

Министерство образования и науки РФ  
Смоленский государственный университет

---

# **Системы компьютерной математики и их приложения**

*Материалы XIV Международной научной конференции,  
посвященной 90-летию профессора М.Б. Балка*

Выпуск 14

Смоленск  
Издательство СмолГУ  
2013

УДК 621.396.218  
ББК 32.97  
С 409

*Печатается по решению  
редакционно-издательского  
совета СмолГУ*

**Редакционная коллегия:** *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *И.Б. Болотин*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *В.П. Дьяконов*, д-р техн. наук, проф.; *Е.П. Емельченков*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Я.А. Васильев*, ассистент кафедры математики и информатики.

**Системы компьютерной математики и их приложения:**  
С 409 материалы XIV Международной научной конференции, посвященной 90-летию профессора М.Б. Балка. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – Вып. 14. – 244 с.  
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XIV международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 17–19 мая 2013 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218  
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,  
*продолжающееся издание*

© Авторы, 2013  
© Издательство СмолГУ, 2013

## МАТЕМАТИК И ПЕДАГОГ К 90-летию профессора М.Б. Балка

Хотя наш вуз не столичный, в его истории имеется немало ученых, внесших существенный вклад в отечественную науку, делавших имя вузу, создавших смоленские научные школы. Среди них крупный математик, талантливый педагог и организатор, эрудит и полиглот Марк Беневич Балк, которому в 2013 году исполнилось 90 лет.

Юбиляр родился 27 января 1923 года в местечке Полонное на Украине.

Великую Отечественную войну он встретил студентом 2 курса мехмата Киевского университета. В начале июля 1941 года добровольцем пошел в часть особого назначения НКВД, действующую в тылу врага, откуда попал в госпиталь; в этом же грозном году он потерял родителей.

Высшее образование завершал в годы войны, сначала в Средне-Азиатском университете, а затем в Омском педагогическом институте, одновременно зарабатывая на жизнь разнорабочим.

В 1945 году молодой математик поступает в аспирантуру Московского областного пединститута, после окончания которой, в 1948 году, получает назначение в Смоленский педагогический институт, где и трудится до ухода на заслуженный отдых.

М.Б. Балк проявил себя талантливым и глубоко эрудированным педагогом. На высоком научно-методическом уровне читал многие обязательные и специальные математические курсы. Ценнейшим его качеством как педагога является глубокое понимание всего комплекса задач подготовки учителей математики, умение глубоко и увлекательно излагать труднейшие разделы высшей математики. Несколько поколений учителей математики Смоленской области воспитаны на его лекциях.

Научные интересы Марка Беневича весьма разнообразны, а их результаты довольно плодотворны. Его основная специальность – математический анализ, точнее говоря, теория функций комплексного переменного. Главное научное достижение М.Б. Балка в области комплексного анализа – создание и фундаментальная разработка нового научного направления – теории полианалитических функций, которая является естественным обобщением теории аналитических функций комплексного переменного. Этому направлению посвящены более 30 его научных статей, содержащих ряд глубоких и оригинальных результатов. Многие из них опубликованы в журналах «Доклады АН СССР», «Успехи



математических наук». В наиболее законченном виде эти результаты изложены в его монографии<sup>1</sup>, а также в обзорной статье<sup>2</sup>. Научные результаты М.Б. Балка в области теории полианалитических функций способствовали существенному развитию многих других разделов как в самой математике (теория краевых задач комплексного анализа, теория приближения функций, аналитическая теория дифференциальных уравнений), так и различных прикладных дисциплин (механика сплошной среды, теория фильтрации, теория массового обслуживания и др.).

М.Б. Балк создал на базе указанного направления Смоленскую математическую школу. 14 его учеников успешно защитили диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Многие из них в дальнейшем стали профессорами, завкафедрами, деканами и руководителями вузов.

Кроме теоретических исследований Марка Беневича живо интересуют вопросы методики как высшей, так и элементарной математики. Широко известны его многочисленные методические статьи, опубликованные в журналах «Математика в школе» и «Квант», учебники и учебные пособия по математике и ее приложениям. Эти работы отличаются своей актуальностью, свежестью дидактических идей, оригинальными эвристическими подходами. О широте интересов юбиляра может говорить даже простой, далеко не полный перечень его книг (а об их содержательности можно судить хотя бы по названию выпустивших их издательств).

В издательстве «Наука» вышли книги: «Геометрические приложения понятия о центре тяжести» (1956 год, в 1960 году издана в Японии), «Элементы динамики космического полета» (1965 год), «Сборник задач по небесной механике» (1972 год). В издательстве «Просвещение» опубликованы: монография «Математика после уроков» (1971 год), учебные пособия «Элементарная геометрия» (1966 год), «Геометрические построения на плоскости» (1955 и 1957 годы), «Математический анализ (мощность, метрика, интеграл)» (1980 год), «Теория аналитических функций» (1985 год).

М.Б. Балк неоднократно выступал с докладами на конференциях и с лекциями не только в России, но и за рубежом (в Германии, Болгарии, Израиле, Греции, США).

Поздравляя Марка Беневича с юбилеем, благодарим его за неоценимый вклад, который он внес в развитие физмата СмолГУ, и желаем ему доброго здоровья.

*В.А. Петров  
К.М. Расулов*

---

<sup>1</sup> Balk M.B. Polyanalytic Functions. – Berlin: Akademie Verlag, 1991. – 197 p.

<sup>2</sup> Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Совр. пробл. матем. функц. напр. – М.: ВИНТИ, 1991.– Т. 85. – С. 187–246.

# СЕКЦИЯ 1

## Системы компьютерной математики

### БИБЛИОТЕКА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ БЛОКОВ

**С.А. АМЕЛИН, М.А. АМЕЛИНА**

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: amlmtr@gmail.com

При проектировании электронных устройств часто встает задача оценить их работоспособность на функциональном уровне, чтобы проверить правильность идей, на основе которых формируется структура устройства. Такую оценку наиболее рационально выполнять средствами математического моделирования. При этом особой точности от модели не требуется, учет особенностей схемотехнической реализации тоже не нужен. Казалось бы, задача простая, но современные программы схемотехнического моделирования (OrCad, Multisim, Micro-Cap и т.п.) не обладают встроенными средствами для реализации моделирования подобного уровня. Подразумевается, что они должны использоваться для точных расчетов с учетом всех или хотя бы основных параметров реальных электронных компонентов. А для моделирования на системном уровне (на уровне функциональных блоков) предполагается использование программ типа MATLAB.

Однако возможности программ схемотехнического анализа позволяют реализовывать любые модели компонентов, в том числе и предельно упрощенные, предназначенные для моделирования на функциональном уровне. Создание библиотеки таких компонентов позволяет существенно расширить возможности и область применения таких программ. В частности, использование библиотеки функциональных блоков позволяет проводить моделирование одних и тех же устройств на разных уровнях (например, на уровне функциональной схемы и на уровне принципиальной схемы). Сравнительный анализ результатов такого моделирования позволяет выявлять источники погрешности и узлы, точность выполнения которых критическим образом влияет на работоспособность устройства в целом.

В состав библиотеки функциональных узлов наиболее рационально включить типовой набор функциональных блоков электронных устройств: усилитель, ограничитель, сумматор, интегратор, компаратор, источник тока, управляемый напряжением, ключ, а также логические

вентили и цифровые микросхемы средней степени интеграции (триггеров, счетчиков и т.п.).

К моделям функциональных блоков предъявляются два основных требования: они должны адекватно реализовывать основные функции устройств и быть максимально быстрыми в плане вычислений.

Использование для построения моделей функциональных блоков стандартных компонентов из библиотек программ схемотехнического анализа является нерациональным, поскольку такие модели избыточно сложные и излишне точные в плане решения конкретной задачи. Поэтому целесообразно создавать новые модели, которые описывают лишь основные (существенные для моделирования на функциональном уровне) свойства реальных электронных блоков или компонентов. Оптимизация модели должна быть направлена не на получение высокой точности, а на получение хорошей сходимости алгоритмов численных методов, используемых при расчетах и, следовательно, высокой скорости вычислений.

На кафедре электроники и микропроцессорной техники филиала ФГБОУ ВПО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске создана подобная библиотека функциональных блоков для программы схемотехнического моделирования Micro-Cap. Непрерывно дорабатываясь и совершенствуясь, эта библиотека вот уже несколько лет используется как для обеспечения учебного процесса, так и в научных исследованиях, проводимых на кафедре.

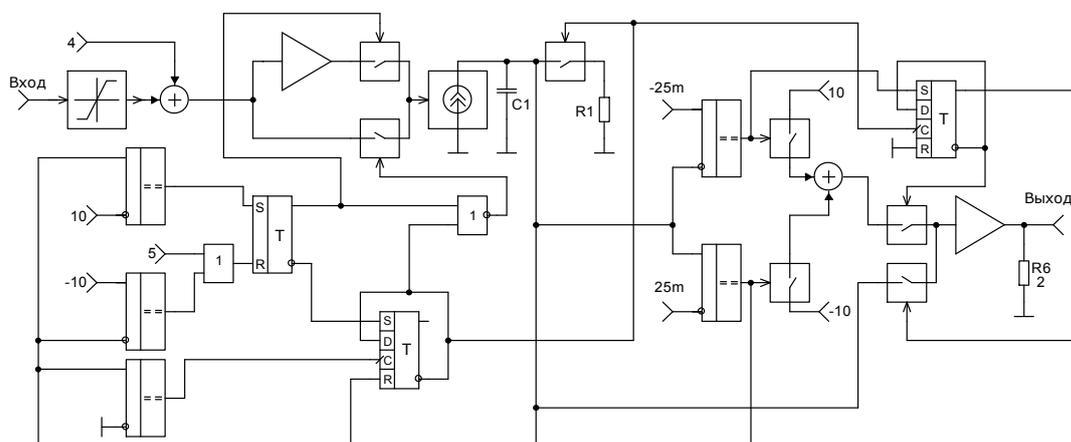


Рис. 1. Схема формирователя импульсов, построенная на функциональных блоках

В частности, эта библиотека компонентов используется студентами при выполнении курсового проектирования по дисциплине «Электронные цепи и микросхемотехника». В рамках этого курсового проекта студенты разрабатывают функциональную схему устройства и проводят моделирование ее работы (рис. 1). А потом реализуют разработанную схему на принципиальном уровне и вновь проводят моделирование, но уже по полным (стандартным) моделям

компонентов. Кроме того, разработанная библиотека функциональных блоков активно используется для создания моделей ШИМ-контроллеров импульсных источников питания, что является актуальной прикладной и научной задачей.

### Литература

1. Амелина М.А., Амелин С.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 464 с.

## МАКРОМОДЕЛЬ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ПАРАМЕТРОВ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ

С.А. АНДРЕЙКИН, Е.В. НАЙДЁНОВ, И.В. ЯКИМЕНКО

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: nzettez@gmail.com

Контроль параметров окружающей среды – важная техническая задача. Современное производство требует соблюдения уровней температуры и давления при изготовлении уникальной продукции, область медицины устанавливает высокие нормы к стерильности помещений, создание оптимальных условий жизнеобеспечения космического корабля предусматривает контроль над уровнями влажности, насыщенностью кислородом и множеством дополнительных параметров. Поэтому создание высокоточной, адаптивной системы контроля над процессами терморегуляции и соблюдением норм среды является актуальной задачей.

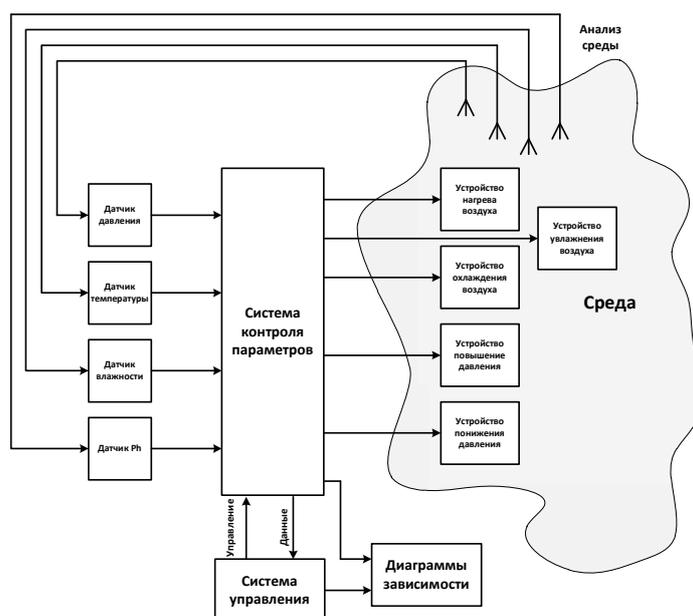


Рис. 1. Структура системы контроля параметров окружающей среды

Неотъемлемой частью процесса проектирования сложной системы контроля является моделирование. Разработчику важно иметь точную модель устройства, на основе которой будет отработано его физическое поведение. В системе компьютерной математики Matlab&Simulink была предложена математическая модель универсальной системы соблюдения параметров окружающей среды, которая учитывает изменения температуры, давления, влажности, кислотности.

### **Литература**

1. Гусев В.Г. Электроника и микропроцессорная техника: учеб. для вузов. – 4-е издание, доп. – М.: Высшая школа, 2006. – 799 с.

## **МОДЕЛЬ РУПОРНОЙ АНТЕННЫ В ПАКЕТЕ CST MICROWAVE STUDIO**

**А.Р. БЕКТЕМИРОВ<sup>1</sup>, А.С. РОГОЖКИН<sup>2</sup>**

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: <sup>1</sup>Toffz@mail.ru, <sup>2</sup>alexras@bk.ru

С появлением разнообразных программ электродинамического моделирования изменился подход к разработке многих электронных устройств, особенно в области высоких частот. Для реальных СВЧ устройств достаточно сложно получить аналитическое решение задачи их анализа, часто это вообще не представляется возможным, а использование специализированных программ значительно упрощает эту задачу. Тем не менее применение специализированных пакетов еще не гарантирует достоверности создаваемых моделей и точности их расчета. Умение построить модель, максимально приближенную к реальному объекту, является крайне важным для разработчика, и её можно развивать как эмпирически, путем сравнения моделей с опытными образцами, так и аналитически, опираясь на известные соотношения, описывающие рассматриваемые структуры.

Пакет CST Studio Suite представляет собой интегрированную среду проектирования, включающую средства для создания и анализа объемных моделей устройств и механизмов (их электромагнитных, тепловых и механических свойств), проведения анализа целостности сигналов в электронных схемах и т.д. CST Microwave Studio, как часть CST Studio, предназначена для моделирования трехмерных электромагнитных структур в области высоких и сверхвысоких частот, в частности, антенн.

Рассматриваемая в работе рупорная волноводная антенна – одна из простых антенн СВЧ диапазона, тем не менее, она широко

используется в системах слежения, связи, радиоастрономии. Рупорная антенна состоит из конусной структуры (рис. 1), запитываемой волноводной линией (в данном случае, через круглый волновод на основной модели H11). Такая антенна может работать с любой, в том числе круговой поляризацией.

Объемная модель рупорной антенны в CST Microwave Studio была создана как комбинация элементарных геометрических примитивов: цилиндров, конусов, при этом учитывалась конечная толщина стенок антенны, что максимально приближает созданную модель к реальному виду. При расчете построенной 3D-модели использовался метод конечных разностей во временной области (FDTD), производящий решение системы уравнений Максвелла во временной области для каждой из элементарных прямоугольных ячеек сетки разбиения созданной модели. Для повышения точности расчетов используется режим адаптивного уплотнения сетки (рис. 1).

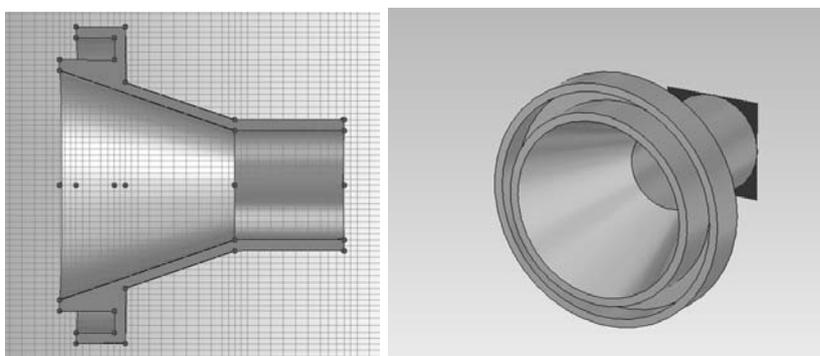


Рис. 1. Модель рупорной антенны: в разрезе с адаптивной сеткой и 3D вид

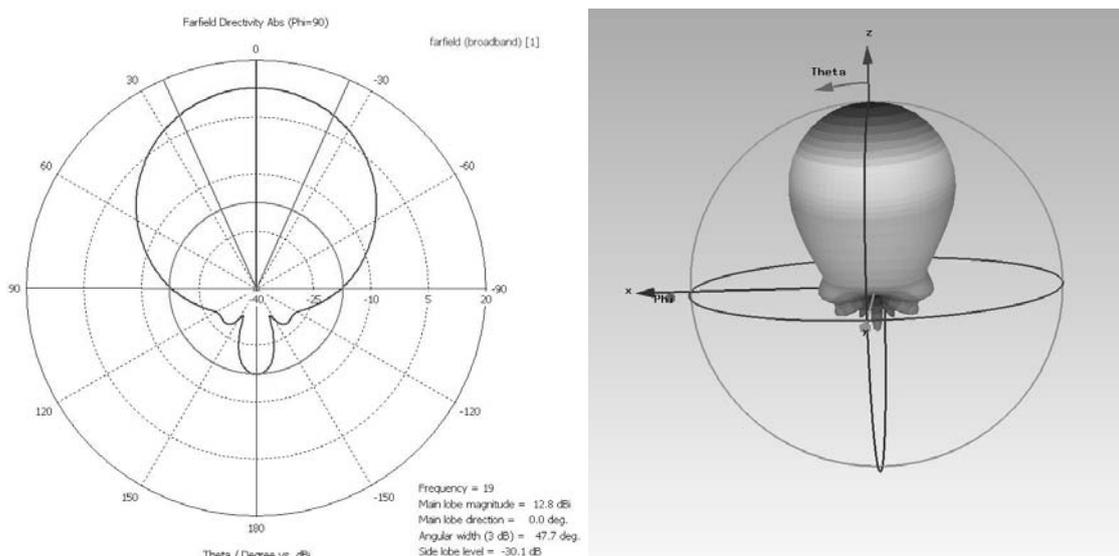


Рис. 2. Диаграммы направленности в полярной системе координат (2D и 3D вид)

Несмотря на сложность этих уравнений и наличие в них частных производных, их можно преобразовать в форму, удобную для численных

расчетов [1], при этом вся сложная математика оказывается «спрятанной» от разработчика.

Оценка характеристик моделируемой рупорной антенны производилась по результатам расчета дальнего поля и электрических характеристик. Характеристики дальнего поля можно вывести в трехмерном представлении и в двумерной – полярной и декартовой системах координат (рис. 2). Для улучшения характеристик (уменьшение уровня боковых лепестков, минимизация влияния дифракции) базовый вариант был дополнен кольцом Френеля (рис. 1).

Таким образом, пакет CST Studio позволяет производить моделирование СВЧ устройств, производить адаптацию геометрии структуры для получения заданных характеристик, тем самым уменьшая число итераций требуемых для создания работоспособного устройства.

### **Литература**

1. Банков С.Е., Курушин А.А. Электродинамика и техника СВЧ для пользователей САПР. – М., 2008.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ АССОЦИАТИВНОЙ СРЕДЫ НА ОСНОВЕ FPGA**

**В.В. БОРИСОВ, А.В. ПОЛЯЧКОВ**

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: vborisov@etna-it.ru, polyachkov.sml@mail.ru

Разработка новых высокоэффективных ассоциативных сред позволяет реализовать заложенный в этих средах высокий уровень параллелизма обработки информации и создавать высокоэффективные вычислительные системы [1].

Потенциально ассоциативные среды позволяют обеспечивать заметное ускорение обработки за счет преодоления проблемы, связанной с разделением по устройствам обработки и хранения информации в структурах Фон Неймановской архитектуры.

Ассоциативная среда может иметь сложную многомерную структуру, состоящую из различного типа ассоциативных ячеек, позволяет хранить определенный объем информации и, что очень важно, может осуществлять определенные виды обработок непосредственно в своей среде.

Расширяется применение программируемых средств типа FPGA, позволяющих реализовывать быстродействующие архитектуры и, в частности, аналогичные ассоциативным средам.

Авторы доклада, имея определенный опыт в конструировании ассоциативных сред различных типов, предлагают следующую

структуру средств моделирования перспективных ассоциативных средств, реализуемых на основе FPGA.

Моделирование ассоциативных сред осуществляется путем применения разнообразных моделей организации ассоциативной среды с использованием разнообразных общесистемных и специализированных средств моделирования.

Моделируемая ассоциативная среда представляется в виде многоуровневой модели. На нижнем уровне это ассоциативные элементы, позволяющие проектировать ассоциативные ячейки следующего уровня, такие как: осцилляторные ассоциативные ячейки, ассоциативные ячейки с командным управлением и другие известные и новые типы ячеек.

На 3-м уровне ассоциативная среда представляет структуру определенной топологии и многомерности, например, в виде перспективной многокоординатной осцилляторной ассоциативной среды с командным управлением [2].

Для представления ассоциативной среды как части реальной вычислительной системы введен прикладной уровень. Ассоциативная среда рассматривается как один из блоков вычислительной системы и «обрастает» устройствами сопряжения с узлами ВС. По мере практической необходимости осуществляется разделение ассоциативной среды на отдельные модули или блоки, позволяющие реализовать реальные средства на основе ассоциативной среды.

Многоуровневый подход использован и относительно применения различных средств моделирования. Это позволяет наиболее эффективно использовать абстрактные модели ассоциативной среды и конкретизировать их под реально реализуемые проекты.

На верхнем уровне используются языки программирования, такие как C, C++, JAVA. В качестве системы моделирования применим MatLab/Simulink.

Для учета особенностей реализации ассоциативной среды на основе схем FPGA применяются системы проектирования, ориентированные на эффективность реализации в конкретных схемах производителей FPGA. Для FPGA разработки XILINX используются продукты ISE Design Suite и Vivado Design Suite. Для ALTERA – Quartus II.

На этом уровне эффективны описания ассоциативной среды на языках Verilog, VHDL, ABEL. Описания на этих аппаратно ориентированных языках могут быть получены используемыми системами проектирования как из верхнего уровня системы моделирования, путем преобразования результатов компиляций C, C++ или модели MatLab/Simulink, так и генерацией из средств ISE, Vivado, Quartus II.

На уровне практического моделирования используются указанные выше системы проектирования и аппаратные модули, содержащие одиночные FPGA или массивы FPGA.

Многоуровневые организации модели ассоциативной среды и системы моделирования дополняют друг друга, позволяют перестраивать модель и процесс моделирования в соответствии с решаемой задачей, позволяют совершенствовать модели путем введения новых составных частей и связей между ними.

### Литература

1. Огнев И.В., Борисов В.В. Ассоциативные среды. – М.: Радио и связь, 2000. – 312 с.
2. Борисов В.В., Полячков А.В. Модели, методы и технология создания ассоциативных средств интеллектуальной поддержки принятия решений // Сб. тр. Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 50-летию Смоленского филиала МЭИ, 2011. – В 2х т. Т.2. Смоленск: Изд-во Филиала МЭИ в г. Смоленске. – С. 208–212.

## ИЗВЛЕЧЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ДАННЫХ ИЗ ВЕБ-САЙТОВ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА С ПОМОЩЬЮ MATLAB

Д.К. ВОЛЧИК

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск  
e-mail: diana-lex@bk.ru

Способность электронных вычислительных машин (ЭВМ) понимать человеческую речь, а также взаимодействовать с человеком на одинаковом уровне знания языка стала одной из важнейших задач с момента появления первых ЭВМ. Решением данной проблемы занимается **обработка естественного языка** (англ. *Natural Language Processing* или *NLP*), которая исследует методы создания математических моделей для описания лингвистических закономерностей естественных языков [4]. Таким образом, решение данной проблемы будет означать создание более удобной формы взаимодействия компьютера и человека.

Несмотря на свою полувековую историю, данная проблема так и не нашла своего полного решения. Действительно, эта задача трудная, так как система искусственного интеллекта должна свободно владеть человеческим языком и однозначно понимать его, но это практически невыполнимо, потому что даже человек не всегда понимает другого человека однозначно.

Обработка естественного языка включает исследование таких проблем, как синтез и распознавание речи, синтез и анализ текста,

анализ тональности (эмоциональной оценки) и анализ мнений, информационный поиск и извлечение информации, машинный перевод.

Для решения задач обработки естественного языка необходимо наличие хорошей базы (корпуса) текстовых данных, с помощью которой можно осуществлять построение и проверку математических моделей. Для английского языка имеется множество общедоступных корпусов [2]. Для русского языка также существует база текстовых данных [3], но она не подходит для решения ряда задач естественной обработки языка, например, для анализа тональности, так как не содержит информации об отношении автора к тексту.

В настоящее время в сети Internet существует множество ресурсов, содержащих большой объём текстовых данных, в том числе и различные отзывы, рецензии, имеющие дополнительные метаданные (автор, оценка, мнение). Поэтому актуальной является задача автоматического извлечения текстовых данных из веб-сайтов с целью применения их для построения математических моделей при решении задач естественной обработки языка.

Система компьютерной математики MATLAB широко используется при выполнении технических и математических расчётов [1]. Рассмотрим, каким образом задача извлечения текстовых данных из веб-сайтов может быть решена с помощью MATLAB.

Алгоритм извлечения можно представить в виде следующих шагов.

Во-первых, необходимо загрузить интересующий веб-сайт в виде HTML-кода. HTML-код содержит текстовое описание всей страницы, включая как требуемые текстовые данные, так и теги разметки страницы. Для загрузки HTML-кода интернет-страницы в среде MATLAB используется функция `urlread`.

Во-вторых, из загруженного HTML-кода необходимо выделить собственно требуемые текстовые данные. Для решения данной задачи хорошо подходят регулярные выражения. Для этого в MATLAB имеется функция `regexr`, позволяющая в произвольной строке выполнять поиск по заданному регулярным выражением шаблону.

Следует отметить, что при использовании данного алгоритма возможно возникновение следующих проблем:

– при загрузке интернет-страницы с помощью функции `urlread` русский текст может не отображаться (проблема связана с различием кодировок интернет-страницы и MATLAB при загрузке HTML-кода; MATLAB позволяет использовать кодировку UTF8, а русскоязычные страницы могут содержать кодировки windows-1251, KOI-8 и другие);

– веб-сайт, из которого извлекаются данные, может определить наличие специализированной программы и заблокировать доступ.

Для устранения данных проблем автором предложена модификация функции `urlread` для загрузки текстовых данных в произвольной

кодировке и маскирования доступа к веб-сайту под один из известных веб-браузеров.

Описанный выше метод извлечения текстовых данных позволяет достаточно гибко собирать текстовые данные из веб-сайтов. Причем можно изменить не только источник – веб-сайт, но и тип извлекаемых данных. Для этого потребуется лишь модифицировать регулярные выражения. Применение данного метода позволяет построить свой собственный корпус для решения задач обработки естественного языка с выделением требуемых характеристик текстовых данных (например, оценок тональности).

### Литература

1. Дьяконов В.П. MATLAB 7.\*/R2006/R2007. – ДМК-Пресс, 2008. – 768 с.
2. Корпус текстовых данных: [http://en.wikipedia.org/wiki/Text\\_corpus](http://en.wikipedia.org/wiki/Text_corpus).
3. Национальный корпус русского языка: <http://ruscorpora.ru>.
4. Селезнев К. Обработка текстов на естественном языке // Открытые системы. – 2003. – № 12.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В РОТОВОЙ ПОЛОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ ДЫХАНИЯ

Д.П. ГОЛОСКОКОВ<sup>1</sup>, Д.А. КАРДАКОВ<sup>2</sup>, И.А. ИВАЧЕВА<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Государственный университет морского и речного флота  
имени адмирала С.О. Макарова, г. Санкт-Петербург  
e-mail: guwc@mail.ru

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный медицинский университет  
им. акад. И.П. Павлова, г. Санкт-Петербург  
e-mail: studio-id@mail.ru

Известно, что развитие зубочелюстных аномалий у ребенка сопровождается функциональным нарушением дыхания, которому в процессе ортодонтического лечения необходимо уделять особое внимание и предусматривать его восстановление.

На кафедре стоматологии детского возраста с курсом челюстно-лицевой хирургии СПбГМУ им. акад. И.П. Павлова предложена методика диагностирования функции дыхания по тепловому состоянию в полости рта, что требует математического обоснования [1].

Хорошей математической моделью тепловых процессов, происходящих в полости рта, является задача стационарной теплопроводности [2], которая сводится к решению уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  при соответствующих граничных условиях. Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа: на границе  $S$  поддерживается

заданное распределение температуры  $u_0$ , т. е.  $u|_S = u_0$ . Задачи решались в среде pdeTool пакета прикладных программ MATLAB. На рисунке 1 представлена расчетная область с фиксированными точками, являющимися вершинам вписанного многоугольника.

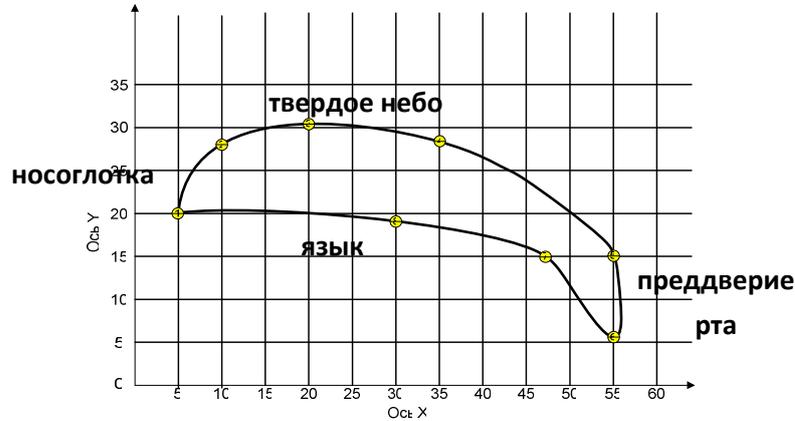


Рис.1. Расчетная область

Конфигурация выбранной области соответствует ротовой полости человека.

Ниже приведено решение задачи по определению температуры в области ротовой полости при заданной температуре на линии раздела (по часовой стрелке) и варианте дыхания – рот открыт, дыхание носовое (табл. 1, рис. 2).

Таблица 1

**Вариант расчета**

Вариант	От точки 1 до точки n	Температура, t°C
Рот открыт, дыхание носовое	1 – 5; 6 – 1	36,6
	5 – 6	20,6

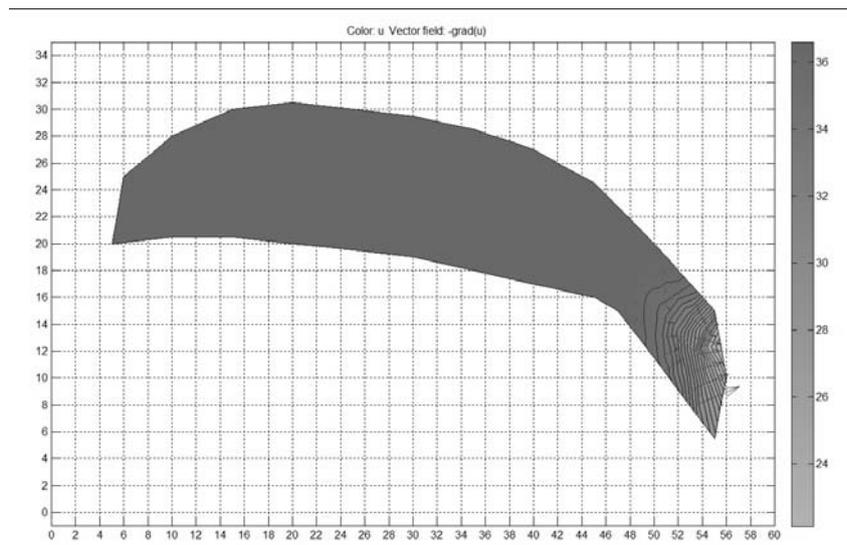


Рис. 2. Распределение температуры в ротовой полости (рот открыт, дыхание носовое)

Результаты расчетов полностью соответствуют экспериментальным данным клинических исследований пациентов с указанными нарушениями дыхания.

Таким образом, контроль температурного поля в ротовой полости пациента способен идентифицировать его тип дыхания.

### **Литература**

1. Фадеев Р.А., Кардаков Д.А. Применение терморегистраторов для контроля ортодонтического лечения в амбулаторных условиях // Научно-практический журнал. – СПб.: Институт стоматологии, 2012. – № 1 (54). – С. 42 – 44.

2. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. – СПб.: Изд-во «Питер», 2004. – 540 с.

## **НОВЫЙ ОБЛИК И НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ MATLAB+SIMULINK 8.0 (R2012B)**

**В.П. ДЬЯКОНОВ**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: vpdyak@yandex.ru

Матричная система MATLAB популярна во всем мире и в последние годы выходили 2–3 реализации системы в год. Однако создатель системы MATLAB корпорация The MathWorks редко меняет первые цифры в версиях своей системы. Но вот последняя полученная автором лицензионная версия этой системы оказалась MATLAB 8.0 (R2012b), тогда как предшествующая была MATLAB 7.14 (R2012a).

Система была испытана в 4 вариантах:

- На лучшем в мире ноутбуке MacBook Pro с дисплеем Retina высокого разрешения (2880x1800 пикселей) 4-ядерным процессором Intel Core 7 2,3 ГГц, ОЗУ 8 Гбайт и твердотельным диском 256 Гбайт – операционная система MAC OS X Mountain Lion 10.8 (версия MATLAB 8.0 с разрядностью 64 бит для компьютеров MAC фирмы Apple.

- На том же компьютере с приложением Parallel Desktop с установленной операционной системой Windows XP и 32-разрядной системой MATLAB 8.0 под Windows.

- На настольном ПК с 4-ядерным процессором Intel Core 2, ОЗУ 8 Гбайт, твердотельным жестким диском, 64-разрядной операционной системой Windows 7 и 64-разрядной системой MATLAB 8.0.

- На настольном ПК с 4-ядерным процессором Intel Core 2, ОЗУ 8 Гбайт, обычным жестким диском, 32-разрядной операционной системой Windows XP и 32-разрядной системой MATLAB 8.0.

Работа на MacBook Pro оставляет самое приятное впечатление. Благодаря твердотельному диску время выхода на рабочий режим составляло 2–3 с, столько же занимало выключение компьютера (еще меньше в режиме сна). Интерфейс MATLAB имел очень аккуратный и четкий вид (рис. 1), прекрасно использовалось высокое разрешение дисплея.



Рис. 1. Интерфейс пользователя и окно About MATLAB при работе в Mac OS

Первое, что бросается в глаза уже при первом пуске системы, – три новые панели HOME (Дом), PLOTS (Графики) и APPS (Пакеты применения). Под панелями расположено большое окно командного режима. Если открыть список Layout, можно подключить или отключить другие панели и элемента интерфейса, в частности, панель рабочего пространства с данными о введенных переменных различного типа и панель выбора рабочей директории. Общие настройки можно найти в окне Preferences, активизируя кнопку с этим названием.

На рисунке 1 в центре окна командного режима работы показано окно About MATLAB с краткими данными системы. Видно, что версия MATLAB R2012b появилась совсем недавно – 22 августа 2012 года.

Объективное представление о скорости вычислений (но не работы с интерфейсом) дает тестовая утилита bench. Гистограмма утилиты bench показана на рисунке 2.

Огромная популярность системы MATLAB во всем мире связана с тем, что система построена на основе интерпретатора языка сверхвысокого уровня с ориентацией на матричные вычисления. Он

интенсивно развивается на протяжении всего времени существования системы, постепенно приобретая новые возможности:

- Исполнение в строке большого числа команд, вплоть до целых программ.
- Наличие встроенного редактора программных кодов.
- Возможность компиляции и создания исполняемых файлов.
- Поддержка многоядерных процессоров и параллельных вычислений.
- Мощная графика.
- Новый графический интерфейс пользователя.
- Огромное число пакетов расширения в различных областях науки и техники (ныне их 82, включая новые пакеты расширения MATLAB Production Server и Financial Instruments Toolbox).
- Математическое блочное имитационного моделирования с помощью пакета Simulink.
- Новый редактор пакета расширения Simulink.

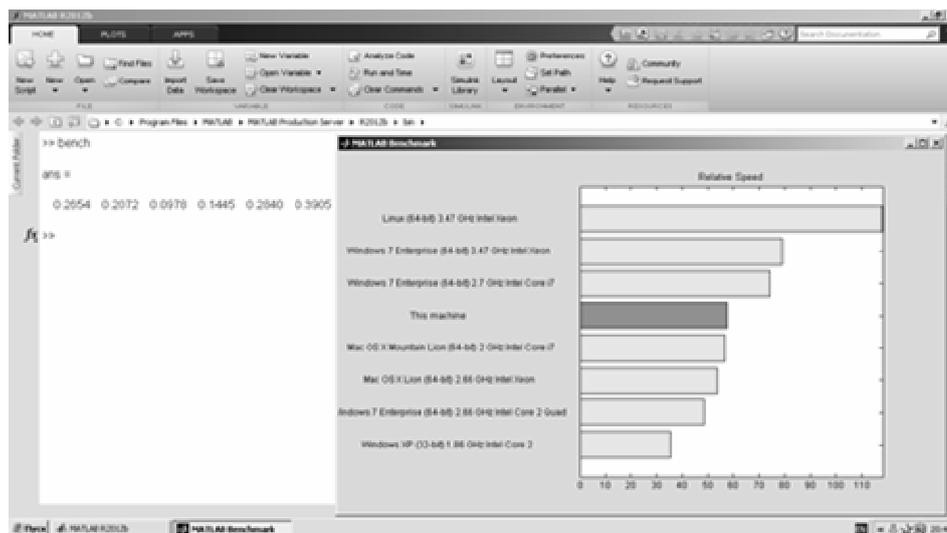


Рис. 2. Тест bench и его результаты для MATLAB 8.0 в Windows 7.0

В MATLAB команды можно выполнять прямо, вводя их командную строку после знака приглашения `>>`:

```
>> x=-15:0.1:15; %Ввод массива значения переменной x  
>> plot(x,sin(x)) %Построение графика функции sin(x)
```

Можно поступить и иначе – оформить этот набор команд как script-файл с заданным именем, которое не должно совпадать с именами других файлов и функций. Для создания таких файлов и вполне полноценных программ объектно-ориентированного программирования в системе MATLAB имеется простой текстовый редактор. Он открывается командой с указанием типа файла их раскрывающегося списка New.

Основными объектами языка MATLAB являются одномерные векторы и многомерные (например, двумерные и трехмерные) матрицы. Вначале с такими объектами работали электронные таблицы, например Microsoft Excel. Они были очень удобны для задания векторов и матриц и редактирования их элементов. Наконец электронные таблицы появились и в MATLAB (рис. 3). Таблицу можно использовать и для задания переменных векторного и матричного типа.

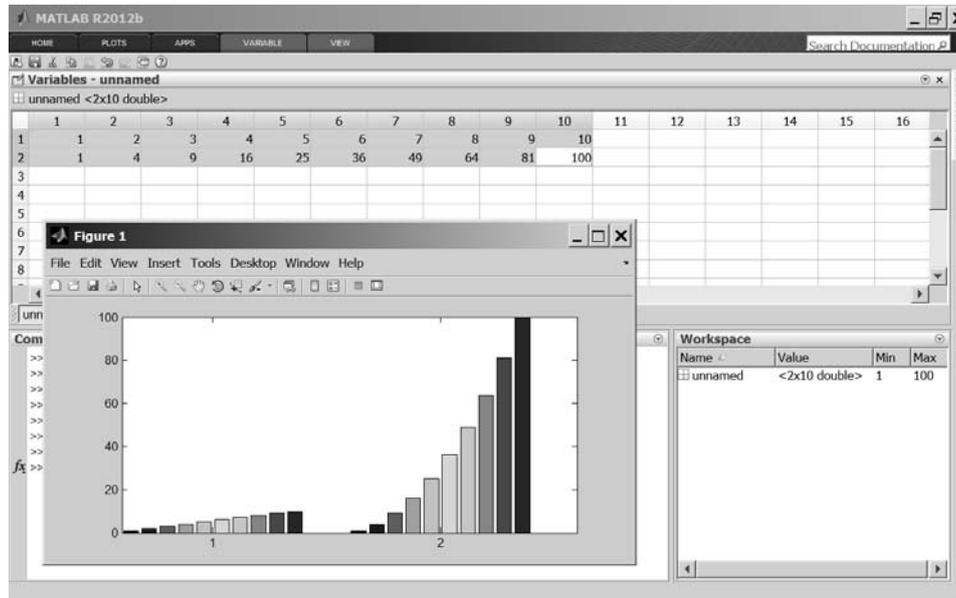


Рис. 3. Электронная таблица в MATLAB 8.0

В MATLAB 8.0 введены новые средства – каталоги графических примеров. Они представляют собой списки примеров по различной тематике, причем каждый пример представлен небольшой пиктограммой с изображением получаемого графика. В новейшей версии MATLAB 8.0 (R2012b) все примеры объединены в один большой каталог и представлены панелью PLOTS. Еще одна панель каталогов APPS открывает каталог пакетов расширения. В большинстве случаев обращения к тому или иному пакету расширения выводит интерактивное GUI окно возможностей пакета.

Итак, новейшая реализация матричной системы MATLAB 8.0 (R2012b) существенно переработана. Особенно большие изменения введены в графический интерфейс пользователя GUI, в основу которого положен быстрый доступ ко всем возможностям системы с помощью обширных каталогов общих средств HOME, графики PLOTS и пакетов расширения APPS. Справка дополнена каталогом демонстрационных примеров. Сохранены обширные математические возможности системы и средства 2D 3D визуализации. В состав системы входят 82 пакета расширения системы в области механики, физики, электро-радиотехники и др., включая два новых пакета. Система имеет

существенно обновленный пакет имитационного блочного моделирования Simulink 8.0 с новым редактором.

### Литература

1. [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com) – Интернет-сайт корпорации The MathWorks.
2. Дьяконов В.П. MATLAB R2006/2007/2008 + Simulink 5/6.7. Основы применения. – М.: СОЛОН-Пресс, 2008.
3. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК-Пресс, 2012.
4. Дьяконов В.П. MATLAB и Simulink для радиоинженеров. – М.: ДМК-Пресс, 2011.
5. Дьяконов В.П., Пеньков А.А. MATLAB и Simulink в электроэнергетике. – М.: Горячая линия – Телеком, 2009.

## ПАКЕТ СИМВОЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ MUPAD В МАТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ MATLAB 8.0 (R2012B)

**В.П. ДЬЯКОНОВ**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: [vpdyak@yandex.ru](mailto:vpdyak@yandex.ru)

Матричная система MATLAB популярна во всем мире благодаря доведенной до совершенства реализации численных методов и блочного имитационного математического моделирования. Но в новые версии системы, в том числе последнюю MATLAB 8.0 (конец августа 2012 года), введен пакет расширения Symbolic Math Toolbox, обеспечивший MATLAB принципиально новые возможности в реализации символьных (аналитических) вычислений и решения типовых задач компьютерной алгебры.

Вычисления можно выполнять прямо в окне командного режима работы MATLAB. Для этого надо исполнить в командном режиме команду:

```
>> help symbolic
```

Будут выведены данные о версии пакета, дата его создания и список всех возможностей. Команда `help name` выводит справку по функции с именем `name`.

Есть и другой, порою более удобный, путь выполнения таких вычислений – в окне ноутбука интегрированной системы компьютерной алгебры MuPad со своим графическим интерфейсом пользователя GUI (рис. 1). Ноутбук вызывается кнопкой MuPad в каталоге приложений APPS новейшей системы MATLAB 8.0.

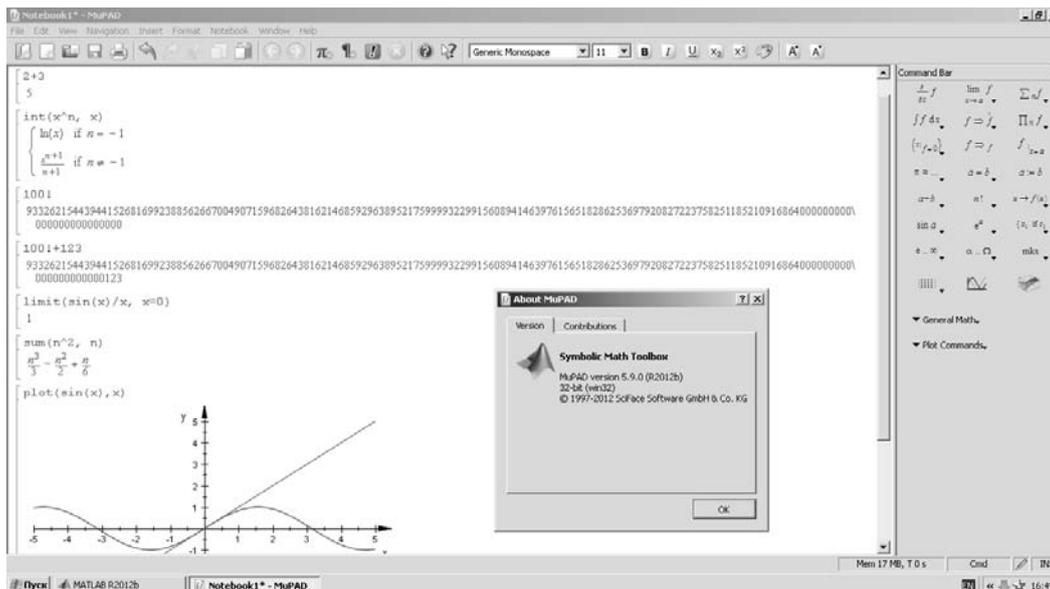


Рис. 1. Ноутбук системы MuPAD 5.9, интегрированной с MATLAB 8.0, и примеры вычислений в нем

Для задания символьных переменных используется оператор `syms`:

```
>> syms a b c d
>> M=[a b;c d]
M =
 [ a, b]
 [ c, d]
```

Арифметикой произвольной точности, или просто *точной арифметикой*, в `muPAD` называют вычисления, у которых все числа результатов являются точными. Функция `digits` служит для установки числа цифр в числах арифметики произвольной точности.

```
>> digits
Digits = 32
>> vpa pi
ans =
21.1415926535897932384626433832795
```

Функция `vpa(S,D)` возвращает результат с количеством знаков чисел `D`. Примеры:

```
>> vpa(exp(1), 50)
ans =
2.7182818284590450907955982984276488423347473144531
```

Для обращения (инвертирования) матрицы в символьном виде используется функция `inv`:

```
>> inv([a b;c d])
ans =
 [ d/(a*d-b*c), -b/(a*d-b*c) ]
 [ -c/(a*d-b*c), a/(a*d-b*c) ]
```

О богатстве операций линейной алгебры свидетельствует ноутбук системы MuPad (рис. 2), на котором в правой части его окна открыты списки основных математических операций General Math и основных групп операций линейной алгебры.

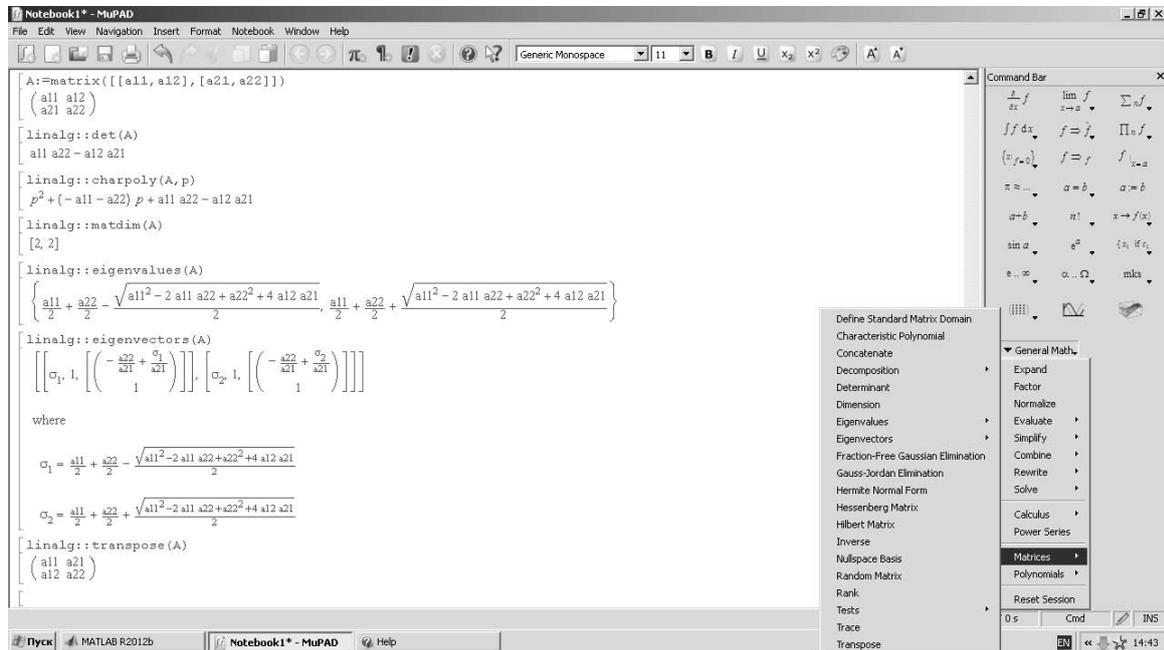


Рис. 2. Окно ноутбука MuPad – списки основных математических операций General Math и основных групп операций линейной алгебры

Для вычисления в символьном виде производных от выражения  $S$  служит функция `diff`, записываемая в формате `diff(S, 'v')` или `diff(S, sym('v'))`. С помощью функции `int` можно вычислять интегралы, например:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

```
>> int(x*exp(-x), x, 0, inf)
ans =
1
```

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) z dx dy dz = \frac{1}{3} a^6$$

```
>> int(int(int((x^2+y^2)*z, x, 0, a), y, 0, a), z, 0, a)
ans =
1/3*a^6
```

Для получения разложений аналитических функций в ряд Тейлора (и Маклорена) служит функция `taylor`:

```
>> taylor(exp(x))
ans =
x^5/120 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1
```

В Symbolic Math Toolbox включены основные типы специальных математических функций, например:

Logarithms, Dirac, Heaviside, step, Gamma, beta,  
binomial coefficients, Zeta, dilogarithm, polylogarithm  
Airy, Bessel (первого и второго рода), Trigonometric  
Integrals  
Direct, inverse error, Hypergeometric, Whittaker M,  
Whittaker W, Lambert W, Omega, Wright

Для решения систем алгебраических уравнений и одиночных уравнений служит функция solve:

```
>> S=solve('x+y=3','x*y^2=4',x,y)
S =
      x: [3x1 sym]
      y: [3x1 sym]
>> S.x
ans =
[ 4]
[ 1]
[ 1]
>> solve('sin(x)=0.5',x)
ans =
0.52359877559829887307710723054658
2.6179938779914943653855361527329
```

Ряд функций выполняет обычные операции компьютерной алгебры:

- `simplify(S)` – поэлементно упрощает символьные выражения;
- `simple(S)` – выполняет различные упрощения для элементов массива `S` и выводит как промежуточные результаты, так и самый короткий конечный результат;
- `expand(S)` – расширяет выражения, входящие в массив `S`, рациональные выражения она раскладывает на простые дроби, полиномы — на полиномиальные разложения и т. д.;
- `factor(S)` – поэлементно разлагает выражения вектора `S` на простые множители, а целые числа — на произведение простых чисел;
- `collect(S,v)` – обеспечивает комплектование выражений в составе вектора или матрицы `S` по степеням переменной `v` и др.

Одной из самых эффективных и часто используемых операций символьной математики является операция подстановки. Она реализуется функцией `subs`:

```
>> syms a b x y;
>> subs(x-y,y,1)
ans =
x-1
>> subs(sin(x)+cos(y),[x,y],[a,b])
ans =
sin(a)+cos(b)
```

Для аналитического решения дифференциальных уравнений в форме Коши служит функция `dsolve('eqn1', 'eqn2', ...)`:

```
>> dsolve('D2x=-2*x')
ans =
C1*cos(2^(1/2)*t)+C2*sin(2^(1/2)*t)
>> dsolve('D2y=-2*x+y', 'y(0)=1', 'x')
ans =
(2*x*exp(x) + (-C2+1)*exp(x)^2+C2)/exp(x)
```

Решения дифференциальных уравнений легко представить в виде графика (рис.3).

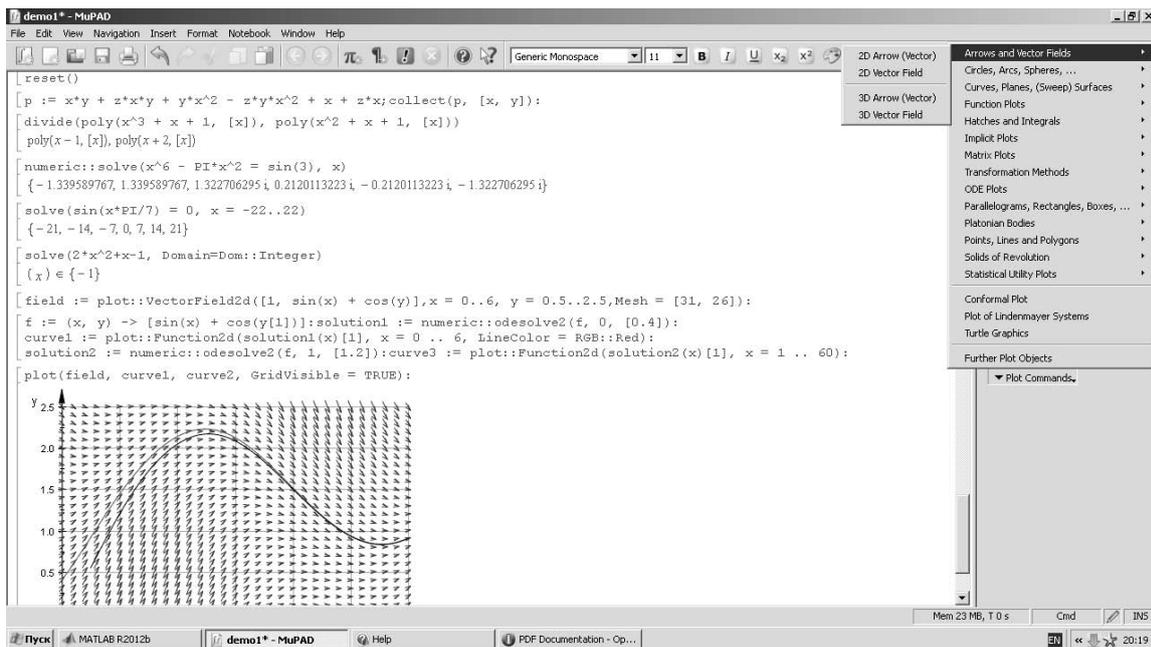


Рис. 3. Примеры решения уравнений (последний пример с построением решения дифференциального уравнение на графике векторного поля)

Пакет расширения Symbolic Math на основе системы компьютерной алгебры MuPad открыл перед матричной системой MATLAB всю красоту и все принципиально новые возможности символьных (аналитических) вычислений.

### Литература

1. [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com) – Интернет-сайт корпорации The MathWorks.
2. Дьяконов В.П. MATLAB R2006/2007/2008 + Simulink 5/6/7. Основы применения. – М.: СОЛОН-Пресс., 2008.
3. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК-Пресс, 2012.
4. Дьяконов В.П. MATLAB и Simulink для радиоинженеров. – М.: ДМК-Пресс, 2011.
5. Дьяконов В.П., Пеньков А.А. MATLAB и Simulink в электроэнергетике. – М.: Горячая линия – Телеком, 2009.

# РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ УПРОЩЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОГРАММЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ АНТЕНН ММАНА-GAL

**И.В. ЕГОРЕНКОВ**

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск  
e-mail: egorenkov1991@yandex.ru

Целью работы являлось создание средств подготовки расчетных моделей для программы анализа антенных систем ММАНА-GAL. Указанная программа получила широкое распространение среди разработчиков антенн благодаря высокой скорости расчетов, наличию бесплатной обычной и недорогой профессиональной версии [1].

Выяснено, что основной проблемой при практической работе с программой ММАНА-GAL является способ задания данных для последующего моделирования. Модель антенны создается в виде набора отрезков, для которых указываются начальные и конечные координаты. Эти координаты приходится рассчитывать и вводить вручную. В результате много времени непроизводительно затрачивается на создание, а главное, на последующую правку модели антенны.

Для решения проблемы предлагается использовать созданное программное обеспечение – препроцессор, автоматизирующий расчет геометрии моделей. Разработка программы была проведена в среде Visual Studio 2010 с использованием языка C# [2]. Исходным файлом для разработанного препроцессора являлся XML-файл, в котором описываются структура антенны в виде укрупненных элементов, а результирующим – файл программы ММАНА – GAL с расширением .maa. Пример XML-файла приведен ниже.

```
<?xml version="1.0" encoding="utf-8"?>
<Group>
  <Vars Freq="67" z1="2000" />
  <Wireframe Name="WF_trunk1_fat" WireDiam="40">
    <Node Name="N0" X="0" Y="0" Z="0" />
    <Node Name="N1" X="687" Y="0" Z="0" />
    <Node Name="N2" X="1442" Y="0" Z="0" />
    <Line FromNode="N0" ToNode="N1"></Line>
    <Line FromNode="N1" ToNode="N2"></Line>
  </Wireframe>
  <Wireframe Name="WF_trunk2_fat" WireDiam="40">
    <Node Name="N0" X="0" Y="61" Z="0" />
    <Node Name="N1" X="687" Y="57" Z="0" />
    <Node Name="N2" X="1442" Y="54" Z="0" />
    <Node Name="N3" X="2137" Y="51" Z="0" />
    <Node Name="N4" X="2779" Y="47" Z="0" />
    <Line FromNode="N0" ToNode="N1"></Line>
```

```
<Line FromNode="N1" ToNode="N2"></Line>
<Line FromNode="N2" ToNode="N3"></Line>
<Line FromNode="N3" ToNode="N4"></Line>
<Line FromNode="N4" ToNode="N5"></Line>
</Wireframe>
</Group>
```

Возможности созданного программного обеспечения позволяют: рассчитывать геометрию элементов антенн любой конфигурации с использованием переменных, копировать и поворачивать элементы, разбивать большие плоскости на мелкие элементы, строить сложные поверхности, например спиралевидные антенны по уравнению спирали. Работы над расширением функциональных возможностей программы и пополнением библиотеки укрупненных элементов продолжаются.

Таким образом, использование разработанного программного обеспечения упрощает и ускоряет работу пользователя с программой ММАНА-GAL, что приводит в конечном счете к получению антенн с лучшими характеристиками.

### **Литература**

1. Гончаренко И.В. Компьютерное моделирование антенн. Все о программе ММАНА. – М.: ИП РадиоСофт Журнал «Радио», 2002.
2. Тролсен Э. Язык программирования С# 2010 и платформа .NET 4.0. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2011.

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕСА ЗАДАЧИ В СИСТЕМЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ТЕСТИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПОВ КОНСТРУКТИВНОЙ ДИДАКТОМЕТРИИ В СКМ MAPLE**

**Г.Р. ЗАББАРОВА**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань  
e-mail: gulshaton@mail.ru

В [1] описаны принципы моделирования системы аналитического тестирования [2] на основе математического пакета Maple. В качестве средства создания интерактивной среды тестирования были предложены маплеты. В [3] описана организация обмена данными системы с базой данных MySQL. При дальнейшей разработке системы возникла необходимость оценки трудоемкости задач, предлагаемых для решения. В данной работе рассмотрена математическая модель вычисления трудоемкости задачи на основе принципов конструктивной дидактометрии, введенных ранее Р.А. Гильмановым [4].

В основе принципов конструктивной дидактометрии введенных Р.А. Гильмановым, лежит общая схема функционального акта мышления, предложенная академиком Н.М. Амосовым. В результате своих исследований Р.А. Гильманов пришел к выводу, что информационная структура учебной задачи как ее когнитивная модель имеет вид иерархической трехуровневой структуры. Данный вывод позволил ему научно обосновать понятия «трудность информационной структуры», «сложность информационной структуры» и «трудоемкость выполнения учебного задания», а также предложить способы их измерения. Причем трудность и сложность являются независимыми категориями, а трудоемкость – функцией трудности и сложности.

В [1], [3] описана расширенная схема системы аналитического тестирования, включающая несколько специализированных библиотек. При создании процедур библиотеки MarkScale, предназначенных для вычисления веса задачи, была использована предложенная Р.А. Гильмановым математическая модель вычисления трудоемкости учебного задания. В свою очередь, полученный вес задачи используется при вычислении итоговой оценки студента.

### **Литература**

1. Адиятуллина Г.Р., Игнатъев Ю.Г. Принципы моделирования системы аналитического тестирования знаний на основе системы компьютерной математики Maple. // Вестник ТГГПУ. – 2010. – № 2(20). – С. 6–12

2. Игнатъев Ю.Г. Использование аналитических возможностей пакета Maple для создания программ аналитического тестирования, само тестирования и генерации индивидуальных заданий в курсах высшей математики // Проблемы информационных технологий в математическом образовании: учебное пособие / под ред. Ю.Г.Игнатъева. – Казань: ТГГПУ, 2005. – С. 9–24.

3. Заббарова Г.Р., Игнатъев Ю.Г. Создание аналитической системы тестирования знаний по высшей математике на основе СКМ Maple и ее приложения maplelet // Информационные технологии в образовании и науке: материалы международной научно-практической конференции. – Казань: Казанский университет, 2012. – С. 73–76.

4. Гильманов Р.А. Конструктивная дидактометрия трудоемкости выполнения заданий // Проблемы конструктивной дидактометрии: монография. – Казань: Издательство Казанского университета, 1994. – С. 98–126.

5. Адиятуллина Г.Р., Игнатъев Ю.Г. Взаимодействие маплетов с базами данных в форматах txt и xls в аналитической системе тестирования. // Вестник ТГГПУ. – 2011. – № 3(25). – С. 6–17.

6. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006.

7. Кирсанов М.Н. Maple 13 и MapleT. Решение задач механики. – М.: Физматлит, 2010.

8. Адиятуллина Г.Р. Система аналитического тестирования в форме маплетов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. – С. 5–8.

9. Адиятуллина Г.Р. Комплекс программ для тестирования знаний по высшей математике // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XII международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. – С. 265–266.

10. Заббарова Г.Р. Реализация обмена данными между Maple-приложением и базой данных MySQL // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIII международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора Э.И. Зверовича. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2012. – С. 25–26.

## **УПРАВЛЯЕМЫЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СКМ MAPLE**

**Ю.Г. ИГНАТЬЕВ**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань  
e-mail: ignatev\_yu@rambler.ru

Рассмотрены принципы создания лабораторных работ и демонстраций по высшей математике, теоретической механике и электродинамике на основе управляемых динамических компьютерных моделей в СКМ Maple. Лабораторные работы создаются с помощью специализированных библиотек программных процедур в системе Maple. Соответствующие программные процедуры содержат параметры для управления компьютерными моделями, которые реализуются в формате оснащенной динамической визуализации [1]–[6]. Цифровое и графическое оснащение моделей позволяет обращаться с ними как с реальными объектами в формате натурального эксперимента. Приведены примеры лабораторий и демонстраций по математическому анализу, уравнениям математической физики, теории линейных колебаний, нелинейным динамическим и электродинамическим системам.

### **Литература**

1. Игнатъев Ю.Г., Абдулла Х.Х. Математическое моделирование нелинейных обобщенно-механических систем в системе компьютерной математики Maple // Вестник РУДН. – 2010. – № 4(3). – С. 99–111.

2. Игнатъев Ю.Г., Абдулла Х.Х. Математическое моделирование нелинейных электродинамических систем в системе компьютерной математики Maple // Вестник ТГГПУ. – 2010. – Вып. 2(20). – С. 22–27.

3. Игнатъев Ю.Г., Исрафилова Э.Г. Математическое моделирование объектов дифференциальной геометрии кривых в системе компьютерной математики MAPLE // Вестник ТГГПУ. – 2011. – Вып. 4(26). – С. 11–16.

4. Игнатъев Ю.Г., Бушкова В.А. Программа автоматизированного построения геодезических линий на произвольной параметризованной поверхности и их оснащенной динамической визуализации с автоматической оптимизацией графических параметров в системе компьютерной математики Maple // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2012614850, 30 мая 2012 г. Федеральная служба по интеллектуальной собственности.

5. Игнатъев Ю.Г., Исрафилова Э.Г. Программа автоматизированного полного исследования произвольной пространственной кривой по ее параметрическим уравнениям с выводом графиков ее дифференциальных параметров и оснащенной динамической визуализации движения адаптированного репера в математическом пакете Maple // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2012616071, 3 июля 2012 г. Федеральная служба по интеллектуальной собственности.

6. Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии в образовании и науке» – ИТОН 2012. 3-й Российский научный семинар «Методы информационных технологий, математического моделирования и компьютерной математики в фундаментальных и прикладных научных исследованиях» // Материалы конференции и труды семинара / под редакцией Ю.Г. Игнатъева. – Казань: Изд-во Казанского университета, 2012. – 244 с.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИИ ЧАСТИЦ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ НА ИНФЛЯЦИОННОЙ СТАДИИ РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ В СКМ MAPLE**

**Ю.Г. ИГНАТЬЕВ<sup>1</sup>, И.А. КОХ<sup>2</sup>**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

e-mail: <sup>1</sup>ignatev\_yu@rambler.ru, <sup>2</sup>kokh90@mail.ru

В работах [1]–[3] была рассмотрена модель эволюции спектра частиц сверхвысоких энергий в ультрарелятивистской Вселенной в приближении малого количества тепловых частиц. Эта модель привела к диффузионному уравнению типа Фоккера – Планка и была исследована в приближении малых космологических времен.

В данной работе предпринимается попытка построения и исследования аналогичной задачи с учетом ускорения Вселенной. Задача решается с помощью экстраполяции функций при малых космологических временах в пакете Maple. В работе представлены графики эволюции энергетического спектра частиц сверхвысоких энергий в зависимости от фактора инвариантного ускорения Вселенной.

### Литература

1. Ignatyev Yu. G. and Ziatdinov R.A. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early universe // Gravitation & Cosmology. – 2006. – Vol. 12, No. 4 (48). – P. 1–12.

2. Ignatyev Yu. G. and Ziatdinov R.A. Diffusion Model of Evolution of Superthermal High-Energy Particles under Scaling in the Early Universe. II. Early Stages // Gravitation and Cosmology. – 2008. – Vol. 14, No. 4. – P. 301–308.

3. Игнатъев Ю.Г., Зиятдинов Р.А. Асимптотическое приближение модели Фоккера-Планка космологической эволюции сверхтепловых ультрарелятивистских частиц при наличии скейлинга взаимодействий // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2009. – № 2. – С. 87–91.

## ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СКМ MAPLE 5.5

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ<sup>1</sup>, А.Р. САМИГУЛЛИНА<sup>2</sup>

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

e-mail: <sup>1</sup>ignatev\_yu@rambler.ru, <sup>2</sup>alsu\_sam@mail.ru

Электронное учебное пособие (ЭУП) содержит краткое изложение вопросов линейной алгебры и аналитической геометрии, входящих в курсы алгебры и аналитической геометрии для студентов физических и информационных специализаций, а также курса высшей математики для студентов естественнонаучных специализаций. В пособии подробно рассмотрено решение основных задач этих курсов. Отличительной особенностью пособия является интеграция обычных методов решения задач с методами их решения в системе компьютерной математики (СКМ) Maple. Таким образом, авторы хотели приобщить студентов к современным информационным технологиям научных исследований, без которых в настоящее время немыслимы ни научные исследования, ни разработка технологических проектов. С учетом этого нового фактора в учебное пособие введен раздел предварительного

ознакомления с системой Maple и авторский компакт-диск с приложениями в Maple по изучаемым курсам, а также специальный раздел для преподавателей, снабженный инструкциями по использованию компакт-диска для методического сопровождения курса с помощью СКМ. Электронный вариант пособия содержит гиперссылки на файлы компакт-диска, содержащие необходимую для изучения материала информацию.

ЭУП локализовано на компакт-диске и содержит как перекрестные гиперссылки, так и гиперссылки на рабочие страницы Maple (файлы .mws). ЭУП является примером реализации идеи авторов внедрения информационных технологий в физико-математическое образование на основе математического моделирования в системе компьютерной математики [1]. С другой стороны, учебные и демонстрационные материалы курса подготовлены с помощью специально разработанных библиотек программных процедур в системе Maple 5 (см., например, [2–4]). Текстовое учебное пособие создано в формате doc и содержит как перекрестные гиперссылки, так и гиперссылки на командные файлы в формате bat, которые запускают необходимые рабочие листы mws с помощью демонстрационной версии Maple 5, локализованной на компакт-диске. На рисунке 1 показан момент вызова командного файла из текста учебного пособия.

