулов К.М. Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Известия СмолГУ. - 2008. №2. - С. 94-104.
8. Расулов К.М. О решении трехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Веснік Гродзенскага Дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка. – 2010. - № 3(102). – С. 31-37.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ СДВИГОВ ФУНКЦИИ, СТРЕМЯЩЕЙСЯ К НУЛЮ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

И.В. ТИХОНОВ

Московский педагогический государственный университет, г. Москва
e-mail: ivtikh@mail.ru

В докладе обсуждается связь между нелокальными по времени задачами для абстрактных дифференциальных уравнений [1; 2] и вопросом о линейной независимости сдвигов от непрерывной функции, стремящейся к нулю на бесконечности [3]. Показано, что вопрос «про сдвиги», относящийся, по сути, к гармоническому анализу, в одномерном случае допускает решение, основанное на общих теоремах единственности из теории нелокальных задач. Коротко напомним результаты [1], [2], придав им нужную форму.

Пусть E – комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и A – линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A) \subset E$, не

обязательно плотной в E . Рассмотрим на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$ следующую нелокальную задачу:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_a^b u(t) d\mu(t) = 0,$$

где $\mu(t)$ – заданная скалярная функция ограниченной вариации на $[a, b]$. Считаем, что $t = a$ и $t = b$ суть точки вариации меры $d\mu(t)$, т. е. интеграл Стильтьеса не допускает сужения на отрезок меньший, чем $[a, b]$. Свойства нелокальной задачи выражаются через *характеристическую функцию*:

$$L(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda t} d\mu(t), \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

Решения нелокальной задачи можно понимать в обобщенном смысле. Справедлив такой результат.

Теорема 1. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E . Пусть $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, причем $t = a$ и $t = b$ суть точки вариации меры $d\mu(t)$. Для того чтобы поставленная нелокальная задача имела на $[a, b]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ не являлся собственным значением оператора A .

Это утверждение носит универсальный характер и допускает множество трактовок в теории дифференциальных уравнений и в математической физике. Выделим случай, когда оператор A вообще не имеет собственных значений. Такая ситуация встречается на практике – ей отвечает, например, одномерный дифференциальный оператор

$$A = c_0 \frac{d^m}{dx^m} + c_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + c_{m-1} \frac{d}{dx} + c_m, \quad -\infty < x < \infty,$$

с постоянными коэффициентами $c_0, \dots, c_m \in \mathbf{C}$, $c_0 \neq 0$, рассматриваемый в пространстве $L^p(\mathbf{R})$ при $1 \leq p < \infty$ или в пространстве $C_0(\mathbf{R})$.

Теорема 2. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E , не имеющий собственных значений. Пусть $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, причем $t = a$ и $t = b$ суть точки вариации меры $d\mu(t)$. Тогда нелокальная задача имеет на $[a, b]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$.

В качестве легкого следствия теоремы 2 получаем такое утверждение.

Теорема 3. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E , не имеющий собственных значений. Пусть $u(t)$ – классическое или

обобщенное решение уравнения $du(t)/dt = Au(t)$ на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$, такое, что $\|u(t)\| > 0$ при всех $t \in [a, b]$. Тогда

$$\int_a^b u(t) d\mu(t) \neq 0$$

для любой функции $\mu(t)$ ограниченной вариации на $[a, b]$, отличной от тождественной константы. В частности, если $\{\tau_k\}$ – конечный или счетный набор различных точек на $[a, b]$, то

$$\sum_k \alpha_k u(\tau_k) \neq 0$$

при любых коэффициентах $\alpha_k \in \mathbf{C}$, таких, что $0 < \sum |\alpha_k| < \infty$. Тем самым множество элементов $\{u(t) : t \in [a, b]\}$, образующих данное решение $u(t)$, является линейно независимым в пространстве E .

В качестве примера рассмотрим оператор $A = -d/dx$, действующий в пространстве $E = C_0(\mathbf{R})$ непрерывных функций на оси, стремящихся к нулю на бесконечности. Тогда A не имеет собственных значений. Обобщенными решениями уравнения $du(t)/dt = Au(t)$ будут сдвиги $u = f(x-t)$, построенные по функциям $f \in C_0(\mathbf{R})$. Выберем $f \in C_0(\mathbf{R})$, отличную от тождественного нуля. По теореме 3 система сдвигов $\{f(x-\tau_k)\}$ с различными τ_k будет линейно независимой на \mathbf{R} . Более того, интеграл

$$\int_a^b f(x-t) d\mu(t),$$

взятый по любому отрезку $[a, b] \subset \mathbf{R}$, отличен от тождественного нуля (если $\mu(t)$ не обращается на $[a, b]$ в константу).

Проблема линейной независимости системы сдвигов $\{f(x-\tau_k)\}$ подробно разбирается в работе Е.А. Горина [3] (с отсылкой к одному вопросу Б.М. Гуревича). Там, кстати, показано, что в многомерном случае картина не столь проста: при $n \geq 2$ существуют функции $f \in C_0(\mathbf{R}^n)$, у которых три сдвига линейно независимы, а четыре могут быть уже линейно зависимыми. Техника, используемая в [3], характерна для гармонического анализа (обобщенные функции, свертки, преобразование Фурье, аналитические носители и т. п.). Наш подход, возможно, не позволяет охватить случай $f \in C_0(\mathbf{R}^n)$ при $n \geq 2$, ибо многомерные сдвиги «по всем направлениям» не порождаются одним оператором A . Зато в нашей теореме 3 содержится целый класс результатов, относящихся к решениям различных дифференциальных уравнений. Трудности, связанные с гармоническим анализом, запрятаны в доказательство теоремы 1; преобразование Фурье не используется, основной инструмент – теория целых функций. Некоторые относящиеся сюда подробности см. в [4].

Литература

5. Тихонов И.В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Известия РАН. Серия математическая. – 2003. - Т. 67, № 2. - С. 133–166.

6. Тихонов И.В. Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. М., 2008. - 283 с.

7. Горин Е.А. Линейная зависимость сдвигов убывающих функций // Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование. – М.: МПГУ, 2010. - С. 115–134.

8. Тихонов И.В. Простое доказательство теоремы единственности для общих негармонических рядов Фурье на отрезке вещественной оси // Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование. – М.: МПГУ, 2010. - С. 183–189.

МНОГОУРОВНЕВОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

О.В. ТИХОНОВА

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, г. Москва
e-mail: o_tikhonova@inbox.ru

Современный уровень развития вычислительной техники дает возможность создавать имитационные математические модели для систем любой сложности с максимальной степенью подробности моделирования каждого из элементов. Однако такой подход имеет существенные недостатки. Например, с ростом размерности задачи многократно возрастает объем модели и объем собственно вычислений. Это затрудняет применение модели на практике: при значительных объемах моделируемой информации вопрос ее интерпретации не столь очевиден, и оценка адекватности большой модели становится проблематичной.

Избежать указанных недостатков позволяет эффективный метод многоуровневого моделирования сложных систем. Сначала разрабатывается ряд сравнительно простых «компактных» моделей, на которых исследуются тонкости функционирования отдельных элементов сложной системы. Полученные на частных моделях данные на следующем этапе берутся в качестве исходных для статистических аналогов моделей элементов. Модели сложных систем состоят, таким образом, не из набора имитационных блоков, а из небольших по объему статистических моделей. В результате можно получить исчерпывающие данные о поведении сложной системы и эффективно использовать их в

последующей обработке. Можно также изучить влияние отдельных факторов на работу системы в целом.

Для системы противовоздушной обороны (ПВО) надводного корабля рассмотрим три уровня:

- уровень системы ПВО в целом. В качестве подсистем рассматриваются огневые средства, системы радиоэлектронного противодействия, корабельные радиолокационные станции (РЛС);

- уровень огневых средств. В качестве подсистем рассматриваются зенитные ракеты, радиолокационные средства обнаружения и сопровождения цели, система управления;

- уровень элементов огневых средств – элементы зенитных ракет, их системы управления и т. д. На подсистемы не разбивается.

В соответствии с иерархическими уровнями системы ПВО корабля рассмотрим иерархические уровни их математических моделей:

- уровень моделей отдельных элементов огневых средств и частных задач (нулевой уровень);

- уровень имитационных моделей огневых средств и РЛС (первый уровень);

- уровень модели системы ПВО в целом (второй уровень).

При моделировании работы системы в качестве структурных единиц рассматриваются подсистемы низшего уровня, взятые как единое целое с обобщенными показателями работоспособности и эффективности. Таким образом, получаем семейство математических моделей.

К нулевому уровню относятся имитационные модели частных задач – модель сопровождения цели РЛС, модель полета ракеты, модель алгоритмов управления для зенитных ракет различных типов.

На первом уровне находятся имитационные модели огневых средств, радиолокационных станций, средств радиоэлектронного противодействия, в которых имитируются все значимые физические процессы с максимальной возможной детализацией.

На втором уровне – модель системы ПВО в целом. В этой модели структурные единицы – огневые средства, РЛС и вспомогательные системы корабля - моделируются статистическими аналогами.

Иерархический подход позволяет избежать излишней громоздкости модели и, как следствие, дает возможность однозначно интерпретировать результаты моделирования. Компактные модели каждого уровня выявляют степень влияния разных факторов на конечный результат. Единый подход к созданию моделей всех уровней позволяет разработчикам сложной системы решать поставленные задачи в сжатые сроки.

Литература

1. Максимей И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988. - 232 с.

2. Солодовников В.В., Тумаркин В.И. Теория сложности и проектирование систем управления. – М.: Наука, 1990. - 168 с.

3. Тихонова О.В. Применение иерархического подхода к математическому моделированию контуров ПВО надводных кораблей // Радиолокационные системы. – 2008. № 1 (13), С. 73–79.

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О РАЗЛОЖЕНИИ НА ПРОСТЫЕ ДРОБИ ВЕЛИЧИНЫ, ОБРАТНОЙ К ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, г. Москва
e-mail: shervb@gmail.com

Разложение на простые дроби часто применяют при изучении мероморфных функций. Классические результаты Миттаг-Леффлера [1] имеют слишком общий характер и требуют дополнительных уточнений в разных специальных ситуациях. Особый подкласс мероморфных функций образуют выражения вида $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$, где $L(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа, имеющая лишь простые нули λ_n . Считая, что множество нулей бесконечно, обозначим его через $\Lambda(L) = (\lambda_n)$ с нумерацией $n \in \mathbb{N}$.

Важную роль в теории сыграла работа М.Г. Крейна [2], поставившая вопрос о разложении величины $1/L(\lambda)$ в ряд определенной структуры, составленный из простых дробей. При условии $0 \notin \Lambda(L)$ ряд Крейна фиксированного порядка $p \in \mathbb{Z}_+$ может быть записан в виде

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n) \lambda_n^p (\lambda - \lambda_n)},$$

где $P(\lambda)$ – некоторый полином. Вопрос о справедливости подобных разложений изучался в работах автора [3–5]. На расположение множества $\Lambda(L)$ накладывались естественные ограничения. В частности, в [5] получен законченный критерий разложимости для случая, когда $\Lambda(L)$ уместается в полосе комплексной плоскости. В последнее время удалось распространить методы работы [5] на функции с нулями в полуплоскости. Эта ситуация значима для приложений. Приведем один типичный результат. По поводу стандартных понятий из теории целых функций см. [6].

