

Министерство образования и науки РФ
Администрация Смоленской области
Смоленский государственный университет

Системы компьютерной математики и их приложения

Материалы XII международной научной конференции

Выпуск 12

Смоленск
Издательство СмолГУ
2011

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета СмолГУ*

Редакционная коллегия: *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *Р.Е. Кристалинский*, канд. физ.-мат. наук, доц. (заместитель ответственного редактора); *С.Н. Андреев*, д-р филол. наук, проф.; *В.П. Дьяконов*, д-р техн. наук, проф.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Н.М. Тимофеева*, канд. пед. наук, доц.; *Я.А. Васильев*, аспирант кафедры математического анализа.

С 409 **Системы компьютерной математики и их приложения:** материалы XII международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. – Вып. 12. – 336 с.
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 16–18 мая 2011 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

© Авторы, 2011
© Издательство СмолГУ, 2011

СЕКЦИЯ 1

Системы компьютерной математики

НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕРСНОГО SEPIC-КОНВЕРТЕРА

М.А. АМЕЛИНА, С.А. АМЕЛИН, В.А. ОРЕХОВ

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск

e-mail: amelina.marina@gmail.com

Составные преобразователи напряжения SEPIC – обычный и инверсный (рис. 1) – являются, по сути, каскадным соединением повышающего и инвертирующего регуляторов. Они имеют непрерывный входной (SEPIC) или выходной ток (Inverse SEPIC), при этом снижается уровень электромагнитных помех. Оба рассматриваемых конвертера имеют регулировочную характеристику такую же, как и инвертирующий регулятор, т.е. могут как повышать, так и понижать входное напряжение. Выходное напряжение схемы, не использующей гальваническую развязку, имеет знак, совпадающий с входным напряжением.

В схеме с трансформаторной развязкой (обе разновидности SEPIC-конвертера – обычная и инверсная) двухобмоточный магнитный элемент является, по сути, накопительным дросселем (хотя также преобразует и уровень напряжения). Он подобен двухобмоточному дросселю Flyback-конвертера. В связи с этим его сердечник имеет низкую эквивалентную магнитную проницаемость ($\mu=100\dots200$), т.е. имеет немагнитный зазор.

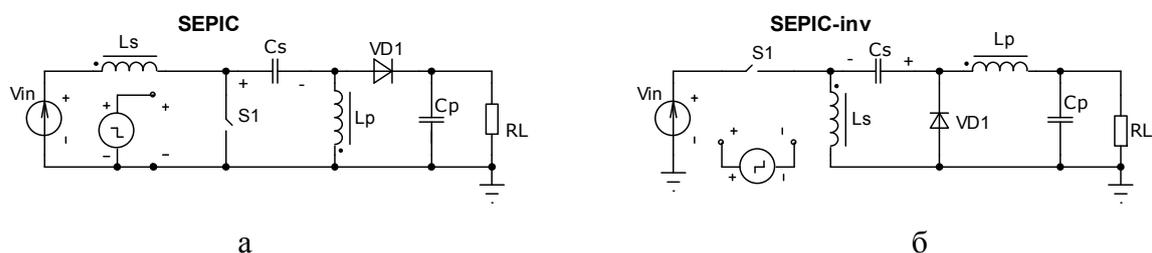


Рис. 1. SEPIC-конвертер: а – простой; б – инверсный

Для разработки импульсных источников питания, а точнее тракта обратной связи импульсного стабилизатора, необходимы нелинейные непрерывные модели преобразователей для различных способов управления. Они могут быть получены с помощью известной методики, получившей название метода усреднения в пространстве состояний [1].

Для составных конвертеров такой метод получения непрерывной модели достаточно громоздок и длителен. Гораздо удобнее воспользоваться моделью обобщенной ШИМ-структуры Эриксона-Максимовича [1] и адаптировать ее под используемый конвертер (рис. 2). Такая модель в виде SPICE-подсхемы с именем CCM-DCM1 встроена в библиотеку программы Micro-Cap [2]. Для анализа работы адаптированной непрерывной модели было проведено сравнение её поведения с полной имитационной (рис. 2).

Адекватность построенной модели инверсного SEPIC была проверена в различных режимах возмущений на большом сигнале, одним из которых является выход преобразователей на заданное значение выходного напряжения при постоянном значении коэффициента заполнения управляющих импульсов D_{ON} из нулевых начальных условий. Для этого были построены схема для моделирования в среде программы Micro-Cap (рис. 2), включающая в себя полную имитационную модель преобразователя и его непрерывную модель.

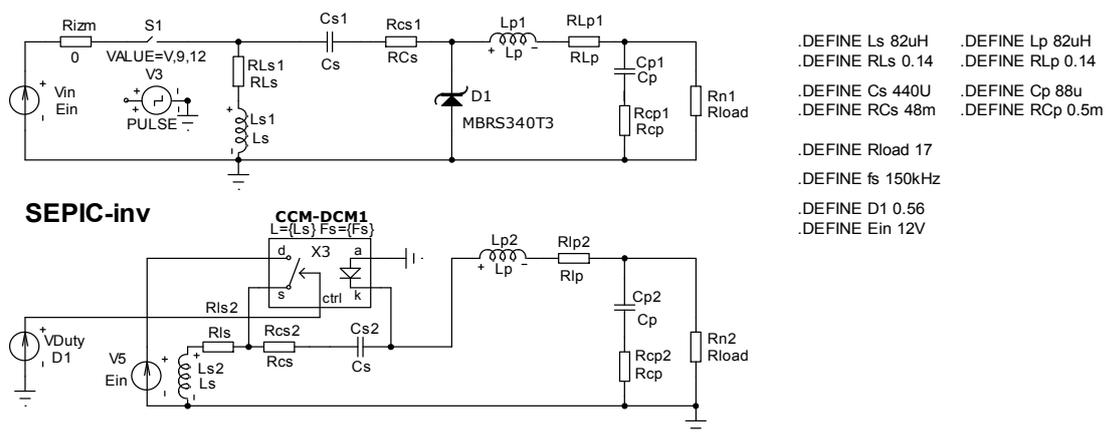


Рис. 2. Схемы для моделирования полной имитационной и непрерывной модели инверсного SEPIC-конвертера

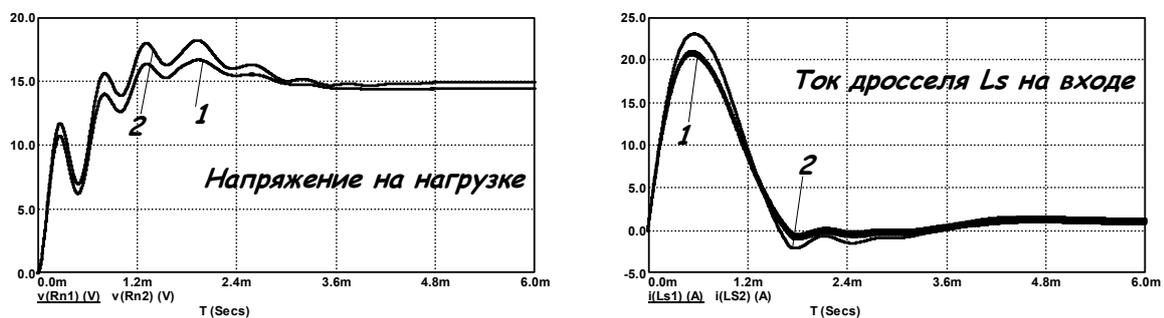


Рис. 3. Результаты моделирования выхода на стационарный режим:
1 – имитационная модель; 2 – непрерывная нелинейная модель

Из анализа графиков (рис. 3) следует вывод, что поведение непрерывной и полной имитационной модели совпадает как в стационарном так и в неустановившемся (динамическом) режимах

работы. Следовательно адаптация модели обобщенной ШИМ-структуры под непрерывную модель инверсного SEPIC-конвертера проведена верно. Построенная модель может быть использована для анализа устойчивости импульсных стабилизаторов.

Литература

1. Christophe P. Basso Switch-Mode Power Supplies Spice Simulations and Practical Designs @ McGraw-Hill Copyright © 2008.
2. Micro-Cap 9 Electronic Circuit Analysis Program Reference Manual Copyright 1982–2007 by Spectrum Software, Internet:www.spectrum-soft.com.

ОПТИМИЗИРОВАННАЯ SPICE-МОДЕЛЬ КОНТРОЛЛЕРА UC3842

С.А. АМЕЛИН, М.А. АМЕЛИНА, А.В. ЕМЕЛЬЯНОВА

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск

e-mail: amlmtr@gmail.com

В настоящее время при проектировании импульсных преобразователей напряжения широко применяются методы математического моделирования, что позволяет сократить затраты на разработку [1]. Но для получения адекватных результатов необходимы точные и в то же время быстрые модели компонентов, из которых будет строиться модель импульсного источника питания. В данный момент математические модели компонентов, используемые для анализа электронных схем, принято представлять в формате SPICE (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*). Однако производители пока еще редко поставляют SPICE-модели такого важного компонента источника питания, каким является микросхема ШИМ-контроллера. Поэтому актуальной является задача построения оптимизированных моделей этих компонентов на основе стандартной технической документации, предоставляемой производителями.

Для построения таких моделей нецелесообразно использовать стандартные модели компонентов (логических вентилях, триггеров, компараторов и т.п.), поскольку это сильно увеличивает время расчета и заметно ухудшает сходимость. В результате использование такой модели становится практически невозможным. Однако при использовании упрощенных оптимизированных моделей, сочетающих в конкретной области применения высокую скорость расчетов, хорошую сходимость и достаточную точность, можно реализовывать модели практически любых существующих на данный момент ШИМ-контроллеров.

Проверку адекватности такого подхода можно осуществить на примере обобщенной SPICE-модели ШИМ-контроллера PWM_T, входящей в состав базовой библиотеки моделей программы схемотехнического анализа Micro-Cap [2]. На базе этой макромодели выполнены модели ряда ШИМ-контроллеров, в частности UC3842. Однако при ее использовании возникает расходимость вычислительных алгоритмов, а время расчета оказывается достаточно большим. Все это, как уже было сказано выше, обусловлено тем, что при ее построении использованы стандартные модели компонентов. Замена их оптимизированными упрощенными моделями позволяет получить значительно лучшие результаты. Кроме того, в ходе анализа модели PWM_T выяснилось, что она содержит ошибки в алгоритме работы блока защитного выключения при снижении напряжения питания. В результате была разработана альтернативная модель, структура которой представлена на рисунке 1.

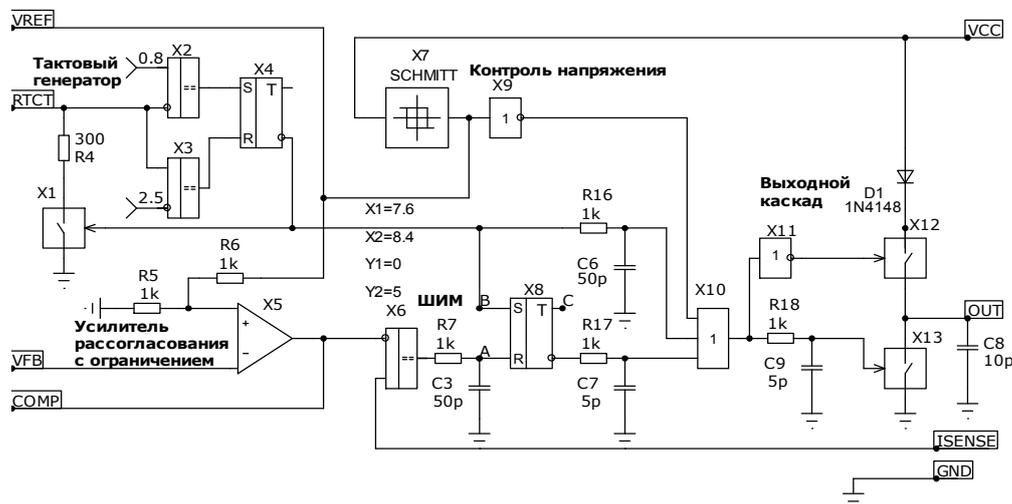


Рис. 1. Структура оптимизированной SPICE-модели PWM_T

Сравнение скорости расчета проводилось на примере стабилизатора напряжения, построенного на основе повышающего регулятора (рис. 2).