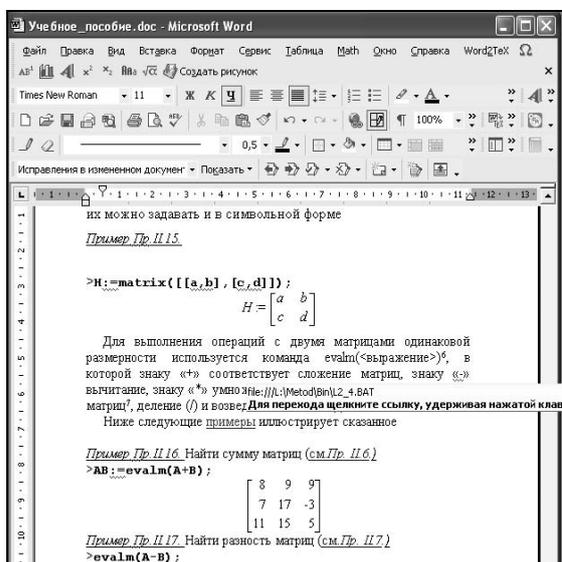


Рис. 1. Вызов Maple-примера из учебного пособия

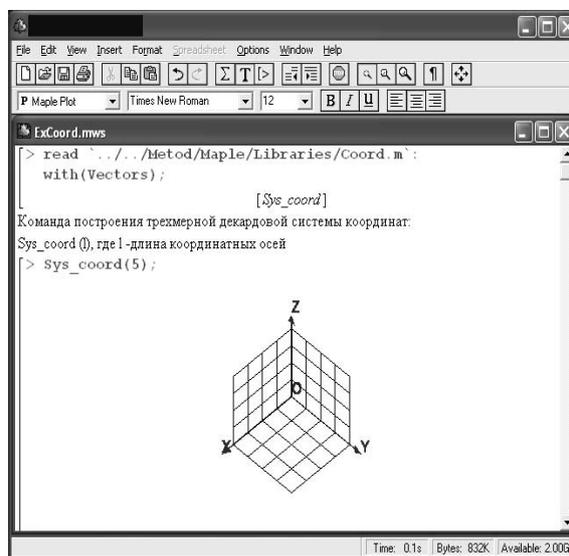


Рис. 2. Окно Maple с реализацией команды Sys\_coord(1) из библиотеки «Vectors»

Созданный компакт-диск содержит большое количество интерактивных иллюстративных примеров по всем разделам курса, что позволяет более эффективно изучать элементы высшей математики студентам нематематических специальностей.

### Литература

1. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Информационные технологии изучения физико-математических курсов на основе математического моделирования в системе компьютерной математики // Известия СмолГУ. – 2012. – №4(20). – С. 471–480.

2. Самигуллина А.Р. Математическое моделирование объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в системе компьютерной математики Maple // Вестник ТГГПУ. – 2010. – №3(21). – С. 69–74.

3. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Библиотека программных процедур для методического обеспечения курса высшей алгебры в системе компьютерной математики «Maple» // Вестник ТГГПУ. – 2011. – №1(23). – С. 20–24.

4. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программное обеспечение теории кривых второго порядка в пакете компьютерной математики // Вестник ТГГПУ. – 2011. – №4(26). – С. 22–29.

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ НА СТАДИИ ИНФЛЯЦИИ

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ<sup>1</sup>, А.Г. ШИРЯЕВ<sup>2</sup>

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань  
e-mail: <sup>1</sup>ignatjev\_yu@rambler.ru, <sup>2</sup>alexandr999@list.ru

В ряде работ [1–3] исследовался процесс восстановления теплового равновесия в изначально неравновесной ультрарелятивистской космологической плазме при наличии в первоначальном распределении некоторой доли неравновесных частиц сверхвысоких энергий. В данной работе предпринимается попытка исследовать указанную задачу для Вселенной, переходящей с ультрарелятивистской стадии расширения на инфляционную с помощью численно-аналитических методов, основанных на сплайновой экстраполяции функций в СКМ Maple. В работе представлена компьютерная модель решения уравнения энергодбаланса для ускоренной Вселенной.

### Литература

1. Ignatyev Yu.G. Kinetics of the nonequilibrium universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition // Gravitation & Cosmology. – 2007. – Vol. 13, No. 1 (49). – P. 1–14.

2. Ignatyev Yu.G. and Ignatyev D.Yu. Kinetics of the nonequilibrium universe. II. Kinetics of local thermodynamic equilibrium recovery // Gravitation & Cosmology. – 2007. – Vol. 13, No. 2 (50). – P. 101–103.

3. Ignatyev Yu.G. and Ignatyev D.Yu. Kinetics of a Non-Equilibrium Universe. III. Stability of the Non-Equilibrium Scenario // Gravitation and Cosmology. – 2008. – Vol. 14, No. 4. – P. 309–313.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ И ДОПОЛНЕНИЕ МОДЕЛИ ДЖИЛСА-АТЕРТОНА ДЛЯ МАГНИТНОГО СЕРДЕЧНИКА**

**А.А. КАТКОВА**

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: Anna11235813@yandex.ru

Индуктивные элементы можно отнести к наиболее значимым компонентам силовой электроники. Эти компоненты изготавливаются с использованием различных ферромагнитных материалов.

Главной особенностью проектирования радиоэлектронной аппаратуры является значительная стоимость и продолжительность испытаний. Поэтому, наряду с разработкой методик испытаний, значительный практический интерес представляет схемотехническое моделирование. Такое моделирование основано на использовании SPICE моделей, полученных на основании результатов измерений статических и динамических характеристик компонентов.

Таким образом, создание SPICE моделей и, в частности, SPICE моделей магнитных сердечников, является актуальной задачей.

Целью исследования является определение и задание параметров модели Джилса-Атертона для кольцевых сердечников, сравнение полученной модели с реальными характеристиками.

Решение поставленной задачи требует учета параметров и характеристик, которые могут быть получены с помощью современных измерительных устройств, таких как универсальная вычислительная установка контроля магнитных параметров УКМП-0.05-100, которую можно использовать как в лабораториях, так и в заводских условиях.

Основным направлением работы установки является измерение с высокой точностью динамических магнитных характеристик. Текущая модель обеспечивает задание следующих параметров, необходимых для проведения измерений: частоты; тока намагничивания или напряженности магнитного поля; формы испытательного сигнала.

Использование установки контроля магнитных параметров позволяет отслеживать правильность алгоритмов, используемых при моделировании, а также оценивать степень соответствия модели реальному образцу.

В SPICE симуляторах для моделирования ферромагнитных сердечников наиболее часто используется модель Джилса-Атертона. Для

описания изменения поляризации в зависимости от амплитуды внешнего поля применяется заимствованная из теории магнетизма функция Ланжевена.

В рамках исследований с помощью установки УКМП были получены результаты измерений петли гистерезиса магнитопровода K16x10x4,5 M2000NM1 (рис.1). На основе полученных характеристик подобраны параметры модели Джилса-Атертона. Моделирование проведено в системе схемотехнического проектирования DxDesigner Mentor Graphics.

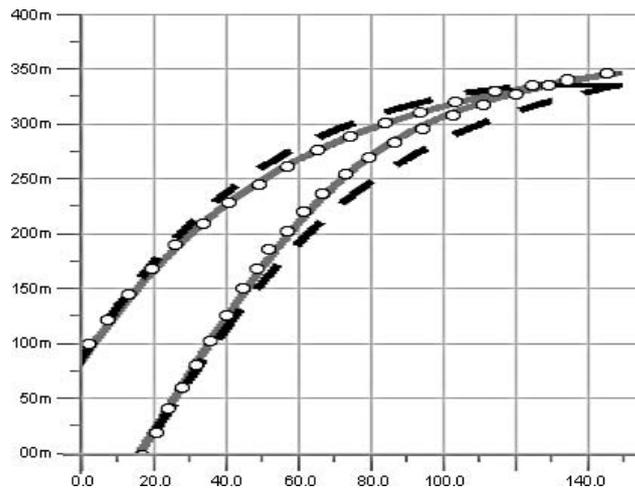


Рис. 1. Сравнение полученных петель гистерезиса: ——— – измеренная УКМП; - - - - - – модель Джилса-Атертона; ° ° ° ° ° – дополненная модель.

Полученная модель в целом адекватно отражает форму и поведение зависимости  $B(H)$ . Однако следует заметить, что функция Ланжевена в области насыщения растет достаточно медленно, и модель Джилса-Атертона значительно завышает потери в сердечнике (рис.1).

Для устранения данного недостатка и коррекции гистерезисной кривой была введена дополнительная зависимость параметра  $K$  (постоянная необратимой деформации доменных стенок) модели Джилса-Атертона от поля намагничивания [1]:

$$K = K_0 \cdot \exp(-H^2 / 2\sigma^2).$$

Сравнение петель гистерезиса, полученных с помощью УКМП и дополненной модели (рис. 1), показало, что введение зависимости для параметра  $K$  позволяет получить характеристики модели, максимально приближенные к характеристикам реального сердечника.

Следует отметить, что базовая модель Джилса-Атертона не зависит от частоты перемагничивания и температуры окружающей среды. То есть применение модели ограничивается только заранее известными условиями эксплуатации.

Измеряемые с помощью УКМП параметры могут быть в дальнейшем использованы для построения усовершенствованной модели, с высокой точностью отражающей свойства реального магнитопровода.

### Литература

1. Wilson Peter Reid. Modeling and simulation of magnetic components in electric circuits / University of Southampton. Department of electronics and computer science, 2001. – 289 с.

## ОБЛЕГЧЁННЫЙ РЕЗЕРВ

**Р.Е. КРИСТАЛИНСКИЙ<sup>1</sup>, В.Р. КРИСТАЛИНСКИЙ<sup>2</sup>**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: <sup>1</sup>krist1940@rambler.ru, <sup>2</sup>kristvr@rambler.ru

Во многих случаях нам невыгодно применять нагруженный резерв, так как из-за отказа резервных элементов он не даёт желаемого выигрыша в надёжности. Вместе с тем мы не можем применять и ненагруженный резерв, ибо от момента включения элемента до момента, когда он становится работоспособным, проходит некоторое время – элемент «разогревается», а условия эксплуатации не допускают перерыва в работе нашей системы.

В подобных случаях применяют так называемый *облегченный резерв*, суть которого в том, что резервный элемент до момента включения в работу находится в облегчённом режиме, а после включения начинает работать в нормальном режиме. При этом элемент может отказать, находясь в нерабочем состоянии, однако, вообще говоря, с меньшей вероятностью. Пусть рабочая группа состоит из одного основного и  $n-1$  резервных элементов. Обозначим через  $p_k^{(n)}(t)$  – надёжность  $k$ -го элемента в нерабочем состоянии и через  $p_k^{(p)}(t, \tau)$  – условную вероятность того, что элемент не откажет, находясь в рабочем состоянии на участке времени  $(\tau, t)$ , при условии, что не отказал на участке  $(0, \tau)$ , находясь в нерабочем состоянии.

Предположим, что пребывание элемента в облегчённом режиме не изменяет его надёжности в рабочем состоянии. Тогда ненадёжность, а следовательно, и надёжность системы могут быть определены следующим образом.

Пусть  $Q_1(t)$  – ненадёжность основного элемента. По следующей рекуррентной формуле

$$Q_{k+1}(t) = \int_0^t [(1 - p_{k+1}^{(n)}(\tau)) p_{k+1}^{(p)}(t - \tau)] Q_k'(\tau) d\tau$$

последовательно находим

$$Q_2(t), Q_3(t), \dots, Q_n(t).$$

Рассмотрим следующий пример. Резервная группа состоит из одного основного и пяти резервных элементов. Положим, что ненадёжность элемента в рабочем состоянии распределена по нормальному закону с параметрами  $m_1 = 300$ ,  $\sigma_1 = 20$ , что ненадёжность элемента в рабочем состоянии распределена по нормальному закону с параметрами  $m_2 = 50$ ,  $\sigma_2 = 30$ . Найти надёжность системы.

```

q1[t_] = CDF[NormalDistribution[300,20],t];
q2[t_] = 1 - CDF[NormalDistribution[500,30],t];
h = 10; H = Table[(i - 1)h, {i, 1, 101}];
Q[t_] = q1[t];
p1[t_] = 1 - q1[t]; p2[t_] = 1 - q2[t];
Do[T1 = Table[NIntegrate[(1 - p2[\tau] p1[H[[i]] - \tau])
D[Q[\tau], \tau], {\tau, 0, H[[i]]}], {i, 1, 101}];
T = Table[{H[[i]], T1[[i]]}, {i, 1, 101}];
Q[t_] = Interpolation[T, t], {k, 2, 6}
P[t_] = 1 - Q[t];

```

Предположим, что надёжности элементов в рабочем и нерабочем состоянии подчиняются экспоненциальному закону. Пусть  $\lambda_k$  – интенсивность отказа  $k$ -го элемента в нерабочем состоянии,  $\Lambda_k$  – интенсивность отказа  $k$ -го элемента в рабочем состоянии. В этом случае можно показать (см. [1])

$$Q_1(t) = 1 - e^{-\Lambda_1 t}$$

$$Q_k(t) = \int_0^t [1 - e^{-\lambda_k \tau - \Lambda_k (t - \tau)}] Q_{k-1}'(\tau) d\tau$$

$$k = 2, 3, \dots, n.$$

Рассмотрим следующий пример. Имеется резервная группа, состоящая из одного основного элемента и пяти резервных. Интенсивности отказов задаются следующими массивами

$$\lambda = \{0.0032, 0.007, 0.0008, 0.0076, 0.0196, 0.0034\};$$

$$\Lambda = \{0.081, 0.03, 0.042, 0.002, 0.09, 0.015\};$$

Определить надёжность рассматриваемой группы.

$$\lambda = \{0.0032, 0.007, 0.0008, 0.0076, 0.0196, 0.0034\};$$

$$\Lambda \mathbf{Л} = \{0.081, 0.03, 0.042, 0.002, 0.09, 0.015\};$$

$$Q[t] = \text{Exp}[-\Lambda \mathbf{Л} t];$$

$$Do[Q[t] = \int_0^t (1 - \text{Exp}[\lambda \mathbf{Л} \tau - \Lambda \mathbf{Л} (t - \tau)]) D[Q[t], t] d\tau, \{k, 2, 6\}]$$

Находим искомую надёжность системы.

$$P[t] = 1 - Q[t]$$

### Литература

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д. Математические методы в теории надёжности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.

## ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

**Р.Е. КРИСТАЛИНСКИЙ<sup>1</sup>, В.Р. КРИСТАЛИНСКИЙ<sup>2</sup>**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: <sup>1</sup>krist1940@rambler.ru, <sup>2</sup>kristvr@rambler.ru

Приведём для удобства читателя некоторые известные определения и факты, связанные с теорией восстановления.

Теория восстановления связана с простейшей моделью ремонта: после каждого отказа система приводится в исправное состояние за пренебрежимо короткое время и тотчас же возвращается в рабочее состояние. При этом под ремонтом понимается полное восстановление всех исходных свойств системы. Точнее говоря, мы полагаем, что после каждого восстановления наработка имеет исходное распределение.

Эта модель представляет собой хорошее приближение для практической ситуации, когда имеются резервные системы одного типа (такие, как запасные блоки, запасные части) и приведение в исходное состояние означает полную замену отказавшей системы. В подобном случае теория восстановления даёт хорошие вычислительные методы для описания стабильного процесса функционирования (эксплуатации) систем, например для планирования потребности в запасных частях. Хотя эта теория предназначена для простых систем, она одновременно является важным математическим средством рассмотрения сложных моделей ремонтируемых систем, особенно в теории технического обслуживания.

Исходным процессом теории восстановления является процесс, который представляет собой математическую модель описанной практической ситуации.

Под процессом восстановления мы будем понимать последовательность неотрицательных взаимно независимых случайных величин  $\{X_n, n=1, \dots\}$ , которые при  $n \geq 2$  одинаково распределены.

Случайная величина  $X_n$  для  $n \geq 2$  – это случайная наработка системы после  $(n-1)$ -го восстановления. Случайная величина  $X_1$  – случайная наработка системы до первого отказа.

Будем полагать  $F_1(t) = P(X_1 < t)$  и  $F(t) = P(X_n < t), n \geq 2$ .

Очевидно, процесс восстановления полностью характеризуется функциями распределения  $F_1(t)$  и  $F(t)$ .

Процесс восстановления называется запаздывающим, если  $F_1(t) \neq F(t)$ , и соответственно обычным, если  $F_1(t) = F(t)$

Обозначим через  $N[t]$  случайное число восстановлений, произошедших за время  $[0, t]$ .  $N[t]$  можно трактовать как число использованных запасных систем на промежутке  $[0, t]$ .

Во многих практических применениях теории надёжности, в частности в теории технического обслуживания, особое значение имеет математическое ожидание числа восстановлений  $N[t]$  на промежутке  $[0, t]$ .

Функция  $H[t] = M[N[t]]$  называется функцией восстановления.

В литературе не приводится алгоритма, позволяющего для наиболее распространённых законов распределения получить пригодные для практических расчётов методы вычисления функции восстановления. Нами приводится методика нахождения функции восстановления методом статистического моделирования в системе Mathematica. В отличие от существующих методик она применима для любого закона распределения наработки на отказ.

```

M = Table[0, {n, 1, 1000}, {k, 1, 2001}];
Do[H = Table[10 (i-1), {i, 1, 2001}];
T = Table[Random[WeibullDistribution[2, 400]], {i, 1, 100}];
Do[T[[i]] = T[[i-1]] + T[[i]], {i, 2, 100}]; H1 =
Table[0, {i, 1, 2001}];
Do[H1[[k]] = Sum[Boole[T[[i]] < H[[k]]], {i, 1, 100}]; M[[n]]
= H1
M1 = N[Mean[M]];
H = Table[10 (i-1), {i, 1, 2001}];
T1 = Table[{H[[k]], M1[[k]]}, {k, 1, 2001}];

```

Находим приближённое значение интерполяционной функции

$$W[t_] = \text{Interpolation}[T1, t]$$

## Литература

1. Байхельт Ф., Франкен П. Надёжность и техническое обслуживание. Математический подход. – М.: Радио и связь, 1988.

## НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРАВИЛА ПРОВЕДЕНИЯ ИНСПЕКЦИОННЫХ ПРОВЕРОК

**Р.Е. КРИСТАЛИНСКИЙ**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: krist1940@rambler.ru

Предположим, что отказы обнаруживаются в результате проведения определённых проверок, которые производятся, вообще говоря, через некоторое время после обнаружения отказа. Нашей задачей является нахождение правила проверок (т.е. нахождение периодичности проверок), которое минимизировало бы математическое ожидание полных затрат от отказов и от проведения самих проверок.

Мы считаем:

- 1) об отказах системы становится известно только в результате специальных проверок;
- 2) сами проверки занимают пренебрежимо малое времени и никак не изменяют собственных характеристик системы;
- 3) система не может отказывать во время проведения проверок;
- 4) каждая проверка характеризуется затратами  $c_1$ ;
- 5) каждая единица времени пребывания аппаратуры в состоянии необнаруженного отказа, т.е. времени от момента обнаружения отказа до его проверки, связана со штрафом в  $c_2$  единиц.

Требуется для заданного промежутка времени  $[0, t]$  найти оптимальную процедуру проведения оценок.

Задача решается для случая, когда время до отказа распределено по нормальному закону с математическим ожиданием  $m = 300$  средним квадратическим отклонением  $\sigma = 20$ ,  $c_1 = 15$ ,  $c_2 = 3$ . Предлагаемый алгоритм без труда переносится на любой другой требуемый закон распределения.

```
T =  
Table[Random[NormalDistribution[300,20]],{i,1,10000}];  
m1 = Min[T];m2 = Max[T];u = IntegerPart[m2-m1];  
h = Table[i,{i,1,u}];  
c1 = 15;c2=3;S1=Table[0,{i,1,u}];t=12000;  
Do[S = Table[0,{i,,1000}];  
Do[T  
= Table  
[Random[NormalDistribution[300,20]],{i,1,120}];
```

$$T1 = \text{Table} \left[ \sum_{j=1}^k T[[j]], \{k, 1, 120\} \right]; \quad n = \sum_{k=1}^{120} (\text{Boole}[T1[[k]] \leq t]);$$

$$S[[m]] = \sum_{i=1}^n \left( \text{IntegerPart} \left[ \frac{T[[i]]}{h[[j]]} \right] c1 + \left( h[[j]] \left( \text{IntegerPart} \left[ \frac{T[[i]]}{h[[j]]} \right] + 1 \right) = T[[i]] \right) c2 \right) +$$

$$\text{IntegerPart} \left[ \frac{t - T1[[n]]}{h[[j]]} \right] c1, \{m, 1, 1000\}$$

Находим оптимальную стоимость профилактики.

```
Min[S1]
5574.73
```

Находим оптимальную частоту профилактического ремонта.

```
R=Flatten[Position[S1, Mean[S1]];
M1+R[[1]]
326.85
```

### Литература

1. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надёжности. – М.: Советское радио, 1969. – 488 с.

## О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В СИСТЕМЕ MATHEMATICA

**Р.Е. КРИСТАЛИНСКИЙ, А.В. СМИРНОВ**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: krist1940@rambler.ru

Система Mathematica предоставляет широкие возможности для решения задач математической статистики. Эти возможности были существенно расширены в восьмой и девятой версиях этой системы. Добавлено свыше ста новых статистических функций. Рассмотрим некоторые из них.

По данной выборке требуется подобрать соответствующее распределение, найти параметры этого распределения для данного уровня значимости, проверить гипотезу о том, что рассматриваемая случайная величина подчинена найденному распределению.

Пусть имеется выборка.

```
A=Table[Random[NormalDistribution[1.2,1.6]],{i,1,100}];
```

Предполагая, что рассматриваемая случайная величина распределена по нормальному закону, находим параметры этого закона.

```
EstimatedDistribution[A,NormalDistribution[m,□]]
NormalDistribution[1.20121,1.84969]
```

Используя критерий согласия Колмогорова-Смирнова (на уровне значимости  $\alpha = 0.05$ ) проверяем гипотезу о том, что рассматриваемая случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами  $m = 1.20121$ ,  $\sigma = 1.84969$ .

```
KolmogorovSmirnovTest[A,NormalDistribution[1.201201,1.84969]]
0.975557
```

Найденная величина Р-значения существенно больше заданного уровня значимости, поэтому гипотеза справедлива.

Имея выборку, мы можем найти эмпирическую функцию распределения для этой выборки.

```
A=Table[Random[NormalDistribution[1.3,0.7]]+Random[ChiSquareDistribution[3]],{i,1,100}];
m1=Min[A]
1.19583
m2=Max[A]
15.6409
H=EmpiricalDistribution[A];
F[x_]=CDF[H,x];
F[5.7]
0.77
Plot[F[x],{x,m1,m2}];
```

Мы можем найти 95% доверительный интервал для математического ожидания в случае большой выборки.

```
A=Table[Random[NormalDistribution[2.1,2.3]],{i,1,100}];
m=Mean[A]
2.22132
Needs["HypothesisTesting`"]
{0.280496,3.7195}
MeanCI[A]
```

Для малой выборки А доверительный интервал находится следующим образом

```
Needs["HypothesisTesting`"]
StudentTCI[Mean[A],Variance[A],n1],
```

где  $n$  – объём выборки.

При использовании девятой версии системы Mathematica существенно расширяются возможности решения задач по теории вероятностей и математической статистике. В ней приводятся новые тесты для проверки статистических гипотез, рассматриваются новые параметрические и непараметрические распределения вероятностей.

В этой версии имеется универсальная платформа для моделирования систем, которые случайным образом изменяются во времени, включая поддержку построения реализаций, оценивания параметров (калибровку), нахождение временных срезов, а также

ковариационной функции, функции среднего значения различных случайных процессов.

В этой версии даётся автоматизированная поддержка для исследования цепей Маркова с дискретным и непрерывным временем.

В этой версии имеется подсистема, позволяющая решать разнообразные задачи расчёта надёжности сложных систем, в частности, исследовать деревья неисправностей, модели ненагруженного резервирования.

Рассмотрим пример анализа Марковского процесса с дискретным временем.

Процесс задаётся вектором начальных состояний и матрицей перехода.

$$\varphi = \text{DiskreteMarkovProcess} \left[ \{1,0,0\}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Находим вероятности каждого из состояний системы через n шагов.

PDF[ $\varphi$  [n],k]

$$\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-1)^n 2^{-n} \right) \text{Boole}[1 == k] + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) \text{Boole}[2 == k] + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) \text{Boole}[3 == k]$$

Находим предельную вероятность для второго состояния системы.

PDF [ $\varphi$ [ $\infty$ ], 2]

$$\frac{1}{3}.$$

## **МАКРОМОДЕЛЬ ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА ПИТАНИЯ С ЦИФРОВОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ**

**Е.В. НАЙДЁНОВ, А.А. ПЕНЬКОВ**

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: nzettez@gmail.com

Имитационное моделирование является неотъемлемой частью процесса проектирования электронных устройств, в том числе импульсных источников питания (ИИП). Разработчику необходимо иметь адекватные модели компонентов, на основе которых будет собрана полная модель устройства. Однако важной проблемой при моделировании современных ИИП является использование элементной

базы устройств на основе цифровой схемотехники. Это связано с отсутствием в библиотеках элементов популярных систем автоматизированного проектирования (САПР), необходимых моделей устройств современной специализированной элементной базы для цифрового управления электропитанием преобразовательных устройств. Сегодня указанная элементная база представлена: цифроаналоговыми программируемыми логическими интегральными схемами (ЦАПЛИС), цифровыми сигнальными микроконтроллерами (ЦСМК) и микросхемами с жёстко заданными алгоритмами цифрового управления.

На основе анализа возможностей современных САПР был предложен способ создания моделей ИИП с цифровой системой управления на основе интеграции системы компьютерной математики Matlab&Simulink и системы схемотехнического проектирования OrCAD, представленный на рисунке 1. В качестве цифровой системы управления (ЦСУ) используется микросхема с жёстко заданным алгоритмом управления Intersil ZL6105.

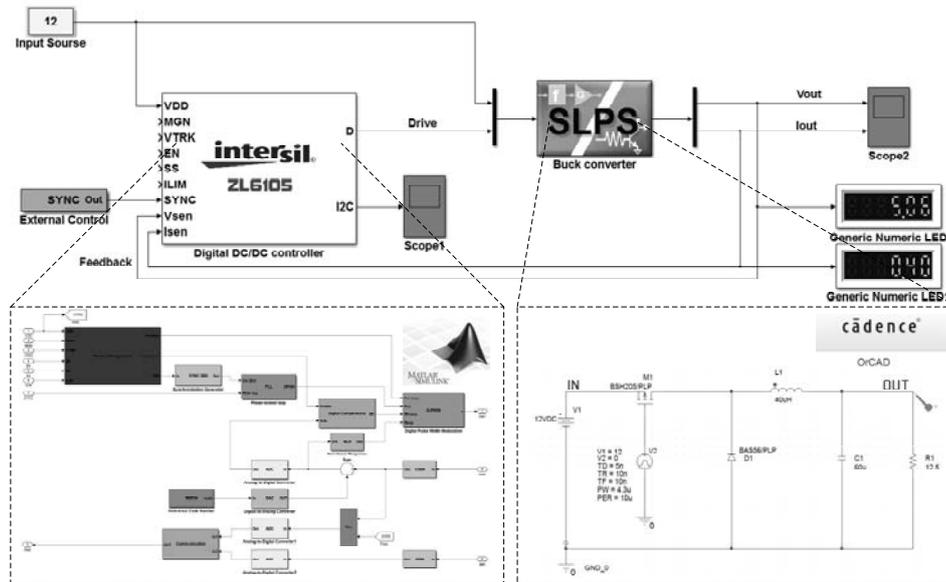


Рис. 1. Макромодель ИИП на основе интеграции Matlab&Simulink и OrCAD

В среде компьютерной математики разрабатывается цифровая часть устройства, поскольку математическое описание наиболее близко отражает поведение цифровых элементов, а в схемотехнической САПР создаётся модель силовой части. Система функционального моделирования Simulink позволяет исследовать алгоритм работы ЦСУ, получить код для последующей программной и аппаратной реализации. Используя среду интеграции SLPS, можно получить модель ИИП с ЦСУ. Полученную макромодель ИИП для более удобного использования можно реализовать в виде блок-компонента библиотеки Simulink.

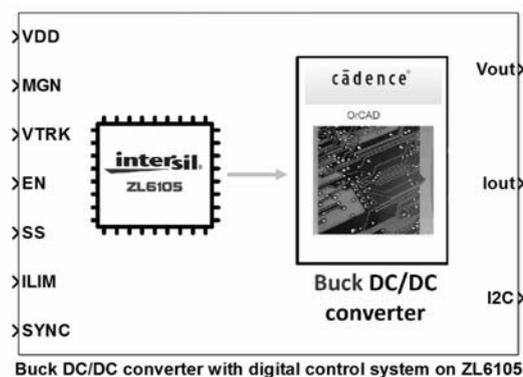


Рис. 2. Макромодель ИИП с ЦСУ в виде блок-компонента библиотеки Simulink

Рассмотренный способ интеграции математических и схмотехнических САПР имеет важное практическое применение. В частности, он позволяет получить требуемую модель ИИП с ЦСУ с заданной схемной реализацией преобразователя необходимого типа. Создание библиотек моделей ЦСУ позволит сократить отставание популярных САПР от текущего производства специализированных ИС на современном рынке. Кроме того, простота способа и широкое распространение рассмотренных САПР позволяют пользователю самостоятельно разрабатывать необходимые на практике разнообразные модели ЦСУ любой сложности. Использование разработанной макромодели и созданных по описанному способу библиотек позволит уже в ближайшем будущем достичь высоких показателей надёжности, скорости работы и эффективности.

### Литература

1. Найдёнов Е.В., Пеньков А.А. Способ моделирования преобразовательных устройств с цифровой системой управления // Математическая морфология. – Смоленск: СГМА, 2012. – Т. 11, вып. 4. – Идентификационный номер 041200004\0011.

2. Найдёнов Е.В. Анализ средств проектирования цифровых систем управления источниками питания // XIX международная научно-техническая конференция студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика». – М., 2013. – Т. 1. – 223 с.

## ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛИ МИКРОСХЕМЫ LTC3200

**К.Г. ПУЛЬНОВА**

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск  
e-mail: Ready.gf@mail.ru

В настоящее время в связи с миниатюризацией электронных компонентов и развитием рынка переносных устройств все более распространёнными становятся преобразователи с накачкой заряда.

Данная тенденция свидетельствует об актуальности исследования и моделирования работы источников питания указанного типа.

В связи с этим актуальной задачей является сопоставление основных параметров и характеристик, типовых и аварийных режимов работы модели преобразователя LTC3200 с параметрами реальной микросхемы.

Интегральная микросхема LTC3200 — повышающий преобразователь с накачкой заряда [1], частота преобразования фиксирована. Микросхема производит стабилизированное выходное напряжение в диапазоне (1,268...5,5) В ( $\pm 4\%$ ) при токе нагрузки до 100 мА. Диапазон входного напряжения составляет (2,7...4,5) В. Данный стабилизатор содержит схему мягкого запуска и схему управления коммутацией для ограничения входного тока, схему защиты от перегрева, как при резком увеличении входного напряжения, так и при значительном увеличении температуры.

Исследование работы преобразователя и его модели проводилось при следующих условиях: входное напряжение 3 В, выходное напряжение 5 В, амплитудное значение пульсаций выходного напряжения 30 мВ.

В процессе исследования было проведено моделирование работы интегральной схемы LTC3200 в режиме повышающего преобразователя. В моделируемой схеме не использовался входной конденсатор фильтра, так как источник питания был задан идеальным. Также предполагалось, что входное напряжение не превышало 5,5 В (рисунок 1).

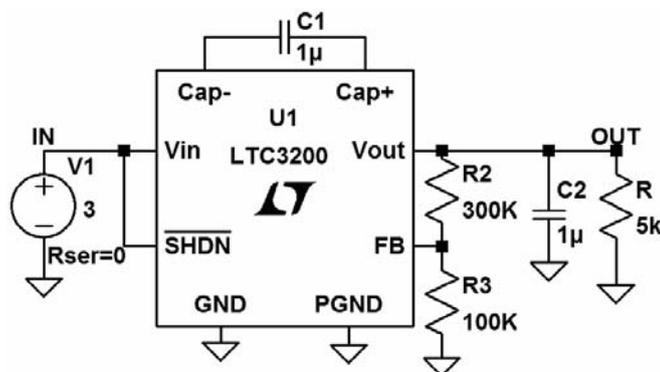


Рис. 1. Схема для моделирования работы ИМС LTC3200

Проведенное исследование работы модели стабилизатора позволяет сделать следующие выводы:

- для реализации преобразователя напряжения с использованием данной микросхемы требуется небольшое число пассивных компонентов, но при этом часть из них должна иметь стабильные временные характеристики и параметры;
- время выхода на режим относительно мало, но зависит от параметров выходного конденсатора фильтра;
- в области рабочих напряжений и токов нагрузочная и передаточная характеристики достаточно жесткие, изменения выходного напряжения не превышают 4% (указанных в технической документации на микросхему);

- величина пульсаций выходного напряжения (от пика до пика) возрастает при протекании переходных процессов в схеме и при увеличении тока нагрузки, но не превышает заданного значения; указанная величина может регулироваться подбором значения емкости выходного конденсатора фильтра;

- при импульсном изменении напряжения питания в допустимых пределах величина выходного напряжения не изменяется, то есть преобразователь успешно стабилизирует напряжение;

- при импульсном изменении тока нагрузки в допустимых пределах величина выходного напряжения и пульсаций меняется незначительно (в пределах 4%), что подтверждает стабильность работы данного преобразователя.

При исследовании режимов работы LTC3200 было выявлено, что модель в среде LT Spice не предусматривает отключение микросхемы от нагрузки при значительном повышении входного напряжения (нет срабатывания системы защиты), которое может повлечь за собой термическое разрушение преобразователя.

В целом полученные характеристики соответствуют аналогичным зависимостям, указанным в технической документации. Определенные отличия, полученные при моделировании, незначительны.

Уточнение области применимости рассмотренной модели микросхемы преобразователя LTC3200 позволит более успешно проводить предварительное исследование разрабатываемых приборов методами имитационного моделирования.

### **Литература**

1. Мэк Р. Импульсные источники питания. Теоретические основы проектирования и руководство по практическому применению. – М.: Додэка-XXI, 2008. – 272 с.

## **КОМПЕНСАЦИЯ ТЕРМОЭДС КОНТАКТНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ПРИ ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ**

**В.А. СМОЛИН, Ю.В. ТРОИЦКИЙ**

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск  
e-mail: smolin.vofka@yandex.ru

Для обеспечения контроля и исследования состояния несущих конструкций и механических объектов самого различного назначения широко применяются тензометрические датчики.

Сложность тензометрических измерений состоит в малом диапазоне изменения сопротивления датчика под воздействием деформации, не превышающем нескольких десятых долей процента от

номинального значения сопротивления. Такое изменение соразмерно помехам, возникающим в схеме. Основным источником помех является изменение температуры окружающей среды и термоЭДС, возникающей в местах спайки проводов.

В полумостовых и полномостовых схемах проблема влияния температуры окружающей среды на номинальное значение сопротивления тензодатчика в основном решается правильным включением тензодатчиков. Четвертьмостовая схема требует термокомпенсации, для чего можно в одно из плеч моста включить ненагруженный тензорезистор, идентичный по параметрам с рабочим и расположенный в тех же рабочих условиях. Подобное решение можно использовать и для дифференциального метода, заменив эталонное сопротивление  $R_{оп}$  на соответствующий ненагруженный тензорезистор.

Снижение влияния термоЭДС в местах спайки достигается чаще всего использованием знакопеременного источника возбуждения. Для поддержания такого режима выпускаются специальные микросхемы, такие как *AD7195* и *AD7730* [1]. В этих схемах предусмотрен так называемый генератор переменного напряжения активизации (*AC Excitation clock*).

Формирование знакопеременного напряжения на входе АЦП сопровождается изменением знака опорного напряжения. Такой режим поддерживается микросхемами *AD7730* и *AD7195*, но абсолютное большинство других АЦП в таком режиме не работоспособно.

Этот недостаток устраняется при использовании схемы с токовым возбуждением.

Принцип устранения влияния термоЭДС ( $emf_1$  и  $emf_2$ ) рассмотрим на примере схемы с возбуждением от источника тока (рис.1) [2].

В первый полупериод при высоком уровне сигнала *АСХ* открываются ключи *VT1* и *VT4*, обеспечивающие протекание тока  $I_1$ , при котором:

$$U_{in1} = emf_1 + emf_2 \cdot I_1 \cdot R + I_1 \cdot R. \quad (1)$$

Во втором полупериоде сигналом  $\overline{АХС}$  открываются ключи *VT2* и *VT3*, обеспечивающие протекание тока  $I_2$ , при котором:

$$U_{in2} = emf_1 + emf_2 \cdot I_1 \cdot R - I_1 \cdot R. \quad (2)$$

Разность полученных результатов в (1) и (2) устраняет влияние термоЭДС:

$$U_{in1} - U_{in2} = 2 \cdot I_1 \cdot R. \quad (3)$$

Смена знака напряжения на входе АЦП сохраняет работоспособность практически всех аналого-цифровых преобразователей, поскольку смена знака дифференциального сигнала происходит на фоне синфазного сигнала  $U_{ref}$ .

Нетрудно показать, что подобная схема может использоваться и при возбуждении от источника напряжения.

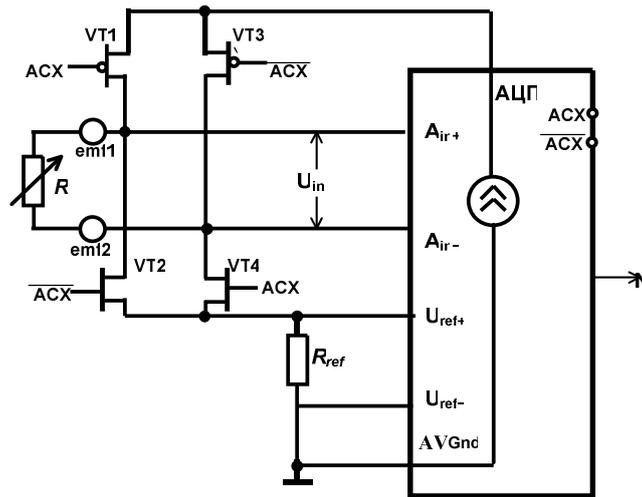


Рис. 1. Схема формирования знакопеременного напряжения на входе АЦП с возбуждением от источника тока

Универсальность схемы увеличится при использовании интегральных аналоговых переключателей, выпускаемых в широком ассортименте многими фирмами. Использование интегральных ключей значительно упрощает их коммутацию, снимая необходимость формирования 2-фазных или 4-фазных сигналов управления.

Следует отметить, что компенсацию термоЭДС, так же как и влияние соединительных проводов, в мостовых схемах в ряде случаев можно осуществить грамотным соединением элементов схемы.

### Литература

1. Tutorial on Technical and Performance Benefits of AD719x Family [www.analog.com/sigmadelta](http://www.analog.com/sigmadelta).
2. AN-577 Circuit Suggestions using Features and Functionality of New Sigma-Delta ADCs. Part 1. By John Wynne.

## АЛГОРИТМ СОГЛАСОВАНИЯ ДАННЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ КОРАБЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ ОСВЕЩЕНИЯ ОБСТАНОВКИ

**О.В. ТИХОНОВА**

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники  
и автоматики (МИРЭА), г. Москва  
e-mail: o\_tikhonova@inbox.ru

Оснащение современного надводного корабля разнородными средствами освещения воздушной и надводной обстановки и последующее комплексирование их данных позволяют создать единое информационное поле корабля. Использование обобщенной

информации другими корабельными средствами значительно повышает эффективность их использования. При выходе из строя отдельных систем работоспособность корабля в целом также не нарушается.

Задача объединения информации от разнородных информационных средств – радиолокаторов кругового и секторного обзора, навигационных радиолокационных станций, оптических систем наблюдения – решается в автоматическом режиме в командной системе корабля. Основной проблемой здесь является тот факт, что точность измерений координат объектов у каждого средства своя, и эта точность зависит от многих факторов, которые трудно учитывать (инструментальная точность приемных и передающих устройств, состояние атмосферы, параметры движения объекта и прочее). На практике известны лишь обобщенные характеристики точности выработки координат (систематическая погрешность, величина возможного разброса), а насколько данные каждого измерения отличаются от действительности, неизвестно. При организации совместной обработки данных от нескольких информационных средств возможны два типа ошибочных решений:

1) ложное отождествление двух различных объектов – ошибки отождествления первого рода. Их возникновение возможно в случае нахождения двух объектов достаточно близко друг от друга, а каждое из двух ведущих наблюдение радиолокационных средств имеет информацию только об одном объекте. В таком случае автоматическая обработка данных может привести к ложному выводу о наличии только одного объекта в поле зрения локаторов.

2) распознавание одного объекта, видимого двумя источниками, как двух – ошибки отождествления второго рода. Эти ошибки возникают в противоположной ситуации, когда данные двух локаторов (выработанные со значительными ошибками определения координат) ложно интерпретируются как два объекта.

В идеальном случае (в ситуации отсутствия ошибок измерения, когда данные о координатах объектов, полученных от локаторов, соответствуют реальным) можно создать автоматические алгоритмы формирования единого информационного поля, для которых вероятности возникновения ошибок первого рода  $S_1$  и второго рода  $S_2$  равны нулю. Однако на практике наличие ошибок в выработанных координатах приводит к ненулевым  $S_1$  и  $S_2$ .

Определение параметров движения объекта корабельным источником информации всегда производится с ошибками:

$$\vec{X}_{ИЗМ} = \vec{X}_{ИСТ} + \delta\vec{X}, \quad (1)$$

где  $\bar{X}_{ИЗМ}$ ,  $\bar{X}_{ИСТ}$  – обобщенные векторы измеренных и истинных координат объекта,  $\delta\bar{X}$  – вектор ошибок измерения.

Алгоритмы совместной обработки данных и формирования единого информационного поля заключаются в сравнении значений обобщенных параметров целей, получаемых от различных источников информации, в соответствии с многомерными критериями. Превышение полученных значений критерия над некоторым наперед заданным порогом  $\lambda_{POROG}$  сигнализирует о том, что наблюдаемые объекты различны. В простейшем случае для двух источников информации ( $ИИ=1$  и  $ИИ=2$ ), каждый из которых видит одну цель, число идентифицируемых целей  $N$  есть

$$N = \begin{cases} 2, \text{ если } \rho = \left\| \bar{X}_{ИЗМ}^{ИИ=1} - \bar{X}_{ИЗМ}^{ИИ=2} \right\| > \lambda_{POROG} , \\ 1, \text{ если } \rho = \left\| \bar{X}_{ИЗМ}^{ИИ=1} - \bar{X}_{ИЗМ}^{ИИ=2} \right\| \leq \lambda_{POROG} . \end{cases} \quad (2)$$

Корректность выбора  $\lambda_{POROG}$  определяет  $S1$  и  $S2$ . Учитывая (1), получаем

$$\rho = \left\| \bar{X}_{ИСТ} + \delta\bar{X}^{ИИ=1} - \bar{X}_{ИСТ} - \delta\bar{X}^{ИИ=2} \right\| , \quad (3)$$

и уменьшение ошибок  $\delta\bar{X}$  приводит к более точному определению порогового значения  $\lambda_{POROG}$ . В состав ошибок входят случайные флуктуации и систематические составляющие. Особую роль здесь играют ошибки юстировки, то есть систематические ошибки, вызываемые отклонением оси антенны от заданного направления, часто увеличивающиеся с течением времени. При наличии разнонаправленных ошибок юстировки в двух источниках в (3) величины  $\delta\bar{X}^{ИИ=1}$  и  $\delta\bar{X}^{ИИ=2}$  складываются, что приводит к ошибочной работе алгоритма, основанного на выражении (2). Возможность исключить или минимизировать систематические ошибки приводит к увеличению вероятности правильной работы (2) и, следовательно, к значительному уменьшению значений пары ( $S1, S2$ ).

При наличии регулярных составляющих в погрешностях измерения (1) необходимо их выявить и устранить. Это возможно сделать при измерении координат эталонных объектов с известным месторасположением: провести измерения различными радиолокационными системами и сравнить результаты измерений между собой и с эталонными данными. По результатам измерений проводится корректировка (поворот на три угла Эйлера и смещение точки начала координат) системы координат каждого информационного средства.

Юстировочные работы радиолокационных и оптических средств проводятся при одновременном наблюдении нескольких объектов с заранее известными координатами и параметрами движения, данные по погрешностям каждого средства измерения (поправочные коэффициенты) рассчитываются и передаются на средства. Для дополнительной проверки следует повторить юстировочные работы и подтвердить правильность введенных поправок. Последовательность действий при юстировке следующая:

- расположить корабль на некотором расстоянии от эталонных объектов, причем направление движения корабля и направление линии корабль-эталонные объекты должно быть около  $90^0$ ;

- установить эталонные объекты на заранее заданные координаты (не расположенные на одной прямой);

- провести одновременные измерения координат эталонных объектов всеми средствами освещения обстановки с интервалом в 1–5 минут при изменении курса корабля;

- передать измеренные данные в спецвычислитель для получения поправочных коэффициентов для каждого средства;

- получить результирующие поправочные коэффициенты для каждого средства как средние от поправок, полученных для каждого цикла измерений;

- передать поправочные коэффициенты на средства освещения внешней обстановки и реализовать их;

- провести повторный цикл юстировки информационных корабельных средств и убедиться в отсутствии ошибок юстировки отдельных средств. При наличии ошибок снова пересчитать поправочные коэффициенты и ввести их в средства освещения обстановки.

После установки эталонных объектов в заданные координаты всю дальнейшую работу возможно (и целесообразно) проводить в автоматическом режиме с использованием средств вычислительной техники. Блок-схема алгоритма автоматической юстировки приведена на рисунке 1.

Важными параметрами, определяющими качество алгоритма юстировки, являются допустимые величины рассогласования данных измерений. Эти величины могут быть рассчитаны теоретически, однако только после экспериментального подтверждения их можно использовать для автоматизации работ. И всегда остается возможность некорректности работы измерительных средств, при которой алгоритм не выйдет на завершение. Для предотвращения подобных ситуаций целесообразно поставить счетчик корректировок, и при наличии более чем трех циклов корректировки перейти в ручной режим ввода поправок.



Рис. 1. Блок-схема алгоритма автоматических юстировочных работ

Автоматизация работ по согласованию данных средств освещения обстановки позволяет формировать единое информационное поле более адекватно.

## **АНАЛОГО-ЦИФРОВОЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ЕМКОСТЬ – НАПРЯЖЕНИЕ**

**Ю.В. ТРОИЦКИЙ, А.Д. АБРАМЕНКОВ**

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск  
e-mail: troickii\_yurii@mail.ru

Существует несколько методов измерения емкости, которые основаны на преобразовании величины емкости в напряжение, ток, частоту или ширину импульсов.

Прямой метод измерения подразумевает заряд конденсатора от источника тока в течение определенного времени  $t_3$  и затем — измерение напряжения на конденсаторе (рис.1).

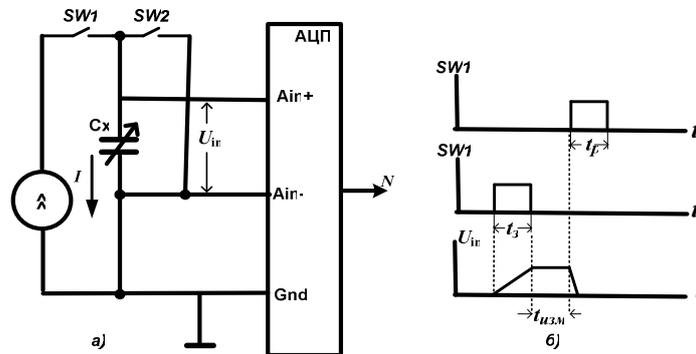


Рис. 1. Структурная схема преобразователя емкость – а) код с токовым источником возбуждения, б) временные диаграммы заряда-разряда емкости

При замкнутом ключе  $SW1$  в течение времени  $t_3$  происходит заряд контролируемой емкости до величины  $U_{in}(t_3)$ :

$$U_{in}(t_3) = It_3 / C_x . \quad (1)$$

Затем на время  $t_{изм}$  ключ  $SW1$  размыкается и происходит аналого-цифровое преобразование полученного напряжения. Перед следующим измерением происходит разряд емкости  $C_x$  путем включения на время  $t_p$  ключа  $SW2$ .

Этот метод требует наличия прецизионного источника тока и входа с высоким импедансом для измерения напряжения. Снижение влияния нестабильности тока возбуждения можно при применении метода логометрического преобразования [1]. При логометрическом методе результат аналого-цифрового преобразования пропорционален частному от деления входного напряжения АЦП ( $U_{in}$ ) и его опорного напряжения ( $U_{ref}$ ):

$$N = kU_{in}/U_{ref} . \quad (2)$$

Использование в качестве опорного напряжения  $U_{ref}$  падения напряжения на резисторе  $R_{ref}$ , включенном в токовую цепь последовательно с измеряемой емкостью  $C_x$  (рис. 2), обеспечивает зависимость:

$$N = t_3 N_{max} / C_x R_{ref} . \quad (3)$$

Логометрический метод применим при использовании АЦП с внешним источником опорного напряжения. К таким преобразователям относятся так называемые аналоговые микроконтроллеры семейства  $ADuCxxx$  фирмы *Analog Device*. Эти схемы помимо 24-разрядного АЦП с сигма-дельта модуляцией содержат современное микропроцессорное ядро, встроенную мощную периферию, включая таймеры/счетчики.

Последние (С/Е1 и С/Т2) могут быть использованы для формирования требуемых временных интервалов  $t_3$ ,  $t_{изм}$  и  $t_p$ .

Для формирования тока возбуждения измерительной схемы могут использоваться встроенные программно перестраиваемые высокоточные источники тока. Наряду с возможностью программно перестраивать уровни тока возбуждения (от 10 мкА до 1 (2) мА) диапазон преобразования измеряемой емкости можно с помощью изменения коэффициента встроенного усилителя *PGA*.

Для измерения отклонения значения емкости от номинала могут быть использованы интегральные преобразователи емкость-напряжение САV444, выпускаемые фирмой *Analog Microelectronics* [2].

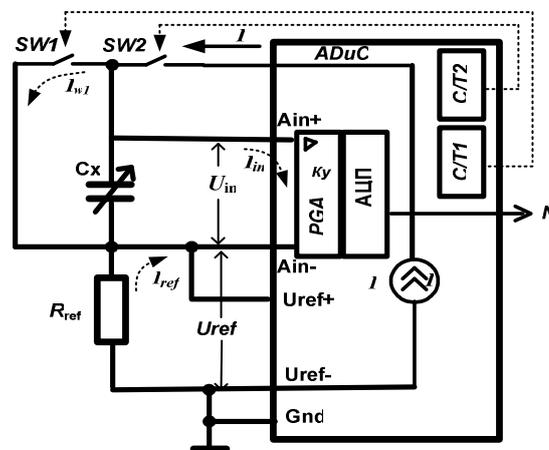


Рис. 2. Структурная схема логометрического преобразователя емкость – код с токовым источником возбуждения

### Литература

1. Троицкий Ю.В. Логометрические методы и схемы аналого-цифрового преобразования сигналов, снимаемых с тензорезистивных датчиков // Компоненты и технологии. – 2013. – № 3. – с. 72–77.

2. САV444 – C/V transmitter IC with adjustable output voltage for capacitive input signals [http://www.analogmicro.de/english/index.html-Kali\\_CAV444.pdf](http://www.analogmicro.de/english/index.html-Kali_CAV444.pdf).

## МАКРОМОДЕЛЬ ШИМ-КОНТРОЛЛЕРА USS3800

М.А. АМЕЛИНА, Е.О. ФОМЕНКОВА

Филиал МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: katuska067@gmail.com

ШИМ-контроллер является важной частью импульсных источников питания. Одним из безусловных лидеров в области разработки и производства ШИМ-контроллеров является компания Texas Instruments,

спектр предложения которой охватывает более двухсот интегральных схем. Поэтому представляет интерес создание простых и в то же время точных математических моделей ШИМ-контроллеров.

Построение таких моделей с использованием стандартных библиотек компонентов значительно усложняет схему, что вызывает расходимость расчетов при анализе и, следовательно, ее неработоспособность. Увеличение скорости моделирования и достижение лучшей сходимости расчетов достигается путем моделирования ШИМ-контроллеров с использованием упрощенных функциональных блоков [1].

Маломощный ШИМ-контроллер UCC3800 (рис. 1) работает в режиме управления Current Mode, что обеспечивает ему большее быстродействие по сравнению с контроллерами, работающими в режиме Voltage Mode.

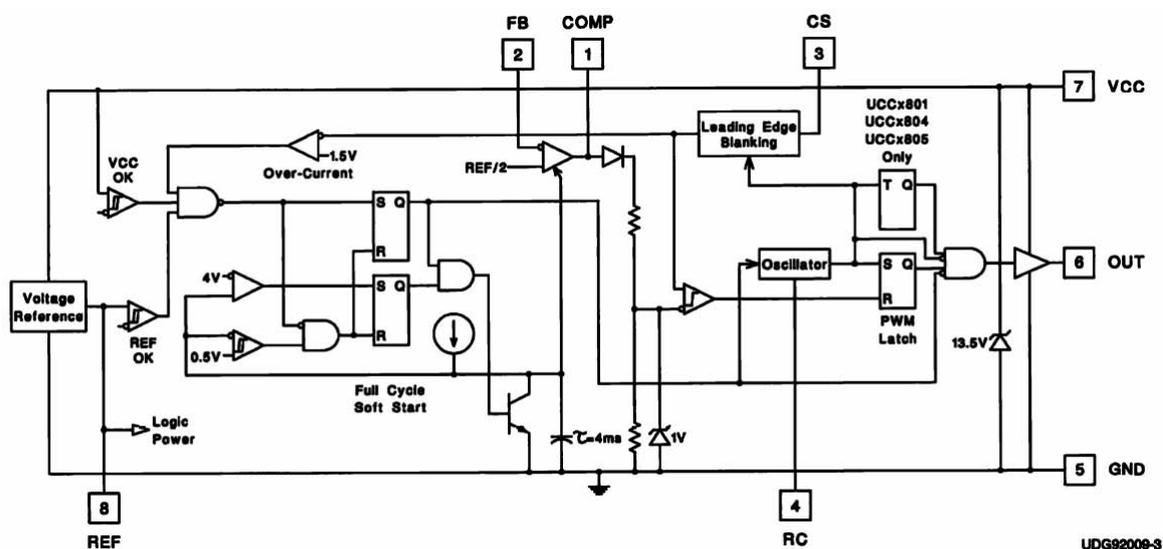


Рис. 1. Функциональная схема ШИМ-контроллера UCC3800

ШИМ-контроллер UCC3800 состоит из базовых узлов: генератора тактовых импульсов, усилителя сигнала ошибки, компаратора, RS-триггера и различных систем защиты.

Система защиты ШИМ-контроллера состоит из систем, отслеживающих напряжение питания устройства, опорное напряжение, а также превышение допустимого уровня тока в силовой части. Кроме того, в ШИМ-контроллере UCC3800 предусмотрен плавный пуск и маскирование переднего фронта на входе контроля тока (leading edge blanking), которое заключается в блокировке токового сигнала на заданное время (100 нс) после нарастающего фронта ШИМ-сигнала.

На основе функциональной схемы [2] с использованием специализированной библиотеки компонентов программы Micro-Cap

была синтезирована модель контроллера UCC3800 (рис. 2), которая оформлена в виде библиотечного компонента программы.

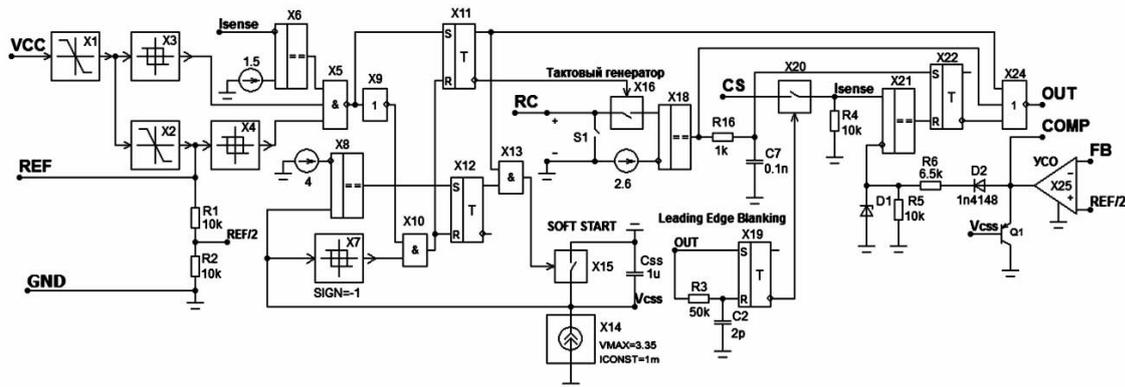


Рис. 2. Макромодель ШИМ-контроллера UCC3800 для программы Micro-Cap

Для проверки работоспособности полученной модели проведено моделирование boost-стабилизатора на 48 В. Полученные временные диаграммы (рис. 3) подтверждают правильность моделирования, значение выходного напряжения в установившемся режиме полностью совпадает с расчетным.

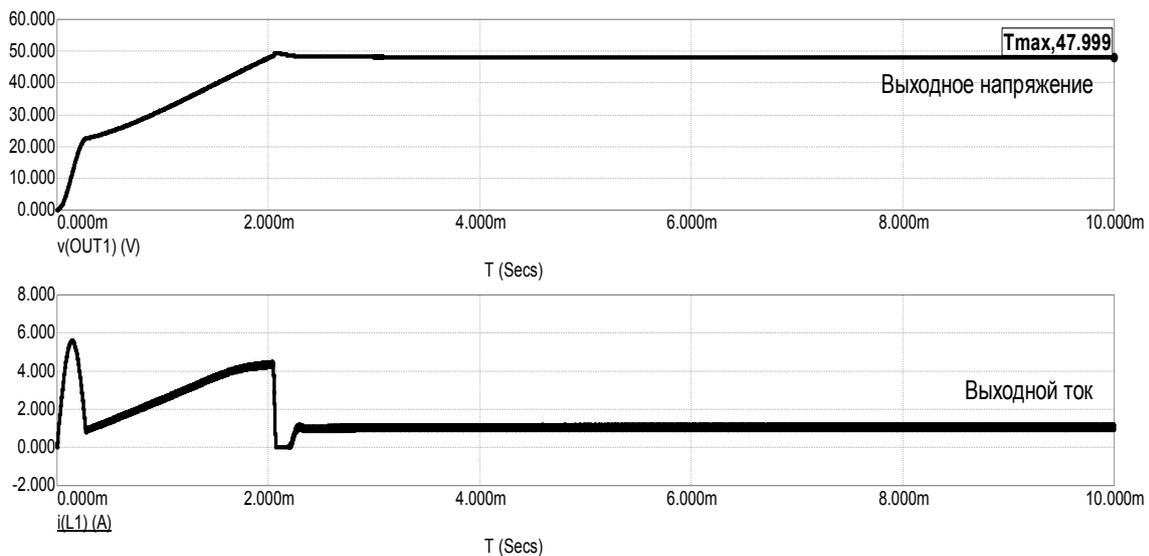


Рис. 3. Временные диаграммы работы стабилизатора

Разработанная модель ШИМ-контроллера может успешно применяться при анализе преобразователей напряжения и источников питания на их основе.

### Литература

1. Амелина М.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 80 с.
2. Datasheet UCC3800. TEXAS INSTRUMENT URL: <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/ucc3800.pdf> (дата обращения: 23.10.2012).

# SIMULATION OF ANT ALGORITHM USING MAPLE WITH ADDING ADDITIONAL PARAMETER

M.N. KIRSANOV, E.A. SHPITONKOVA

MPEI, Moscow

e-mail: raketa91@mail.ru

One of the methods to solve optimization tasks is so called “Ant algorithm” [1]. Original author’s (Marco Dorigo [2]) algorithm description contains four parameters, which regulate speed of convergence and precision of optimization process. Ant algorithm [3] is implemented using mathematical computer software Maple [4, 5]. In this current work we’re trying to determine appropriateness of adding one more parameter. We’ll be comparing time used to process the algorithm with additional parameter and without it. Function **time** is used to calculate used processor time by the software. Results may vary on different computer configurations.

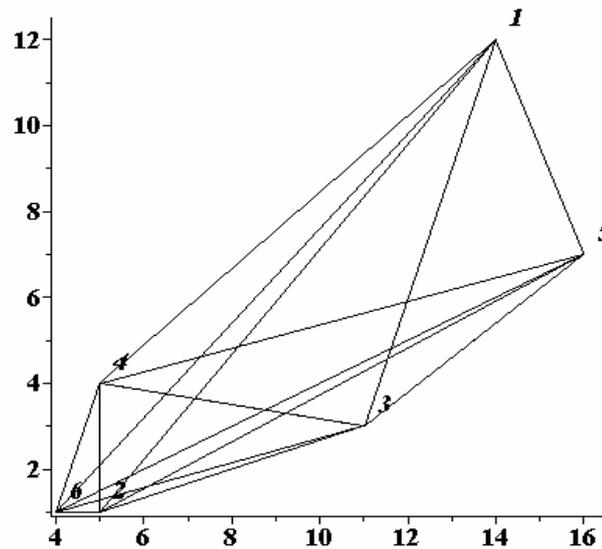


Fig. 1. Ant algorithm,  $n=6$

We’re solving traveling salesman task about finding shortest simple cycle in full graph with  $n$  vertices, which we’ll call cities. Simulation of ant behavior is formed by pheromone distribution on the road, which is proportional to the route length (the shorter the route, the more pheromone is stored on it, which is an  $\alpha$  parameter). Besides that, the probability of choosing the specific route is declared as inversely proportional to the distance between cities ( $\beta$  parameter). To prevent early convergence of algorithm to false result, the algorithm’s author added negative feedback – pheromone drying (the third parameter). Fourth parameter is the number of elite ants. They’re acting using greedy algorithm, which is just selecting the best way (random number generator aren’t used here).

Now we're adding additional parameter (for which we use  $\gamma$ ) and one variable «survival». We'll use  $\Psi$  for it, it'll be random for each path between cities  $\psi_{ij} = \frac{rand(1..100)}{100}$ . Probabilistically-proportional rule will look like:

$$P_{ij,k}(t) = \frac{\tau_{ij}(t)^\alpha (1/d_{ij})^\beta \psi_{ij}^\gamma}{\sum \tau_{ij}(t)^\alpha (1/d_{ij})^\beta \psi_{ij}^\gamma} \quad (1)$$

Pheromone renewal will be done using formula:  $\tau_{ij} = (1-\rho)\tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}$ , where  $\Delta\tau_{ij} = \sum \frac{Q}{L_k(t)}$  (sum is calculated for traversed path),  $\rho$  – pheromone drying intensity.

From the next comparing table ( $\alpha=0,5$ ,  $\beta=5$ ) it is clear, that algorithm processing time is not improving, moreover processing time is rather increasing in some way. But this can be explained as the result of additional time needed to process another random numbers generating function.

Table 1

$\gamma$	t	Lmd
0	0.406	36.923
1	0.437	37.592
2	0.437	38.779
3	0.437	39.757
4	0.452	40.548
5	0.437	40.865

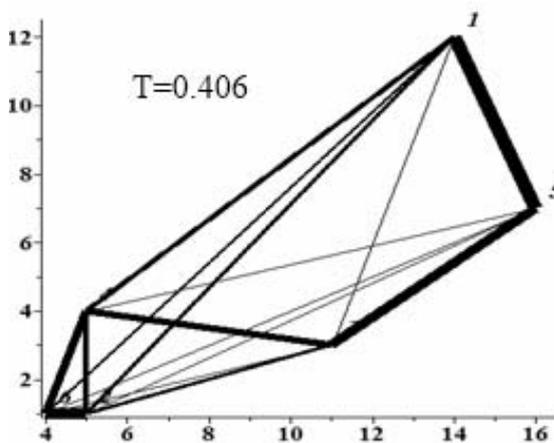


Fig. 2. Optimal route,  
 $\gamma = 0$

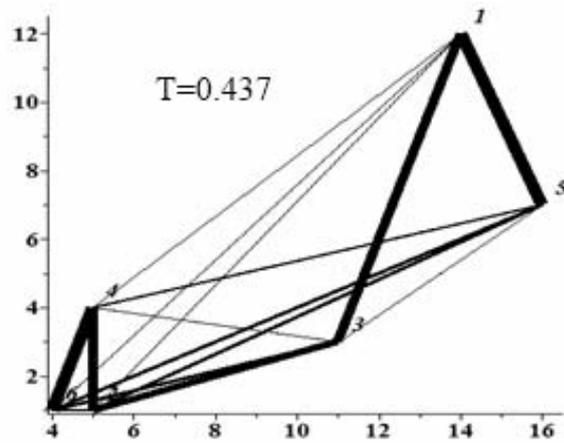


Fig. 3. Optimal route,  
 $\gamma = 5$

The route itself can differ. By changing  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  we can probably achieve better results.

### References

1. Shtovba S. D. Ant algorithms // Exponenta Pro. Mathematics in computer software. – 2003. – № 4. – P. 70–75.
2. Dorigo V. 2007. «Ant Colony Optimization». [http://www.scholarpedia.org/article/Ant\\_colony\\_optimization](http://www.scholarpedia.org/article/Ant_colony_optimization).
3. Kirsanov M.N. Graphs in Maple. – M.: Fizmatlit, 2007. – 168 p.
4. Dyakonov V.P. Maple 10/11/12/13/ in mathematical calculations. – M.: DMK-Press, 2011. – 800 p.
5. Kirsanov M.N. Maple & Maplet. Solving the tasks of mechanics. – SPb.: Lan`, 2012. – 512 p.

## СЕКЦИЯ 2

### Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

#### СТРАТЕГИИ НЕЧЕТКОГО ОЦЕНИВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНГВИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**С.Н. АНДРЕЕВ<sup>1</sup>, В.В. БОРИСОВ<sup>2</sup>, Я.А. ФЕДУЛОВ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Смоленский государственный университет, г. Смоленск, e-mail: smol.an@mail.ru

<sup>2</sup>Филиал «МЭИ(ТУ)» г. Смоленск, e-mail: vborisov@etna-it.ru, fedulov\_yar@mail.ru

Решение широкого класса задач лингвистического анализа осуществляется в условиях неопределенности, эвристичности представления и субъективности оценки анализируемой информации, а также характеризуется разнокачественностью оцениваемых показателей, необходимостью их измерения с использованием различных шкал [1–3].

Все это обуславливает необходимость использования методов интеллектуального анализа данных и, прежде всего, методов нечеткого анализа и моделирования.

Наиболее плодотворным, и в то же время наиболее сложным, является подход к созданию нечетких оценочных моделей, изначально ориентированных на решение задач лингвистического анализа в условиях неопределенности вследствие необходимости одновременного учета как особенностей решаемых задач, так и свойств разрабатываемых моделей.

Такие нечеткие оценочные модели предназначены как для непосредственной оценки лингвистических объектов, так и для ранжирования этих объектов по показателям оценки. Это позволяет эффективно решать следующие задачи лингвистического анализа:

- определение степени сходства оригинального текста и его переводов по отдельным группам показателей;
- определение степени сходства сопоставляемых фрагментов текста;
- упорядочение объектов оценивания и их признаков по некоторым критериям оценки.

В обобщенном виде задачу оценки лингвистических объектов условно можно разделить на два этапа: во-первых, получение оценок частных показателей лингвистических объектов; во-вторых, получение обобщенной оценки лингвистического объекта.

И если первый этап выполняется, как правило, традиционно, то второй – характеризуется рядом специфических особенностей.

Существуют следующие основные подходы для получения обобщенной оценки, а фактически к созданию оценочных моделей сложных объектов, к которым относятся различные лингвистические объекты:

- обобщенный показатель формируется при условии равнозначности частных показателей;
- обобщенный показатель формируется на основе рекурсивного агрегирования частных показателей;
- обобщенный показатель формируется при условии неравнозначности частных показателей;
- обобщенный показатель формируется на основе использования нечетких квантификаторов при свертке частных показателей [4].

Несмотря на многообразие подходов к созданию оценочных моделей (в том числе и нечетких), тем не менее, эти подходы не учитывают согласованность частных показателей при выборе операции свертки для вычисления значения обобщенного показателя. Кроме того, в рамках данных подходов, как правило, не ставится вопрос выбора стратегии оценивания, учитывающей систему предпочтений конкретного исследователя. Это, в итоге, не позволяет создавать гибкие нечеткие оценочные модели со сложной структурой для решения задач лингвистического анализа.

Авторами предложены нечеткие оценочные модели, а также способ их построения и использования для решения задач лингвистического анализа, которые удовлетворяют следующим требованиям:

- возможность многоуровневого формирования обобщенного показателя на основе изменяющихся наборов частных показателей; причем частные показатели могут быть разделены на группы, которые, в свою очередь, разделяются на подгруппы;
- возможность объединения разнородных показателей (как количественных, так и качественных), различающихся по измерительным шкалам, диапазонам значений;
- учет различной значимости частных показателей в обобщенной оценке;
- учет согласованности частных показателей;
- гибкая настройка (адаптация) модели оценки при добавлении или исключении показателей и изменении параметров (согласованности и значимости показателей);
- возможность выбора стратегии оценивания, учитывающей систему предпочтений исследователя.

Предлагаемый способ основан:

во-первых, на поочередном поиске частных показателей, сопоставленных с одним из критериальных уровней их согласованности;

во-вторых, на идентификации операций свертки этих показателей в зависимости от уровня согласованности этих показателей [5];

в-третьих, на формировании обобщенного показателя из частных показателей с использованием идентифицированных операций с учетом выбранной стратегии оценивания.

В зависимости от особенностей решаемой задачи оценки согласованность может трактоваться как корреляция, взаимовлияние частных показателей, одновременная достижимость значений сопоставляемых частных показателей, смежность проявления частных показателей или их конкретных значений.