Теорема. Пусть $L(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)$, $n \in \mathbf{N}$, расположенным в правой полуплоскости

$$\Pi(\gamma) \equiv \{ \lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \gamma \}$$

с некоторым $\gamma \in \mathbf{R}$, причем $0 \notin \Lambda(L)$. Пусть индикаторная диаграмма D_L есть отрезок $[-a, b]$, где $a > 0$, $b \geq 0$. Предположим, наконец, что при некотором $p \in \mathbf{Z}_+$ выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)| |\lambda_n|^{p+1}} < \infty.$$

Тогда величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд Крейна порядка p , где $P(\lambda) \equiv 0$, если $p = 0$, или

$$P(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{m!} F^{(m)}(0) \lambda^m,$$

если $p \geq 1$. Ряд Крейна сходится к $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ абсолютно и равномерно на любом компакте в области $\mathbf{C} \setminus \Lambda(L)$.

В связи с приведенным результатом отметим следующее. 1. Если выполняются условия теоремы и $1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд Крейна порядка p , то эта же величина раскладывается в ряд Крейна любого большего порядка $p_1 > p$. 2. Требование $0 \notin \Lambda(L)$ не принципиально: если $0 \in \Lambda(L)$, то в разложении Крейна появится дополнительное слагаемое $1/(L'(0)\lambda)$ и вид многочлена $P(\lambda)$ несколько изменится. 3. Результат легко распространить на случай, когда нули принадлежат «повернутой» полуплоскости

$$\Pi(\gamma, \theta) \equiv \{ \lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(\lambda \exp(-i\theta)) \geq \gamma \}$$

с фиксированными значениями $\gamma \in \mathbf{R}$, $\theta \in (0, 2\pi)$. От диаграммы D_L требуется, чтобы она была отрезком $[-a \exp(i\theta), b \exp(i\theta)]$, $a > 0$, $b \geq 0$; всё остальное в теореме сохраняется.

Согласование ориентации индикаторной диаграммы D_L с расположением полуплоскости, содержащей нули, существенно для нашего подхода. Коротко говоря, диаграмма D_L должна быть отрезком, проходящим через 0 и лежащим на прямой, перпендикулярной границе полуплоскости. Желательно также, чтобы этот отрезок хоть немного выступал за точку 0 в направлении «внешней нормали» к границе. Если последнее условие нарушается, то на нули приходится налагать дополнительное ограничение, чтобы они не слишком быстро уходили «вглубь» полуплоскости. Например, для полуплоскости $\Pi(\gamma)$ из сформулированной теоремы в случае диаграммы $D_L = [0, b]$ придется потребовать, чтобы $\operatorname{Re} \lambda_n = O(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Работа поддержана проектом АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» 2.1.1/11278, проектами ГК Рособразование П 268, 795, 943 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», 2009-2013 гг., П 1109.

Литература

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том II. Дальнейшее построение теории. – М.: Наука, 1968. - 624 с.
2. Крейн М.Г. К теории целых функций экспоненциального типа // Известия АН СССР. Серия матем. 1947 - Т. 11, № 4. - С. 309–326.
3. Шерстюков В.Б. О разложении мероморфных функций специального вида на простейшие дроби // Analysis Mathematica. – 2007 - Т. 33. - С. 63–81.
4. Шерстюков В.Б. Представление обратной величины целой функции рядом простейших дробей и экспоненциальная аппроксимация // Матем. сб. – 2009 - Т. 200, № 3. - С. 147–160.
5. Шерстюков В.Б. Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна // Матем. сб. – 2011 - Т. 202, № 12. - С. 137–156.
6. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. - 632 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ СИЛОВЫХ УСТАНОВОК

М.Ю. ЯСТРЕБОВ, И.В. ЗУБ

Санкт-Петербургский государственный университет
водных коммуникаций, г. Санкт-Петербург

Оптимизирующее планирование режимов эксплуатации силовых установок (СУ) должно опираться на результаты прогнозирования динамики технического состояния и, далее, надежности.

Такое прогнозирование может выполняться по единой методологии, если СУ работает без резерва. При наличии резерва, или работе в параллели нескольких СУ, прогноз делается по каждой из них отдельно. Решение о резервировании СУ принимается по результатам диагностики и при соответствующем экономическом обосновании, учитывающем финансовые риски и потери.

Решение о приемлемости риска принимается при выполнении условия

$$R \leq (\sum p_i \Pi_i) / \sum Z_i;$$

здесь: – вероятность отказа j -го элемента системы, Π_j – ожидаемые потери при отсутствии резервирования; Z_j – затраты на резервирование.

Оптимизирующая модель управления СУ должна учитывать внешнюю K_{ext} (обеспечение объекта электроэнергией) и внутрисистемную K_{int} оценки работоспособности. Согласованный учет обеих составляющих работоспособности приводит к формализации системного критерия K в виде линейной функции, содержащей настраиваемый параметр λ :

$$K = K_{\text{ext}} + \lambda K_{\text{int}}.$$

Назначение параметра может осуществляться экспертным путем либо настраиваться в ходе имитационного моделирования. Далее возможны два подхода к оптимизации:

- 1). K , как функция управляемых переменных, является целевой функцией. Тогда ему целесообразно придать денежную размерность;
- 2). K включается в ограничения задачи.

В обоих случаях должен быть определен набор управляемых переменных $X = \{x_j\}$ и раскрыта функциональная зависимость $K = F(X)$. Остановимся на первом подходе.

Исходным пунктом здесь является формализация структуры системы энергообеспечения. Введем следующие обозначения:

n – количество типов СУ; $x_j, j = 1, \dots, n$, – управляемые переменные: количество единиц j -го типа; m_j – мощность СУ j -го типа; j – себестоимость содержания единицы СУ; d – средняя доходность одного кВт; Z – количество заявок на обслуживание объектов; r_{int} – средние потери доходов от неиспользованной производительности; r_{ext} – суточные потери предложения от простоя СУ в ремонте.

На практике r_{ext} зависит от задержек в заключении контрактов с некоторым лагом, его значение может быть рассчитано по регрессионной зависимости динамики спроса Z от средней задержки за ряд прошлых лет.

Имеем:

$$K_{\text{ext}} = g\left(Z - \sum p_j x_j\right) r_{\text{ext}}; K_{\text{int}} = \sum p_j (d - s_j) + g\left(Z - \sum p_j x_j\right) r_{\text{int}},$$

$$\text{где } g(t) = \begin{cases} -t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Зависимость от управляемых переменных является, в силу вида функции g , не только нелинейной, но и негладкой. Если в дальнейшем для решения соответствующей задачи математического программирования применять, например, градиентный метод, можно сгладить слагаемые, переходя к экспонентам:

$$K_{\text{ext}} = \exp\left(\left(Z - \sum p_j x_j\right) r_{\text{ext}}\right),$$
$$K_{\text{int}} = \exp\left(\sum p_j (d - s_j) x_j + g \left(Z - \sum x_j p_j\right) r_{\text{int}}\right).$$

При этом отрицательные значения величины $Z - \sum p_j x_j$ приведут к близким к нулю значениям K_{ext} .

Литература

1. Зуб И.В., Ястребов М.Ю. Оптимизационные модели в АСУ ТП контейнерного терминала // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2009 - № 4–2(89). - С. 130–138.

СЕКЦИЯ 4

Новые информационные и педагогические технологии в образовании и прикладная лингвистика

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ CDF-ДЕМОНСТРАЦИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН БУДУЩИМИ УЧИТЕЛЯМИ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Н.В. АССОНОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: assonova@mail.ru

С подключением компьютерных аудиторий Смоленского государственного университета к сети Интернет у преподавателей появились уникальные возможности для поиска и использования в учебном процессе новых методик и инструментов преподавания. Одним из таких инструментов является CDF-демонстрация.

CDF расшифровывается как Computable Document Format, что означает вычислимый формат документа. В таком формате удобно представлять учебники, журнальные статьи, отчёты [1]. Основное достоинство этих документов состоит в наличии интерактивных диаграмм, графиков, динамических расчётов, трёхмерных подвижных моделей и т.п. Пользователи могут самостоятельно менять параметры визуализации с помощью специальных элементов управления. На основе вычислений, осуществляемых в режиме реального времени, диаграмма меняется и виден результат. К преимуществам CDF-файлов относится возможность их иерархической организации и типографски сверстанный текст. Более 7,5 тысяч CDF-демонстраций размещены на свободном сайте Demonstrations Project [2] американской фирмы Wolfram Research – создателе нового формата. Эта компания создала и продолжает совершенствовать одну из лидирующих на рынке систему компьютерной математики Mathematica. Успех системы Mathematica позволил компании Wolfram Research поддерживать мировое интеллектуальное сообщество, предоставляя важные веб-сайты в свободном доступе, среди которых Demonstrations Project.

Для просмотра CDF-демонстрации достаточно установить бесплатно скачиваемый «CDF-проигрыватель» [3]. Интерактивный мастер создания CDF-документов встроен в последнюю версию Mathematica 8.0.4, выпущенную в конце 2011 года.

Величина наряду с числом является основным понятием начального курса математики, поэтому раздел «Величины» входит в курс математики для будущих учителей начальных классов.

Приведём ряд демонстраций, использование которых эффективно при изучении геометрических величин.

Рассматривая длину отрезка, студентам можно предложить демонстрации [4; 5]. Они знакомят с иллюзиями, меняющими восприятие длины и, кроме того, служат развитию глазомера. Так, в демонстрации [4] студенты сами подбирают длину отрезка, равного данному и проверяют свой выбор наложением. Демонстрация [6] позволяет переводить единицы длины друг в друга. Среди этих единиц, помимо сантиметра, метра и километра, имеются дюйм, фут, ярд и миля. Каждая из этих единиц сопровождается характерной иллюстрацией. Например, фут – следом человеческой ступни на песке. Подобные демонстрации имеются для единиц объёма [7] и массы [8].

Формула $S=ah$ для площади параллелограмма удачно иллюстрируется при помощи демонстрации [9]. Пользователь может разбивать прямоугольник на более мелкие или более крупные квадраты и растягивать его до параллелограмма с тем же основанием.

Демонстрация [10] даёт возможность студентам создавать многоугольники с произвольным числом вершин в целочисленных точках плоскости и тренироваться в оценке их площади и периметра.

При изучении площади криволинейной фигуры незаменима демонстрация [11]. Она показывает входящие и объемлющие фигуры для круга и эллипса. Можно изменять величину квадратов, из которых состоят эти фигуры. Демонстрация выводит значения площадей круга и эллипса, а также входящих и объемлющих их фигур.

Выведение формулы площади круга удобно также иллюстрировать демонстрацией [12]. Пользователь может изменять количество правильных многоугольников, вписанных в круг. При этом показываются значения площадей круга и многоугольника, длин окружности и периметра многоугольника, а также точность приближения этих значений.

Эффектные демонстрации для величин угла и объёма, а также для негеометрических величин (время, масса и т.д.) и многих других понятий математики найдены и апробированы автором в учебном процессе.

Использование CDF-демонстраций повышает доступность современного качественного образования.

Литература

1. <http://www.wolfram.com/cdf/uses-examples>.
2. <http://demonstrations.wolfram.com>.
3. <http://www.wolfram.com/cdf-player>.
4. <http://demonstrations.wolfram.com/LengthOfLineIllusion>.
5. <http://demonstrations.wolfram.com/MullerLyerIllusion>.
6. <http://demonstrations.wolfram.com/LengthUnitsOfMeasurement>.
7. <http://demonstrations.wolfram.com/VolumeUnitsOfMeasurement>.

8. <http://demonstrations.wolfram.com/MassUnitsOfMeasurement>.
9. <http://demonstrations.wolfram.com/AreasOfParallelograms>.
10. <http://demonstrations.wolfram.com/EstimatingPerimeterAndAreaOfSimplePolygons>.
11. <http://demonstrations.wolfram.com/AreaOfAnEllipse>.
12. <http://demonstrations.wolfram.com/ApproximateAreaAndCircumferenceOfACircleUsingIsoscelesTriangle>.

О МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВУЗА И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ В СОЗДАНИИ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА И ЭФФЕКТИВНОМ ПРИМЕНЕНИИ ИКТ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

А.П. БОРИСОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Наиболее полный эффект от внедрения информационного образовательного пространства может быть достигнут в случае придания ему комплексного, интегративного характера – за счёт организации взаимообогащающего взаимодействия высшей и средней школы. Процесс создания и внедрения информационного образовательного пространства «средняя школа – вуз» осуществляется во взаимодействии органов управления образованием (всех уровней), образовательных учреждений высшего и среднего образования, органов государственной власти. При этом органы управления образованием обеспечивают, прежде всего, инфраструктурную составляющую данного процесса. Ведущая роль принадлежит высшей школе.

Взаимодействие высшей и средней школы как педагогическое явление представляет собой реализуемые отношения различных воспитательных коллективов: школьного, педагогического, ученического и других, воздействие которых испытывают субъекты информационного образовательного пространства. Движущая сила процесса создания единого информационного образовательного пространства проявляется в разрешении противоречий между уровнем компетенций, компетентностью, материальными и организационными возможностями коллективов – участников процесса, объединённых едиными целями, задачами и организационной структурой. Необходимость сотрудничества школы и вуза в создании, внедрении и обеспечении функционирования информационного образовательного пространства обусловлена также фактором преемственности учебно-воспитательного процесса.

Модель взаимодействия высшей и средней школы в рамках единого информационного образовательного пространства предполагает поэтапную реализацию процесса взаимодействия на основе взаимосвязи ее функциональных и структурных компонентов. Модель включает в себя функциональный (принципы формирования процесса взаимодействия, методы, алгоритмы деятельности субъектов процесса, способы и средства управленческих воздействий и обеспечения обратной связи, процедуры диагностики и оценивания качества процесса) и структурный (целевой, мотивационно-стимулирующий, организационный, нормативный, информационный, содержательный, критериальный) блоки. Модель предусматривает:

- скоординированность целеполагания и деятельности субъектов процесса взаимодействия высшей и средней школы;
- оптимальное распределение ролей и функций субъектов взаимодействия;
- высокий уровень компетентности всех субъектов взаимодействия;
- системную интеграцию педагогических структур средней и высшей школы;
- использование качественных и количественных параметров для оценки качества процесса взаимодействия.

Цели взаимодействия высшей и средней школы в рамках единого информационного образовательного пространства:

- совершенствование содержания и технологий образования;
- создание условий для личностного развития учащихся средних школ, студентов высших учебных заведений, учителей средних школ и профессорско-преподавательского состава вузов;
- интеграция педагогических коллективов и учащихся средних школ в информационное пространство в качестве его полноправных субъектов.

Основные принципы, лежащие в основе модели взаимодействия высшей и средней школы:

- системность и целостность в управлении;
- рациональное сочетание централизации и децентрализации;
- объективность и полнота информации;
- структурирование задач;
- вариативность структуры;
- специализация деятельности субъектов взаимодействия.

Условиями внедрения модели взаимодействия высшей и средней школы являются:

- согласованность действий всех участников процесса;
- профессиональная компетентность работников сферы образования в области разработки, внедрения и обеспечения функционирования средств новых информационных технологий учебного назначения;

- сформированность внутриколлективной педагогической культуры, определяющая характер межличностных отношений субъектов;
- оптимальное планирование деятельности, обеспечивающее единство установок всех субъектов на достижение цели управления;
- развитая система наставничества, подготовки и переподготовки кадров, позволяющая сочетать теоретическую и практическую подготовку под контролем опытных специалистов.

ИНТЕРАКТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВОООБРАЖЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА ГЕОМЕТРИИ

А.А. БЫКОВ, В.В. СЕНЧИЛОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Характерной чертой развития школьного образования является непрерывный поиск эффективных форм и методов обучения, путей совершенствования образовательного процесса в целом. Это связано с повышением требований, предъявляемых к выпускникам школ, способным грамотно и эффективно действовать в высокоразвитой информационной среде, умеющим адаптироваться в постоянно изменяющихся условиях. Исходя из этого, возникает необходимость повышения качественного уровня обучения, совершенствования методик преподавания школьных дисциплин.

Значительное место в системе формирования интеллектуальной и творческой личности обучающегося отводится изучению геометрии как дисциплины, обладающей огромным гуманитарным и мировоззренческим потенциалом.

Для достижения высокого уровня геометрической подготовки учащихся необходимо обеспечить возможность приобретения ими фундаментальных знаний, развития пространственного воображения, стремления к самостоятельному изучению нового материала.

Результаты единого государственного экзамена по математике показывают, что уровень знаний и умений школьников по геометрии является достаточно низким, значительное число учащихся не справляются с решением геометрических задач.

Приступая в 10 классе к изучению нового раздела геометрии – стереометрии, ученики, имевшие дело в 7–9 классах с геометрией на плоскости, испытывают серьезные затруднения при переходе из плоскости в пространство. «Лишнее» измерение создает особенные сложности уже в начале изучения стереометрии, когда учащиеся

сталкиваются с необходимостью представить себе столь абстрактные понятия, как бесконечно протяженные прямая и плоскость в пространстве, которым посвящено большинство теорем и задач курса 10 класса. Причем понятие прямой на плоскости, которое школьники изучили еще в 7 классе, практически не позволяет упростить сложность восприятия схожего объекта с дополнительным свойством.

Второе затрудняющее школьников обстоятельство – как подойти к доказательству теоремы или решению зачастую весьма абстрактной задачи. А проблема учителей – как научить школьников находить нужный подход. Дело в том, что хотя геометрическое, пространственное воображение присуще некоторым школьникам, но таких не так уж много. Большинству школьников требуется помощь в развитии умения представлять и изображать стандартные стереометрические конфигурации, их приходится как-то обучать геометрическому видению – пониманию теорем и условий задач, сформулированных словесно.

Решению этой проблемы способствует внедрение в учебный процесс новых интерактивных технологий, являющихся эффективным средством управления познавательной деятельностью и формирования пространственных представлений учеников. При их использовании открываются огромные возможности изменения и совершенствования методики отбора необходимой теоретической и практической информации, которая способствует улучшению формирования пространственного воображения школьников на уроках геометрии. Такой процесс обучения характеризуется индивидуальным и дифференцированным подходом, приводит к изменению содержания характера деятельности между учителем и учеником.

Усиление логической составляющей курса геометрии, стремление построить курс на строго дедуктивной основе привело к тому, что проблема развития пространственного мышления отошла на дальний план, что отрицательно отразилось на результатах обучения геометрии, и в первую очередь стереометрии.

Процесс формирования и развития пространственных представлений характеризуется умением мысленно конструировать пространственные образы или схематические конфигурации изучаемых объектов и выполнять над ними мыслительные операции, соответствующие тем, которые должны быть выполнены над самими объектами.

Одной из основных проблем при изучении стереометрии является проблема наглядности, связанная с тем, что изображения даже простейших стереометрических фигур, выполненные в тетрадах или на доске, как правило, содержат большие погрешности. Работа в программе «Живая математика» позволяет избежать таких ошибок, она позволяет

сделать задачи наглядно обозримыми, развивать пространственное воображение в правильном направлении.

Кроме того, учителя охотно используют наглядные пособия на уроках стереометрии. Модели параллелепипеда, пирамиды, правильных многогранников можно найти в большинстве кабинетов математики. При этом чаще всего такие модели используются с чисто иллюстративной целью: все, что с ними можно делать – это разглядывать с разных сторон. Однако запастись моделями для всего разнообразия решаемых на уроках задач невозможно.

Использование при изучении стереометрии вещественных моделей для показа взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве необходимо, но недостаточно. Во-первых, не всегда просто показать расположение объектов внутри геометрических тел; во-вторых, невозможно проследить динамику построений; в-третьих, переход от вещественной пространственной модели к ее изображению на плоском чертеже труден для учащихся. Отсюда повышенный интерес к виртуальному трехмерному моделированию и его применению в школе.

В современной школе многие учителя математики имеют некоторые навыки применения новых информационных технологий на уроках и при подготовке к ним. Подготовить к уроку материал, иллюстрирующий доказательство теоремы или решение задачи в трехмерном пространстве, можно такими распространенными программными средствами, как, например, MS PowerPoint. Однако их применение для подобных целей требует от пользователя не только высокого уровня знаний и навыков работы с системой, но и умения обеспечить выполнение дидактических целей занятия. Кроме того, при создании таких проектов учитель должен самостоятельно следить не только за соблюдением необходимых технических требований при построении тех или иных линий в чертеже, но и за его соответствием условию поставленной задачи.

Справиться со многими такими проблемами помогает программа «Живая математика», которая является компьютерной системой интерактивного моделирования, исследования и анализа широкого круга задач при изучении планиметрии, стереометрии, алгебры, тригонометрии, математического анализа и других разделов математики. Поскольку в основе системы – программный инструмент фирмы Key Curriculum «Geometers Sketchpad», поэтому «Живая математика» наиболее часто применяется для иллюстрации именно геометрических элементов. Являясь достаточно простой в освоении, рассматриваемая компьютерная проектная среда позволяет создавать красочные, легко варьируемые и редактируемые чертежи, осуществлять операции над ними, а также проводить измерения геометрических величин. Использование программы в преподавании геометрии обеспечивает

развитие деятельности учащегося по таким направлениям, как анализ, исследование, построение, доказательство, решение задач, головоломок и даже рисование.

Кроме того, работа в такой «квазитрехмерной среде» отлично развивает пространственное воображение. Появляется возможность по-новому ставить и решать задачи на построение в пространстве, причем проверка правильности решения обеспечивается самой возможностью взглянуть на конструкцию с разных сторон. Да и другие виды задач и методы их решения при переносе на интерактивные модели получают новое качество, в первую очередь следует отметить задачи на метод проекций.

Преподаватель, располагающий компьютером, мультимедийным проектором и экраном, имеет возможность интенсифицировать процесс обучения, сделать его более наглядным и динамичным. При помощи программы «Живая математика» можно легко строить сечения в прямоугольном параллелепипеде и в тетраэдре, на которые при ручном построении тратится немало времени. В процессе работы можно вращать многогранник для лучшего представления сечения. Ученики начинают лучше понимать отличие скрещивающихся прямых от пересекающихся, отличать видимые точки пересечения от настоящих точек пересечения.

Рассмотрим простую задачу с построением сечения методом следов в прямоугольном параллелепипеде. Дан прямоугольный параллелепипед. Надо построить сечение параллелепипеда, проходящее через след a и точку P (рис. 1). При построении можно провести ортогональные проекции точек на боковых гранях, а также включить в любой момент вращение конструкции вокруг одной или нескольких осей, чтобы, выбрав новый ракурс изображения, проверить правильность выполненных построений (рис. 2).