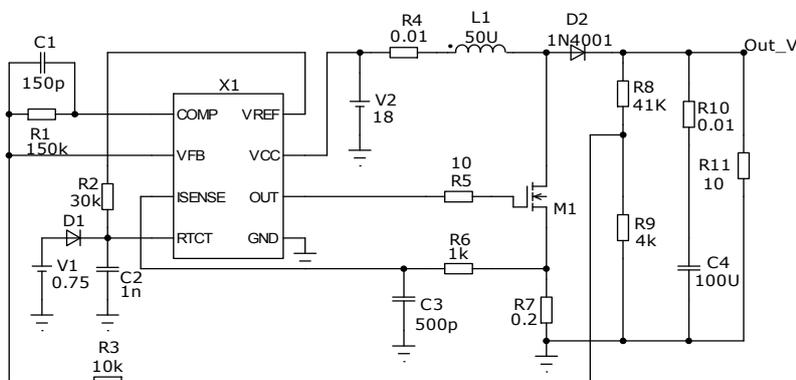


Рис. 2. Схема для проверки адекватности полученной SPICE-модели

Расчет выхода на установившийся режим работы со стандартной моделью продолжался 28 секунд, в то время как расчет с оптимизированной — 13 секунд. Таким образом, оптимизация функциональных узлов ШИМ-контроллера позволила повысить скорость расчета в 2 раза. В настоящее время эта модель предложена разработчикам программы Micro-Cap в качестве замены базовой модели PWM_T.

Литература

1. Christophe P. Basso Switch-Mode Power Supplies Spice Simulations and Practical Designs @ McGraw-Hill Copyright © 2008.
2. Амелина М.А., Амелин С.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 9. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 464 с.

МЕХАНИЗМ РЕКУПЕРАЦИИ ЭНЕРГИИ В ОПОРНО-ДВИГАТЕЛЬНОМ АППАРАТЕ ЧЕЛОВЕКА

А.В. БОРИСОВ

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск
e-mail: BorisowAndrej@yandex.ru

В настоящее время большинство теоретических и практических разработок шагающих машин представляют собой механические системы с абсолютно твердыми звеньями.

Жесткие модели имеют некоторые достоинства: проще уравнения движения, численное и аналитическое исследование составленных уравнений. Однако есть и недостатки – скорость распространения возмущений в абсолютно жесткой модели бесконечно большая. При движении живых организмов, например, при ходьбе человека, ускорения изменяются очень быстро, и если бы были абсолютно твердые звенья, то ударная нагрузка в организме распространялась бы на все элементы системы мгновенно, т.е. с ударом, в том числе в головной мозг. В реальности подобные явления не наблюдаются. Поэтому следует рассматривать организм как упругую систему. При движении деформируемой системы происходит запасание энергии при постановке ноги на поверхность и ее возвращение при следующем шаге. При этом практически вся энергия удара гаснет в суставах нижней конечности. Если макроскопически рассматривать конечность, то можно считать, что деформируется не сам сустав, а весь стержень. А это будет модель с деформируемыми звеньями, с возможностью приложения в суставах управляющих моментов, с помощью которых можно поддерживать вертикальное положение и осуществлять перемещение. Система

представляет собой эффективную модель деформируемого стержня, и в суставах возможно упругое противодействие и смещение. С этой точки зрения исследуется устойчивость одного стержня, двухстержневой, многостержневой (до 11 звеньев) системы, т.е. двуногого антропоморфного робота, находящегося на твердой поверхности с одной точкой закрепления.

Ходьба человека более экономичная, чем у антропоморфного робота. Имеется механизм рекуперации энергии, которая упруго запасается при ударе переносной ноги о поверхность. При толчке и переносе ноги скелет упруго отдает энергию.

Проведем моделирование звеньев опорно-двигательного аппарата человека стержневой системой с деформируемыми звеньями [1–4]. Работа внешней силы F , запасаемая в упругом стержне в процессе деформации и возвращаемая при разгрузке (диссипация отсутствует), равна [7]:

$$W_{i1 \rightarrow 2}^{(e)} = \frac{c_i s_i^2}{2} = \frac{F_i^2}{2c_i}, \quad (1)$$

где c_i – жесткость i -го звена, s_i – удлинение i -го звена.

При ходьбе при постановке ноги на опору происходит преобразование кинетической энергии в потенциальную энергию деформации скелета, которая при смене ног упруго отдается при отталкивании. Изменение кинетической энергии:

$$T_{i2} - T_{i1} = F_i dl_i. \quad (2)$$

В результате расчетов получают следующие значения [6]: $W_1 = 2,25$ Дж, $W_2 = 2,25$ Дж, $W_3 = 1,47$ Дж для опорной ноги. Все остальные значения имеют максимальные значения не более 0,1 Дж и меньше, поэтому приводить их здесь не будем.

Следовательно, экспериментально и расчетами подтвержден тезис о том, что энергия толчка ноги при касании о поверхность гасится в опорной ноге благодаря наличию средних деформаций звеньев человека от времени. В дальнейшем при отталкивании запасенная энергия возвращается в энергию движения, т.е. происходит рекуперация энергии. Это объясняет, почему энергозатраты при ходьбе человека ниже, чем у антропоморфного робота [5].

Литература

1. Борисов А.В. Методика автоматизированного составления дифференциальных уравнений движения антропоморфного робота // Известия Смоленского государственного университета. – 2010. № 2 (10). С. 82-89.

2. Борисов А.В. Методика съемки движений людей и обработки полученных кинограмм // Научные труды международной научно-практической конференции ученых МАДИ(ГТУ), МСХА, ЛНАУ 5–6 января 2004 года. Т.4.: Педагогика и методика. – Москва-Луганск: Изд-во МАДИ(ГТУ), МСХА, ЛНАУ; Смоленск ООО «Инга», 2004. С. 70–74.

3. Борисов А.В. Моделирование опорно-двигательного аппарата человека и применение полученных результатов для разработки модели антропоморфного робота. – М.: Изд-во «Спутник +», 2009. – 212 с.

4. Борисов А.В., Чигарев А.В., Михасев Г.И. Биомеханика: учебник. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.

5. Дубровский В.И., Федорова В.Н. Биомеханика. – М.: Владос-Пресс, 2003. – 672 с.

6. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7: Полное руководство. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 624 с.

7. Циглер Ф. Механика твердых тел и жидкостей. – М. – Ижевск: РХД, 2002. – 912 с.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕНЗОРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ПАКЕТАХ МАТЕМАТИКА И MAPLE НА ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ ТРЕХМЕРНЫХ И ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.А. БУШКОВА

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань
e-mail: dakra@inbox.ru

Основным объектом тензорного исчисления является метрический тензор g_{ij} . В четырехмерном пространстве-времени метрический тензор характеризуется десятью функциями и является симметричным по своим индексам. Уравнения общей теории относительности (ОТО) выражаются через величины, образованные от метрического тензора и его частных производных первого и второго порядков.

Любой стандартный расчет в ОТО предполагает операции с коэффициентами связности Γ^i_{kj} , тензором Риччи R_{ij} и др. Вычисления этих объектов могут оказаться достаточно громоздкими, поэтому процедуры тензорной алгебры и тензорного анализа, обладая ясными алгоритмами, могут быть произведены в системах компьютерной математики. В силу своих многочисленных достоинств (гибкости, общности языка, скорости вычислений) наиболее удачными программными средствами в тензорном анализе являются Maple и Mathematica.

В Maple для этой цели существует встроенный пакет «tensor», а также дополнительные пользовательские библиотеки, в системе Mathematica – различные авторские пакеты.

В докладе представлены результаты сравнительного анализа возможностей систем компьютерной математики Maple и Mathematica в области тензорного анализа на примерах вычисления стандартных объектов тензорного исчисления (символов Кристоффеля I и II рода, ковариантных производных, тензоров Римана, Риччи, скалярной кривизны, уравнения геодезических, тензора Леви-Чевита и др.) для двумерной метрики сферы, псевдосферы, метрики Шварцшильда, трехмерной метрики пространства Лобачевского, метрики Фридмана и метрики Бонди-Пирани-Робинсона, имеющих важное значение в общей теории относительности.

Литература

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М., 1967. – 664 с.
2. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – М., 1948. – 316 с.
3. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7: Полное руководство. – М., 2009. – 622 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТ-СПЕКТРОГРАММ ДЛЯ АНАЛИЗА ОДНОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ В ЭЛЕКТРОРАДИОТЕХНИКЕ

А.А. БЫКОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: alex1by@mail.ru

В настоящее время вейвлет-спектрограммы широко используются для качественного исследования частотно-временных особенностей сигналов.

Непрерывное вейвлет-преобразование переводит одномерную функцию $f(x)$ в функцию двух переменных $W(a,b)$. Таким образом, временной зависимости $f(x)$ (сигналу) ставится в соответствие зависимость амплитуды вейвлет-преобразования $W(a,b)$ от переменных масштаба a и сдвига b . Графическое представление функции двух переменных $W(a,b)$ – поверхность над плоскостью (a,b) . Считается, однако, что более наглядным способом графического отображения вейвлет-преобразования одномерного сигнала является его представление в виде проекции поверхности $W(a,b)$ на плоскость (a,b) . При этом цветность и интенсивность проекции отображает величину $W(a,b)$.

Построенное таким образом изображение (см. рис. 1) называют вейвлет-спектром (вейвлет-спектрограммой) сигнала. По горизонтальной оси вейвлет-спектрограммы обычно откладывают величину смещения b , по вертикальной – масштаб a . Иногда вертикальную ось удобнее строить в логарифмическом масштабе, что дает возможность более детально отобразить поведение спектра при небольших масштабах.