Возможен различный порядок просмотра уровней согласованности частных показателей:

- от наименее согласованных к наиболее согласованным показателям;
- от наиболее согласованных к наименее согласованным показателям;
- «усредняющий» порядок просмотра.

Эти варианты просмотра соответствуют различным стратегиям оценивания и позволяют учесть систему предпочтений исследователя.

Порядок просмотра от наименее согласованных к наиболее согласованным показателям соответствует стратегии оценивания, позволяет «не потерять» «хорошие» оценки плохо согласованных показателей, поскольку операции свертки показателей при этом обычно ориентированы на вариант оценивания, при котором значение обобщенного показателя определяется наихудшим значением частных показателей.

Порядок просмотра от наиболее согласованных к наименее согласованным показателям соответствует стратегии оценивания, позволяющей полноценно учесть «плохие» оценки хорошо согласованных показателей, операции свертки по которым ориентированы на вариант оценивания, когда значение обобщенного показателя определяется наилучшим значением частных показателей [6].

«Усредняющий» порядок просмотра показателей приводит, в первую очередь, к свертке «средне согласованных» (слабо зависящих друг от друга) показателей, что соответствует сбалансированной стратегии оценки показателей.

Следует отметить, что в рамках одной модели оценки также могут быть выбраны разные стратегии просмотра (свертки) частных показателей в соответствии с особенностями отдельных групп показателей и предпочтений исследователя.

При наличии нескольких групп одинаково согласованных показателей их учет в модели осуществляется в порядке убывания суммарного веса показателей в группе (можно установить и иной порядок просмотра показателей).

Их агрегирование выполняется при последовательном рассмотрении этих частных показателей на основе операции свертки, соответствующей данному уровню согласованности этих показателей.

Если идентифицируемая операция свертки является не многоместной, а двуместной неассоциативной операцией, то для нее следует установить порядок перечисления показателей, например, по убыванию их весов. Для случая идентифицированной бисимметричной операции также можно начинать с частных показателей, обладающих наибольшим весом.

Процедура повторяется до тех пор, пока не будет сформирован обобщенный показатель на основе совокупности частных показателей.

При использовании построенной модели для оценки конкретного лингвистического объекта значимость частных показателей учитывается непосредственно при расчете.

В работе представлены результаты использования предложенных нечетких моделей и стратегий оценивания для определения степени сходства фрагментов текстов оригинала поэмы С. Кольриджа “The Rime of the Ancient Mariner” и двух ее переводов Н. Гумилева и В. Левика.

### Литература

1. Andreev S. Literal vs. Liberal translation – formal estimation // *Glottometrics*. –Vol. 23.– 2012. – P. 62–69.
2. Juola P. Authorship attribution. *Foundations and Trends in Information Retrieval*. –Vol. 1, Is. 3. Hanover, MA, USA: Now publishers Inc., 2006. – P. 233–334.
3. Hoover D.L. Corpus stylistics, stylometry and the styles of Henry James. // *Style*. –Vol. 41(2), –2007. – P. 160–189.
4. Компьютерная поддержка сложных организационно-технических систем / В.В. Борисов, [и др.]. – М.: Горячая линия – Телеком, 2002. – 154 с.
5. Борисов В.В., Федулов Я.А. Определение базисных операций свертки для нечетких оценочных моделей сложных организационно-технических систем // Сб. тр. II междунар. науч.-техн. конф. «Энергетика, информатика, инновации – 2012» – ЭИИ-2012. В 2 т. Т. 2. – Смоленск: Филиал МЭИ в г. Смоленске. – С. 5–10.
6. Зернов М.М. Способ построения нечёткой многокритериальной оценочной модели// *Нейрокомпьютеры: Разработка и применение*. – 2007. – №1.– С. 40–49.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ФОРМАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Е.А. БЕЛЯКОВА, В.И. МУНЕРМАН

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: gretta\_li@mail.ru, vimoon@gmail.com

Рассматривается способ определения метаданных для оптимизации процесса обработки больших объемов данных.

Наиболее сложной операцией в различных моделях данных является операция соединения. В реляционной модели данных такая операция называется JOIN. В многомерно матричной модели ей соответствует операция  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения [1].

Пусть даны  $p$ -мерная матрица  $A = \|a_{i_1 \dots i_p}\|$  и  $q$ -мерная матрица  $B = \|b_{i_1 \dots i_q}\|$ . Можно разбить совокупности индексов  $i_1, \dots, i_p$  и  $i_1, \dots, i_q$  на четыре группы, содержащие соответственно  $\kappa, \lambda, \mu$  и  $\nu$  индексов ( $\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0$ ). Причем  $\kappa + \lambda + \mu = p$ , а  $\lambda + \mu + \nu = q$ . Разбиение порождает четыре группы индексов:  $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$ ,  $c = (c_1, \dots, c_\mu)$  и  $m = (m_1, \dots, m_\nu)$ . Индексы разбиений  $s$  и  $c$  принадлежат обеим матрицам. Тогда матрицы  $A$  и  $B$  можно представить в виде  $A = \|a_{lsc}\|$  и  $B = \|b_{scm}\|$ . Очевидно, что если индексу  $s_\gamma (c_\gamma)$  соответствуют индекс  $i_\alpha$  в матрице  $A$  и индекс  $i_\beta$  в матрице  $B$ , то  $n_{i_\alpha} = n_{i_\beta}$ . Индексы разбиений  $s$  и  $c$  называются скоттовыми и кэлиевыми соответственно.

Матрица  $C = \|C_{lsm}\|$ , элементы которой вычисляются по формуле  $C_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} \times b_{scm}$ , называется  $(\lambda, \mu)$ -свернутым произведением матриц  $A$

и  $B$  и обозначается  ${}^{\lambda, \mu}(A \times B)$ .

Для синтеза и оптимизации процесса, состоящего из последовательности JOIN, можно использовать метод динамического программирования, подобный предложенному в [2], предварительно модифицировав его для случая многомерных матриц.

Однако на практике проблема состоит в том, что разбиение индексов производится неявно. Это делается разработчиком процесса на начальном этапе, и информация о принадлежности индексов разбиениям  $l, s, c, m$  отсутствует в алгебраическом выражении процесса. Решение проблемы явного задания индексов возможно путем расширения системы операций алгебры многомерных матриц некоторыми операциями тензорной алгебры.

Пусть дано линейное пространство  $V$  размерности  $N$  над полем  $K$ . Функция  $T$ , областью определения которой является множество базисов пространства  $V$ , а областью значений – множество массивов вида  $(T_{j_1 \dots j_m}^{j_1 \dots j_k})$  элементов из  $K$ , называется тензором ранга  $r$  ( $r = k + m$ ),  $m$  раз ковариантным,  $k$  раз контравариантным.

Очевидно, что тензор определяется аналогично многомерной матрице, а операции умножения тензоров и многомерных матриц можно считать аналогичными. Можно рассматривать верхние индексы как индексы из разбиений  $s$  и  $c$ , а нижние индексы – индексами разбиений  $l$  и  $m$ .

Подобно имеющимся в тензорной алгебре специальным операциям подъема и спуска индексов [3, 4], алгебру многомерных матриц можно пополнить операциями, преобразующими индексы. Произвольная матрица  $A = \|a_{i_1 \dots i_p}\|$  изначально имеет только свободные индексы. Тогда

после применения операции  $\lambda(i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_s})A = \|a_{i_{\beta_1}, \dots, i_{\beta_{p-s}}}^{i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_s}}\|$  получается

матрица, которая может быть операндом в  $(\lambda, 0)$ -свернутом произведении, а после операции  $\mu(i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_s})A = \|a_{i_{\beta_1}, \dots, i_{\beta_{p-s}}}^{i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_s}}\|$  – операндом в

$(0, \mu)$ -свернутом произведении. После применения обеих операций в нужной последовательности получается матрица-операнд для операции  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения. Таким образом, введение новых двух операций позволяет включить в алгебраическую модель процесса обработки данных операции над метаданными. Очевидно, что операции  $\lambda$  и  $\mu$  имеют обратные операции  $\lambda^{-1}$  и  $\mu^{-1}$ .

Предложенный подход позволяет решить основные проблемы, связанные с синтезом и оптимизацией процессов обработки данных, используя в записи алгебраического выражения – модели процесса (запроса) не только операции преобразования данных, но и операции над метаданными.

### Литература

1. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности.–2012,–Т.8, № 3. – С. 19-22.
2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979.
3. Мельников Ю.Б. Основы тензорной алгебры. –Изд. 3, исп и доп. – Екатеринбург, 2010.
4. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. – М.: Физматгиз,1961. – 463 с.

# ПРИМЕНЕНИЕ АДАПТИВНЫХ НЕЧЕТКИХ СИТУАЦИОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

М.А. ДЕНИСЕНКОВ

<sup>2</sup>Филиал «МЭИ(ТУ)» г. Смоленск,  
e-mail: scoz2010@yandex.ru

В настоящее время в процессе деятельности люди постоянно сталкиваются с необходимостью решения аналитических задач поддержки принятия решений (ППР).

Большинство таких аналитических задач ППР характеризуются большой сложностью, высокой степенью неопределенности, ограниченностью сроков решения, большим числом разнообразных состояний исследуемой системы, объекта.

Одним из наиболее перспективных методов решения таких задач является использование нечетких ситуационных сетей (НСС), так как они позволяют учесть неопределенность предметной области, работать с субъективными представлениями экспертов за счет применения нечетких понятий и оценок.

Но в процессе деятельности системы могут возникать ситуации, когда возможностей рассмотренной классической НСС недостаточно для помощи человеку в принятии решений. Например, из-за отсутствия в сети нужной целевой ситуации или из-за невозможности ее достижения. Следовательно, возникает необходимость разработки модели адаптивной НСС.

В основе данной модели лежит классическая модель нечеткой ситуационной сети. В ней можно выделить следующие компоненты:

– нечеткие признаки – отличительные черты управляемого объекта. Каждый нечеткий признак  $y_i$  ( $i \in J = \{1, 2, \dots, p\}$ ) описывается соответствующей лингвистической переменной  $\langle y_i, T_i, D_i \rangle$ , где  $T_i = \{T_1^i, T_2^i, \dots, T_{m_i}^i\}$  – терм-множество лингвистической переменной  $y_i$  (набор лингвистических значений признака,  $m_i$  – число значений признака),  $D$  – базовое множество признака  $y_i$  [1];

– нечеткая ситуация – набор нечетких значений признаков, описывающий состояние объекта управления в некоторый момент времени [1];

– управляющие решения, описывающие действия, необходимые для перехода объекта из одного состояния в другое;

– управляющие переходы – отражают переход объекта из одного состояния (ситуации) в другое. Каждому переходу сопоставляется управляющее решение и вес, характеризующий значимость, важность соответствующего решения.

Такую адаптивную НСС можно представить в следующем виде:

$$NSS = \langle Y, S, R, U \rangle, \quad (1)$$

где  $Y$  – множество нечетких признаков;

$S$  – множество нечетких ситуаций;

$R$  – множество управляющих решений;

$U$  – множество управляющих переходов [2].

В данной адаптивной НСС существует возможность автоматической генерации новых ситуаций и управляющих решений. Это позволяет формировать решения для пользователя даже в тех случаях, когда целевая ситуация недостижима.

На основании анализа ситуаций, возникающих при управлении объектом, можно выделить три основных варианта, при которых рассмотренная модель НСС не сможет предоставить пользователю вариантов решений:

- целевая ситуация отсутствует в сети;
- целевая ситуация недостижима из текущей;
- достижение целевой ситуации невозможно в рамках поставленных условий (длина пути, сумма весов).

Соответственно, разрабатываемая модель адаптивной НСС должна предоставлять пользователю варианты решений в этих случаях с помощью генерации новых ситуаций и управляющих переходов в сети.

Рассмотрим общий алгоритм добавления новых ситуаций и управляющих переходов в предложенной адаптивной НСС:

1) определяем параметры целевой ситуации  $s_k$  и необходимость генерации новых управляющих переходов (если целевой ситуации нет в сети, она недостижима или недостижима в рамках заданных условий);

2) определяем  $(g-q)$ -общность целевой ситуации  $s_k$  и всех ситуаций  $s_i$  сети, за исключением  $s_k$ , для каждой  $s_i$  определяем множество признаков  $P_{q,i}$ , по которым  $s_i$  и  $s_k$  не являются нечеткоравными, а также мощность этого множества  $q_i$ ;

3) выбираем ситуации  $S_b = \{s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,r}\}$ , ближайшие к целевой  $s_k$ , т.е. для которых  $q_i = \min(q_1, q_2, \dots, q_r)$ , где  $r$  – количество таких ситуаций;

4) для ситуации  $s_{i,j} \in S_b$  определяем число необходимых управляющих переходов для перемещения из  $s_{i,j}$  в  $s_k$  как  $q_i$  и число ситуаций для генерации как  $q_i - 1$ ;

5) формируем новый управляющий переход, нагружаем его решением, изменяющим значение одного из признаков множества  $P_{q,i}$  и весом решения;

6) формируем новую ситуацию в сети, в которую переводит ситуацию  $s_{i,j}$  сформированный переход. Если это целевая ситуация  $s_k$ , переходим к пункту 7), иначе в качестве  $s_{i,j}$  выбираем сформированную ситуацию и переходим к пункту 5);

7) проверяем, сформированы ли пути из текущей ближайшей к целевой ситуации пути, соответствующие всем последовательностям изменения признаков. Если нет, то переходим к 4), иначе – к 8);

8) если рассмотрены все ситуации из  $S_b$  – завершаем работу, иначе переходим к следующей ситуации из этого множества  $s_{i,j+1}$  (к пункту 4).

Таким образом, предложенная модель адаптивной НСС позволяет пользователю получить решение аналитических задач ППР в тех случаях, когда классическая модель НСС неприменима, а также повысить качество и оперативность выполнения аналитических задач ППР.

### Литература

1. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Коровин С. Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. – М.: Наука, 1990. – 272 с.

2. Денисенков М.А. Нечеткие ситуационные сети для аналитических задач поддержки принятия решений // Компьютерные технологии и информационные системы. –2013.–Вып. 28. – С. 5–10.

## БОЛЬШИЕ ДАННЫЕ. МЕТОДЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА

**Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ, Е.Н. КУРИЦЫНА, Д.А. ЛАГУТКИН**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: ypy1101@gmail.com

*Проблема Больших Данных вечна и прозрачна.  
С.Д. Кузнецов ([1])*

Попытки справиться со все возрастающими объемами данных похожи на попытки добраться до горизонта. И при путешествии к горизонту, и при анализе больших данных конечная цель недостижима. С другой стороны, путешествие к горизонту может оказаться не только интересным, но и полезным, если выбрать правильный маршрут. При анализе больших данных иногда удается найти важные зависимости (шаблоны, паттерны), отражающие фрагменты многоаспектных взаимоотношений в данных, если раскопку данных вести в правильном направлении. Если же копать не там, где надо, то нельзя быть уверенным, что в обозримом будущем вы наткнетесь на самородок.

К настоящему моменту в различных предметных областях накопились огромные объемы сырых данных, содержащие так называемые скрытые знания (hidden knowledge). Название «скрытые» эти знания получили не случайно. Добыть знания, скрытые в сырых данных, непросто из-за очень большого объема этих данных. Следует

также учитывать, что объемы данных постоянно увеличиваются – согласно исследованиям IDC, объем корпоративных данных к 2020 году возрастет в 35 раз [3]. По-видимому, из-за уважения к величине этих объемов данных последние годы их стали называть не просто большими данными, а «Большими Данными», подчеркивая их значительность сразу двумя прописными буквами.

В литературе описано довольно много случаев, когда старатели, вооруженные методами раскопки сырых данных, обнаруживали зависимости (паттерны), существенные для успешной деятельности в различных предметных областях, таких как: розничная торговля, банковское дело, телекоммуникации, страхование, медицина, молекулярная генетика и геновая инженерия, прикладная химия [2].

За методами интеллектуального анализа сырых данных закрепилось название Data Mining (добыча данных, интеллектуальный анализ данных, глубинный анализ данных). Методы Data Mining позволяют обнаруживать в сырых данных ранее неизвестные, нетривиальные, практически полезные и доступные интерпретации знания (закономерности), необходимые для принятия решений в различных сферах человеческой деятельности [2].

Сегодня обработке Больших Данных уделяется много внимания, и, как правило, такая обработка ассоциируется с большими проблемами. Основными причинами, затрудняющими обработку Больших Данных, являются объем этих данных и необходимость обработки неструктурированных данных (Unstructured Data Analysis, UDA).

В [4] указывается на необходимость совершенствования работы с неструктурированными данными. Уже сейчас такие данные составляют свыше 80% всех хранимых данных, и их количество возрастает на порядок быстрее по сравнению со структурированными данными. В начале третьего тысячелетия аналитики опубликовали информацию о неожиданно высоких трудозатратах офисных служащих при работе с данными. Выяснилось, что они отдают до половины своего рабочего времени рутинной, не автоматизированной работе с информацией.

В отчете IDC «Расплата за невозможность обнаружить информацию» (The High Cost of Not Finding Information, 2003) было отмечено, что на средних предприятиях прямые убытки, вызванные потерей времени из-за неудобства работы с информацией, в пересчете на одного работающего оцениваются в 2,5–3,5 тыс. долл. Неудобство было связано как раз с необходимостью обработки неструктурированных данных: электронных писем, служебных записок, новостей, чатов, отчетов, маркетинговых материалов, презентаций и других данных, которые не могут быть занесены в реляционные СУБД, а хранятся в виде текстовых файлов различных форматов (цитируется по [4]).

С подобной ситуацией одному из авторов пришлось столкнуться несколько лет назад на заводе, производящем стеклотару. Управление заводом было передано французским специалистам, которые не захотели мириться с крайне низкой производительностью труда офисных служащих завода. Автора пригласили рассказать о возможностях использования табличных процессоров для автоматизации обработки информации. В результате совместными усилиями удалось автоматизировать несколько процессов.

Одна из сотрудниц завода отвечала за поставки стеклотары различным предприятиям Франции и РФ. Работа состояла в том, чтобы из электронных заявок предприятий выделить название предприятия и количество тары того или иного вида. Трудность заключалась в том, что названия предприятий считывались из определенной графы бланков, на которых они записывались в довольно произвольной форме (одни названия заключались в кавычки, другие приводились без кавычек, некоторым предшествовали аббревиатуры «ЧП», «ООО» и т.п., другим ничего не предшествовало). Так как заявок было много, на эту рутинную работу сотрудница затрачивала половину рабочего дня. Произведя анализ сырых данных, нам удалось найти закономерности (паттерны) и автоматизировать выбор названий предприятий с помощью Excel. По-новому организованная работа стала занимать минуты.

Вокруг методов добычи знаний из Больших Данных уже много лет ведутся активные дискуссии. Спектр мнений об этих методах весьма широк – от восторженных надежд на ожидаемые успехи до полного отрицания и отношения к ним как к преходящей моде. Интересный анализ этих споров приведен в работе Р.Д. Смолла [5], в которой развенчаны десять популярных мифов об интеллектуальном анализе данных.

Ниже мы конспективно изложим свои соображения по поводу возможных способов обработки Больших Данных.

1. Имея в наличии большое количество сырых неструктурированных данных, трудно использовать какие-либо методы их обработки. Желательно имеющиеся данные некоторым образом описать (структурировать). Для описания можно использовать функциональный подход [6], позволяющий представить предметную область, ассоциированную с Большими Данными, в виде функционального комплекса данных (ФКД).

2. По-возможности необходимо описать функциональные зависимости, обнаруженные в ФКД. Способы описания функциональных зависимостей в сложноструктурированных комплексах данных изложены одним из авторов в работе [7].

3. Большие Данные, ассоциированные с некоторым ФКД, представляют собой определенную алгебраическую систему. В случае,

если полученная система изучена, следует воспользоваться инвариантами данной системы для поиска паттернов в Больших Данных. Так, например, если ФКД имеет графовую структуру, можно исследовать Большие Данные, проверяя их на наличие графовых инвариантов. Содержащиеся в Больших Данных паттерны, скорее всего, ассоциированы с инвариантами алгебраической структуры. Паттерны, полученные таким образом, доступны для интерпретации, ибо они отражают характерные свойства структуры данных. Их легко представить в наглядной для пользователя форме и легко объяснить в терминах предметной области.

Такой подход к раскопке сырых данных подсказывает старателям, как должны выглядеть самородки в исследуемом массиве сырых данных. Очевидно, что целенаправленный поиск имеет большие преимущества, чем поиск по принципу «найди то, не знаю что».

Миф о том, что средства интеллектуальной обработки данных автоматически обнаруживают различные закономерности, не требуя от пользователя предварительного формулирования какой-либо задачи, давно развенчан [5].

4. Попытаться визуализировать данные различными способами. Удачная визуализация дает возможность увидеть существующие в Больших Данных важные зависимости (паттерны). В настоящее время ведутся исследования, направленные на повышение дружелюбности интерфейсов. Визуализация данных в этих исследованиях занимает ведущую позицию.

В основе визуализации часто лежат простые идеи. Важно эти идеи заметить. Образцом удачной визуализации может служить, например, табличный процессор, ставший для бизнеса мощным инструментом исследования сырых данных. Для подтверждения достаточно упомянуть лишь одну функцию «Что будет, если ... ?», реализованную в нем.

Однако следует отметить, что поле исследований в области визуализации данных еще не распаханно.

Перечисленные в пунктах 1–4 методы добычи знаний из Больших Данных авторы использовали в различных предметных областях.

### **Литература**

1. Кузнецов С.Д. К свободе от проблемы Больших Данных // Открытые системы. 2012. №2. URL: <http://www.osp.ru/os/2012/02/13014125>.
2. Дюк В.А., Самойленко А.П. Data Mining. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 368 с.

3. Гришковский А. Аналитика без ограничений // Открытые системы.–СУБД.–2012.–№ 05. URL: [http:// www.osp.ru/ os/ 2012/ 05/ 13016218](http://www.osp.ru/os/2012/05/13016218).
4. Черняк Л. Аналитика неструктурированных данных // Открытые системы. СУБД. 2012. №6. URL: <http://www.osp.ru/os/2012/06/13017038>.
5. Small R. D. Интеллектуальный анализ данных: мифы и факты // ComputerWeekly. –1997.– № 22-23. –С. 38–39.
6. Емельченков Е.П. Базы данных. Современный подход: монография –Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ, 2010. –60 с.
7. Yemelchenkov Ye. P., Tsalenko M. Sh. Functional dependencies in hierarchical Structures of Data // Lect. notes in Computer Science. –Berlin–1991.–V. 495.–P. 258–275.

## **КЛАССИФИКАЦИЯ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРАВДОПОДОБНЫХ РАССУЖДЕНИЙ**

**А.С. ЗАХАРОВ**

Филиал «МЭИ(ТУ)», г. Смоленск

В рамках логико-вероятностного подхода к моделированию правдоподобных рассуждений существует набор моделей, каждая из которых имеет свои особенности, недостатки и преимущества. Для понимания перспектив развития данного вида моделей необходимо классифицировать их по ряду оснований классификации, что позволит не только более чётко проследить различия между отдельными моделями, но и указать направления его развития. В качестве оснований классификации выделяются: *вид операции импликации, используемая мера истинности, возможность учёта динамики.*

**Вид операции импликации.** Операция импликации используется для моделирования причинно-следственных связей и, до тех пор, пока она определяется в терминах бинарной логики, не предполагает вариативности в определении. Различные подходы к её определению возникают тогда, когда возникает потребность в использовании мер истинности (в частности, вероятностной меры истинности) и выхода за рамки бинарной логики.

Существуют два подхода к определению того, что считать «вероятностью истинности А при условии истинности В» [1]. При этом можно выделить два основных подхода: можно интерпретировать  $P(B \rightarrow A)$  как  $P(A|B)$  (условная вероятность), и в этом случае имеет место байесовский подход; однако можно использовать и другой

подход – на основании логической эквивалентности функций  $B \rightarrow A$  и  $A \vee \bar{B}$  можно интерпретировать  $P(B \rightarrow A)$  как  $P(A \vee \bar{B})$ .

**Используемая мера истинности.** Используемая мера истинности определяет не только то, в какой форме необходимо вносить данные в модели и каким образом будут осуществляться операции над этими данными, но и то, какой вид неопределённости (стохастическая, эпистемиологическая) может быть учтён средствами модели.

*Вероятностная мера истинности* используется для количественного описания истинности тех или иных высказываний путём определения на множестве данных высказываний ( $\Omega$ ) сигма-алгебры подмножеств  $\Omega$  ( $\Delta$ ) и, непосредственно, сигма-аддитивной конечной меры  $P$ , обладающей заданным набором свойств. Данная мера истинности позволяет учитывать при решении задач ППР стохастическую неопределённость.

*Нечёткая вероятностная мера истинности*, как следует из её названия, во многом является расширением вероятностной меры истинности, призванным учесть в моделях, предназначенных для ППР, неопределённость эпистемиологического характера, т.е. вызванную отсутствием или неточностью знаний о проблеме. В работах ([2, 3]) представлены различные варианты определения нечёткой вероятностной меры.



Рис. 1. Алгебраические байесовские сети

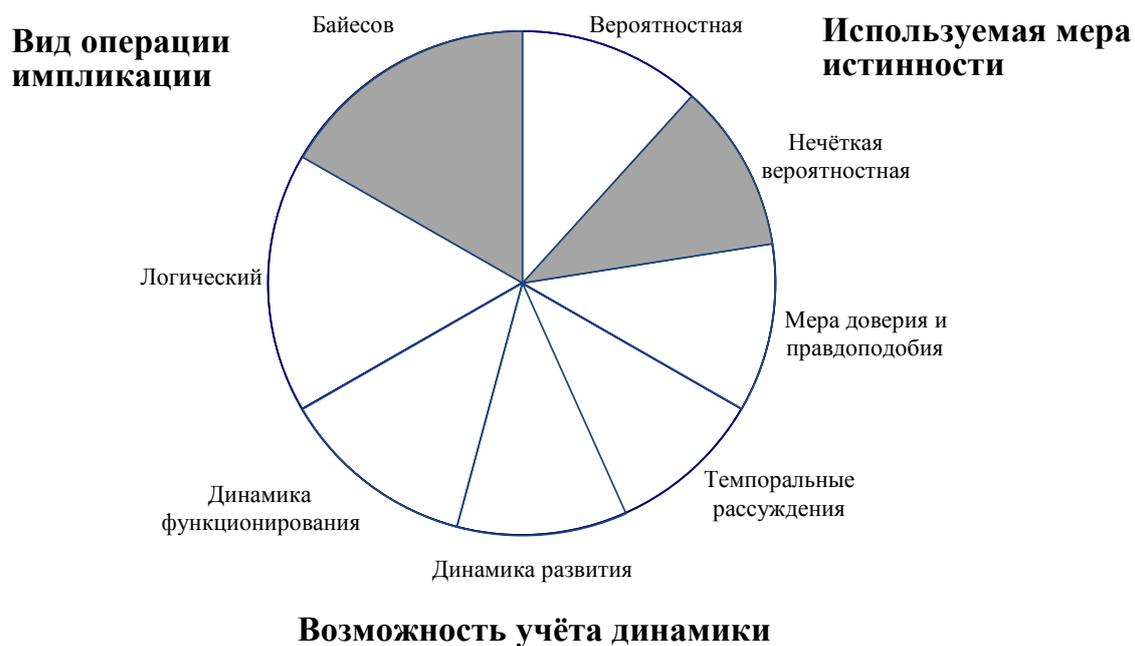


Рис. 2. Нечёткие байесовские сети

*Меры доверия и правдоподобия*, подробно описанные в [4], используются для задания интервальной оценки истинности высказываний. При этом характеристика неопределённости истинности высказывания определяется двумя величинами: *мерой доверия* ( $Bel$ ) и *мерой правдоподобия* ( $Pl$ ). Мера доверия является нижней оценкой вероятностной меры истинности, а мера правдоподобия – верхней.

**Возможность учёта динамики.** Учёт *динамики функционирования* предполагает наличие в модели компонентов, позволяющих связать носитель изменчивости (например, время) с состоянием модели. При этом как количественные, так и качественные параметры модели остаются неизменными. Также задание динамики функционирования требует введения в модель составляющих, которые определяют семантику изменчивости параметров модели.

Учёт *динамики развития*, в отличие от динамики функционирования, направлен на обеспечение гибкости самой модели, т.е. обеспечение возможности качественного и/или количественного изменения параметров модели.

*Возможность темпоральных рассуждений.* Темпоральными рассуждениями называют рассуждения, в которых учитываются различного рода временные зависимости между пропозициональными переменными (высказываниями). Учёт в используемой модели рассуждений темпорального аспекта позволяет существенно расширить семантику моделируемых рассуждений. Особенно интересными представляются темпоральные рассуждения, в которых истинность

некоторой переменной зависит от истинности других переменных в прошлом, т.е. рассуждения, учитывающие предысторию.

На рисунках 1–3 представлены диаграммы, иллюстрирующие различные логико-вероятностные модели правдоподобных рассуждений в разрезе представленной классификации.



Рис. 3. Динамические нечёткие байесовские сети

### Литература

1. Kreinovich V., Longpre L., Nguen H.T. Probability of Implication, Logical Version of Bayes Theorem, and Fuzzy Logic Operations // Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Fuzzy Systems–Hawaii, 2002. – P. 530–535.
2. Liu Yubin, Qiao Zhong, Wang Guangyuan, Fuzzy random reliability of structures based on fuzzy random variables, Fuzzy Sets and Systems, №86, 1997. – P. 345–355.
3. Kwakernaak H., Fuzzy random variables – I. Definitions and Theorems, Information Sciences, 15, (1978). – P. 1–29; Fuzzy random variables – II. Algorithms and Examples for the Discrete Case // Information Sciences – 17, – 1979. – P. 253–278.
4. Chau C.W.R., Lingras P., Wong S.K.M. Upper and Lower Entropies of Belief Functions Using Compatible Probability Function // Methodologies for Intelligent Systems / ed. By J. Komorowski, Z.W. Ras.– Berlin: Springer-Verlag, 1993. – P. 306–315.

# АССОЦИАТИВНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТА МНОГОМЕСТНОЙ НЕЧЁТКОЙ ДИЗЬЮНКЦИИ

**М.М. ЗЕРНОВ**

Филиал «МЭИ(ТУ)», г. Смоленск

e-mail: zmmioml@yandex.ru

Рассмотрим реализацию нечёткой многоместной дизъюнкции, основанную на чётких операциях сравнения (эквивалентности), совпадения со сдвигом, а также конъюнкции, дизъюнкции и отрицания бинарных векторов. Все перечисленные операции, за исключением сравнения со сдвигом, могут быть эффективно реализованы в массовом порядке на основе существующих многокоординатных ассоциативных устройств хранения и обработки информации [1]. Покажем, как можно представить нечёткую *max*-дизъюнкцию для эффективной реализации в ассоциативных устройствах при наличии дополнительной аппаратной возможности сравнения бинарных матриц и векторов с произвольным сдвигом по строкам.

Вначале определим операцию сравнения бинарных матриц со сдвигом: под выражением  $R = ((M_1, M) \approx M_2)$ , где  $M_1, M_2$  – сравниваемые двоичные матрицы размерности  $m \times n$ , а  $M$  – двоичная матрица маски той же размерности, будем понимать результат вычисления следующих выражений:

$$R = ((M_1, M) \approx M_2) = \bigvee_{d=0}^{m-1} R^d,$$

$$R^d [d : m-1] = C^d, R^d [0 : d-1] = 0,$$

$$C^d = \bigwedge_{h=d}^{m-1} \left[ \bigwedge_{j=0}^n ((M_1[h, j] \equiv M_2[h-d, j]) \vee M[h, j]) \right].$$

Способ определения результата многоместной нечёткой дизъюнкции  $c = \bigvee_{j=0}^{n-1} b_j = \max_{j=0, n-1} b_j$  на основе маскированного сравнения со сдвигом включает следующие этапы (будем пользоваться векторизованным представлением логических операций над бинарными векторами и матрицами).

1. Определить нулевые разряды, общие для старшей части всех сравниваемых чисел:

$$h = \overline{0, m-1}, j = \overline{0, n-1} : Q[h, j] = 0,$$

$$C_1 = (((B_0, B_1, \dots, B_{n-1}) \downarrow Q) \approx Q),$$

здесь  $B_j$  – бинарное представление нечёткого логического значения  $b_j \in [0,1]$  в формате с фиксированной точкой.

2. Определить те числа  $b_j$ , которые содержат 1 в старшем для всех чисел ненулевом разряде (выделить номер последнего нулевого разряда и сравнить по нему с единицей):

$$\begin{aligned} C_2[m-1] &= C_1[m-1], \\ h = \overline{m-2,0} : C_2 &= C_1[h+1], \\ j = \overline{0,n-1} : G_j &= ((B_j \equiv C_2) \vee \overline{C_2} \vee C_1), \\ V &= \left\{ B_j \mid \bigwedge_{h=0}^{m-1} G_j = 1 \right\}. \end{aligned}$$

3. У найденных чисел найти все общие нулевые разряды:

$$\begin{aligned} h = \overline{0,m-1} : C_3[h] &= 0, \\ B_j \in V : C_3 &= C_3 \vee B_j. \end{aligned}$$

4. Замаскировав все найденные нулевые разряды оставшихся чисел, провести сравнение со сдвигом старшей части каждого числа с полностью единичным столбцом:

$$h = \overline{0,m-1} : Q[h] = 1, j = \overline{0,n-1} : F_j = ((B_j, \overline{C_3}) \approx Q)$$

5. Составить поисковый образ и маску максимального числа:

$$\begin{aligned} h = \overline{0,m-1} : C_4[h] &= 0, \\ B_j \in V : C_4 &= C_4 \vee F_j, \\ C_5 = \overline{C_4}, C_6 &= C_4 \wedge C_3. \end{aligned}$$

6. Сопоставление маскированного поискового образа с рассматриваемыми числами, выбор первого подходящего числа:

$$\begin{aligned} j = \overline{0,n-1} : T_j &= ((B_j \equiv C_6) \vee C_5), \\ C &= \forall B_j \mid \bigwedge_{h=0}^{m-1} T_j[h] = 1. \end{aligned}$$

В заключение заметим, что предложенный способ применим для определения максимального из любых неотрицательных чисел в формате с фиксированной точкой, а после незначительной доработки может быть распространён и на другие форматы двоичного представления чисел.

### Литература

1. Огнев И.В., Борисов В.В. Ассоциативные среды. – М.: Радио и связь, 2000. – 312 с.

# АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ ОБЪЕМОВ ДАННЫХ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСАХ МАССОВОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА

**Д.И. МАКАРОВ, В.И. МУНЕРМАН**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: makarov.dmitriy67@gmail.com, vimoon@gmail.com

В [1] показано, что для реализации операции соединения данных (join) эффективно использование вычислительных комплексов с массово-параллельной архитектурой. Далее приводятся данные вычислительного эксперимента, проведенного для оценки качества этой реализации. В ходе эксперимента решались две задачи.

Задача 1. Выбор алгоритма распределения данных. Эффективность реализации операции соединения существенно зависит от алгоритма распределения классов эквивалентности таблиц (файлов) между вычислителями (лезвиями). Эксперимент производился многократным (до одного миллиона повторений) решением поставленной задачи для вычислительных комплексов с различным количеством вычислителей (от 2 до 1024) различным (случайным) распределением мощностей классов эквивалентности.

Параллельные процессы получают индексы и мощности классов эквивалентности из метаданных, присущих индексно-последовательной организации файлов. При этом каждому индексу соответствует один и только один вычислитель, но каждому вычислителю может соответствовать любое количество индексов. Одна из основных задач повышения эффективности операции соединения в рассматриваемом случае – получение минимальной разности сумм произведений мощностей пар классов эквивалентности для всех вычислителей. Для выбора алгоритма было проведено сравнение качества и времени работы двух алгоритмов распределения классов эквивалентностей. Это распространенный алгоритм «загрузки корабля» и эвристический алгоритм «бустрофедона», названный так по аналогии с одним из древних методов письма.

Результаты, представленные на рисунке 1, свидетельствуют о том, что алгоритм загрузки рюкзака обеспечивает лучшее распределение классов эквивалентности между вычислителями. Диаграмма, приведенная на рисунке 2, показывает, что время решения задачи распределения данных между вычислителями резко возрастает при увеличении количества вычислителей, что естественно, поскольку этот алгоритм основан на переборе вариантов, а время решения задачи алгоритмом бустрофедона линейно зависит от количества вычислителей.

Результаты этой части эксперимента позволяют сделать относительно выбора алгоритма следующий вывод: если данные

изменяются редко, целесообразно использовать алгоритм загрузки рюкзака, в противном случае – алгоритм бустрофедона.

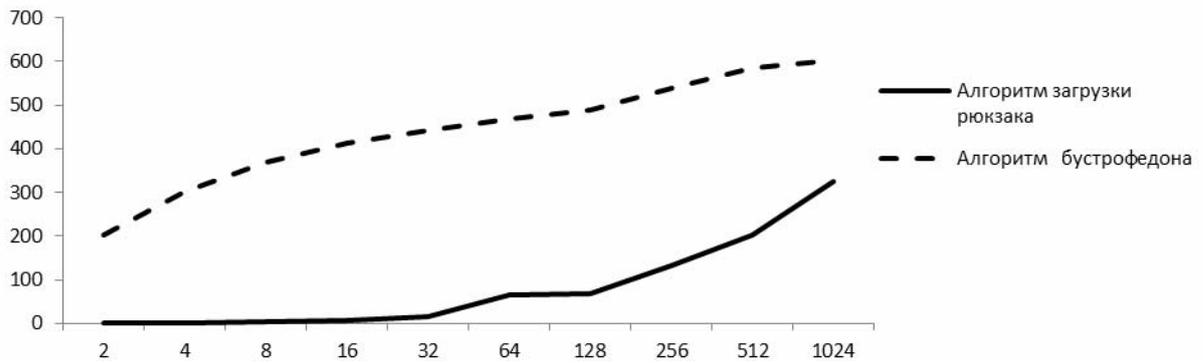


Рис. 1. Зависимость качества распределения данных от числа вычислителей

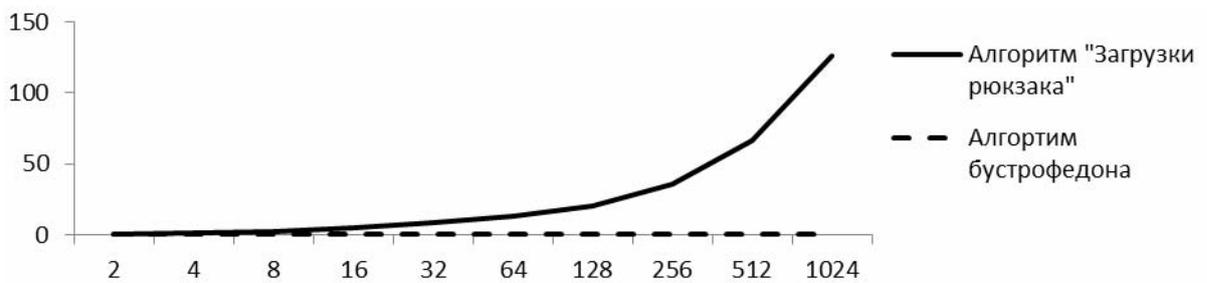


Рис. 2. Зависимость времени распределения данных от числа вычислителей

Задача 2. Оценка качества распараллеливания. Вторым фактором, влияющим на эффективность реализации операции соединения, – количество вычислителей, между которыми распараллеливаются данные. Для проведения эксперимента использовались архитектуры с двумя и четырьмя вычислителями. Для сравнения выполнялся и последовательный алгоритм соединения на одном вычислителе. Производилось соединение двух таблиц (файлов), содержащих одинаковое количество строк (записей), от 400 тысяч до 2500 тысяч.

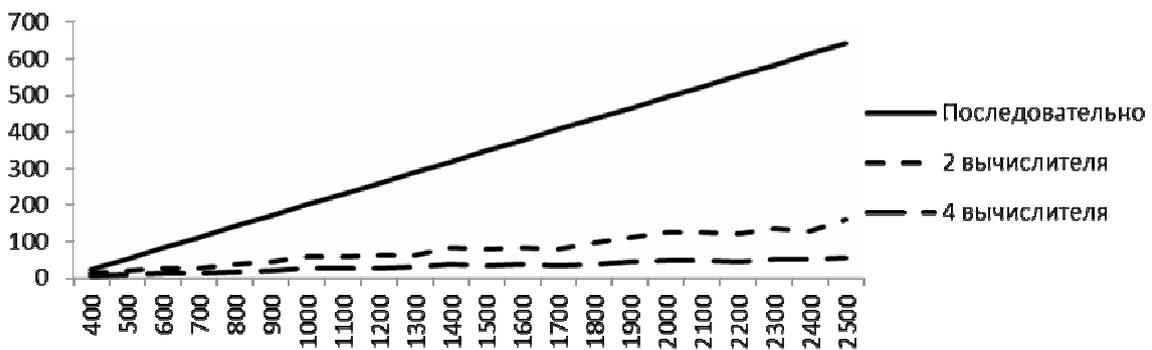


Рис. 3. Зависимость времени реализации операции от числа вычислителей

Анализ, приведенных на рисунке 3 данных, позволяет сделать вывод о том, что при параллельной реализации операции соединения данных время ее выполнения кратно количеству вычислителей.

### **Литература**

1. Макаров Д.И., Мунерман В.И. Параллельная реализация операции соединения для массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2012.– Т.8, № 3. – С. 26–28.

## **АНАЛИЗ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ ОБЪЕМОВ ДАННЫХ НА СИММЕТРИЧНЫХ МУЛЬТИПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ**

**В.И. МУНЕРМАН, Д.В. МУНЕРМАН**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: vimoona@gmail.com, dvmoon@gmail.com

Обработка больших объемов данных (big data) – одно из самых насущных, исследуемых, развивающихся и обсуждаемых направлений в компьютерной науке и практике. Для реализации этого направления используются мощные вычислительные системы, такие как IBM Netezza TwinFin Appliance, Oracle Exadata, программно-аппаратные комплексы, подобные SQL Server 2008 R2 Parallel Data Warehouse [1, 2], а также концепции и реализованные на их основе средства автоматизации программирования обработки таких данных, подобные MapReduce и Hadoop [3]. Важно то, что в настоящее время, как замечено в предисловии к переводу [4] С.Д. Кузнецовым: «Постепенно технология MapReduce начинает использоваться не в качестве конкурента технологии массивно-параллельных СУБД, а в качестве ее дополнения» [5].

Симметричное мультипроцессорное – это архитектура многопроцессорных компьютеров, в которой два или более одинаковых процессоров подключаются к общей оперативной и внешней памяти.

Реализация параллельной обработки данных для задач обработки данных больших объемов на симметричных мультипроцессорных системах требует тщательного выбора модели данных. Далее рассматривается теоретико-множественная модель [7, 8], которая соответствует реляционной и NoSQL моделям и современной парадигме объектных баз данных.

Проведен анализ распараллеливания операции слияния нестрого упорядоченных файлов, основанного на использовании метаданных, описывающих распределение записей файла по классам эквивалентности. Такой подход называется индексно-последовательным

и основан на одноименном методе доступа – ISAM, при котором исходным файлам  $X_M$  и  $Y_M$  соответствуют индексные файлы

$$indX_M = (< K_{(1)}^*, I_{1X}, m_{1X} >, \dots, < K_{(n)}^*, I_{nX}, m_{nX} >) \text{ и}$$

$$indY_M = (< K_{(1)}^*, I_{1Y}, m_{1Y} >, \dots, < K_{(n)}^*, I_{nY}, m_{nY} >),$$

где  $I_j$  – индекс первой записи класса эквивалентности  $X_{K_{(j)}^*}$ ,  $m_j$  – количество записей в этом классе эквивалентности. Файл-результат содержит только те классы эквивалентности, множества ключей которых принадлежат пересечению индексных файлов операндов ( $indX_M \cap indY_M$ ). Оба исходных файла разбиваются на пары подфайлов. Число пар равно числу процессоров (ядер) вычислительной системы. Классы эквивалентности файлов  $X_M$  и  $Y_M$  распределяются между подфайлами пар по следующему правилу: для любого  $j$  классы эквивалентности

1.  $X_{K_{(j)}^*} \neq \Theta$  и  $Y_{K_{(j)}^*} \neq \Theta$ ;
2.  $X_{K_{(j)}^*}$  и  $Y_{K_{(j)}^*}$  находятся в подфайлах одной и только одной пары.

Для оценки качества распараллеливания операции слияния нестрого упорядоченных файлов на симметричной мультипроцессорной системе был проведен вычислительный эксперимент на основе вычислительной системы со следующими характеристиками: четырехядерный центральный процессор Intel CORE i7, поддерживающий технологию гиперпоточности (HTT) и, соответственно, имеющий восемь виртуальных ядер; оперативная память 6 Гбайт; внешняя память 1 Тбайт.

Операнды каждой пары генерировались таким образом, что содержали классы эквивалентности с одинаковыми значениями экземпляров множества ключей, но различными количествами записей. На каждом шаге четыре пары одновременно обрабатывались четырьмя параллельными процессами, результаты которых объединялись в один файл-результат. Затем все операнды объединялись в два файла, и выполнялся один последовательный процесс. Количество обрабатываемых на каждом этапе записей приведено в таблице 1.

Таблица 1. Объемы данных на каждом шаге эксперимента

Шаг	Количество записей (тысячи)	
	Подфайлы пар ( $X_M$ )	Файлы ( $X_M$ )
1	200	400
2	400	800
3	600	1200
4	800	1600
5	1200	2400

В ходе эксперимента были получены приведенные на рисунке 1 соотношения между объемами базы данных (в тысячах записей) и временами обработки (в секундах) этой базы четырьмя параллельными процессами и одним последовательным процессом.

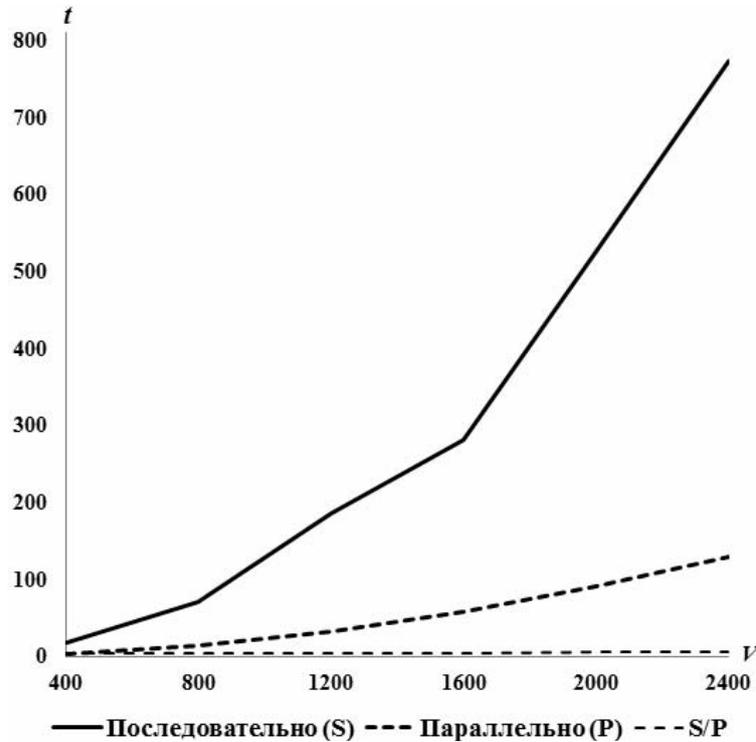


Рис. 1. Зависимость времени выполнения операции слияния от объема данных

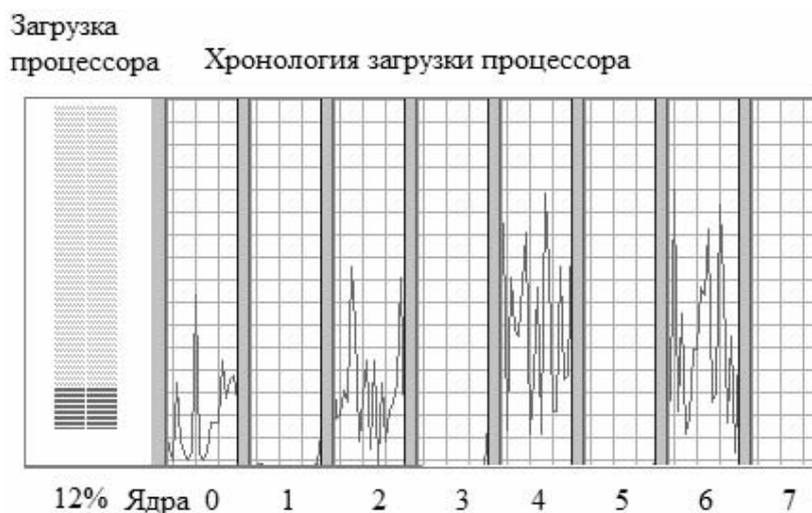


Рис. 2. График загрузки ресурсов процессора

На графике видно, что параллельная реализация операции слияния нестрого упорядоченных файлов четырьмя процессами требует в

среднем в пять раз меньше времени, чем при последовательной реализации.

Анализ загрузки процессами ресурсов (виртуальных ядер) центрального процессора показал (рисунок 2), что каждый процесс выполняется на одном виртуальном ядре, не более чем на половину используя его ресурсы. Из этого следует, что число параллельно выполняющихся процессов может быть вдвое большим, чем число выделенных для реализации операции ядер.

Таким образом, на основе полученных экспериментальных данных можно сделать заключение о том, что симметричные мультипроцессорные вычислительные системы могут быть использованы для эффективной параллельной обработки больших объемов данных.

### **Литература**

1. <http://www.oracle.com/us/products/database/exadata-database-achine/index.html>.
2. <http://citforum.ru/seminars/cbd2011/>.
3. Eaton C., DeRoos D., Deutsch T., Lapis G., Zikopoulos P. Understanding Big Data. Analytics for Enterprise Class Hadoop and Streaming Data. – FREE ebook.
4. Stonebraker M., Abadi D., Dawitt D.J., Madden S., Paulson E., Pavlo A., Rasin A. MapReduce and Parallel DBMSs: Friends or Foes? // Communications of the ACM, –2010.–vol. 53,№1
5. [http://citforum.ru/database/articles/mr\\_vs\\_dbms-2/#translator](http://citforum.ru/database/articles/mr_vs_dbms-2/#translator).
6. Левин Н.А., Мунерман В.И. Метод логически последовательного доступа к данным // Системы высокой доступности. –2011.–Т. 7, № 4. – С. 65–67.
7. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. –2012.– Т. 8, № 3. – С. 19–22.

## **СООТВЕТСТВИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ БАЗ ДАННЫХ**

**В.И. МУНЕРМАН, Н.Н. ОМЕЛЬЧЕНКО**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: vimoona@gmail.com

Существует множество разновидностей баз данных, отличающихся друг от друга по различным критериям. Вид баз данных, включающий в себя все базы – данные большого объема (Big Data) – это наборы данных такого объема, что традиционные инструменты не способны

осуществлять их захват, управление и обработку за приемлемое для практики время [1].

Информационно технологическая инфраструктура для задач класса Big Data строится на базе стандартных серверов, сетей, систем хранения данных, гипервизоров и кластерного программного обеспечения. Широко используется и «облачная» инфраструктура. В настоящее время разработаны достаточно эффективные технологии для реализации обработки больших объемов неструктурированных данных [2].

Вместе с тем особенности обработки структурированных данных позволяют эффективно решать многие проблемы распараллеливания обработки. Одна из них – проблема переносимости (portability) – особенно важна при выборе программно-аппаратных комплексов для эффективной реализации конкретных информационных систем. Это обусловлено тем, что объемы данных и технические средства могут существенно отличаться на различных предприятиях, использующих одну и ту же систему.

Доклад посвящен алгебраическому подходу к установлению соответствия между различными моделями данных.

Известно, что для полного использования возможностей параллельных вычислительных систем необходимо формализованное (математическое) описание данных [3]. С точки зрения математики модель данных представима в виде алгебры. Далее рассматриваются три алгебры: алгебра файлов, алгебра многомерных матриц и реляционная алгебра.

Для обеспечения возможности переноса процедур обработки данных с одной вычислительной системы на другую необходимо, чтобы модель данных и модели вычислений в наибольшей степени соответствовали друг другу.

Например, при разработке информационной системы в качестве модели данных использована реляционная алгебра, а система должна быть реализована на суперкомпьютере кластерного типа, модель вычислений которого наиболее близка алгебре многомерных матриц. В этом случае перенос программного обеспечения и данных будет наиболее простым, если эти алгебры в наибольшей степени соответствуют друг другу, то есть, по крайней мере, гомоморфны.

Доказательство гомоморфизма алгебр – моделей данных проводится в два шага. На первом шаге устанавливается соответствие данных. В данном случае – это соответствие отношений (таблиц), файлов и многомерных матриц. На втором шаге – однотипность и соответствие операций.

Соответствие данных в алгебрах файлов и многомерных матриц доказывается путем построения однозначного соответствия, в результате которого, каждому файлу ставится в соответствие логическая

многомерная матрица [2]. Аналогично, можно построить гомоморфизм между реляционной алгеброй и алгеброй многомерных матриц, при котором каждому отношению ставится в соответствие многомерная логическая матрица. Для этого необходимо выбрать ключевые атрибуты, то есть задать ключи, притом не обязательно уникальные.

Соответствие унарных и бинарных операций всех трех алгебр приведено в таблице 1.

Таблица 1. Соответствие операций в алгебрах данных

<b>Реляционная алгебра</b>	<b>Алгебра файлов</b>	<b>Алгебра многомерных матриц</b>
невная операция	сортировка	транспонирование
выборка (select)	выборка	сечение
проекция (project)	сжатие файлов	свертка многомерных матриц
теоретико-множественные операции	слияние строго упорядоченных файлов	сложение
соединение (join)	слияние нестрого упорядоченных файлов	$(\lambda, \mu)$ - свернутое произведение

Таким образом, реляционная алгебра, алгебра файлов и алгебра многомерных матриц гомоморфны.

Следовательно, вне зависимости от того, какая алгебра была использована как модель данных, переход к алгебре, наиболее близкой к модели вычислений, есть легко решаемая техническая задача. Это позволяет использовать любые параллельные вычислительные комплексы вне зависимости от того, где они расположены, непосредственно у пользователя или удаленно на облаке.

### **Литература**

1.Найдич А. Big Data: проблема, технология, рынок / Под ред. А.В.Синев – 2004. – с. 22–34.

2.Eaton C., DeRoos D., Deutsch T., Lapis G., Zikopoulos P. Understanding Big Data. Analytics for Enterprise Class Hadoop and Streaming Data. – FREE ebook.

3. Барский А.Б. Параллельные информационные технологии. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 503 с.

4. Емельченков Е.П., Левин Н.А., Мунерман В.И Алгебраический подход к оптимизации разработки и эксплуатации систем управления

базами данных. // Системы и средства информатики (дополнительный выпуск). – М.: Изд. ИПИ РАН, –2009. – С. 114–137.

## **МНОГОМЕРНЫЕ МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ ДАННЫХ**

**В.И. МУНЕРМАН, В.И. СИНИЦЫН, Ю.С. ШЕБЕКО**

Институт проблем информатики РАН, г. Москва,

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: vimoona@gmail.com, sinitsin\_vi@mail.ru, agira06@gmail.com

В настоящее время термин Big Data связывают с новыми типами данных и технологиями, которые должны решать задачи, ранее не разрешимые из-за технологических ограничений. Причем основное внимание уделяется не обработке структурированной информации, а решению задач, связанных с необходимостью анализировать как полуструктурированные данные, такие как электронная почта или данные, принятые из электронных форм, так и полностью неструктурированные данные: тексты, изображения, видео- и аудиоинформацию.

Для обработки этих новых типов данных появилась необходимость создания и новых технологий, которые позволили бы оперировать этой информацией, так как известные технологии такой возможности не предоставляли. В качестве таких технологий используются MapReduce и Hadoop [1; 2], которые наилучшим образом используют возможности современных машин баз данных.

Вместе с тем при решении задач анализа деловой активности и получения информации для принятия решений о действиях, ведущих к повышению эффективности деятельности предприятий, по-прежнему активно используются технологии, основанные на классической схеме, опирающейся на обработку больших объемов структурированных данных. Важная область, в которой особенно важна структурированность данных, интегрированная логистическая поддержка [3]. В этом случае применение рассмотренных технологий обработки больших данных неэффективно, так как они не учитывают особенности структур данных, которые могут существенно сказаться на улучшении качества процессов обработки данных.

Доклад посвящен одному из решений для структурированных больших данных, основанному на многомерно матричной модели. При использовании этой модели данные представляются в виде многомерных матриц, над которыми выполняются операции алгебры многомерных матриц [4]. Безусловно, реализация операций алгебры многомерных матриц невозможна без распараллеливания, так как

последовательные алгоритмы сложения и, в особенности, умножения, несмотря на их полиномиальную вычислительную сложность, при больших объемах данных могут выполняться длительное время, несовместимое с требованиями реальных задач.

Для распараллеливания операции сложения достаточно равномерно распределить элементы каждой из исходной матриц между процессорами, при необходимости используя метод Фробениуса.

Чтобы перемножить две матрицы  $A = \left\| a_{i_1 i_2 \dots i_p} \right\|$  и  $B = \left\| b_{i_1 i_2 \dots i_q} \right\|$ ,  $p$ - и  $q$ -мерные соответственно, их совокупности индексов разбиваются на четыре группы  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ , причем  $\kappa + \lambda + \mu = p$ , а  $\lambda + \mu + \nu = q$ . Обозначим группы индексов как:  $l = (l_1, l_2, \dots, l_\kappa)$ ,  $s = (s_1, s_2, \dots, s_\lambda)$ ,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_\mu)$ ,  $m = (m_1, m_2, \dots, m_\nu)$ . Тогда матрицы можно представить в виде:  $A = \left\| a_{lsc} \right\|$ ,  $B = \left\| b_{scm} \right\|$ , а элементы результирующей матрицы  $C = \left\| c_{lsm} \right\|$  рассчитываются по формуле:  $c_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} \times b_{scm}$ .

При распараллеливании умножения многомерных матриц важно учитывать, какой обобщенный алгоритм при этом используется [3]. От этого будет зависеть, как блоки матриц будут перемещаться по процессорной решетке. Например, если использовать обобщенный ленточный алгоритм, то матрицы должны разбиваться на блоки  $A_{ls}$  и  $B_{sm}$  таким образом, чтобы каждый блок содержал все элементы исходной матрицы, необходимые для получения одного элемента результирующей матрицы. Процессоры также разбиваются на группы, содержащие по  $p$  процессоров каждая. Блоки  $A_{ls}$  и  $B_{sm}$  исходных матриц распределяются по процессорам таким образом, чтобы каждая группа процессоров содержала все блоки исходных матриц, у которых совпадают значения индексов группы  $s$ , тогда блоки матрицы  $B$  будут передаваться не по всему кольцу процессоров, как в случае обработки двумерных матриц, а только по кольцу процессоров той группы, в которой они находятся.

Если использовать обобщенный алгоритм Фокса, процессорная решетка обязательно должна быть квадратной размера  $p \times p$ . При этом должно выполняться условие кратности: " $p$  – есть делитель (желательно наибольший общий делитель) суммарных мощностей индексов разбиений  $l, s$  и  $m$ ". Сдвиг блоков по процессорной решетке происходит аналогично случаю обработки двумерных матриц.

Таким образом, использование многомерно матричной модели и обобщение параллельных алгоритмов операций над матрицами на случай многомерных матриц обеспечивает повышение эффективности процессов обработки больших данных.

## Литература

1. Stonebraker M., Abadi D., Dawitt D.J., Madden S., Paulson E., Pavlo A., Rasin A. MapReduce and Parallel DBMSs: Friends or Foes? // Communications of the ACM. – 2010. – Vol. 53, №1.
2. Eaton C., DeRoos D., Deutsch T., Lapis G., Zikopoulos P. Understanding Big Data. Analytics for Enterprise Class Hadoop and Streaming Data. – FREE ebook.
3. Синицын И.Н., Шаламов А.С. Лекции по теории систем интегрированной логистической поддержки. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. – 624 с.
4. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2012. – Т.8, № 3. – С. 19–22.
5. Ефимов С.С. Обзор методов распараллеливания алгоритмов решения некоторых задач вычислительной дискретной математики // Математические структуры и моделирование. – 2007. – Вып. 17. – С. 72–93.

## ОДИН СПОСОБ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

**В.И. МУНЕРМАН, В.В. УСАЧЕВ**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: vimoona@gmail.com, vitek319@yandex.ru

Рост вычислительной мощности компьютерных систем, появление современных суперкомпьютеров, кластеров, рабочих станций сделали возможным решение многих задач, требующих выполнения больших объемов вычислений за приемлемое расчетное время. Существует целый ряд отраслей, в которых возникает необходимость решения подобных задач для обработки структурированных данных большого объема. Для этой цели используются модели, основанные на алгебрах матриц. Далее рассматривается подход к параллельной реализации умножения многомерных матриц [1].

Предложен метод многоуровневого распараллеливания операции умножения матриц, основанный на алгоритме Фокса [2]. Причем для реализации последнего уровня параллелизма применяется дополнительное аппаратное расширение (SIMD) современных процессоров.

В соответствии с алгоритмом Фокса, матрицы представляются как совокупности блоков-сечений. Последние блоки, расположенные на самом нижнем уровне, можно рассматривать как квадратные  $4 \times 4$  – или  $2 \times 2$  – матрицы в зависимости от того, к какому числовому типу принадлежат элементы матриц. Когда алгоритм доходит до умножения

таких блоков, это умножение выполняется с использованием SSE-технологии. Матрицы располагаются в XMM-регистрах и умножаются с использованием аппаратного параллелизма.

Для проверки качества распараллеливания умножения матриц проведен вычислительный эксперимент на четырехядерном процессоре при следующих условиях.

1. Для сравнения рассмотрены варианты параллельного умножения квадратных матриц с целочисленными элементами, следовательно, размерность блоков нижнего уровня –  $4 \times 4$ .

2. Размерности индексов матриц выбирались из диапазона: 100, 300 и далее с шагом 300 до 3000.

3. На каждом шаге выполнялось два умножения матриц алгоритмом Фокса: с использованием SSE-технологии и без ее использования.

4. Распараллеливание умножения матриц осуществлялось посредством двух, трех и четырех параллельных процессов.

Результаты эксперимента представлены на рисунке 1.

Анализ экспериментальных данных показывает, что:

1) эффективность распараллеливания возрастает при увеличении размерности матриц.

2) применение SSE-технологии существенно сказывается на качестве реализации алгоритма умножения матриц.

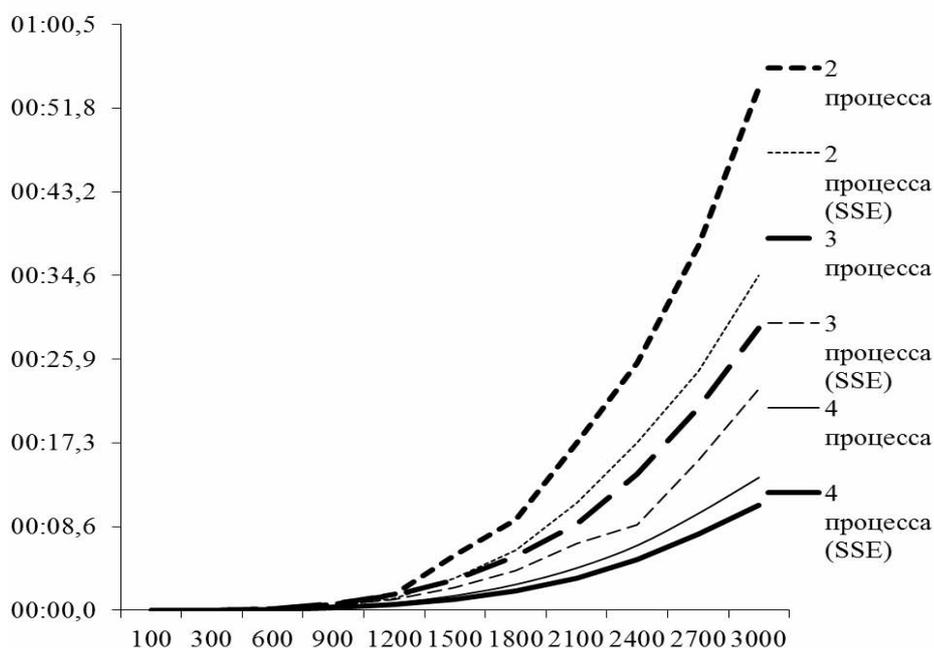


Рис. 1. Зависимость времени умножения матриц от их размерности и способа распараллеливания алгоритма

Таким образом, можно утверждать, что применение аппаратных средств организации параллелизма при реализации параллельных алгоритмов умножения матриц улучшает их временные характеристики

и повышает эффективность программно-аппаратных вычислительных комплексов.

### **Литература**

1. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. –2012. –Т. 8, № 3. – С. 19–22.
2. Ефимов С.С. Обзор методов распараллеливания алгоритмов решения некоторых задач вычислительной дискретной математики // Математические структуры и моделирование. –2007.– Вып. 17. – С. 72–93.

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ ДАННЫХ В ОБЛАЧНЫХ СИСТЕМАХ**

**В.И. МУНЕРМАН, К.Р. УСТЯН**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: vimoona@gmail.com, krouc@yandex.ru

Рассматривая вопрос об обработке больших структурированных данных, следует уточнить само понятие. В современном контексте, термин Big Data применяется к информации, которая не может быть обработана или проанализирована традиционными методами и средствами. Поэтому, проблема повышения эффективности обработки таких данных актуальна. Существуют различные решения этой проблемы. Далее приводятся два из них, наиболее популярные, в том числе и в облачных средах, в настоящее время [1].

Hadoop – проект с открытым исходным кодом, находящийся под управлением Apache Software Foundation. Hadoop используется для надежных, масштабируемых и распределенных вычислений, но может также применяться и как хранилище файлов общего назначения, способное вместить петабайты данных. В сочетании с IBM Netezza Hadoop образует высокоэффективный программно-аппаратный вычислительный комплекс.

Ещё один вариант решения проблемы – это комплекс Oracle Big Data в сочетании с Oracle Exadata.

Обе системы хорошо решают поставленные перед ними задачи, но каждая из них предназначена и разработана под свои особенности работы, под определённое оборудование, под свои системы программирования. У каждой из них есть общие черты и различия. Кроме того, обе системы ориентированы на обработку неструктурированных данных. Поэтому при оптимизации процессов

обработки данных они не учитывают особенности, которые порождает структурность, присущая моделям данных. Следовательно, можно сделать вывод, что при наличии такой модели вопрос о повышении эффективности обработки больших структурированных данных решался бы значительно проще.

Доклад посвящен рассмотрению решения задачи оптимизации запросов к базе данных в условиях массовой обработки на основе многомерно матричной модели [2]. Выбран часто встречающийся тип запросов, реализованных в виде последовательности операций соединения – *Join*. К числу проблем, связанных с этой операцией, относятся: сложность распараллеливания реализующих ее алгоритмов и невозможность построения эффективной последовательности выполнения нескольких последовательных операций в одном запросе.

Далее рассматривается метод построения эффективных последовательностей операций соединения. Пусть  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$  – таблицы-операнды в операции соединения, а  $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$  – поля, по которым производится сравнение записей. Тогда в общем виде рассматриваемый тип запроса можно представить следующим образом:

**Select \***

**From** (( $R_1$  *Inner Join*  $R_2$  **On**  $R_1.K_1 = R_2.K_2$ ) *Inner Join*  $R_3$  **On**  $R_2.K_2 = R_3.K_3$ )

...

$R_{n-1}$  *Inner Join*  $R_n$  **On**  $R_{n-1}.K_{n-1} = R_n.K_n$ ;

Решение задачи оптимизации такого запроса возможно посредством использования модели на основе алгебры многомерных матриц [2]. Для этого каждой таблице ставится в соответствие многомерная матрица. Известно, что единственный способ идентифицировать определённую запись в этой таблице – это указать набор значений одного или нескольких полей, который был бы уникальным для этой записи. Такой набор полей таблицы, совокупность значений которых определена для любой строки этой таблицы и различна для любых двух строк, называется первичным ключом. Поскольку домены полей – конечные множества, их можно пронумеровать. Тогда каждой таблице соответствует многомерная матрица.

Для простоты рассматривается случай, когда первичный ключ состоит из двух полей. В этом случае матрица-модель таблицы – двумерная. Для таких матриц решена задача минимизации сложности цепочек умножения методом динамического программирования [3]. Этот метод легко обобщается и на случай многомерных матриц.

Таким образом, решена задача оптимизации достаточно большого класса запросов к базам данных больших объемов. Кроме того, предложенный подход открывает возможности параллельной реализации подобных запросов. Применение его при реализации

вычислений на облаке позволит существенно сократить время вычислений и объемы обрабатываемых данных, что в свою очередь существенно отразится на экономических показателях при аренде облачных ресурсов.

### Литература

1. <http://citforum.ru/seminars/cbd2011/>.
2. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных. // Системы высокой доступности. – 2012, –Т. 8, № 3. – С. 19-22.
3. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

## АБСТРАКТНАЯ МАТРИЧНАЯ МАШИНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ МАТРИЦ

**В.И. МУНЕРМАН, А.В. ЦВЕТКОВ**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: vimoon@gmail.com, ghost4luck@gmail.com

Многомерные матрицы используются в качестве моделей как в задачах классической математики, так и в задачах моделирования данных.