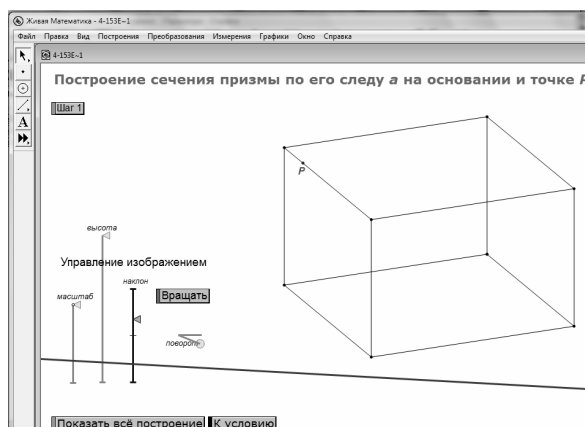


Рис. 1. Исходная модель

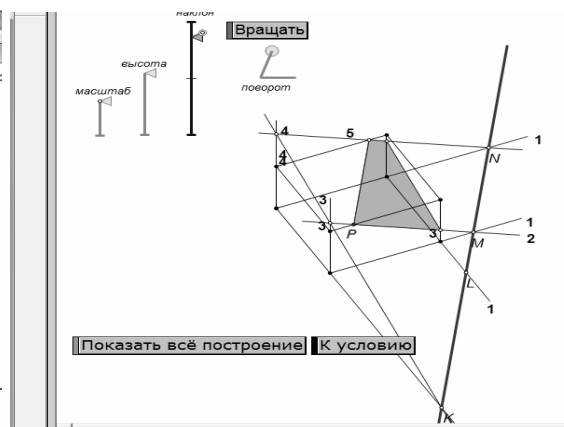


Рис. 2. Итоговая модель

Современная трехмерная графика позволяет создавать модели достаточно сложных геометрических фигур и их комбинации, вращать

их на экране, выбирать удобное для решения положение фигур, освещать и выделять нужные объекты.

Иллюстрациями качественных утверждений служат подвижные чертежи, позволяющие работать со всеми объектами, составляющими конфигурации, используемые в формулировках. Иногда такие чертежи содержат некоторые значения численных характеристик, если последние подтверждают справедливость качественных утверждений. Перемещая элементы чертежа, учащийся может убедиться в истинности утверждений, при этом учитель имеет возможность контролировать понимание формулировок: задавать вопросы о существенности условий, просить ученика точно формулировать его наблюдения.

Программа «Живая математика» представляет собой уникальный продукт, позволяющий создать современный компьютерный чертеж, который легко идентифицируется с традиционным, но в отличие от него программный чертёж можно тиражировать, деформировать, перемещать и видоизменять, элементы чертежа легко измерить компьютерными средствами, а результаты этих измерений допускают дальнейшую компьютерную обработку.

Литература

1. Высоцкий И.Р. Единый государственный экзамен. Универсальные материалы для подготовки учащихся. Математика под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Яценко / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010. – 96 с.
2. Дубровский В.Н. Стереометрия с компьютером // Компьютерные инструменты в образовании. – 2003. – № 6. – С. 3–11.
3. Рязановский А.Р., Мирошин В.В. Математика, решение задач повышенной сложности. – М.: Интеллект-Центр, 2007. – 480 с.

ПОСТРОЕНИЕ КУРСА «ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ» ДЛЯ СОЦИОЛОГОВ НА ОСНОВЕ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА

О.А. ВЕЛЬКО

Белорусский государственный университет, г. Минск
e-mail: o.velko@tut.by

В последнее время социология и другие общественные науки, такие как политология, государственное управление, исследование народонаселения, становятся всё более востребованными, поскольку являются инструментом изучения общества, например симпатий избирателей во время выборов.

Социология является дисциплиной, основанной на исследованиях данных, и статистика является частью её повседневного языка. Чтобы освоить этот язык, социологи должны быть хорошо подготовлены математически. В связи с потребностями развития как теории социологии, так и её экспериментальных и прикладных направлений возрастает интерес к использованию математических методов для описания и анализа тех явлений, которые она изучает. Проникновение математических методов в социологию, связанное, прежде всего, с развитием экспериментальных и прикладных исследований, оказывает достаточно сильное влияние на её развитие. С одной стороны, математика предоставляет новые возможности исследований социологических явлений, с другой – социология как наука предъявляет более высокие требования к постановке исследовательских задач и определению способов их решения.

Зачастую многие студенты-социологи не видят необходимости в изучении математики, аргументируя это совершенно иными интересами и способностями, считая, что знание математики не будет востребовано в их будущей профессиональной деятельности. Опыт преподавания математики показывает, что практически все студенты способны полноценно освоить учебную программу, но не все студенты убеждены в необходимости получения соответствующих знаний по математике. На наш взгляд, трудности, возникающие у студентов-социологов при изучении математики, обусловлены несколькими причинами.

1. Снижение уровня базовой подготовки по школьной математике абитуриентов, отсутствие у многих студентов навыков систематической самостоятельной работы.

2. Невостребованность математики преподавателями других курсов и научными руководителями курсовых и дипломных работ. Многие курсовые и дипломные работы не используют математический аппарат (несмотря на эмпирическую направленность работы).

3. Плохая организация общей системы контроля учебных достижений. Следует вводить более объективные процедуры контроля, например, систему накопленных баллов (чтобы оценка работы студентов не сводилась к единственному итоговому экзамену и отражала работу в течение всего семестра), так называемый рейтинговый подход.

4. Дидактические причины. Математические дисциплины преподносятся студентам-социологам в дидактически неудачной формализованной, абстрактной форме. Студенты не усваивают связи между математическими знаниями и практическими задачами. Преподавателям следует насытить курсы яркими примерами задач из реальной работы социологов. Студенты должны понимать, что

математика им нужна для того, чтобы изучать объекты, интересующие социолога. Следует также проводить исторический ракурс для изучения связи между математикой и социологией.

Математическое образование социологов должно помогать налаживанию отвечающего современным требованиям образования. Целью настоящей статьи является выявление путей реализации профессиональной направленности в преподавании дисциплины «Основы высшей математики» студентам-социологам посредством решения прикладных задач. В этой связи при подборе учебного материала для занятий целесообразно использовать задачи, составленные на основе реальных статистических данных, которые отражают те или иные социально-экономические и психологические закономерности или явления.

Реализовать профессиональную направленность преподавания математики студентам-социологам можно посредством решения прикладных задач, что включает в себя:

1) сопровождение изучаемого математического материала примерами из социально-экономической и психологической сфер деятельности, примерами его применения в будущей профессиональной деятельности;

2) решение прикладных задач с социально-экономическим и психологическим содержанием;

3) изучение таких методов решения прикладных задач, как математическое моделирование;

4) подготовка студентами рефератов, различных сообщений, докладов, указывающих на связь социологии и математики, на применение математики в социологии;

5) формирование умений составления и структурирования прикладных задач по заданной теме с использованием социально-экономических знаний (с использованием различного рода литературы, Интернета и других источников информации).

Представим несколько важнейших разделов, которые охватывают основные направления применения математических методов в социологии: «Элементы теории множеств и их применение к социальным объектам», «Элементы линейной алгебры в социально-экономической сфере», «Основы математического анализа в социально-экономической сфере», «Элементы теории вероятностей в социологических исследованиях», «Основы математического моделирования в социологии».

Таким образом, совершенствование математической подготовки выпускников-социологов происходит посредством различных методических путей, дидактических средств и др. Опыт коллег и личный

опыт преподавания математических дисциплин студентам-социологам показывает, что преподавателю необходимо использовать следующие методы обучения математике студентов-социологов: осуществлять профессиональную направленность математической подготовки, использовать дифференцированный подход, осуществлять работу по устранению затруднений студентов, вводить более объективные процедуры контроля знаний студентов, осуществлять комплексный подход к обучению. Учебный курс должен быть нацелен на развитие у студентов умений анализировать, обрабатывать социологические данные с помощью математического аппарата, на подготовку студентов к самостоятельному изучению тех разделов математики и ее прикладных направлений, которые могут потребоваться дополнительно в практической и научно-исследовательской работе будущих специалистов.

Выпускник-социолог, владеющий современными математическими знаниями, является конкурентоспособным и востребованным на рынке труда.

Литература

1. Велько О.А. Основы высшей математики. Основы информационных технологий: типовые учеб. программы для высш. учеб. заведений по спец. 1-23 01 05 «Социология» / сост. В.А. Еровенко [и др.]; под ред. В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2009. – 28 с.

2. Велько О.А. Проблема преподавания математики студентам-социологам в вузе // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: материалы III Междунар. науч. конф. (Воронеж, 2-7 февраля 2009 г.). – Воронеж: Научная книга, 2009. – Ч. 1. – С. 96–98.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И САПР УЧИТЕЛЯ

**Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ, Е.Н. ДАНИЛЕНКОВА, Д.А. ЛАГУТКИН,
А.М. ШИЛЯГИНА**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: ypy1101@gmail.com

Пусть имеется набор тестов T_1, \dots, T_k , предназначенных для контроля знаний из некоторой предметной области O . Каждый тест T_i характеризуется набором $\{A_{i1}, \dots, A_{ir_i}\}$ элементов знаний, для контроля которых он предназначен, и некоторым параметром s_i . В

качестве параметра t_i может выбираться, например, предполагаемое время выполнения теста или экспертная оценка сложности теста (числовая или лингвистическая), или баллы, начисляемые за выполнение теста.

Перечисленные характеристики тестов можно хранить в двумерном массиве (рис. 1), элементы которого a_{ij} принимают логическое значение 1, если тест T_i проверяет элемент знания A_j , и значение 0 в противном случае.

Идентификатор тестового задания	Проверяемые элементы знаний				Параметр, характеризующий тест
	A_1	A_2	...	A_n	
T_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	s_1
T_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	s_2
...
T_k	a_{k1}	a_{k2}	...	a_{kn}	s_k

Рис. 1. Массив характеристик тестов

Требуется подобрать m вариантов тестов $V_r = (T_{r1}, \dots, T_{ru_r})$ со стоимостью $S_r = S_{r1} + \dots + S_{ru_r}$ ($r = 1, \dots, m$) для проверки совокупности элементов знаний $\{A_1, \dots, A_n\}$ так, чтобы:

1) а) максимальное отклонение стоимости S_r варианта V_r от заданного значения S была минимальной и б) тесты в различных наборах не повторялись;

2) выполнялось условие 1а), и 2б) пересечение любых вариантов содержало не более l общих тестов;

3) в вариантах V_r содержалось минимальное количество тестов, и выполнялось условие 2б);

4) выполнялись условия 1а) и 2б), и в каждый вариант входило одинаковое число тестов;

5) выполнялось условие 1а), и каждый вариант содержал тесты, g -кратно проверяющие каждый элемент знаний из набора $\{A_{i1}, \dots, A_{i r_i}\}$.

Если для характеристики тестов используется несколько параметров, естественно возникают многокритериальные задачи, решение которых необходимо для создания системы автоматизированной поддержки работы учителя.

Все сформулированные выше задачи с позиций исследования операций сводятся к отысканию совокупности покрытий матрицы (рис. 1), удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

Можно отметить, что при небольших значениях k и n упомянутые задачи решаются перебором. Для больших значений параметров k и n эффективные алгоритмы решения неизвестны.

Алгоритм решения задачи о наименьшем покрытии можно найти в [1, с. 53–62]. Алгоритмы построения одного варианта тестов, удовлетворяющего некоторым из перечисленных выше условий, обсуждались в [2; 3].

Литература

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

2. Емельченков Е.П., Шилягина А.М. Об оптимальном выборе текстов для развития коммуникативных навыков по определенной разговорной теме // Методология и методика информатизации образования: Концепции, программы, технологии: материалы Всероссийской научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2007. – С. 90–93.

3. Емельченков Е.П., Шилягина А.М. Об оптимальном выборе учебных текстов // Ежегодная межрегиональная научно-практическая конференция «Инфокоммуникационные технологии в региональном развитии» (7–8 февраля 2008 г.): сборник трудов. – Смоленск, 2008. – С. 86–88.

МНОЖЕСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРНОЙ МОДЕЛИ ИНДУКТИВНОГО ПОСТРОЕНИЯ БАЗЫ ЗНАНИЙ ДЛЯ ИСППР

Н.А. КОНОПЛЕВА

ВА ВПВО ВС РФ, г. Смоленск

e-mail: konoplewa32@mail.ru

Задача принятия решения в условиях неопределенности относится к классу слабоструктурированных задач, для решения которых разработка автоматизированных систем управления (АСУ) возможна только с применением интеллектуальных систем, которые способны оперировать специализированными знаниями (приобретать, накапливать и обрабатывать) и эффективно выводить оптимальные решения на основе имеющейся базы знаний.