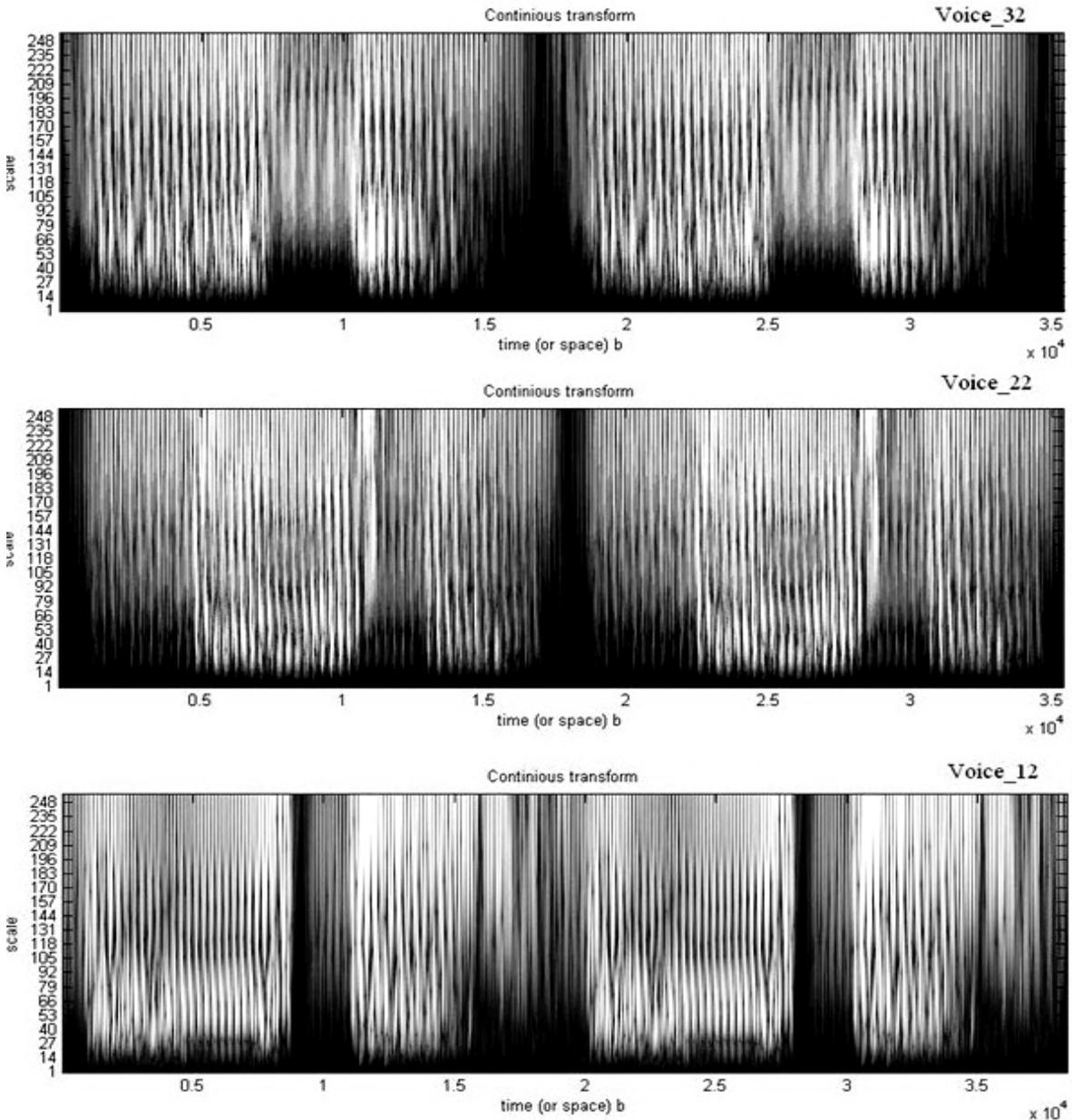


Рис. 1. Сравнение вейвлет-спектрограмм трех звуковых тест-сигналов *Voice_12, Voice_22, Voice_32*

На рисунке 1 представлен типичный вид вейвлет-спектрограмм, полученных с использованием функций системы MATLAB. Непрерывное вейвлет-преобразование (MATLAB-функция *cwt*) применялось к трем описанным звуковым тест-сигналам,

представленным файлами *Voice_12*, *Voice_22*, *Voice_32*. На полученных спектрограммах отчётливо видны различия голосов трех испытуемых, произносящих одно и то же ключевое слово. Можно заметить дифференцировку вейвлет-спектрограмм как по амплитуде, так и во временной области. Так, например, точки нарастания сигнала (светлые-прерывистые) и спадов (тёмные) находятся в разных местах, также прослеживаются различия в скорости и тембре произнесённого слова. Нетрудно заметить, что вид всех трех спектрограмм соответствует периодичности слогов ключевого слова, при этом заметны также и отличия первого слога от второго.

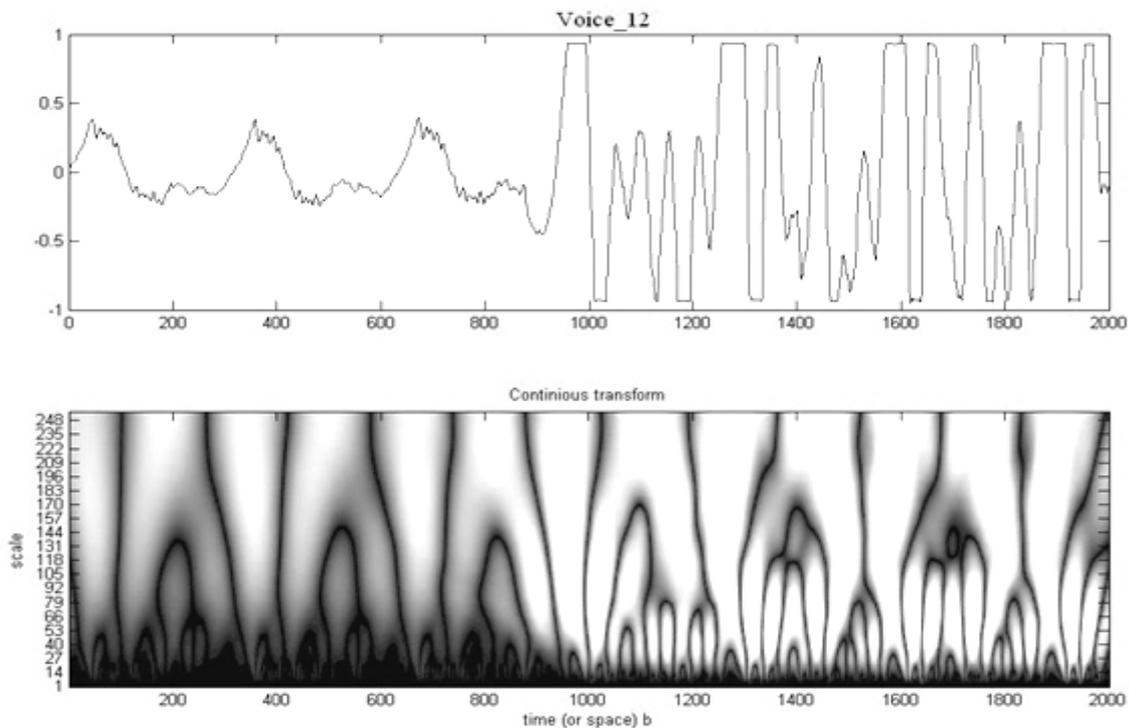


Рис. 2. Сигнал *Voice_12* и его вейвлет-спектрограмма, полученная при выборке первых отсчетов (анализ начала звукового сигнала)

На рисунке 2 показаны сигнал *Voice_12* и его вейвлет-спектрограмма, полученная при выборке меньшего, чем в предыдущем случае, числа отсчетов. Выбраны отсчеты, которые соответствуют началу звукового сигнала. Вейвлет-спектрограмма при такой выборке даёт более детальный образ начальной стадии сигнала. Здесь ясно различимы частотные компоненты звукового сигнала. Так, в нижней части спектрограммы отчётливо видны более частые (быстрые) изменения яркости, указывающие на наличие периодических высокочастотных компонент, тогда как в верхней части изменения яркости менее частые, что соответствует более низкочастотным (медленным) компонентам. Этого можно было ожидать, поскольку вейвлеты по своей природе приспособлены к детализировке локальных

изменений сигнала, занимающих небольшие (в масштабах полной длительности сигнала) промежутки времени.

Вид вейвлет-спектрограмм, полученных при использовании MATLAB-функции *cwt*, позволяет уверенно фиксировать наличие нелинейных искажений периодических сигналов (см. рис. 1). Как показывают приведённые примеры, вейвлет-спектрограммы хорошо работают при анализе тонкой структуры сигналов, содержащих резкие скачки, переходы производных через нуль и другие динамические свойства сигналов.

Вейвлет-спектрограмма дискретного преобразования отображает распределение величины вейвлет-коэффициентов на диадической сетке (см. рис. 3) и, так же как и спектрограмма непрерывного вейвлет-преобразования, даёт общее представление о частотно-временной структуре анализируемого сигнала.

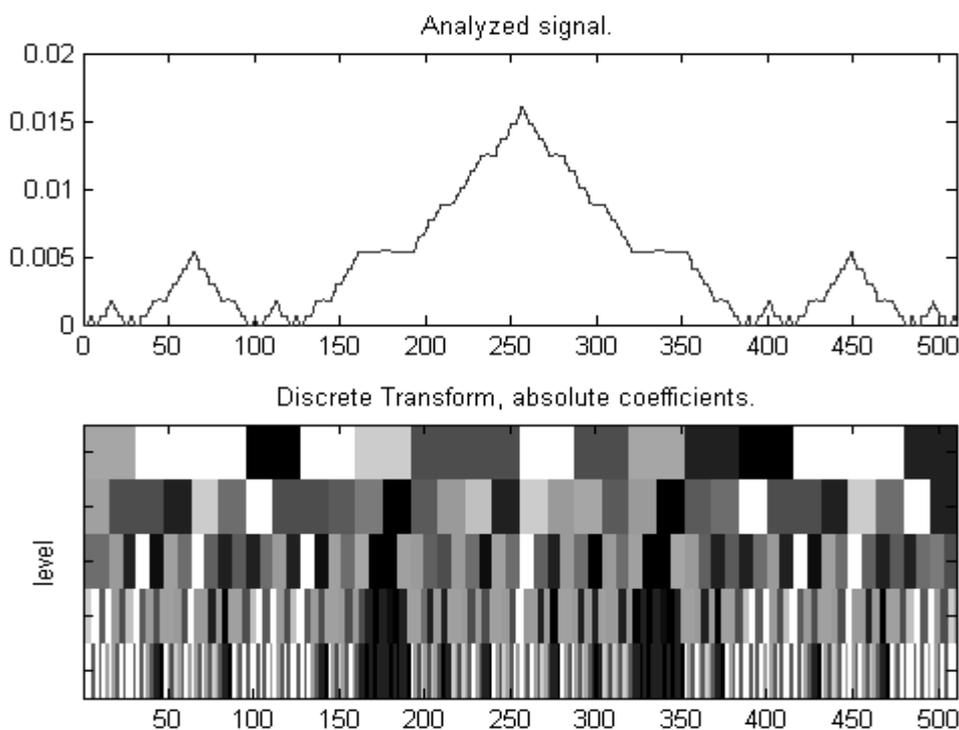


Рис. 3. Дискретная вейвлет-спектрограмма импульсного сигнала

Особенности дискретной вейвлет-спектрограммы импульсного сигнала специальной формы проиллюстрированы на рисунке 3. Отличительная черта приведенного здесь примера состоит в том, что анализируемый импульсный сигнал имеет специфическую форму и представляет собой отрезок фрактальной кривой, состоящей из множества отдельных ступенек. Здесь для вейвлет-разложения сигнала используются вейвлеты *sym2*.

В последнее время все большее внимание уделяется применению вейвлет-анализа одномерных сигналов для расшифровки

биомедицинских сигналов, например, электрокардиограмм (ЭКГ) и электроэнцефалограмм (ЭЭГ). Конечная цель применения вейвлет-анализа в медицинских исследованиях состоит в выявлении клинически значимых и четко определяемых признаков наличия патологий, например, нарушений в работе сердца, определяемых по ЭКГ. Так, в частности, ранее было показано, что аномальные эффекты в ЭКГ проявляются в основном на довольно больших масштабах (низких частотах), тогда как нормальные структуры характеризуются сравнительно малыми масштабами (высокими частотами).

Для выработки подходов к автоматической идентификации нарушений в работе сердца необходимо построить экспериментальную модель данных. Обычно отправной точкой являются параметры ЭКГ здорового человека. При этом в случае ЭКГ, так же как и при анализе других типов одномерных сигналов, очень часто возникает необходимость очистки полезного информативного сигнала от различного рода шумов. Далее приводится пример построения вейвлет-спектрограммы реального ЭКГ-сигнала, снятого на реокардиомониторе у практически здорового человека.