Алгоритмы параллельной реализации операций алгебры многомерных матриц достаточно сложны, а сами матрицы могут быть построены над различными типами данных. В то же время реализация операций над элементами матриц, как правило, достаточно проста. Далее рассматривается метод реализации алгебры многомерных матриц на основе абстрактных алгебраических машин.

Эта реализация абстрактной алгебраической матричной машины осуществлена для алгебры трехмерных матриц. Выбор трехмерных матриц основан на том, что операциям над ними присущи все проблемы реализации операций над матрицами произвольных размерностей. Кроме того, любую многомерную матрицу можно технически свести к трехмерной, объединяя несколько индексов в один.

Двухосновная алгебраическая система вида  $E = \langle S, T; \Omega; \pi \rangle$  называется абстрактной матричной машиной.

$T$  – тип, его выбор определяется особенностями решаемой задачи.

$S$  – структура, состоящая из элементов типа. В качестве примеров структур можно назвать графы, векторы и матрицы.

$\Omega$  – множество операций над данной структурой и типом.

$\pi$  – множество предикатов.

Сигнатура операций алгебры многомерных матриц  $\Omega$  включает операции транспонирования, свертки, сжатия, сложения и  $(\lambda, \mu)$ -

свернутого произведения. Последняя операция определяется следующим образом.

Матрица  $C = \|c_{ism}\|$ , элементы которой вычисляются по формуле  $c_{ism} = \sum_{(c)} a_{isc} \cdot b_{scm}$ , называется  $(\lambda, \mu)$ -свернутым произведением матриц A и B и обозначается  ${}^{\lambda, \mu}(A \times B)$ . Для реализации выбраны три варианта  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения:

- 1) (2, 0)-свернутое произведение  $c_{ijkl} = a_{ijk} \otimes b_{jkl}$ ;
- 2) (1, 1)-свернутое произведение  $c_{ijl} = \sum_{(k)} a_{ijk} \otimes b_{jkl}$ ;
- 3) (0, 2)-свернутое произведение  $c_{il} = \sum_{(j)} \sum_{(k)} a_{ijk} \otimes b_{jkl}$ .

Остальные случаи не рассматриваются, так как используются достаточно редко, а их реализация мало отличается от реализации выбранных вариантов. Схема абстрактной трехмерно матричной машины приведена на рисунке 1.



Рис. 1. Архитектура абстрактной трехмерно матричной машины

Для параллельной реализации первых четырех операций алгебры многомерных матриц используются алгоритмы, основанные на методе Фробениуса. Для умножения могут быть использованы алгоритмы, подобные ленточному алгоритму, алгоритму Фокса и алгоритму Кэнона [2], которые достаточно просто обобщаются на случай трехмерных матриц. Но их реализация имеет большую сложность в

программировании, тем более что необходима их адаптация для конкретных матриц или типов их элементов. На основе абстрактной трехмерно матричной машины можно построить общий алгоритм, который затем можно использовать для обработки матриц различных типов данных, методом построения реальной алгебраической машины для конкретного типа данных. Этот объект конструируется как наследник абстрактной машины. Он дополняется структурами матриц, соответствующими решаемой задаче, и операциями (методами) над элементами этих матриц. Операции над элементами связываются с операциями над матрицами, которые реализованы в абстрактной машине, способом "функций объекта" или "делегатов", в зависимости от языка программирования, на котором реализованы абстрактная и реальная алгебраические машины.

Использование предложенного метода дает возможность эффективной автоматизации программирования задач, решаемых при помощи обработки многомерных матриц с различными типами элементов.

### **Литература**

1. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2012, –Т. 8, № 3. – С. 19–22.

2. Ефимов С.С. Обзор методов распараллеливания алгоритмов решения некоторых задач вычислительной дискретной математики. // Математические структуры и моделирование. – 2007. – Вып. 17. – С. 72–93.

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ MAPREDUCE ДЛЯ ОБРАБОТКИ ХУДОЖЕСТВЕННЫХ ТЕКСТОВ**

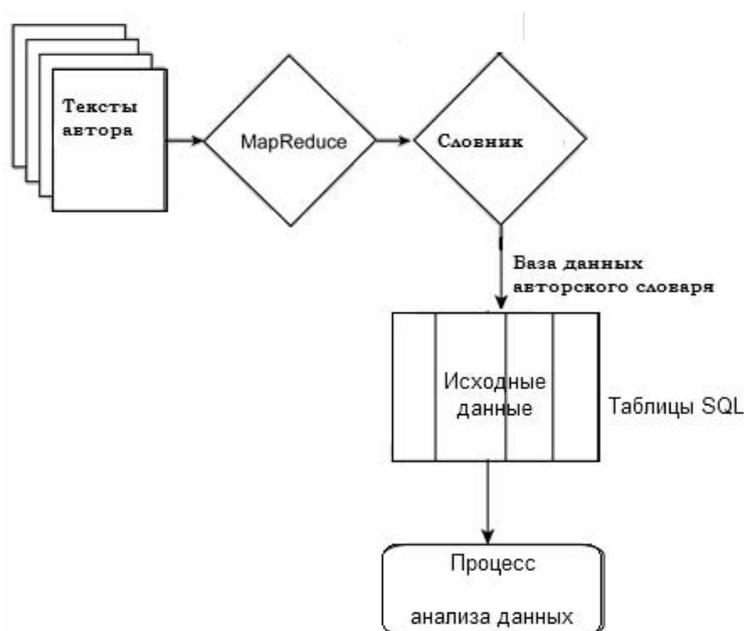
**Т.А. САМОЙЛОВА**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
tatsam@hotmail.ru

Рассматривается автоматизация обработки художественных авторских текстов с целью выявления слов-спутников [1; 2], сопровождающих друг друга в одном или нескольких произведениях автора. Компьютеризация данного процесса позволяет литературоведам решить трудоемкие в случае больших авторских текстов задачи:

- создать словарь исходного авторского текста с указателями-гиперссылками на соответствующие словоформы текста;
- используя созданный словарь, выполнить в исходном тексте поиск слов-спутников, расположенных в заданном интервале близости.

Известно, что основная проблема обработки текстовых данных большого объема – это их неструктурированный формат, который требует длительной обработки (установка закладок, гиперссылок, разбивка на слова, поиск и т.п.). В системе, основанной на популярной модели параллельного программирования MapReduce [3], исходные авторские тексты в Word-формате разбиваются на фрагменты меньшего размера, с которыми выполняется трудоемкая первичная обработка – установка закладок, разбивка на слова и блоки. В процессе преобразования текстовые данные приводятся к структурированному формату, который можно использовать в виде базы данных для последующего анализа:



Собственно модель MapReduce представляет собой двухступенчатый процесс. Сначала делается *map* (*отображение*), затем – *reduce* (*свёртка*). На этапе отображения выполняется выделение словоформ во фрагментах авторского текста с установкой в каждом фрагменте Word-закладок для создаваемого гипертекстового словаря. При свёртке происходит формирование словника – полного набора словоформ авторского текста, объединение одинаковых словоформ и создание для каждой словоформы набора гиперссылок (имен закладок) на блоки исходного текста, где она содержится. Словоформы всех авторских текстов помещаются в общую словарную базу данных, в которой выполняется отбор слов – кандидатов на близость. По данным базы выполняется анализ словаря кандидатов и поиск пар слов, расположенных в общих блоках исходного авторского текста. При этом происходит формирование наборов слов-спутников с гиперссылками на соответствующие употребления в исходном тексте.

Рассмотрим особенности программных средств каждого из этих процессов. На первом этапе *master*-агент принимает *задание*, например: список Word-файлов, подлежащих обработке. Затем он создаёт некоторое количество *map*-агентов – их число определяется объёмом и расположением входных данных, например: по одному *map*-агенту для каждого файла, поступившего на вход. Каждый агент получает свою порцию входного задания, например: одно имя файла из общего списка. Каждый *map*-агент должен обработать свою порцию данных и вернуть результат мастеру в виде списка пар (*ключ, значение*). В качестве ключей выступают слова из обрабатываемого текстового файла. Значение – это список имен закладок, соответствующих местам, где расположено данное слово. *Map-агент* разработан в виде Word-макроса, написанного на языке программирования *Visual Basic for Application (VBA)*. В качестве блоков могут быть выбраны предложения, абзацы, разделы (Word-объекты *Sentences, Paragraphs, Section*) или последовательные фрагменты исходного текста с указываемым количеством слов. Для пометки блоков в макросе используется Word-объект *Bookmark* (закладка), при этом имена закладок соответствуют порядковым номерам блоков. Каждая словоформа в тексте последовательно выделяется методом *select* вида:

*Selection.Next(Unit := wdWord, Count := 1).Select*

Словоформы, расположенные в начале каждого блока, помечаются закладками:

*Documents.Words(i).Bookmarks.Add Blok\_Name, Selection.Range*

На следующем этапе для каждого ключа мастер создаёт своего *reduce*-агента и передаёт ему на обработку ключ и список ассоциированных с ним значений закладок. *Reduce*-агентам остаётся обработать список значений, объединить списки общих слов и вернуть мастеру результат в виде одной пары (ключ, новый список значений). Пример фрагмента словоформ со списками номеров блоков (закладок) исходного авторского текста, в которых данные словоформы расположены:

<p>ангел,1269,<b>1422</b>,1490,1567,2746,3421,4181,4921,5115,5531,5531,  ангела,2794,3280,4228,4242,5213,5356,  ангелам,2563,2802,  ангелах,5152,  ангелов,1947,2127,2638,2645,3966,4306,4411,4738,4815,5342,  ангелок,1559,  ангелу,1071,  ангелы,1259,2071,3680,4119,4145,4616,4788,4866,4948,5532,  ангельские,2501,  ангельский,527,</p>
--

ангельскому,5819,  
англ,1840,1968,2174,2608,3403,  
англии,4100,4204,4438,4468,4469,775,  
английски,4222,  
английские,4481,5842,  
английский,1257,4468,  
английских,1305,1309,1312,1316,  
английской,3406,  
английском,1260,  
англичане,5750,  
англию,2175,4031,775,  
англия,2075,4042,4475,4475,5640,

После ручного объединения словоформ данный список станет фрагментом гипертекстового авторского словаря:

ангел,1269,**1422**,1422,1490,1567,2746,3421,4181,4921,5115,5531,5531,2794,3280,4228,4242,5213,5356,2563,2802,5152,1947,2127,2638,2645,3966,4306,4411,4738,4815,5342,1559,1071,1259,2071,3680,4119,4145,4616,4788,4866,4948,5532,2501,527,5819,  
англия,1840,1968,2174,2608,3403,4100,4204,4438,4468,4469,775,4222,4481,5842,1257,4468,1305,1309,1312,1316,3406,1260,5750,2175,4031,775,2075,4042,4475,4475,5640,

Словарь сохраняется в базе данных Access, а связь между гиперссылками словаря и закладками авторского текста устанавливаются Word-объектами посредством VBA-макроса. В приведенном выше фрагменте выделена гиперссылка 1422, связывающая слово «ангел» авторского словаря с закладкой соответствующего блока исходного авторского текста И. Бродского. Пример перехода по этой гиперссылке к блоку № 1422 исходного текста:

"Довольно, Авраам", – промолвил он,  
и тело Авраама тотчас потным  
внезапно стало, он разжал ладонь,  
нож пал на землю, **ангел** быстро поднял.  
"Довольно, Авраам. Всему конец.  
Конец всему, и небу то отрадно,  
что ты рискнул, – хоть жертве ты отец.  
Ну, с этим всё. Теперь пойдем обратно.  
Пойдем туда, где все сейчас грустят.  
Пускай они узрят, что в мире зла нет.  
Пойдем туда, где реки все блестят,

как твой кинжал, но плоть ничью не ранят.

Анализ базы данных позволит средствами SQL-запросов найти в гипертекстовом словаре слова-спутники, расположенные в общих блоках авторского текста. Пример фрагмента найденных пар (Вяч. Иванов «Кормчие звезды») с гиперссылками:

венец=пламя,0082,0226,0256,0257,0296,0303,0349,0392,  
венец=плен,0226,0417,0455,0655,  
венец=пляска,0256,0288,0403,0456,0651,0741,  
венец=победа,0182,0296,0297,0302,0456,0651,0655,0658,0659,0764,  
венец=святой,0013,0190,0226,0293,0297,0355,0455,0503,0740,0754,0  
780,  
**венец=сердце**,0162,0163,0181,0182,0231,0559,0582,0585,0645,**0752**,  
0764,0767,0780,  
венец=сила,0347,0348,0392,0648,0751,  
венец=синий,0303,0349,0391,0736,0741,  
венец=скорбь,0163,0455,  
венец=слава,0082,0163,0292,0646,0752,0753,0758,0764,  
венец=сон,0013,0036,0189,0190,0225,0231,0354,0391,0392,0404,0417,0422,  
0645,0648,0651,0764,0766,  
венец=тайна,0190,0288,0423,0582,  
венец=уста,0190,0346,0417,0559,0582,0648,0651,0658,0659,  
взор=глубь,0360,0366,0577,0685,  
взор=жертва,0239,0416,0541,0685,  
взор=ждать,0013,0211,0267,0541,0656,0790,  
взор=звезда,0035,0245,0418,0545,0577,0578,0656,0657,0799,  
взор=звук,0166,0239,0266,0267,0397,0404,0405,0443,0445,0546,0732,  
взор=крест,0211,0397,0442,0443,0657,  
взор=любовь,0014,0153,0218,0219,0282,0369,0396,0418,0429,0451,0  
542,0578,0614

В данном фрагменте выделена гиперссылка 0752, связывающая пару «венец – сердце» с блоком № 0752 исходного текста. Фрагмент указанного блока авторского текста:

Мой тяжкий крест влача, – то был мой горький сон,  
Язвим раскаяньем и **сердцем** сокрушён,  
Тропой обрывистой наверх Голгофы новой  
Я шёл. Закат угас, багряный и суровый,  
И мглою пепельной, как прахом урн, замёл  
Нагую крутизну и безотрадный дол...  
Усталый, я достиг вершины каменистой –  
И видел древний храм. Зари **венец** огнистый  
Далёко обнимал вечерний небосклон

Таким образом, использование модели MapReduce позволяет распараллелить обработку зависимых авторских произведений с целью поиска слов-спутников, сопровождающих друг друга. В настоящее время исследуется использование данной модели для реализации методов прикладной математической статистики, которые позволяют выполнить количественную оценку степени близости таких слов.

### Литература

1. Павлова Л.В. Очевидные и неочевидные повторы в лирике Вячеслава Иванова // Повтор в художественном тексте. Powtorzenie w tekście artystycznym. – Bydgoszcz, 2012. – С.243 – 255.
2. Романова И.В. Поэтика повторов в поэзии Иосифа Бродского // Вестник МУ. Серия 9. Филология. – 2010.– № 3. – С. 105-114.
3. Jeffrey Dean, Sanjay Ghemawat «Map-Reduce: Simplified Data Processing on Large Clusters» (<http://labs.google.com/papers/mapreduce-osdi04.pdf>), Proceedings of the Sixth Symposium on Operating System Design and Implementation, San Francisco, CA, December, 2004.

## МОДЕЛИ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В СИСТЕМАХ ИНТЕГРИРОВАННОЙ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКИ

**И.Н. СИНИЦЫН, В.И. МУНЕРМАН**

Институт проблем информатики РАН, г. Москва  
Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: sinitsin@dol.ru, vimoona@gmail.com

Рассмотрены возможности математических моделей данных, которые обеспечивают лучшее распараллеливание обработки данных в СУБД за счет использования структурированности данных. Высокая степень структурированности данных присуща многим классам задач обработки данных, таких как задачи обработки банковской информации, САД, САМ и САЕ системы и много других. Причем для решения таких задач могут использоваться как суперкомпьютеры и машины баз данных: IBM Netezza TwinFin Appliance, Oracle Exadata, так и рабочие станции: IBM IntelliStation, HP Z420, Dell Precision и подобные им. Естественно, объемы того, что называется Big Data, для этих вычислительных систем будут различными.

Особый интерес с позиций параллельной обработки больших объемов данных представляют системы интегрированной логистической поддержки (CALS) [1]. Для их функционирования необходимо решать

задачи статистического анализа и синтеза систем послепродажного обслуживания. В уравнениях, входящих в математические модели этих задач, существенно используются векторы, задающие состояния ресурсов, и векторы пополнения ресурсов. В реальных условиях размерности этих векторов и количества ресурсов очень велики. Поэтому разработчики, решающие указанные задачи, сталкиваются с проблемами решения сложных математических задач и с необходимостью обработки больших объемов данных, эффективность реализации и того и другого может быть достигнута только при использовании методов параллельной обработки данных.

Доклад посвящен использованию алгебраических моделей [2; 3] для повышения эффективности обработки данных больших объемов, при решении задачи интегрированной логистической поддержки снабжения и комплектации сервисных центров для проведения технического обслуживания и ремонта.

Для решения задачи с использованием реляционной модели данных, исходные документы представимы в виде трех отношений: **План**(Изделие, Вид\_ТО, Дата\_нач, Дата\_кон), **Комплект**(Изделие, Вид\_ТО, Ремкомплект) и **Сроки**(Заказчик, Изделие, Вид\_ТО, Дата, Количество).

Задача решается с помощью двух SQL-запросов:

**SELECT** Сроки.Заказчик, Сроки.Изделие, Сроки.Вид\_ТО, Сроки.Дата, Сроки.Количество

**FROM** Сроки **INNER JOIN** План **ON** (Сроки.Вид\_ТО = План.Вид\_ТО)

*And*

(Сроки.Изделие = План.Изделие)

**WHERE** ((([Сроки].[Дата]) *Between* [План].[Дата\_нач] *And* [План].[Дата\_кон])); в результате которого формируется отношение

**Факт**(Заказчик, Изделие, Вид\_ТО, Дата, Количество), и

**SELECT** Факт.Заказчик, Факт.Изделие, Факт.Вид\_ТО,

Комплект.Ремкомплект,

*Min*(Факт.Дата) **AS** [Дата], *Sum*(Факт.Количество) **AS** [Количество]

**FROM** Факт **INNER JOIN** Комплект **ON** (Факт.Вид\_ТО =

Комплект.Вид\_ТО) *And*

(Факт.Изделие = Комплект.Изделие)

**GROUP BY** Факт.Заказчик, Факт.Изделие, Факт.Вид\_ТО,

Комплект.Ремкомплект; который приводит к отношению-результату

**Комплект\_ТО**(Заказчик, Изделие, Вид\_ТО, Ремкомплект, Дата,

Количество).

Построение теоретико-множественной модели достаточно просто. Очевидно, что отношениям **План**(Изделие, Вид\_ТО, Дата\_нач, Дата\_кон) и **Сроки**(Заказчик, Изделие, Вид\_ТО, Дата, Количество)

соответствуют файлы, записи которых соответствуют кортежам отношения. Оба файла нестрого упорядочены по множеству ключей  $M = \{\text{Изделие, Вид\_ТО}\}$ . Операция слияния этих нестрого упорядоченных по множеству ключей  $M$  файлов порождает файл, соответствующий отношению **Факт**(Заказчик, Изделие, Вид\_ТО, Дата, Количество).

Функция  $f(X_{M^*}, Y_{M^*})$  порождает запись файла **Факт**, если поле Дата в записи файла **Сроки** находится в интервале, заданном полями записи Дата\_нач и Дата\_кон файла **План**, и универсальную неопределенную запись  $\Theta$  в противном случае.

Файл **Факт** и файл **Комплект**, соответствующий отношению **Комплект**(Изделие, Вид\_ТО, Ремкомплект), также нестрого упорядочены по множеству ключей  $M$ . Поэтому файл-результат, соответствующий отношению **Комплект\_ТО**(Заказчик, Изделие, Вид\_ТО, Ремкомплект, Дата, Количество), также может быть получен как результат операции слияния этих нестрого упорядоченных по множеству ключей  $M$  файлов.

Функция  $f(X_{M^*}, Y_{M^*})$  порождает запись файла **Комплект\_ТО** всегда, когда оба класса эквивалентности не равны универсальной неопределенной записи  $\Theta$ . При таком подходе файл **Комплект\_ТО** остается нестрого упорядоченным по множеству ключей  $M$  и поэтому должен быть подвергнут операции свертки. На практике свертка выполняется во время выполнения операции слияния нестрого упорядоченных файлов в ходе формирования класса эквивалентности файла-результата.

Для построения многомерно матричной модели задачи необходимо составить матрицы-модели исходных документов, представленных отношениями. Для этого каждому ключу следует поставить в соответствие индекс. Таблица 1 задает соответствие индексов ключам.

Таблица 1. Соответствие «ключ–индекс»

Ключ	Индекс
Заказчик	<i>i</i>
Изделие	<i>j</i>
Вид_ТО	<i>k</i>
Ремкомплект	<i>l</i>
Вспомогательный	<i>m</i>

Тогда:

- двумерная матрица  $A = \|a_{jk}\|$ , элементы которой – кортежи вида (Дата\_нач, Дата\_кон), есть модель отношения **План**(Изделие, Вид\_ТО, Дата\_нач, Дата\_кон);

- четырехмерная матрица  $B = \|b_{ijkl}\|$ , элементы которой – кортежи вида (Дата, Количество), есть модель отношения **Сроки**(Заказчик, Изделие, Вид\_ТО, Дата, Количество), вспомогательный индекс  $m$  нумерует элементы с одинаковыми значениями ключей Заказчик, Изделие, Вид\_ТО;

- трехмерная матрица  $C = \|c_{jkl}\|$ , элементы которой

$$c_{jkl} = \begin{cases} 1, & \text{если изделие и виду технического обслуживания } j, k \\ & \text{соответствует ремкомплект } l, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

есть модель отношения **Комплект**(Изделие, Вид\_ТО, Ремкомплект).

В роли нейтральных элементов матриц выступают нуль-кортежи, не содержащие ни одного определенного элемента.

Тогда моделью отношения-результата **Комплект\_ТО**(Заказчик, Изделие, Вид\_ТО, Ремкомплект, Дата, Количество) будет четырехмерная матрица  $D = \|d_{ijkl}\| = {}^{2,1}({}^{2,0}(A \times B) \times C)$ , элементы которой – кортежи вида (Дата, Количество).

В первом произведении элементы матрицы результата вычисляются бинарной операцией, подобной операции *between*, и равны  $b_{jkk}$ , если выполняется условие  $\text{Дата\_нач} \leq \text{Дата} \leq \text{Дата\_кон}$ . Во втором произведении Дата в элементе  $d_{ijkl}$  вычисляется по формуле  $\text{Min}_{(m)}(\text{Дата})$ , а Количество – по формуле  $\sum_{(m)}(\text{Количество})$ .

Применение теоретико-множественной и многомерно матричной моделей позволяет эффективно решать рассмотренные задачи, используя программно-аппаратные вычислительные комплексы, основанные на архитектурах массового параллелизма и симметричного мультипроцессирования.

Работа поддержана программой ОНИТ РАН «Интеллектуальные информационные технологии, системный анализ и автоматизация (Проект 1.7)».

### Литература

1. Синицын И.Н., Шаламов А.С. Лекции по теории систем интегрированной логистической поддержки. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. – 624 с.
2. Левин Н.А., Мунерман В.И. Метод логически последовательного доступа к данным // Системы высокой доступности, –2011.– Т. 7, №4. – С. 65–67.
3. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2012.– Т. 8, №3. – С. 19-22.

# **МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕХАНИЗМА НЕЧЕТКИХ СЕТЕЙ ПЕТРИ (НА ПРИМЕРЕ ДИСЦИПЛИНЫ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»)**

**Д.Е. СКАЧКОВ**

Филиала «НИИ «МЭИ(ТУ)»» г. Смоленск

dmcorp@mail.ru

В ходе модернизации системы высшего образования возникла задача замены традиционной концепции образования, основанной на трансляции знаний, умений, навыков, на новую, получившую название компетентностного подхода, предполагающую формирование определенного набора компетенций обучающихся: общекультурных, профессиональных, этических и т.д. Использование компетентностного подхода предполагает принципиальные изменения в организации учебного процесса, управлении им, в характере деятельности и взаимодействии преподавателя и студента, в критериях оценки образовательного результата. Итоговые требования к выпускнику также должны быть представлены в виде компетенций.

Введение ГОСов третьего поколения требует большей определенности в понимании встающих перед вузами задач по перестройке учебной и научной деятельности. Таким образом, при формировании методического аппарата учебной деятельности имеют место сложные процессы организационно-технических систем. Задача их анализа приобретает все большую значимость. Однако условия такого анализа зачастую характеризуются неопределенностью, нечеткостью данных об анализируемых процессах.

Данный материал посвящён построению математических моделей статики и динамики в рамках траектории обучения при компетентностном подходе. Задачей разрабатываемых моделей является анализ процесса обучения студентов вуза и формирование решений поддержки деятельности вуза по направлениям подготовки в данных условиях.

Одним из классов моделей, неоспоримым достоинством которых является возможность адекватного представления не только структуры сложных организационно-технологических систем и комплексов, но также и логико-временных особенностей процессов их функционирования, являются сети Петри и их многочисленные модификации. Сети Петри являются математической моделью для представления структуры и анализа динамики функционирования систем в терминах «условие – событие». Эта модель может быть успешно использована для описания так называемых динамических дискретных систем различных классов, таких как: вычислительные

процессы и программы, технологические процессы, информационные, экономические, биологические, социальные и технические системы.

Модели сетей Петри позволяют исследовать работоспособность моделируемых систем, оптимальность их структуры, эффективность процесса их функционирования, а также возможность достижения в процессе функционирования определенных состояний. Сети Петри и их обобщения являются удобным и мощным средством моделирования асинхронных, параллельных распределенных и недетерминированных процессов, позволяют наглядно представить динамику функционирования систем и составляющих их элементов. Свойство иерархического вложения сетей Петри дает возможность рассматривать модели различной степени детализации, обеспечивая тем самым необходимую декомпозицию сложных систем и процессов. Перспективным направлением решения указанных задач является использование подхода, основанного на гибридизации моделей различных типов, а также на интеграции их для решения задач анализа, ориентированных на различные уровни иерархии анализируемых систем и процессов. Представление базы правил в форме нечетких сетей Петри (НСП) предоставляет наглядность и визуализацию всех промежуточных этапов и результатов решаемой задачи.

Другим классом моделей, позволяющих формализовать любые содержательные предметные области, являются семантические сети (графовые модели). Понятия графа, соответствия и отношения играют основную роль в приложениях математики. Их можно обобщить на случай нечетких подмножеств.

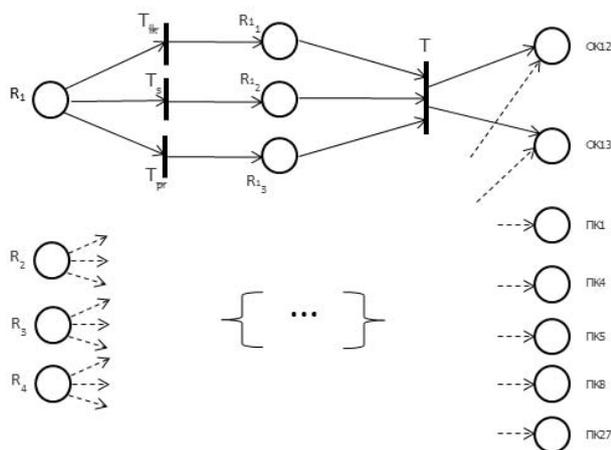


Рис. 1. Структура модели процесса обучения студента для дисциплины «Информационные технологии»

Таким образом, для анализа процесса обучения студентов вуза и формирования решений поддержки деятельности вуза необходимо построение следующих математических моделей:

- модель процесса обучения студента по дисциплинам;

- модель формирования задачника по темам дисциплины;
- модель оценки освоения компетенций.

В данной статье рассмотрим построение модели процесса обучения студента по дисциплинам с использованием механизма нечётких сетей Петри.

Позиции графа сопоставляются разделам (зачётным единицам) изучения дисциплины, а также компетенциям, достигаемым в процессе изучения разделов. Переходам сети соответствуют пороги освоения часового материала, а также пороги оценивания освоения компетенций по дисциплине. Назовём рассматриваемую модель моделью процесса обучения студента по дисциплинам.

Для построения такой модели необходимо:

- проанализировать стандарт по дисциплине;
- выбрать ряд разделов и тем данных разделов;
- сформировать последовательность изучения тем и их взаимосвязи;
- выделить набор компетенций, требуемых к освоению;
- определить степень влияния тех или иных тем на осваиваемые компетенции;
- соотнести выделенные части.

Рассмотрим НСП учебного материала по курсу «Информационные технологии» (Библиотечно-информационная деятельность).

Процесс изучения дисциплины содержит 4 раздела курса (общая информационная технология, информационные системы, автоматизированные библиотечно-информационные системы, специальные информационные технологии) в виде начальных позиций сети, а также направлен на формирование компетенций, формализованных в виде конечных позиций сети (рис. 1).

### Литература

1. Байденко В.И. Болонский процесс: результаты обучения и компетентностный подход / под ред. В.И. Байденко. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2009.
2. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 284 с.
3. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
4. Юдицкий С.А., Владиславлев П.Н. Основы предпроектного анализа организационных систем. – М.: Финансы и статистика, 2005.

# СИСТЕМА НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА ДЛЯ ОЦЕНКИ РЫНОЧНОГО РИСКА

**А.Г. СУХАНОВА, М.Б. СУХАНОВ**

Северо-Западный институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, г. Санкт-Петербург  
Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна,  
г. Санкт-Петербург  
e-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru

Благодаря теории нечетких множеств можно описывать неточные понятия и информацию об окружающем мире с целью получения новых данных [2].

В настоящее время нечеткие множества широко используются в различных областях, например, в [1] описаны примеры разработки систем нечеткого вывода для решения задач диагностики городских инженерных коммуникаций в системе MATLAB. Применение нечетких множеств в управлении корпоративными финансами и для оценки эффективности и риска фондовых инвестиций рассмотрено в [3].

В данной работе сделана оценка рыночного риска с использованием теории нечетких множеств, решение реализовано в системе MATLAB. В рассмотренном примере риск заключается в опасности не реализовать полностью всю партию товара и не получить намеченную сумму прибыли, если фирма находится на заключительной стадии разработки товара, т.е. подготавливающей новый товар к выходу на рынок. Авторами была разработана экспертная система нечеткого вывода для определения величины риска на основе субъективных конъюнктурных оценок экспертами факторов рыночного риска.

В качестве входных параметров системы нечеткого вывода будем рассматривать три нечеткие лингвистические переменные (ЛП) «Емкость рынка», «Затраты на рекламу» и «Финансовое состояние организации». В качестве выходного параметра – нечеткую ЛП «Величина риска». Данную систему можно значительно расширить, если рассмотреть и другие факторы рыночного риска, например, такие как тенденция спроса и его устойчивость, конкурентоспособность нового товара фирмы, интенсивность конкуренции, уровень сервиса и др.

Экспертные знания о данной проблемной области могут быть представлены в виде следующих правил:

1) если емкость рынка незначительная, и затраты на рекламу небольшие и финансовое состояние организации кризисное, то риск не реализовать полностью всю партию товара недопустимый;

2) если емкость рынка незначительная, и затраты на рекламу средние и финансовое состояние организации неустойчивое, то риск не реализовать полностью всю партию товара критический;

3) если емкость рынка средняя, и затраты на рекламу средние и финансовое состояние организации нормальное, то риск не реализовать полностью всю партию товара повышенный;

4) если емкость рынка значительная, и затраты на рекламу большие и финансовое состояние организации нормальное, то риск не реализовать полностью всю партию товара минимальный.

Терм-множество значений первой ЛП «Емкость рынка» зададим как множество  $T_1 = \{\text{«незначительная»}, \text{«средняя»}, \text{«значительная»}\}$ , а термножество второй ЛП «Затраты на рекламу» зададим как множество  $T_2 = \{\text{«небольшие»}, \text{«средние»}, \text{«большие»}\}$ , термножество третьей ЛП «Финансовое состояние организации» зададим как множество  $T_3 = \{\text{«нормальное»}, \text{«неустойчивое»}, \text{«кризисное»}\}$ . Термножество значений выходной ЛП «Величина риска» зададим как множество  $T_4 = \{\text{«минимальный»}, \text{«повышенный»}, \text{«критический»}, \text{«недопустимый»}\}$ . Каждый из термов первой, второй и третьей входной переменной будем оценивать по 10-балльной порядковой шкале, при которой числу 0 соответствует наихудшая оценка, а числу 10 – наилучшая оценка.

Для оценки величины риска будем использовать следующую шкалу границ риска (табл. 1).

Таблица 1

Шкала границ риска

Границы зон риска	0 – 2,5	2,6 – 5,0	5,1 – 7,5	7,6 – 10
Зоны риска	Минимальная	Повышенная	Критическая	Недопустимая

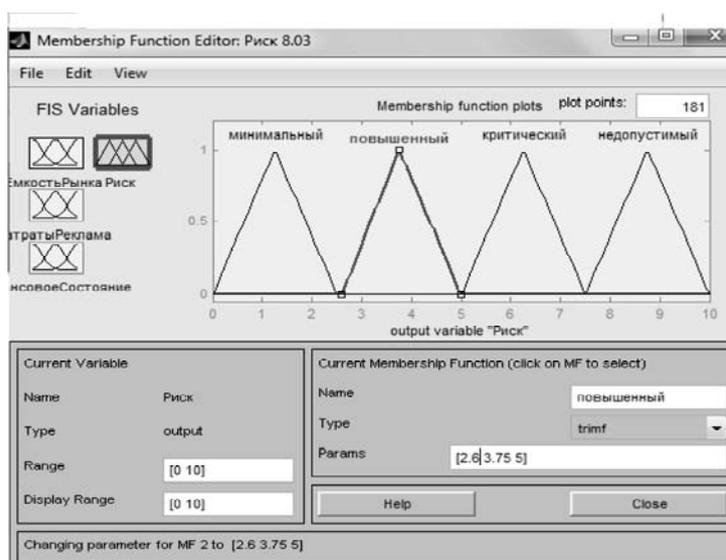


Рис. 1. Задание функций принадлежности для термов выходной переменной «Величина риска»

На рисунке 1 показано задание функций принадлежности для термов выходной переменной в соответствии с таблицей 1 в системе MATLAB.

Из рисунка 2 видно, что если задать первой входной переменной значение 5, что будет соответствовать средней емкости рынка, второй переменной значение 5, что соответствует средним затратам на рекламу, третьей переменной значение 8, что соответствует нормальному финансовому состоянию организации, то мы получаем значение выходной переменной «Величина риска», равной 3,87, что соответствует повышенному уровню риска согласно таблице 1.

Результат нечеткого вывода представлен на рисунке 2.

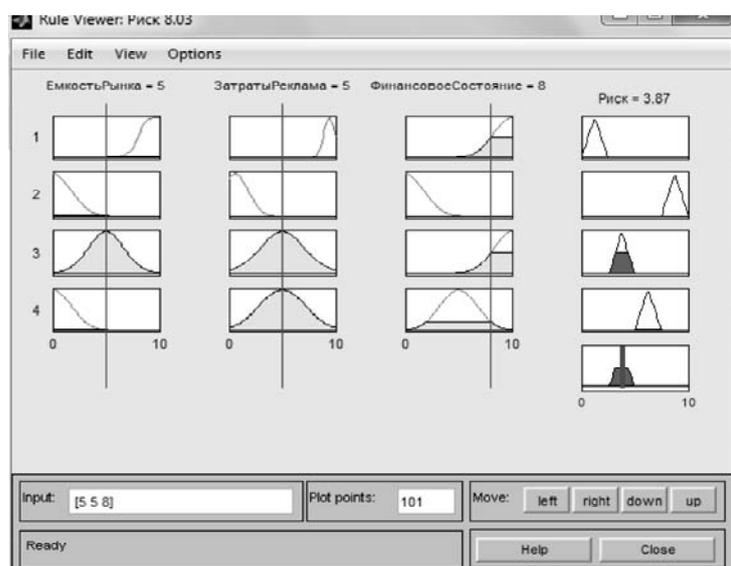


Рис. 2. Правила нечеткого вывода при значениях входных переменных [5, 5, 8]

На рисунке 3 показан график зависимости уровня риска от величины затрат на рекламу в данной экспертной системе.

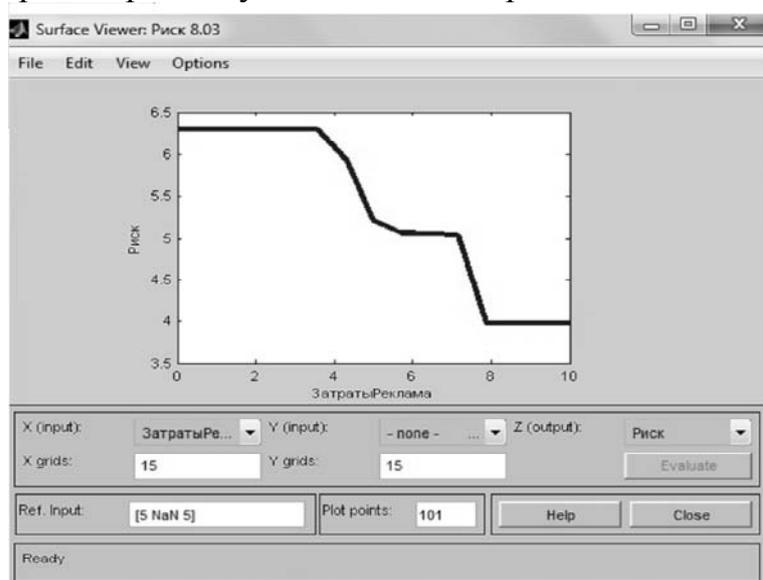


Рис. 3. График зависимости выходной переменной «Величина риска» от затрат на рекламу для разработанной модели

Из рисунка 3 видно, как снижается уровень риска в зависимости от затрат на рекламу. Графические зависимости выходной переменной от входных переменных позволяют визуальнo контролировать соответствие задаваемых правил нечеткого вывода экономическому смыслу задачи.

Очевидно, что данная модель требует расширения и уточнения, так как на величину рыночного риска оказывает влияние гораздо больше факторов, помимо тех, которые были рассмотрены в данной работе. Существует также такое пороговое значение в величине затрат на рекламу, после превышения которого не будет происходить дальнейшего увеличения сбыта продукции.

### **Литература**

1. Демидова Л.А., Кираковский В.В., Пылькин А.Н. Алгоритмы и системы нечеткого вывода при решении задач диагностики городских инженерных коммуникаций в среде MATLAB. – М.: Радио и связь, Горячая линия – Телеком, 2005. – 365 с.

2. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.

3. Недосекин А.О. Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний: дис. д-ра экон. наук: 08.00.13. – СПб., 2003. – 220 с.

## **О ПРОБЛЕМЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ КОМПОНЕНТОВ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ В РАМКАХ ЕДИНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

**В.В. СЫСКОВ**

Центральный научно-исследовательский институт экономики,  
информатики и систем управления, г. Москва  
e-mail: slavacestmoi@gmail.com

Современные автоматизированные системы специального или промышленного назначения имеют в своем составе расчетно-моделирующие комплексы, которые состоят из компонентов, выполняющих различные функции. Каждый из них имеет свои требования к системному программному обеспечению, наборы необходимых библиотек, собственные интерфейсы и реализуется на основе определенных технологий.

При разработке подобной системы выявлена проблема, которая заключается в сложности объединения разнородных компонентов, применяемых в рамках некоторой деятельности. В частности, сложности

возникают при объединении компонентов, которые должны обеспечивать обработку картографических данных, задание исходных данных обстановки и расчетов, выполнение ресурсоемких вычислений и проведение распределенного имитационного моделирования в ходе аналитической деятельности должностного лица.

Для решения указанной проблемы предлагается использовать дополнительный компонент, реализованный на основе одной из систем управления бизнес-процессами, например, Bonita Studio, jBPM, Activiti, Intalio BPMS. Он управляет последовательностью выполнения действий должностного лица и логикой вызова других компонентов.

Применение компонента управления бизнес-процессами требует уточнения структуры автоматизированной системы, в том числе используемых интерфейсов, форматов информационных сообщений и структур данных с разработчиками других специализированных компонентов. Предлагаемая структура автоматизированной системы, отражающая основные способы взаимодействия ее компонентов при исполнении бизнес-процессов, представлена на рисунке 1.

Из представленной структуры системы видно, что деятельность должностного лица реализуется с помощью специального компонента, запущенного на сервере приложений, а управление им осуществляется на стороне клиента с помощью компонента управления бизнес-процессом.

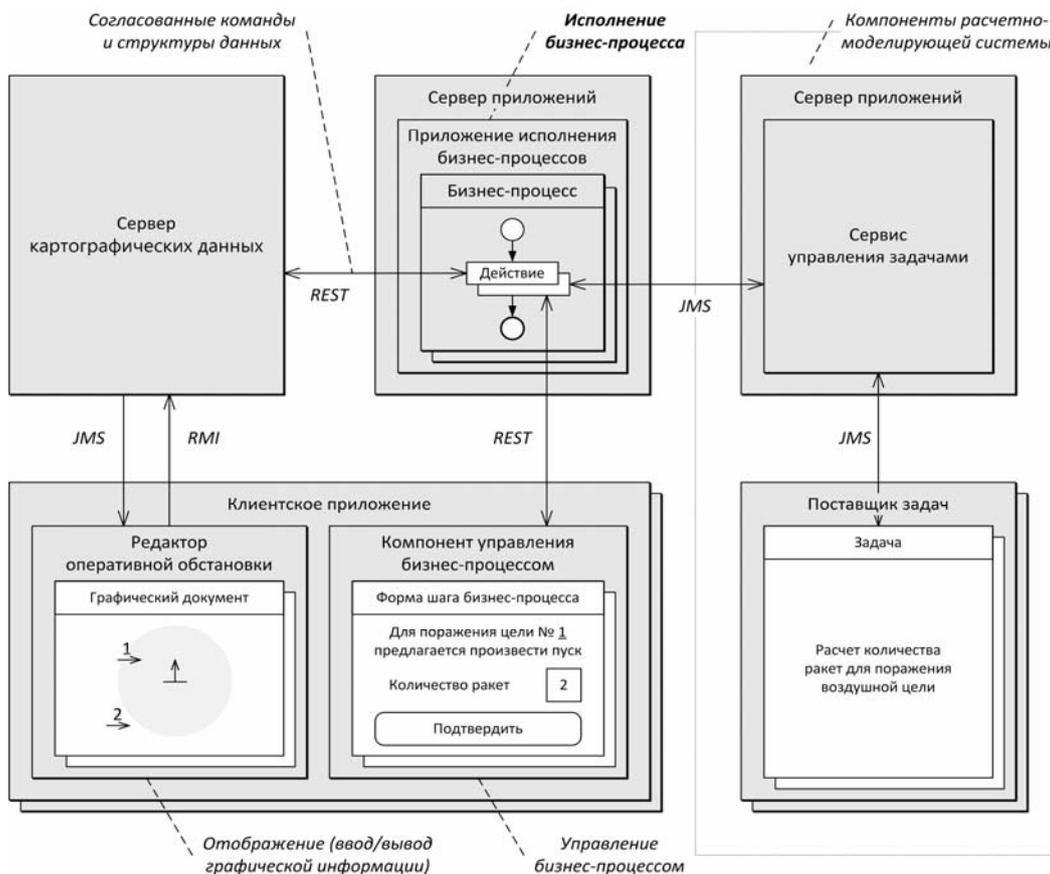


Рис. 1. Структура автоматизированной системы специального назначения

Бизнес-процесс при этом определяет последовательность действий, инициирующих выполнение расчетов или проведение имитационного моделирования (не отражено в данном варианте), и условий их выполнения при функционировании автоматизированной системы.

Логика деятельности должностного лица в этом случае описывается в виде диаграмм бизнес-процессов с использованием нотации, представляющей уровень интерфейса, понятного аналитикам, дизайнерам и разработчикам программного обеспечения, например, BPMN (Business Process Model and Notation) 2.0.

Особенностью описания сложной деятельности является то, что описывающие ее диаграммы выполняются на макро- и более подробном уровне. На макроуровне выделяются крупные куски, соответствующие определенной роли или этапу деятельности (рис. 2).

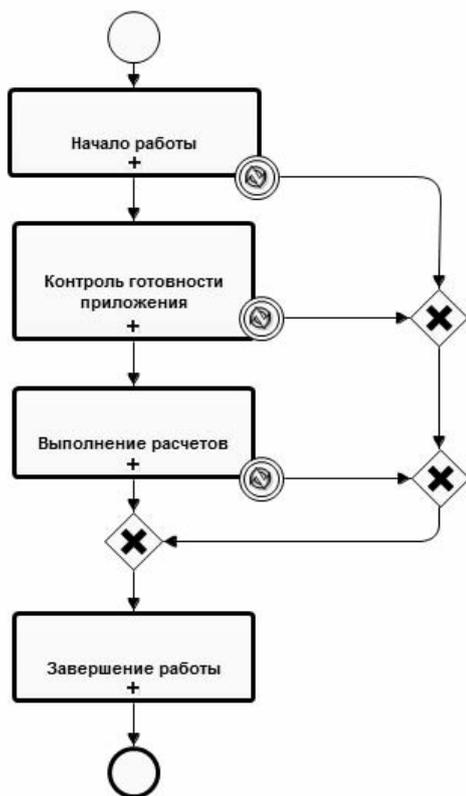


Рис. 2. Диаграмма, определяющая макрошаги деятельности должностного лица

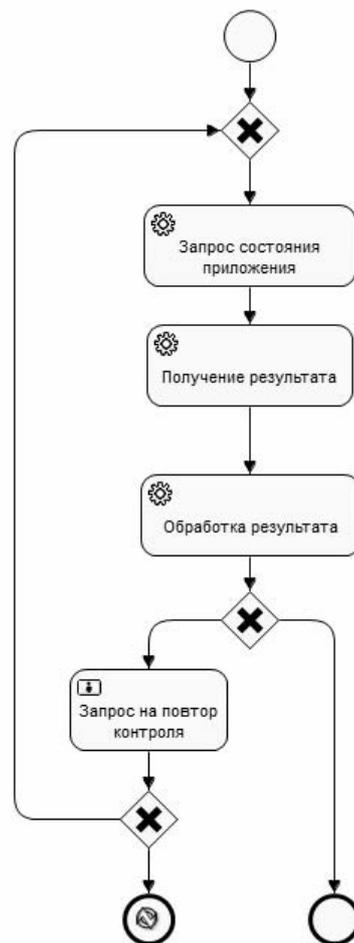


Рис. 3. Диаграмма, определяющая действия при проверке состояния клиентского приложения

При более подробном описании возникают сложности, так как при этом необходимо разрабатывать способы взаимодействия между

различными компонентами автоматизированной системы на уровне отдельных действий бизнес-процессов, соответствующих конкретным шагам деятельности. Разработка способов взаимодействия, например, при доступе к компоненту управления бизнес-процессом и сервису управления задачами, позволяет решать задачи, возникающие при проектировании автоматизированной системы.

Ниже приводится один из вариантов (способ) проверки состояния клиентского приложения с помощью средств управления бизнес-процессами (рис. 3).

Для решения данной задачи выполняется отправка запроса о состоянии приложения, а затем – обработка полученного ответа. Действия, не требующие участия пользователей («Запрос состояния приложения», «Получение результата» и «Обработка результата»), выполняются при помощи элементов типа «Автоматизированная деятельность», а вывод формы о повторном обращении к компоненту – с помощью элемента «Пользовательская деятельность».

Реализация подобных способов решения задач, обеспечивающих организацию взаимодействия между компонентами системы, позволяет сделать вывод о возможности задания с помощью средств управления бизнес-процессами последовательности действий и условий их выполнения в рамках деятельности должностного лица.

Таким образом, использование систем управления бизнес-процессами позволяет объединять разнородные компоненты автоматизированной системы в рамках единой деятельности, а также задавать ее в виде интуитивно понятных диаграмм.

## **ОСОБЕННОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СЕРВЕРНОЙ АРХИТЕКТУРЫ ДЛЯ СУБД**

**А.Е. ШИРАЙ, А.О. ПРОВОТОРОВА, Т.И. ГАЙДАЕНКО**

ООО «СайнГрейн», г. Москва

e-mail: alexander@sciengrain.ru, anna@sciengrain.ru, tatiana@sciengrain.ru

В работах [1-3] нами были рассмотрены возможности повышения производительности сервера баз данных. В рамках решения данной задачи был предложен подход, связанный с реализацией аппаратной поддержки объектной организации доступа в память в микроархитектуре используемых микропроцессоров. Данная работа посвящена развитию этой тематики.

В качестве введения рассмотрим структуру приложения, исполняемого на вычислительной системе архитектуры X86. Логическая

организация приложения представляет собой множество сегментов памяти, образующих его контекст. Среди этих сегментов содержатся:

- сегменты кода программы и библиотек;
- сегменты процедур интерфейса ОС;
- сегменты потоков, содержащие стек потока и состояние регистров процессора на момент ухода в состояние ожидания активизации;
- сегменты локальных данных;
- сегменты глобальных данных;
- сегменты мапированных файлов;
- буфера обмена и т.д.

Сегменты памяти описываются дескрипторами, находящимися в таблицах GDT и LDT. Каждый дескриптор памяти привязан к каталогу страниц сегмента.

Несмотря на то, что сегментов много, можно считать, что память приложения представляет собой единый объект, имеющий единый интерфейс, реализующий элементарные команды обращения в память, такие как запись, чтение, подкачка, специальные операции для реализации механизмов синхронизации. При реализации команд используется информация из дескрипторов сегментов и дескрипторов страниц из каталога, позволяющая активизировать обработку исключительных ситуаций, например загрузку откачанной страницы памяти. Никакой иной информации о содержимом сегментов данных и, соответственно, о правилах ее обработки подсистема памяти не использует.

Отдельной строкой можно выделить интерфейс, использующий физическую адресацию, с помощью которого менеджер памяти создает сегменты.

При активизации потока приложения, имеющего наибольший динамический приоритет, ОС реализует сохранение регистров и стека текущего исполняемого потока, если он не завершен, и загрузку регистров активизируемого потока. При этом устанавливаются и регистры, содержащие указатели на соответствующие таблицы сегментов.

Кэш-память вычислительной системы на всех уровнях содержит отображение оперативной памяти. В многоядерном серверном процессоре обычно имеются три уровня кэш-памяти: общий уровень (L3), относящийся к контроллерам памяти, уровень ядра (L2) и уровень конвейеров команд процессора (L1), с которым реально работает процессор. Кэш-памяти уровней L2 и L3 используются только как буферные памяти. Поддержание когерентности кэшей является одной из важных функций системы и требует аппаратной поддержки. Если посмотреть перечень нововведений в архитектуру микропроцессоров, то

увидим, что большая их часть приходится на организацию доступа к памяти и синхронизации обращений к общим данным. Тем не менее типовая (X86) архитектура фактически не поддерживает потокобезопасное программирование. Работа с разреженными данными, использующимися в деревьях и других структурах, приводит к большим накладным расходам на передачу практически «пустых» блоков данных.

В работе [3] описан альтернативный подход к организации подсистемы памяти многоядерного микропроцессора. Отмечены недостатки существующего подхода при работе с данными, имеющими нелинейную организацию. Предложена архитектура, содержащая сервер памяти, реализующий объектный подход к доступу к информации.

### ***Особенности микроархитектуры, использующей объектную модель вычислений.***

Объектная модель вычислений основывается на обмене сообщениями между объектами.

Соответственно, существуют описания классов объектов, содержащие описания интерфейсов, методов, свойств. Объекты – экземпляры класса, характеризующиеся конкретными значениями свойств. Сообщение, в общем случае, также является объектом.

В описываемой модели вычислений используются два уровня вычислительной среды, реализуемые в ядрах двух типов:

- вычислительный уровень,
- уровень сервера памяти.

Ядра содержат многопоточные вычислители и подсистему локальной памяти, не являющейся прямым отображением глобальной оперативной памяти.

На уровне сервера памяти располагаются объекты – сегменты памяти, а на уровне вычислителя – объекты-потoki приложения.

Уровень вычислителя. В отличие от традиционной модели вычислений потоки уровня вычислителя, как правило, не работают непосредственно с общей памятью. Они получают информацию от объектов сервера памяти в виде объектов-сообщений, которые могут представлять собой, например, двумерный список и т.п. На уровне вычислителя поток использует подобие таблиц сегментов для объединения фрагментов сообщений, сохраненных в локальной памяти, в единую структуру. Используется динамическое аппаратное распределение локальной памяти. Прерываний, связанных с обращением в память, на данном уровне не возникает. Механизм транзакций может быть, при желании, реализован на уровне сервера памяти.

В процессе работы поток использует сообщения, порождает динамические буфера для ответных сообщений. Период обработки одного сообщения – шаг вычислений. Ему соответствует и нумерованный блок кода программы, располагающийся в сегменте кода

программы, формируемый оптимизирующим компилятором или создаваемый вручную (предусмотрена аппаратная поддержка платформонезависимых языков программирования).

Динамические буфера «живут» только в процессе выполнения шага вычислений. Локальный контекст потока сохраняется в локальной памяти. Глобальный контекст подгружается программно и передается потоку при его создании. Отдельные глобальные величины могут просто включаться в состав входных сообщений.

Поток может быть вытеснен из вычислительного ядра, таким образом, он перемещается на уровень сервера памяти. Для обеспечения возможности сохранения и возобновления его работы структура сегмента, связанного с потоком вычислений, дополняется списком локальных динамических объектов. На уровне сервера памяти поток может продолжить получать сообщения. Если вытеснение потока производится по границе шагов, то сегмент потока дополняется только списком готовых сообщений и списком неполных сообщений.

Хотя размер сообщений не фиксирован, среда передачи сообщений передает их квантами фиксированной длины. Так, например, в современных процессорах по широкой шине передаются до 128 байтов за такт. Сообщения могут формироваться из разных источников, что можно использовать для синхронизации.

Число потоков, локализуемых в вычислительном ядре, может на порядок превышать число имеющихся там конвейеров команд, что позволяет максимально загрузить вычислитель. К локальной памяти подключен и векторный вычислитель, обеспечивающий выполнение расширенного класса команд с ориентацией на работу с СУБД.

На уровне ядра аппаратно поддержан системный интерфейс управления потоками. Допускается и параллельное выполнение с основным потоком побочных параллельных ветвей (fibers), выполняющихся в рамках ресурсов памяти, выделенных потоку без регистрации в таблицах ОС.

**Сервер памяти.** На уровне сервера памяти функционируют объекты-сегменты памяти. По месту расположения уровень сервера памяти соответствует уровню кэш-памяти L3 в традиционных микропроцессорах.

Четырехпортовая локальная память ядра сервера памяти распределяется динамически и содержит не только данные из оперативной памяти, но и:

- векторы состояния сегментов,
- таблицы размещения блоков и трансляции адресов (аналог TLB),
- очередь сообщений от вычислителя, список неполных сообщений,
- буфера подготовки сообщений потокам вычислителя,

- очередь выходных сообщений,
- очередь откочки в память, список свободных буферов.

Организация доступа к сегментам-объектам описана в работе [2]. Там же приведен пример использования объектного подхода при организации очереди FIFO – многие ко многим. В отличие от традиционного механизма обработки виртуального адреса объект может содержать в своем состоянии готовый адрес буфера (очередь) или вычислять его на основе данных из вектора состояния и использовать данные при формировании ответного сообщения вычислителю.

Все объекты – сегменты реализуют два интерфейса:

- системный интерфейс менеджера памяти,
- интерфейс пользователя.

Среди внутренних методов сегмента, как правило, поддерживается механизм управления вытеснением из буферов (динамическим приоритетом) и подкачкой, поиском, добавлением, удалением элементов, выработкой событий.

Базовый класс сегментов реализует системный интерфейс для менеджера памяти ОС, обеспечивает одинаковую работу ОС с каталогами страниц разной организации.

Наличие в векторном вычислителе сервера памяти операций ассоциативного поиска позволяет эффективно работать с хеш-таблицами и деревьями. Например, это используется при поиске в каталогах страниц больших массивов, каталогах буферов файлов, размер которых много больше объема памяти; при работе с индексной информацией в СУБД и т.п. Для ассоциативного поиска используются практически те же механизмы, которые использовались в TLB обычных процессоров (схемы сравнения), но в сервере памяти функциональность вычислителя расширена.

Методы интерфейса пользователя реализуют прием сообщений, формирование ответных сообщений вычислителю, управление размещением данных в памяти ядра и замещением буферов (откачка-подкачка). Важным моментом является выработка событий, позволяющих запускать процедуры ОС или другие методы. Например, если есть выходной поток данных, заполняемый параллельно несколькими потоками вычислений, то момент заполнения очередного буфера определить иначе, чем в сервере памяти, невозможно. При этом сегмент выработает событие, по которому данный буфер будет подключен в очередь вывода путем переключения страниц из каталога одного сегмента в другой.

Подобный механизм можно использовать для реализации барьерной синхронизации потоков, идущих во многих ядрах вычислителя.

Интерфейс сегмента памяти гарантирует потокобезопасный доступ к данным, что обеспечивает возможность работы без использования иных (системных) объектов синхронизации в большинстве случаев. Это очень важное качество, которое часто компенсирует затраты на передачу и прием сообщений.

Реализация пошагового механизма вычислений и подбор данных в структуру сообщений вычислителю, позволяя загрузить его на много тактов до следующего обращения в память, дают возможность получить согласованный конвейер вычислений при использовании данных любой организации, включая списки и деревья, что является одним из условий достижения пиковой производительности.

Описанные особенности серверной архитектуры и модели вычислений позволяют существенно снизить накладные расходы ОС на управление параллельными вычислениями и управление памятью, а также обеспечить близкую к пиковой производительность параллельных вычислений в СУБД.

### **Литература.**

1. Система представления данных в базе данных. Описание полезной модели к патенту RU 82 355 U1 / В.П. Сергеев [и др.]. – М.: Изд-во ФС по ИСП и ТЗ РФ, 2009. – Бюллетень № 11 от 20.04.2009.

2. Ширай А.Е. Использование объектно-ориентированного подхода в архитектуре многоядерного микропроцессора для ускорения параллельных конвейерных вычислений // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск, 2011.– Вып. 12. – С. 141–144.

3. [http://www.fizmat.smolgu.ru/images/stories/SCMP\\_2013/scmp-2011.pdf](http://www.fizmat.smolgu.ru/images/stories/SCMP_2013/scmp-2011.pdf)

4. Ширай А.Е., Провоторова А.О., Гайдаенко Т.А. Аппаратная поддержка векторно-матричной модели данных // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск, 2012.– Вып.13.– С. 135–138

5. [http://www.fizmat.smolgu.ru/images/stories/SCMP\\_2013/scmp-2012.pdf](http://www.fizmat.smolgu.ru/images/stories/SCMP_2013/scmp-2012.pdf).

## СЕКЦИЯ 3

### Математика и её приложения

#### ФАКТОРИЗАЦИЯ ВИНЕРА – ХОПФА ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-КОММУТАТИВНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

В.М. АДУКОВ

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск  
e-mail: vicmikhad@mail.ru

Пусть  $G$  – конечная группа порядка  $n$ ,  $e$  – единица  $G$ ,  $K_1 = \{e\}$ ,  $\dots, K_s$  – сопряженные классы  $G$ ,  $h_j$  – порядок сопряженного класса  $K_j$ ,  $g_1, \dots, g_s$  – произвольные фиксированные представители сопряженных классов,  $C[G]$  – групповая алгебра, состоящая из формальных комбинаций  $\sum_{g \in G} a(g)g$ . Центр  $Z(C[G])$  групповой алгебры образован центральными функциями на  $G$ , то есть функциями  $a(g)$ , постоянными на сопряженных классах.  $C_j = \sum_{g \in K_j} g$ ,  $j = 1, \dots, s$ , – базис коммутативной алгебры  $Z(C[G])$ . Матрица  $A$  оператора умножения на элемент  $a = \sum_{i=1}^s a_i C_i \in Z(C[G])$ ,  $a_i = a(g_i)$ , в базисе  $C_1, \dots, C_s$  имеет вид  $A = \left( \sum_{i=1}^s a_i c_{ij}^k \right)_{k,j=1}^s$ , где  $c_{ij}^k$  – структурные константы алгебры  $Z(C[G])$ .

Пусть  $\mathbf{A}$  – произвольная алгебра с единицей  $I$  над полем комплексных чисел  $\mathbf{C}$ . Тензорное произведение  $\mathbf{A} \otimes Z(C[G])$  алгебр  $\mathbf{A}$  и  $Z(C[G])$  рассматривается как алгебра матриц вышеуказанного вида с  $a_i \in \mathbf{A}$ .

**Теорема.** Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_s$  – характеры неприводимых комплексных представлений группы  $G$  и  $n_1, \dots, n_s$  – степени соответствующих представлений. Обозначим

$$F = \begin{pmatrix} h_1 \chi_1(g_1) I & \cdots & h_s \chi_1(g_s) I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1 \chi_s(g_1) I & \cdots & h_s \chi_s(g_s) I \end{pmatrix}.$$

Тогда  $F$  – обратимая матрица, и любая матрица  $A \in \mathbf{A} \otimes Z(C[G])$  представляется в виде:

$$A = F^{-1} \Lambda F,$$

где  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_s]$ ,  $\lambda_j = \frac{1}{n_j} \sum_{g \in G} a(g) \chi_j(g)$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

Применим теорему к задаче факторизации Винера – Хопфа. Пусть  $\mathbf{A}$  – распадающаяся алгебра непрерывных на контуре  $\Gamma$  функций, допускающих факторизацию Винера – Хопфа. Например, можно взять в качестве  $\mathbf{A}$  алгебру Винера  $W(T)$  на единичной окружности  $T$  или алгебру  $H(\Gamma)$  гильбертовских на  $\Gamma$  функций.

Элемент  $a(g)$  является теперь функцией  $a_g(t) \in \mathbf{A}$ ,  $t \in \Gamma$ . Алгебра  $\mathbf{A} \otimes Z(C[G])$  состоит из функционально-коммутативных матриц-функций. Для обратимой матрицы-функции  $A(t)$  из  $\mathbf{A} \otimes Z(C[G])$  функции  $\lambda_j(t) = \frac{1}{n_j} \sum_{g \in G} a_g(t) \chi_j(g)$ ,  $j = 1, \dots, s$ , отличны от нуля на  $\Gamma$ . Представление  $A(t) = F^{-1} \Lambda(t) F$  означает, что факторизация Винера – Хопфа  $A(t)$  приводится к факторизации диагональной матрицы-функции  $\Lambda(t)$ . Обозначим  $\rho_j = \text{ind}_\Gamma \lambda_j(t)$  – индекс Коши относительно контура  $\Gamma$  функции  $\lambda_j(t)$ . Пусть  $\lambda_j(t) = \lambda_j^-(t) t^{\rho_j} \lambda_j^+(t)$  – факторизация Винера – Хопфа  $\lambda_j(t)$ . Тогда  $\Lambda(t) = \text{diag}[\lambda_1^-(t), \dots, \lambda_s^-(t)] \text{diag}[t^{\rho_1}, \dots, t^{\rho_s}] \text{diag}[\lambda_1^+(t), \dots, \lambda_s^+(t)]$  – факторизация Винера – Хопфа  $\Lambda(t)$ .

**Пример 1.** Пусть  $G = V_4$  – четверная группа Клейна. Матрица  $A(t)$  является 2-уровневой циркулянтной матрицей, то есть имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & a_4(t) \\ a_2(t) & a_1(t) & a_4(t) & a_3(t) \\ a_3(t) & a_4(t) & a_1(t) & a_2(t) \\ a_4(t) & a_3(t) & a_2(t) & a_1(t) \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы  $\Lambda(t)$  находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) + a_4(t), \quad \lambda_2(t) = a_1(t) - a_2(t) + a_3(t) - a_4(t), \\ \lambda_3(t) &= a_1(t) + a_2(t) - a_3(t) - a_4(t), \quad \lambda_4(t) = a_1(t) - a_2(t) - a_3(t) + a_4(t). \end{aligned}$$

Их индексы Коши являются частными индексами  $A(t)$ .

**Пример 2.** Пусть  $G = S_3$  – симметрическая группа степени 3. Матрица-функция  $A(t)$  имеет вид:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & 3a_2(t) & 2a_3(t) \\ a_2(t) & a_1(t) + 2a_3(t) & 2a_2(t) \\ a_3(t) & 3a_2(t) & a_1(t) + a_3(t) \end{pmatrix},$$

и ее частные индексы находятся по формулам  $\rho_1 = \text{ind}_\Gamma (a_1(t) + 3a_2(t) + a_3(t))$ ,  $\rho_2 = \text{ind}_\Gamma (a_1(t) - 3a_2(t) + a_3(t))$ ,  $\rho_3 = \text{ind}_\Gamma (a_1(t) - a_3(t))$ .

# О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.П. АНДРЕЕНКОВ, К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

**Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым замкнутым гладким контуром  $L$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ , где  $\bar{C}$  – расширенная комплексная плоскость. В качестве положительного направления обхода на  $L$  принимаем то, при котором область  $T^+$  остаётся слева.

В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Напомним [1, с. 139], что метааналитическими функциями называются решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + A_1(z) \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + A_0(z) F(z) = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)$  – дифференциальный оператор Коши-Римана, а коэффициенты  $A_0(z)$ ,  $A_1(z)$  – кусочно аналитические функции с линией скачков  $L$ , задаваемые следующим образом:

$$A_k(z) = \begin{cases} a_k, & z \in T^+, \\ a_k / z^{(2-k)m}, & z \in T^-, \end{cases}$$

где  $a_k$  ( $k=0,1$ ) – произвольные комплексные постоянные,  $m$  – фиксированное натуральное число.

Пусть  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  – корни характеристического уравнения

$$\Lambda^2 + a_1 \Lambda + a_0 = 0. \quad (2)$$

Известно [1], что всякую метааналитическую в  $T^+$  функцию можно задавать в виде

$$F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] \exp\{\lambda \bar{z}\}, \quad z \in T^+, \text{ если } \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda,$$

или

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_0 \bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_1 \bar{z}\}, \quad z \in T^+, \text{ если } \lambda_0 \neq \lambda_1,$$

где  $\varphi_0^+(z)$  и  $\varphi_1^+(z)$  – произвольные функции класса  $A(T^+)$ .

Аналогично, в области  $T^-$  всякая метааналитическая функция задается в виде

$$F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z} \varphi_1^-(z)] \exp\{\lambda \cdot \bar{z} / z^m\}, \text{ если } \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda,$$

или

$$F^-(z) = \varphi_0^-(z) \exp\{\lambda_0 \cdot \bar{z} / z^m\} + \varphi_1^-(z) \exp\{\lambda_1 \cdot \bar{z} / z^m\}, \text{ если } \lambda_0 \neq \lambda_1,$$

где  $\varphi_0^-(z)$  и  $\varphi_1^-(z)$  – произвольные функции класса  $A(T^-)$ .

**Определение 1.** *Кусочно метааналитической функцией с линией скачков  $L$  будем называть функцию  $F(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , которая в двух дополняющих друг друга до расширенной комплексной плоскости областях  $T^+$  и  $T^-$  определяется так:*

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)] \exp\{\lambda\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)] \exp\left\{\lambda\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (3)$$

или

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_1\bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_2\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) \exp\left\{\lambda_0\frac{\bar{z}}{z^m}\right\} + \varphi_1^-(z) \exp\left\{\lambda_1\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\varphi_k^\pm(z) \in A(T^\pm)$ ,  $k = 0, 1$ , а  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda$  – некоторые постоянные ( $\lambda_0 \neq \lambda_1$ ), причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

Обычно функцию  $F(z)$ , задаваемую формулой (3), называют *кусочно метааналитической функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулой (4), – *кусочно метааналитической функцией второго типа*.

Кроме того, кусочно метааналитическую функцию  $F(z)$  вида (3) (или (4)) будем называть *исчезающей на бесконечности*, если  $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq k + 1$  (или  $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1$ ), где  $k = 0, 1$ .

Наконец, будем говорить, что кусочно метааналитическая функция  $F(z)$  с линией скачков  $L$  принадлежит классу  $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$ , если ее аналитические компоненты  $\varphi_k^\pm(z)$  ( $k = 0, 1$ ) непрерывно продолжаются на границу  $L$  вместе со своими производными  $\frac{d\varphi_k^\pm(z)}{dz}$  ( $k = 0, 1$ ), причем так, что граничные значения функций  $\varphi_k^\pm(z)$  ( $k = 0, 1$ ) и указанных производных удовлетворяют на  $L$  условию Гёльдера.

Рассматривается следующая краевая задача [1, с. 141]. *Требуется найти все кусочно метааналитические функции  $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$  класса  $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$ , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на  $L$  следующим краевым условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} = G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + g_1(t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} = G_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + ig_2(t), \quad (6)$$

где  $G_k(t), g_k(t)$  ( $k = 1, 2$ ) – заданные на  $L$  функции класса  $H^{(1)}(L)$ , причем  $G_k(t) \neq 0$  ( $k = 1, 2$ ), а  $i^2 = -1$ .

В формуле (6) множитель  $i$  при  $g_2(t)$  введен для удобства в дальнейших обозначениях.

Отметим, что в частном случае, когда решения ищутся в классе кусочно бианалитических функций (т.е. функций, задаваемых формулами (3), где  $\lambda=0$ ), краевая задача (5), (6) представляет собой одну из основных краевых задач типа Римана для бианалитических функций, сформулированных в известной монографии Ф.Д. Гахова [2]. Поэтому, следуя [1], краевую задачу (5), (6) будем называть *первой основной краевой задачей типа Римана в классах метааналитических функций* или, короче, *задачей  $R_{1,M}$* , а соответствующую однородную задачу ( $g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$ ) – *задачей  $R_{1,M}^0$* .