Интеллектуальные системы управления (ИСУ) сегодня являются основным структурным элементом современных АСУ, которые качественно изменили формулу управления, значительно повысив его эффективность. При этом алгоритмическая механизация мышления с помощью программно-управляемых компьютеров сталкивается с

серьезными трудностями, которые невозможно преодолеть только за счет растущих вычислительных мощностей [2]. Например, компьютерные программы тьюринговского типа в ряде случаев не могут справиться с распознаванием образов, координацией движений и другими сложными задачами человеческого обучения.

Соответственно, для обеспечения необходимого уровня интеллектуализации АСУ необходима несколько иная концепция инженерии знаний, которая была бы достаточно конструктивной для создания действующей программной модели.

Квантовые модели представления знаний базируются на принципах индуктивного моделирования. Типичными задачами, которые решаются с использованием квантовых моделей, являются распознавание образов, прогнозирование явлений, задачи добычи и обработки знаний. Основная особенность квантовых моделей есть способность учиться по заданным примерам и трансформироваться в квантовые сети вывода решений с заранее неизвестной структурой [1].

Метод разноуровневых алгоритмических квантов знаний (РАКЗ-метод) допускает индуктивное построение РАКЗ-моделей для дедуктивного вывода классификационных и прогнозных решений в операторной ($M_{оп}$) и сетевой ($M_{кс}$) формах.

Особенность $M_{оп}$ состоит в применении общего секционного принципа векторно-матричного представления доменами характеристик ОПР с их значениями в компонентах доменов, сквозного автоматического квантования информации, в единой структуре пространства tРАКЗ-моделей с возможностью их аналитического конечно-предикатного описания. Операторная модель $M_{оп}$ предполагает вывод искомого решения в виде определенного tk-знания путем операторной редукции (преобразования) БкЗ по входному наблюдаемому tk-знанию. При этом БкЗ находится индуктивно в режиме обучения по выборочным k-знаниям.

Операторный метод позволяет решить три базовые задачи [3]:

- 1) задачу формализации tk-знаний ЛПР о процессе принятия решений в конкретной ситуации;
- 2) задачу распознавания (идентификации) объекта по результатам наблюдений;
- 3) задачу экстраполяции (прогнозирования) результатов наблюдений.

Для того чтобы обеспечить операторную поддержку принятия решений, разработан операторный метод, который реализует предложенную операторную модель и позволяет осуществить построение базы точных квантов знаний (БtkЗ) ЛПР по начальным наблюдениям, полученным из всевозможных источников, представленным в виде таблицы эмпирических данных (ТЭД),

сформированным в обучающую выборку, а также на основе построенной БткЗ обеспечит вывод идентификационных и прогнозных решений о возможном состоянии наблюдаемого ОПР.

Предлагаемая методика дедуктивного операторного вывода идентификационных и прогнозных решений на основе базы достоверных квантов знаний позволяет уменьшить средний риск принимаемого решения на порядок, увеличить скорость процесса обучения модели в 2,5 раза и сократить объем памяти базы знаний в 1,5 раза.

Литература

1. Герасимов Б.Г., Субач И.Ю., Никифоров Е.В. Модели представления знаний для использования в системах поддержки принятия решений // Научно-техническая информация. – 2005. – № 1(23). – С. 7–11.

2. Коровин А.Л. Науки о сложном и искусственный интеллект // материалы IV Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых учёных (г. Москва, МИРЭА, 10–12 ноября 2010 г.). Ч. 1. – С. 20–22.

3. Молодых Л.С. Обоснование и множественное представление операторной модели и метода для поддержки принятия технологических решений в механообработке // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – № 2. – С. 66–72.

УРОВНЕВАЯ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В.М. МАРЧЕНКО, Л.Ф. ЗВЕРОВИЧ, И.М. БОРКОВСКАЯ, О.Н. ПЫЖКОВА

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск
e-mail: vmar@bstu.unibel.by

Одним из важнейших факторов повышения качества подготовки специалистов в высших учебных заведениях является внедрение в учебный процесс новых образовательных технологий, которые ориентированы на активные методы овладения знаниями, развитие творческих способностей студентов, переход от поточного к личностно-ориентированному (индивидуализированному) обучению с учетом образовательных стандартов нового поколения и возможностей личности. Традиционная методология высшего образования, рассчитанная на абстрактного «среднего» студента, представляется недостаточно гибкой для эффективного ведения учебного процесса с учетом личности обучаемого, его способностей, начального уровня образования.

Поиски эффективных форм учебного процесса с учетом специфики личности обучаемого, предпринимаемые кафедрой высшей математики Белорусского государственного технологического университета (БГТУ) в течение многих лет, привели к разработке уровневой образовательной технологии преподавания математических дисциплин. Целью уровневой технологии является создание условий для включения каждого студента в деятельность, соответствующую зоне его ближайшего развития, обеспечение условий для самостоятельного (и/или под контролем преподавателя) усвоения программного материала в том размере и с той глубиной, которую позволяют индивидуальные особенности обучаемого.

Весь изучаемый программный материал разбивается по темам на блоки, которые классифицируются по трем уровням: А, Б, С. Материал первого уровня А (базовый) – обязательное поле знаний по предмету, программа-минимум – уровень знаний, необходимый для успешного продолжения обучения. Второй уровень Б содержит задания, расширяющие представление студента об изучаемых темах, устанавливает связи между понятиями и методами различных разделов, дает их строгое математическое обоснование, а также примеры применения математических методов при решении прикладных задач. Материал А+Б (профильный) уровней А и Б охватывает всю стандартную программу курса по высшей математике – программу-максимум – и является достаточным для обеспечения самостоятельной (или под контролем преподавателя) работы обучаемого с учебной литературой. Его полное усвоение соответствует высшей оценке на экзамене. Уровень С (необязательный) содержит материал повышенной трудности, расширяющий и углубляющий классическое математическое образование инженера – это и современные разделы математики и ее приложений, и математическое моделирование, и исследование реальных практических задач с учетом выбранной специальности, и нестандартные задачи олимпиадного характера, требующие поиска методов решения, и т. п. Материал А+Б+С трех уровней – углубленная программа – открывает путь исследованиям в области приложений математики. Материал более низкого уровня не требует обращения к более высокому уровню.

Лекции, практические и лабораторные занятия, управляемая самостоятельная работа студентов, экзамены (в том числе и в виде тестов) организуются на основе уровневой методологии.

Четкое разграничение материала по уровням трудности и выделение обязательного поля знаний по предмету является мощным стимулом и дополнительной мотивацией к обучению не только для хорошо успевающих студентов, но и для тех, кому трудно (особенно на 1 курсе) усвоить достаточно абстрактный материал высшей математики.

Уровневая методика позволяет успешно проводить корректировку начальных знаний (школьного образования) у первокурсников, что способствует адаптации студента в вузе. Важным достоинством этой методики является ее направленность на работу с ярко выраженной мотивацией к получению хорошего образования, о чем свидетельствует и опыт проведения предметных олимпиад.

Каждый студент осознает и использует свои достоинства, понимает и компенсирует свои недостатки. Благодаря уровневому подходу у студентов развивается умение планировать, анализировать и оценивать свою учебную деятельность.

Уровневый подход к методике преподавания способствует созданию ситуаций успеха в учебно-познавательной деятельности и в целом направляет процесс обучения не только на усвоение информации, но и на раскрытие личностного потенциала студентов, на повышение их внутренней мотивации, а также на формирование творческого отношения к делу и стремления к самообразованию, что в дальнейшем определяет способность специалиста реализовать современные требования общества на самом высоком уровне.

Литература

1. Марченко. В.М., Борковская И.М., Пыжкова О.Н. Уровневая технология преподавания высшей математики в вузе // Труды БГТУ. Сер.VIII: Учебно-методическая работа. – Минск, 2009. – Вып. X. – С. 98–107.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОПИНГ-СТРАТЕГИЙ ПОДРОСТКОВ И ХАРАКТЕРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РОДИТЕЛЕЙ И ДЕТЕЙ

Н.В. ОСТАНИНА

Вильнюсская средняя школа «Атейтес», г. Вильнюс
e-mail: nadezda-05@mail.ru

Исследовательская работа проводилась в г. Вильнюсе на базе общеобразовательной средней школы «Атейтес». В исследовании приняли участие 45 учащихся 9-го класса в возрасте 15–16 лет, из них 22 мальчика, 23 девочки.

Для достижения цели исследования мы использовали комплекс психодиагностических методик. В результате было установлено, что подростки имеют широкий арсенал базисных и ситуационно-специфических копинг-стратегий.

Диагностика *базисных стратегий* преодолевающего поведения проводилась с помощью методики Д. Амирхана «Индикатор копинг-стратегий». Наиболее характерным является средний уровень

использования стратегии «разрешения проблем» (65,1%) и низкий уровень использования стратегии «избегания проблем» (84,4%), т.е. у подростков преобладает поведение, которое отличается активностью, сознательностью, целенаправленностью.

Тест Э. Хайма и опросник «Способы копинга» позволили изучить способы совладания с *повседневными стрессовыми ситуациями*. Чаще всего подростки используют стратегию «дистанцирование» (70,75%) уменьшая значимость ситуации; в недостаточной степени применяют когнитивные стратегии преодоления трудностей (39,5%), использование которых базируется на личностных ресурсах индивида и тесно связано с коммуникативной эффективностью, низкий уровень которой преобладает среди подростков (51,2%). Выявлено, что подростки чаще всего не решают проблемы, а приспосабливаются к сложившейся ситуации.

Для изучения особенностей взаимодействия родителей и детей в восприятии подростков и выявления доминирующей родительской стратегии использовался опросник «Взаимодействие родитель–ребенок». Нами были изучены стили родительского воспитания и сложившаяся в семье ситуация с точки зрения подростков.

Выявлены доминирующие стратегии родительского отношения: требовательность, автономность, сотрудничество, последовательность.

Высокий уровень требовательности отмечают 57% подростков: чем более требователен родитель, тем более высокого уровня ответственности он ожидает от ребенка. Автономность, т.е. низкий уровень контролирующего поведения по отношению к подростку, выявлена у 45,4% родителей; это может означать, что ребенка часто предоставляют самому себе. Низкий контроль может быть следствием безразличия к подростку или, возможно, проявлением доверия к нему, или стремлением родителей привить ему самостоятельность.

Высокий уровень сотрудничества между родителями и детьми отмечают 51,1% подростков. Последовательность родителей в своих требованиях, в отношении к подростку, в применении наказаний и поощрений отмечают 47,4% подростков.

Результаты исследования особенностей взаимодействия родителей и детей с позиции подростков. Установление зависимости между копинг-стратегиями подростков и ведущими стратегиями родительского отношения было осуществлено нами путем сравнения и выявления значимых различий с помощью *t*-критерия Спирмена. Анализ корреляционных связей позволил сделать следующий вывод: между копинг-поведением подростков и воспитательными стратегиями существует положительная зависимость. Коэффициент корреляции составил от 0,981 до 0,995 (уровень значимости $p \leq 0,01$). Полученные взаимосвязи показателей доказывают, что копинг-стратегии подростков

развиваются в зависимости от типа родительских отношений, т.е. особенности взаимодействия родителей и детей оказывают влияние на качественное своеобразие копинг-стратегий подростков.