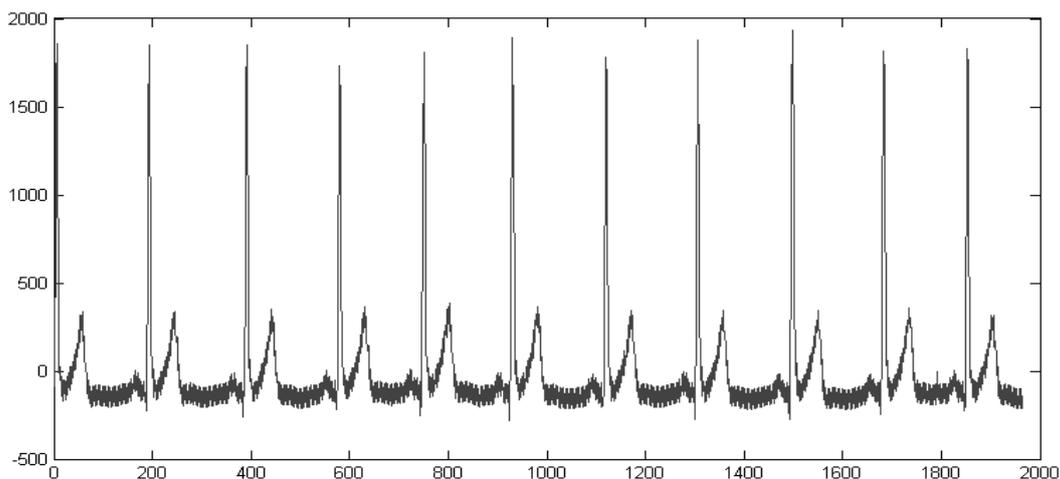


Рис. 4. ЭКГ-сигнал

ЭКГ-сигнал (рис. 4) представляет собой одномерный массив, записанный на реокардиомониторе с частотой дискретизации 200 Гц. Массив данных был сохранен в файле формата **.txt* для дальнейшей обработки с использованием расширения MATLAB Wavelet Toolbox. Длительность выборки (длина сигнала) определялась так, чтобы зарегистрировать, по крайней мере, несколько сердечных сокращений, и составляла в данном случае 913 отсчётов.

С использованием интерфейса расширения MATLAB Wavelet Toolbox была проведена декомпозиция ЭКГ-сигнала при помощи вейвлета Добеши (*db3*) до 5-го уровня разложения. Число уровней разложения ограничено длиной сигнала (913 отсчётов). На рисунках

5 б, в показаны дискретная вейвлет-спектрограмма исходного ЭКГ-сигнала (сигнала с шумом) и вейвлет-спектрограмма ЭКГ-сигнала, очищенного от шума.

Сравнение рис. 5 б и рис. 5 в, демонстрирует внешние различия вейвлет-спектрограмм, наиболее ощутимо проявляющиеся при малых значениях параметра масштаба – в нижней части вертикальной шкалы. Такого рода различия спектрограмм соответствуют освобождению очищенного сигнала от ВЧ составляющих, обычно ассоциирующихся с шумами.

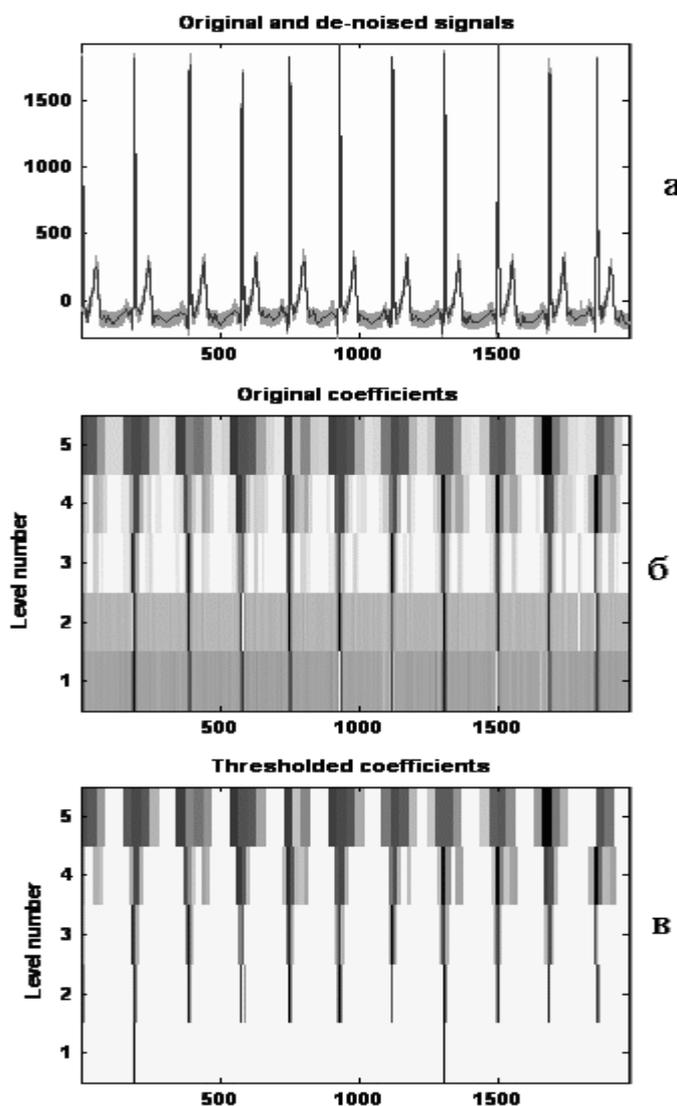


Рис. 5. Дискретная вейвлет-спектрограмма ЭКГ-сигнала;
 а) очищенный от шума сигнал, совмещенный с исходным сигналом; б) вейвлет-спектрограмма исходного сигнала (с шумом); в) вейвлет-спектрограмма сигнала, очищенного от шума

Спектрограммы непрерывного и дискретного вейвлет-преобразования являются полезным графическим инструментом для визуализации частотно-временной «карты» одномерного сигнала. Вместе с тем всегда следует иметь в виду, что для решения практических задач

вейвлет-спектрограммы как графические образы сигнала предоставляют исследователю возможность *качественного* анализа особенностей сигнала.

Наиболее оптимальным решением было бы использование таких графических образов совместно с другими количественными характеристиками вейвлет-преобразования.

Литература

1. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. – Изд. 2-е. – М., 2004.
2. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование. // УФН, т.171. – 2001. – №5. – С.465-501.
3. <http://www.mednet.com/publikac/2003/n1/ps.htm>.

СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ НА ВЫХОДЕ ИЗ КРИЗИСА

В.П. ДЬЯКОНОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

К числу новых и важных направлений науки и образования относится компьютерная математика [1]. Используемые в ней аналитические и численные методы вычислений появились еще в древние времена. Они легли в основу изобретения первых вычислительных устройств, таких как древний Абак, счеты, машины Паскаля. Затем появились электромеханические, ламповые и транзисторные ЭВМ и, наконец, современные компьютеры на интегральных микросхемах. По мере их появления развивались и оттачивались методы численных вычислений. Первые реальные достижения в области аналитических вычислений были реализованы на советских транзисторных ЭВМ класса «Мир» с языком программирования «Аналитик». Это случилось еще в 60-х годах прошлого века

Первые программные системы компьютерной математики (СКМ) появились в 80-х годах почти одновременно с появлением персональных компьютеров (ПК) на основе микропроцессоров и других интегральных микросхем. СКМ являются специализированными на выполнение математических вычислений аппаратными и программными средствами [1]. По своим вычислительным, логическим и графическим возможностям современные СКМ отличаются от возможностей микрокалькуляторов и первых ЭВМ примерно настолько, насколько велосипед отличается от космического челнока!

Ранее программные СКМ делили на системы компьютерной алгебры CAS (или системы символьной математики) и системы для расчетов и математического моделирования численными методами. В наши дни такое деление стало некорректным и все имеющиеся на рынке СКМ являются универсальными системами. Знакомству российской научной и образовательной общественности с современными СКМ во многом способствовали серии книг по этим системам, подготовленные автором и изданные в центральных издательствах России [1- 15 и др.].

В последние годы, несмотря на грянувший экономический кризис, темпы развития СКМ в целом существенно выросли. Некоторые системы, например Mathcad, Maple и MATLAB, развивались настолько быстро, что их новые версии выходили ежегодно, а иногда и более часто. Наряду с положительными моментами (быстрое обновление систем и рост их функциональности) это имеет и отрицательные моменты – некоторые версии систем выходят довольно сырыми, замеченные в предшествующих версиях недостатки и недоделки вовремя не устраняются, в новые версии вносятся мало действительно новых возможностей, затрудняется выпуск литературы по новым версиям.

В целом выпуск все новых и новых СКМ означает возникновение острой конкуренции между их разработчиками. Затраты на разработку и освоение серийного выпуска СКМ очень велики, и лишь отдельные крупные фирмы с численностью персонала разработчиков в сотни специалистов способны на это. Поэтому в последние годы практически прекратилось расширение числа фирм, создающих новые СКМ. Участились случаи поглощения некоторых фирм их более мощными (нередко в направлениях, отличных от разработки СКМ) конкурентами. Однако, несмотря на мировой экономический кризис, ни одна фирма из числа разработчиков СКМ не разорилась, а новейшие версии СКМ появляются ежегодно.

Наиболее популярны СКМ, изначально ориентированные на решение задач в образовательной сфере и мощные СКМ для выполнения серьезных расчетов и на реализацию математического моделирования сложных систем и устройств. Из первых это системы Derive и Maple. Но если популярность малой Derive [2] связана с явно учебным назначением этой старой системы, то мощная система Maple завоевала популярность еще и за счет своего огромного числа функций, ориентированных как на аналитические, так и численные вычисления, а также мощной графике. Число функций в ядре Maple 14 превысило 4000.

К сожалению, в период кризиса практически прекратила свое развитие система Derive. Она была приобретена крупной фирмой Texas Instruments (США) и стала выпускаться под ее именем. Система впервые

нашла применение в ряде выпущенных фирмой научных графических калькуляторов – TI-89, Ti-92, TI-92 PLUS и др. Однако летом 2007 года Texas Instruments объявила о прекращении серийного выпуска системы Derive – ее последней версией стала Derive 6.1. Сейчас эту версию можно найти в Интернете, но ее поддержка фирмой Texas Instruments, к сожалению, уже не обеспечивается: Derive показала себя надежной системой, самой малой из СКМ, но имеющей вполне приличные функциональные возможности, включая графику.

Новейшие калькуляторы TI Nspire CAS Touchpad (рис. 1) используют операционную систему Nspire, созданную специально для микрокалькуляторов. Система обеспечивает простое и быстрое обучение пользователей основам математики и работы с прибором. Стоимость калькулятора с CAS в США чуть выше 100 \$.



Рис. 1. Новейший научный калькулятор TI Nspire CAS Touchpad фирмы Texas Instruments

Система начального уровня MuPAD – сравнительно новая система, и это сказалось на ее известности – пока невысокой. Однако в последнее время символьный процессор MuPAD стал использоваться в новейших версиях систем Mathcad 14/15 и MATLAB R2008b/R2009/2010/2011 вместо символьного процессора Maple, примененного ранее. Очевидно, что это связано с чисто экономическими соображениями – MuPAD намного более дешевая система, чем Maple, но со значительно меньшим числом встроенных в систему математических и графических функций.

Достаточно устойчивыми темпами развивается система компьютерной алгебры Maple (канадская фирма Maplesoft) [3]. Родившись в университетской среде, многие годы она была лидером среди систем символьной математики, разделяя лидерство с системой Mathematica. В последние годы Maple, несмотря на кризис, бурно

развивается и ее версии меняются чуть ли не ежегодно. Число функций в ядре символьных вычислений этой системы в новых версиях Maple 13/14 превысило 4500. Ядро Maple неоднократно применялось в СКМ Mathcad и MATLAB, превратив их в универсальные СКМ, обеспечивающие выполнение как численных, так и аналитических вычислений. Однако став коммерческой системой, Maple стала дорожать, в результате чего Mathcad и MATLAB (частично) отказались от дорогого ядра Maple в пользу более дешевого и компактного ядра MuPAD.

Развитие Maple пошло по двум основным направлениям: обеспечение максимальных условий для работы с начинающим пользователем и разработка средств графического интерфейса пользователя GUI в виде маплетов – специальных окон для решения математических задач, часто с представлением промежуточных результатов вычислений. Последняя задача многие годы была востребована пользователями – преподавателями. Число маплетов и различных обучающих средств растет в каждой новой версии Maple гораздо быстрее, чем растут ее математические возможности.