В классах бианалитических и метааналитических функций точные методы решения задачи  $R_{1,M}$  были разработаны в работах К.М. Расулова (см. [1] и имеющуюся там библиографию). Кроме того, в классах бианалитических функций В.Р. Кристаллинским [3] были построены эффективные алгоритмы приближенного решения задачи  $R_{1,M}$ .

В настоящем сообщении предлагается приближенный метод решения задачи  $R_{1,M}$  в классах кусочно метааналитических функций с линией скачков  $L$  в случае, когда  $L = \{t : |t| = 1\}$ .

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. - Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 344 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. Кристаллинский В.Р. Приближенные методы решения краевых задач типа Гильберта и типа Римана для бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Смоленск, 2001. – 113 с.

## МНОГОШАГОВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА НЕРЕГУЛЯРНОМ ШАБЛОНЕ

**Т.К. БИРЮКОВА**

Институт проблем информатики РАН, г. Москва  
e-mail: yukonta@mail.ru

**В.И. КИРЕЕВ**

Московский государственный горный университет, г. Москва  
e-mail: Vladimir-Kireyev@mail.ru

В вычислительной математике и механике актуальным является развитие схем повышенной точности для решения дифференциальных уравнений.

В данном докладе в развитие исследований [1; 3] предлагается новый подход к конструированию дискретных численных схем второго и третьего порядков решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), основанный на адаптации параметрических соотношений для дифференциальных и интегро-дифференциальных сплайнов (ИД-сплайнов).

Рассматривается задача Коши для ОДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a, b].$$

Полученные в работе дискретные схемы второго и третьего порядков выводятся из параметрических соотношений, относящихся к дифференциальным сплайнам (Д-сплайнам) и ИД-сплайнам, и следствий из этих соотношений – аппроксимационных формул для производных, а также из обобщенной на нерегулярный шаблон квадратурной формулы парабол, экстраполяционной формулы и других [2].

Так, в задаче интерполяции условия непрерывности производных для параболических Д-сплайнов приводятся к параметрическим соотношениям функционально-дифференциального типа:

$$\bar{m}_i + \bar{m}_{i-1} = \frac{2\Delta f_i}{h_i}, \quad \frac{\bar{m}_i}{h_{i+1}} - \frac{\bar{m}_{i-1}}{h_i} = \frac{\Delta f_{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{\Delta f_i}{h_i^2}. \quad (1)$$

(Здесь и ниже в задаче аппроксимации символ  $f$  обозначает аппроксимируемую сеточную функцию, заданную на сетке  $\Delta_1: a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ,  $f_i = f(x_i)$ ,  $\bar{m}_i = f'(x_i)$ ,  $m_i = f''(x_i)$ ,

$$I_i^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad \Delta f_i = f_i - f_{i-1}, \quad h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad \delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i} \quad - \quad \text{параметр}$$

нерегулярности сетки.)

Из соотношений (1) в [3] получены аппроксимационные формулы для первых производных на нерегулярном шаблоне  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$  ( $h = \text{var}$ ):

$$\bar{m}_{i-1} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[ -\frac{H_i^{i+1}}{h_i} f_{i-1} + \frac{(H_i^{i+1})^2}{h_i h_{i+1}} f_i - \frac{1}{\delta_{i+1}} f_{i+1} \right],$$

$$\bar{m}_i = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[ -\delta_{i+1} f_{i-1} + \frac{H_i^{i+1} \Delta h_{i+1}}{h_i h_{i+1}} f_i + \frac{1}{\delta_{i+1}} f_{i+1} \right] \left( \frac{h_i^2 \delta_{i+1}}{6} M_{3,i} \right), \quad (2)$$

$$\bar{m}_{i+1} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[ \delta_{i+1} f_{i-1} - \frac{(H_i^{i+1})^2}{h_i h_{i+1}} f_i + \frac{H_i^{2(i+1)}}{h_{i+1}} f_{i+1} \right], \quad (3)$$

$$m_i = \frac{2}{H_i^{i+1}} \left[ \frac{1}{h_i} f_{i-1} - \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) f_i + \frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} \right], \quad (4)$$

где  $H_{ki}^{p(i+1)} = kh_i + ph_{i+1}$ ,  $M_{3,i} = \sup_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f'''(x)|$ , в скобках рядом с одной из формул указана правая часть оценки погрешности аппроксимации производной.

Анализ нескольких типов параболических ИД-сплайнов [4; 5] приводит к обобщенной на  $h = var$  двухинтервальной квадратурной формуле парабол:

$$\frac{1}{h_{i+1}^2} I_i^{i+1} + \frac{1}{h_i^2} I_{i-1}^i = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{h_i} f_{i-1} + 2 \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) f_i + \frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} \right], \quad (5)$$

к интегро-дифференциальной параметрической связи:

$$\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{I_{i-1}^i}{h_i} = \frac{1}{6} (h_{i+1} \bar{m}_{i+1} + 2H_i^{i+1} \bar{m}_i + h_i \bar{m}_{i-1}), \quad (6)$$

одноинтервальным квадратурным формулам:

$$I_{i-1}^i = \frac{h_i^3}{6H_i^{i+1}} \left( \frac{H_{2i}^{3(i+1)}}{h_i^2} f_{i-1} + \frac{H_i^{i+1} H_i^{3(i+1)}}{h_i^2 h_{i+1}} f_i - \frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} \right),$$

$$I_i^{i+1} = \frac{h_{i+1}^3}{6H_i^{i+1}} \left( -\frac{1}{h_i} f_{i-1} + \frac{H_i^{i+1} H_{3i}^{i+1}}{h_i h_{i+1}^2} f_i + \frac{H_{3i}^{2(i+1)}}{h_{i+1}^2} f_{i+1} \right), \quad (7)$$

$$I_i^{i+1} = \frac{h_{i+1}^2}{6H_i^{i+1}} \left( \frac{H_{3i}^{2(i+1)}}{h_{i-1}} f_{i-2} - \frac{3(H_i^{i+1})^2 + 2h_{i+1} H_{i-1}^i}{h_{i-1} h_i} f_{i-1} + \frac{6h_i H_{i-1}^i + h_{i+1} (3h_{i-1} + 6h_i + 2h_{i+1})}{h_i h_{i+1}} f_i \right). \quad (8)$$

Заменяя символы  $f$  на  $y$ ,  $\bar{m}_i$  на  $F_i$ ,  $I_i^{i+1}$  на  $\Delta \hat{y}_i$  и разрешая относительно  $\hat{y}_{i+1}$ , получаем следующие дискретные схемы.

### Явные двухшаговые схемы второго порядка.

Схема, обозначаемая аббревиатурой 2Я2А (2 – соответствует «шаговости», Я – «явная», 2 – порядок точности, А – модификация), получается аппроксимацией  $(dy/dx)_{x_n}$  по формуле (2):

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n - \delta_{n+1}^2 \Delta \hat{y}_n + H_n^{n+1} \delta_{n+1} F_n \quad (h = var),$$

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_{n-1} + 2h F_n \quad (h = const).$$

При  $h = const$  (регулярный шаблон) схема 2Я2А есть двухшаговая схема Эйлера. В соответствии с (2) порядок аппроксимации схемы при  $h_{n+1} < h_n^2$  повышается на единицу без изменения количества точек шаблона.

Из аппроксимации второй производной (4) следует функционально-дифференциальная схема 2Я2Б:

$$\hat{y}_{n+1} = -\delta_{n+1} \hat{y}_{n-1} + \frac{H_n^{n+1}}{h_n} \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}}{2} H_n^{n+1} F'(x_n, \hat{y}_n) \quad (h = var),$$

$$\hat{y}_{n+1} = -\hat{y}_{n-1} + 2\hat{y}_n + h^2 F_n' \quad (h = const).$$

Из второго параметрического соотношения из (1) выводится схема 2Я2В:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \delta_{n+1}^2 \Delta \hat{y}_n + h_{n+1}^2 \left( \frac{F_n}{h_{n+1}} - \frac{F_{n-1}}{h_n} \right) \quad (h = var),$$

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \Delta \hat{y}_n + h \Delta F_n \quad (h = const).$$

Путем преобразования двух соотношений (1) получается схема Адамса-Бэшфорта (2Я2Г):

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}^2}{2} \left( \frac{H_{2n}^{n+1}}{h_n h_{n+1}} F_n - \frac{1}{h_n} F_{n-1} \right) \quad (h = var).$$

### Неявные одно- и двухшаговая схемы второго порядка.

Первая схема – это классическая одношаговая схема Эйлера-Коши (1НЯ2) (НЯ – «неявная»), следующая из первого параметрического соотношения (1), а вторая двухшаговая (2НЯ2) – из аппроксимационной формулы (3):

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}}{2} [F_n + F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})],$$

$$\hat{y}_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{H_n^{2(n+1)}} \left[ \frac{(H_n^{n+1})^2}{h_n h_{n+1}} \hat{y}_n - \delta_{n+1} \hat{y}_{n-1} + H_n^{n+1} F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1}) \right].$$

Последняя схема при  $h = const$  преобразуется к виду:

$$\hat{y}_{n+1} = -\frac{1}{3} \hat{y}_{n-1} + \frac{4}{3} \hat{y}_n + \frac{2}{3} h F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1}).$$

### Явная трехшаговая схема третьего порядка (3Я3).

Эта схема вытекает из квадратурной формулы (8) и имеет вид:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}^2}{6H_n^{n+1}} \left[ \frac{H_{3n}^{2(n+1)}}{h_{n-1}} F_{n-2} - \frac{3(H_n^{n+1})^2 + 2h_{n+1}H_n^n}{h_{n-1}h_n} F_{n-1} + \frac{6h_n H_n^n + h_{n+1}(H_{3(n-1)}^{6n} + 2h_{n+1})}{h_n h_{n+1}} F_n \right].$$

При  $h = const$  3Я3 преобразуется к известной схеме, получающейся интегроинтерполяционным методом [2]:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h}{12} (5F_{n-2} - 16F_{n-1} + 23F_n).$$

### Неявные двухшаговые и одношаговые схемы третьего порядка.

Из обобщенной формулы парабол (5) следует первая двухшаговая схема (2НЯ3А):

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n - \delta_{n+1}^2 \Delta \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}^2}{3} \left[ \frac{1}{h_n} F_{n-1} + \frac{2H_n^{n+1}}{h_n h_{n+1}} F_n + \frac{1}{h_{n+1}} F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1}) \right],$$

которая при  $h = const$  преобразуется к известной:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h}{3} [F_{n-1} + 4F_n + F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})]$$

Одноинтервальная, трехточечная квадратурная формула (7) определяет вторую двухшаговую схему 2НЯ3Б:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}^3}{6H_n^{n+1}} \left[ -\frac{1}{h_n} F_{n-1} + \frac{H_n^{n+1} H_{3n}^{n+1}}{h_n h_{n+1}^2} F_n + \frac{H_{3n}^{2(n+1)}}{h_{n+1}^2} F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1}) \right],$$

которая при  $h = const$  упрощается и становится такой [2]:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h}{12} [-F_{n-1} + 8F_n + 5F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})]$$

Две неявные одношаговые схемы 1НЯЗА и 1НЯЗБ получаются из квадратурных формул (8), а двухшаговая схема 2НЯЗД – из параметрической связи (6):

$$1\text{НЯЗА: } \hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}}{3} [F_n + 2F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})] - \frac{h_{n+1}^2}{6} F'(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1}),$$

$$1\text{НЯЗБ: } \hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + h_{n+1} F_n + \frac{h_{n+1}^2}{6} [2F_n' + F'(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})],$$

$$1\text{НЯЗД: } \hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \delta_{n+1} \Delta \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}}{6} [h_n F_{n-1}' + 2H_n^{n+1} F_n' + h_{n+1} F'(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})].$$

Приведенные схемы имеют повышено-дифференциальный тип, так как в их правые части входят вторые производные от решения  $f(x)$ .

Авторами выполнен анализ устойчивости некоторых двухшаговых схем на нерегулярном шаблоне путем проверки условия корней однородных характеристических уравнений и получены следующие выводы.

1. Для обеспечения устойчивости схем 2Я2А, 2НЯЗА на нерегулярном (в общем случае) шаблоне необходимо выбрать параметр неравномерности сетки  $\delta_{n+1} \leq 1$ , то есть чтобы  $h_{n+1} \leq h_n$ .

2. Чтобы обеспечить устойчивость схем 2Я2Б, 2Я2В, 2НЯЗД, для которых при  $h = const$  условие корней не выполняется, необходимо формировать неравномерную сетку с  $\delta_{n+1} < 1$ .

3. Схема 2НЯ2 при формировании сетки с  $0 < \delta_{n+1} \leq 2$  для обеспечения устойчивости не требует выполнения условия  $\delta_{n+1} < 1$ .

### Литература

1. Бирюкова Т.К., Гершкович М.М., Киреев В.И. Интегро-дифференциальные многочлены и сплайны произвольной четной степени в задачах анализа параметров функционирования распределенных информационных систем // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2012): материалы XIII международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора Э.И. Зверовича. – Смоленск: СмолГУ, 2012. – Вып. 13. – С. 67–72.

2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.

3. Киреев В.И., Патрикеева (Бирюкова) Т.К. Интегро-дифференциальные консервативные сплайны и их применение в интерполяции, численном дифференцировании и интегрировании. // Вычислительные технологии. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1995. – Т. 4, № 10. – С. 233–244.

4. Киреев В.И., Бирюкова Т.К. Полиномиальные интегрально-дифференциальные одномерные и двумерные сплайны. // Вычислительные технологии. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1998. Т. 3, № 3. – С. 19–34.

5. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2008. – 480 с.

## О НЕТЕРОВОСТИ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГИЛЬБЕРТА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ

**И.Б. БОЛОТИН, Д.А. КЛИМЕНКО**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: IBBolotin@smolgu.ru, dn.klimenko@yandex.ru

Пусть  $L = \{t | \text{Im} t = 0\}$ ,  $D^+ = \{z | \text{Im} z > 0\}$  и  $D^- = \bar{C} \setminus \{D^+ \cup L\}$ . В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1].

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все бианалитические функции  $F^+(z)$ , принадлежащие классу  $A_2(D^+) \cap I^{(2)}(L)$  (см. [2; 3]), ограниченные вблизи узлов контура  $L$  и удовлетворяющие во всех внутренних точках  $L$  следующим краевым условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} = G_1(t) \overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}} + g_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} = -G_2(t) \overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}} + i \cdot g_2(t), \quad (2)$$

где  $G_k(t)$ ,  $g_k(t)$  – заданные на  $L$  функции класса  $H_0^{(1)}$ ,  $k=1,2$ , причем  $G_k(t) \neq 0$  всюду на  $L$ . Здесь в равенстве (2) множители  $(-1)$  и  $i$  при  $G_2(t)$  и  $g_2(t)$  соответственно введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Ради краткости сформулированную задачу будем называть *первой основной краевой задачей типа Гильберта с разрывными коэффициентами для бианалитических функций в случае полуплоскости* или задачей  $G_{1,2}$  в случае полуплоскости.

Отметим, что задача  $G_{1,2}$  представляет собой одну из основных краевых задач типа Гильберта для бианалитических функций, сформулированных в известной монографии Ф.Д. Гахова (см, например, [4]). В случае непрерывных коэффициентов и произвольных гладких замкнутых контуров рассматриваемая задача была подробно исследована в работах К.М. Расулова (см., например, [1]).

В работе [5] получен конструктивный метод решения данной задачи.

Справедлив следующий основной результат.

**Теорема.** Пусть  $L = \{t \mid \operatorname{Im} t = 0\}$ . Тогда число  $p$  условий разрешимости задачи  $G_{1,2}$  и число  $l$  линейно независимых решений соответствующей однородной задачи конечны, то есть задача  $G_{1,2}$  является нетеровой.

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Болотин И.Б. Кусочно-непрерывные краевые задачи типа Римана в классах бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – 01.01.01. – Смоленск, 2004. – 106 с.
3. Болотин И.Б. Об одном обобщении теоремы Лорана // Известия Смоленского государственного университета. – Смоленск, 2011. – № 2. – С. 127–133.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. Болотин И.Б., Клименко Д.А. Об одном подходе к решению первой основной краевой задачи типа Гильберта с разрывными коэффициентами для бианалитических функций в случае полуплоскости / И.Б.Болотин, Д.А.Клименко // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012): Материалы V Международной конференции. Воронеж, 11-16 сентября 2012 г. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – С. 46–47.

## О НЕТЕРОВОСТИ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Я.А. ВАСИЛЬЕВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

В данной работе в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Пусть конечная односвязная область  $T^+$  на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  ограничена простым замкнутым контуром Ляпунова  $L$ , заданным уравнением  $t = x(s) + iy(s)$  ( $s$  – естественный параметр). Область, дополняющую  $T^+ \cup L$  до полной плоскости, обозначим через  $T^-$ .

Рассматривается следующая краевая задача.

**Задача  $GR_{2,2}$ .** Требуется найти все кусочно бианалитические функции  $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$  класса  $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$ , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на  $L$  следующим краевым условиям:

$$F^+(t) = G_0(t)F^-(t) + \int_L A_0(t, \tau)F^+(\tau)d\tau + \int_L B_0(t, \tau)F^-(\tau)d\tau + g_0(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} = -G_1(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + \int_L A_1(t, \tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial n_+}d\tau + \int_L B_1(t, \tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial n_-}d\tau + it'g_1(t), \quad (2)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $G_k(t)$ ,  $g_k(t)$  ( $k = 0, 1$ ) – заданные на  $L$  функции, причем  $G_k(t)$ ,  $g_k(t) \in H^{(1)}(L)$ ,  $G_k(t) \neq 0$  на  $L$ ;  $\frac{\partial}{\partial n_+} \left( \frac{\partial}{\partial n_-} \right)$  – производная по внутренней (внешней) нормали к  $L$ ;  $A_k(t, \tau)$ ,  $B_k(t, \tau)$  – заданные фредгольмовы ядра класса  $H_*^{(1)}(L \times L)$ .

Отметим, что в частном случае, когда выполняются условия

$$A_0(t, \tau) \equiv A_1(t, \tau) \equiv B_0(t, \tau) \equiv B_1(t, \tau) \equiv 0, \quad (3)$$

задача  $GR_{2,2}$  представляет собой так называемую *вторую основную задачу типа Римана* в классе бианалитических функций (см. [1, с. 102]).

В настоящем сообщении устанавливается нетеровость задачи  $GR_{2,2}$  в случае, когда  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ .

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.

## КОМПОЗИЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОБОБЩЕННЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ю.М. ВУВУНИКЯН

Гродненский государственный университет, г. Гродно  
e-mail: vuv64@mail.ru.

Для любого числа  $a$  обозначим через  $X_a$  пространство бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси, носители которых

содержатся на полупрямой  $[a; +\infty)$ , а через  $X$  – индуктивный предел семейства пространств  $X_a$ ,  $a \in R$ .

Полиномиальным эволюционным оператором [1] степени  $k$  называется оператор  $A$ , определяемый равенством

$$Ax = \sum_{n=1}^k S_n(a_n * x^{\otimes n}) \quad (x \in X),$$

где  $x^{\otimes n}$  –  $n$ -я тензорная степень функции  $x \in X$ ,  $a_n$  – обобщенная функция на пространстве  $R^n$ , носитель которой содержится в положительном гипероктанте  $[0; +\infty)^n$ ,  $*$  – операция свертки,  $S_n$  – оператор сокращения переменных степени  $n$ :  $S_n f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t, t, \dots, t)$ .

Обобщенная функция  $a_n$  называется *обобщенной импульсной характеристикой порядка  $n$*  оператора  $A$ , а семейство  $(a_n)$  – *системой обобщенных импульсных характеристик* оператора  $A$ .

Целью настоящей работы является изучение оператора композиции  $C = B \circ A$  двух полиномиальных эволюционных операторов

$$Bx = \sum_{m=1}^l S_m(b_m * x^{\otimes m}) \quad \text{и} \quad Ax = \sum_{n=1}^k S_n(a_n * x^{\otimes n}) \quad \text{с} \quad \text{обобщенными}$$

импульсными характеристиками.

Обозначим через  $K_{n,m,k}$  множество всех композиций [2, с. 67] натурального числа  $n$  с  $m$  частями, каждая из которых не превосходит

$$\text{натурального числа } k, \quad K_{n,l,k}^{\#} = \bigcup_{m=1}^l K_{n,m,k}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $A$  и  $B$  – полиномиальные эволюционные операторы степеней  $k$  и  $l$  соответственно:

$$Ax = \sum_{n=1}^k S_n(a_n * x^{\otimes n}) \quad (x \in X), \quad By = \sum_{m=1}^l S_m(b_m * y^{\otimes m}) \quad (y \in X).$$

Тогда их композиция  $C = B \circ A$  является полиномиальным эволюционным оператором степени  $kl$  с обобщенными импульсными характеристиками

$$c_n = \sum_{\alpha \in K_{n,l,k}^{\#}} b_m^{\alpha} * a_{\alpha} \quad (n = 1, 2, \dots, kl),$$

где  $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in K_{n,l,k}^{\#}$ ,  $a_{\alpha} = \bigotimes_{j=1}^m a_{n_j}$ .

**Доказательство.** По определению композиции имеем:

$$Cx = B(Ax) = \sum_{m=1}^l S_m(b_m * (Ax)^{\otimes m}) \quad (x \in X).$$

Применяя теперь следующую формулу для тензорной степени  $m$  реакции оператора  $A$ :

$$(Ax)^{\otimes m} = \sum_{n=m}^{km} \sum_{\alpha \in K_{n,m,k}^*} S_{\alpha}(a_{\alpha} * x^{\otimes n}),$$

где  $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ ,  $n = |\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ ,  $a_{\alpha} = \bigotimes_{j=1}^m a_{n_j}$ , получим

$$Cx = \sum_{m=1}^l S_m(b_m * (\sum_{n=m}^{km} \sum_{\alpha \in K_{n,m,k}^*} S_{\alpha}(a_{\alpha} * x^{\otimes n}))).$$

Используя в полученном равенстве свойство линейности свертки по второму аргументу, имеем:

$$\begin{aligned} Cx &= \sum_{m=1}^l \sum_{n=m}^{km} \sum_{\alpha \in K_{n,m,k}^*} S_m(b_m * (S_{\alpha}(a_{\alpha} * x^{\otimes n}))) = \\ &= \sum_{n=1}^{kl} \sum_{\alpha \in K_{n,l,k}^{\#}} S_m(b_m * (S_{\alpha}(a_{\alpha} * x^{\otimes n}))). \end{aligned} \quad (1)$$

Введем ради сокращения записи обозначение

$$e_{m,\alpha} = S_m(b_m * (S_{\alpha}(a_{\alpha} * x^{\otimes n}))).$$

Тогда равенство (1) примет вид:

$$Cx = \sum_{n=1}^{kl} \sum_{\alpha \in K_{n,l,k}^{\#}} e_{m,\alpha}. \quad (2)$$

Рассмотрим сначала  $a_{\alpha} * x^{\otimes n} = \bigotimes_{j=1}^m a_{n_j} * x^{\otimes n}$ . Имеем

$$\begin{aligned} (a_{\alpha} * x^{\otimes n})(t_1, \dots, t_{n_1}, t_{n_1+1}, t_{n_1+2}, \dots, t_{n_1+n_2}, \dots, t_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, t_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, t_{n_1+n_2+\dots+n_m}) = \\ = \langle a_{\alpha}(s_1, \dots, s_{n_1}, s_{n_1+1}, \dots, s_{n_1+n_2}, \dots, s_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, s_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, s_{n_1+\dots+n_m}), \\ x^{\otimes n}(t_1 - s_1, \dots, t_{n_1} - s_{n_1}, t_{n_1+1} - s_{n_1+1}, t_{n_1+2} - s_{n_1+2}, \dots, t_{n_1+n_2} - s_{n_1+n_2}, \dots, \\ t_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} - s_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, t_{n_1+\dots+n_{m-1}+2} - s_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, t_{n_1+\dots+n_m} - s_{n_1+n_2+\dots+n_m}) \rangle = \\ = \langle a_{n_1}(s_1, \dots, s_{n_1}) a_{n_2}(s_{n_1+1}, \dots, s_{n_1+n_2}) \dots a_{n_m}(s_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, s_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, s_{n_1+\dots+n_m}), \\ x(t_1 - s_1) \dots x(t_{n_1} - s_{n_1}) x(t_{n_1+1} - s_{n_1+1}) \dots x(t_{n_1+n_2} - s_{n_1+n_2}) \times \dots \times \\ \times x(t_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} - s_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}) x(t_{n_1+\dots+n_{m-1}+2} - s_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}) \dots x(t_{n_1+\dots+n_m} - s_{n_1+\dots+n_m}) \rangle. \end{aligned}$$

Применяя к этому равенству оператор  $S_{\alpha}$ , получим

$$(S_{\alpha}(a_{\alpha} * x^{\otimes n}))(t_1, t_2, \dots, t_m) =$$

$$\begin{aligned}
&= \langle a_{n_1}(s_1, \dots, s_{n_1}) a_{n_2}(s_{n_1+1}, \dots, s_{n_1+n_2}) \dots a_{n_m}(s_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, s_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, s_{n_1+\dots+n_m}), \\
&\quad x(t_1 - s_1) \dots x(t_1 - s_{n_1}) x(t_2 - s_{n_1+1}) \dots x(t_2 - s_{n_1+n_2}) \times \dots \times \\
&\quad \times x(t_m - s_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}) x(t_m - s_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}) \dots x(t_m - s_{n_1+\dots+n_m}) \rangle.
\end{aligned}$$

Применим теперь к обеим частям полученного равенства оператор свертки  $b_m *$ :

$$\begin{aligned}
&(b_m * S_\alpha(a_\alpha * x^{\otimes n}))(t_1, t_2, \dots, t_m) = \\
&= \langle b_m(r_1, r_2, \dots, r_m), S_\alpha(a_\alpha * x^{\otimes n})(t_1 - r_1, t_2 - r_2, \dots, t_m - r_m) \rangle = \\
&= \langle b_m(r_1, r_2, \dots, r_m), \langle a_{n_1}(s_1, s_2, \dots, s_{n_1}) a_{n_2}(s_{n_1+1}, s_{n_1+2}, \dots, s_{n_1+n_2}) \times \dots \times \\
&\quad \times a_{n_m}(s_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}, s_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, s_{n_1+n_2+\dots+n_m}), \\
&\quad x(t_1 - r_1 - s_1) \dots x(t_1 - r_1 - s_{n_1}) x(t_2 - r_2 - s_{n_1+1}) \dots x(t_2 - r_2 - s_{n_1+n_2}) \times \\
&\quad \times \dots \times x(t_m - r_m - s_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}) x(t_m - r_m - s_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}) \dots x(t_m - r_m - s_{n_1+\dots+n_m}) \rangle \rangle.
\end{aligned}$$

Наконец, применяя оператор сокращения переменных  $S_m$  к вышестоящему равенству, получаем:

$$\begin{aligned}
&e_{m,\alpha}(t) = S_m(b_m * (S_\alpha(a_\alpha * x^{\otimes n}))) (t) = \\
&= \langle b_m(r_1, r_2, \dots, r_m), \langle a_{n_1}(s_1, s_2, \dots, s_{n_1}) a_{n_2}(s_{n_1+1}, s_{n_1+2}, \dots, s_{n_1+n_2}) \times \dots \times \\
&\quad \times a_{n_m}(s_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}, s_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, s_{n_1+n_2+\dots+n_m}), \\
&\quad x(t - r_1 - s_1) \dots x(t - r_1 - s_{n_1}) x(t - r_2 - s_{n_1+1}) \dots x(t - r_2 - s_{n_1+n_2}) \times \\
&\quad \times \dots \times x(t - r_m - s_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}) x(t - r_m - s_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}) \dots x(t - r_m - s_{n_1+\dots+n_m}) \rangle \rangle = \\
&= \langle (b_m \otimes a_{n_1} \otimes \dots \otimes a_{n_m})(r_1, \dots, r_m, s_1, s_2, \dots, s_{n_1}, s_{n_1+1}, \dots, s_{n_1+n_2}, \dots, \\
&\quad s_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}, s_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, s_{n_1+n_2+\dots+n_m}), \\
&\quad x(t - r_1 - s_1) \dots x(t - r_1 - s_{n_1}) x(t - r_2 - s_{n_1+1}) \dots x(t - r_2 - s_{n_1+n_2}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \dots \times x(t - r_m - s_{n_1 + \dots + n_{m-1} + 1}) x(t - r_m - s_{n_1 + \dots + n_{m-1} + 2}) \dots x(t - r_m - s_{n_1 + \dots + n_m}) \rangle = \\
& = \langle (b_m \otimes a_\alpha)(r_1, r_2, \dots, r_m, s_1, s_2, \dots, s_n), \\
& \quad x(t - r_1 - s_1) \dots x(t - r_1 - s_{n_1}) x(t - r_2 - s_{n_1 + 1}) \dots x(t - r_2 - s_{n_1 + n_2}) \times \\
& \quad \times \dots \times x(t - r_m - s_{n_1 + \dots + n_{m-1} + 1}) x(t - r_m - s_{n_1 + \dots + n_{m-1} + 2}) \dots x(t - r_m - s_{n_1 + \dots + n_m}) \rangle.
\end{aligned}$$

Тогда с помощью оператора  $S_n$  и свертки порядка мультииндекса полученное равенство может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned}
e_{m,\alpha}(t) &= S_n \langle (b_m \otimes a_\alpha)(r_1, r_2, \dots, r_m, s_1, s_2, \dots, s_n), x(t_1 - r_1 - s_1) \times \\
& \quad \times \dots \times x(t_{n_1} - r_1 - s_{n_1}) x(t_{n_1 + 1} - r_2 - s_{n_1 + 1}) \dots x(t_{n_1 + n_2} - r_2 - s_{n_1 + n_2}) \times \\
& \quad \times \dots \times x(t_{n_1 + \dots + n_{m-1} + 1} - r_m - s_{n_1 + \dots + n_{m-1} + 1}) x(t_{n_1 + \dots + n_{m-1} + 2} - r_m - s_{n_1 + \dots + n_{m-1} + 2}) \times \\
& \quad \times \dots \times x(t_{n_1 + n_2 + \dots + n_m} - r_m - s_{n_1 + n_2 + \dots + n_m}) \rangle(t) = S_n \left\langle (b_m * a_\alpha)^\alpha(s_1, s_2, \dots, s_n), \right. \\
& \quad \quad \quad x(t_1 - s_1) \dots x(t_{n_1} - s_{n_1}) x(t_{n_1 + 1} - s_{n_1 + 1}) \dots x(t_{n_1 + n_2} - s_{n_1 + n_2}) \times \\
& \quad \quad \quad \times \dots \times x(t_{n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1} + 1} - s_{n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1} + 1}) x(t_{n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1} + 2} - s_{n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1} + 2}) \times \\
& \quad \quad \quad \left. \times \dots \times x(t_{n_1 + n_2 + \dots + n_m} - s_{n_1 + n_2 + \dots + n_m}) \right\rangle(t) = \\
& = S_n \langle (b_m * a_\alpha)^\alpha(s_1, s_2, \dots, s_n), x^{\otimes n}(t_1 - s_1, t_2 - s_2, \dots, t_n - s_n) \rangle(t) = \\
& = S_n (b_m * a_\alpha)^\alpha * x^{\otimes n}(t).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали следующее равенство:

$$e_{m,\alpha} = S_n ((b_m * a_\alpha)^\alpha * x^{\otimes n}).$$

Учитывая это соотношение в (2), получаем

$$Cx = \sum_{n=1}^{kl} S_n \left( \sum_{\alpha \in K_{n,l,k}^\#} b_m * a_\alpha \right) * x^{\otimes n},$$

откуда следует, что  $C$  – полиномиальный эволюционный оператор степени  $kl$  с импульсными характеристиками

$$c_n = \sum_{\alpha \in K_{n,l,k}^\#} b_m^* a_\alpha \quad (n=1,2,\dots,kl),$$

что и требовалось доказать.

Отметим ряд следствий из теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть  $A$  – полиномиальный эволюционный оператор степени  $k$ ,  $B$  – линейный эволюционный оператор:

$$Ax = \sum_{n=1}^k S_n(a_n * x^{\otimes n}) \quad (x \in X), \quad By = b_1 * y \quad (y \in X).$$

Тогда их композиция  $C = B \circ A$  является полиномиальным эволюционным оператором степени  $k$  с обобщенными импульсными характеристиками

$$c_n = b_1^{(n)} * a_n \quad (n=1,2,\dots,k).$$

**Теорема 3.** Пусть  $A$  – линейный эволюционный оператор,  $B$  – полиномиальный эволюционный оператор степени  $l$ :

$$Ax = a_1 * x \quad (x \in X), \quad By = \sum_{m=1}^l S_m(b_m * y^{\otimes m}) \quad (y \in X).$$

Тогда их композиция  $C = B \circ A$  является полиномиальным эволюционным оператором степени  $l$  с обобщенными импульсными характеристиками

$$c_n = b_n * a_1^{\otimes n} \quad (n=1,2,\dots,l).$$

### Литература

1. Вувуникян Ю.М. Эволюционные операторы с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками: монография. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 224 с.
2. Эндрюс Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

## О СТРОЕНИИ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ В ТОЧКЕ $\infty$ НЕКОТОРЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ИЗ $\bar{C}$ В $\bar{C}^m$ , СВЯЗАННЫХ С ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

С.А. ГОМОНОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Пусть требуется описать взаимное расположение всех конечных элементов из  $\bar{C}^m$ , составляющих предельное множество [1; 2]

отображения  $F$  из пространства  $\overline{\mathbb{C}}$  в пространство  $\overline{\mathbb{C}}^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) в точке  $\infty$ , если

$$F: z \rightarrow (P_1(z, \bar{z}); P_2(z, \bar{z}); \dots; P_m(z, \bar{z})),$$

где  $P_j(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}[z, \bar{z}] \setminus (\mathbb{C}[z] \cup \mathbb{C}[\bar{z}])$  ( $j = 1, \dots, m$ ), то есть  $P_j(z, \bar{z})$  – полианалитические (п.а.) полиномы, каждый из которых неформально зависит и от  $z$  и от  $\bar{z}$ ; то есть требуется найти множество  $C(F, \infty) \cap \mathbb{C}^m$ , которое далее, ради краткости, договоримся обозначать  $C_k(F, \infty)$ .

Легко видеть, что это множество может оказаться пустым:

$C_k((z \cdot \bar{z}; iz \cdot \bar{z}), \infty) = \emptyset$ , так как здесь множество сходимости (для  $\bar{z}_S / z_S$ ) многочлена  $z \cdot \bar{z}$  пусто [6];

$C_k(((\bar{z} + z) \cdot (\bar{z} + iz); \bar{z} + z; \bar{z} + iz), \infty) = \emptyset$ , так как здесь пересечение трех непустых множеств сходимости пусто.

Но  $C_k(F, \infty)$  может иметь и достаточно прихотливое строение, так, например:

$$C_k((z \cdot (z + \bar{z}); z + \bar{z}), \infty) = \{(it; 0) | t \in \mathbb{R}\};$$

$$C_k((z \cdot (z + \bar{z}) \cdot (\bar{z} + iz); z + \bar{z}), \infty) = \{((i-1)t; 0) | t \in \mathbb{R}\}, \text{ хотя [3–5]:}$$

$C(z(z + \bar{z})(\bar{z} + iz), \infty) = ((i-1) \cdot \overline{R}) \cup (i \cdot \overline{R})$  – объединение двух пересекающихся прямых, пополненных точкой  $\infty$ .

2. Однако без труда распространяемая на рассматриваемый случай техника доказательства теоремы 2.2 из [3], а также теорема 3 из [4] позволяют обосновать следующий факт.

**Теорема.** Для любых многочленов  $P_j(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}[z, \bar{z}] \setminus (\mathbb{C}[z] \cup \mathbb{C}[\bar{z}])$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) множество

$$C_k((P_1(z, \bar{z}); \dots; P_m(z, \bar{z})), \infty) = \begin{cases} \emptyset, \\ \bigcup_{j=1}^S \{(l_1^{(j)}(t), \dots, l_m^{(j)}(t)) | t \in \mathbb{R}\}, \end{cases}$$

где  $l_1^{(j)}(t), l_2^{(j)}(t), \dots, l_m^{(j)}(t)$  – некоторые многочлены из  $\mathbb{C}[t]$  (зависящие от  $P_k(z, \bar{z}); k = 1, \dots, m$ ), причем для каждого  $j \in \{1, 2, \dots, S\}$  хотя бы один из  $l_1^{(j)}(t), l_2^{(j)}(t), \dots, l_m^{(j)}(t)$  не тождественен константе; число  $S \in \mathbb{N}$  оценивается «сверху» учетверенным количеством элементов в пересечении множеств сходимости многочленов  $P_1(z, \bar{z}), P_2(z, \bar{z}), \dots, P_m(z, \bar{z})$ .

**Замечание.** Переход от  $C(F, \infty)$  к  $C_k(F, \infty)$  осуществлен только ради того, чтобы избежать мелких, но многочисленных оговорок, связанных с элементами из  $\overline{\mathbb{C}}^m \setminus \mathbb{C}^m$ .

## Литература

1. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М., 1991. – Т. 85. – С. 187–254.
2. Гомонов С.А. О предельных множествах многозначных отображений топологических пространств // Доклады АН СССР.– М., 1989. – Т. 306, № 1. – С. 20–24.
3. Гомонов С.А. О структуре предельных множеств полианалитических функций в изолированных особых точках // *Mathematica Montisnigri*. – Подгорица, 1995. – Vol. 5 (1995). – Ежегодник Черногорского университета. – С. 27–64.
4. Гомонов С.А. О некоторых свойствах предельных множеств многозначных отображений, задаваемых системами алгебраических уравнений // *Mathematica Montisnigri*. – Подгорица, 2001. – Vol. XIV (2001). – Ежегодник Черногорского университета. – С. 63–78.
5. Гомонов С.А. О теореме Сохоцкого-Вейерштрасса для трианалитических функций // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям / Смоленский гос. пед. ун-т. – Смоленск, 2001. – Вып. 3. – С. 39–49.
6. Гомонов С.А. Некоторые методы построения полианалитической функции с наперед заданным предельным множеством в ее изолированной особой л-точке // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям / Смоленский гос. ун-т. – Смоленск, 2005. – Вып. 6. – С. 20 – 28.

## ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МОДЕЛИ CGS РАСПРОСТРАНЕНИЯ НОВОВВЕДЕНИЯ

Л.Л. ДЕЛИЦЫН

Московский государственный университет культуры и искусств, г. Москва  
e-mail: L.Delitsin@yahoo.com

Классические логистические модели распространения нововведений не учитывают воспроизводство населения, что существенно ограничивает их применение. Аналитическая модель CGS [1] описывает распространение инновации в *стабильной* (экспоненциально растущей с сохранением возрастной структуры) популяции, однако справедлива лишь для постоянной силы смертности  $\mu$ , не характерной для человеческого общества. В предлагаемом нами обобщении модели CGS сила смертности  $\mu(t, \pi)$  зависит от момента рождения индивида  $\pi$  (или, эквивалентно, от его возраста  $a = t - \pi$ ). Кроме того, мы допускаем немедленное зачисление в пользователи нововведения детей, рождённых в семьях пользователей.

Мы предполагаем, что плотности (на единицу возраста) количества пользователей  $x(t, \pi)$  и потенциальных пользователей  $y(t, \pi)$  нововведения, рожденных в момент  $\pi$ , при  $t \geq \pi$  удовлетворяют системе нелинейных функционально-дифференциальных уравнений [2]

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (p + q\eta(t))y - \mu(t, \pi)x, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -(p + q\eta(t))y - \mu(t, \pi)y \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y(t_0, \pi) = \varphi(\pi), \quad x(t_0, \pi) = k(t_0, \pi) - \varphi(\pi) \quad (2)$$

и нелокальными граничными условиями для поколений (при  $t \geq 0$ )

$$x(t, t) = b_x X(t) + b_y Y(t), \quad y(t, t) = (b - b_x)X(t) + (b - b_y)Y(t), \quad (3)$$

где  $X(t) = \int_{-\infty}^t x(t, \pi) d\pi$ ,  $Y(t) = \int_{-\infty}^t y(t, \pi) d\pi$ ,  $K(t) = \int_{-\infty}^t k(t, \pi) d\pi$ ,  $(4)$

$$\xi(t) = X(t)/K(t), \quad \eta(t) = Y(t)/K(t). \quad (5)$$

Определим функцию дожития

$$l(t, \pi) = \exp\left(-\int_{\pi}^t \mu(\theta, \pi) d\theta\right) \text{ для } t \geq \pi \quad (6)$$

и плотность распределения популяции по моментам рождения

$$\rho(t, \pi) = k(t, \pi)/K(t) = b \cdot l(t, \pi)K(\pi)/K(t). \quad (7)$$

С целью решения уравнений (1) введем две вспомогательные функции времени

$$u(t) = \exp\left(\int_0^t (p + q\eta(\theta)) d\theta\right) \quad \text{и} \quad v(t) = \eta(t)u(t). \quad (8)$$

Показано, что имеет место система линейных интегральных уравнений Вольтерра

$$u(t) = e^{(p+q)t} - q \int_0^t e^{(p+q)(t-\theta)} v(\theta) d\theta, \quad (9)$$

$$v(t) = \eta_0(t) + \frac{b-b_x}{b} \int_0^t \rho(t, \theta) u(\theta) d\theta + \frac{b_x-b_y}{b} \int_0^t \rho(t, \theta) v(\theta) d\theta, \quad (10)$$

где  $\eta_0(t) = \frac{1}{K(t)} \int_{-\infty}^0 \varphi(\pi) \frac{l(t, \pi)}{l(0, \pi)} d\pi$ .  $(11)$

В стабильной популяции ( $\rho(t, \pi) = \rho(t - \pi)$ ) оба уравнения (9) и (10) превращаются в уравнения свертки. Применяя к ним преобразование Лапласа, находим изображения

$$\tilde{u}(s) = \frac{1 - q\tilde{\eta}_0(s) - \delta_{xy}\tilde{\rho}(s)}{s - p - q + (q\delta_x - \delta_{xy}(s - p - q))\tilde{\rho}(s)} \quad \text{и} \quad \tilde{v}(s) = \frac{\tilde{\eta}_0(s) + \delta_x\tilde{\rho}(s)\tilde{u}(s)}{1 - \delta_{xy}\tilde{\rho}(s)}. \quad (12)$$

Если удастся разыскать оригиналы, то решения (1) даются выражениями

$$y(t, \pi) = \begin{cases} y(\pi, \pi) l(t, \pi) \frac{u(\pi)}{u(t)} & \text{для } t \geq \pi > 0 \\ y(0, \pi) \frac{l(t, \pi)}{l(0, \pi)} \frac{1}{u(t)} & \text{для } t \geq 0 \geq \pi \quad \text{и} \quad x(t, \pi) = k(t, \pi) - y(t, \pi) \\ 0 & \text{для } t < \pi \end{cases} \quad (13)$$

**Пример.** В частном случае, когда функция дожития  $l(t, \pi) = l(t - \pi) = l(a)$  выражается функцией, дополнительной к распределению Эрланга с параметрами  $n = 1, 2, \dots$  и  $\mu$

$$l(a) = 1 - \mu \int_0^a \frac{(\mu\theta)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\mu\theta) d\theta,$$

система (9), (10) сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= w_2, \dots, \frac{dw_{n-2}}{dt} = w_{n-1}, \\ \frac{dw_{n-1}}{dt} &= \delta_x \hat{u}(t) + \delta_{xy} \hat{v}(t), \\ \frac{d\hat{u}}{dt} &= (p + q - \lambda - \mu) \hat{u} - q \hat{v}(t), \\ \frac{d\hat{v}}{dt} &= \sum_{j=1}^{n-1} \mu^{n-j} w_j + \delta_x \hat{u} + \delta_{xy} \hat{v} + \frac{d\hat{\eta}_0}{dt}, \end{aligned}$$

где  $\hat{u}(t) = u(t)e^{(\lambda+\mu)t}$ ,  $\hat{v}(t) = v(t)e^{(\lambda+\mu)t}$ , а начальные условия имеют вид

$$\hat{u}(0) = 1, \quad \hat{v}(0) = \eta(0), \quad w_1(0) = w_2(0) = \dots = w_{n-1}(0) = 0.$$

В докладе приведен численный пример решения этой системы при помощи свободно распространяемой системы компьютерной математики SCILAB.

### Литература

1. Centrone F., Goia, A., Salinelli E. Demographic processes in a model of innovation diffusion with a dynamic market // Technological Forecasting and Social Change. – 74. – 2007. – P. 247–266.
2. Делицын Л.Л. Обобщенная модель CGS распространения нововведения в растущей популяции // Труды вольного экон. общества России. – 2011. – Т. 164. – С. 412–420.

## ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА ШВАРЦА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ

**О.Б. ДОЛГОПОЛОВА, Э.И. ЗВЕРОВИЧ**

Белорусский государственный университет, г. Минск  
e-mail: Dolgopolova@tut.by

Пусть  $M = M^0 \cup \partial M$  – компактная ориентированная риманова поверхность с краем  $\partial M$ , состоящим из  $m+1$  связных компонент

$b_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_m$ . Рассмотрим *краевую задачу Шварца* – найти функцию  $\Phi(p)$ , однозначную и аналитическую на  $M^0$ ,  $N$ -непрерывную на  $M$  и удовлетворяющую условию

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = c(t), \quad t \in \partial M, \quad (1)$$

где  $c(t)$  – заданная  $N$ -непрерывная функция. Известен критерий разрешимости

$$\int_{\partial M} c(t) d\zeta_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m + 2h, \quad (2)$$

где  $d\zeta_1(p), \dots, d\zeta_{m+2h}(p)$  – базис абелевых дифференциалов первого рода римановой поверхности  $M$ . При выполнении условий (2) решение задачи (1) существует и единственно с точностью до постоянного чисто мнимого слагаемого. Оператором Шварца римановой поверхности  $M$  называется оператор

$$S : c(t) \rightarrow \Phi(p),$$

$$(Sc(\cdot))(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} c(\tau) S(p, \tau) d\tau + i\beta, \quad (\beta \in R).$$

Найдём выражение  $S(p, \tau) d\tau$  через основные функционалы римановой поверхности  $M$ .

Зафиксируем специальным образом на  $M$  локальные координаты (униформизацию). С этой целью проведём на  $M^0$   $h$  попарно непересекающихся и негомологических друг другу

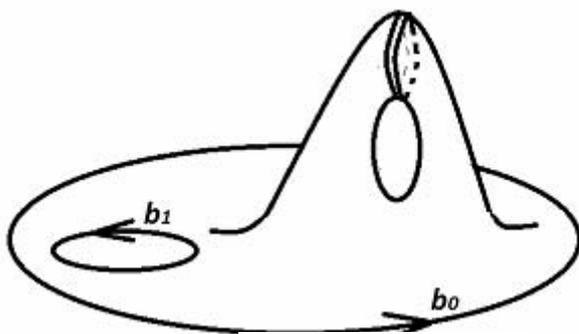


Рис. 1

и разрежем по ним риманову поверхность  $M$ . На рисунке 1 показан случай  $m = h = 1$ . Полученная поверхность подобна однолистной. По теореме Римана она допускает конформный гомеоморфизм  $z = f(p)$  на верхнюю полуплоскость, из

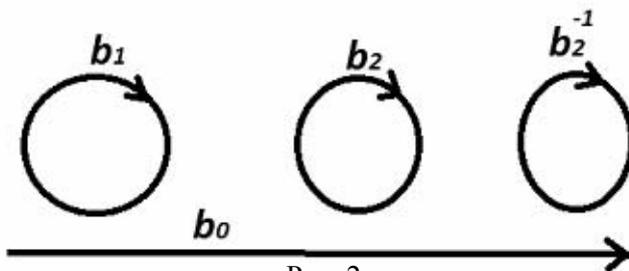


Рис. 2

которой удалены  $m + 2h$  областей, гомеоморфных кругу (см. рис. 2). Причем компоненте края  $b_0$  соответствует вещественная ось  $\operatorname{Im} z = 0$ . Сохраняя в полуплоскости  $\operatorname{Im} z \geq 0$  те же обозначения, что и на поверхности  $M$ , будем представлять эту поверхность в виде, показанном на рисунке 2 в

случае  $m = h = 1$ . Линии  $b_2$  и  $b_2^{-1}$  считаются склеенными посредством функции  $z = f(p)$ , т.е. отождествляются точки  $t_1 \in b_2$  и  $t_2 \in b_2^{-1}$ , которым на

поверхности  $M$  соответствует одна и та же точка  $p$ . С помощью функции  $z \mapsto \bar{z}$ , отображающей верхнюю полуплоскость на нижнюю, построим дубль  $\mathfrak{R} = M \cup \bar{M}$  поверхности  $M$  (см. рис. 3). Выберем каноническое рассечение поверхности  $\mathfrak{R} - a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ ,  $g = m + 2h$ , так что объединение этих линий переходит в себя при отображении  $z \mapsto \bar{z}$ .

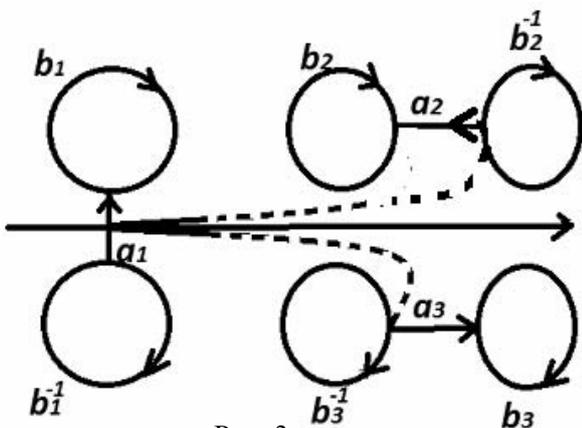


Рис. 3

Пунктирами на рисунке 3 показаны дополнительные линии разрезав, превращающие поверхность  $\mathfrak{R}$  в односвязную область. Функция аналитическая на дубле является аналитической от  $z$  в верхней полуплоскости и аналитической от  $\bar{z}$  в нижней. Пусть  $d\zeta_1(z), \dots, d\zeta_g(z)$  — базис абелевых дифференциалов первого рода римановой

поверхности  $\mathfrak{R}$ , нормированный относительно выбранного канонического рассечения, т.е.

$$\int_{a_\nu} d\zeta_\mu(t) = \delta_{\mu\nu}, \quad \int_{b_\nu} d\zeta_\mu(t) = B_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, g, \quad (3)$$

где  $\delta_{\mu\nu}$  — символ Кронекера, а матрица  $(B_{\mu\nu})_{\mu, \nu=1}^g$  симметрическая, и её мнимая часть положительно определена.

$\zeta_\nu(z) = \int_{\infty}^z d\zeta_\nu(t)$ ,  $\nu = 1, \dots, g$  — комплексно нормированный базис абелевых

интегралов первого рода. Символ  $\int$  означает, что путь интегрирования не пересекает линий канонического рассечения. Отсюда по теореме о монодромии следует, что интегралы однозначно определены внутри рассеченного дубля. Пусть

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \dots \\ n_g \end{pmatrix} \in Z^g; \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_g \end{pmatrix} \in C^g; \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_g \end{pmatrix} \in C^g; \quad \zeta(z) = \begin{pmatrix} \zeta_1(z) \\ \zeta_2(z) \\ \dots \\ \zeta_g(z) \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{k}$  — вектор римановых констант.

$$k_\nu = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} B_{\mu\nu} - \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^g \int_{a_\mu} \zeta_\nu(t^+) d\zeta_\mu(t), \quad \nu = 1, \dots, g.$$

Система сравнений  $\sum_{\nu=1}^g \zeta(z_\nu) \equiv \mathbf{e} - \mathbf{k}$ , (по модулю периодов), где

неизвестным является дивизор  $z_1, z_2, \dots, z_g$ , называется проблемой обращения Якоби [1]. Известно, что она безусловно разрешима и ее решение единственно почти для всех правых частей. Это решение можно найти как совокупность всех нулей тета-функции Римана

$$\theta(\zeta(z) - \mathbf{e}) = \sum_{n \in Z^g} \exp\{\pi i^t \mathbf{n} \mathbf{B} \mathbf{n} + 2\pi i^t \mathbf{n}(\zeta(z) - \mathbf{e})\}, \quad \text{когда она отлична от}$$

тождественного нуля. Проблема обращения Якоби со специальной

правой частью  $\sum_{\nu=1}^g \zeta(z_\nu) \equiv \zeta(\tau)$ , имеет очевидное решение

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_g = \tau \cdot \infty^{g-1}, \quad \text{следовательно, соответствующая тета-функция}$$

$$\theta(\zeta(z) - \mathbf{k} - \zeta(\tau)) = \sum_{n \in Z^g} \exp\{\pi i^t \mathbf{n} \mathbf{B} \mathbf{n} + 2\pi i^t \mathbf{n}(\zeta(z) - \zeta(\tau) - \mathbf{k})\} \quad (4)$$

имеет простой нуль при  $\tau = z$  и нуль кратности  $g-1$  при  $\tau = \infty$ . Используя свойство квазипериодичности тета-функции, покажем, что в качестве ядра оператора Шварца можно взять

$$S(z, \tau) d\tau = d_\tau \ln(\theta(\zeta(z) - \mathbf{k} - \zeta(\tau)) \cdot \overline{\theta(\zeta(\bar{z}) - \mathbf{k} - \zeta(\bar{\tau}))}); \quad (5)$$

$S(z, \tau) d\tau$  — аналитичен от  $\tau$  и от  $z$  всюду на разрезанном дубле, кроме двух простых полюсов в  $\tau = z$  с вычетом 2 и в  $\tau = \infty$  с вычетом  $2g-2$ . Из нормированности базиса интегралов первого рода следует, что при  $t, \tau \in \partial M \cup \overline{\partial M}$   $\zeta_\nu(t) - \zeta_\nu(\bar{t}) = \pm 1$  или 0 и  $\zeta_\nu(\tau) - \zeta_\nu(\bar{\tau}) = \pm 1$  или 0, а так как тета-функция периодична с периодом 1, то при  $t, \tau \in \partial M \cup \overline{\partial M}$   $\theta(\zeta(t) - \mathbf{k} - \zeta(\tau)) = \theta(\zeta(\bar{t}) - \mathbf{k} - \zeta(\bar{\tau}))$ , следовательно,

$$S(z, \tau) d\tau = d_\tau \ln(\theta(\mathbf{j}(z) - \mathbf{k} - \mathbf{j}(\tau)))^2,$$

т.е. при  $t, \tau \in \partial M \cup \overline{\partial M}$  функция (5) принимает чисто вещественные значения. Функция (4) как функция от  $z$  разрывна на  $a_\nu$ . Её предельные значения на линиях разрыва связаны равенствами

$$\theta(\zeta(t^+) - \mathbf{k} - \zeta(\tau)) = \theta(\zeta(t^-) - \mathbf{k} - \zeta(\tau)) \cdot \exp\{\pi i B_{\nu\nu} + 2\pi i(\zeta_\nu(t^+) - \zeta_\nu(\tau) - k_\nu)\}, \quad t \in a_\nu.$$

Аналогично,

$$\overline{\theta(\zeta(t^+) - \mathbf{k} - \zeta(\tau))} = \overline{\theta(\zeta(t^-) - \mathbf{k} - \zeta(\tau))} \cdot \exp\{-\pi i \overline{B_{\nu\nu}} + 2\pi i(\zeta_\nu(\bar{t}^+) - \zeta_\nu(\tau) - \bar{k}_\nu)\}, \quad t \in a_\nu.$$

Перемножая эти равенства, затем логарифмируя и дифференцируя по  $\tau$ , найдем скачки функции (5) при переходе через линии  $a_\nu$ .

$$S(t^+, \tau) d\tau - S(t^-, \tau) d\tau = -4\pi i d\zeta_\nu(\tau), \quad t \in a_\nu. \quad (6)$$

Так как дифференциал (5) имеет при  $\tau = z$  простой полюс с вычетом 2, то при  $z \in M^0$  интеграл с ядром (5)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} c(\tau) S(z, \tau) d\tau + i\beta \quad (7)$$

можно рассматривать как удвоенный интеграл типа Коши. По формуле Сохоцкого найдем его предельное значение при  $z \rightarrow t \in \partial M$ .

$$\Phi(t^+) = c(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} c(\tau) S(t, \tau) d\tau + i\beta.$$

В силу вещественности ядра (5) при  $t, \tau \in \partial M$  второе слагаемое последнего равенства принимает чисто мнимые значения, и мы имеем

$$\operatorname{Re} \Phi(t^+) = c(t).$$

Итак, функция (7) удовлетворяет краевому условию (1). Так как ядро (5) разрывно на линиях  $a_\nu$ , то и интеграл (7), вообще говоря, разрывен на этих линиях. Используя равенства (6), заключаем, что условия

$$\int_{\partial M} c(\tau) d\zeta_\nu(\tau) = 0, \quad \nu = 1, \dots, g,$$

необходимы и достаточны для непрерывности на  $M$  интеграла (7).

### Литература

1. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи матем. наук. – 1971. – Т. XXVI, вып. 1(157). – С. 113–179.

## СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

Г.С. ЕВДОКИМОВА, В.Д. БОЧКАРЕВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск

Рассмотрим систему массового обслуживания, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) она состоит из  $n$  однородных приборов;
- 2) каждый прибор выходит из строя под воздействием пуассоновского потока событий с периодической интенсивностью  $\lambda(t)$ :

$$\lambda(t) = \lambda(t + \tau);$$

- 3) приборы ремонтируют  $N$  рабочих, независимых друг от друга;
- 4) поток ремонтов пуассоновский с постоянной интенсивностью  $\mu$ ;
- 5) каждый прибор может находиться либо в состоянии  $s_1$  – прибор исправен, функционирует; либо в состоянии  $s_2$  – прибор неисправен, ремонтируется в установившемся режиме;

- 6) интенсивность перехода из состояния  $s_2$  в состояние  $s_1$  зависит от случайной величины  $x_2$ , которая равна числу неисправных приборов.

Если  $x_2 \leq N$ , то  $\mu(x_2) = \mu$ . Если  $x_2 > N$ , то  $\mu(x_2) = \frac{M_\Sigma}{x_2}$ , где  $M_\Sigma$  – суммарная интенсивность потока ремонтов.

Воспользовавшись принципом квазирегулярности, запишем:

$$\mu(x_2) = \mu(m_2) = \begin{cases} \mu, & \text{если } m_2 \leq N, \\ \frac{MN}{m_2}, & \text{если } m_2 > N. \end{cases}$$

Вполне естественно можно задать следующие начальные условия:

$$m_1(0) = n, \quad m_2(0) = 0, \quad (1)$$

где  $m_1(t)$  и  $m_2(t)$  – математические ожидания состояний.

Рассмотрим следующие три случая.

1.  $m_2(t) < N$  для всех  $t \geq 0$ . В этом случае система описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = -\lambda(t)m_1 + \mu m_2, \\ \dot{m}_2 = \lambda(t)m_1 - \mu m_2. \end{cases}$$

По теореме [1]  $m_2(t) = n - n\hat{\mu}\psi(t)$  при достаточно больших  $t$ . Причем  $\psi(t)$  – функция периодическая:

$$\psi(t) = \frac{\int_0^\tau \hat{\varphi}(t-u) du}{\hat{\varphi}(t) [1 - e^{-\bar{\nu}\tau}]}, \quad \text{где } \bar{\nu} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \lambda(s) ds + \mu.$$

2.  $m_2(t) > N$  для всех  $t \geq 0$ . Тогда система по теореме [2] описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = -\lambda(t)m_1 + \mu N, \\ \dot{m}_2 = \lambda(t)m_1 - \mu N, \end{cases}$$

и  $m_2(t) = n - \hat{\mu}N\psi(t)$ , где  $\psi(t)$  – периодическая функция при достаточно больших  $t$ .

3.  $m_2(t)$  бесконечное число раз переходит значение  $m_2(t_1) = N$ . В силу начальных условий (1) система сначала будет описываться решением

$$m_2(t) = n \left[ 1 - \frac{1}{\hat{\varphi}(t)} \right] - n \frac{\mu}{\hat{\varphi}(t)} \int_0^t \hat{\varphi}(v) dv.$$

С любой степенью точности можно найти момент времени  $t_1$ , в который  $m_2(t_1) = N$ . Тогда при  $t \geq t_1$  система будет описываться решением

$$m_2(t) = \varphi(t) \left[ \begin{array}{c} \int_{t_1}^t [\lambda(v)n - \mu N] e^{\int_{t_1}^v \lambda(s) ds} dv + N \end{array} \right].$$

Затем находим момент времени  $t_2$ , при котором  $m_2(t_2) = N$ . Принимая  $t_2$  и  $m_2(t_2) = N$  за начальные условия, также получаем решение для  $m_2(t)$ .

Таким образом, с любой степенью точности удастся описать заданную систему массового обслуживания в любой момент времени.

### Литература

1. Евдокимова Г.С. Поведение системы массового обслуживания с периодическим входящим потоком в установившемся режиме // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2011. – Вып. 12. – С. 181–184.

2. Евдокимова Г.С. Среднее состояние в системе массового обслуживания // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2012. – Вып. 13. – С. 159–161.

## ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MAPLE ПРИ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Н.В. ЗАЙЦЕВА**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань  
e-mail: queen-natalya@mail.ru

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{k}{x} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области  $G = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t < T\}$ .

Смешанная задача ставится следующим образом: требуется найти функцию  $U(x, t)$ , удовлетворяющую начальным условиям  $U|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $U_t|_{t=0} = \psi(x)$ , граничному условию  $\frac{\partial U(0, t)}{\partial x} = 0$ , а также интегральному

условию второго рода  $U(l, t) + \int_0^l U(x, t) x^k dx = 0$ .

Данную задачу с помощью пакета Maple будем решать методом разделения переменных:

> restart;

> PDE := diff(U(x,t),t,t) = diff(U(x,t),x,x) +  $\frac{k}{x}$  \* diff(U(x,t),x);

struc := pdsolve(PDE, HINT = X(x)\*T(t));

$$PDE := \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,t) + \frac{k}{x} \frac{\partial}{\partial x} U(x,t)$$

struc := (U(x,t) = X(x)T(t)) &

$$\& \text{ where } \left[ \left[ \frac{d^2}{dt^2} T(t) = T(t) \_c1, \frac{d^2}{dx^2} X(x) \_c1 - \frac{k \left( \frac{d}{dx} X(x) \right)}{x} \right] \right]$$

> dsolve(diff(T(t),\$(t,2)) = T(t) \\_C[1]);

dsolve(diff(X(x),\$(x,2)) = X(x) \\_C[1] -  $\frac{k}{x}$  \* diff(X(x),x));

Согласно методу разделения переменных, сделаем замену постоянной разделения переменных:  $\_c1 = -\lambda^2$ , в результате чего получаем общие решения уравнений, полученных из уравнения (1) после разделения переменных:

> dsolve(diff(T(t),\$(t,2)) = -lambda^2 \* T(t));

dsolve(diff(X(x),\$(x,2)) = -lambda^2 \* X(x) -  $\frac{k}{x}$  \* diff(X(x),x));

$$T(t) = \_C1 \sin(\lambda t) + \_C2 \cos(\lambda t)$$

$$X(x) = \_C1 x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k} BesselJ\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}, \lambda x\right) + \_C2 x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k} BesselY\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}, \lambda x\right)$$

Более подробное описание работы с пакетом Maple при решении смешанной задачи с интегральным условием второго рода для *B*-гиперболического уравнения – довольно объемный материал. Отметим только, что использование пакета Maple позволило упростить вычисления и получить решение задачи в явном виде.

### Литература

1. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть 1. – М. 1949. – 799 с.
2. Игнатъев Ю.Г. Гиперболическое уравнение: задача о продольных колебаниях стержня: методическое пособие для студентов. – Казань, 2005.

# ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ 1 РОДА ПО РАЗОМКНУТОЙ КРИВОЙ

Э.И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет, г. Минск  
e-mail: zverovich@bsu.by

Пусть  $L \subset C$  – простая гладкая разомкнутая ориентированная кривая,  $a$  – ее начальная точка,  $b$  – конечная. Пусть  $\varphi: L \rightarrow C$  –  $H$ -непрерывная на  $L^\circ = L \setminus \{a, b\}$  функция, имеющая в окрестности точек  $a$  и  $b$  представления:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{(t-a)^k} + \varphi_a(t), \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^m \frac{\beta_k}{(t-b)^k} + \varphi_b(t),$$

где  $\varphi_a(t), \varphi_b(t)$  –  $H$ -непрерывные на  $L$  функции.

Введем в рассмотрение «гиперсингулярный» интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \mathbf{pf} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

где  $\mathbf{pf}$  означает, что интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. Для него справедливы формулы Сохоцкого

$$\begin{cases} \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), & t \in L^\circ, \\ \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \end{cases}$$

и асимптотические представления

$$\Phi(z) = O((z-a)^{-n}), \quad z \rightarrow a; \quad \Phi(z) = O((z-b)^{-m}), \quad z \rightarrow b; \quad \Phi(z) = O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим задачу обращения гиперсингулярного интеграла

$$\frac{1}{\pi i} \mathbf{pf} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \psi(t), \quad t \in L^\circ, \tag{1}$$

где  $\psi(t)$  – заданная  $H$ -непрерывная на  $L$  функция. Для того, чтобы сделать эту задачу более определенной, будем искать ее решение в классе функций, кратных заданному дивизору  $(a)^{-n}(b)^{-m}$ .

Для решения этой задачи воспользуемся второй формулой Сохоцкого и сведем эту задачу к следующей задаче Римана:

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \psi(t), \quad t \in L^\circ, \quad (a)^{-n}(b)^{-m}(\infty) | (\Phi). \tag{2}$$

Эта задача легко сводится к задаче «о скачке», для чего необходимо «профакторизовать» ее коэффициент  $(-1)$ . Делается это хорошо известным методом: достаточно взять ветвь функции  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ , однозначную на  $C \setminus L$ , имеющую следующую асимптотику:  $\sqrt{(z-a)(z-b)} \rightarrow z$  при  $z \rightarrow \infty$ . При  $t \in L$  под  $\sqrt{(t-a)(t-b)}$  будем понимать предельное значение слева на  $L$  выбранной выше ветви, т.е. считаем, что  $\sqrt{(t-a)(t-b)} := \left(\sqrt{(t-a)(t-b)}\right)^+$ .

Тогда будет  $(\sqrt{(t-a)(t-b)})^- = -\sqrt{(t-a)(t-b)}$ , и задача Римана переписывается в виде следующей задачи о скачке:

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}\right)^+ - \left(\frac{\Phi(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}\right)^- = \frac{\psi(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}, \quad t \in L^o,$$

с условием  $(a)^{-n-1}(b)^{-m-1}(\infty)^2 \left[ \left(\frac{\Phi(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}\right) \right]$ . Общее решение задачи о скачке находится с помощью гиперсингулярного интеграла

$$\frac{\Phi(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} = \frac{1}{2\pi i} \mathbf{pf} \int_L \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)} \tau-z} d\tau + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{(z-a)^k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{b_k}{(z-b)^k},$$

где  $a_k, b_k$  – произвольные постоянные. Так как  $\Phi(z) = O(z^{-1})$  при  $z \rightarrow \infty$ , то должно выполняться равенство

$$a_1 + b_1 = \frac{1}{\pi i} \mathbf{pf} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}.$$

При выполнении этого условия общее решение задачи Римана (2) имеет вид:

$$\Phi(z) = \left[ \frac{1}{2\pi i} \mathbf{pf} \int_L \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)} \tau-z} d\tau + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{(z-a)^k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{b_k}{(z-b)^k} \right] \sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

Отсюда, используя первую формулу Сохоцкого  $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t)$  при  $t \in L^o$ , получаем общее решение уравнения (1)

$$\varphi(t) = \left[ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)} \tau-t} d\tau + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{(t-a)^k} + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{b_k}{(t-b)^k} \right] \sqrt{(t-a)(t-b)},$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару.

## УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

**В.В. КАРАЧИК**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск  
e-mail: karachik@susu.ru

Рассмотрим задачу Неймана (см., например, [1]) для неоднородного полигармонического уравнения в единичном шаре  $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^k u(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \Big|_{\partial\Omega} = \phi_j(s), \quad s \in \partial\Omega; \quad j = 1, \dots, k, \quad (2)$$

где  $\nu$  - единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ . В работе [2] была рассмотрена более общая краевая задача, содержащая многочлены высокого порядка от нормальных производных в граничных условиях. Была доказана теорема о разрешимости этой краевой задачи и о

представлении решения. В работе [3] была изучена задача Неймана для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре. В работе [4] исследовались условия разрешимости краевой задачи для уравнения Пуассона с многочленами высокого порядка от нормальных производных в граничных условиях.

Для однородного полигармонического уравнения имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Решение задачи Неймана (1)-(2) при  $\phi_j \in C^{k-j}(\partial\Omega)$ ,  $j=1, \dots, k$ , и  $f(x)=0$  существует тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \binom{2k-2j-1}{j-1} (2k-2j-1)!! \phi_j(s) ds_x = 0,$$

где следует считать, что  $(-1)!!=1$ .

Если  $f(x) \neq 0$ , то этот результат обобщается следующим образом.

**Теорема 2.** *Если  $f \in C^1(\bar{\Omega})$ , то необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Неймана (1)-(2) при  $\phi_j \in C^{k-j}(\partial\Omega)$ ,  $j=1, \dots, k$ , имеет вид*

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \binom{2k-2j-1}{j-1} (2k-2j-1)!! \phi_j(s) ds_x = \int_{\partial\Omega} \frac{(|x|^2-1)^{k-1}}{(2k-2)!!} f(x) dx.$$

Как же строить решения задачи Неймана?