Результаты исследования возрастных особенностей копинг-поведения подростков позволили наметить направление дальнейшей работы в рамках проблемы развития копинг-стратегий подростков. Так как копинг-стратегии являются результатом приобретенного опыта, то система коррекционно-развивающей работы может существенно влиять на развитие конструктивных копинг-стратегий поведения подростков и должна быть направлена как на формирование активного адаптивного копинг-поведения, так и на оптимизацию детско-родительских отношений.

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Б.В. СЕЛЮК

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

В классической механике используются законы эволюции не только в знакомой из школы форме законов Ньютона, но и в других формах. Другие формы оказываются более удобными при решении сложных задач и допускают обобщения, выходящие за рамки нерелятивистской макроскопической физики.

Принцип наименьшего действия является одной из таких форм законов эволюции. Он утверждает, что среди всех возможных уравнений движения $y(t)$ истинному движению системы из одного положения в другое за одно и то же время $(t_1 - t_2)$ отвечает уравнение, обеспечивающее минимальное значение функционала действия

$$S(y(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(y(t), \dot{y}(t)) dt, \quad (1)$$

где $L = T - U$ – функция Лагранжа, равная разности кинетической энергии T и потенциальной функции U .

Чтобы сделать этот принцип более понятным, студентам предлагается выполнить компьютерную лабораторную работу на базе Mathcad.

Работа заключается в решении следующей задачи.

Задача. Тело свободно падает с высоты, равной радиусу Земли R . Найдите без учета сопротивления воздуха время t_0 его падения на Землю. Сопоставьте истинное уравнение движения $y(t)$ с возможными

уравнениями $y_1(t)$. Вычислите функционал действия S для всех полученных уравнений. Сравните результаты и сделайте выводы.

Студенты составляют динамическое уравнение движения. Из-за зависимости силы тяжести от высоты получается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. С помощью Mathcad находится символьное решение этого уравнения. Оно оказывается довольно громоздким. Получается и численное решение этого уравнения. Совпадение графиков зависимости координаты тела от времени, полученных тем и другим способами, убеждает в истинности найденного уравнения движения $y(t)$. Решение уравнения $y(t_k) = 0$ дает время движения до падения на Землю.

В соответствии с принципом наименьшего действия среди всех возможных уравнений, описывающих падение тела за время t_k , уравнение $y(t)$ обеспечивает наименьшее значение функционала действия (1). Это и предлагается проверить, вычисляя действия для различных функций $y_p(t)$, задаваемых в виде полиномов четвертой степени:

$$y_p(t) = R + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4. \quad (2)$$

Коэффициенты полинома можно варьировать, однако так, чтобы они описывали движение тела с высоты R до поверхности Земли за время t_k с нулевой начальной скоростью. Указанные ограничения выражаются равенствами: $y_p(0) = R$, $y_p(t_k) = 0$, $a_1 = 0$. Из-за этих ограничений варьировать можно лишь два параметра. В работе варьируются параметры a_3 и a_4 . В полиномах, графики которых представлены на рисунке 1, $a_3 = 1 \cdot 10^{-4}$, $a_4 = -20 \cdot 10^{-8}$ для нижнего графика, $a_4 = 5 \cdot 10^{-8}$ для среднего и $a_4 = 20 \cdot 10^{-8}$ для верхнего.

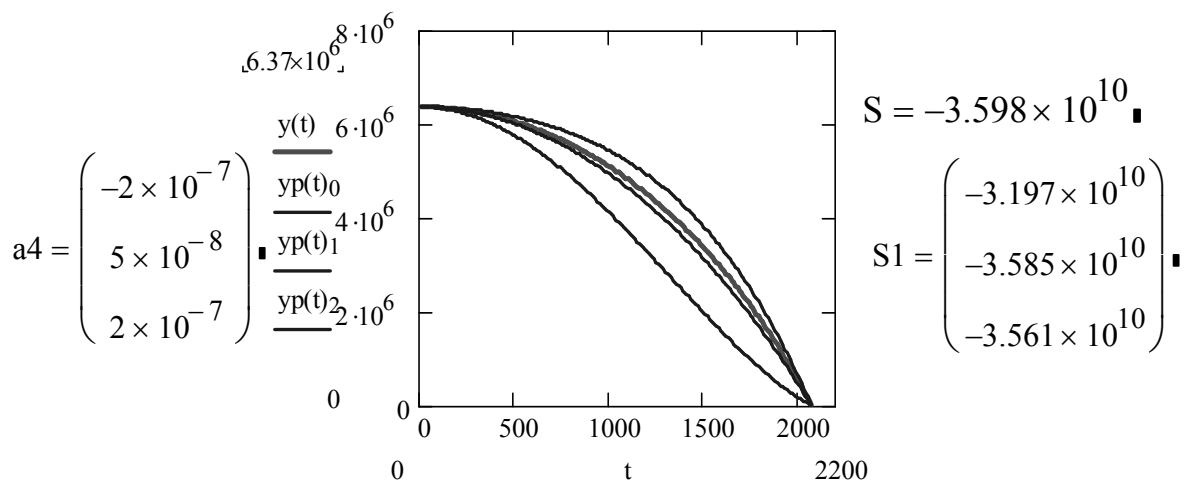


Рис. 1

По формуле (1) вычисляется действие S_1 для функции Лагранжа L_1 , в которую подставляются возможные уравнения движения $y_p(t)$, а также действие S для функции Лагранжа L , в которую подставляются истинные уравнения движения $y(t)$:

$$L_1(y_p(t), \dot{y}_p(t)) = \frac{m \dot{y}_p(t)^2}{2} - m g \frac{R y_p(t)}{R + y_p(t)}, \quad (3)$$

$$L(y(t), \dot{y}(t)) = \frac{m \dot{y}(t)^2}{2} - m g \frac{R y(t)}{R + y(t)}. \quad (4)$$

Задавая различные значения коэффициентов полинома, студенты получают графики возможных уравнений движения и находят для них соответствующие значения функционала действия S_1 (рис. 1). График истинного движения изображен толстой линией. Тонкие линии отображают возможные уравнения движения в виде полиномов (2). Для истинного уравнения движения действие $S = -3.598 \cdot 10^{10}$. Для изображенных на рисунке 1 возможных уравнений движения получаются следующие значения действия: $S_1 = -3.197 \cdot 10^{10}, -3.585 \cdot 10^{10}, -3.561 \cdot 10^{10}$. Отчетливо видно, что чем меньше отличается возможное уравнение движения от истинного, тем меньшее значение принимает функционал действия, в полном соответствии с принципом наименьшего действия.

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЯМЫ НА ЗАНЯТИЯХ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Б.В. СЕЛЮК

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

При изложении основ квантовой механики рассматривают задачу о движении частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Она позволяет познакомить учащихся с некоторыми особенностями поведения микрочастиц. В связи с развитием нанoeлектроники задача о движении электрона или дырки в потенциальной яме приобретает не только теоретическое, но и практическое значение. Из-за громоздкости математического аппарата детальное изучение этой актуальной задачи в Смоленском государственном университете проводится в виде компьютерной лабораторной работы.

Учащиеся работают с документом Mathcad, в котором содержится и необходимая информация, и вычислительные блоки, и рекомендации по проведению исследований.

Рассматривается задача о движении электрона в прямоугольной потенциальной яме шириной a . Высота одной стенки ямы равна U_0 , а другой бесконечно велика.

Студенты находят решение уравнения Шредингера. Входящие в это решение произвольные постоянные должны быть подобраны так, чтобы обеспечить непрерывность, гладкость и конечность волновой функции. Эти условия обеспечиваются следующим равенством:

$$\operatorname{tg}(\pi \sqrt{\varepsilon}) = \frac{-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{u - \varepsilon}}, \quad (1)$$

где ε и u – безразмерные энергия частицы и высота барьера.

Для наглядности проводится графическое решение уравнения (1). Корням этого уравнения соответствуют точки пересечения графиков на рисунке 1. Задавая различные значения u , студенты находят

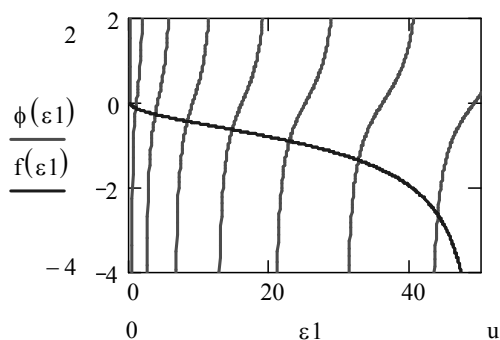


Рис. 1

энергетические

уровни в яме глубиной u . Выясняется, что число уровней конечно, а для достаточно мелкой и узкой ямы их может вовсе не быть. Более точно корни уравнения (1) находятся численным методом. При $u \rightarrow \infty$ решение уравнения (1) очевидно имеет вид: $\varepsilon = (n+1)^2$. Студенты проверяют это, получая ε для больших значений u .

Для каждого энергетического уровня находится волновая функция $\Psi(x)$ и плотность вероятности обнаружить частицу в точке – $W(x) = |\Psi(x)|^2$. На рисунке 2 представлен график функции $W(x)$. Студенты изучают распределение плотности вероятности для различных уровней в ямах различной глубины.

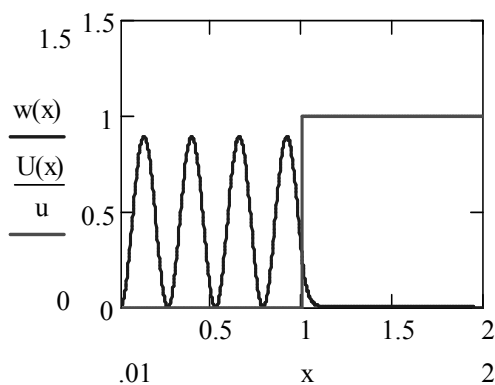


Рис. 2

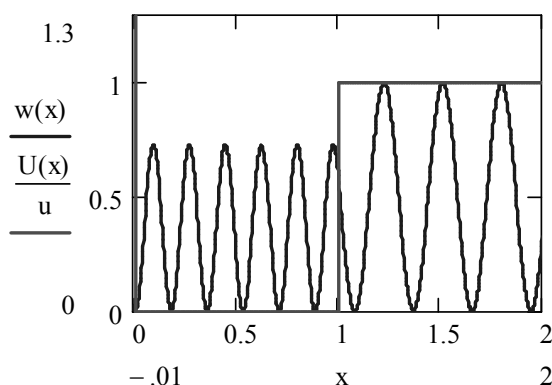


Рис. 3

Рассматривается и инфинитное движение, при котором энергия

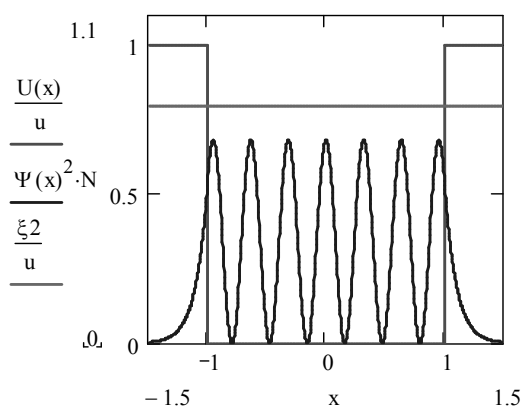


Рис. 4

частицы больше глубины ямы (рис. 3). В этом случае волновая функция имеет вид волны де-Бройля как внутри ямы, так и вне нее. Однако на границе ямы изменяются амплитуда и длина волны.

Решение задачи о симметричной потенциальной яме приводит к аналогичным результатам, что видно из рисунка 4.

Нанозлектроника имеет дело с двумерным электронным или дырочным газом, существующим в тонком приповерхностном слое полупроводника. Частицы этого газа находятся в потенциальной яме, имеющей приблизительно треугольную форму.