Популярность изначально ориентированной на численные вычисления системы Mathcad многие годы была обусловлена ее прекрасным математически ориентированным интерфейсом и, пожалуй, небольшим числом встроенных функций, набор которых хорошо оптимизирован [4; 5]. Вполне естественной оказалась стыковка изначально численной системы Mathcad с системами символьной математики – вначале с Maple, а в последних версиях Mathcad 14/15 – с MuPAD. При этом как исходные данные, так и результаты вычислений представляются в виде аналитических формул в их естественном математическом виде.

К сожалению, дальнейшая судьба системы Mathcad внушает большие опасения. Создатель системы фирма MathSoft Education в период кризиса была приобретена более преуспевающей фирмой PTC (Parametric Technology Corporation), основная ориентация которой – системы инженерного автоматического проектирования Pro/ENGINEER. Однако это совсем другое направление, чем реализованное в Mathcad. Для PTC Mathcad далеко не основной программный продукт. Команда разработчиков «старого» Mathcad ушла в небытие, а новая команда взялась, по существу, за создание новой системы MathcadPrime. Первая ее версия уже появилась и оказалась не просто несовместимой с Mathcad, но и гораздо менее полной. Другими словами, явно худшей! Объявлено, что только MathcadPrime 3.0 достигнет уровня Mathcad 15 по уровню функциональных возможностей. Но для этого потребуется несколько лет.

Переход к новому ядру символьных вычислений в Mathcad 14/15 на основе ядра MuPAD трудно оценить однозначно. Специалисты по компьютерной алгебре знают, что ядро Maple апробировано лучше и содержит намного больше встроенных функций и правил преобразования алгебраических выражений. Разница в вычислениях на уровне простых задач, таких как вычисление простых производных или интегралов, на первых порах была малозаметной, и применение более простого и нового ядра можно было оправдать. Но постепенно отличия в вычислениях (особенно по их форме выдачи) стали появляться и несовместимость разных реализаций Mathcad в области символьных вычислений стала очевидной. Куда это приведет в конечном счете, покажет время.

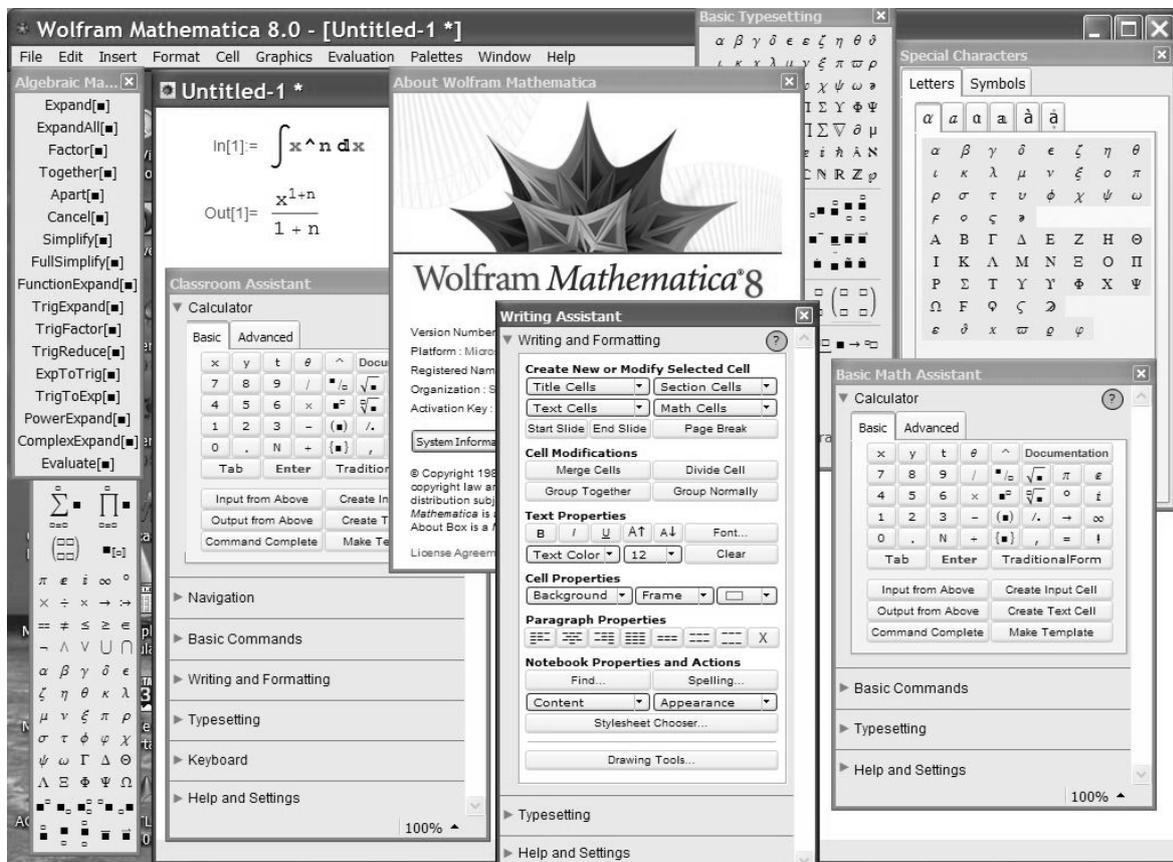


Рис. 2. Интерфейс СКМ Mathematica 8 фирмы Wolfram Research

Достаточную известность получила одна из самых мощных СКМ – Mathematica фирмы Wolfram Research (США) [6; 7]. Ее последняя версия Mathematica 8 имеет самый современный многооконный интерфейс (рис. 2) и явно претендует на роль мирового лидера среди универсальных СКМ.

В России популярность Mathematica не очень велика. Многие российские пользователи считают эту систему слишком сложной, а в функциональном отношении избыточной. Эта точка зрения в корне

неверна, особенно в отношении последних реализаций системы – Mathematica. Эти реализации представлены разработчиком – фирмой Wolfram Research Inc. как революционные. К более 2000 функций предшествующих реализаций Mathematica 5 было добавлено более 1000 новых функций в версии Mathematica 6 и затем более 500 функций в версии Mathematica 7. Еще около 500 новых функций введено в последней реализации Mathematica 8. В их числе функции по вейвлетам и обработке изображений. Таким образом, по числу встроенных функций Mathematica сравнялась с другой системой такого класса – Maple (последняя реализация Maple 13). Многие отмечают высокую достоверность и надежность решения сложных математических задач в системе Mathematica. В новых версиях Mathematica резко (порой в сотни раз) повышена скорость вычислений. Более наглядной и простой в применении стала справочная система.

Но не только это делает Mathematica действительно революционным программным продуктом. В новых версиях этой системы введена концепция динамического изменения переменных, динамической интерактивности и динамической графики. Эта концепция и примеры ее реализации были продемонстрированы автору этого сообщения еще в 2000 году во время его стажировки в США по приглашению фирмы Wolfram Research Inc. Понадобилось десять лет, чтобы ввести их в новые реализации системы. Это свидетельствует о тщательности разработок фирмы Wolfram Research Inc.

Несколько необычной кажется большая и постоянно растущая популярность мощной матричной системы MATLAB [8; 9], явно ориентированной на численные вычисления и впитавшей в себя все возможности матричных вычислений, созданные за полвека. Как и в Mathcad, в MATLAB есть ограниченные возможности аналитических вычислений с помощью пакета расширения SymbolicMath Toolbox с встроенным ядром символьных вычислений системы Maple (а в последних реализациях еще и MuPAD). Несомненно, большой популярности MATLAB способствовали тщательно отработанные со времен создания больших ЭВМ методы матричных вычислений для матриц больших размеров и наличие одного из лучших пакетов блочного математического имитационного моделирования Simulink [10].

Основные тенденции развития СКМ сегодня:

- рост числа встроенных функций (до 3–4 тысяч и более у СКМ Maple и Mathematica);
- ориентация интерфейса пользователя на начинающих пользователей, а функциональных возможностей – на пользователей-профессионалов;
- переход многих функций из пакетов расширения систем в их ядро, что упрощает применение функций;

- расширение профессиональной ориентации систем за счет прилагаемых к системам пакетов расширения и применения, а также за счет обращения к базам данных, размещенным в Интернете;
- расширение функциональных возможностей систем и придание им свойств баз данных в различных отраслях науки и техники: в математике, физике и химии, в астрономии, географии и картографии, в финансах и экономике и т.д.;
- широко применение панелей инструментов и панелей (палитр) ввода, обеспечивающее ввод символов, команд и функций одним нажатием левой кнопки мыши;
- широкое применение контекстно-зависимых меню правой кнопки мыши;
- повышение скорости вычислений порою в сотни и тысячи раз, широкое применение алгоритмов параллельных вычислений;
- реализация в пределах одной системы одновременно символьных (аналитических) и численных методов вычислений с их полноценной и порою изысканной графической визуализацией.

В технике проведения научных расчетов СКМ стали своего рода суперкалькуляторами, практически мгновенно решающими сложные уравнения, вычисляющие интегралы и производные, строящими графики любых функций и т.д. Например, система Mathematica 6 решает систему из 500 линейных уравнений менее чем за 0,1 с. Система MATLAB+Simulink позволяет моделировать сложные системы и устройства, например цифровые автопилоты летальных аппаратов или химические реакторы и энергетические системы. В новейших реализациях MATLAB появились средства моделирования электрических и электронных цепей и схем с применением физических моделей компонентов и моделей, применяемых в программах схемотехнического моделирования PSPICE.

Ученые предпочитают работать с наиболее мощными из СКМ, такими как MATLAB, Mathematica и Maple, хотя популярностью все еще пользуется и система Mathcad. В образовании ситуация несколько иная – здесь, особенно в школьном образовании, используются малые системы Derive и MuPAD. Однако в университетах, особенно в технических и классических, популярностью пользуются более мощные системы. Особенно возрос интерес к системе MATLAB, которая стала признанным во всем мире средством и языком решения научно-технических вычислений и осуществления визуально-ориентированного блочного математического моделирования различных явлений, систем и устройств.

Что дает применение СКМ в образовании? Прежде всего, СКМ способствуют интересу студентов к изучаемому с их помощью материалу. Высочайшая степень визуализации вычислений позволяет

легче понять математическую или физическую сущность изучаемых методов и алгоритмов. СКМ постепенно превращаются в мощные базы данных и справочники по математике, физике, химии и другим областям науки и техники. Многим учащимся интересно изучение самих этих систем, которые являются, пожалуй, самыми крупными интеллектуальными программными продуктами (например, в полном наборе система MATLAB R2011a занимает уже около 5 Гбайт памяти и имеет до 100 пакетов расширения в различных областях науки и техники). Но главное – СКМ позволяют сделать процесс обучения более быстрым и насыщенным. Они позволяют лучше разместить в прокрустовом ложе учебного графика предусмотренный им объем материалов. Можно, к примеру, изучая СКМ, научить студентов современному интерфейсу пользователя, программированию и основам математики или физики. Особенно важно применение СКМ в изучении новых предметов, дисциплин и понятий, например, средств обработки сигналов и изображений, вейвлетов и т.д. Знаковым является применение системы MATLAB в экономических расчетах, задачах биоинформатики, искусственного интеллекта и нейронных сетей, в физике, математике, механике, энергетике и т.д.