**Теорема 3.** *Решение задачи Неймана (1)-(2) имеет вид*

$$u(x) = \int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t} + C,$$

где  $v(x)$  - решение следующей задачи Дирихле

$$\Delta^k v(x) = (\Lambda + 2k)f(x), \quad x \in \Omega;$$

$$v|_{\partial\Omega} = \phi_1(s), \quad \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}|_{\partial\Omega} = j\phi_j(s) + \phi_{j+1}(s), \quad s \in \partial\Omega; \quad j=1, \dots, k-1,$$

$$u \quad \Lambda = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

**Пример 1.** По теореме 2 решение следующей задачи Неймана

$$\Delta^2 u(x) = 1, \quad x \in \Omega;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2n+4}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2n}$$

существует и в соответствии с теоремой 3 это решение имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{2n(n+2)} \left( \frac{n-1}{2} |x|^2 + \frac{1}{4} |x|^4 \right) + C.$$

### Литература

1. Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, – № 5. – С. 825–831.

2. Карачик В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сибирский математический журнал, – 1991. – Т. 32, № 5. – С. 51–58.

3. Karachik V.V., Turmetov V.Kh., Beakaeva A. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – V. 81, № 3. – p. 487–495.

4. Карачик В.В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // ЖВМиМФ. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1674-1694.

## К ВОПРОСУ О КОЭФФИЦИЕНТАХ ОДНОЛИСТНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ

Е.Э. КИРЬЯЦКИЙ

Вильнюсский технический университет, г. Вильнюс  
e-mail: evgenijus.kirjackis@vgtu.lt

Обозначим через  $\tilde{K}_1(\Pi)$  класс однолистных в полуплоскости  $\Pi: \operatorname{Re} z > 0$  функций.

**Теорема 1.** Пусть  $f(z) = (z-1) + a_2(z-1)^2 + \dots \in \tilde{K}_1(\Pi)$ . Тогда имеют место точные оценки

$$\left| a_3 - \gamma a_2^2 + (1-\gamma)a_2 + \frac{1}{4}(1-\gamma) \right| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{2\gamma}{1-\gamma}} + \frac{1}{4}$$

для любого действительного  $\gamma$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$ . В частности,

$$\left| a_3 + a_2 + \frac{1}{4} \right| \leq \frac{3}{4}, \text{ а также } |a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{4}.$$

Знак равенства в последних двух неравенствах реализуется функцией

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right) \in \tilde{K}_1(\Pi).$$

**Теорема 2.** В классе  $\tilde{K}_1(\Pi)$  существуют только две функции  $f_1(z) = z-1$ ,  $f_2(z) = 1 - \frac{1}{z}$  с целыми коэффициентами.

## О КОРНЯХ ОДНОГО ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ

Д.Э. КИРЬЯЦКИС

Аналитический центр компании «Оракулас»  
e-mail: dmitr.kir@gmail.com

**Теорема 1.** Уравнение  $e^z = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$  при любом  $n \geq 1$  имеет не более  $n+1$  корней в области, представляющей собой горизонтальную полосу  $D: -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$ .

**Теорема 2.** Уравнение  $e^z = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$  имеет в комплексной плоскости бесконечно много корней  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $k=1,2,3,\dots$ , где  $|z_k| \leq |z_{k+1}|$ , с единственной предельной точкой в бесконечности. Корни с достаточно большими модулями находятся в правой полуплоскости.

Если  $k'_m$ ,  $m=1,2,\dots$ , – последовательность значений  $k$  такая, что  $y_{k'_m} > 0$ , то  $y_{k'_m} = \frac{\pi}{2}n + \varepsilon_m + 2\pi\rho_m$ , где  $\rho_m$  – целое число, причем  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  и  $\rho_m \rightarrow +\infty$  при  $m \rightarrow +\infty$ . Если  $m=1,2,\dots$ , – последовательность значений  $k$  такая, что  $y_{k'_m} < 0$ , то  $y_{k'_m} = -\frac{\pi}{2}n + \varepsilon_m + 2\pi r_m$ , где  $r_m$  – целое число, причем  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  и  $r_m \rightarrow +\infty$  при  $m \rightarrow +\infty$ . Что касается  $x_k$ , то  $|y_k| \exp\left\{-\frac{x_k}{n}\right\} \rightarrow 1$ . Уравнение  $e^z = b_0 z$  изучалось в [1].

### Литература

1. Маркушевич, А.И. Целые функции. – М.: Наука, 1965. – 108 с.

## ПО ПОВОДУ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э.Г. КИРЬЯЦКИЙ

Вильнюсский технический университет, г. Вильнюс  
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Пусть в  $k$  – мерном евклидовом пространстве  $E_k$ ,  $k \geq 2$ , взяты точки  $M_1, \dots, M_n$  шара  $W$  с центром в начале координат  $O$ , радиус которого  $R$  и  $T$  его граница. Введем среднее  $s$  – го порядка по формуле

$$\Omega_s(M; M_1, \dots, M_n) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho^s(M; M_i) \right)^{1/s}, \quad s \neq 0,$$

$$\Omega_0(M; M_1, \dots, M_n) = \left( \prod_{i=1}^n \rho(M; M_i) \right)^{1/n}, \quad \text{где } \rho(M; M_i) \text{ – обычное расстояние.}$$

**Теорема 1.** Если  $k + s = 2$ , то

$$\sup_{M_1, \dots, M_n \in W} \inf_{M \in T} \Omega_s(M; M_1, \dots, M_n) = \inf_{M_1, \dots, M_n \in W} \sup_{M \in T} \Omega_s(M; M_1, \dots, M_n) = R.$$

**Теорема 2.** 1. Если  $k + s > 2$ , то

$$\inf_{M_1, \dots, M_n} \sup_{M \in T} \Omega_s(M; M_1, \dots, M_n) = R.$$

При этом найдутся точки  $M_1, \dots, M_n \in W$  и радиус  $R$ , что

$$\inf_{M \in T} \Omega_s(M; M_1, \dots, M_n) > R.$$

2. Если  $k + s < 2$ , то

$$\sup_{M_1, \dots, M_n} \inf_{M \in T} \Omega_s(M; M_1, \dots, M_n) = R.$$

При этом найдутся точки  $M_1, \dots, M_n \in W$  и радиус  $R$ , что

$$\sup_{M \in T} \Omega_s(M; M_1, \dots, M_n) < R.$$

## О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГИЛЬБЕРТА В КЛАССАХ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

**С.А. КСЕНОФОНТОВ, К.М. РАСУЛОВ**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: StanislavKsenofontov@gmail.com

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простой замкнутой гладкой кривой  $L$ . Для определенности будем предполагать, что точка  $z = 0$  принадлежит области  $T^+$ .

В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все бианалитические функции  $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  класса  $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ , удовлетворяющие на  $L$  следующим краевым условиям*

$$\operatorname{Re} \left\{ \overline{\lambda_k(t)} \frac{\partial^k F(t)}{\partial n^k} + \int_L A_k(t, \tau) \frac{\partial^k F(\tau)}{\partial n^k} d\tau \right\} = f_k(t), \quad k = 0, 1, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  – производная по внешней нормали к  $L$ ,  $\frac{\partial^k F(t)}{\partial n^k} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial^k F(z)}{\partial n^k}$ ;

$\lambda_k(t) = a_k(t) + ib_k(t)$ ,  $f_k(t)$  ( $k = 0, 1$ ) – заданные на  $L$  действительные функции, причем  $\lambda_k(t), f_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$  и

$$|\lambda_k(t)| \equiv 1, \quad (2)$$

а  $A_k(t, \tau)$  – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу  $H_*^{(2-k)}(L \times L)$ .

Следуя терминологии, принятой в [1], сформулированную выше задачу будем называть *второй основной обобщенной задачей типа Гильберта для бианалитических функций* или, короче, *задачей  $\mathbf{GF}_{2,2}$* , а соответствующую *однородную задачу* ( $f_0(t) \equiv f_1(t) \equiv 0$ ) – *задачей  $\mathbf{GF}_{2,2}^0$* .

Важно отметить, что в частном случае, когда выполнены условия

$$A_0(t, \tau) \equiv A_1(t, \tau) \equiv 0, \quad (3)$$

задача  $\mathbf{GF}_{2,2}$  представляет собой одну из основных краевых задач типа Гильберта для бианалитических функций [2, с. 304].

При выполнении условий (3) впервые решение задачи  $\mathbf{GF}_{2,2}$  в случае произвольных конечносвязных областей с гладкими границами было получено в работе одного из авторов [3] (см. также §11 книги [1]).

Настоящее сообщение посвящается разработке конструктивного метода решения задачи  $\mathbf{GF}_{2,2}$  в случае, когда  $L = \{t : |t| = 1\}$ ,  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ .

**2. О решении задачи  $\mathbf{GF}_{2,2}$  в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ .** Перепишем сначала краевые условия (1) в следующей *комплексной форме*:

$$F(t) + G_0(t)\overline{F(t)} + \int_L A_{10}(t, \tau)F(\tau)d\tau + \int_L B_{10}(t, \tau)\overline{F(\tau)}d\tau = g_0(t), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial F(t)}{\partial n} + G_1(t)\overline{\frac{\partial F(t)}{\partial n}} + \int_L A_{11}(t, \tau)\frac{\partial F(\tau)}{\partial n}d\tau + \int_L B_{11}(t, \tau)\overline{\frac{\partial F(\tau)}{\partial n}}d\tau = g_1(t), \quad (2.2)$$

где

$$G_k(t) = \frac{a_k(t) + ib_k(t)}{a_k(t) - ib_k(t)}, \quad g_k(t) = \frac{2f_k(t)}{a_k(t) - ib_k(t)}, \quad (2.3)$$

$$A_{1k}(t, \tau) = \frac{A_k(t, \tau)}{a_k(t) - ib_k(t)}, \quad B_{1k}(t, \tau) = -\frac{\overline{\tau^2 A_k(t, \tau)}}{a_k(t) - ib_k(t)}, \quad k = 0, 1.$$

Будем искать решения задачи  $\mathbf{GF}_{2,2}$  в виде [1, с. 166]

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), \quad z \in T^+, \quad (2.4)$$

где  $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$  - пока неизвестные аналитические в круге  $T^+$  функции, называемые *нулевой и первой аналитическими компонентами* искомой бианалитической функции  $F^+(z)$ .

Теперь, с учетом (2.1) и того, что в точках окружности  $L = \{t : |t| = 1\}$  имеет место равенство  $\bar{t} = \frac{1}{t}$  и справедливо соотношение [3, с. 304]

$$\frac{\partial}{\partial n} = -i\left(t' \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\right) = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad (2.5)$$

краевые условия (2.1) и (2.2) можно переписать соответственно в виде

$$\begin{aligned} & \varphi_0(t) + \frac{1}{t}\varphi_1(t) + G_0(t)[\overline{\varphi_0(t)} + t\overline{\varphi_1(t)}] + \\ & + \int_L A_{10}(t, \tau)[\varphi_0(\tau) + \frac{1}{\tau}\varphi_1(\tau)]d\tau + \int_L B_{10}(t, \tau)[\overline{\varphi_0(\tau)} + \tau \cdot \overline{\varphi_1(\tau)}]d\tau = g_0(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

и

$$\begin{aligned}
& t \frac{d\varphi_0(t)}{dt} + \frac{d\varphi_1(t)}{dt} + \frac{1}{t} \varphi_1(t) + G_1(t) \left\{ t \frac{d\varphi_0(t)}{dt} + \frac{d\varphi_1(t)}{dt} + t \cdot \overline{\varphi_1(t)} \right\} + \\
& + \int_L A_{11}(t, \tau) \left\{ \tau \frac{d\varphi_0(\tau)}{d\tau} + \frac{d\varphi_1(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{\tau} \varphi_1(\tau) \right\} d\tau + \\
& + \int_L B_{11}(t, \tau) \left\{ \tau \frac{d\varphi_0(\tau)}{d\tau} + \frac{d\varphi_1(\tau)}{d\tau} + \tau \overline{\varphi_1(\tau)} \right\} d\tau = g_1(t).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Далее, вводя в рассмотрение вспомогательные аналитические в круге  $T^+$  функции вида

$$\Phi_0^+(z) = z\varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad z \in T^+, \tag{2.8}$$

$$\Phi_1^+(z) = z^2 \frac{d\varphi_0(z)}{dz} + z \frac{d\varphi_1(z)}{dz} + \varphi_1(z), \quad z \in T^+, \tag{2.9}$$

краевые условия (2.6) и (2.7) соответственно примут вид:

$$\Phi_0^+(t) + \tilde{G}_0(t) \overline{\Phi_0^+(t)} + \int_L \tilde{A}_{10}(t, \tau) \Phi_0^+(\tau) d\tau + \int_L \tilde{B}_{10}(t, \tau) \overline{\Phi_0^+(\tau)} d\tau = \tilde{g}_0(t) \tag{2.10}$$

и

$$\Phi_1^+(t) + \tilde{G}_1(t) \overline{\Phi_1^+(t)} + \int_L \tilde{A}_{10}(t, \tau) \Phi_1^+(\tau) d\tau + \int_L \tilde{B}_{10}(t, \tau) \overline{\Phi_1^+(\tau)} d\tau = \tilde{g}_1(t), \tag{2.11}$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_k(t) = t^2 G_k(t), \quad \tilde{g}_k(t) = t g_k(t), \quad \tilde{A}_{1k}(t, \tau) = \tau^{-1} A_{1k}(t, \tau), \quad \tilde{B}_{1k}(t, \tau) = \tau B_{1k}(t, \tau), \tag{2.12} \\
k = 0, 1.
\end{aligned}$$

Но равенства (2.10) и (2.11) являются краевыми условиями хорошо изученных *обобщенных краевых задач Гильберта относительно аналитических в круге  $T^+$  функций  $\Phi_0^+(z)$  и  $\Phi_1^+(z)$*  соответственно (см., например, §3 книги [1] или §35 книги [2]).

**Замечание 1.** Так как по условию задачи  $\mathbf{G}\Gamma_{2,2}$  коэффициенты  $\lambda_k(t), f_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$ , а ядра  $A_k(t, \tau) \in H_*^{(2-k)}(L \times L)$ , то для решений вспомогательных краевых задач Гильберта (2.10) и (2.11) будем иметь:  $\Phi_k^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2-k)}(L)$ ,  $k = 0, 1$  [1, с. 82]

Предположим, что задачи Гильберта (2.10) и (2.11) разрешимы и уже найдены аналитические функции  $\Phi_0^+(z)$  и  $\Phi_1^+(z)$ . Тогда, с учетом (2.8) и (2.9), для нахождения аналитических компонент искомой бианалитической функции (2.4) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} z\varphi_0(z) + \varphi_1(z) = \Phi_0^+(z), \\ z^2 \frac{d\varphi_0(z)}{dz} + z \frac{d\varphi_1(z)}{dz} + \varphi_1(z) = \Phi_1^+(z). \end{cases} \quad (2.13)$$

Решая систему (2.13) относительно  $\varphi_0(z)$ ,  $\varphi_1(z)$ , будем иметь:

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2z} \{ \Phi_0^+(z) - \Phi_1^+(z) \} + \frac{1}{2} \frac{d\Phi_0^+(z)}{dz}, \quad z \in T^+, \quad (2.14)$$

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2} \{ \Phi_0^+(z) + \Phi_1^+(z) \} - \frac{z}{2} \frac{d\Phi_0^+(z)}{dz}, \quad z \in T^+. \quad (2.15)$$

Как видно из формулы (2.14), для того чтобы функция  $\varphi_0(z)$  была аналитической в круге, решения краевых задач Гильберта (2.10) и (2.11) в точке  $z = 0$  должны удовлетворять следующему условию:

$$\Phi_0^+(0) = \Phi_1^+(0). \quad (2.16)$$

Наконец, подставив в правую часть формулы (2.4) вместо  $\varphi_0(z)$  и  $\varphi_1(z)$  их значения, найденные по формулам (2.14) и (2.15), получим решение исходной задачи  $\mathbf{GF}_{2,2}$  в виде

$$F^+(z) = \frac{\Phi_0^+(z) - \Phi_1^+(z)}{2z} + \frac{1}{2} \frac{d\Phi_0^+(z)}{dz} + \bar{z} \left\{ \frac{\Phi_0^+(z) + \Phi_1^+(z)}{2} - \frac{z}{2} \frac{d\Phi_0^+(z)}{dz} \right\}, \quad z \in T^+, \quad (2.17)$$

где  $\Phi_0^+(z)$  и  $\Phi_1^+(z)$  - решения краевых задач Гильберта (2.10) и (2.11), причем, в силу замечания 1, будем иметь:  $F^+(z) \in A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ .

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Если  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ , то решение задачи  $\mathbf{GF}_{2,2}$  сводится к решению двух обобщенных краевых задач Гильберта вида (2.10) и (2.11) относительно аналитических функций  $\Phi_0^+(z)$  и  $\Phi_1^+(z)$  соответственно. При этом задача  $\mathbf{GF}_{2,2}$  разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы задачи Гильберта (2.10), (2.11) и для решений этих задач выполняется условие (2.16).

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. - Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 344 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
3. Расулов К.М. О решении основных краевых задач типа Гильберта для полианалитических функций в многосвязных областях // Доклады АН Беларуси. - 1992. - Т. 36, № 9-10. - С. 782-785.

# ЗАДАЧА НЕЙМАНА В КЛАССЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕТВЕРТОГО РОДА В КРУГЕ

О.Н. КУПРИКОВА

Филиал МИИТ, г. Смоленск

Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым гладким замкнутым контуром  $L$ .

Известно [1; 2], что всякое регулярное в области  $T^+$  решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число, можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где  $A_k^n := (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z)$  – аналитическая (голоморфная) в области  $T^+$  функция.

Следуя [2], при  $n \geq 1$  регулярные в области  $T^+$  решения уравнения (1) будем называть *квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$* , а функцию  $\varphi^+(z)$  из представления (2) назовем *аналитической компонентой* соответствующей квазигармонической функции  $W(z)$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что квазигармоническая функция  $W(z)$  принадлежит классу  $C^m(T^+ + L)$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi^+(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача (см. также [2]).

**Задача N.** Требуется найти все квазигармонические функции рода  $n$  ( $n \geq 1$ ), принадлежащие классу  $C^{n+1}(T^+ + L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию:

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n} = g(t), \quad (3)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  – производная по внешней нормали к  $L$ , а  $g(t)$  – заданная на контуре  $L$  функция класса  $H(L)$  (т.е.  $g(t)$  удовлетворяет условию Гельдера на  $L$ ).

В дальнейшем (см. также [2]) задачу  $\mathbf{N}$  будем называть *задачей Неймана для квазигармонических функций рода  $n$* . Если в (3)  $g(t) \equiv 0$ , то получаем соответствующую *однородную задачу  $\mathbf{N}^0$* .

В данном сообщении разработан конструктивный метод решения краевой задачи  $\mathbf{N}$  в случае  $n = 4$  и  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ .

Легко проверить, что при  $n = 4$  представление (2) принимает вид

$$W(z) = \frac{d^4 \varphi^+(z)}{dz^4} - 20 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right) \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} + 180 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - \quad (5)$$

$$- 840 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^3 \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 1680 \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^4 \varphi^+(z),$$

где  $\varphi^+(z)$  – аналитическая в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  функция.

С учетом представления (5) и соотношения  $\frac{\partial}{\partial n} = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}$ , краевое условие (3) можно записать в виде

$$t^4 \frac{d^5 \varphi^+(t)}{dt^5} - 10t^3 \frac{d^4 \varphi^+(t)}{dt^4} + 45t^2 \frac{d^3 \varphi^+(t)}{dt^3} - 105t \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + 105 \frac{d\varphi^+(t)}{dt} = t^3 g(t). \quad (6)$$

Далее, на основе (6) устанавливаются следующие результаты.

**Лемма 1.** Если  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ , то общее решение однородной задачи Неймана  $\mathbf{N}^0$  в классе  $C^5(T^+ + L)$  квазигармонических функций рода  $n = 4$  можно задавать в виде

$$W_0(z) = \frac{C_0 \bar{z}^3 + (C_1 \bar{z}^2 + C_3 z^2)[3(1 - z\bar{z})^2 - 2z\bar{z}] + C_2 [(1 - z\bar{z})^4 - 12z\bar{z}(1 - z\bar{z})^2 + 6(z\bar{z})^2] + C_4 z^4}{(1 + z\bar{z})^3}, \quad (7)$$

где  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$  – произвольные комплексные постоянные.

**Теорема 1.** Если  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ , то неоднородная задача Неймана  $\mathbf{N}$  в классе  $C^5(T^+ + L)$  квазигармонических функций рода  $n = 4$  разрешима тогда и только тогда, когда  $g(t)$  удовлетворяет следующим условиям

$$\int_L g(t) \cdot t^{m-4} dt = 0, \quad m = 0, 2, 4, 6, 7, 8, \dots, \quad (8)$$

и

$$\left| -z \int \frac{g_1(z)}{z} dz + 3z^3 \int \frac{g_1(z)}{z^3} dz - 3z^5 \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + z^7 \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz \right| \leq \frac{M_1}{(1-r)^{1-\alpha_1}},$$

$$\left| -\int \frac{g_1(z)}{z} dz + 9z^2 \int \frac{g_1(z)}{z^3} dz - 15z^4 \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + 7z^6 \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz \right| \leq \frac{M_2}{(1-r)^{1-\alpha_2}},$$

$$\left| 18z \int \frac{g_1(z)}{z^3} dz - 60z^3 \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + 42z^5 \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz \right| \leq \frac{M_3}{(1-r)^{1-\alpha_3}}, \quad (9)$$

$$\left| 18 \int \frac{g_1(z)}{z^3} dz - 180z^2 \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + 210z^4 \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz \right| \leq \frac{M_4}{(1-r)^{1-\alpha_4}},$$

$$\left| 48 \frac{g_1(z)}{z^3} - 360z \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + 840z^3 \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz \right| \leq \frac{M_5}{(1-r)^{1-\alpha_5}},$$

$$\left| 336 \frac{g_1(z)}{z^4} + 48 \frac{g_1'(z)}{z^3} - 360 \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + 2520z^2 \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz \right| \leq \frac{M_6}{(1-r)^{1-\alpha_6}},$$

где  $g_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^3 g(t)}{t-z} dt$ ,  $r = |z|$ , а  $M_k, \alpha_k$  ( $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) - некоторые положительные постоянные, причем  $0 < \alpha_k \leq 1$ . При выполнении условий (8) и (9) общее решение неоднородной задачи  $\mathbf{N}$  можно задавать в виде

$$\begin{aligned} W(z) = & W_0(z) + 18 \int \frac{g_1(z)}{z^3} dz - 180z^2 \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + 210z^4 \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz - \\ & - \frac{20\bar{z}}{1+z\bar{z}} \left\{ 18z \int \frac{g_1(z)}{z^3} dz - 60z^3 \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + 42z^5 \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz \right\} + \\ & + \frac{180\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2} \left\{ - \int \frac{g_1(z)}{z} dz + 9z^2 \int \frac{g_1(z)}{z^3} dz - 15z^4 \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + 7z^6 \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz \right\} - \\ & - \frac{840\bar{z}^3}{(1+z\bar{z})^3} \left\{ -z \int \frac{g_1(z)}{z} dz + 3z^3 \int \frac{g_1(z)}{z^3} dz - 3z^5 \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + z^7 \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz \right\} + \\ & + \frac{1680\bar{z}^4}{(1+z\bar{z})^4} \left\{ \frac{1}{8} \int z g_1(z) dz - \frac{z^2}{2} \int \frac{g_1(z)}{z} dz + \frac{3z^4}{4} \int \frac{g_1(z)}{z^3} dz - \frac{z^6}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^5} dz + \frac{z^8}{8} \int \frac{g_1(z)}{z^7} dz \right\}; \end{aligned}$$

где  $W_0(z)$  - функция, задаваемая формулой (7), а  $\int z g_1(z) dz$ ,  $\int \frac{g_1(z)}{z} dz$ ,  $\int \frac{g_1(z)}{z^3} dz$ ,  $\int \frac{g_1(z)}{z^5} dz$ ,  $\int \frac{g_1(z)}{z^7} dz$  - фиксированные первообразные мероморфных в круге  $T^+$  функций  $z g_1(z)$ ,  $\frac{g_1(z)}{z}$ ,  $\frac{g_1(z)}{z^3}$ ,  $\frac{g_1(z)}{z^5}$  и  $\frac{g_1(z)}{z^7}$  соответственно.

### Литература

1. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung  $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math / Schriften 23 (1965).

2. Куприкова О.Н., Расулов К.М. О задаче типа Неймана в классе квазигармонических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Вып. 12. СмолГУ. – Смоленск, 2011. – С. 206–212.

# ОЦЕНКА МОДУЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ВЕСОВОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА О. БЕСОВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

**С.М. КУРИЛЕНКО**

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского, г. Брянск  
e-mail: SergKurilenko@gmail.com

Пусть  $C^n$  –  $n$ -мерное комплексное пространство,  $B_n$  – единичный шар в  $C^n$ , т.е.  $B_n = \{z \in C^n : |z| < 1\}$ . Обозначим через  $H(B_n)$  множество всех голоморфных в шаре  $B_n$  функций. Известно, что если  $f \in H(B_n)$ , то  $f$  представима в виде  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ , где  $f_k(z)$  – однородные многочлены от  $z_1 \dots z_n$  степени  $k$ .

Дробной производной в смысле Римана-Лиувилля порядка  $\beta$  назовем следующую аналитическую функцию

$$D^\beta f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+k)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)} f_k(z).$$

Будем говорить, что положительная суммируемая на интервале  $(0,1)$  функция  $\omega$  принадлежит классу  $\Omega$ , если для нее существуют числа  $m_\omega, M_\omega, q_\omega$ , причем  $m_\omega, q_\omega \in (0,1)$ , такие, что  $m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega$  для всех  $r \in (0,1), \lambda \in [q_\omega, 1]$ .

$\omega$ -весовым пространством Лебега назовем пространство с нормой

$$\|f\|_{L_{\alpha}^{p,q}(\omega)} = \left( \int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^\alpha \left( \int_{S_n} |D^t f(z)|^p d\sigma(z) \right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1} dr \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Скажем, что функция  $f$  принадлежит весовому аналитическому пространству О. Бесова в единичном шаре  $B_s^{p,q}(\omega)$ , если

$$(1-|z|^2)^N \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z), \quad |m| = N$$

принадлежит пространству  $L_{-(qs+1)}^{p,q}(\omega)$  для любого положительного  $N > s$  в этом шаре.

В работе [4] показано, что для описания весового аналитического пространства О. Бесова можно использовать следующую норму, включающую производную Римана-Лиувилля необязательно целого порядка:

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\omega)} = \left( \int_0^1 (1-r)^{tq} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{qs+1}} \left( \int_{S_n} |D^t f(z)|^p d\sigma(z) \right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1} dr \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ где } t > s.$$

Для функций из данного пространства нами установлена следующая оценка.

**Теорема.** Пусть  $\omega \in \Omega$  и  $f \in B_{p,q}^s(\omega)$  для некоторых  $p$  и  $q$ , тогда

$$|D^t f(z)| \leq c \frac{\|f\|_{B_{p,q}^s(\omega)} (1-r)^{s-t+\frac{1}{p}-\frac{2n}{q}}}{\omega^{\frac{1}{q}}(1-r)}.$$

В работе мы использовали методы и результаты из работ [1; 2; 5]. Отметим, что в работе [5] представлен частный случай наших результатов для пространств  $B^p(\omega)$  (в случае  $q=p$ ,  $t=1$  и  $s=n/q$ ).

### Литература

1. Антоненкова О.Е., Шамоян Ф.А. Преобразование Коши линейных непрерывных функционалов и проекторы в весовых пространствах аналитических функций // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46, № 6. – С. 1208–1234.
2. Шамоян Ф.А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31, № 2. – С. 197–215.
3. Kehe Zhu. Spaces of holomorphic functions in the unit ball. – Springer, 2004.
4. Куриленко С.М. О некоторых задачах в весовых аналитических пространствах Бесова в единичном шаре // Сборник трудов XIII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения». – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2012. – Вып. 13.
5. Harutyunyan A.V., Lusky W.  $\omega$ -weighted holomorphic Besov spaces on the unit ball in  $C^n$  // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 2011. – Vol. 52, issue 1. – P. 37–56.

## ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.Ю. КУРИЦЫН, К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

**Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым замкнутым гладким контуром  $L$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ .

Напомним [1, с. 139], что *кусочно метааналитической функцией с линией скачков*  $L$  будем называть функцию  $F(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , которая в двух дополняющих друг друга до расширенной комплексной плоскости областях  $T^+$  и  $T^-$  определяется так:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)] \exp\{\lambda\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)] \exp\left\{\lambda\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (1)$$

или

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) \exp\{\lambda_1\bar{z}\} + \varphi_1^+(z) \exp\{\lambda_2\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) \exp\left\{\lambda_0\frac{\bar{z}}{z^m}\right\} + \varphi_1^-(z) \exp\left\{\lambda_1\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varphi_k^\pm(z) \in A(T^\pm)$ ,  $k = 0, 1$ , а  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda$  – некоторые постоянные ( $\lambda_0 \neq \lambda_1$ ), причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

Обычно функцию  $F(z)$ , задаваемую формулой (1), называют *кусочно метааналитической функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулой (2), – *кусочно метааналитической функцией второго типа*.

Кроме того, кусочно метааналитическую функцию  $F(z)$  вида (1) (или (2)) будем называть *исчезающей на бесконечности*, если  $\prod\{\varphi_k^-, \infty\} \geq k+1$  (или  $\prod\{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1$ ), где  $k = 0, 1$ .

Наконец, будем говорить, что кусочно метааналитическая функция  $F(z)$  с линией скачков  $L$  принадлежит классу  $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$ , если ее аналитические компоненты  $\varphi_k^\pm(z)$  ( $k = 0, 1$ ) непрерывно продолжаются на границу  $L$  вместе со своими производными  $\frac{d\varphi_k^\pm(z)}{dz}$  ( $k = 0, 1$ ), причем так, что граничные значения функций  $\varphi_k^\pm(z)$  ( $k = 0, 1$ ) и указанных производных удовлетворяют на  $L$  условию Гёльдера.

Рассматривается следующая краевая задача [1, с. 141]. *Требуется найти все кусочно метааналитические функции  $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$  класса  $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$ , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на  $L$  следующим краевым условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} - G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \int_L A_1(t, \tau) \frac{\partial^k F^+(\tau)}{\partial x} d\tau + \int_L B_1(t, \tau) \frac{\partial^k F^+(\tau)}{\partial x} d\tau = g_1(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} - G_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + \int_L A_2(t, \tau) \frac{\partial^k F^+(\tau)}{\partial y} d\tau + \int_L B_2(t, \tau) \frac{\partial^k F^-(\tau)}{\partial y} d\tau = ig_2(t), \quad (4)$$

где  $G_k(t)$ ,  $g_k(t)$  ( $k=1, 2$ ) – заданные на  $L$  функции класса  $H^{(1)}(L)$ , причем  $G_k(t) \neq 0$ , а  $A_k(t, \tau)$ ,  $B_k(t, \tau)$  ( $k=1, 2$ ) – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу  $H_*^{(1)}(L \times L)$ .

В равенстве (4) множитель  $i$  при  $g_2(t)$  введен для удобства в дальнейших обозначениях.

Для определенности и без ограничения общности искомые функции  $F^+(z)$  подчиним дополнительному условию [1, с. 85]:

$$F^+(0) = 0. \quad (5)$$

Следуя [1], сформулированную выше краевую задачу будем называть *первой основной обобщенной краевой задачей типа Римана в классах метааналитических функций* или, короче, *задачей  $GR_{1,M}$* , а соответствующую однородную задачу ( $g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$ ) – *задачей  $GR_{1,M}^0$* .

Отметим, что в частном случае, когда на  $L$  выполняются условия

$$A_k(t, \tau) \equiv B_k(t, \tau) \equiv 0 \quad (k=0, 1), \quad (6)$$

задача  $GR_{1,M}$  подробно исследована в работах К.М. Расулова (см. [1] и имеющуюся там библиографию).

В данном сообщении предлагается конструктивный метод решения задачи  $GR_{1,M}$  в классах кусочно метааналитических функций с линией скачков  $L$  в случае, когда  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  и  $L = \{t : |t| = 1\}$ .

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. - Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 344 с.

## ОБ ОДНОЙ ВИДОИЗМЕНЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ, А.Н. КОМИССАРОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым гладким замкнутым контуром  $L$ . Область, дополняющую  $T^+ \cup L$  до полной плоскости, обозначим через  $T^-$  и будем считать, что начало координат находится в  $T^+$ .

**Определение 1.** Пусть  $n$  - неотрицательное целое число. Будем говорить, что кусочно аналитическая функция  $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$  с линией скачков  $L$  принадлежит классу  $A(T^\pm) \cap H^{(n)}(L)$ , если функции  $F^+(z)$  и  $F^-(z)$  непрерывно продолжаются на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $n$  включительно, причем так, что граничные значения этих функций и всех указанных производных удовлетворяют на  $L$  условию Гельдера, т.е.  $F^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ , а  $F^-(z) \in A(T^-) \cap H^{(n)}(L)$ . В частности, при  $n=0$  вместо  $A(T^\pm) \cap H^{(0)}(L)$  будем писать так:  $A(T^\pm) \cap H(L)$ .

Напомним [1], что квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$  называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n$  - некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1], что всякую квазигармоническую функцию рода  $n$  в области  $T^+$  можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где  $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z)$  - аналитическая в области  $T^+$  функция, называемая аналитической компонентой квазигармонической функции  $W(z)$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что квазигармоническая функция  $W(z)$  принадлежит классу  $C^m(T^+ + L)$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , где  $m$  - некоторое фиксированное неотрицательное целое число.

Рассматривается следующая краевая задача (см. также [1]).

**Задача  $GN_n$ .** Требуется найти все квазигармонические функции рода  $n$  ( $n \geq 1$ ), принадлежащие классу  $C^{n+1}(T^+ + L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию:

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n} + G(t) \overline{W(t)} = g(t), \quad (3)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  - производная по внешней нормали к  $L$ , а  $G(t)$  и  $g(t)$  - заданные на контуре  $L$  функции класса  $H^{(1)}(L)$  (т.е. удовлетворяющие на  $L$  условию Гельдера вместе со своими производными первого порядка).

В дальнейшем краевую задачу  $\mathbf{GN}_n$  будем называть *видоизмененной задачей типа Неймана для квазигармонических функций рода  $n$* . Если в (3)  $g(t) \equiv 0$ , то получаем соответствующую  $\mathbf{GN}_n$  однородную задачу  $\mathbf{GN}_n^0$ .

В работе [1] одного из авторов был разработан конструктивный метод решения задачи  $\mathbf{GN}_n$  в случае, когда  $n=1$  и  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ . Основной целью настоящей заметки является обобщение результатов работы [1] на случай  $n=3$ .

Из представления (2) при  $n=3$  получаем, что произвольную квазигармоническую функцию  $W(z)$  третьего рода, принадлежащую классу  $C^4(T^+ + L)$ , можно задавать так:

$$W(z) = \frac{d^3\varphi^+(z)}{dz^3} - \frac{12\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{60\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{120\bar{z}^3}{(1+z\bar{z})^3} \varphi^+(z), \quad (4)$$

где  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(4)}(L)$ .

С учетом представления (4) и соотношения [4, с. 304]

$$\frac{\partial}{\partial n} = -i \left( t' \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad (5)$$

краевое условие (3) можно переписать в виде

$$t^3 \frac{d^4\varphi^+(t)}{dt^4} - 6t^2 \frac{d^3\varphi^+(t)}{dt^3} + 15t \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - 15 \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \\ + t^2 G(t) \left( \overline{\frac{d^3\varphi^+(t)}{dt^3}} - 6t \overline{\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2}} + 15t^2 \overline{\frac{d\varphi^+(t)}{dt}} - 15t^3 \overline{\varphi^+(t)} \right) = t^2 g(t), \quad t \in L. \quad (6)$$

Далее, методом доопределения по симметрии (см., например, [2], с. 97) построим кусочно аналитическую функцию  $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$  с линией скачков  $L$ , где

$$\varphi^-(z) = \overline{\varphi^+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad z \in T^-. \quad (7)$$

**Замечание 1.** Нетрудно проверить, что в точках окружности  $L$  граничные значения функций  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  должны удовлетворять следующим условиям «симметрии»:

$$\overline{\varphi^+(t)} = \varphi^-(t), \quad \overline{\frac{d\varphi^+(t)}{dt}} = -t^2 \frac{d\varphi^-(t)}{dt}, \quad \overline{\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2}} = 2t^3 \frac{d\varphi^-(t)}{dt} + t^4 \frac{d^2\varphi^-(t)}{dt^2}, \quad (8) \\ \overline{\frac{d^3\varphi^+(t)}{dt^3}} = -6t^4 \frac{d\varphi^-(t)}{dt} - 6t^5 \frac{d^2\varphi^-(t)}{dt^2} - t^6 \frac{d^3\varphi^-(t)}{dt^3}, \quad t \in L.$$

С учетом (8) краевое условие (6) примет вид:

$$t^3 \frac{d^4 \varphi^+(t)}{dt^4} - 6t^2 \frac{d^3 \varphi^+(t)}{dt^3} + 15t \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} - 15 \frac{d\varphi^+(t)}{dt} =$$

$$= t^5 G(t) \left( t^3 \frac{d^3 \varphi^-(t)}{dt^3} + 12t^2 \frac{d^2 \varphi^-(t)}{dt^2} + 33t \frac{d\varphi^-(t)}{dt} + 15\varphi^-(t) \right) = t^2 g(t), \quad t \in L. \quad (9)$$

Равенство (9) есть краевое условие *обобщенной (дифференциальной) задачи Римана* относительно кусочно-аналитической функции  $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$  с линией скачков  $L$ , которая в общем случае решается методом интегральных уравнений (см, например, §36 монографии [2]).

В данной работе предлагается более эффективный способ решения краевой задачи (9), суть которого состоит в сведении решения этой задачи к последовательному решению *обычной* (не обобщенной) краевой задачи Римана в классе кусочно аналитических функций с линией скачков  $L$  и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера 3-го порядка.

### Литература

1. Расулов К.М. О краевой задаче типа Неймана в классах квазигармонических функций в круге // *Веснік Гродзенскага Дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка.* – Гродно, 2011. № 3(118). – С. 30–40.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

## О РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

К.М. РАСУЛОВ, А.Н. СИМАХОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым гладким замкнутым контуром  $L$ . Область, дополняющую  $T^+ \cup L$  до полной плоскости, обозначим через  $T^-$  и будем считать, что начало координат находится в  $T^+$ .

Напомним [1; 2], что *квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$*  называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+zz)^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n$  – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1–3], что всякую квазигармоническую функцию рода  $n$  в области  $T^+$  можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где  $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z)$  – аналитическая в области  $T^+$  функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции  $W(z)$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что квазигармоническая функция  $W(z)$  принадлежит классу  $C^m(T^+ + L)$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , где  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число.

Рассматривается следующая краевая задача (см. также [3]).

**Задача  $GD_n$ .** Требуется найти все квазигармонические функции рода  $n$  ( $n \geq 1$ ), принадлежащие классу  $C^{n+1}(T^+ + L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию:

$$W(t) + G(t)\overline{W(t)} = g(t), \quad (3)$$

где  $G(t)$  и  $g(t)$  – заданные на контуре  $L$  функции класса Гельдера  $H(L)$ .

Следуя [3], краевую задачу  $DN_n$  будем называть *видоизмененной задачей Дирихле для квазигармонических функций рода  $n$* . Если в (3)  $g(t) \equiv 0$ , то получаем соответствующую  $DN_n$  *однородную задачу  $DN_n^0$* .

В работе [3] задача  $DN_n$  была решена в случае, когда  $n=1$  и  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ . Основной целью настоящего сообщения является обобщение результатов работы [2] на случай  $n=2$ . А именно, устанавливается следующий основной результат.

**Теорема.** Если  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  и  $G(t) \neq 0$ , то решение видоизмененной задачи Дирихле  $DN_2$  в классе  $C^2(T^+ + L)$  квазигармонических функций второго рода сводится к последовательному решению задачи Римана для аналитических функций и линейного дифференциального уравнения Эйлера второго порядка.

## Литература

1. Расулов К.М. О краевой задаче типа Неймана в классах квазигармонических функций в круге // Веснік Гродзенскага Дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка. – Гродно, 2011. № 3(118). – С. 30–40.

2. Куприкова О.Н., Расулов К.М. О задаче типа Неймана в классе квазигармонических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Вып. 12. / СмолГУ. — Смоленск, 2011. — С. 206–212.

3. Расулов К.М. О решении краевой задачи типа Дирихле для уравнения Бауэра-Пешля первой степени // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям / Смоленск. гос. ун-т. – Смоленск, 2007.– Вып. 8. – С. 62–70.

## О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ, А.М. ТИМОТИН

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

**Постановка задачи.** Пусть  $L$  – произвольный простой гладкий замкнутый конечный контур на полной плоскости  $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$  комплексной переменной  $z = x + iy$ , ограничивающий внутреннюю область  $T^+$ , содержащую начало координат, и внешнюю область  $T^-$ , содержащую бесконечно удалённую точку  $z = \infty$ . Положительным направлением обхода контура  $L$  будем считать то, которое оставляет область  $T^+$  слева.

Далее в основном будем использовать термины и обозначения, принятые в монографиях [1] и [2].

Рассмотрим следующую задачу. *Требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно бианалитические функции  $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$  класса  $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$ , граничные значения производных которых удовлетворяют на  $L$  следующим условиям:*

$$A_1(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + B_1(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} + C_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + D_1(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial x} = f_1(t), \quad (1)$$

$$A_2(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial y} + B_2(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} + C_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + D_2(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial y} = i \cdot f_2(t), \quad (2)$$

где  $L \in C_\mu^2$ ;  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$ ,  $C_k(t)$ ,  $D_k(t)$ ,  $f_k(t)$  ( $k = 1, 2$ ) – заданные функции класса  $H^{(3-k)}(L)$ ;  $\alpha(t)$  – функция прямого или обратного сдвига контура  $L$ , принадлежащая классу  $H^{(2)}(L)$  и удовлетворяющая условию Карлемана  $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ ,  $t \in L$ ;  $i$  – мнимая единица, введенная для удобства в дальнейших обозначениях.

Следуя [3], сформулированную краевую задачу будем называть *первой четырёхэлементной краевой задачей типа Римана со сдвигом Карлемана для бианалитических функций* или, короче, *задачей  $\mathbf{RG}_{41}$* , а соответствующую ей *однородную задачу* ( $f_{11}(t) = f_{12}(t) \equiv 0$ ) – *задачей  $\mathbf{RG}_{41}^0$* .

Для определённости постановки задачи  $\mathbf{RG}_{41}$  искомые функции  $F^+(z)$  подчиним дополнительному условию [1, с. 85]:

$$F^+(0) = 0. \quad (3)$$

Основной целью настоящего сообщения является построение конструктивного алгоритма решения задачи  $\mathbf{RG}_{41}$ , когда коэффициенты краевых условий (1) и (2) удовлетворяют на  $L$  следующим дополнительным условиям:

$$B_{12}(t) \neq 0 \text{ и } D_{12}(t) \neq 0, \quad (4)$$

$$\Delta_{01}(t) = B_{11}(t)D_{11}[\alpha(t)] - C_{11}(t)A_{11}[\alpha(t)] \neq 0, \quad (5)$$

$$V_1(t) = B_{11}(t)C_{11}[\alpha(t)] - D_{11}(t)A_{11}[\alpha(t)] \equiv 0, \quad (6)$$

а также

$$\Delta_{12}(t) = C_{12}(t)C_{12}[\alpha(t)] - D_{12}(t)D_{12}[\alpha(t)] \neq 0, \quad (7)$$

$$\Delta_{22}(t) = A_{12}(t)A_{12}[\alpha(t)] - B_{12}(t)B_{12}[\alpha(t)] \neq 0, \quad (8)$$

если  $\alpha(t)$  – *прямой сдвиг*,

или

$$\Delta_{02}(t) = B_{12}(t)D_{12}[\alpha(t)] - C_{12}(t)A_{12}[\alpha(t)] \neq 0, \quad (9)$$

если  $\alpha(t)$  – *обратный сдвиг*.

### Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. - Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 344 с.
2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
3. Расулов К.М., Трощенко С.В. О решении некоторых четырёхэлементных краевых задач со сдвигом Карлемана для бианалитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы науч. конф. / Смоленский гос. пед. ун-т. – Смоленск, 2004. – С. 159–165.

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Г.С. РОДИОНОВА

Смоленский колледж телекоммуникаций, г. Смоленск

**Постановка задачи.** Если некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \text{ где } i = 1, 2, \dots, n$$

с начальными условиями, которые обычно являются результатами измерений и, следовательно, неизбежно получены с некоторой погрешностью, то естественно возникает вопрос о влиянии малого изменения начальных значений (измерений) на искомое решение.

Если окажется, что сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то решение, определяемое выбранными нами неточными начальными данными, обычно не имеет никакого прикладного значения и даже приближенно не может описывать изучаемое явление.

Чаще всего используются приближенные методы решения. Не влияют ли эти приближения на общее решение системы и исход всей задачи?

Если  $t$  меняется на конечном отрезке, то ответ на этот вопрос дает *теорема о непрерывной зависимости решений от начальных значений*. Если же  $t$  может принимать сколь угодно большие значения, то этим вопросом занимается *теория устойчивости* [2; 3].

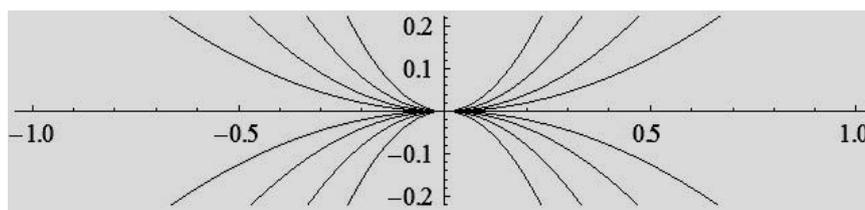


Рис. А. Решения невозмущенной системы

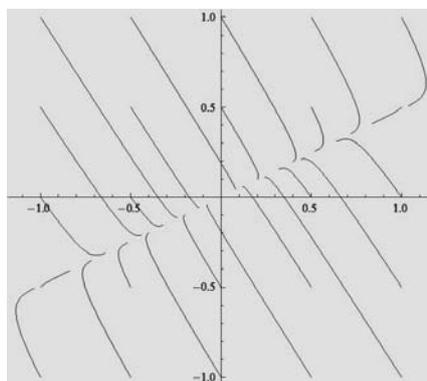


Рис. Б. Картина решений возмущенной системы (приближения вызвали неустойчивость)

Как видно из рисунков А–Б, линейная система дифференциальных уравнений двух переменных под действием возмущений поменяла характер решения из устойчивого в неустойчивый узел.

## 2. Изменение характера решений под действием небольших или малых возмущений.

**Определение 2.1.** Систему вида

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = a_{21}x + a_{22}y; \end{cases} \quad (1)$$

будем называть линейной системой однородных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка двух переменных, где  $a_{ij}$  – вещественные постоянные.

**Теорема 2.1** (необходимое условие асимптотической устойчивости). *Рассмотрим неустойчивую систему вида (1) с матрицей постоянных коэффициентов  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , предположим, что под воздействием возмущений  $q_j, p_j$  система (1) имеет матрицу*

*коэффициентов  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} + q_1 & a_{12} + q_2 \\ a_{21} + p_1 & a_{22} + p_2 \end{pmatrix}$ , обозначим через  $\Delta = |\tilde{A}|$*

*определитель матрицы  $\tilde{A}$ , а через  $S$  сумму элементов по главной диагонали матрицы  $\tilde{A}$ :  $S = (a_{11} + q_1) + (a_{22} + p_2)$ , то неустойчивая система переходит в асимптотически устойчивую систему, если выполняются следующие условия:*

- 1)  $S < 0$ ;
- 2)  $\Delta > 0$ .

**Теорема 2.2** (необходимое условие устойчивости). *Рассмотрим неустойчивую систему вида (1), и обозначения из теоремы 2.1, то неустойчивая система переходит в асимптотически устойчивую систему, если выполнится одна из трех групп условий:*

- 1)  $S = 0, \Delta > 0$

*или условия:*

- 2)  $S < 0, \Delta = 0$

*или условия:*

- 3)  $S = 0, \Delta = 0$

**Замечание 2.1.** (необходимое условие неустойчивости). Во всех остальных случаях, не описанных в условиях (2) и (3), устойчивая система вида (1) под воздействием возмущений  $q_i, p_j$  на коэффициенты системы перейдет в неустойчивое состояние.

**Замечание 2.2.** Если в формулировке теорем 2.1 и 2.2 в качестве возмущений брать функции от аргумента  $t$ , которые не превосходят по модулю коэффициенты  $q_1, q_2$  и  $p_1, p_2$  соответственно, то утверждения теорем останутся справедливыми.

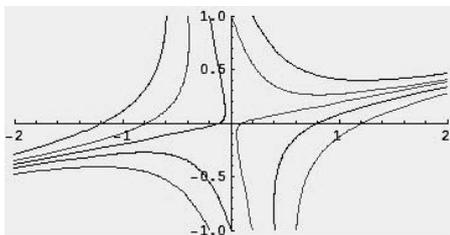


Рис. В

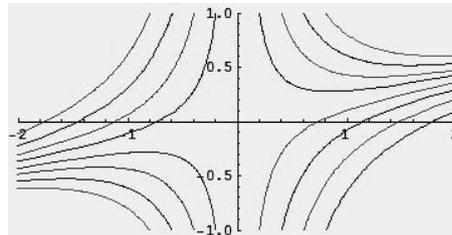


Рис. Г

Рис.В – фазовый портрет решений неустойчивой системы, возмущенной коэффициентами; Рис. Г. – фазовый портрет решений неустойчивой системы, возмущенной функциями.

### Литература

1. Тихонов А.Н., Ильина В.Л., Свешников А.Г. Курс высшей математики и математической физики. Вып. № 7: Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 231 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М.: Наука, 1969. – 425 с.
3. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – М.: Наука и Техника, 1979. – 745 с.

## НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

**И.В. ТИХОНОВ**

МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва  
e-mail: ivtikh@mail.ru

Известно [1], что вопрос единственности решения в некоторых неклассических задачах для абстрактных дифференциальных уравнений допускает полное описание в терминах распределения нулей *характеристических функций*, т. е. специальных целых функций переменной  $\lambda \in \mathbb{C}$ , естественно связанных с изучаемыми задачами. Для уравнений высокого порядка характеристические функции часто выражаются через целые функции Миттаг-Леффлера:

$$E_\rho(\lambda; \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{\Gamma(\mu + m/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Интерес к функциям  $E_\rho(\lambda; \mu)$  заметно оживился в последнее время [2]. Новые достижения имеют перспективные приложения в теории неклассических задач для абстрактных дифференциальных уравнений.

Укажем два типичных примера. Поскольку речь идет о единственности решения, ограничимся однородными версиями соответствующих линейных задач.

Пусть в банаховом пространстве  $E$  задан линейный замкнутый оператор  $A$  с областью определения  $D(A) \subset E$ , не обязательно плотной в  $E$ . Других ограничений на  $A$  не налагается. Зафиксируем натуральное  $n \geq 1$ , вещественное  $T > 0$  и рассмотрим на  $[0, T]$  следующую модельную обратную задачу:

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t) + g, \quad u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-1)}(0) = 0, \quad u(T) = 0, \quad (1)$$

с неизвестной функцией  $u: [0, T] \rightarrow E$  и неизвестным элементом  $g \in E$ . Подобные задачи активно изучались для уравнений первого и второго порядков ( $n = 1$  и  $n = 2$ ) при тех или иных ограничениях на оператор  $A$ . Оказалось, ограничения нужны не всегда. В работе [3] указан общий критерий единственности решения, использующий лишь собственные значения оператора  $A$  и нули характеристической функции

$$Y_n(\lambda) \equiv \frac{1}{n!} + \frac{\lambda}{(2n)!} + \frac{\lambda^2}{(3n)!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(mn+n)!}, \quad (2)$$

где  $n$  совпадает с порядком уравнения в задаче (1).

**Теорема 1.** Пусть  $n \geq 1$  и  $A$  – линейный замкнутый оператор в  $E$ . Пусть  $\Lambda(Y_n) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : Y_n(\lambda) = 0\}$  – множество всех нулей  $\lambda = \lambda_{n,k}$  характеристической функции (2), занумерованных счетным индексом  $k \in K_n \subset \mathbb{Z}$  (без учета кратности). Для того чтобы однородная обратная задача (1) имела на  $[0, T]$  только тривиальное решение  $u(t) \equiv 0$ ,  $g = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел  $\lambda_{n,k}/T^n$ ,  $k \in K_n$ , не являлось собственным значением оператора  $A$ .

Поскольку  $Y_n(\lambda) = E_{1/n}(\lambda; n+1)$ , то (2) принадлежит к классу целых функций типа Миттаг-Леффлера. При  $n = 1$  и  $n = 2$  ситуация с нулями элементарна:

$$Y_1(\lambda) = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda}, \quad \Lambda(Y_1) = \{2k\pi i : k = \pm 1, \pm 2, \dots\};$$

$$Y_2(\lambda) = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda}, \quad \Lambda(Y_2) = \{-4k^2\pi^2 : k = 1, 2, \dots\};$$

далее картина усложняется. В полном объеме вопрос о нулях разобран в [2, гл. 3], где показано, что при  $n \geq 3$  все нули функции  $Y_n(\lambda)$  являются вещественными, отрицательными и простыми. Отсюда следует удобный достаточный признак единственности решения для задачи (1).

**Теорема 2.** Пусть  $n \geq 2$  и  $A$  – линейный замкнутый оператор в  $E$ , не имеющий вещественных отрицательных собственных значений. Тогда однородная обратная задача (1) имеет на  $[0, T]$  только тривиальное решение  $u(t) \equiv 0$ ,  $g = 0$ .

Близкими методами исследуется краевая задача, названная в [4] обобщенной задачей Уорда:

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t), \quad u^{(j)}(0) = 0, \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{p\}, \quad u^{(q)}(T) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $n \geq 3$ ,  $p, q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  – фиксированные числа. Название «задача Уорда» объясняется тем, что подобное сочетание краевых условий (в частном случае  $p = n-1$ ,  $q = 0$ ) встречалось в работе Уорда [5], сыгравшей заметную роль в спектральной теории.

При исследовании общей задачи (3) важна разность  $d = p - q$ . С ее помощью вводится характеристическая функция

$$Y_{n,d}(\lambda) \equiv \frac{1}{d!} + \frac{\lambda}{(n+d)!} + \frac{\lambda^2}{(2n+d)!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(mn+d)!}. \quad (4)$$

Справедлив следующий критерий единственности.

**Теорема 3.** Пусть  $n \geq 3$  и  $A$  – линейный замкнутый оператор в  $E$ . Пусть  $\Lambda(Y_{n,d}) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : Y_{n,d}(\lambda) = 0\}$  – множество всех нулей  $\lambda = \lambda_{n,d,k}$  характеристической функции (4), занумерованных счетным индексом  $k \in \mathbb{K}_{n,d} \subset \mathbb{Z}$  (без учета кратности). Для того чтобы однородная краевая задача (3) имела на  $[0, T]$  только тривиальное решение  $u(t) \equiv 0$ , необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел  $\lambda_{n,d,k}/T^n$ ,  $k \in \mathbb{K}_{n,d}$ , не являлось собственным значением оператора  $A$ .

Отметим, что целая функция  $Y_{n,d}(\lambda)$  имеет порядок  $\rho = 1/n \leq 1/3$  и также относится к функциям типа Миттаг-Леффлера. Точнее  $Y_{n,d}(\lambda) = E_{1/n}(\lambda; d+1)$ . Как следует из результатов [2, гл. 3], все нули  $Y_{n,d}(\lambda)$  являются вещественными, неположительными и простыми (значение  $\lambda = 0$  возникает, если  $p < q$ ). Известны случаи, когда все нули находятся явно. Например,

$$\Lambda(Y_{4,d}) = \left\{ -4\pi^4 \left( k - \frac{1}{2} + \frac{d}{4} \right)^4 : k = 1, 2, \dots \right\}$$

для  $d = 0, \pm 2$ . Было бы интересно дать полное описание всех таких «элементарных» ситуаций.

## Литература

1. Тихонов И.В. Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 29.10.08. – М., 2008. – 283 с.
2. Попов А.Ю., Седлецкий А.М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 40. – М.: РУДН, 2011. – С. 3–171.
3. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференциальные уравнения. – Т. 38, № 5. С. 637–644 (2002).
4. Тихонов И.В. Обобщенная задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – Т. 41. – № 3. С. 325–336 (2005).
5. Ward L.E. An irregular boundary value and expansion problem. *Annals of Math.* 1924. – Vol. 26, № 1–2. – P. 21–36.

## ДИАГОНАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИДИСКЕ ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Ф.А. ШАМОЯН<sup>1</sup>, Е.В. ПОВПРИЦ<sup>2</sup>

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского, г. Брянск  
<sup>1</sup>e-mail: shamoyanfa@yandex.ru, <sup>2</sup>e-mail: mishinae.v@yandex.ru

В данной работе мы исследуем диагональное отображение в весовых анизотропных пространствах аналитических в поликруге функций со смешанной нормой. Проблема о характеристике сужения функции из класса Харди  $H^p(U^n)$  на диагонали  $U^n$  была поставлена в хорошо известной монографии [1]. Полное решение этой задачи впервые было получено первым автором в работе [2]. Частичные результаты в этом направлении, независимо от Ф.А. Шамояна, были получены в работах [3 – 5]. В дальнейшем этот же метод был применен для характеристики сужения функций из анизотропных пространств голоморфных в полидиске функций (см. [6]). В работе [7], с применением других методов было получено решение задачи о диагональном отображении в весовых пространствах со смешанной нормой. Однако применяемые в работе [7] методы не проходят в случае общих весов. В данной заметке мы покажем, что разработанные ранее методы из работ [2; 6; 8] позволяют получить решение рассматриваемой задачи о диагональном отображении в весовых пространствах со смешанной нормой в случае общих весов. Заметим, что при доказательстве установленной теоремы применяются также некоторые

результаты из работы [9]. Отметим, что применяемые нами методы существенно проще, чем методы из работы [7].

Для формулировки основного результата введем следующие обозначения.

Пусть  $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n, |z_j| < 1, 1 \leq j \leq n\}$  – единичный полидиск  $n$ -мерного комплексного пространства  $C^n$ ,

$$T^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n, |z_j| = 1, 1 \leq j \leq n\}$$

есть его остов,  $H(U^n)$  – множество всех аналитических в  $U^n$  функций,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  – некоторая вектор-функция, заданная на  $Q_n = [0; 1]^n$ .

Обозначим через  $\Omega$  множество всех положительных функций  $\omega$ , суммируемых на интервале  $(0; 1)$ , для которых существуют положительные числа  $m_\omega, M_\omega, q_\omega$  и  $m_\omega, q_\omega \in (0; 1)$  такие, что

$$m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega, \quad \forall r \in (0; 1), \quad \lambda \in [q_\omega; 1].$$

Если  $z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n$ ,  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in C^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$ , тогда

$$z^\alpha := z^{\alpha_1}, \dots, z^{\alpha_n}, |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n, (1 - |z|^2)^\alpha := \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^{\alpha_j}, (1 - \zeta z)^{\alpha+2} := \prod_{j=1}^n (1 - \zeta_j z_j)^{\alpha_j+2},$$

а также если  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , тогда

$$\omega_{\Pi}(1-r) := \prod_{j=1}^n \omega_j(1-r_j), \quad \omega_{\Pi}^s(1-r) := \prod_{j=1}^n \omega_j^s(1-r_j), \quad r = (r_1, \dots, r_n) \in Q_n, \quad \forall s \in R.$$

Обозначим через  $L_\omega^{p,q}(U^n)$  класс измеримых по Лебегу в  $U^n$  функций  $f$ , для которых

$$\|f\|_{L_\omega^{p,q}} = \left( \int_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r) \left( \int_{T^n} |f(rw)|^p dm_n(w) \right)^{\frac{q}{p}} dr \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty, \quad 0 < p, q < +\infty,$$

где  $dm_n$  есть мера Лебега на  $T^n$ .

Положим  $A_\omega^{p,q}(U^n) = L_\omega^{p,q}(U^n) \cap H(U^n)$  с соответствующей квазинормой.

Пусть  $f \in A_\omega^{p,q}(U^n)$ ,  $0 < p, q < +\infty$  и  $D(f)(z) = f(z, \dots, z)$ ,  $\omega_j \in \Omega, 1 \leq j \leq n$ , тогда определим функцию  $\Omega_n(r) = r^{\left(\frac{q+1}{p}\right)(n-1)} \prod_{j=1}^n \omega_j(r)$ ,  $r \in (0; 1)$ .

Через  $A_{\Omega_n}^{p,q}(U)$  обозначим класс аналитических в единичном круге  $U$  функций  $f$ , для которых

$$\|f\|_{A_{\Omega_n}^{p,q}} = \left( \int_0^1 \Omega_n(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(rw)|^p dm(w) \right)^{\frac{q}{p}} dr \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty, \quad 0 < p, q < +\infty.$$

**Теорема.** Пусть  $\omega_j \in \Omega, 1 \leq j \leq n, 0 < p, q < +\infty$ . Тогда для произвольного  $f \in A_{\omega}^{p,q}(U^n)$  функция  $D(f)$  принадлежит классу  $A_{\Omega_n}^{p,q}(U)$ , причем

$$\|D(f)\|_{A_{\Omega_n}^{p,q}} \leq C \|f\|_{A_{\omega}^{p,q}}.$$

Обратно, для любой  $g \in A_{\Omega_n}^{p,q}(U)$  можно построить функцию  $f \in A_{\omega}^{p,q}(U^n)$  такую, что  $D(f)(z) = g(z), z \in U$ , то есть  $DA_{\omega}^{p,q}(U^n) = A_{\Omega_n}^{p,q}(U), 0 < p, q < +\infty$ .

### Литература

1. Рудин У. Теория функций в полидиске. – М.: Мир, 1974. – 456 с.
2. Шамоян Ф.А. Теорема вложения в пространствах  $n$ -гармонических функций и некоторые приложения // ДАН Арм. ССР, LXII:1: С. 10–14 (1976).
3. Hörowitz C., Oberlin E. Restrictions to diagonal of  $U^n$  // Indiana Univ. – Math. J., 24:7. – 1976: – P. 767–772.
4. Duren P. and Shields A. Restrictions  $H^p$  functions to the diagonal of the polydisc // Duke Math. J., 42:4 – 1975: – P. 567–579.
5. Shapiro J. H. Maccy topologuies, reproducing Kernrls and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces // Duke Math. J., 43:1. – 1976. – P. 187–202
6. Шамоян Ф.А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сибирский матем. журнал. Т. 31. № 2: С. 197–215 (1990).
7. Ren G. and Shi J. The diagonal mapping in mixed norm spaces // Studia Mathematica. 163(2), 2004: P. 103–117.
8. Шамоян Ф.А. Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах  $H^p(U^n), 0 < p < +\infty$  // Матем. сб., 107(149): 3(11): С. 446–462 (1978).
9. Shamoyan F.A. and Povprits E.V. Representation of continuous linear functionals in anisotropic weighted spaces of analytic functions in the polydisc with mixed norm // Complex Variables and Elliptic Equations, 2013 (in print).

## РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЫЕ ДРОБИ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ, ОБРАТНОЙ К ИНТЕГРАЛУ ОШИБОК

**В.Б. ШЕРСТИУКОВ**

НИЯУ МИФИ, г. Москва  
e-mail: shervb73@gmail.com

Обсудим некоторые приложения результатов [1] о разложении на простые дроби мероморфных функций вида  $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ . Особо остановимся на случае, когда  $L(\lambda)$  совпадает с интегралом ошибок, важным для анализа и теории вероятностей.

Коротко напомним общую теорию. Пусть  $L(\lambda)$  – целая функция, имеющая лишь простые нули  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , занумерованные в порядке возрастания модулей. Множество всех нулей обозначим через  $\Lambda(L)$ . Разложением в ряд Крейна фиксированного порядка  $p \in \mathbf{Z}_+$  называют представление вида

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{L'(0)\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n) \lambda_n^p (\lambda - \lambda_n)}.$$

Здесь  $P(\lambda)$  – некоторый полином; коэффициент  $a_0$  вычисляют по правилу:  $a_0 = 1$ , если  $0 \in \Lambda(L)$ , или  $a_0 = 0$ , если  $0 \notin \Lambda(L)$ . Возможность разложить величину  $1/L(\lambda)$  в ряд Крейна и свойства функции  $L(\lambda)$ , допускающей разложение, изучались во многих работах (см. [1–5]).

Для формулировки нужных результатов используем стандартные понятия из теории целых функций [5]. Считаем, что  $L(\lambda)$  есть целая функция экспоненциального типа и  $D_L$  – ее индикаторная диаграмма. Нас интересует та ситуация, когда множество нулей  $\Lambda(L)$  расположено в некоторой полуплоскости, для определенности – в правой полуплоскости  $\Pi(\gamma) \equiv \{\lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \gamma\}$  с некоторым значением  $\gamma \in \mathbf{R}$ . Пусть индикаторная диаграмма  $D_L$  есть отрезок  $[-a, b]$ , где  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $a + b > 0$ . Ранее в [1] рассматривался случай  $a > 0$ , когда  $D_L$  выступала на отрицательную полуось. Сейчас сформулируем результат в более тонком случае  $a = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $L(\lambda)$  – целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста с множеством простых нулей  $\Lambda(L) = (\lambda_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , расположенным в полуплоскости  $\Pi(\gamma)$  с некоторым  $\gamma \in \mathbf{R}$ , причем  $\operatorname{Re} \lambda_n = O(\ln n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $D_L = [0, b]$ , где  $b > 0$ , и пусть при некотором  $p \in \mathbf{Z}_+$  выполнено условие

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)| |\lambda_n|^{p+1}} < \infty.$$

Тогда величина  $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$  раскладывается в ряд Крейна порядка  $p$ , сходящийся абсолютно и равномерно на любом компакте в области  $\mathbf{C} \setminus \Lambda(L)$ . При этом, если  $p = 0$ , то  $P(\lambda) \equiv 0$ , а если  $p \geq 1$ , то

$$P(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{m!} F^{(m)}(0) \lambda^m, \quad 0 \notin \Lambda(L);$$

$$P(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{(m+1)!} (\lambda F(\lambda))^{(m+1)}(0) \lambda^m, \quad 0 \in \Lambda(L).$$

В условиях теоремы 1 справедливы формулы для вычисления регуляризованных сумм, составленных по нулям функции  $L(\lambda)$ . Пусть для простоты  $0 \notin \Lambda(L)$ . Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n) \lambda_n^{m+1}} = - \frac{F^{(m)}(0)}{m!}, \quad m = p, p+1, \dots,$$

где  $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ .

Применим теперь общие результаты к интегралу ошибок

$$\operatorname{erf} \lambda \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-z^2} dz, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

Функция  $\operatorname{erf} \lambda$  есть целая функция второго порядка с простыми нулями, так как ее производная всюду отлична от нуля. Среди нулей есть один вещественный нуль  $\lambda = 0$ , остальные нули являются комплексными. Непосредственно к  $\operatorname{erf} \lambda$  применить теорему 1 нельзя, поскольку интеграл ошибок не относится к функциям экспоненциального типа. Воспользуемся элементарным соотношением

$$\operatorname{erf} \lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} L(-\lambda^2), \quad \lambda \in \mathbf{C},$$

связывающим  $\operatorname{erf} \lambda$  с функцией

$$L(\lambda) \equiv \int_0^1 e^{\lambda t} \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

Целая функция  $L(\lambda)$  имеет экспоненциальный тип и вполне регулярный рост, причем  $D_L = [0, 1]$  (см. [6]). В работе [7] показано, что нули функции  $L(\lambda)$  расположены в полуплоскости  $\{\lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \lambda > 1/2\}$ , являются простыми, попарно комплексно сопряженными, и их можно организовать в две цепочки  $\mu_k$  и  $\bar{\mu}_k$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , где

$$\mu_k = \ln(\pi\sqrt{2k}) + i(2\pi k - \pi/4) + O(\ln k/k), \quad k \rightarrow \infty.$$

Расположив нули в порядке возрастания модулей, получим множество  $\Lambda(L) = (\lambda_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , с асимптотиками

$$|\lambda_n| \sim \pi n, \quad \operatorname{Re} \lambda_n = \ln(\pi\sqrt{n}) + O(\ln n/n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Несложные вычисления дают

$$L(0) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2, \quad L'(\lambda_n) = \frac{e^{\lambda_n}}{\lambda_n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{|L'(\lambda_n)| |\lambda_n|^2} = O(n^{-3/2}), \quad n \rightarrow \infty.$$

По теореме 1 величина  $1/L(\lambda)$  раскладывается в ряд Крейна порядка  $p = 1$ , точнее

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{2} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda - \lambda_n} = \frac{1}{2} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\mu_k}}{\lambda - \mu_k} + \frac{e^{-\bar{\mu}_k}}{\lambda - \bar{\mu}_k} \right].$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах в области  $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$ . При этом справедливы суммационные формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n^m} = -\frac{1}{m!} \left( \frac{1}{L(\lambda)} \right)^{(m)}(0), \quad m = 1, 2, \dots$$

Например, для  $m = 1$  и  $m = 2$  получаем соответственно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} = \frac{L'(0)}{L^2(0)} = \frac{1}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n^2} = -\frac{1}{2!} \left( \frac{1}{L(\lambda)} \right)''(0) = \frac{L''(0)L(0) - 2(L'(0))^2}{2L^3(0)} = -\frac{1}{180}.$$

Возвращаясь к интегралу ошибок, видим, что все его нетривиальные нули получаются как решения уравнений  $\lambda^2 = -\mu_k$  и  $\lambda^2 = -\bar{\mu}_k$ . Эти нули структурируются в две цепочки  $\nu_l^+, \nu_l^-, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , симметричные друг другу относительно вещественной оси и расположенные в гиперболических секторах  $\{\lambda \in \mathbb{C} : (\operatorname{Im} \lambda)^2 - (\operatorname{Re} \lambda)^2 > 1/2\}$  (см. [7]). Записывая множество нетривиальных нулей интеграла ошибок в порядке возрастания модулей, получим последовательность  $\nu_n, n \in \mathbb{N}$ . Перечисленные обозначения корней сохраняются в следующей теореме.