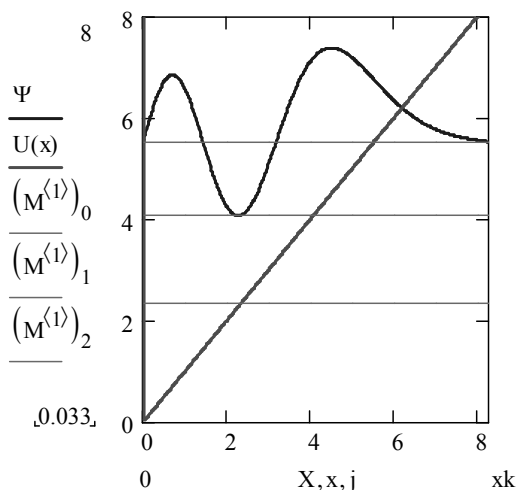


Рис. 5

Студентам предлагается решить задачу о потенциальной яме треугольной или более сложной формы. В этом случае приходится численно решать уравнение Шредингера, подбирая значение энергетического уровня так, чтобы обеспечить конечность искомой функции. На рисунке 5 изображена треугольная потенциальная яма, три первых энергетических уровня и волновая функция, соответствующая третьему из них.

Описанные компьютерные занятия позволяют студентам лучше понять, как применяется квантовая механика, и усвоить важные для современной техники особенности поведения микрочастиц.

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ СТИЛЕЙ ДЖЕЙМСА БИТТИ, УИЛЬЯМА КУПЕРА И ДЖЕЙМСА ТОМСОНА НА МАТЕРИАЛЕ ЖАНРА ЭПИТАФИИ

М.А. УРЫВАЕВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

В данной работе ставилась задача произвести классификацию стилей 3 авторов: Джеймса Битти (1735–1803), Уильяма Купера (1731–

1800) и Джеймса Томсона (1700–1748) в рамках одного и того же жанра – эпитафии.

Под эпитафией мы понимаем небольшое стихотворение, содержащее обращение к мертвому животному, человеку или послание от умершего [5]. В XVIII веке жанр эпитафии пользовался большой популярностью, особенно распространено было сочинение эпитафий по заказу, кроме того, создавались прижизненные эпитафии, чаще всего в форме «эпитафии самому себе» [3].

Данная работа относится к стилеметрической проблематике дифференциации стилей по лингвистическим параметрам. Целью исследования является определение формальных стихотворных признаков, необходимых для группировки поэтических текстов.

Материалом исследования служат 19 произведений жанра эпитафии английских поэтов-сентименталистов XVIII–XIX веков: 4 эпитафии Джеймса Битти, 12 эпитафий Уильяма Купера и 3 эпитафии Джеймса Томсона.

В нашем исследовании классификация стилей авторов будет проводиться путем последовательного применения различных наборов признаков с последующим сравнением результатов. Для исследования выбраны следующие группы признаков: морфологические, включающие количество существительных, прилагательных, глаголов, наречий, личных местоимений, притяжательных местоимений, указательных местоимений, модальных глаголов; синтаксические признаки, к которым отнесены следующие характеристики: количество простых предложений в составе сложносочиненного и количество придаточных предложений в составе сложноподчиненного, количество синтаксических переносов, количество синтаксических пауз в строке, эмфатический исход в строке, полная инверсия и частичная инверсия; рифменные признаки, представленные наличием или отсутствием точной рифмы, и ритмометрические признаки, включающие наличие мужской или женской клаузулы, количество сверхсхемных ударений в анакрусе, количество пропусков ударения на первом икте. Кроме того, для анализа были привлечены признаки, отражающие наличие времен группы Present, времен группы Past, времен группы Future и наличие имен собственных.

Методом исследования является дискриминантный анализ, успешно используемый в лингвистических работах [1; 2]. Данный вид анализа используется для выявления различия между двумя и более группами объектов по нескольким переменным. Он позволяет ответить на вопрос: насколько хорошо можно отличить один класс от другого, используя данный набор переменных [4].

Построенная матрица классификации содержит информацию о количестве и проценте корректно классифицированных наблюдений в каждой группе (табл. 1). Строками матрицы являются исходные классы, а столбцами – предсказанные классы.

В нашем исследовании к первой группе (классу) принадлежат произведения Джеймса Битти, ко второй – Уильяма Купера, к третьей – Джеймса Томсона.

В результате проведенного анализа были получены результаты, которые говорят о том, что дифференциальными признаками, обладающими дискриминантной силой, являются наличие переноса, разрыва, эмфатического исхода в строке, а также наличие полной и частичной инверсии, количество существительных, глаголов, наречий, личных, указательных и притяжательных местоимений, наличие времен группы Past и Present, количество сверхсхемных ударений в анакрусе.

Проверка полученной дискриминантной модели показала следующие результаты: 3 эпитафии Джеймса Битти из 4 попали в первую группу, что составило 75% совпадения естественной и искусственной классификаций. 11 эпитафий Уильяма Купера вошли во вторую группу, что составило 92% правильности классификации, а у Джеймса Томсона все эпитафии (3) попали в третью группу, что составило 100% корректно классифицированных наблюдений. В целом общий коэффициент правильности составил около 89% корректно классифицированных наблюдений, что почти в три раза превышает показатель правильности, который был бы достигнут при случайном совпадении результатов.

Таблица 1

Распределение текстов по автоматической классификации VS естественного распределения текстов

Группа	Степень правильной классификации (в процентах)	Битти	Купер	Томсон
Битти	75,00	3	1	0
Купер	91,67	1	11	0
Томсон	100,00	0	0	3
Всего	88,89	4	12	3

Таким образом, можно сделать вывод о существовании формальных различий между стилями авторов жанра эпитафии XVIII–XIX веков, эти формальные различия могут быть установлены при помощи средств компьютерной математики с высокой степенью разрешения.

Литература

1. Андреев В.С. Классификация стихотворных текстов методом дискриминантного анализа (на материале лирики американских поэтов-романтиков) // Вестник Минского государственного лингвистического университета. Серия 1. Филология. – Минск: МГЛУ, 2002. – № 10. – С. 141–146.
2. Андреев С.Н. Сопоставительное исследование поэтических текстов «оригинал – перевод» методом дискриминантного анализа (На материале переводов поэмы С.Т. Кольриджа) // Славянский стих: Лингвистическая и прикладная поэтика: материалы международной конференции 1998 / под ред. М.Л. Гаспарова, А.В. Прохорова, Т.В. Скулачевой. – М.: Языки славянской культуры: Наука, 2001. – С. 366–374.
3. Книгин И.А. Словарь литературоведческих терминов. – Саратов: Лицей, 2006. – 276 с.
4. Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных: учебное пособие. – СПб.: Речь, 2004. – 392 с.
5. Словарь литературных терминов [Электронный ресурс]. URL: <http://litterms.ru/je/351> (дата обращения: 20.02.2012).

ТЕХНОЛОГИИ РАЗРАБОТКИ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНЫХ КОМПЛЕКСОВ

З.М. ФИЛАТОВА

Государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Набережночелнинский государственный торгово-технологический институт», г. Набережные Челны
e-mail: czmfzm@mail.ru

Современный образовательный рынок E-Learning, представленный электронными учебными средствами, достаточно широк. Это и готовые к использованию электронные учебные комплексы (ЭУК), разработанные зарубежными и отечественными компаниями-производителями, и авторские разработки преподавателей образовательных учреждений (ОУ), участвующих в электронном обучении (ЭО).

Стратегия ведущих производителей электронных ресурсов состоит в унификации подходов, применяемых при разработке ЭУК для работы как в автономном режиме, так и в сетях. Разработанные в автономном режиме приложения без труда делаются доступными в сетях, в том числе и для систем ЭО, без потери их специфических свойств. Однако

не всегда готовые электронные средства обучения, разработанные компаниями электронной продукции, удовлетворяют потребности специалистов ОУ. В поиске эффективных средств обучения педагог все чаще полагается на создание авторского ЭУК как реального инструмента поддержки собственной методики при обучении предмету.

В настоящее время авторы электронных средств обучения применяют следующие технологии [1–3] разработки ЭУК: 1) при помощи языков программирования высокого уровня; 2) на основе гипертекстовых технологий; 3) с помощью специализированного инструментального средства.

При использовании *языков программирования высокого уровня* электронный учебный материал реализуется в виде программного комплекса и представляется как отдельный исполняемый модуль. Отличительной особенностью такого рода продукта является достаточно высокая степень защиты от тиражирования и от несанкционированного внедрения в систему тестирования. Однако ЭУК, созданные с помощью языков программирования, таких как Visual C++, Delphi 7.0, JavaScript и др., становятся уникальным и весьма дорогостоящим продуктом, при создании которого основные усилия затрачиваются на решение чисто технических проблем. Такая деятельность целесообразна только при наличии в структуре учебного заведения специального подразделения и кадров по подготовке электронных ресурсов.

Ряд возможностей для создания полноценных ЭУК дает *гипертекстовая технология*. При проектировании и разработке комплекса с использованием гипертекстовых технологий предусматриваются гиперссылки, позволяющие связывать информацию в любом ее представлении. Преимуществом комплекса, созданного на основе данной технологии, является платформенная независимость полученного продукта, а также универсальность его способа представления обучаемым: он может быть записан на внешние носители, распространяться по сети Интернет и/или в локальной сети учебного заведения. Кроме того, подобные комплексы можно легко дорабатывать, если требуется обновление контента электронного ресурса. К недостаткам гипертекстовой технологии можно отнести практическое отсутствие защиты от несанкционированного копирования учебного материала.

Третий подход заключается в разработке ЭУК с помощью *инструментального программного средства* (программы), позволяющего конвертировать предварительно структурированные материалы в предусмотренную форму [4; 5]. В последние годы наибольшей популярностью у разработчиков ЭУК пользуются специальные программы (CourseLab, SunRav BookEditor и др.). Их отличительной особенностью является легкость в освоении, что дает возможность

составителям курса создавать самостоятельно профессиональные электронные учебные средства.

Необходимо отметить, что во многом выбор технологии разработки ЭУК зависит от квалификации специалиста, осуществляющего программную реализацию учебного курса.

Литература

1. Вольф А.А., Астахова А.В. Особенности разработки инструментальной среды для создания электронного учебника по гуманитарной дисциплине // Ползуновский альманах. – 2009. Т. 2, № 3. – С. 339–348.

2. Рвачёва А.О., Никулова Г.А. Анализ практики использования инструментальных средств создания курсов дистанционного обучения в Internet // Цифровые образовательные ресурсы в учебном процессе педагогического вуза и школы: тезисы докладов IV Региональной научно-практической конференции. В 2 ч. Ч. II. – Воронеж: ВГПУ, 2010. – С. 37–39.

3. Соколова Л.С. Инструментальные средства для создания электронных учебных пособий // Цифровые образовательные ресурсы в учебном процессе педагогического вуза и школы: тезисы докладов IV Региональной научно-практической конференции. В 2 ч. ч. II – Воронеж: ВГПУ, 2010. – С. 56–59.

4. Филатова З.М. Технология создания электронного учебного комплекса в системе дистанционного обучения «Прометей» // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2011. – № 1(23). – С. 46–50.

5. Филатова З.М. Реализация учебного курса на базе технологической платформы «Прометей» // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2011. – № 4(26). – С. 40–46.