Огромное значение в широком применении СКМ имеет подготовка по ним полноценной монографической, справочной и учебной литературы. В этом важном деле многие годы лидирует Смоленская научная школа [1–14 и др.]. В Смоленске было проведено 11 международных конференций «Системы компьютерной математики и их приложения». Издано свыше полусотни известных книг по системам компьютерной математики. Упомянутая выше 1,5-месячная стажировка автора в США (по приглашению крупного международного центра компьютерной математики при фирме Wolfram Research Inc.) активизировала подготовку ряда серий книг по всем массовым СКМ. В их числе первая крупная (1296 страниц) монография по этому направлению [1], книга по системам Maple, признанная лучшей на всероссийском конкурсе «Лучшая научная книга 2006» [3], книга по системе Mathcad [5], сделавшая автора лауреатом следующего конкурса «Лучшая научная книга 2007» и, наконец, книга «Mathematica 5.1/5.2/6 в математике, физике и образовании» – лауреат конкурса «Лучшая научная книга 2008» [6]. Ряд последних книг посвящен применению СКМ в электроэнергетике, радиотехнике и измерительной технике [11–14].

Во многих вузах появились курсы по СКМ и их применению. СКМ включены в программы учебных дисциплин многих университетов по прикладной математике, численным методам, новым информационным технологиям в образовании и др. Поэтому важное значение имеет

повышение квалификации преподавателей школ, вузов и университетов в области применения СКМ.

К сожалению, кризис внес свои негативы и в подготовку книг. Тиражи книг в последние годы резко упали. Издательства часто выпускают книги не в расчете на их продажу населению, а на их сканирование и нелегальное распространение через Интернет. В отсутствие государственной поддержки издание книг по СКМ оно может сойти на нет уже в ближайшие годы. В первую очередь это грозит книгам по компьютерной математике и СКМ, насыщенным математическим и графическим материалом и сложным в подготовке.

Литература

1. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 2001. – 1296 с.
2. Дьяконов В.П. Системы компьютерной алгебры Derive. Самоучитель. – М.: Солон-Р, 2002. – 320 с.
3. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. Библиотека профессионала. – М.: Солон-Пресс, 2006. – 720 с.
4. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001i, 11. Библиотека профессионала. – М.: Солон-Пресс, 2004. – 832 с.
5. Дьяконов В.П. Mathcad 11/12/13 в математике. Справочник. М.: Горячая линия –Телеком, 2007.
6. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6 в математических и научно-технических расчетах. Библиотека профессионала. – М.: Солон-Пресс, 2008. – 320 с.
7. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. – М.: ДМК-Пресс, 2009. – 624 с.
8. Дьяконов В.П. MATLAB R2006/2007/2008 + Simulink 5/6/7. Основы применения. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: СОЛОН-Пресс, 2008. – 800 с.
9. Дьяконов В. П. MATLAB 7.*/R2006/R2007. Самоучитель. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 768 с.
10. Дьяконов В.П. SIMULINK5/6/7. Самоучитель. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 784 с.
11. Дьяконов В.П., Пеньков А.А. MATLAB и SIMULINK в электроэнергетике. – М.: Горячая линия – Телеком, 2009. – 816 с.
12. Дьяконов В.П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 784 с.
13. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. – Изд. 2-е перераб. и доп. – М.: Солон-Р, 2004. – 438 с.
14. Афонский А.А., Дьяконов В.П. Электронные измерения в нанотехнологиях и в микроэлектронике / под ред. проф. В. П. Дьяконова. – М.: ДМК-Пресс, 2011. – 688 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MAPLE ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПЕРАТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ АВТОМОБИЛЬНЫХ ПЕРЕВОЗОК

Л.И. ЕРЕМОВА

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань

e-mail: Leisan747@mail.ru

Программа дисциплины «Автоматизированные системы управления на автомобильном транспорте» (в последующем АСУ на АТ) для специальности 190701 «Организация перевозок и управление на транспорте (на автомобильном транспорте)» предусматривает изучение темы «АСУ грузовыми перевозками. Задачи оптимального планирования грузовых перевозок». Эта тема является очень важной для данной дисциплины, так как разработка и применение оптимальных схем грузовых потоков позволяют снизить затраты на перевозки. Студенты же, в свою очередь, должны научиться анализировать полученные в процессе решения задач на оптимизацию результаты и делать выводы по оптимизации планирования перевозочного процесса. На данный момент эти задачи решаются с помощью программы MS Excel, а в некоторых задачах, в частности, такой, как «Транспортная задача», расчет матрицы грузоперевозок ведется вручную. Все эти методы решения задач применимы в случае, если это классическая задача, т.е. задача малой размерности. Поэтому когда количество переменных достигает порядка нескольких тысяч (многокритериальность), решить задачу обычным способом довольно сложно. Универсальным решением этих проблем является применение пакета Maple. Maple-программный пакет, с помощью которого можно делать сложные вычисления, имеет собственный язык программирования, доступный для пользователей ПК с любым уровнем подготовки. Maple обладает развитыми графическими средствами. Для студентов Maple будет неоценимым помощником при решении задач на оптимизацию. В Maple задачи оптимизации решаются с помощью пакета линейной оптимизации под названием *simplex*. Набор команд позволяет непосредственно решить задачу линейного программирования за одно обращение к функции *maximize()* или *minimize()*, что очень удобно по сравнению с выполнением того же алгоритма в MS Excel.

Литература

1. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.: ил.
2. Кирсанов М.Н. Графы в Maple. Задачи, алгоритмы, программы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 168 с.

3. Автоматизированные системы обработки информации и управления на автомобильном транспорте: учебник для сред. проф. Образования. – М.: Изд. центр «Академия», 2003. – 224 с.

4. Обыденнов А.П. Управление автомобильным транспортом с применением ЭВМ. – М.: Транспорт, 1989. – 245 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С ЦИФРОВОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

В.А. ИСАКОВ*, А.А. ПЕНЬКОВ**

*ЗАО "НИИ СТТ", г. Смоленск

**Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск

Растущие требования к динамическим характеристикам современных импульсных источников питания требуют разработки новых алгоритмов управления. Желательным является апериодический переходной процесс минимально возможной длительности при скачкообразном изменении нагрузки. Для обеспечения указанных характеристик требуется контролировать несколько переменных состояния силовой части, производить насыщенную математическими операциями обработку и формировать управляющие сигналы для силовых ключей с минимальной задержкой. Реализация подобных систем управления в аналоговом виде сопряжена с техническими трудностями, а иногда и принципиально невозможна, поэтому решение задачи осуществляется в цифровом виде [1].

На основе недавно предложенного принципа управления [2] на базе анализа энергетического баланса в силовой части была разработана система управления понижающим преобразователем. Имитационное моделирование в среде Simulink показало существенные преимущества перед традиционными способами реализации ШИМ. Задачей дальнейших исследований является экспериментальное испытание алгоритма на макете силового преобразователя с цифровой системой управления, содержащей каналы оцифровки контролируемых сигналов и сигнальный процессор с целочисленной арифметикой.

Реализация системы управления в цифровом виде требует проверки работоспособности алгоритма в условиях ограничения разрядности и частоты дискретизации входных данных, наличия задержек при передаче и вычислении результата. Неизбежно появляющиеся при этом погрешности обеспечения энергетического баланса в силовой части схемы могут стать потенциальной причиной её неустойчивой работы [3].

Целью работы являлся анализ влияния эффектов дискретности системы на функционирование алгоритма и формирование требований к

аппаратной реализации цифровой части. Для этого в исходную модель силового преобразователя в среде Simulink были добавлены элементы, имитирующие влияние параметров дискретной системы:

- тактовый генератор с частотой дискретизации входных каналов;
- устройства выборки-хранения, квантующие входные сигналы по времени;
- блоки квантования входных сигналов по величине;
- элементы задержки с величинами, кратными периоду дискретизации для входных данных, и результата работы алгоритма;
- математические операции с целочисленной арифметикой.

Качество работы дискретной системы управления оценивалось при сравнении с динамическими характеристиками исходной непрерывной модели. Основными критериями для сравнения служили форма пульсаций выходного напряжения и длительность переходного процесса при скачкообразном изменении нагрузки.

В результате вариации частоты дискретизации входных данных, их разрядности и величины задержки при передаче и вычислениях были выявлены пределы, в которых система обеспечивает близкие к идеальному варианту характеристики. Эффекты квантования по времени исчезают при соотношении частоты дискретизации и частоты коммутации не менее 10. Разрядность входных данных достаточна, если цена младшего разряда данных сравнима с амплитудой пульсаций. В свою очередь, задержки при передаче и вычислениях, составляющие один-два периода дискретизации, не оказывают существенного влияния на работу преобразователя. Из этого следует, что дискретная природа системы управления не предъявляет жестких требований к цифровой элементной базе. Разрядность и частота оцифровки оказываются типичными для измерительной аппаратуры широкого применения. Вычислительная часть системы, способная производить требуемую обработку входных данных в реальном времени, может быть выполнена на сигнальном процессоре с низким энергопотреблением.

Результаты моделирования показывают возможность практической реализации предлагаемой цифровой системы управления на основе энергетических соотношений при использовании доступной в настоящее время элементной базы. Такие системы управления могут найти применение в источниках питания, от которых требуется максимальное быстродействие.

Литература

1. Мелешин В.И., Овчинников Д.А. Управление транзисторными преобразователями электроэнергии. – М.: Техносфера, 2011. – 576 с.
2. Пеньков А.А. Принцип синтеза систем управления импульсными преобразователями на основе энергетических соотношений // Практическая силовая электроника. – 2006. – Вып. 22. – С. 28–33.

3. Пеньков А.А., Строев Н.Н., Строев К.Н. Подходы к построению алгоритмов цифрового управления импульсными преобразователями на основе энергетического баланса // Вестник МЭИ. – 2009. – Вып. 5. – С. 66–73.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СТРУКТУР В СИСТЕМЕ MAPLE

М.Н. КИРСАНОВ, Е.В. БАТУЛИН

Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва

Исследование систем с большим числом элементов на прочность, устойчивость или колебания обычно ограничено каким-то разумным пределом в размере системы. Обычно применяют численный или аналитический метод. Численный анализ (в том числе и метод конечных элементов) для систем большой размерностью неизбежно имеет тенденцию к накоплению ошибок округления или к потере точности при решении алгебраических систем. Аналитические методы доступны для сравнительно несложных систем. В тех же случаях, когда исследуемая система имеет периодическую структуру геометрии, возможен третий путь – индуктивный вывод разрешающих формул. Этот метод также формально является аналитическим, но для его работы приходится использовать программы аналитических вычислений.