**Теорема 2.** *Величина, обратная интегралу ошибок, допускает представление*

$$\frac{1}{\operatorname{erf} \lambda} = \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2\lambda} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda^2 + \lambda_n} \right) = \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2\lambda} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\mu_k}}{\lambda^2 + \mu_k} + \frac{e^{-\bar{\mu}_k}}{\lambda^2 + \bar{\mu}_k} \right] \right).$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах плоскости, не содержащих нулей функции  $\operatorname{erf} \lambda$ . При этом справедливы соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\nu_n^2}}{\nu_n^2} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} = -\frac{1}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\nu_n^2}}{\nu_n^4} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n^2} = -\frac{1}{90}.$$

Работа поддержана РФФИ (проект 13-01-00281).

### Литература

1. Шерстюков В.Б. Новые результаты о разложении на простые дроби величины, обратной к целой функции экспоненциального типа // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIII международной научной конференции, посвященной 75-летию проф. Э.И. Зверовича. Вып. 13. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2012. – С. 217–219.

2. Крейн М.Г. К теории целых функций экспоненциального типа // Известия АН СССР. Серия матем. – 1947. – Т. 11, № 4. – С. 309–326.

3. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

4. Шерстюков В.Б. Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна // Матем. сборник – Т. 202, № 12, 2011. – С. 137–156.

5. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

6. Titchmarsh E.C. The zeros of certain integral functions // Proc. London Math. Soc. – 1926. – V. 25, Part 4. – P. 283–302.

7. Седлецкий А.М. О нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68, Вып. 5. – С. 710–724.

## ОЦЕНКИ РАДИУСА ПОЛНОТЫ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

О.В. ШЕРСТЮКОВА

НИЯУ МИФИ, г. Москва

e-mail: sherov73@mail.ru

Пусть  $\Lambda$  – возрастающая к  $+\infty$  последовательность положительных чисел  $\lambda_n$ :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty. \quad (1)$$

*Верхней плотностью* последовательности  $\Lambda$  называется величина

$$\bar{\Delta}(\Lambda) \equiv \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n / \lambda_n).$$

Соответствующий нижний предел называют *нижней плотностью* последовательности  $\Lambda$  и обозначают  $\underline{\Delta}(\Lambda)$ . Шаг последовательности (1) определяется по формуле

$$h(\Lambda) \equiv \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

Зафиксируем три числа  $\beta > 0$ ,  $0 \leq \alpha \leq \beta$ ,  $0 \leq h \leq 1/\beta$ , и рассмотрим произвольную последовательность вида (1) с характеристиками

$$\bar{\Delta}(\Lambda) = \beta, \quad \underline{\Delta}(\Lambda) \geq \alpha, \quad h(\Lambda) \geq h. \quad (2)$$

Всякая такая последовательность порождает *систему экспонент*

$$E_{\pm\Lambda} \equiv \{ \exp(\pm \lambda_n z) \}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (3)$$

с вещественными симметричными показателями  $\pm \lambda_n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Символом  $R(\Lambda)$  обозначим *радиус полноты* системы (3), т.е. верхнюю грань радиусов  $R$  кругов  $K_R \equiv \{ z \in \mathbf{C} : |z| < R \}$ , в которых система  $E_{\pm\Lambda}$  полна. Точнее, речь идет о полноте системы экспонент (3) в пространстве  $A(K_R)$  всех аналитических в круге  $K_R$  функций. В этом пространстве вводится стандартная топология равномерной сходимости на компактах из круга  $K_R$ . Поставленная в работе [1] (см. также обзор [2]) проблема

нахождения точного значения величины  $R(\Lambda)$  до сих пор остается открытой. Поэтому на первый план выдвигается задача получения оценок для радиуса полноты  $R(\Lambda)$ , использующих классические характеристики распределения последовательности  $\Lambda$ .

Имея в виду эту задачу, положим

$$R(\alpha, \beta, h) = \inf R(\Lambda),$$

где нижняя грань берется по всевозможным последовательностям  $\Lambda$  вида (1) с характеристиками (2). Сочетая известный критерий полноты системы экспонент в пространстве  $A(K_R)$  и недавние результаты автора [3] по экстремальным задачам для целых функций порядка меньше единицы с нулями на луче, получаем следующую теорему.

**Теорема.** Пусть заданы числа  $\beta > 0$ ,  $0 \leq \alpha \leq \beta$ ,  $0 \leq h \leq 1/\beta$ . Тогда справедлива оценка

$$R(\alpha, \beta, h) \leq \pi\alpha + \sup_{a > 0} \left\{ \int_{a(\alpha/\beta)^2}^a \frac{(\beta/\sqrt{a}) - (\alpha/\sqrt{\tau})}{1 + \tau} d\tau + \frac{s}{h} \int_a^{av^2} \frac{(v/\sqrt{\tau}) - (1/\sqrt{a})}{1 + \tau} d\tau \right\}, \quad (4)$$

где  $s = 1 - \beta h$ ,  $v = (1 - \alpha h)/(1 - \beta h)$ .

Дадим к теореме короткий комментарий. Величина, стоящая в правой части неравенства (4), конечна. Пусть  $R$  – любое число, большее этой величины. Тогда найдется система экспонент (3) с показателями, подчиненными (2), не являющаяся полной в круге  $K_R$ .

При  $\alpha = h = 0$  из оценки (4), понимаемой в предельном смысле, получаем результат А.Ю. Попова [4], а при  $0 < \alpha \leq \beta$ ,  $h = 0$ , – один из результатов совместной работы [5].

### Литература

1. Malliavin P., Rubel L.A. On small entire functions of exponential type with given zeros. Bull. Soc. – Math. France, 1961. – Vol. 89. – P. 175–206.
2. Хабибуллин Б.Н. Полнота системы экспонент и множества единственности. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2006. 172 с.
3. Шерстюкова О.В. Об экстремальном типе целой функции порядка меньше единицы с нулями фиксированных плотностей и шага // Уфимский матем. журнал. – 2012. – Т. 4, № 1. – С. 161–165.
4. Попов А.Ю. О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем., мех. – 1999. – № 5, – С. 48–52.
5. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. О наименьшем возможном типе целых функций порядка  $\rho \in (0,1)$  с положительными нулями // Известия РАН. Серия матем. – 2011. – Т. 75, № 1. – С. 3–28.

# КОНТИНУАЛЬНАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

**М.Ю. ЯСТРЕБОВ**

Санкт-Петербургский государственный университет морского  
и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, г. Санкт-Петербург  
e-mail: rectorat @gma.ru

Рассмотрим дискретную модель оптимального размещения производства следующего вида:

$$\sum_{i,j=1}^n q_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^n t_j f(t_j) \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$x_{ij} \geq 0; \sum_{j=1}^n x_{ij} = N_i; x_{ij} \in Z.$$

Её возможная содержательная интерпретация: управляемые переменные  $x_{ij}$  – среднегодовое количество однородных дефектных устройств (например, контейнеров), направляемых из пункта (порта)  $i$  на (ремонтное) предприятие в пункт  $j$ ;  $q_{ij}$  – стоимость транспортировки одного устройства;  $N_i$  – годовой объём дефектных устройств в пункте  $i$ ;  $z(t)$  – приведённые затраты на одно устройство на предприятии с годовой мощностью  $t$  (убывающая функция).

Многовариантность задачи обусловлена возможной экономической нецелесообразностью организации производства в каждом пункте (порте региона), поскольку снижение производственных затрат за счёт увеличения  $t$  может перекрыть транспортные расходы, возникающие при отсутствии производства в некоторых пунктах.

Линеаризация функции  $f(t)$  приводит к выпуклой вверх целевой функции, минимум которой достигается в одной из крайних точек допустимой области, которые автоматически оказываются целочисленными, причём имеется простой алгоритм их перебора, вполне приемлемый по затратам машинного времени для реальных значений  $n$ .

Привязка пунктов размещения обслуживающего производства к (возможно не всем) пунктам  $P_i (i=1, \dots, n)$  возникновения требований на обслуживание, при всей её естественности, может а priori оказаться экономически невыгодной для конкретной географической дислокации этих пунктов. Верификация приемлемости используемой дискретной модели может осуществляться путём отказа от фиксации пунктов размещения производства и возможных маршрутов транспортировки.

Если фиксировать только количество  $r$  пунктов размещения, а их координаты  $(u_i, v_i)$  считать непрерывными управляемыми переменными наряду с дискретными управляемыми переменными  $x_{ij}$ , то

предположение о линейной зависимости стоимости транспортировки от евклидова расстояния приводит к целевой функции

$$Z(X,U) = Z_X(U) + Z_1(X),$$

где  $X = (x_{ij})$ ,  $U = (u_1, v_1, \dots, u_r, v_r)$ , причём по переменным  $(u_i, v_i)$  производится при фиксированном  $X$  безусловная оптимизация, которая может быть эффективно реализована, например, градиентным методом.

Можно показать, что решение задачи при  $r = n$  является глобально оптимальным по всем  $r \geq 1$ .

Значительные расхождения в дислокации и мощностях размещаемого производства для дискретной и континуальной постановок (при понимаемой условности последней) могут стать стимулом для использования других, более приемлемых дискретных моделей с иными априорными ограничениями.

### Литература

1. Корбут А.А. Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование – М.: Наука, 1969. – 368 с.
2. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

## СЕКЦИЯ 4

### **Новые информационные и педагогические технологии в образовании и прикладная лингвистика**

#### **КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ: ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО БИЛЬЯРДА**

**К.О. АГАФОНОВА, А.А. АГАФОНОВ, С.В. СУШКОВ**

Казанский федеральный университет, г. Казань

e-mail: Ksenia.Agathonova@gmail.com

В настоящее время в образовательной практике всё более востребованным становится использование электронных учебно-методических пособий, которые представляют собой ресурсы в локальных или глобальных сетях. Наиболее удобной формой для восприятия является материал, скомпонованный в единый обучающий комплекс.

Цель нашей работы – создание компьютерной математической лаборатории, которая должна включать в себя комплекс лабораторных заданий по различным разделам математики. На данном этапе работа ведется в двух направлениях. Во-первых, это разработка программного обеспечения, т.е. создание компьютерной оболочки для математической лаборатории. Эта задача решается нами с помощью технологии Maple, разработанной в среде программирования Maple. Во-вторых, важнейшей задачей является методическое наполнение математической лаборатории.

В качестве одного из первых шагов мы выбрали создание лабораторной работы по математическому бильярду. В математическом бильярде рассматривается стол произвольной формы, но без луз. По этому столу без трения движется точечный шар, абсолютно упруго отражаясь от бортов. Математическая проблема бильярда, или проблема траекторий, состоит в том, чтобы найти ответ на вопрос: какой может быть траектория этого шарика? Описанная механическая система – точечный шар в бильярдной области, ограниченной бортом (границей области), – и называется математическим бильярдом. Траектория бильярда в области определяется начальным положением точки и начальным вектором ее скорости. Таким образом, траектория бильярда – это вписанная в кривую ломаная, которая может быть однозначно построена по своему начальному звену. Общая математическая проблема бильярда заключается в том, чтобы описать возможные типы бильярдных траекторий в данной области. Простейший принцип такого

описания – разделение траекторий на периодические, или замкнутые, и остальные – непериодические. Известно, что даже простые механические системы в некоторых случаях ведут себя непредсказуемым образом. Неустойчивость систем к изменению их параметров, начальных условий может быть продемонстрирована на примере математического бильярда с выпуклыми участками границы. Если из одной точки такого хаотического бильярда запустить два шарика, скорости которых незначительно отличаются, то через некоторое время они окажутся в далеко отстоящих друг от друга участках стола. В частности, такое поведение демонстрируют бильярды с границей в форме идеализированного «гриба», которая состоит из полукруга и прямоугольного основания (гриб Бунимовича).

На данный момент написана программа-Marplet для вычисления и визуализации траекторий шарика на столах следующих форм: эллипс, правильный многоугольник, произвольный многоугольник, гриб Бунимовича (на рисунке показано окно программы для бильярда в форме гриба Бунимовича). Задавая определённые параметры, можно определить свойства фигур, начальное положение и направление скорости шарика. Учащимся предлагается задание в виде лабораторной работы, например, подобрать такие параметры модели, чтобы траектория была периодической. Программа позволит им самостоятельно изучить тот или иной материал в области математического бильярда.

Экцентриситет [0, 1]:

Ширина ножки [0, 2]:

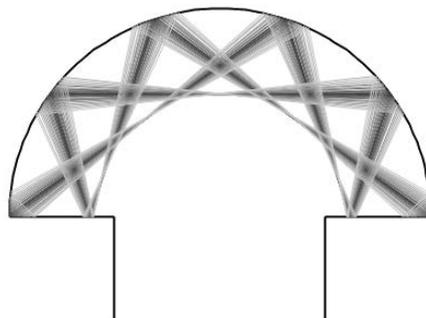
Высота ножки [0, 2]:

Центр ножки [-1, 1]:

Нач. точка (внутренняя):

Нач. направление [0, 2π]:

Кол-во точек [2, 200]:



## Литература

1. Кирсанов М.Н. Maple 13 и Maple. Решения задач механики. – М.: Лань, 2010. – 503 с.
2. Гальперин Г.А., Земляков А.Н. Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики). – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1990. – 288 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 77).
3. <http://mathworld.wolfram.com/Billiards.html>.
4. <http://www.ams.org/notices/200603/fea-porter.pdf>.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНОЙ ДОСКИ ПРИ ВВЕДИИИЯ И ОТРАБОТКЕ КОНСТРУКЦИИ «THERE IS / THERE ARE» СО СТУДЕНТАМИ ПЕРВОГО КУРСА НЕЯЗЫКОВЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Е.С. АГЕЕВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

В последнее время интерактивная доска стала весьма популярным средством обучения. О ней написано множество статей и обзоров, которые можно найти в Интернете. Поэтому мы ограничимся только краткой выдержкой из Wikipedia — интернет-ресурса, в последнее время ставшего «настольным справочником» многих.

«Интерактивная доска (Interactive whiteboard) представляет собой большой сенсорный экран, работающий как часть системы, в которую также входят компьютер и проектор. С помощью проектора изображение рабочего стола компьютера проецируется на поверхность интерактивной доски. В этом случае доска выступает как экран. С проецируемым на доску изображением можно работать, вносить изменения и пометки. Все изменения записываются в соответствующие файлы на компьютере, могут быть сохранены и в дальнейшем отредактированы или переписаны на съемные носители. В этом случае электронная доска работает в качестве устройства ввода информации».

Объяснение грамматического материала, как и положено, начинается с того, что на доске пишется название грамматической темы. Иные преподаватели могут сказать, данная грамматическая тема слишком проста, чтобы уделять ей много внимания и времени. Однако, исходя из личного опыта, могу сказать, что отнюдь не все студенты первого курса могут корректно использовать конструкцию в утвердительной форме, не говоря уже о вопросительной. Особые же трудности начинаются, когда дело доходит до сопоставления конструкции *there is/there are* с обычным, всем нам привычным

предложением типа *smth is in some place*. Более того, практика показывает, что и в русском языке студенты не видят разницы между «Картина на стене» и «На стене картина». Поэтому объяснение грамматического материала начинается с задания студентам объяснить, в чем же разница. После их объяснений имеет смысл все равно привести примеры и акцентировать внимание. Мы используем следующий подход:

Возьмем предложение *Картина на стене*. Какая-то известная нам картина, например, подаренная маме на день рождения, сначала стояла на полу под стеночкой, потому что папа никак не мог вбить в стену гвоздь. Потом эту картину, чтобы она не мешалась под ногами, убрали в угол. И картина стояла в углу. Потом картину убрали за шкаф. А вот сегодня утром папа наконец совершил подвиг, забил гвоздь – и наша картина на стене. *The picture is on the wall*.

Теперь переходим к предложению *На стене картина*. У нас в комнате есть прекрасная стена, которую мы никак не знали, чем украсить. Сначала на этой стене висела фотография в рамочке. Потом – полка с книгами, потом – цветок в горшке. Но наконец-то на стене висит картина. *There is a picture on the wall*.

После этого объяснения, когда разница четко осознана, можно переходить к самой конструкции *there is/there are*. Для этого мы показываем на доске ряд картинок – изображений комнат с находящейся в них мебелью (рис. 1, 2) и, указывая на предмет, строю предложение. Например: *There is a sofa in the living room*. *There are curtains on the window in*

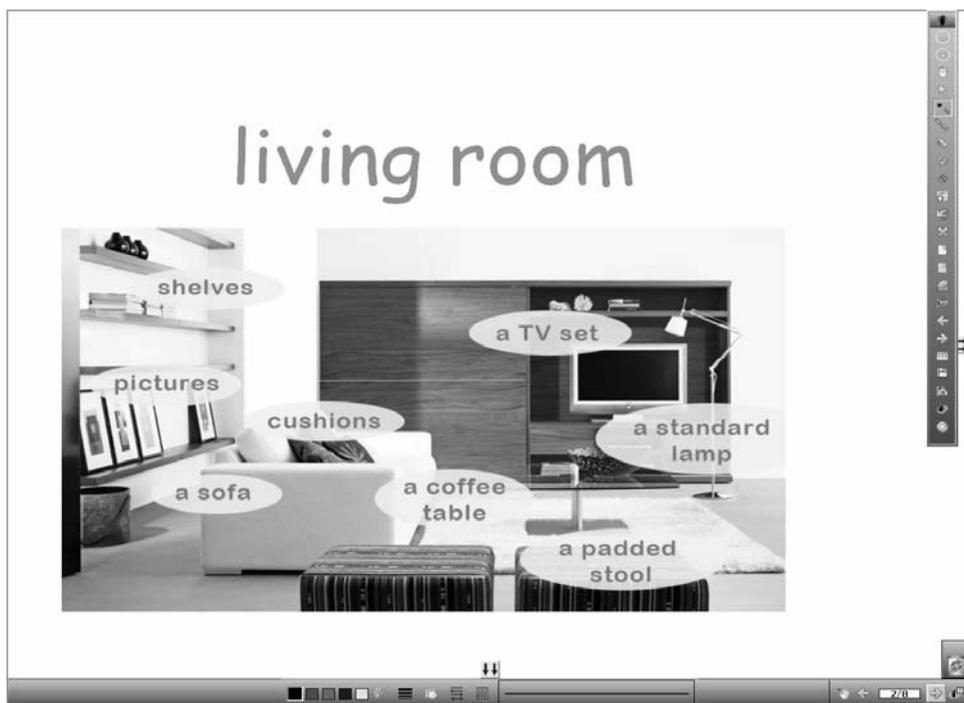


Рис. 1



Рис. 2

*the bedroom.* Затем прошу студентов построить аналогичные предложения, выбирая понравившуюся мебель. Картинок таких может быть сколько угодно – мы предпочитаем брать шесть: гостиная (*living room*), спальня (*bedroom*), детская (*children room*), кабинет (*study*), кухня (*kitchen*), ванная (*bathroom*). Кроме того, что на данном этапе отрабатывается конструкция, изучается еще и необходимая лексика. Ряд предложений даются под запись, чтобы образец конструкции остался у студентов в тетрадях.

После того, как все картинки разобраны и каждый студент проговорил предложение с конструкцией *there is/there are* не единожды, наступает время вопроса *What is there in the..?*

Для этого мы в программе, прилегающей к интерактивной доске, сделали поле с воображаемыми шестью комнатами (рис. 3). Вокруг него поместили в произвольном порядке изображения с предметами, которые могут в этих комнатах находиться. Все картинки с предметами можно свободно передвигать по полю при помощи пальца или стилуса, в крайнем случае – мышки. В центре поля с «комнатами» написан вопрос, в который вместо многоточия подставляется нужное название комнаты. Например: *What is there in the children room? What is there in the bathroom?*

Сначала преподаватель задёт вопрос и даёт на него ответ, при этом передвигая картинку с изображением предмета в соответствующую «комнату». Затем снова задаёт вопрос и произвольно выбирает студента А. Студент А отвечает на вопрос, и выбранную им картинку

передвигаем на нужную клетку (студент сам может выйти к доске и передвинуть – все зависит от времени, размера группы и удобства). Затем студент А задает вопрос и произвольно выбирает студента Б. Студент Б отвечает и затем задает свой вопрос. И так далее по цепочке, пока не закончатся изображения предметов.

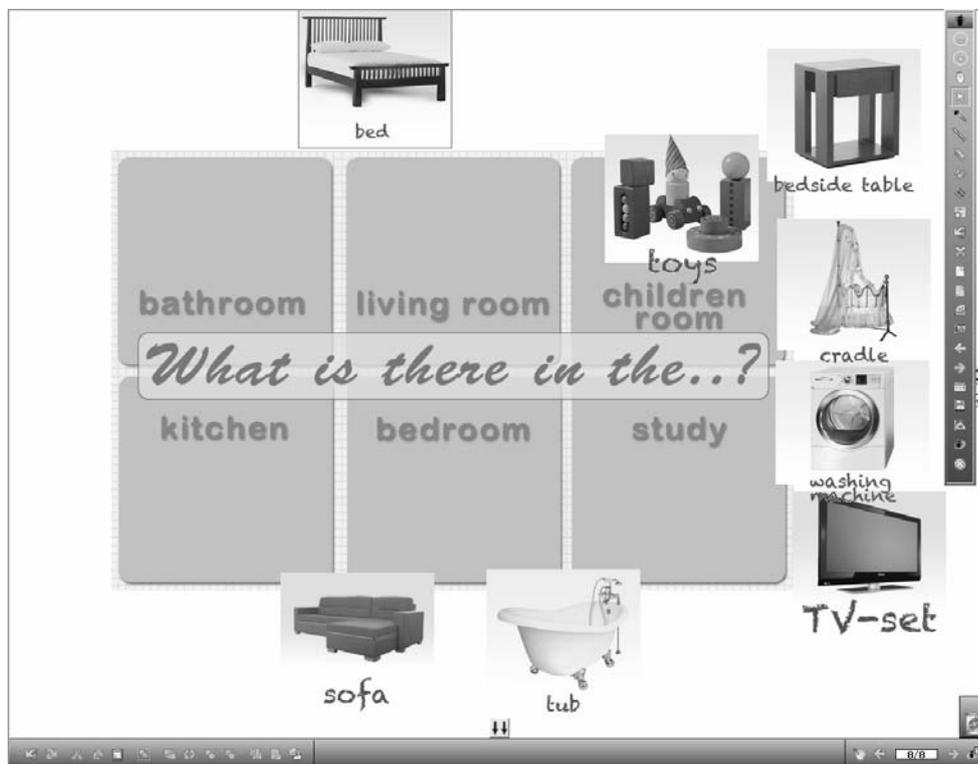


Рис. 3

Если студенты делают ошибки в использовании конструкции, мы акцентируем внимание и просим исправиться и повторить верный вариант. Однако если они и делают ошибки, то только поначалу и ошибаются в числе глагола (*is* вместо *are*). К тому времени, как мы подходим к последней картинке, конструкция прочно усваивается студентами.

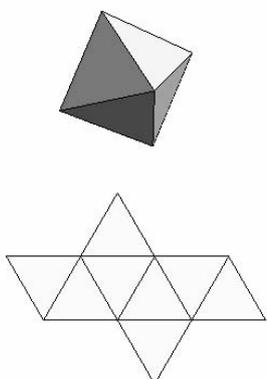
## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МАНИПУЛЯТОРОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МНОГОГРАННИКОВ БУДУЩИМИ УЧИТЕЛЯМИ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ**

**Н.В. АССОНОВА**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: [assonova@mail.ru](mailto:assonova@mail.ru)

Динамическим манипулятором можно назвать файл в формате CDF. CDF расшифровывается как Computable Document Format, что означает «вычисляемый формат документа», иначе – «живой документ». Создала

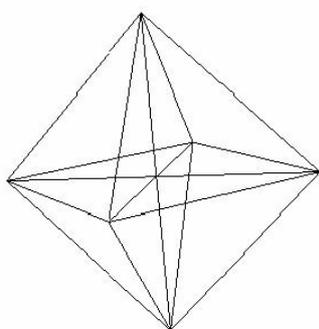
этот формат в 2011 году американская фирма Wolfram Research. В нём удобно представлять учебники, журнальные статьи, отчёты [1]. Основное достоинство этих документов состоит в наличии



интерактивных диаграмм, графиков, динамических расчётов, изображений трёхмерных подвижных моделей и т.п. Пользователи могут самостоятельно менять параметры визуализации с помощью специальных элементов управления. На основе вычислений, осуществляемых в режиме реального времени, диаграмма меняется и виден результат.

Для просмотра CDF-файла достаточно установить бесплатно скачиваемый «CDF-проигрыватель» [2]. Интерактивный мастер создания CDF-документов встроен в Mathematica, начиная с версии 8.0.4.

Более 8,5 тысяч уже готовых CDF-демонстраций размещены на свободном сайте Demonstrations Project [3].



В прошлогодних тезисах мы рассказывали о демонстрациях, применимых при изучении геометрических величин – длины отрезка, величины угла, площади, объёма. В этой работе хотелось бы отметить некоторые манипуляторы, которые могут быть эффектно использованы при изучении многогранников.

Трудно переоценить роль визуализации при изучении многогранников. Традиционно в арсенале преподавателя имеется набор деревянных, реже – пластиковых тел и таблицы со статическими иллюстрациями. Манипуляторы позволяют вращать, увеличивать,

уменьшать многогранник при помощи компьютерной мыши, делать его прозрачным или непрозрачным [4], строить из него фантастических животных [5], рассматривать его развёртку [6], его диагонали [7], подсчитывать число его вершин, рёбер, граней, число Эйлера [8], радиусы вписанной и описанной сфер, объём, площадь поверхности и др. На СКМП-2011 мы делили доклад о том, как подобные действия с многогранниками можно выполнять непосредственно в самой системе Mathematica.

octahedron	Вершины	Рёбра	Грани	В-Р+Г
	6	12	8	2

Манипулятор [8] выложен на сайте русскоязычной поддержки Wolfram Mathematica. В нём все слова, кроме названия многогранника – октаэдр – на русском языке. Ведётся работа по переводу на русский язык и других демонстраций.

Использование названных демонстраций как свободных ресурсов сети Интернет апробировано автором тезисов на занятиях по математике с будущими учителями начальных классов.

Использование подобных ресурсов повышает качество образования.

### Литература

1. <http://www.wolfram.com/cdf/uses-examples/>.
2. <http://www.wolfram.com/cdf-player/>.
3. <http://demonstrations.wolfram.com/>.
4. <http://demonstrations.wolfram.com/PlatonicSolids/>.
5. <http://demonstrations.wolfram.com/PolyhedralKoalas/>.
6. <http://demonstrations.wolfram.com/NetsOfPolyhedra/>.
7. <http://demonstrations.wolfram.com/DiagonalsOfPolyhedra/>.
8. <http://allmathematica.blogspot.ru/2013/03/Ot-Platona-do-sistem-kompjuternoj-matematiki.html#more>.

# ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ВНЕДРЕНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЭТАПЫ ВНЕДРЕНИЯ

**Р.В. БЛИНДЮК**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: erket.r@gmail.com

В настоящий момент предлагается довольно разнообразный спектр систем автоматизированного контроля, эффективность использования которых во многом зависит от подготовленности педагогов и учащихся к их внедрению. Возникают ситуации, когда педагоги предпочитают использовать традиционные средства оценивания, считая их более объективными и менее трудоемкими. Иногда педагоги занимают активную отрицательную позицию по отношению к новым средствам оценивания качества образования, в том числе автоматизированным, и в целом – к современным информационным и педагогическим технологиям [1].

Прежде всего определимся с сущностью понятия «внедрение».

**Внедрение** – это распространение нововведений; достижение практического использования прогрессивных идей, изобретений, результатов научных исследований (инноваций). Примерами внедрения могут быть: освоение нового оборудования на предприятии, введение новой методики лабораторных исследований, внедрение нового законопроекта, внедрение программного обеспечения (ПО).

Нас интересуют проблемы внедрения программного обеспечения в образовательный процесс школы. Дадим соответствующее определение.

**Внедрение программного обеспечения** – это действия по адаптации программного продукта с целью автоматизации бизнес-процессов организации, а также действия по обучению персонала работе с программным обеспечением. Под бизнес-процессом будем понимать действия сотрудников и подразделений организации, в нашем случае такой организацией будет школа, а действиями – работа педагогического коллектива по достижению определенных целей, например, одной из таких целей является образование учащихся.

**Педагогическое внедрение автоматизированных систем** – включение в образовательный процесс нововведений, современных прогрессивных идей, инноваций с целью оптимизации существующих процессов образования с помощью автоматизации.

На основе изучения этапов внедрения в организациях уточним специфику этапов педагогического внедрения с целью автоматизации.

1. Исследование существующих образовательных процессов в деятельности школы и контроля за обеспечением качества образования. Выделение важных процедур (с точки зрения получения необходимого результата), подлежащих автоматизации. Разработка ИТ-решения с использованием выделенных процедур.

2. Расширение нормативно-правовой базы школы за счёт включения в неё различных регламентов, инструкций, которые упорядочивают и законодательно закрепляют работу по автоматизации выделенных процессов, а также определяют ответственных по направлениям. Этот этап является важным для того, чтобы автоматизация была согласована с другими процессами организации, не противоречила им и была тесно в них интегрирована.

3. Стабилизация решения за счет мониторинга результатов автоматизации, совершенствование и необходимые программно-технические и организационные доработки.

#### **Условия педагогического внедрения с целью автоматизации.**

1. Технические условия. Прежде всего необходимо определить количество рабочих мест, задействованных в автоматизации, исходя из этого рассчитать нагрузку на сервер. Установить и настроить программное обеспечение.

Также необходимо выделить ответственного за поддержку технической инфраструктуры проекта.

2. Педагогические условия. Для того, чтобы внедрение автоматизированной системы прошло успешно, необходимы:

- а) прямая заинтересованность непосредственных пользователей, т.е. учителей школы;
- б) демонстрация и анализ всех плюсов внедрения за счёт автоматизации повседневных действий учителя, возможности ускоренного автоматизированного анализа результатов, что позволит распоряжаться рабочим временем более эффективно;
- в) обеспечение прозрачности результатов внедрения пилотных проектов, т.е. их публичная доступность, для выявления лучших практик и последующего их внедрения в учебный процесс;
- г) организация соответствующего обучения учителей, повышение их квалификации;
- д) контроль и коррекция массового внедрения.

3. Административные условия. Как было указано выше – разработка нормативно-правовой базы, обеспечение процесса внедрения необходимыми приказами, нормативными актами, регламентами, инструкциями. Это будет работать как дополнительное стимулирование, а также повысит эффективность управления за счёт упорядочивания процесса, выделения ролей, ответственных.

Необходимо выделить куратора для внедряемого проекта, в бизнес-терминах данную роль выполняет проект-менеджер (зам. директора по информатизации). Рациональнее всего его выделить из педагогического коллектива, он должен обладать следующими качествами: техническая грамотность, высокая педагогическая культура, коммуникабельность, нацеленность на результат. В обязанности будет входить общий мониторинг выполнения проекта, работа со всеми участниками, контроль работоспособности автоматизированной системы, выявление узких (проблемных) мест как технического, так и организационного порядка, корректирующее воздействие на них.

Таким образом, в связи с тем, что времени на обработку информации становится катастрофически мало, в повседневную жизнь любого современного человека проникают новые технологии, новые технологические устройства, автоматизация многих процессов. Одним из важнейших институтов образования становится школа, которая должна стать частью этого стремительно развивающегося процесса и пользоваться всеми новейшими достижениями в области информационных технологий, успешно и эффективно их применять.

#### **Литература**

1. Блиндюк Р.В. Педагогические условия внедрения систем автоматизированного контроля качества обучения в общеобразовательной школе: постановка проблемы //Фэн – Наука 2012. – № 12 (15). – URL: [www.fen-nauka.ru](http://www.fen-nauka.ru).

### **ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ: ФОРМА ИЛИ ТЕХНОЛОГИЯ?**

**Ю.В. БОГДАНОВА**

Смоленский филиал РАНХ и ГС, г. Смоленск

e-mail: [iulianiya@bk.ru](mailto:iulianiya@bk.ru)

В условиях быстрых изменений в экономике, науке и общественной жизни, стремительного развития информационных технологий, появления новых профессий на рынке труда, целесообразно рассматривать дистанционное обучение как эффективный инструмент

реализации компетентностного подхода в образовании. Наиболее существенным при организации профильного обучения с использованием технологий дистанционного обучения является изменение традиционных учебных средств, что приводит к изменению видов учебной деятельности, а также форм организации обучения.

Разными аспектами дистанционного обучения занимались многие исследователи в нашей стране и за рубежом (М.Ю. Бухаркина, Дж. Даниель, Т.П. Зайченко, Д. Киган, М.В. Моисеева, М. Мур, Е.С. Полат, Э.Г. Скибицкий, А.В. Хуторский и др.).

Однако трактовки этого понятия в работах разных ученых заметно отличаются друг от друга. Многие определения, предлагаемые авторами, не в полной мере отражают суть рассматриваемого явления. Недостатком большинства из них является то, что они высвечивают лишь какую-то одну сторону этого многогранного явления.

Такая ситуация способствует тому, что в отечественной педагогике дистанционное обучение рассматривается и как технология, и как новая форма обучения, а также как вариант заочного обучения.

Важное место в дискуссии о дистанционном обучении занимает вопрос о соотношении его с заочным обучением. До сих пор в этом вопросе нет строгой определенности. Ряд ученых (Э.Г. Скрибицкий, Л.П. Давдов, О.Б. Журавлева и др.) рассматривают дистанционное обучение как новую ступень заочного обучения, обусловленную развитием средств телекоммуникации.

Однако, по мнению А.В. Хуторского, дистанционное обучение нельзя сводить к усовершенствованному заочному, поскольку оно обладает рядом существенных отличий. К основным из них можно отнести:

- постоянный контакт с преподавателем, возможность оперативного обсуждения с ним возникающих вопросов, как правило с помощью средств телекоммуникации;
- возможность организаций дискуссий, совместной работы над проектами и других видов групповых работ в ходе изучения курса и в любой момент (при этом группа может состоять из компактно проживающих в одной местности студентов, либо может быть распределенной). В этом случае учащиеся также контактируют с преподавателем посредством телекоммуникаций;
- передачу теоретических материалов учащимся в виде печатных или электронных учебных пособий, что позволяет либо полностью отказаться от установочных сессий с приездом в вуз, либо значительно сократить их число и длительность [2].

Трактовка, принятая на государственном уровне и в настоящее время закрепленная в законе «Об образовании», сводит дистанционное

обучение к технологии или сумме технологий, применяемых во всех нормативно установленных в России формах в сфере образования.

По мнению Е.С. Полат, такой подход способствует тому, что эта форма обучения в школах России почти не развивается.

Помимо проблем, связанных с законодательной базой, признанию дистанционного обучения как самостоятельной формы препятствует отсутствие конкретизированной учебной нагрузки учащихся и преподавателей, а также сроков освоения образовательных программ.

Следовательно, если говорить о дистанционном обучении как о новой форме обучения, необходимо вносить изменения не только в законы, но и в государственные образовательные стандарты, существующие в стране [3].

Однако, несмотря на это, все больше исследователей и практиков дистанционного обучения (А.А. Андреев, В.Г. Кинелев, Е.С. Полат, А.Е. Петров и др.) рассматривают его как форму обучения, при которой взаимодействие учителя и учащихся, а также учащихся между собой осуществляется на расстоянии и отражает все присущие учебному процессу компоненты (цели, содержание, методы, организационные формы, средства обучения), реализуемые специфическими средствами интернет-технологий или другими средствами, предусматривающими интерактивность [1].

Как новая форма обучения, дистанционное обучение не может быть совершенно автономной системой. Оно строится с теми же целями и содержанием, что и традиционное обучение. Однако, форма подачи материала, форма взаимодействия субъектов обучения, а также средства и методы будут иными.

### **Литература**

1. Полат Е.С., Бухаркина М.Ю., Моисеева М.В. Теория и практика дистанционного обучения: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений; под ред. Е.С. Полат. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 416 с.
2. Хуторской А.В. Современная дидактика: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2007. – 639 с.
3. Шаров В.С. Дистанционное обучение: форма, технология, средство // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. – 2009. – № 94. – URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/distantcionnoe-obuchenie-forma-tehnologiya-sredstvo> (дата обращения: 19.03.2013).

## О ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПЕДАГОГА В ИНФОРМАЦИОННОМ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.П. БОРИСОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Повышение информационной культуры педагогов образовательного учреждения является одной из важнейших задач [1], что нашло свое отражение в таких нормативных документах, как Федеральная целевая программа «Развитие единой образовательной информационной среды» и Программа развития педагогического образования России на 2011–2020 годы. Повышение квалификации и профессиональная переподготовка педагогических работников должны включать не только обучение работе с компьютером, но и освоение новых методов работы в преподавании учебных дисциплин. Они должны носить практический характер, направленный на использование опыта практического применения информационных и телекоммуникационных технологий. Решение этой задачи осуществимо, в частности, в рамках информационного образовательного пространства «средняя школа – вуз». Более того, повышение квалификации и профессиональная переподготовка педагогических работников средней школы в области использования новых информационных технологий является одной из существенных функций и вместе с тем одним из необходимых условий эффективного функционирования этого информационного пространства.

Информация все более осознается как важный педагогический ресурс. Она становится предметом массового использования учителями, воспитателями, школьниками, родителями, специалистами заинтересованных организаций и учреждений.

Рассматривая деятельность педагогов в рамках информационного образовательного пространства «средняя школа – вуз», можно выделить шесть ступеней использования компьютера.

**Первая ступень** – педагог освоил и использует компьютер в качестве «пишущей машинки»; в этом режиме идет подготовка с помощью ПК дидактического, раздаточного материалов, планов уроков, планирования и т.д.; создание базы документов по предмету в памяти домашнего (рабочего) компьютера.

**Вторая ступень** – на данном этапе использования компьютера происходит знакомство учителя с пакетом офисных программ, их возможностями, приобретение элементарных навыков использования CD-дисков в своей деятельности. Даже низкий учебно-методический уровень имеющих в распоряжении педагога электронных пособий, учебников, энциклопедий, различных электронных носителей способен паразитировать соскучившегося по качественным наглядным пособиям

учителя-предметника, относительная доступность содержимого дает возможность конструирования своих проектов.

**Третья ступень** – данный этап неразрывно связан с возможностью подключения и выхода в Интернет. Приобретая навыки работы в Сети, педагог получает практически неограниченную возможность поиска нужной информации. Использование компьютера на уроках, во внеурочной деятельности создает учителю репутацию человека передового и прогрессивного. Меняется отношение школьников к такому учителю, и в большей степени – если на начальном этапе в своей деятельности педагог активно использует помощь своих учеников, а в глазах коллег по работе авторитет такого учителя возрастает.

**Четвертая ступень** – на этом этапе наступает пресыщение имеющимися информационными ресурсами. Учитель начинает овладевать технологиями «созидания», осваивая различные доступные программы, анимационные возможности которых существенно усиливают эффективность учебного занятия, начинает выступать авторитетным консультантом и во внутришкольных проектах.

**Пятая ступень** – новые информационные технологии плавно внедряются в структуру традиционного урока и становятся его неотъемлемой частью. Важно, что для учителя творческого возможно движение только вперед. И на данном этапе возникает проблема систематизации создаваемого и используемого материала уже на качественно новом уровне.

**Шестая ступень** – у учителя появляется потребность в систематизации и модернизации накопленного дидактического опыта, в том числе и того, который был в профессиональном арсенале преподавателя до начала использования информационных технологий в учебном процессе. У педагога складывается более реалистичное понимание своих возможностей и, как следствие, меняется методика преподавания, повышается ее эффективность в силу того, что педагог в большей мере опирается на свои способности, стремится максимально выразить свою личность в ходе освоения и рационального внедрения в собственный преподавательский опыт информационных технологий. В арсенале педагога появляются дополнительные возможности реализации принципа учета возрастных и индивидуальных особенностей школьников, намечается переход от декларации этого педагогического постулата к его воплощению в повседневную школьную практику.

### **Литература**

1. Конюшенко С.М. Формирование информационной культуры педагога в системе непрерывного профессионального образования. – Калининград: Изд-во КГУ, 2004. – 248 с.

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ИХ ТРУБОК В РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОЛЯХ ТЯГОТЕНИЯ

**В.А. БУШКОВА**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань  
e-mail: dakra@inbox.ru

В изучении основных законов теории гравитации и космологии важную роль занимает исследование моделей релятивистских систем. Нами разработана библиотека программных процедур построения, численного анализа и динамической визуализации математических моделей релятивистских систем,

Разработанный программный комплекс предназначен для автоматизированного нахождения и построения геодезических линий и их трубок (из шести линий) в четырехмерных (псевдоевклидовых) римановых пространствах по заданной метрике. При этом программа сама формирует уравнения геодезической линии и соответствующую задачу Коши, а при использовании опции геодезической трубки сама формирует уравнения геодезических линий трубки и соответствующую им задачу Коши. Программа сама оптимизирует графические параметры – область изображения, а также согласовывает положение геодезической линии с визуализированной частью поверхности.

Программа отличается от известных ранее, во-первых, простотой ввода (задается одной командой лишь с помощью задания метрики пространства и начальными условиями, полной автоматизацией), а также возможностью исследования геодезических в произвольных четырехмерных римановых пространствах и возможностью оснащенной динамической визуализации геодезических линий и их трубок.

Программа предназначена для проведения исследований в области дифференциальной геометрии и теории гравитации.

## **Литература**

1. Бушкова В.А., Игнатьев Ю.Г. Программа автоматизированного построения геодезических линий на произвольной параметризованной поверхности и их оснащенной динамической визуализации с автоматической оптимизацией графических параметров в системе компьютерной математики Maple: св. о гос. рег. прог. для ЭВМ Р.Ф. № 2012614850 от 30.05.12.
2. Синг Дж. Классическая динамика. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 1963. – 448 с.
3. Синг Дж. Общая теория относительности. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 431 с.
4. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – Москва, 1948. – 316 с.

# РАЗНОУРОВНЕВЫЕ ЗАДАНИЯ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ УСПЕВАЕМОСТИ

С.Н. ГРУЗДЕВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: lag.punkt@mail.ru

Решение задач различной степени сложности позволяет значительно повысить уровень успеваемости учащихся, в качестве подтверждения этой гипотезы представлены результаты педагогического эксперимента, проведенного в одной из школ Смоленской области.

В данном случае в эксперименте участвовали учащиеся 8, 9, 10, и 11 классов Соболевской СОШ, всего 15 учеников. Так как генеральная совокупность небольшая, то в составлении выборки нет необходимости. Обследованию подверглись все члены генеральной совокупности, поэтому результаты эксперимента получили абсолютный характер.

**Проведение** констатирующего этапа эксперимента заключается в организации самостоятельного выполнения учащимися проверочной работы. С темой «Системы счисления» учащиеся впервые знакомятся в шестом классе, это позволило включить в экспериментальную группу детей разных возрастных категорий. Для примера приведём текст одной из работ.

## 9 класс. Проверочная работа по информатике

**Тема:** *Системы счисления*

Вариант №1

1. Проведите сравнение чисел и расставьте соответствующие знаки  $>$ ,  $<$  или  $=$   $329_{10}$  и  $1023_5$ .
2. Вычислите сумму двух чисел  $X=157_8$ ,  $Y=336_8$ . Результат представьте в десятичной системе счисления.
3. Представьте двоичное число  $1111\ 1110\ 1111\ 1010_2$  в шестнадцатеричной системе счисления.
4. В системе счисления с основанием  $X$  десятичное число 292 записывается в виде  $147\ (292_{10}=147_x)$ . Укажите это основание.
5. Дано  $A=306_8$ ,  $B=C8_{16}$ . Какое из чисел  $C$ , записанных в двоичной системе, отвечает условию  $A < C < B$ ?

1) 11001001; 2)11000101; 3)11001111; 4)11000111.

Оценкой выполнения практической работы является число правильно решенных задач. Результаты выполнения работы представлены в Таблице 1.

**Обучающий (формирующий)** этап педагогического эксперимента имеет целью выяснение влияния определенного фактора на некоторый процесс, явление, свойство. Целью данного эксперимента была проверка **гипотезы** – *решение разноуровневых заданий и применение дифференцированного подхода в обучении способствует росту успеваемости учеников.*

таблица 1

Класс	8			9				10			11					Средний балл
Номер учащегося	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Результат первого выполнения проверочной работы	2	3	3	4	1	2	3	1	2	2	3	4	3	3	3	2,60
Результат второго выполнения проверочной работы	4	5	4	5	3	4	5	3	4	5	4	3	3	5	5	4,13
Знак пары $(x_i; y_i)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	0	+	+	

Как видно из результатов первого выполнения проверочной работы, шестеро из пятнадцати учеников получили неудовлетворительную оценку. После этого с каждым классом было проведено семь уроков, посвященных подробному рассмотрению вышеуказанной темы с использованием разноуровневых заданий, и еще раз предложено выполнить проверочную работу. Результаты второго выполнения проверочной работы указаны в предпоследней строке таблицы 1.

**Нулевая гипотеза  $H_0$**  такова: результаты первого и второго выполнения практической работы одинаковы. Проверка гипотезы  $H_0$  осуществляется в результате её сравнения с **альтернативной гипотезой**:

$H_1$  – результат второго выполнения проверочной работы лучше результатов первого выполнения.

В таблице 1 знак пары  $(x_i; y_i)$  обозначает изменение по одной и той же порядковой шкале одного свойства у каждого объекта  $i$ . Для каждой пары  $(x_i; y_i)$  определяем её знак: +, если  $x_i < y_i$  и -, если  $x_i > y_i$ , если  $x_i = y_i$ , то паре  $(x_i; y_i)$  присваивается 0. Статистика  $T_{\text{набл}}$  критерия знаков определяется следующим предписанием:  $T_{\text{набл}} = d$  – числу пар со знаком +:  $d=13$ . Далее выбираем **уровень значимости**:  $\alpha=0.01$  – некоторая малая вероятность (определяется исследователем). Случайное событие, вероятность которого меньше  $\alpha$ , считается практически невозможным.

Следовательно, если событие вероятности  $\alpha$  все-таки произошло, то оно вызвано не случайными причинами, это событие **значимо**.

Для уровня значимости  $\alpha=0.01$  находим, что  $T_{кр}=12$ : у нас  $n=13+1=14$  – общее число пар со знаком + или -,  $T_{набл}=13$ . Так как  $T_{набл} > T_{кр}$ , то  $H_0$  отклоняем и принимаем  $H_1$ . Данные таблицы 1 позволяют утверждать, что использованная методика способствует лучшему усвоению материала.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Губа В.П., Сенькина Г.Е. Математические методы в педагогической практике. – М., 2011. – С. 136–150.
2. Гласс Дж., Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. – М.: Прогресс, 1976. – 496 с.
3. Арнаутов В.В. Опыт инновационно-моделирующей деятельности по проектированию образовательных процессов // Педагогика. – 1998.

### **СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИКТ В СЕЛЬСКИХ МАЛОКОМПЛЕКТНЫХ ШКОЛАХ И ШКОЛАХ ДРУГИХ ТИПОВ**

**С.Н. ГРУЗДЕВ**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: lag.punkt@mail.ru

Использование ИКТ в образовании является одним из важнейших направлений развития информационного общества. В этих условиях школа должна формировать у учащихся новые навыки – умение адаптироваться и найти себя в этом мире, умение самостоятельно собирать информацию, анализировать, обобщать и передавать ее другим людям, осваивать новые технологии. Адекватным ответом на вызовы времени является реализация новой модели учебного процесса, ориентированного на самостоятельную работу учащихся, коллективные формы обучения, формирование необходимых навыков. Большую роль в этой трансформации может и должно сыграть активное применение в учебном процессе информационно-коммуникационных технологий (ИКТ).

В рамках нашей работы было проведено исследование качества образования в школах Смоленской области на основе внедрения образовательного мониторинга в учебно-воспитательный процесс.

*Главными целями данного исследования было:*

- при помощи разработанных нами анкет проанализировать, насколько эффективно в школах Смоленской области используются в обучении компьютеры и другие современные технологии;
- выяснить мнение учащихся о том, насколько важны для них предметы физико-математического цикла;
- определить готовность образовательных учреждений к развитию на основе ИКТ;
- определить степень доступности для учеников ИКТ в образовательных учреждениях.

*Источниками информации служили:*

- результаты анкетирования учащихся 9, 10 и 11 классов школ города Смоленска и Смоленской области (участвовали в анкетировании 200 учащихся);
- информация Департамента Смоленской области по образованию, науке и делам молодежи (<http://www.admin-smolensk.ru/>).

*В результате обработки анкет были получены следующие данные:*

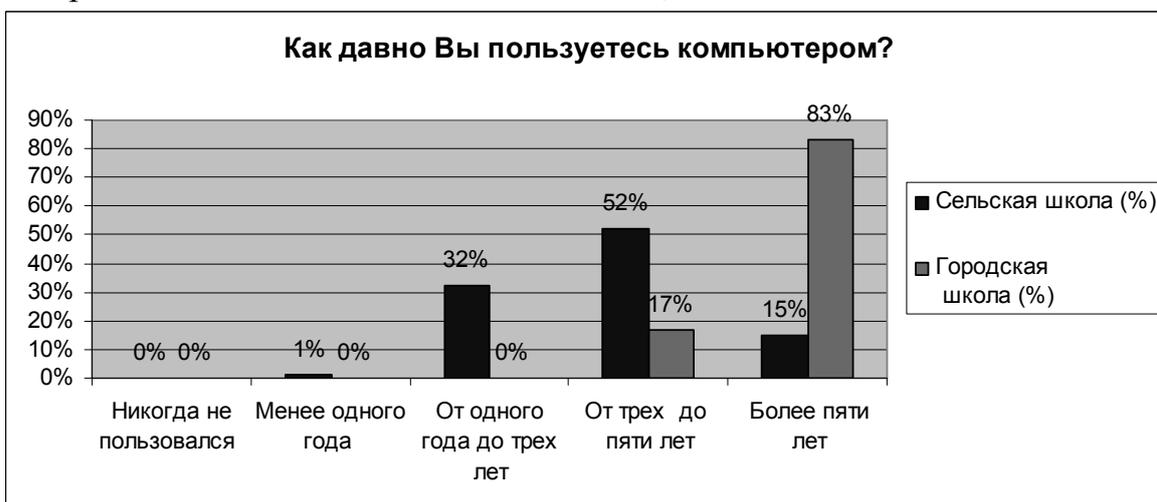
- 45% сельских школьников получили возможность свободно пользоваться домашним компьютером не более 3-х лет назад, в то время как у 62% учеников городских школ такая возможность появилась более 3-х лет назад;



- 86% сельских школьников на настоящий момент имеют неограниченный доступ к Интернету, это на 7% меньше того же показателя среди городских учеников;



○ 83% учащихся городских школ имеют опыт использования компьютера более пяти лет, по сравнению с сельскими школами, в которых этот показатель составляет 15% ;

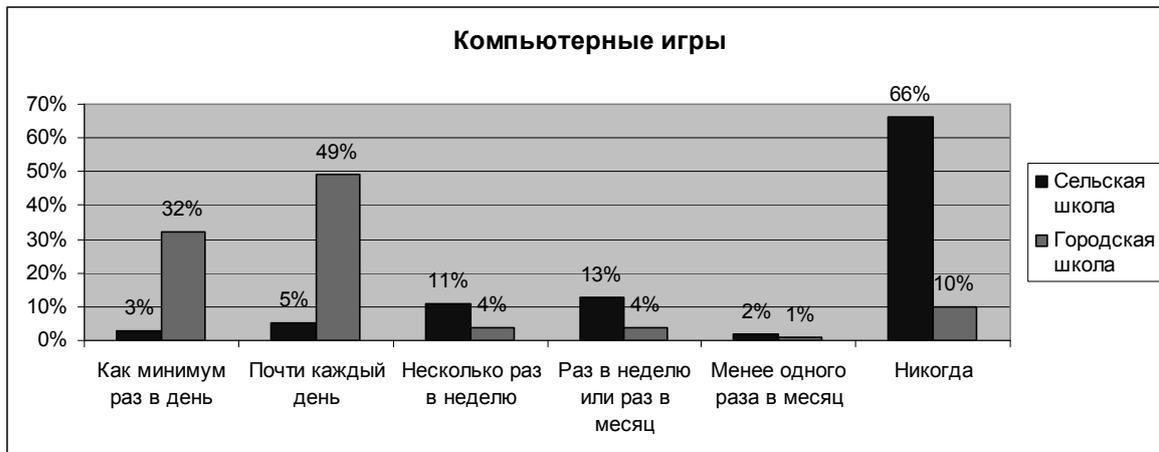


○ 84% сельских школьников как минимум раз в день используют Интернет для общения на форумах или по электронной почте;

○ 20% сельских и 34% городских учеников ежедневно используют компьютер для выполнения домашнего задания;



○ 66% сельских школьников утверждают, что никогда не играли в компьютерные игры, между тем половина из опрошенных учеников городских школ играют в компьютерные игры почти каждый день;



○ 33% опрошенных, находясь в школе - не имеют доступа в Интернет ни на уроках, ни вне уроков;

○ 99% учащихся утверждают, что на уроках математики, геометрии и алгебры учителя никогда не используют компьютер в образовательном процессе;

○ 61% учеников сельских школ считают, что использование компьютера в обучении помогает совершенствовать навыки работы на ПК; среди городских учеников самым главным достоинством компьютера является то, что он позволяет сделать контроль собственных знаний более объективным (не зависящим от мнения учителя), этот вариант ответа выбрали 37% опрошенных;



○ 97% учащихся утверждают, что на уроках физики не используется специализированное программное обеспечение (живая физика, виртуальная лаборатория и т.д.);

○ Число обучающихся на данном уровне образования, приходящихся на один компьютер, используемый в учебном процессе (по данным Департамента образования города Смоленска 2011 год), – 33.

За последнее время число современных компьютеров в школах значительно увеличилось, но анализ их использования в

образовательном процессе показывает, что в большом количестве школ они применяются только для изучения информатики в рамках учебного предмета. Однако информатизацию школы характеризуют не столько установленные компьютеры и уроки информатики, сколько эффективность их применения в учебном процессе в целом. Необходимо увеличить время использования компьютеров в обучении различным предметам на уроках и во внеурочное время. Средства информационных и коммуникационных технологий школы могут и должны использоваться в гораздо большей степени, чем используются в настоящее время.

## **ФОРМИРОВАНИЕ ТЕСТОЛОГИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ ШКОЛЬНИКА: КРИТЕРИАЛЬНО-ПРИЗНАКОВЫЙ АППАРАТ**

**Е.Н. ЕВДОКИМОВА**

Смоленский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы, г. Смоленск  
e-mail: Evdokimova\_katya@inbox.ru

Модернизация образовательной системы затронула все ее элементы и звенья и повлекла за собой создание новых условий, изменение содержания образования, внедрение в учебно-образовательный процесс новых технологий и средств оценивания.

Неотъемлемой частью учебно-воспитательного процесса в целом и учебной деятельности в частности в настоящее время является тестирование как форма контроля, самоконтроля и обучения. В этой ситуации перед учителями кроме основной задачи формирования знаний и умений учащихся встают и другие. Это задачи, связанные с подготовкой учащихся по следующим направлениям: понимание содержания теста и инструкции к нему, т.е. концентрация внимания, умение выделять существенные признаки; распределение времени ответа на тест; актуализация для ответа необходимой и достаточной информации из объема памяти, умение анализировать и синтезировать информацию и др.

Решение этих задач связано с повышением культуры тестирования учащихся. Этой проблематике посвящено наше исследование.

Нами проведен констатирующий этап эксперимента, анализ результатов которого, а также изучение литературных источников позволили сделать следующие выводы:

- формирование культуры тестирования должно являться важной составляющей учебной деятельности современного школьника;

- культура тестирования учащегося – важная составляющая его общей культуры;
- формирование культуры тестирования учащихся должно начинаться с младших классов;
- формирование культуры тестирования учащихся должно включать в себя повышение уровня теоретико-методологических знаний и навыков в области тестирования, психологическую подготовку к подобной форме работы, а также формирование личностного осознанного отношения учащихся к данной форме контроля.

Одним из условий проведения педагогического эксперимента является выделение критериев сформированности изучаемой характеристики (в нашем исследовании – тестологической культуры школьника). Каждому критерию необходимо подобрать качественные показатели или признаки нескольких порядков, по мере проявления которых можно судить о большей или меньшей степени выраженности данного критерия. С этой целью для всех признаков с применением некоторых диагностических методик высчитываются количественные показатели, дальнейший анализ которых позволяет определить показатель сформированности исследуемого качества (тестологической культуры). Таким образом, получается критериально-признаковый аппарат диагностики для исследуемого вида культуры. На основе анализа научно-педагогической литературы и эмпирических данных, полученных на констатирующем этапе педагогического эксперимента, нами были выделены следующие критерии и их признаки.

*Общекультурный критерий* является базисом формирования культуры. Включает в себя следующие признаки: ценностное отношение к тестам с позиции мировоззренческих структур сознания (понимание роли и значения тестирования в современном образовании; осознание собственного профессионального, общекультурного и мировоззренческого развития в тестологической деятельности), следование этическим и нравственным нормам в тестологической деятельности (способность к толерантному взаимодействию со всеми участниками тестологической деятельности, положительная эмоционально-волевая направленность личности), широта тестологического кругозора, предполагающая знание исторического аспекта и современных тенденций тестирования, системность в овладении тестологическими знаниями и умениями.

*Мотивированность* является регулятором и важным рычагом активизации тестологической деятельности; отражает степень осознанности, личностной обоснованности тестологической деятельности. Характеризуется следующими признаками: сила и устойчивость мотивации, положительная мотивация (направленность на

успех в тестологической деятельности), доминанта внутренней мотивации.

*Психологическая готовность к тестологической деятельности* отражает степень сформированности и развития психических процессов (память, мышление, внимание и др.), состояний (напряженность, стрессоустойчивость) и свойств (направленность, способности) школьника в ходе тестологической деятельности. В рамках данного критерия нами выделены следующие признаки: стрессоустойчивость (допустимый уровень тревожности, самообладание в стрессовой ситуации, уверенность в собственных силах), внимательность (умение концентрировать внимание при выполнении тестов, волевая саморегуляция поведения), память (умение актуализировать в памяти нужную информацию, умение максимально использовать ресурсы собственной памяти, умение поддерживать состояние работоспособности в течение всего времени выполнения теста), преобладание логико-синтетического мышления (владение способами логической работы с информацией).

*Теоретическая готовность к тестологической деятельности* отражает степень информированности школьника о различных аспектах тестологической деятельности и включает в себя следующие признаки: знание правовых основ тестологической деятельности, знание основ тестологии (общая информированность), знания методов оценивания тестовых заданий и в целом теста.

*Технологическая готовность* отражает степень овладения школьником практической стороной тестологической деятельности: сформированность организационных умений и навыков (умение грамотно распределять время при выполнении теста, умение эргономично организовать рабочее место, умение спланировать свою деятельность при подготовке к тестированию, умение работать с бланками ответов), сформированность методологических умений и навыков (знание и применение стратегий выполнения тестовых заданий, разработка собственных стратегий выполнения тестовых заданий, умение работать с инструкцией к тесту, умение разумно выбрать задания, для получения желаемой оценки), специальные умения (наличие тестовой искушенности, умение работать с разными формами тестовых заданий), рефлексия (наличие объективной самооценки степени сформированности тестологической культуры; самостоятельное планирование и реализация своего тестологического развития; постоянство проведения самооценки в тестологической деятельности, владение технологиями проведения самооценки, сформированность навыков самоконтроля).

Разработанный критериально-признаковый аппарат позволит измерить уровень сформулированности тестологической культуры учащихся, корректировать и развивать исследуемый вид культуры.

### **Литература**

1. Зимняя И.А. Педагогическая психология: учебник для вузов. 2-е изд., доп., испр. и перераб. – М.: Издательская корпорация «Логос», 2000. – 114 с.
2. Кабанова. Т.А., Новиков В.А. Тестирование в современном образовании: учеб. пособие для вузов, – М.: Высш. школа, 2010. – 381с.: ил.
3. Кадневский В.М. Генезис тестирования в истории отечественного образования: автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.01. – Екатеринбург, 2007. – 12 с.
4. Крайник В.Л. Формирование культуры учебной деятельности будущего педагога: дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.08. – Барнаул, 2008 – 118 с.
5. Позина М.Б. Психология и педагогика: учеб. пособие / науч. ред. И.Ф. Неволин. – М.: Университет Натальи Нестеровой, 2001. – 54 с.
6. Сафонова Г.А. Формирование готовности старшеклассников к единому государственному экзамену: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01. – Оренбург, 2010 – 33 с.

## **СИСТЕМА МОНИТОРИНГА КАК ГАРАНТ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭЛЕКТРОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ**

**М.П. ЕФРЕМЕНКОВ**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: estet.tk@mail.ru

Создание и внедрение электронной образовательной среды в школе порождает большое количество новых трудно разрешимых проблем. Главными из них становятся отсутствие информационно-технологической компетентности большинства сотрудников образовательных учреждений, а также полное отсутствие системы мониторинга электронной образовательной среды. И если проблема информационно-технологической компетенции учителей решается с успехом в последние годы, то проблема системы мониторинга электронной образовательной среды остается нерешенной. Созданная электронная образовательная среда школы лишается возможности развития, целенаправленной коррекции и оценки результатов обучения.

Под мониторингом понимается специфическая деятельность, направленная на оценку состояния наблюдаемого объекта, отслеживание происходящих в нем изменений и прогнозирование их в будущем.

Цель мониторинга – оперативно и своевременно выявлять все изменения, происходящие в сфере образования. Полученные объективные данные являются основанием для принятия управленческих решений.

Достижение цели мониторинга – неперенное условие того, что управленческое воздействие будет адекватным ответом на те вызовы, которые предъявляет системе образования глобализация, информатизация и инновационность образования.

Существенным фактором построения эффективной электронной образовательной среды являются качественные информационные ресурсы учебной компоненты данной системы, мониторинг которых должен производиться в первую очередь.

Информационные ресурсы учебной компоненты среды должны отвечать стандартным дидактическим требованиям, предъявляемым к традиционным учебным изданиям. В их числе: требования научности, доступности, проблемности, наглядности, сознательности, систематичности и последовательности обучения, требование содержательной и функциональной валидности контрольно-измерительных информационных ресурсов, требование к прочности усвоения знаний. Вместе с тем, учитывая электронную форму представления информации в электронной образовательной среде, к информационным ресурсам можно предъявить специфические дидактические требования, обусловленные использованием преимуществ современных информационных и телекоммуникационных технологий. С дидактическими требованиями к информационным ресурсам учебной компоненты среды тесно связаны методические требования, которые предполагают учет своеобразия и особенностей конкретной предметной области, на которую рассчитаны информационные ресурсы, специфики соответствующей науки, ее понятийного аппарата, особенностей методов исследования ее закономерностей, возможностей реализации современных методов обработки информации. Именно информационные ресурсы как основной информационный пласт электронной образовательной среды требуют особого внимания со стороны лиц, проводящих мониторинг.

Постоянный мониторинг электронной образовательной среды позволит увидеть все изменения в показателях ее параметров, позволит произвести своевременную корректировку элементов системы, как учитывая требования к образовательному пространству, так и исходя из учебно-воспитательных целей учебного заведения. Также мониторинг позволит отслеживать динамику развития среды и ее нереализованные

возможности, необходимость развития информационно-технологической и социально-педагогической компетенций учителей.

Таким образом, мониторинг является одним из важнейших средств, благодаря которому изменяется само информационное пространство, так как повышается оперативность, объективность и доступность информации.

Предоставление услуг электронного обучения посредством электронной образовательной среды должно подвергаться мониторингу и управляться на постоянной основе, чтобы гарантировать его эффективность. Оно должно проходить плановую проверку и обновление.

## **ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ВИЗУАЛИЗАЦИИ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА: КОНСТАТИРУЮЩИЙ ЭТАП ЭКСПЕРИМЕНТА**

**Е.И. КОЧАНЕНКОВ**

ООО «ЭТНА И-ЭЙЧ-ЭС» г. Смоленск

e-mail: hoochiman@yandex.ru

В статье рассмотрены основные понятия, встречающиеся при проектировании процесса обучения посредством визуализированного представления данных, а также представлены результаты исследования, выявляющие актуальность данной проблемы.

Педагогическое проектирование заключается в содержательном, организационно-методическом, материально-техническом и социально-психологическом (эмоциональном, коммуникативном и т.п.) оформлении замысла реализации целостного решения педагогической задачи [1]. Выявив потребность каждого из этих направлений, можно качественно улучшить всю организацию педагогического процесса посредством автоматизированной системы с использованием визуального представления данных, которая поможет педагогическому и административному персоналу учебных заведений в своей непосредственной деятельности. При этом акцент делается именно на визуальное представление данных, так как данная технология предполагает интуитивно понятный интерфейс, что позволяет быстро ориентироваться в системе независимо от стажа работы в ней и что немаловажно – стажа работы на компьютере и возраста пользователя.

Известно, что большую часть информации об окружающем мире человек получает с помощью зрения, поэтому представление данных в виде визуальных объектов, а не атрибутивных значений (числовых или

текстовых описаний таких объектов) способно существенно увеличить скорость их восприятия и усвоения. При этом информация, с которой мы сталкиваемся – от элементарных данных до сложных смыслов, представляется посредством визуальных моделей, собирающихся в итоге, как пазл, в знания. Данное понимание особенно актуально при разработке автоматизированных систем, позволяющих управлять педагогическими процессами.

Резюмировав вышесказанное, дадим свое рабочее определение визуализации педагогического процесса.

Визуализация педагогического процесса – это комплекс программно-технических средств, который позволяет моделировать, производить контроль и анализировать процессы педагогической деятельности, работа с которыми производится с помощью рисунков, графиков, диаграмм, структурных схем, таблиц и иных средств визуального отображения информации.

Экспериментально-практическое исследование проводилось нами среди студентов пятого курса физико-математического факультета Смоленского государственного университета. Основная цель исследования заключалась в оценке текущего состояния рынка в сфере автоматизации педагогического процесса и активности использования этого программного обеспечения. В качестве дополнительной аналитики выявлялись препятствующие факторы использования средств автоматизации в педагогической деятельности, а также респондентам была предоставлена возможность внесения предложений по повышению качества управления педагогическим процессом.

Данные констатирующего этапа исследования показали, что 68,3% знают о существовании подобных систем, из них только 48% работали в этих системах: для формирования учебного плана – 16,7%; для работы на уроке – 22%; для использования системы в качестве справочной информации – 28%. Наиболее распространенной системой оказалась MyTest, ею пользовалось 68,3% респондентов, затем – автоматизированная система «Мониторинг», ее популярность составила 22%; далее следует система «Персональный учитель», с которой работало 16,7% респондентов.

Проблемы использования средств автоматизации, по мнению большинства участников опроса, заключаются в ограниченных ресурсах школы, в недостатке времени на изучение нового программного обеспечения и в отсутствии поддержки при возникновении вопросов в процессе работы с системой. Для повышения качества управления педагогическим процессом были внесены предложения: эффективное управление образовательным процессом достигается, если будет вестись работа по всем направлениям этого процесса в единой системе, что

автоматически влечет за собой снижение временных затрат посредством полного перехода на электронный документооборот.

Результаты констатирующего этапа исследования учтены нами в дальнейшем проектировании системы управления образовательным процессом.

### **Литература**

1. Слостенин В.А., Исаев И.Ф., Шиянов Е.Н. Педагогика: учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2002. – 576 с.

2. Кузнецов И.Н. Настольная книга практикующего педагога. – М.: 2008.

3. Расулов К.М., Самойлова Т.А., Сенькина Г.Е. Проектирование педагогического портала образовательного учреждения: методические рекомендации для руководящих работников образовательных учреждений. – Смоленск, 2007.

## **ИЗ ОПЫТА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРЕПОДАВАНИИ ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН**

**Е.И. ЛОВЕНЕЦКАЯ, О.Н. ПЫЖКОВА**

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск  
e-mail: e\_blinova@mail.ru; p\_on@mail.ru

За последние годы произошло коренное изменение роли и места персональных компьютеров и информационных технологий в жизни общества. Информационный взрыв привел к появлению в педагогике понятия информатизации обучения. С появлением компьютеров в учебных заведениях начал меняться стиль преподавания, стали возникать новые формы организации учебного процесса. Компьютер, информационные ресурсы Интернета, сетевые технологии существенно изменяют способы освоения и усвоения информации, открывают новые возможности для интеграции различных действий. В 1996 году II Международный конгресс ЮНЕСКО «Образование и информатика» объявил информационные технологии стратегическим ресурсом в образовании.