СОДЕРЖАНИЕ

Математик и педагог. К 75-летию Э.И. Зверовича	3
СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики	
<i>Амелина М.А., Амелин С.А.</i> Условие возникновения генерации в системах, охваченных частотно-зависимой обратной связью	5
<i>Бушкова В.А.</i> Автоматизация компьютерного исследования геодезических и геодезических трубок в системе компьютерной математики Maple	7
<i>Дьяконов В.П.</i> Задание, анализ и обработка сигналов в системе Mathematica	8
<i>Дьяконов В.П.</i> Контроль работы многоядерных микропроцессоров в СКМ Mathematica и Matlab	16
<i>Дьяконов В.П.</i> Компьютерная математика в осциллографах – анализаторах спектра TEKTRONIX MDO4000	20
<i>Заббарова Г.Р.</i> Реализация обмена данными между Maple-приложением и базой данных MYSQL	25
<i>Игнатъев Ю.Г., Исрафилова Э.Г.</i> Динамическая визуализация дифференциальной геометрии кривых в системе компьютерной математики Maple	27
<i>Игнатъев Ю.Г., Михайлов М.Л.</i> Сортировка трехмерных массивов и построение на их основе трехмерных поверхностей в системе компьютерной математики Maple	28
<i>Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р.</i> Теория кривых второго порядка в пакете компьютерной математики Maple	30
<i>Курсанов М.Н., Леонов П.Г.</i> Аналитическое решение задачи о стержневой пространственной статически определимой конструкции в системе Maple	33
<i>Коромбалёв Д.Е.</i> Анализ быстродействия системы Matlab в 32-х и 64-х разрядных операционных системах корпорации Microsoft	35
<i>Кристалинский Р.Е., Лобосова С.И.</i> Построение устойчивой фундаментальной функции линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами	38
<i>Лебедева М.Ю.</i> Использование системы компьютерной математики Mathcad для построения нечеткой регрессионной модели интервальных данных	40
<i>Осинов А.А.</i> Реализация аналитического тестирования по теме «Движения евклидова пространства» в пакете «Maple» и его приложения «Maplet»	43
<i>Пеньков А.П., Строев Н.Н., Строев К.Н.</i> Интеграция математического пакета Matlab+Simulink с системой схемотехнического проектирования Orcad 16.5	44

<i>Сачкова О.А.</i> Динамические модели дифференциальных уравнений в учебном процессе	47
<i>Суханова А.Г., Суханов М.Б.</i> Реализация компетентностного подхода с использованием компьютерных деловых игр и экономических расчетов в системе компьютерной математики Mathcad	49
<i>Холоднов В.А., Кулишенко Р.Ю.</i> Моделирование природоохранных процессов в системе компьютерной математики Mathcad	53
<i>Холоднов В.А., Кулишенко Р.Ю.</i> Моделирование управления ректификационной колонной в системе компьютерной математики Mathcad	57
<i>Черкасова В.В.</i> Динамическая визуализация качения шара по поверхности средствами системы компьютерной математики Maple	60

СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

<i>Авраменко А.А.</i> Нечеткие когнитивные модели для анализа мультиагентных систем	63
<i>Александрова В.И., Кристалинский В.Р.</i> Методика прогнозирования стоимости перспективного образца вооружения и военной техники на основе методов нечеткой логики	64
<i>Бирюкова Т.К., Гешкович М.М., Киреев В.И.</i> Интегро-дифференциальные многочлены и сплайны произвольной четной степени в задачах анализа параметров функционирования распределенных информационных систем	67
<i>Борисов В.В.</i> Классификация условий и методов учета неопределенности при анализе функционирования сложных организационно-технических систем	72
<i>Борисов В.В., Мунерман В.И., Селиванов В.В.</i> Моделирование представления знаний	76
<i>Головенков Р.В., Подопрigorов В.С., Троицкий Ю.В.</i> Анализ погрешностей преобразования тока фотоэлектрического умножителя в-напряжение	78
<i>Дроздецкий С.В., Ширяев А.О.</i> Моделирование вертикальной системы управления активным выпрямителем	80
<i>Емельченков Е.П.</i> Визуализация в учебном процессе	83
<i>Емельченков Е.П., Даниленкова Е.Н., Лагуткин Д.А.</i> О вычислениях в многопроцессорных вычислительных системах	86
<i>Захаров А.С.</i> Разработка моделей для поддержки принятия решений на основе нечётких байесовских сетей	88
<i>Зеров В.А.</i> Методы проведения переговоров в процессе согласования экспертных данных в задачах поддержки принятия групповых решений	93
<i>Ковалев А.В.</i> Задача последовательностного принятия решений	95

<i>Кругликов И.А., Ширяев А.О.</i> Особенности работы силового трансформатора в обратномходовом «косом мосте»	97
<i>Макаров Д.И., Мунерман В.И.</i> Параллельная реализации операции соединения	99
<i>Мисник А.Е.</i> Иерархическая нейросетевая модель сложной технической системы	101
<i>Мунерман В.И., Омельченко Н.Н.</i> Объектная модель для массовой обработки данных	103
<i>Мунерман В.И., Онищук Ю.С., Ханенкова Е.В.</i> Распараллеливание алгоритмов на графах на основе алгебры многомерных матриц	105
<i>Мунерман В.И., Самойлова Т.А.</i> Использование средств баз данных в реализации алгоритма транзитивного замыкания	106
<i>Мунерман В.И., Симахова А.Н.</i> Распараллеливание операций алгебры многомерных матриц	109
<i>Мунерман В.И., Устьян К.Р.</i> Оптимизация запросов в массовой обработке данных	111
<i>Набатчиков А.С., Якименко И.В.</i> Обнаружение объектов при обработке изображений в среде Matlab R2011b	112
<i>Найденов Е.В., Липовой В.Г.</i> Макромодель шим-контроллера UC3524 для программы Micro-Cap	114
<i>Сизов А.А.</i> Система SAS как эффективный инструмент работы с данными. Краткий анализ особенностей пакета	117
<i>Синицын И.Н., Шаламов А.С., Сергеев И.В., Белоусов В.В., Агафонов Е.С.</i> Развитие средств интегрированной логистической поддержки изделий наукоемкой продукции на основе систем компьютерной математики	119
<i>Скачков Д.Е.</i> Нечеткие иерархические сети Петри для формализации образовательных процессов вуза	124
<i>Сысков В.В., Коваленко Д.В.</i> Подход к реализации расширяемости и масштабируемости программных средств имитационного моделирования	129
<i>Смолин В.А., Троицкий Ю.В.</i> Логометрические схемы преобразования сигналов проволочных тензодатчиков	131
<i>Федулов Я.А.</i> Способ построения нечетких оценочных моделей с учетом согласованности показателей оценки и возможностью обратного вывода	133
<i>Ширай А.Е., Провоторова А.О., Гайдаенко Т.И.</i> Аппаратная поддержка векторно-матричной модели данных	135
<i>Штемпель А.Н.</i> Анализ распространения энергии по рельсовой линии	138

СЕКЦИЯ 3. Математика и ее приложения

<i>Анищенкова Н.Г.</i> О решении видоизмененной краевой задачи типа Рикье с разрывными коэффициентами для бианалитических функций в круге	141
---	-----

<i>Адуков В.М.</i> О теореме Пуанкаре для линейного разностного уравнения второго порядка в случае равных по модулю характеристических корней	143
<i>Василенков В.П.</i> Граничная теорема Линделёфа для полианалитических функций	144
<i>Васильев Я.А.</i> О некоторых вопросах картины разрешимости одной обобщенной краевой задачи типа Римана для бианалитических функций	146
<i>Вувуникян Ю.М.</i> Тензорное произведение полиномиальных эволюционных операторов с обобщенными импульсными характеристиками	147
<i>Григорьев И.И., Бушуев О.Ю.</i> Разработка математической модели тензометрического преобразователя давления	152
<i>Долгополова О.Б., Зверович Э.И.</i> Исключительный случай задачи линейного сопряжения на полуоси	156
<i>Евдокимова Г.С.</i> Средние состояния в системе массового обслуживания	159
<i>Зверович Э.И.</i> Задача линейного сопряжения и функция Бейкера-Ахиезера	161
<i>Ибряева О.Л.</i> О вычислении аппроксимаций Паде в методе Паде-Лапласа	165
<i>Карачик В.В.</i> Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре	167
<i>Кирьяцкий Э.</i> Числовые операторы и диофантовы уравнения	169
<i>Кирьяцкий Э., Кирьяцкий Е.</i> О родственных функциях с отличными от нуля разделенными разностями высших порядков	172
<i>Кирьяцкис Д.</i> Некоторые примеры фундаментальных систем однородных линейных дифференциальных уравнений и системы Чебышева	175
<i>Кирьяцкис Д.</i> Об одном свойстве коэффициентов функции, удовлетворяющей линейному однородному дифференциальному уравнению	178
<i>Коровченко Е.С., Бушуев О.Ю.</i> Программно-аппаратный комплекс исследования динамических характеристик преобразователей давления	178
<i>Куприкова О.Н.</i> Краевая задача Неймана в классе квазигармонических функций третьего рода	181
<i>Куриленко С.М.</i> О некоторых задачах в весовых аналитических пространствах Бесова в единичном шаре	183
<i>Повприц Е.В.</i> Об ограниченности одного класса интегральных операторов в весовых классах n -гармонических в поликруге функций	185
<i>Поплавская Л.А.</i> О структуре решений автономной системы уравнений в одном из критических случаев	187
<i>Поплавская Л.А., Велигурский Г.А., Садкова Р.Э.</i> Ортогонализация структурных функций состояний сложных систем с множеством состояний элементов	189

<i>Расулов К.М.</i> Метод интегральных «ловушек» для решения трехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций	191
<i>Тихонов И.В.</i> Нелокальные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений и линейная независимость сдвигов функции, стремящейся к нулю на бесконечности	212
<i>Тихонова О.В.</i> Многоуровневое математическое моделирование сложных систем	215
<i>Шерстюков В.Б.</i> Новые результаты о разложении на простые дроби величины, обратной к целой функции экспоненциального типа	217
<i>Ястребов М.Ю., Зуб И.В.</i> Математическое моделирование задач оптимальной эксплуатации силовых установок	219

СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании и прикладная лингвистика

<i>Ассонова Н.В.</i> Использование CDF-демонстраций при изучении геометрических величин будущими учителями начальных классов	222
<i>Борисов А.П.</i> О модели взаимодействия вуза и средней школы в создании информационного образовательного пространства и эффективном применении икт в учебном процессе	224
<i>Быков А.А., Сенчилов В.В.</i> Интерактивные технологии как средство формирования пространственного воображения школьников при изучении курса геометрии	226
<i>Велько О.А.</i> Построение курса «Основы высшей математики» для социологов на основе компетентностного подхода	230
<i>Емельченков Е.П., Даниленкова Е.Н., Лагуткин Д.А., Шильгина А.М.</i> Исследование операций и САПР учителя	233
<i>Коноплева Н.А.</i> Множественное представление операторной модели индуктивного построения базы знаний для ИСППР	235
<i>Марченко В.М., Зверович Л.Ф., Борковская И.М., Пыжкова И.М.</i> Уровневая личностно-ориентированная технология преподавания высшей математики	237
<i>Останина Н.В.</i> Исследование копинг-стратегий подростков и характера взаимодействия родителей и детей	239
<i>Селюк Б.В.</i> Принцип наименьшего действия	241
<i>Селюк Б.В.</i> Потенциальные ямы на занятиях по квантовой механике	243
<i>Урываева М.А.</i> Классификация индивидуальных стилей Джеймса Битти, Уильяма Купера и Джеймса Томсона на материале жанра эпитафии	245
<i>Филатова З.М.</i> Технологии разработки электронных учебных комплексов	248

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 13

Издательство Смоленского государственного
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко*

Подписано к печати 10.04.2012. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. п. л. 16. Уч.-изд. л. 16. Тираж экз. 120
Заказ №

Отпечатано с оригинал-макета авторов в ИТЦ СмолГУ
214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4.