Для примера рассмотрим нагрузки в стержнях статически определимой фермы с произвольным числом панелей. Каждый узел фермы имеет массу m (при вычислениях заменится нагрузкой P). Ферма с двумя панелями в основании имеет вид:

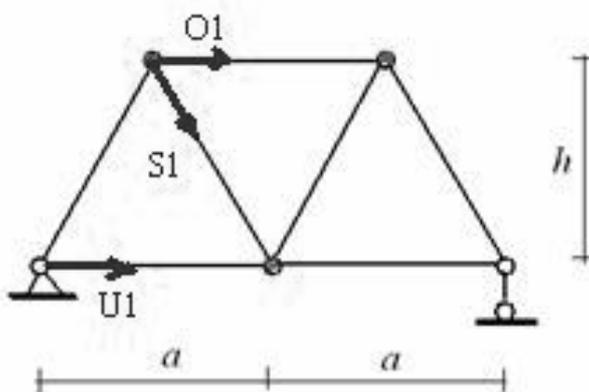


Рис.1. Ферма ($N = 2$)

Найдем реакции U_1 , S_1 и O_1 , записав уравнения моментов относительно узлов 1, 2 и 3:

$$\begin{aligned}
 U \cdot h - R \cdot \frac{a}{2} &= 0, \\
 -O \cdot h + P \frac{a}{2} - R \cdot a &= 0, \\
 -S \cdot a \cdot \sin(\tan^{-1}(\frac{2 \cdot h}{a})) - O \cdot h - P \frac{a}{2} &= 0,
 \end{aligned}$$

где R – реакция левой опоры фермы. Значение R зависит от общего количества панелей в основании N: $R = \frac{(2 \cdot N - 1)}{2}$. В рассматриваемом случае N=2.

$$U_1 = R \cdot \frac{a}{2 \cdot h}, \quad O_1 = \frac{P \frac{a}{2} - R \cdot a}{h}, \quad S_1 = \frac{R - P}{\sin(\tan^{-1}(\frac{2 \cdot h}{a}))}.$$

Рассмотрим реакции U_i для ферм большего размера:

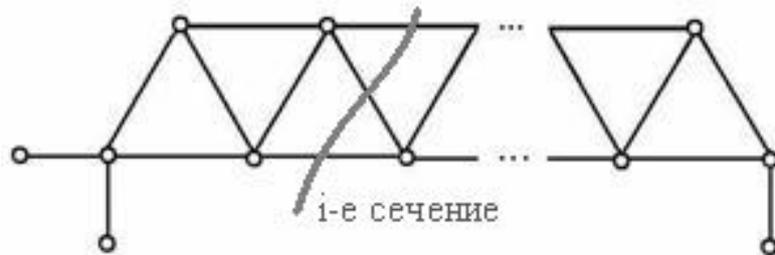


Рис.2. Ферма с произвольным количеством панелей в основании.

$$U_2 = \frac{R \cdot \frac{3 \cdot a}{2} - P \cdot \frac{3 \cdot a}{2}}{h}, \quad U_3 = \frac{R \cdot \frac{5 \cdot a}{2} - P \cdot 5 \cdot a}{h}, \quad U_4 = \frac{R \cdot \frac{7 \cdot a}{2} - P \cdot \frac{21 \cdot a}{2}}{h}.$$

Как видно, коэффициенты при нагрузке P равны 0, -3/2, -5, -21/2 при $i=0,1,2,3,4$ соответственно. Используя функции из пакета **genfunc**, находим, что $U_i = \frac{a}{h} (R \frac{2 \cdot i - 1}{2} - P \frac{(1-i)(2 \cdot i - 1)}{2})$.

Предложенный метод может быть использован для исследования сетчатых и гофрированных материалов (рис. 3), используемых в нанотехнологиях.



Рис. 3

Литература

1. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – СПб.: Лань, 2003.
2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: Солон, 2006.

ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕРФЕЙСА USB 3.0 В СОВРЕМЕННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРАХ

Д.Е. КОРОМБАЛЁВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: korombalev@yandex.ru

В настоящее время промышленность выпускает широкий круг разнообразной измерительной радиоэлектронной аппаратуры, в том числе цифровые осциллографы, анализаторы спектра, мультиметры, системы сбора данных и др. С появлением систем компьютерной математики, способных эффективно обрабатывать экспериментальные данные, а также с широким распространением персональных компьютеров высокой производительности все чаще возникает задача интеграции измерительной техники с ПК. Данная статья посвящена изучению возможностей такой интеграции с применением современного интерфейса высокой пропускной способности USB 3.0.

Интерфейс USB (Universal Serial Bus), первая официальная спецификация которого впервые появилась в 1996 году, весьма хорошо зарекомендовал себя, и на сегодняшний день практически все персональные компьютеры и многие периферийные устройства им оснащены. В настоящее время наиболее распространена шина USB спецификации 2.0. Она имеет следующие преимущества:

- возможность подключения устройств самого разнообразного назначения: сканеры, принтеры, внешние жесткие диски и flash-накопители, модемы, модули беспроводной передачи данных, измерительная техника и многое другое;
- возможность одновременной работы шины с разнотипными устройствами;
- возможность питания устройства непосредственно от USB интерфейса персонального компьютера (в том случае, если энергопотребление устройства не превосходит возможностей шины USB);
- защищенность шины USB от перегрузок по потребляемому от нее току, возможность «горячего» подключения/отключения устройств;
- высокая пропускная способность шины последних модификаций;
- простота подключения устройств, поддержка технологии Plug and Play.

Все эти преимущества обусловили широкое применение шины USB и в современных измерительных приборах: осциллографах, генераторах сигналов, анализаторах спектра, мультиметрах. Посредством этой шины происходит взаимодействие измерительных устройств с ПК: управление, настройка параметров, передача результатов измерений.

В современных условиях от измерительной техники требуется высокое быстродействие, зачастую возможность работы в реальном режиме времени, возможность обработки большого объема данных, полученных в результате измерений. К примеру, фирма Agilent Technologies освоила технологию производства сверхскоростных интегральных микросхем на основе фосфид-индиевых (InP) микротранзисторов с рабочими частотами выше 200 ГГц. Такие микросхемы с успехом были использованы как в аналоговом тракте осциллографов, так и в их пробниках. При этом частота дискретизации достигает значения 80 Гвыб/с, объем максимальной памяти осциллограмм достигает 2 Гточек. Фактически современные цифровые осциллографы превратились в многофункциональные цифровые системы для исследования сложнейших сигналов, длина которых доходит до 1 ГБ, и автоматического измерения десятков их параметров.

Для потребностей электроники в ближайшем будущем потребуются осциллографы с возможностями на порядок выше имеющихся сейчас. То же самое относится и к анализаторам спектра. Несомненно, что в данном случае роль ПК в настольных и передвижных измерительных системах будет только возрастать. Для обеспечения взаимодействия измерительных приборов и компьютера потребуется интерфейс высокой пропускной способности. В настоящее время к таким интерфейсам можно отнести USB 3.0 и LAN с реализованным стандартом LXI (LAN eXtensions for Instrumentation). LAN интерфейс и стандарт LXI на сегодняшний день дают возможность передачи данных со скоростью до 1 Гбит/сек., возможность одновременного подключения нескольких измерительных устройств к одному ПК, возможность значительного разнесения в пространстве измерительных приборов. Но стандарт LXI имеет свою специфику применения и больше предназначен для промышленных нужд, впрочем, постепенно он появляется и в приборах для настольного использования. Пример – последние осциллографы смешанных сигналов фирмы Tektronix серии MSO/DPO4000B и серии MSO/DPO5000.

Что же интересного для измерительной техники может предложить интерфейс USB 3.0? Прежде всего, огромную пропускную способность – до 4800 Мбит/сек. (режим SuperSpeed), что снимает проблему передачи больших объемов информации. Основная проблема шины USB 2.0 заключается в том, что она является однонаправленной. То есть данные передаются в обе стороны (либо в одну, либо в другую, но не одновременно) по одной и той же витой паре. Несмотря на декларируемую максимальную скорость передачи данных до 480 Мбит/с. в режиме Hi-Speed, шина USB 2.0 имеет достаточно большие задержки между запросом на передачу данных и собственно началом передачи. Поэтому в реальности интерфейс USB 2.0 не

позволяет передавать данные со скоростью более 35 Мбайт/с (280 Мбит/с). Шина USB 3.0 является двунаправленной.

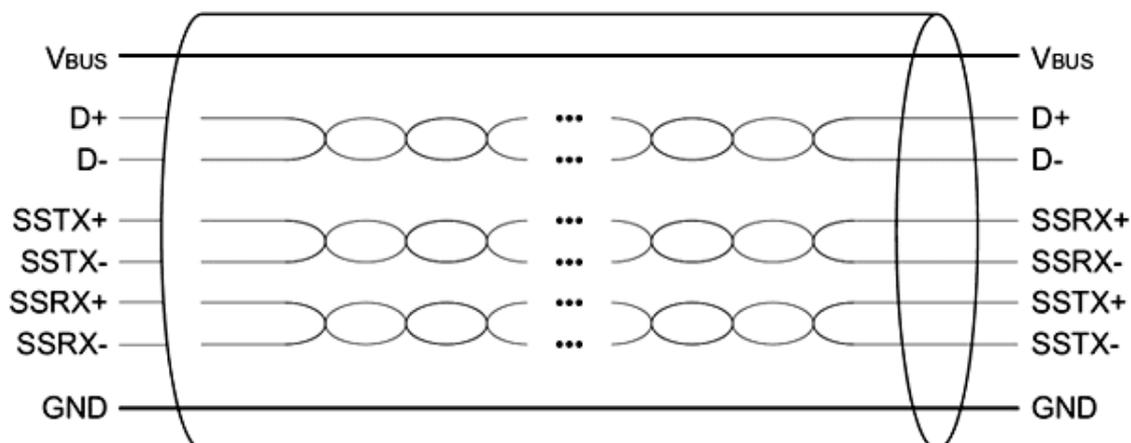


Рис. 1. Кабель USB 3.0

Для обеспечения двунаправленности в кабель шины USB нового стандарта добавлено дополнительно 2 витые пары проводников, каждая из которых находится в отдельной экранирующей оплетке. На рисунке 1 эти проводники обозначены SSRX+, SSRX-, SSTX+, SSTX-. Для совместимости со стандартом USB 2.0 предусмотрена витая пара, по которой осуществляется прием и передача данных в режиме USB 2.0 (Hi-Speed, Full-Speed и Low-Speed). На рисунке 1 это проводники D+ и D-. Данная витая пара в отдельную оплетку не помещается и находится в общей экранирующей оплетке всего кабеля. Проводники V_{BUS} и GND – это шина питания +5 В и «земля» соответственно. Таким образом, в кабеле USB 3.0 не четыре провода (как в кабеле USB 2.0), а восемь (рис. 1), а в разъемах USB 3.0 как минимум девять контактов (оплетки двух витых пар подключаются к контакту GND_DRAIN разъема).

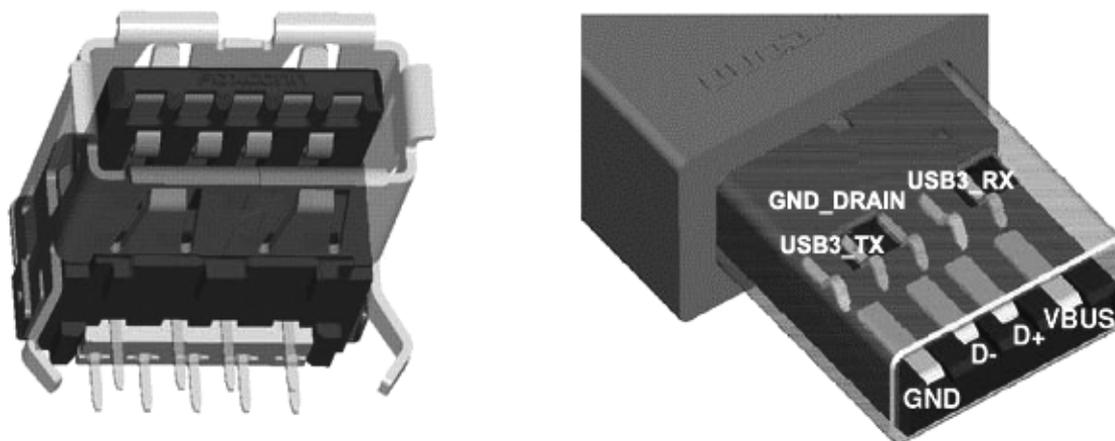


Рис. 2. Разъем USB 3.0 типа А

На рисунке 2 показан вид разъема USB 3.0 типа А. Совместимость разъема USB 3.0 типа А с разъемом USB 2.0 типа А достигается за счет

того, что дополнительные контакты нового интерфейса реализованы за счет варьирования глубины их расположения в разъеме.

В версии USB 3.0 почти вдвое увеличена нагрузочная способность порта – до 0,9 А, что дает возможность создавать виртуальные измерительные приборы без применения внешнего блока питания. Помимо большего тока нагрузки, новая спецификация поддерживает новую схему управления питанием внешних устройств. В USB3.0 поддерживаются четыре состояния U0, U1, U2 и U3. U0 соответствует активному состоянию периферийного устройства. Сразу после передачи данных периферийное устройство может перейти в состояние U1, когда отключается модуль, отвечающий за прием и передачу данных. Если необходима еще большая экономия энергии, то можно отключить всю логику устройства, переведя его в состояние U2. И, наконец, четвертое состояние U3 полностью переводит устройство в состояние сна. По мнению разработчиков, такая схема более эффективно оптимизирует энергопотребление, что особенно важно для мобильных устройств. Эта особенность может быть полезной при сопряжении будущих измерительных устройств, оснащенных интерфейсом USB 3.0 и современных мобильных компьютеров (ноутбуков) с таким же интерфейсом для создания энергоэкономичных мобильных измерительных комплексов. Потребность в таких комплексах есть уже сейчас.