Внедрение информационных технологий в учебный процесс позволяет гибко сочетать фундаментальную и прикладную составляющие обучения математике. Это особенно актуально для таких учебных курсов, как «Планирование и организация эксперимента», «Методы оптимизации и статистической обработки данных», «Эконометрика и экономико-математические методы и модели»,

призванных обеспечить студента научно обоснованным инструментарием организации экспериментальных исследований и обработки их результатов, познакомить с математическими моделями и методами анализа производственных и экономических процессов.

На кафедре высшей математики Белорусского государственного технологического университета проводится большая работа по использованию современных информационных технологий в преподавании прикладных математических дисциплин. При этом ставится задача не перекладывать на компьютер традиционно сложившиеся методы и приемы обучения, а перестраивать их в соответствии с новыми возможностями, которые дают компьютеры.

Наиболее распространенный способ внедрения информационных технологий в сферу образования – создание презентаций. Представление материала в презентационной форме стимулирует предметно-образную память студентов, познавательную и творческую их активность, позволяет увеличить коэффициент усвоения учебного материала, повышает интерес обучаемых к предмету. При чтении лекций по дисциплине «Планирование и организация эксперимента» мы не используем лекции-презентации для традиционного написания студентами конспекта лекций, поскольку выдаем полный конспект лекций заранее. Это позволяет сделать основным содержанием презентаций обобщение и структурирование материала, а также представление и обсуждение иллюстративных примеров использования изучаемых статистических процедур и методов планирования экспериментальных исследований. Кроме этого, делаются попытки привлечения самих студентов к подготовке и презентации на лекциях сообщений по отдельным темам, как входящим в программу курса, так и смежным с программными. Такие отступления от обычного течения учебного процесса значительно оживляют интерес аудитории, а обсуждение внепрограммного материала расширяет ее представление о существующих статистических методах.

Специфика задач анализа экспериментальных данных приводит к необходимости использования компьютера и при проведении практических занятий. Для усвоения наиболее важных тем курса, которые активно используются в прогнозных расчетах, планировании и организации производственных процессов, программой предусмотрено выполнение индивидуальных заданий с расчетами на компьютере. Основные темы этих заданий – подбор аппроксимирующей зависимости, обработка результатов регрессионных экспериментов, планирование и проведение активных многофакторных регрессионных и экстремальных экспериментов, т.е. задачи, требующие большого объема вычислений, а при «проведении» активных экспериментов – возможности «измерения» результатов опытов при любой заданной студентом комбинации

факторов. Планирование самостоятельной работы с использованием информационных технологий, когда в результате деятельности появляется конечный продукт – расчеты, графики, математическая модель, демонстрирует применение математических методов при решении исследовательских задач и значительно активизирует интерес к предмету.

Таким образом, компьютерные технологии позволяют добиться более высокого уровня наглядности изучаемого материала, значительно расширяют возможности использования различного рода заданий и упражнений, оживляют учебный процесс, делая его более динамичным и разнообразным. Опыт показывает, что у студентов повышается качество базовых знаний, умений и навыков в практическом использовании математических методов, развивается умение применять информационные технологии в процессе математического моделирования, формируются адекватные представления о математической составляющей будущей профессиональной деятельности.

## **ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ САЙТОВ: КОНСТАТИРУЮЩИЙ ЭТАП ЭКСПЕРИМЕНТА**

**И.Е. МЕТЕЛИЦА**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: ira-for-ira@yandex.ru

Построение в России информационного общества предполагает решение системой образования задачи ее информатизации, которая требует формирования информационной компетентности, подготовки граждан к жизни в условиях современного мирового сообщества и повышения качества образования на основе использования ИКТ в обучении [1; 2].

Учебные заведения обязаны иметь своё представительство в сети Интернет (ФЗ от 8 ноября 2010 г. N 293-ФЗ «О внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации в связи с совершенствованием контрольно-надзорных функций и оптимизацией предоставления государственных услуг в сфере образования»). Однако, не во всех образовательных учреждениях есть компетентные сотрудники, способные создать качественный, продуманный web-ресурс и не каждое образовательное учреждение имеет средства для разработки web-ресурса у сторонних разработчиков.

Ранее проведенные исследования (например, [3; 4; 5]) выявили значимость создания учебных информационных веб-ресурсов.

По мнению специалистов в области информатизации образования [1; 6; 7; 8], практика использования ИКТ на сегодняшний день отстает от их возможностей. Это связано с недостаточным овладением средствами и методами ИКТ учителями и учащимися.

Опираясь на эти данные, мы предполагаем, что автоматизированное проектирование образовательных сайтов, как универсальное средство создания таких сайтов, предоставит широкие возможности для обучения, в том числе и удаленного, представления результатов исследований, творческих работ, а также позволит преподавателям достаточно быстро разработать качественный интернет-ресурс.

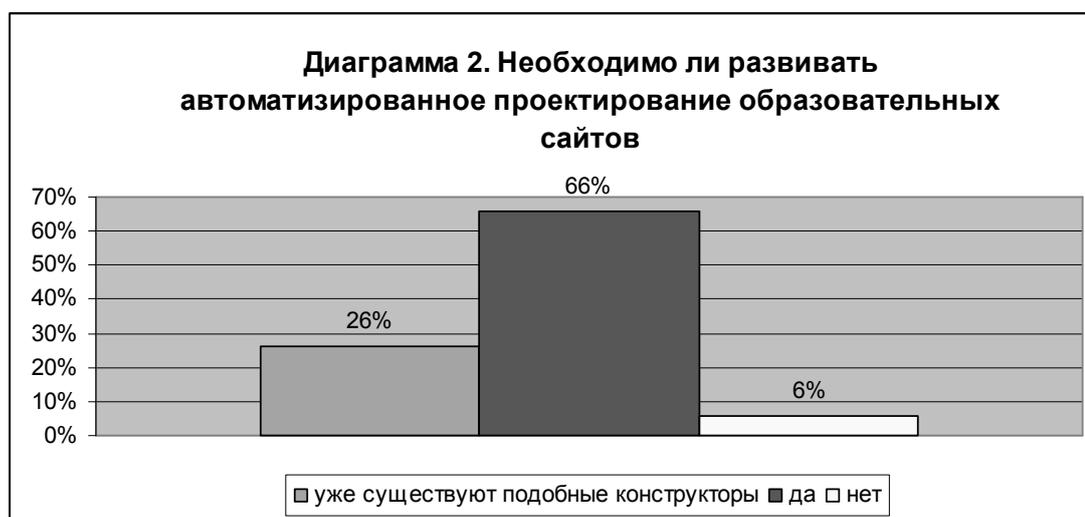
Исследование проводилось на базе Смоленского государственного университета среди студентов пятого курса. По результатам анкетирования проведен анализ и математическая обработка полученных данных.

Все участники анкетирования (100%) определяют образовательный сайт как сайт, предназначенный для размещения преподавателем учебной информации средств контроля и самоконтроля учащихся и средств общения с учителем.



Из 100% опрошенных 93% считают, что самостоятельное создание образовательного сайта является посильной задачей; среди них 29% отмечают, что для самостоятельного создания сайта учителем необходимы большие временные затраты; 21% отмечает необходимость изучения специальной литературы; 14% считают, что только при личной заинтересованности учитель возьмется за создание сайта и 26% респондентов утверждают, что учитель обладает всеми необходимыми

ресурсами для создания образовательного сайта (диаграмма 1); остальные 7% считают, что учитель не сможет создать образовательный сайт без средств автоматизированного проектирования.



При ответе на вопрос 4 о необходимости развития автоматизированного проектирования образовательных сайтов 66% ответили, что такая необходимость существует, 6% отрицают необходимость развития автоматизированного проектирования и 26% отмечают, что конструкторы сайтов уже существуют, однако следует заметить, что такие конструкторы не направлены на создание собственно образовательных сайтов, а на широкий круг интернет-ресурсов (блоги, интернет-магазины, сайты-визитки).

Все респонденты (100%) согласились с тем, что образовательные сайты должны обеспечивать различные материалы для различных категорий пользователей.

Таким образом, в ходе проведенного исследования выявилась необходимость развития автоматизированного проектирования образовательных сайтов в связи с небольшим количеством разработок и исследований в данной области.

### Литература

1. Ваграменко Я.А. Информатизация общего образования: итоги и направления дальнейшей работы // Педагогическая информатика. – 1997. – № 1.
2. Ваграменко Я.А. Новые аспекты информатизации образования // Педагогическая информатика. – 2000. – № 3.
3. Гура В.В. Гуманитарный потенциал педагогического проектирования электронных образовательных ресурсов // Педагогика: семья, школа, общество. Кн. 6 / под ред. О.И. Кирикова. – Воронеж, 2006.

4. Шестакова Т.Н. Педагогическое проектирование учебного информационного веб-ресурса образовательных учреждений: автореф. дис. ... канд. пед. наук. – Ростов-на-Дону, 2007.

5. Шакаримова А.Б. Разработка методов и моделей проектирования образовательного портала для управления учебным процессом вуза: автореф. дис. ... канд. пед. наук. – Усть-Каменогорск, 2006.

6. Гершунский Б.С. Образование в третьем тысячелетии: гармония знания и веры. – М.: Московский психолого-социальный институт, 1997.

7. Власова Е.З., Ильина Т.Ю., Копыльцов А.В. Информационные технологии в образовании: учеб. пособие. – СПб., 2002.

8. Панюкова С.В. Информационные и коммуникационные технологии в личностно-ориентированном обучении. – М.: Изд-во ИОСО РАО, 1998.

## **УМК «ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА» КАК ВИРТУАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ**

**Е.В. МОРОЗОВА, О.С. МИРОШКИНА**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: elena\_morozova1972@mail.ru, alsenlis@mail.ru

Современный период развития системы образования характеризуется всё расширяющейся практикой внедрения в обучение новых информационных технологий, опирающихся на современную компьютерную технику. Оснащение школ компьютерной техникой и интенсивное использование её на уроке постепенно становится обязательным атрибутом современной школы. Информационные и телекоммуникационные технологии стали неотъемлемой частью современного образования. Компьютерные (информационные) технологии обучения – это процесс подготовки и передачи информации ученику с помощью компьютера.

Одним из эффективных средств для активизации учебного процесса, повышения интереса к предмету, наглядности на уроке является учебно-методический комплект (УМК) «Живая математика».

УМК «Живая математика» – это «компьютерная система интерактивного моделирования, исследования и анализа широкого круга задач при изучении геометрии, стереометрии, алгебры, тригонометрии, математического анализа. Компьютерная проектная среда для работы с геометрическими чертежами. Исключительно простая в освоении, она позволяет создавать красочные, легко варьируемые и редактируемые чертежи, осуществлять операции над ними, а также производить все необходимые измерения. Использование программы в преподавании

геометрии обеспечивает развитие деятельности учащегося по таким направлениям, как анализ, исследование, построение, доказательство, решение задач, головоломки и даже рисование» [1].

Следует отметить, что сама среда не является обучающей и «сама ничего не делает», – все чертежи в ней создаются пользователем, а программа лишь предоставляет для этого необходимые средства, так же как и возможности для усовершенствования чертежей и их исследования.

Одним из главных достоинств УМК «Живая математика» является возможность непрерывно менять объекты, что создает предпосылки для развития компьютерного эксперимента. Самым ярким, на наш взгляд, является тип «черные ящики». В нем наиболее ярко выявились новые дидактические возможности работы в виртуальном динамическом конструкторе. Задания предоставляют учащимся материал для изучения и освоения математических идей, понятий, методов, навыков через деятельность по созданию и исследованию математических объектов, другими словами – в ходе математического конструирования и эксперимента: на экране показаны какие-то объекты; одними из них можно управлять, положение других при этом изменяется по неизвестному правилу. На эмпирическом уровне требуется добиться заданного расположения объектов. На более высоком, теоретическом уровне нужно разгадать зависимость между объектами. Один из циклов таких заданий состоит из своего рода математических головоломок разных видов. В другом, преследующем более конкретную учебную цель, предлагаются пары фигур, одна из которых является образом другой при каком-то геометрическом преобразовании; его-то и надо восстановить.

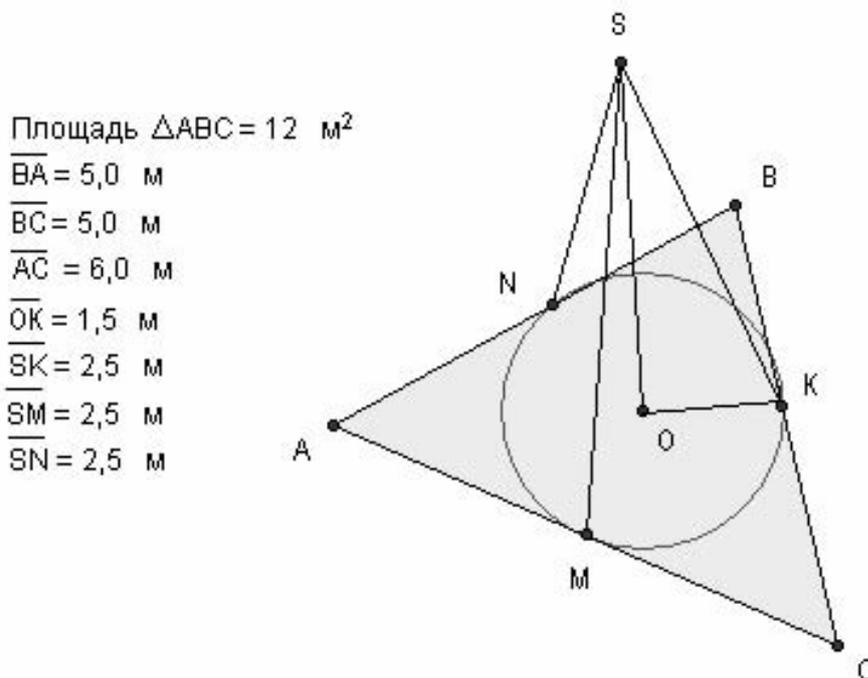
Результаты проведенного в рамках педагогической практики исследования с применением УМК «Живая математика» позволяют сделать вывод, что эта программа активно может быть использована как виртуальная математическая лаборатория не только в работе на уроке, но и для исследований в ученических проектах. Использование «Живой математики» позволяет сделать процесс работы учащихся интересным и наглядным, развивает творческую деятельность учащихся, их абстрактное и логическое мышление. Работа над задачами курса алгебры и геометрии с применением программы – это новый метод исследования.

Исследование проводилось в группах, где в основном были дети-сироты или дети из неблагополучных семей, многие из них настолько не любили математику, что всячески старались оградить себя от этого предмета, считая его скучным, занудным и, зачастую, не нужным. С помощью использования программы «Живая математика» удалось изменить стереотипное суждение ребят о математике, показать,

насколько она может быть интересна и в каких разных областях применима. Так, многих ребят привлекла возможность проявить вкус, красиво и нетривиально раскрашивать чертежи и заставлять объекты интересно двигаться, овладеть эффектными (и, по существу, несложными) средствами программы. Во всех случаях основами положительных эмоций явились отношения с чертежами – красивыми, интересными, понятными и, по возможности, самостоятельно изготовленными.

Изучение курса стереометрии в рамках педагогического эксперимента началось одновременно с ознакомлением с программой «Живая математика» и её возможностями. На первом же занятии интерес учащихся был очень высоким, и с каждым новым уроком, с каждым новым знанием, дети всё больше и больше увлекались этой программой, а заодно и самим предметом. Учитывая особенности будущих профессий школьников (слесарь, автомеханик, электрогазосварщик и др.), задачи из учебника были адаптированы согласно интересам обучающихся, например:

1. Дана металлическая пластина в форме равнобедренного треугольника с основанием 6 м и боковой стороной 5 м. В центр вписанного круга опущено сверло к плоскости пластины, расстояние от шпинделя до пластины 2 м. Требуется найти расстояние от шпинделя до сторон треугольной пластины.



2. В автосервисе рабочий на защите картера просверлил 4 отверстия:  $A(6;7;8)$ ,  $B(8;2;6)$ ,  $C(4;3;2)$ ,  $D(2;8;4)$  для непосредственного крепления её к автомобилю. Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  является ромбом.

Нетривиальные и яркие уроки, адаптированный задачный материал позволили подвести учащихся к осознанному и более глубокому изучению предмета, а также научили самостоятельно разбирать задачи, строить гипотезы и, владея теоретическим материалом, доказывать различные геометрические факты.

### Литература

1. Пантуев А.В. Виртуальные лаборатории и активизация работы школьников, // Стимулирование познавательной деятельности студентов и школьников. – М.: – МГПУ, 2002. с. 30–33.
2. Институт новых технологий. ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА: Сборник методических материалов. – М.: ИНТ, 2008.
3. Фридман О. Клиповое мышление. Что это такое? / Электронный познавательный журнал. <http://shkolazhizni.ru/archive/0/n-8011/>.
4. <http://www.bytic.ru/cue99M/cu849juj0.html> ИКТ в образовании.

## ЦИКЛЫ. УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА

**Б.В. СЕЛЮК**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Введение в школах и в вузах новых стандартов образования предполагает переход от чисто информативного обучения к личностно ориентированному обучению в процессе творческой учебной деятельности. Одной из форм организации такой деятельности в школе является учебно-исследовательская работа учащихся. В вузе – это выполнение отдельных творческих заданий и курсовые работы. Для обучения технологии творческой деятельности необходимы специальные занятия с преподавателем и методические разработки.

Подобные разработки, созданные на базе Mathcad, используются на кафедре физики при работе со студентами и учащимися физико-математической школы. Здесь рассказывается об одной из таких разработок. Она позволяет учащимся в процессе исследовательской работы за компьютером самостоятельно или под руководством преподавателя изучить положения термодинамики, относящиеся к тепловым машинам.

Учащимся предоставляется готовый

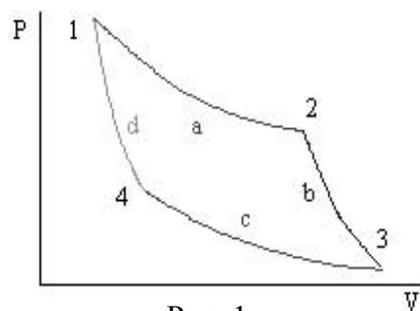


Рис. 1

документ Mathcad, содержащий краткую информацию об объекте исследования, задания и рекомендации, а также «живые» формулы и графики, мгновенно реагирующие на вносимые пользователем изменения. О системе Mathcad нужны лишь первоначальные представления, позволяющие вносить в отдельные блоки редакционные изменения в соответствии с содержащимися в документе рекомендациями.

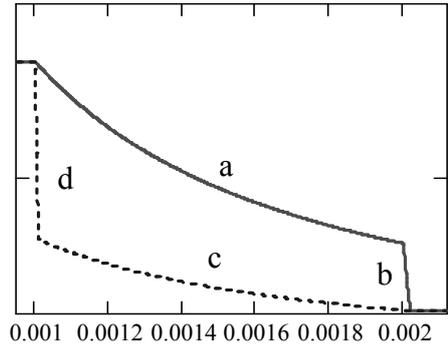


Рис. 2

Вначале дается краткая информация о цикле Карно, о политропических процессах, о коэффициенте полезного действия. Затем осуществляется построение цикла, изображенного на рисунке 1, средствами Mathcad при задаваемых пользователем параметрах. При этом учащиеся выводят уравнение политропы, находят координаты граничных точек цикла, используя, в частности, символьные вычисления.

Затем, задавая различные значения параметров, ученики получают и исследуют циклы, изображенные на рисунках 2–4.

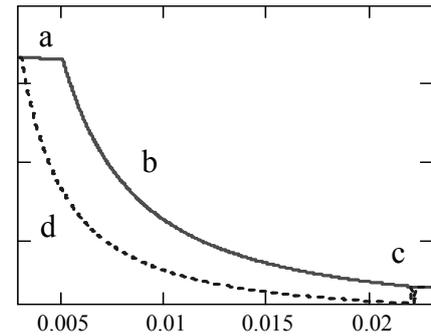


Рис. 3

Выясняется, что чем больше показатели  $k$  политроп  $d$ ,  $b$  (рис. 2) и  $c$  (рис. 3), тем круче эти политропы, то есть тем меньше они отличаются от изохор, для которых  $k = \infty$ . На рисунках 2 и 4 участки  $a$  и  $c$  – изотермы. Для них  $k = 1$ . Участки  $b$  и  $d$  на рисунках 3 и 4 – адиабаты. Для них  $k = \gamma$  – адиабатическая постоянная. На участке  $a$  рисунка 3  $k \ll 1$ , поэтому этот участок мало отличается от изобары, для которой  $k = 0$ .

В цикле Карно (рис. 4) точки 2 и 4 расположены ближе друг к другу по сравнению с тем, как это обычно изображают для большей наглядности в учебниках. Параметры характерных точек цикла Карно измеряются непосредственно на графике и сравниваются с вычисляемыми компьютером значениями.

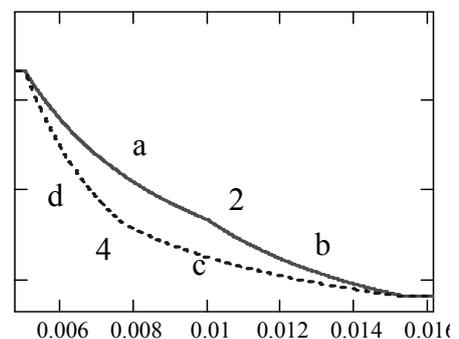


Рис. 4

Вычисляется КПД  $\eta(C)$  цикла, состоящего из двух изотерм и двух политроп с одинаковыми теплоемкостями  $C$ . Результаты представляются в виде графика (рис. 5). Видно, что максимальное значение функция  $\eta(C)$  принимает при  $C = 0$ , то есть для цикла Карно, состоящего из двух изотерм и двух адиабат. Это значение оказывается равным  $1 - T_c/T_a$ .

Таким образом учащиеся убеждаются в справедливости формулы Карно.

Сообщается, что карбюраторные двигатели внутреннего сгорания работают по циклу, изображенному на рисунке 2, а дизельные – по циклу, представленному на рисунке 3. Рассказывается о том, как реализуются эти циклы в двигателях.

Для карбюраторного двигателя вычисляется коэффициент полезного действия. Получается формула  $\eta = 1 - \varepsilon^{(1-\gamma)}$ , где  $\varepsilon$  – коэффициент сжатия. Применение этой формулы для цикла, изображенного на рисунке 2, показывает, что КПД оказывается меньшим, чем  $1 - T_c/T_a$ . Так и должно быть по теореме Карно.

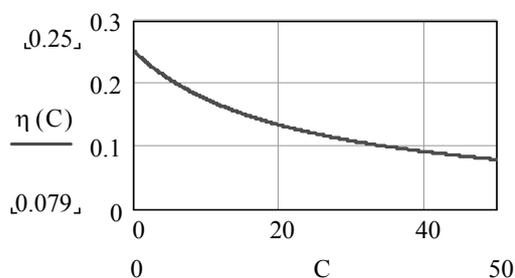


Рис. 5

Сообщается, что для дизельного двигателя КПД зависит от коэффициента сжатия и коэффициента изобарического расширения. Конечно, он оказывается меньше, чем у цикла Карно, при том же отношении минимальной и максимальной температур.

Выполнение подобных учебно-исследовательских работ доступно школьникам 10 и 11 классов, проявляющим интерес к физике. Полезны такие работы и студентам, изучающим физику.

## ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК С ТРЕНИЕМ

**Б.В. СЕЛЮК**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Одним из видов учебно-исследовательских работ по физике может быть решение задач с продолжением, инициированным этим решением. Фактически подобным образом осуществляется процесс научного познания. Применение известных научных положений порождает новые вопросы, поиск ответов на которые ведет к новым знаниям, обеспечивает прогресс науки.

В данном сообщении речь идет о методической разработке, созданной на базе Mathcad и «Живой физики», позволяющей организовать учебно-исследовательскую работу учащихся 11 класса и студентов, изучающих физику, в форме решения задачи с продолжением.

Предлагается следующая задача:

**Задача.** К горизонтально расположенной пружине жесткостью  $k = 1$  Н/м прикреплено тело массой  $m = 0,1$  кг, находящееся на горизонтальной поверхности с коэффициентом трения  $\mu = 0,1$ . В начальном положении пружина растянута на величину  $x_0$ . Телу толчком сообщили скорость  $v_0$ . Описанная в задаче ситуация реализована в «Живой физике» (рис. 1), где для сравнения приводится также модель с идеально гладкой поверхностью.

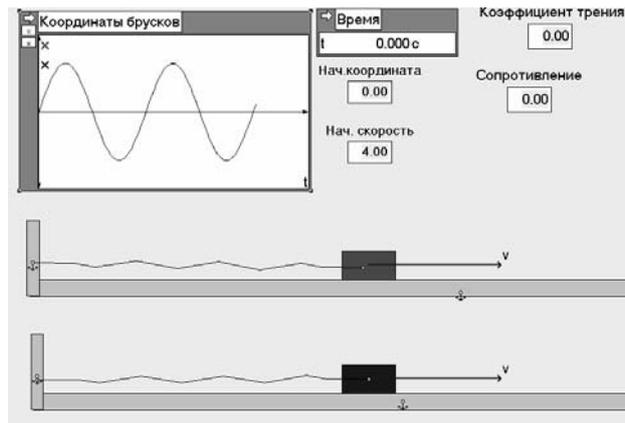


Рис. 1

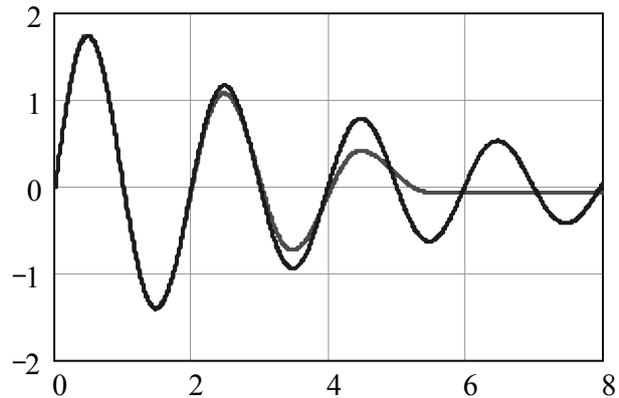


Рис. 2

Вначале предлагается просто измерить период колебаний бруска  $\tau$  при  $\mu = 0$  и объяснить полученный результат. Затем рекомендуется исследовать качественно, какое влияние на колебание бруска оказывает сопротивление среды. Возникает вопрос: эквивалентна ли замена сопротивления среды трением о поверхность? Оказывается, что характер затухания колебаний качественно изменяется (рис. 2).

Появляются новые вопросы. Сколько времени  $t_1$  брусок будет двигаться от начала координат до максимального отклонения от положения равновесия? Какова величина этого отклонения  $x_m$  при  $v_0 = 4$  м/с? Через какое время  $t_k$  после начала движения брусок остановится? Величины эти находятся непосредственно из виртуального эксперимента.

Цель дальнейшей работы – дать теоретическое обоснование наблюдаемым явлениям. Для этого нужно получить динамические уравнения движения бруска под действием силы трения, а также и при скольжении по гладкой поверхности при наличии сопротивления среды.

Аналитическое решение первого уравнения на начальном этапе при  $t \leq t_1$  ученики находят самостоятельно:

$$x(t, A, \phi) = A \sin(\omega t + \phi) - \frac{\mu \cdot m \cdot g}{k}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A = \frac{v_0}{\omega \cdot \cos \phi}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{\mu \cdot g}{v_0 \cdot \omega}\right).$$

Решение уравнений во всем временном интервале осуществляется численно средствами Mathcad и выводится в виде графиков, аналогичных представленных на рисунке 2. Эти графики качественно и количественно сравниваются с «экспериментальными» кривыми и результатами измерений на модели (рис. 1).

В частности, выясняется, что при скольжении по шероховатой поверхности соседние максимумы отличаются на одинаковые величины. Применяя закон изменения энергии, ученики находят эти величины и вычисляют  $x_m$  и  $t_k$ . Результаты сравниваются с «экспериментом». Проверяется также постоянство логарифма отношения последовательных максимальных отклонений бруска в случае скольжения по гладкой поверхности при наличии сопротивления среды.

Формулируется дополнительная задача: с помощью закона изменения энергии найти скорость  $v_0$ , которую нужно сообщить бруску, отклоненному от положения равновесия на величину  $x_0$ , чтобы он вернулся

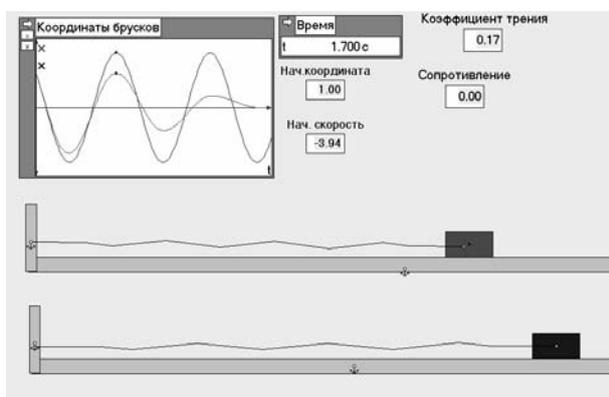


Рис. 3

в первоначальное положение с нулевой скоростью, найти также расстояние  $x_2$ , на которое в этом случае сместится брусок, сжимая пружину. Получается:

$$v_0 = -\sqrt{8\mu g \left( x_0 + \frac{\mu mg}{k} \right)}, \quad x_2 = x_0 + \frac{2\mu mg}{k}.$$

«Эксперимент» согласуется с этими формулами. Это видно из рисунка 3, полученного при  $x_0 = 1$  м, и  $\mu = 0,17$ .

## ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ ПРИ СМОЛЕНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ: ДИАГНОСТИКА И НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ

**Г.Е. СЕНЬКИНА, Г.Ю. АФАНАСЬЕВА**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск  
e-mail: gulzhans@mail.ru, soldatenkovag86@mail.ru

В ряду важных явлений отечественной сферы образования, порожденных демократическими реформами, одним из наиболее значимых с полным основанием можно считать дополнительное

образование детей. Сегодня дополнительное образование детей по праву рассматривается как важнейшая составляющая образовательного пространства, сложившегося в современном российском обществе.

Совершенствуя виды дополнительного образования для детей, мы добавляем важные моменты в становлении личности, в ее ранней профессиональной ориентации. Дополнительное образование помогает детям получать разностороннее образование по выбранной специальности.

В соответствии с государственным запросом, определившимся в нормативных документах, правительственных постановлениях, предполагается усиление профильных школ дополнительного образования на базе вузов.

Поэтому важно, какие виды дополнительного образования организованы в том или ином вузе и как обеспечивается качество обучения в данных учреждениях дополнительного образования.

С целью выявления востребованности, а также проблем и направлений развития нами проведено диагностическое исследование на базе действующей при СмолГУ с 2000 года очно-заочной физико-математической школы.

Для выявления вида дополнительного образования в нашем случае прежде всего необходимо определиться с термином «очно-заочное» обучение и ответить на вопросы: «Какое это обучение?», «Очное или все-таки заочное?», «В чем состоит отличие очной, очно-заочной, заочной форм обучения?». Очная форма обучения – одна из распространённых форм обучения, которая предполагает обязательное посещение учебных занятий, проводящихся по расписанию шестидневной учебной недели. Заочное обучение – вид учёбы, который сочетает в себе черты самообучения и очной учёбы. Характеризуется заочное обучение фазностью. В первой фазе организуется получение базы знаний, во второй – производится проверка усвоенного материала. При этом эти фазы заметно отстают друг от друга по времени. Очно-заочная форма предполагает 3 – 4 дня аудиторных занятий в неделю, как правило, во второй половине дня.

Таким образом, можно сделать вывод, что очная, очно-заочная, заочная формы обучения отличаются по количеству часов аудиторной работы с преподавателями в учебном плане и в очно-заочной форме обучения большее место занимает очная форма обучения, меньшее – заочная.

В эксперименте приняли участие 78 учащихся 8, 9 и 10 классов. Анализ результатов анкетирования дал возможность определить, что кроме физико-математической школы учащиеся посещают следующие учреждения дополнительного образования: 25% – различные кружки, 47% – спортивные секции, 12% – музыкальную школу, 14% – школу

английского языка. Кроме того, 4% опрошенных учеников хотели бы еще обучаться в очно-заочной естественно-географической школе, 10% в – химико-биологической, 3% в – школе гуманитарного профиля.

На вопрос «Как влияет дополнительное образование на качество обучения?» 90% ответило, что помогает, 9% – не влияет, и только 1% ответили, что мешает. Действительно, очно-заочную физико-математическую школу посещают 30% отличников, 67% хорошистов и только 3% учащихся, у которых большинство «троек».

При анализе отношения учащихся к обучению в очно-заочной физико-математической школе были получены следующие результаты: 80% учащихся нравится посещать данную школу. При выборе именно этой школы 57% учащихся руководствовались личным интересом, 24% тем, что полученные знания пригодятся в жизни, 14% заставили ходить родители и для 9% школьников школа находится недалеко от дома. (диаграмма 1)

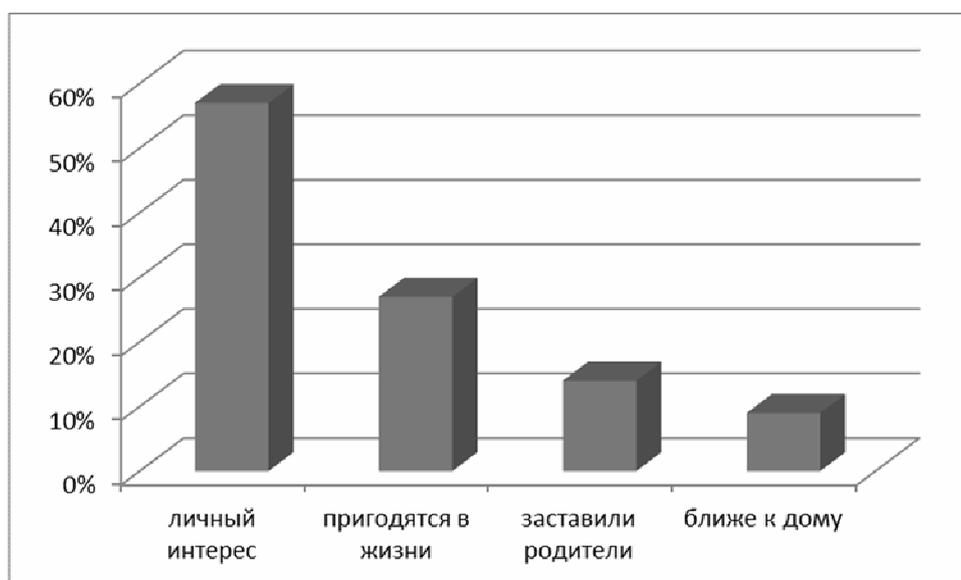


Диаграмма 1. Определение причин выбора очно-заочной школы

Более 60% учащихся хотят научиться решать в очно-заочной физико-математической школе различные логические и занимательные задачи, также задачи различной сложности. Остальные 40% целью для себя ставят научиться решать задачи из банка ЕГЭ, а также освоить новые методы решения задач.

При анализе достоинств очно-заочной физико-математической школы 42% учащихся указали высокий уровень обучения, 21% обрели новых интересных друзей и 37% отметили высокопрофессиональный уровень учителей (диаграмма 2).

В качестве недостатков были отмечены неудобный график учебы, а именно 23% учащихся не нравится позднее время учебы, поэтому иногда приходится пропускать школу, 19% не хватает количества

занятий в неделю. Для 25% опрошенных респондентов домашнее задание является сложным и они не всегда его успешно выполняют. Среди других недостатков были отмечены частая смена преподавателей, а также то, что школа находится далеко от дома (33% учащихся).



Диаграмма 2. Определение достоинств очно-заочной физико-математической школы

Таким образом, проанализировав полученные данные, можно сделать вывод о востребованности очно-заочной физико-математической школы, в которую большинство школьников идут учиться по личным мотивам. Данная школа помогает школьникам в обучении в общеобразовательной школе, влияет на выбор будущей профессии, а также развивает познавательный интерес к физико-математическим дисциплинам посредством решаемых заданий. Среди положительных сторон данной школы можно выделить высокий уровень обучения (преподавание ведут высокопрофессиональные учителя). Основным же недостатком такой школы, по мнению учащихся, – это обучение допоздна (в основном это отмечают ученики 8-х классов), а также то, что большое количество времени отводится на самостоятельное решение заданий.

Также в анкете были представлены вопросы, касающиеся необходимости наличия образовательного веб-сайта для очно-заочной физико-математической школы. Данный сайт хотели бы иметь 81% опрошенных учащихся. При этом 46% школьников хотели бы с помощью данного сайта получать доступ к методическим материалам очно-заочной школы в любое время, 44% – лишь иногда получать такую возможность. Пройти онлайн-курсы по интересующим темам пожелало 57% учащихся, 24% хотели бы иногда иметь такую возможность. За возможность получения дополнительной консультации преподавателя в

онлайн-режиме – 36% школьников, 47% хотели бы иногда иметь такую возможность.

Таким образом, можно сделать вывод, что большинство учащихся хотели бы пользоваться образовательным веб-сайтом, который предоставлял бы возможность пользоваться методическими материалами в любое время, проходить различные онлайн-курсы, получать консультацию преподавателей в онлайн-режиме. Возможности такого сайта улучшили бы эффективность обучения школьников в очно-заочной физико-математической школе.

В ходе констатирующего этапа эксперимента было подтверждено, что дополнительное образование школьников является важной частью современного образования детей. Свобода выбора объединений по интересам, отсутствие жёсткой регламентации делают дополнительное образование привлекательным для учащихся любого возраста. Оно имеет значительный педагогический потенциал и выступает зачастую главным фактором жизненного выбора. В процессе такого образования возможно создание ситуации успеха для любого ученика, что благотворно сказывается на воспитании его личностных качеств. Дополнительное образование даёт возможность сочетать досуг с различными формами образовательной деятельности, решая проблему занятости детей, профилактики их девиантного поведения.

К числу наиболее перспективных направлений развития очно-заочной физико-математической школы можно отнести использование форм и технологий дистанционного обучения, в частности образовательного веб-сайта для учащихся.

### Литература

1. Березина В.А. Развитие дополнительного образования детей в системе российского образования: учеб. пособие. – М.: Диалог культур, 2007. – 512 с.
2. Дополнительное образование. – М. 2003. – № 1.
3. Дополнительное образование. – М. 2003. – № 3.
4. Закон РФ «О дополнительном образовании»  
// <http://www.ubo.ru/normative/1>.
5. Сайт системы дистанционного обучения: Подробнее о дистанционных образовательных технологиях (ДОТ) [Электронный ресурс]. // Электронные текстовые данные. <http://dist.kgasu.ru/client/dotex.asp>, свободный.
6. Полат Е.С. Дистанционное обучение: организационные и педагогические аспекты. – М.: ИНФО, 1996 г. № 3.
7. Поляков А.А. Системы дистанционного обучения // Новые знания. – 1996. – № 3.

## ЦЕННОСТНЫЕ ОРИЕНТАЦИИ УЧАЩИХСЯ ЛЕТНЕЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

Т.А. ХУДОБКИНА

Филиал РГТЭУ, г. Смоленск  
e-mail: tatiana.hudobkina@yandex.ru

Молодой человек живёт в быстро изменяющемся, противоречивом, сложном мире, в котором объём информации возрастает в геометрической прогрессии.

Это отражается на формировании структуры ценностей подрастающего поколения, поскольку складывающиеся в настоящее время ценностные приоритеты становятся основой образования новой социальной структуры российского общества.

Изучение ценностных ориентаций молодого поколения – это благодатная почва для анализа различных аспектов жизни общества и тенденций его развития.

*Ценность* – многозначное понятие, которое характеризует сознание, поведение и цели социальной деятельности.

*Ценности* – это духовные и материальные феномены, имеющие личностный смысл, являющиеся мотивом деятельности. Ценности есть цель и основа воспитания. Жизненные ценности в настоящее время складываются в основном стихийно, под влиянием самых различных факторов.

*Ценностные ориентации* — отражение в сознании человека ценностей, признаваемых им в качестве стратегических жизненных целей и общих мировоззренческих ориентиров. Это одна из наиболее стабильных характеристик личности.

Как устойчивое самостоятельное структурное психологическое образование ценностные ориентации могут формироваться лишь на довольно позднем этапе возрастного развития - в переходный период от старшего подросткового к юношескому возрасту. Наличие ценностных ориентаций свидетельствует об определенном этапе начала формирования личности школьника, появлении таких психологических структур, которые в значительной степени способствуют становлению его мировоззрения. Они являются составными элементами сознания, частью его структуры.

Для диагностики ценностных ориентаций в качестве контрольно-измерительного материала использовалась методика «Ценностные ориентации», разработанная американским педагогом М. Рокичем. Объектом исследования выступили 30 школьников – учащихся 9–10 классов летней физико-математической школы, организуемой ежегодно СмолГУ и Управлением образования Администрации г. Смоленска на протяжении более десяти лет.

В результате данного исследования был получен *ценностно ориентационный портрет учащегося ЛФМШ*.

1. На первое место выходят личные ценности: *уверенность в себе*, от нее зависит умение убеждать, отстаивать свое мнение; предпочтение ценности *здоровье* свидетельствует о достаточно зрелой оценке, это объясняется приобретенным к 16 годам определенным личным опытом; *семейное счастье* – одна из важных ценностей современного подростка, так как, несмотря на характерное для юношеского возраста стремление к самостоятельности, старшеклассники все же нуждаются в понимании и поддержке родителей. Семья должна оставаться тем местом, где, независимо от посторонних неудач, ребенок сможет чувствовать себя спокойно и уверенно. *Материально обеспеченная жизнь* – по мнению ребят, деньги помогают добиваться в жизни успеха, от них зависят и уверенность в себе, и престиж, и общественное признание, и социальный статус, и многое другое. *Хорошие и верные друзья* – это одна из главных тенденций переходного возраста – переориентация общения с родителей, учителей и вообще старших на ровесников, более или менее равных по положению. Таким образом, у юношей и девушек возникает потребность довериться друзьям-сверстникам, которым должны быть ближе переживания юности, которые никогда не откажутся выслушать, понять, поддержать.

2. Середину иерархической системы занимает большая группа ценностей, которые в глазах подростков имеют устойчивое значение для личности, но представляются им второстепенными по сравнению с главными ценностями жизни. Сюда входят: «познание», «свобода и независимость в поступках и решениях», «счастье других людей», «полезность для общества», «общественное признание окружающих», «активная деятельная жизнь».

3. Последние в структуре ценностных ориентаций: равенство, братство, равные возможности для всех, творчество, высокая квалификация специалиста, удовольствия, развлечения, чувства прекрасного в природе и искусстве. Это указывает, что для средне выборочной характеристики старшеклассников указанные ценности не входят в число основных целей жизни человека.

Заметна некоторая тенденция доминирования ценностей личностного характера над социально ориентированными. Однако основным выводом исследования становится следующее утверждение: одной из главных причин негативных тенденций в духовной среде подростков является разрушение системы воспитания. Пока взрослые спорили о том, какой должна быть идеологическая основа воспитания, оно шло своим чередом, неконтролируемо и порой разрушительно влияя на молодое поколение. Плоды такого воспитания уже дают свои всходы. Проблемой воспитания немедленно нужно начать заниматься вновь,

восстанавливая систему воспитательной работы, иначе наше общество ждет катастрофа. Очевидно, что летняя физико-математическая школа может некоторым образом влиять на переориентацию ценностей подростков при условии, что будет создана целенаправленная воспитательная система, в которую органичным образом будет встраиваться программа физико-математического развития.

### **Литература**

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования.
2. Максимов В.Г. Педагогическая диагностика в школе: учебное пособие. – М., Академия, 2002. – 272 с.
3. Тощенко Ж.Т. Социология. Общий курс. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Прометей: Юрайт-М, 2001. – 511 с.

## **РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ПРАКТИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»)**

**Н.А. ШЕРСТНЁВА**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Курс математического анализа является одним из фундаментальных курсов в образовательном процессе студентов таких специальностей, как «Прикладная математика и информатика», «Математика и информатика», «Физика и информатика». Он также занимает важное место при подготовке будущих строителей, менеджеров, управленцев; его изучение предусмотрено и психологами, социологами, студентами исторического, естественно-географического и других факультетов. Важным аспектом, на наш взгляд, при изучении данного курса является реализация в учебном процессе принципа практической направленности, в частности путём решения прикладных задач из различных наук методами рассматриваемой дисциплины. Студентам физико-математического факультета подобные задания позволяют оценить значимость и целесообразность изучения математического анализа для формирования профессиональных компетенций; а у обучающихся по другим специальностям формируют интерес к предмету, превращают математику из трудной и чисто теоретической науки в дисциплину, действительно применимую в реальной жизни или в значимой для студентов научной деятельности. Поэтому изучение каждой темы есть смысл завершать рассмотрением задач прикладного характера. Так, в

частности, после всестороннего теоретического осмысления такого вопроса, как «Предел числовой последовательности», можно предложить студентам следующие практические задания.

**Задача 1** (для студентов математических специальностей). Дан прямоугольный равнобедренный  $\triangle ABC$  с гипотенузой  $AB=2$ . Параллельно прямой  $AB$  проведены прямые  $K_1L_1, K_2L_2, \dots, K_nL_n, \dots$  соответственно на расстоянии  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$  от вершины  $C$  (рис. 1). Обозначим площади трапеций  $ABL_1K_1, ABL_2K_2, \dots, ABL_nK_n, \dots$  соответственно через  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

Решение.

$$S_{ABL_nK_n} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle L_nK_nC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC - \frac{1}{2} \cdot K_nC \cdot L_nC = \frac{1}{2} \cdot AC^2 - \frac{1}{2} \cdot K_nC^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot K_nL_n^2 = 1 - \frac{1}{4^n} = a_n.$$

(Из подобия треугольников  $ABC$  и  $K_nL_nC$  следует, что  $\frac{K_nL_n}{AB} = \frac{1}{2^n}$ ).

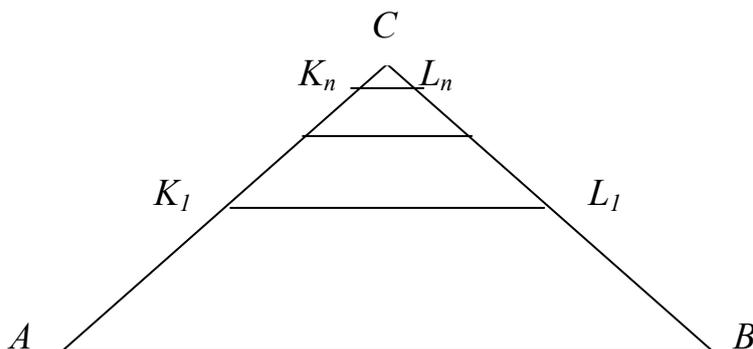


Рис. 1

Значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{4^n}) = 1$ .

**Задача 2** (для студентов-социологов или географов). Население страны ежегодно возрастает на 2 %. Во сколько раз оно увеличится за 200 лет?

Решение.

Обозначим первоначальное число жителей через  $N$ . Тогда через год население страны составит соответственно  $N + 0,02N = \left(1 + \frac{1}{50}\right) \cdot N$ , через

два года —  $\left(1 + \frac{1}{50}\right) \cdot N + 0,02 \cdot \left(1 + \frac{1}{50}\right) \cdot N = \left(1 + \frac{1}{50}\right)^2 \cdot N$ , и так далее. Через 200

лет число жителей будет равно  $\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{200} \cdot N$ , то есть увеличится в

$\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{200}$  раз. Найдём приближённое значение этого числа. Так как согласно замечательному пределу  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , то при больших значениях  $n$  справедливо приближённое равенство  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e$ . Значит,  $\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{200} = \left[\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{50}\right]^4 \approx e^4 \approx 41$ . Итак, население страны за 200 лет увеличится примерно в 41 раз.

**Задача 3** (для студентов экономического профиля). В банк сделан вклад  $S_0$  рублей. Банк выплачивает ежегодно  $p$  % годовых. Найти размер вклада  $S_t$  через  $t$  лет при непрерывном начислении процентов.

**Решение.**

(Несмотря на то, что к реальным вкладам не применяют непрерывное начисление процентов, знание данной технологии важно для будущих экономистов, так как она используется при анализе сложных финансовых проблем, в частности, при выборе инвестиционных решений).

Пусть банк начисляет проценты по вкладу  $n$  раз в год. Начисления за  $1/n$ -ю часть года составят  $p/n$  процентов. Размер вклада через  $t$  лет при  $nt$  начислениях составит, согласно формуле сложных процентов,  $S_t = \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt} \cdot S_0$  рублей. Если проценты начисляются непрерывно, то  $n \rightarrow \infty$  и размер вклада через  $t$  лет равен:

$$S_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt} \cdot S_0 = S_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{100n/p}\right)^{100n/p} \right]^{pt/100} = S_0 \cdot e^{pt/100}.$$

Мы привели лишь некоторые возможные в данной теме задачи. Спектр и количество рассматриваемых заданий может варьироваться преподавателем в зависимости от будущей профессиональной направленности студентов и уровня их предметной подготовки.

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ АНГЛИЙСКОГО ЯЗЫКА

**А.М. ШИЛЯГИНА, А.А. МЕДВЕДЕВА, А.Е. ПИСКУНОВА**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Современные условия требуют пересмотра организационных форм учебного процесса в сторону увеличения доли самостоятельной, индивидуальной и коллективной работы учащихся, объема

практических и лабораторных работ поискового и исследовательского характера. Внедрение информационных и компьютерных технологий в учебно-воспитательный процесс требует коренного изменения функций как учащегося, так и преподавателя. Взаимодействие учителя и ученика все больше приобретает характер сотрудничества.

Широкое использование информационных технологий и компьютерных телекоммуникаций открывает огромные возможности для учителей и учащихся.

Иностранный язык – это учебный предмет, который в силу своей специфичности (создание для обучающихся искусственной языковой среды из-за отсутствия естественной) предлагает наиболее гибкое и широкое использование различных современных технических средств обучения. Поэтому не удивительно, что в преподавании иностранного языка новые возможности, открываемые мультимедийными средствами, нашли самое разнообразное применение.

Создание искусственной иноязычной среды в процессе обучения иностранным языкам – один из важных проблемных вопросов современной методики. С ним в первую очередь связана реализация массового обучения двум из четырех основных видов речевой деятельности: аудированию и говорению. Решению этой проблемы может помочь использование лингафонного кабинета. Мультимедийные лингафонные системы позволяют полностью погрузиться в языковую среду, используя при этом различные звуковые и визуальные эффекты, возможность подключения к неограниченным информационным банкам в Интернете и т.д.

Что же такое современный лингафонный кабинет? Каковы его функции и возможности?

Термин «лингафонный кабинет» произошел от латинского «lingua», что означает «язык», и от греческого «phone», что означает «звук, речь».

Современный лингафонный кабинет – это аудитория, оборудованная лингафонной системой, включающей аудио-, видео- и мультимедийные средства. Такая система позволяет сформировать искусственную языковую среду, что является необходимым условием для развития языковых навыков. Лингафонный кабинет можно оборудовать на базе обычного компьютерного класса.

Практика показывает, что при изучении английского языка хорошие результаты дает применение обучающих программ, тестов, электронных учебников и учебников с электронным приложением. Использование подобных обучающих программ делает сам процесс обучения более увлекательным, разнообразным и нескучным.

На физико-математическом факультете СмолГУ одна из компьютерных лабораторий оборудована мультимедиа-лингафонным комплектом Rinel-Lingo SX108.

Мультимедиа-лингафонный комплект Rinel-Lingo SX108 Audio (далее КОМПЛЕКТ) – это аппаратный комплекс, предназначенный для дооснащения стандартного учебного компьютерного класса до уровня, необходимого для изучения иностранных языков.

Для работы КОМПЛЕКТА необходимо программное обеспечение Rinel-Lingo, которое поставляется компанией Rinel отдельно от КОМПЛЕКТА.

Компьютерный класс, оснащенный КОМПЛЕКТОМ и программным обеспечением Rinel-Lingo, далее по тексту в этой статье будем называть КЛАСС.

КЛАСС в сочетании с мультимедиа-возможностями самих компьютеров можно использовать для изучения иностранного языка.

КЛАСС также может быть использован для развития разнообразных навыков работы в группе, требующих активного речевого взаимодействия между участниками этой группы.

Аппаратные средства и программное обеспечение, входящие в состав КЛАССА, позволяют применить следующие варианты работы.

КЛАСС можно рассматривать как лингафонный класс на основе компьютеров, имеющий ряд преимуществ и новых возможностей перед обычными лингафонными классами, предназначенными для изучения иностранных языков на основе использования аудиомангитофонов (кассетных, цифровых и т.д.).

Для проведения уроков используются коммуникационные возможности КЛАССА и Lingo-книги, подготовленные с помощью программы Rinel-Lingo Editor. Lingo-книга, с точки зрения пользователя, представляет собой последовательный набор страниц, которые выводятся на экраны монитора, и пользователь имеет возможность просматривать, прослушивать и заполнять эти страницы по выбору с помощью программы Rinel-Lingo Viewer.

Важным является то, что мультимедиа-лингафонный комплект Rinel-Lingo предоставляет возможность не только использовать уже готовые книги, но также и создавать самостоятельно Lingo-книги с помощью программы Rinel-Lingo.

Каждый преподаватель может создавать свои Lingo-книги на базе программного продукта Rinel-Lingo компании Rinel и использовать их в учебном процессе.

Управление программами Rinel-Lingo на рабочем месте учащегося предельно упрощено и осуществляется с помощью «мыши» (используется одна левая клавиша), что позволяет учащемуся, не имеющему опыта работы с компьютером, освоить работу с системой в течение 5–10 минут.

Хочется отметить, что класс Rinel-Lingo имеет целый ряд преимуществ по сравнению с обычным лингафонным классом:

– преподаватель, не покидая своего рабочего места, может работать с одним студентом или группой студентов;

– на страницах Lingo-книг звук может быть совмещен с текстом, картинкой или видеороликом;

– в контрольном задании вопросы и ответы могут предоставляться не только в текстовой, но и в звуковой форме.

Работать с Lingo-книгой в мультимедиа-лингфонном компьютерном классе Rinel-Lingo можно по следующим вариантам:

**Вариант 1.** Преподаватель демонстрирует новый материал в виде Lingo-книг всем учащимся или группе учащихся, используя режим демонстрации видеоматериала. При этом преподаватель может комментировать материал, озвученный носителями языка и давать прослушивать его.

**Вариант 2.** Все учащиеся читают текст, используя Lingo-книгу. Преподаватель выборочно подключается к ученику и проверяет правильность чтения, делает замечания. Перед чтением учащиеся имеют возможность прослушать текст в исполнении носителя языка с помощью Lingo-книги.

**Вариант 3.** Учащиеся ведут диалоги между собой в аудиогруппах с помощью Lingo-книг. Преподаватель выборочно подключается к аудиогруппам и проверяет правильность произношения, делает замечания. Перед началом диалога учащиеся могут прослушать текст в исполнении носителя языка с помощью Lingo-книги.

**Вариант 4.** Учащиеся выполняют контрольные задания с использованием Lingo-книг. Преподаватель выборочно подключается к ученику и контролирует ход выполнения задания.

**Вариант 5.** Учащийся в любой момент может вызвать преподавателя, нажав кнопку, при этом на клавиатуре Rinel-Ligvo соответствующий индикатор начнет мигать. После чего преподаватель может персонально работать с ним, используя дистанционный режим работы.

**Вариант 6.** Преподаватель имеет возможность сделать объявление как для учеников, использующих наушники, так и для учеников, снявших их, нажав на клавишу громкоговорящей связи.

Одним из авторов подготовлена Lingo-книга – электронное приложение к печатному пособию «Английский язык. Сборник упражнений и текстов для развития навыков устной речи» [1].

Целью создания электронного приложения было: предоставить студентам возможность работать с учебным материалом на компьютере. Использование компьютерного оборудования, программного обеспечения Rinel-Lingo и непосредственно самой Lingo-книги значительно расширяет возможности работы с представляемым нами пособием.

Электронное приложение, выполненное на базе мультимедиа-лингафонного комплекта Rinel-Lingo, дает возможность студентам вывести на экран монитора страницы пособия и просматривать, прослушивать и заполнять эти страницы по выбору с помощью программы Rinel-Lingo Viewer. Важным является и то, что студенты имеют возможность записывать свою речь через микрофон и прослушивать ее.

В заключение отметим, что использование НИТ на уроках английского языка – это необходимость, продиктованная временем. Описанный в статье комплекс (печатное пособие и электронное приложение к нему) уже апробирован. Его применение дает хорошие результаты.

### **Литература**

1. Шилягина А.М. Английский язык. Сборник упражнений и текстов для развития навыков устной речи. - Смоленск: СГПУ, 2004. -104 с.

2. Шилягина А.М., Смирнова Е.А. Электронный словарь АBBYY Lingvo и мультимедиа-лингафонный комплект Rinel-Lingo в преподавании английского языка // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. Вып. 9. – Смоленск: СмолГУ, 2008. – С. 289 – 293.

3. Шилягина А.М. Роль лингафонного кабинета в обучении иностранным языкам // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. Вып. 10. – Смоленск: СмолГУ, 2009. – С. 292 – 294.

## СОДЕРЖАНИЕ

Математик и педагог. К 90-летию профессора М.Б. Балка	3
<b>СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики</b>	
<i>Амелин С.А., Амелина М.А.</i> Библиотека функциональных блоков	5
<i>Андрейкин С.А., Найдёнов Е.В., Якименко И.В.</i> Макромодель системы контроля параметров окружающей среды в технологическом процессе	7
<i>Бектемиров А.Р., Рогожкин А.С.</i> Модель рупорной антенны в пакете CST Microwave Studio	8
<i>Борисов В.В., Полячков А.В.</i> Моделирование ассоциативной среды на основе FPGA	10
<i>Волчик Д.К.</i> Извлечение текстовых данных из веб-сайтов в задачах обработки естественного языка с помощью MATLAB	12
<i>Голоскоков Д.П., Кардаков Д.А., Ивачева И.А.</i> Моделирование температурных полей в ротовой полости при различных типах дыхания	14
<i>Дьяконов В.П.</i> Новый облик и новые возможности MATLAB+Simulink 8.0 (R2012B)	16
<i>Дьяконов В.П.</i> Пакет символьной алгебры MUPAD в матричной системе MATLAB 8.0 (R2012B)	20
<i>Егоренков И.В.</i> , Разработка программного обеспечения для упрощения использования программы моделирования антенн MMANA-GAL	25
<i>Заббарова Г.Р.</i> Математическая модель вычисления веса задачи в системе аналитического тестирования на основе принципов конструктивной дидактики в СКМ MAPLE	26
<i>Игнатъев Ю.Г.</i> Управляемые компьютерные модели механических и электродинамических систем в СКМ MAPLE	28
<i>Игнатъев Ю.Г., Кох И.А.</i> Математическое моделирование диффузии частиц сверхвысоких энергий на инфляционной стадии расширения вселенной в СКМ MAPLE	29
<i>Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р.</i> Электронный учебник по линейной алгебре и аналитической геометрии с использованием СКМ MAPLE 5.5	30
<i>Игнатъев Ю.Г., Ширяев А.Г.</i> Компьютерное моделирование процесса восстановления термодинамического равновесия в космологической плазме на стадии инфляции	32
<i>Каткова А.А.</i> Исследование и дополнение модели Джилса-Атертона для магнитного сердечника	33

<i>Кристалинский Р.Е., Кристалинский В.Р.</i> Облегченный резерв	35
<i>Кристалинский Р.Е., Кристалинский В.Р.</i> Приближенное вычисление функции восстановления	37
<i>Кристалинский Р.Е.</i> Нахождение оптимального правила проведения инспекционных проверок	39
<i>Кристалинский Р.Е., Смирнов А.В.</i> О решении некоторых задач математической статистики в системе Mathematica	40
<i>Найдёнов Е.В., Пеньков А.А.</i> Макромодель импульсного источника питания с цифровой системой управления	42
<i>Пульнова К.Г.</i> Характеристики модели микросхемы LTC3200	44
<i>Смолин В.А., Троцкий Ю.В.</i> Компенсация термоЭДС контактных соединений при тензометрических измерениях	46
<i>Тихонова О.В.</i> Алгоритм согласования данных радиотехнических корабельных средств освещения обстановки	48
<i>Троцкий Ю.В., Абраменков А.Д.</i> Аналого-цифровой преобразователь емкость – напряжение	52
<i>Амелина М.А., Фоменкова Е.О.</i> Макромодель шим-контроллера UCC3800	54
<i>Kirsanov M.N., Shpionkova E.A.</i> Simulation of ant algorithm using MAPLE with adding additional parameter	57

## **СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры**

<i>Андреев С.Н., Борисов В.В., Федулов Я.А.</i> Стратегии нечеткого оценивания в задачах лингвистического анализа	60
<i>Белякова Е.А., Мунерман В.И.</i> Использование операций тензорной алгебры для формализации процессов обработки данных	64
<i>Денисенков М.А.</i> Применение адаптивных нечетких ситуационных сетей для решения аналитических задач поддержки принятия решений	66
<i>Емельченков Е.П., Курицына Е.Н., Лагуткин Д.А.</i> Большие данные. Методы интеллектуального анализа	68
<i>Захаров А.С.</i> Классификация логико-вероятностных моделей правдоподобных рассуждений	72
<i>Зернов М.М.</i> Ассоциативно-ориентированный способ вычисления результата многоместной нечёткой дизъюнкции	76
<i>Макаров Д.И., Мунерман В.И.</i> Анализ эффективности обработки больших объемов данных на вычислительных комплексах массового параллелизма	78

<i>Мунерман В.И., Мунерман Д.В.</i> Анализ обработки больших объемов данных на симметричных мультипроцессорных системах	80
<i>Мунерман В.И., Омельченко Н.Н.</i> Соответствие алгебраических моделей для параллельных баз данных	83
<i>Мунерман В.И., Сеницын И.Н., Шебеко Ю.С.</i> Многомерные матричные модели для обработки больших данных	86
<i>Мунерман В.И., Усачев В.В.</i> Один способ параллельной реализации умножения матриц	88
<i>Мунерман В.И., Устьян К.Р.</i> Оптимизация обработки больших данных в облачных системах	90
<i>Мунерман В.И., Цветков А.В.</i> Абстрактная матричная машина для трехмерных матриц	92
<i>Самойлова Т.А.</i> Использование модели MapReduce для обработки художественных текстов	94
<i>Сеницын И.Н., Мунерман В.И.</i> Модели обработки данных в системах интегрированной логистической поддержки	99
<i>Скачков Д.Е.</i> Модель процесса обучения студентов с использованием механизма нечетких сетей Петри (на примере дисциплины «Информационные технологии»)	103
<i>Суханова А.Г., Суханов М.Б.</i> Система нечеткого вывода для оценки рыночного риска	106
<i>Сысков В.В.</i> О проблеме объединения разнородных компонентов автоматизированных систем в рамках единой деятельности	109
<i>Ширай А.Е., Провоторова А.О., Гайдаенко Т.И.</i> Особенности параллельной серверной архитектуры для СУБД	112

### **СЕКЦИЯ 3. Математика и ее приложения**

<i>Адуков В.М.</i> Факторизация Винера – Хопфа одного класса функционально-коммутативных матриц-функций	118
<i>Андреенков А.П., Расулов К.М.</i> О приближенном решении одной задачи типа Римана в классах метааналитических функций	120
<i>Бирюкова Т.К., Киреев В.И.</i> Многошаговые дискретные схемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений на нерегулярном шаблоне	122
<i>Болотин И.Б., Клименко Д.А.</i> О нетеровости первой основной краевой задачи типа гильберта с разрывными коэффициентами для бианалитических функций в случае полуплоскости	127
<i>Васильев Я.А.</i> О нетеровости одной обобщенной краевой задачи типа Римана для бианалитических функций в круге	128

<i>Вувуникян Ю.М.</i> Композиция полиномиальных эволюционных операторов с обобщенными импульсными характеристиками	129
<i>Гомонов С.А.</i> О строении конечной части предельных множеств в точке $\infty$ некоторых отображений из $\bar{C}$ в $\bar{C}^m$ , связанных с полианалитическими полиномами	134
<i>Делицын Л.Л.</i> Об одном обобщении модели CGS распространения нововведения	136
<i>Долгополова О.Б., Зверович Э.И.</i> Построение оператора Шварца на римановой поверхности с краем	138
<i>Евдокимова Г.С., Бочкарева В.Д.</i> Системы массового обслуживания с периодическим входящим потоком	142
<i>Зайцева Н.В.</i> Применение пакета Maple при решении смешанной задачи с интегральным условием второго рода для одного гиперболического уравнения	144
<i>Зверович Э.И.</i> Гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода по разомкнутой кривой	146
<i>Карачик В.В.</i> Условия разрешимости задачи Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в шаре	147
<i>Кирьяцкий Е.Э.</i> К вопросу о коэффициентах однолистных в полуплоскости функций	149
<i>Кирьяцкис Д.Э.</i> О корнях одного трансцендентного уравнения	149
<i>Кирьяцкий Э.Г.</i> По поводу средних величин в евклидовом пространстве	150
<i>Ксенофонтов С.А., Расулов К.М.</i> О решении обобщенной задачи типа Гильберта в классах бианалитических функций в круге	151
<i>Куприкова О.Н.</i> Задача Неймана в классе квазигармонических функций четвертого рода в круге	155
<i>Куриленко С.М.</i> Оценка модуля производной Римана-Лиувилля функций из весового аналитического пространства $O$ . Бесова со смешанной нормой в единичном шаре	158
<i>Курицын С.Ю., Расулов К.М.</i> Об одной обобщенной задаче типа Римана в классах метааналитических функций	159
<i>Расулов К.М., Комиссарова А.Н.</i> Об одной видоизмененной краевой задаче Неймана в классах квазигармонических функций	161
<i>Расулов К.М., Симахова А.Н.</i> О решении одной краевой задачи типа Дирихле в классах квазигармонических функций в круге	164
<i>Расулов К.М., Тимотин А.М.</i> О решении одной четырехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана в классах бианалитических функций	166
<i>Родионова Г.С.</i> Об устойчивости решений возмущенной линейной системы дифференциальных уравнений с двумя переменными	168

<i>Тихонов И.В.</i> Неклассические задачи для дифференциальных уравнений и распределение нулей целых функций типа Миттаг-Леффлера	170
<i>Шамоян Ф.А., Повприц Е.В.</i> Диагональное отображение в анизотропных пространствах аналитических в полидиске функций со смешанной нормой	173
<i>Шерстюков В.Б.</i> Разложение на простые дроби мероморфной функции, обратной к интегралу ошибок	175
<i>Шерстюкова О.В.</i> Оценки радиуса полноты систем экспонент с вещественными показателями	179
<i>Ястребов М.Ю.</i> Континуальная верификация дискретных моделей оптимального размещения производства	181

#### **СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании и прикладная лингвистика**

<i>Агафонова К.О., Агафонов А.А., Сушков С.В.</i> Компьютерная математическая лаборатория: визуализация математического бильярда	183
<i>Агеева Е.С.</i> Использование интерактивной доски при введении и отработке конструкции «there is / there are» со студентами первого курса неязыковых специальностей	185
<i>Ассонова Н.В.</i> Использование динамических манипуляторов при изучении многогранников будущими учителями начальных классов	188
<i>Блиндюк Р.В.</i> Педагогические условия внедрения систем автоматизированного контроля качества обучения в общеобразовательной школе: основные понятия и этапы внедрения	191
<i>Богданова Ю.В.</i> Дистанционное обучение: форма или технология?	193
<i>Борисов А.П.</i> О деятельности педагога в информационном образовательном пространстве	196
<i>Бушкова В.А.</i> Компьютерное моделирование геодезических и их трубок в релятивистских полях тяготения	198
<i>Груздев С.Н.</i> Разноуровневые задания как средство повышения успеваемости	199
<i>Груздев С.Н.</i> Сравнительный анализ преподавания физико-математических дисциплин и использования икт в сельских малокомплектных школах и школах других типов	201
<i>Евдокимова Е.Н.</i> Формирование тестологической культуры школьника: критериально-признаковый аппарат	205
<i>Ефременков М.П.</i> Система мониторинга как гарант эффективности электронной образовательной среды	208

<i>Кочаненков Е.И.</i> Педагогическая система визуализации автоматизированного проектирования образовательного процесса: констатирующий этап эксперимента	210
<i>Ловенецкая Е.И., Пыжкова О.Н.</i> Из опыта использования информационных технологий в преподавании прикладных математических дисциплин	212
<i>Метелица И.Е.</i> Педагогические условия автоматизированного проектирования образовательных сайтов: констатирующий этап эксперимента	214
<i>Морозова Е.В., Мирошкина О.С.</i> УМК «Живая математика» – как виртуальная математическая лаборатория	217
<i>Селюк Б.В.</i> Циклы. Учебно-исследовательская работа	220
<i>Селюк Б.В.</i> Пружинный маятник с трением	222
<i>Сенькина Г.Е., Афанасьева Г.Ю.</i> Деятельность физико-математической школы при Смоленском государственном университете: диагностика и направления развития	224
<i>Худобкина Т.А.</i> Ценностные ориентации учащихся летней физико-математической школы	229
<i>Шерстнёва Н.А.</i> Реализация принципа практической направленности при изучении курса математического анализа (на примере темы «Предел числовой последовательности»)	231
<i>Шилягина А.М., Медведева А.А., Пискунова А.Е.</i> Информационные технологии в преподавании английского языка	233

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 14

Издательство Смоленского государственного  
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко*

---

Подписано к печати 10.04.2013. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать ризографическая.  
Усл. п. л. 15,8. Уч.-изд. л. 15,8. Тираж экз. 120  
Заказ №

---

Отпечатано с оригинал-макета авторов в ИТЦ СмолГУ  
214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4.