Достоинством USB версии 3.0 является и то, что он полностью обратно совместим с шиной USB 2.0. То есть в спецификации USB 3.0, кроме режима SuperSpeed (4,8 Гбит/сек.), оставлены и режимы Hi-Speed, Full-Speed и Low-Speed. Кроме того, разъемы USB 3.0 совместимы с разъемами USB 2.0. Это означает, что все периферийные устройства с интерфейсом USB 2.0 можно будет подключать к шине USB 3.0.

Таким образом, интерфейс USB 3.0 предоставляет широкие возможности по сопряжению измерительной техники и персонального компьютера и, несомненно, будет широко применяться в будущих приборах.

Литература

1. Афонский А.А., Дьяконов В.П. Электронные измерения в нанотехнологиях и микроэлектронике / под ред. В.П. Дьяконова. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 688 с.
2. Дренкоу Г. Как создать измерительную систему стандарта LXI // Компоненты и технологии. – 2007. – №2.
3. Дьяконов В.П. Сверхскоростная осциллография: вчера, сегодня и завтра // Компоненты и технологии. – 2010. – №4. – С. 52–61.
4. URL: <http://www.compress.ru/article.aspx?id=19961&iid=917>.
5. URL: <http://www.tek.com/ru>.

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ MATHEMATICA

Р.Е. КРИСТАЛИНСКИЙ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Элементы вариационного исчисления входят в учебные планы подготовки специалистов различных профилей. Методика решения вариационных задач в имеющихся учебных пособиях сводится к следующему.

1. Строится уравнение Эйлера-Лагранжа.

2. Для этого уравнения средствами классической теории дифференциальных уравнений решается соответствующая краевая задача.

Задачи, в которых решение уравнения Эйлера-Лагранжа не выражается в квадратурах, не рассматриваются. Значение соответствующего функционала для экстремали не вычисляется.

Использование системы Mathematica позволяет существенным образом расширить спектр решаемых задач. Рассмотрим одну из них.

Задача. Найти экстремаль функционала

$$\int_{-1}^1 (y'' - 2y'^3 \cos(x) + y^4 \sin(x) - 2y \exp(x)) dx$$

в классе функций, удовлетворяющих следующим краевым условиям

$$y(-1) = 3, y'(-1) = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

Решение.

```
U[x_]=y''[x]^2-2 y'[x]^3 Cos[x]+y[x]^4 Sin[x]-2 y[x]Exp[x];
U1[x_]=D[U[x],y[x]]; U2[x_]=D[U[x],y'[x]];
U2[x_]=D[U2[x],x]; h[x_]=U1[x]-U2[x];
U3[x_]=D[U[x],y''[x]];
U3[x_]=D[U3[x],{x,2}]; U3[x_]=D[U3[x],{x,2}];
h[x_]=U1[x]-U2[x]+U3[x];
R=NDSolve[{h[x]==0,y[-1]==3,y'[-1]==0, y[1]==1,y'[1]==0},y[x],{x,-1,1}]
{{y[x]→InterpolatingFunction[{{-1.,1.}},<>][x]}}
y[x_]=y[x]/.R[[1]];
NIntegrate[U[x],{x,-1,1}]
-24.6411
```

Литература

1. Ванько В.И, Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: Изд. МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2001. – 487 с.

2. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. – СПб.: Изд. «Питер», 2004. – 538 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ОДНОТАКТНОГО СДВОЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

И.А. КРУГЛИКОВ, А.О. ШИРЯЕВ

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск

e-mail: ilja-k_67@rambler.ru

В настоящее время в сетевых бестрансформаторных источниках питания сложилась тенденция вытеснения двухтактного полумостового преобразователя однократным сдвоенным.

Последний выполняется в виде моста (рис. 1а), у которого два противоположных плеча – ключевые транзисторы, два другие – коммутирующие диоды. В одну диагональ моста включается источник питания (U_{dc}), в другую – нагрузка (первичная обмотка силового трансформатора ТС на рис. 1а). Обычно ключи открываются и закрываются одновременно [1]. Исходя из конфигурации схемы, данный преобразователь часто называют «косым мостом».

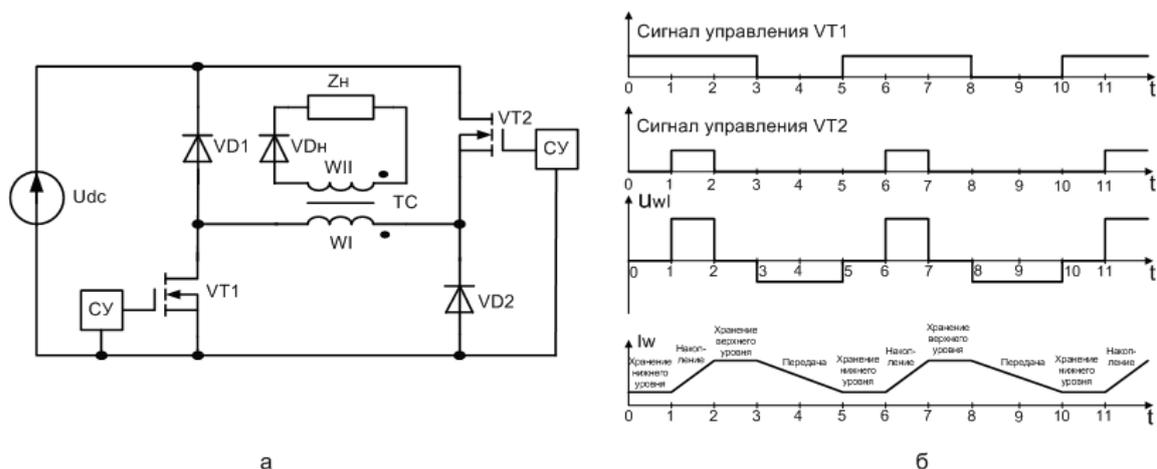


Рис. 1. Схема преобразователя (а) и временные диаграммы его работы (б)

В зависимости от структуры выходного выпрямителя преобразователь может работать как прямоходовой (forward), обратногоходовой (flyback) или комбинированный. Например, полярность диода VD_H и фазировка обмоток ТС на рисунке 1а соответствуют обратногоходовому преобразованию.

Характерной особенностью сдвоенного однократного преобразователя является то, что напряжение на запертых ключах не превышает питающее. По этой причине преобразователь работоспособен и без демпфирующих цепей.

У обратногоходового «косого моста» возможен режим двойной модуляции (M2), когда ключевые транзисторы $VT1$ и $VT2$ управляются по разному алгоритму (см. рис. 1б). Тогда наряду с традиционными режимами накопления (интервал 1–2) и передачи энергии в нагрузку (интервал 3–5) возможен третий режим – хранение накопленной энергии

(интервалы 2–3 и 5–6), когда один транзистор открыт, а другой заперт. При этом ток первичной обмотки циркулирует по контуру: VD1-VT2-WI или VD2-VT1-WI. Транзистор, входящий в контур, может длительное время находиться в открытом состоянии. Более удобен контур с VT1, для которого возможна непосредственная связь транзистора с системой управления.

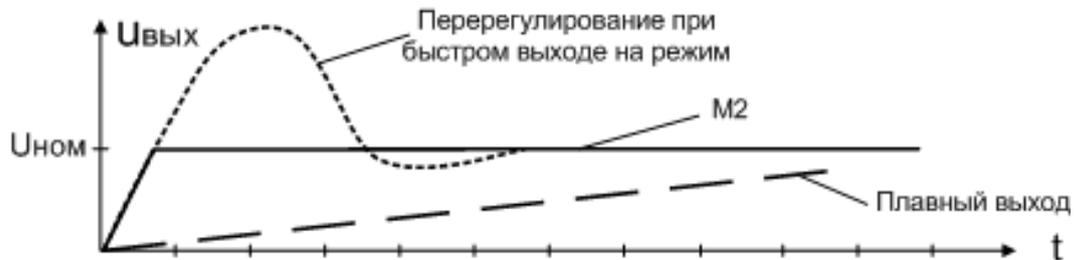


Рис. 2. Напряжение на выходе однотактного двояного обратного преобразователя

Наличие режима хранения позволяет поддерживать величину запасенной в сердечнике энергии на оптимальном уровне, а в случае необходимости прекращать передачу энергии в нагрузку. Таким образом, преобразователь может быстро обрабатывать резкое изменение мощности в нагрузке (рис. 2), исключая тем самым перерегулирование при быстром выходе на режим, а также выбросы и провалы выходного напряжения при скачкообразных изменениях параметров нагрузки.

Было произведено исследование компьютерной модели «косого моста», подтвердившее возможность получения уникальных свойств в режиме двойной модуляции. Последнее обстоятельство показывает перспективность использования однотактного двояного преобразователя для вторичных источников питания.

Литература

1. Гончаров А. Начальная школа построения импульсных DC/DC преобразователей // Электронные компоненты. – 2003. – №5. – С. 106–109.

РЕАЛИЗАЦИЯ РИДЖ-РЕГРЕССИИ В ПАКЕТЕ SPSS В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATHCAD

М.Ю. ЛЕБЕДЕВА

Филиал ГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск

О наличии мультиколлинеарности судят по матрице парных коэффициентов корреляции между факторами модели. Если коэффициенты парной корреляции превышают величину 0.8, то считается, что модель приходится строить в условиях мультиколлинеарности [1]. В таком случае оценки параметров

многофакторных моделей будут неточными, а интерпретация влияния факторов на прогнозируемый показатель не адекватна реальной ситуации. Следовательно, снижается ценность регрессионных моделей при решении задач прогнозирования.

Наиболее радикальным средством устранения последствий мультиколлинеарности считается метод гребневой (ридж) регрессии. В этом случае к диагональным элементам корреляционной матрицы прибавляют малое число (ридж-параметр). Добавление этого малого параметра приводит к небольшой систематической ошибке в оценке коэффициентов регрессии, зато существенно снижает их случайную изменчивость. Как известно, дисперсии случайных ошибок коэффициентов регрессии пропорциональны диагональным элементам матрицы:

$$C = (R_{xx})^{-1},$$

где R_{xx} – корреляционная матрица объясняющих переменных.

При мультиколлинеарности определитель корреляционной матрицы может оказаться близким к нулю (вырождение), тогда численные значения элементов обратной матрицы будут очень велики. Введение даже малого ридж-параметра сдерживает непомерный рост численных значений элементов обратной матрицы.

В работе [2] описан результат исследования зависимости трудоемкости обработки деталей на станке (y) от факторов: x_1 – массы детали, x_2 – количества операций, x_3 – количества обрабатываемых поверхностей, x_4 – количества деталей.

Рассмотрим корреляционную матрицу между всеми переменными.

$$R_{xy} = \begin{vmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \\ x_1 & 1 & 0.97 & 0.96 & 0.96 & 0.9186 \\ x_2 & 0.97 & 1 & 0.996 & 0.993 & 0.98 \\ x_3 & 0.96 & 0.996 & 1 & 0.995 & 0.99 \\ x_4 & 0.96 & 0.993 & 0.995 & 1 & 0.99 \\ y & 0.9186 & 0.98 & 0.99 & 0.99 & 1 \end{vmatrix}.$$

Из приведенной матрицы видно, что наиболее тесно трудоемкость обработки связана с количеством деталей ($R_{x_4y} = 0.99$). С использованием пакета статистического анализа SPSS была получена регрессионная модель с учетом всех влияющих факторов в виде:

$$y_i = -223 - 0.59 \cdot x_{1i} - 0.94 \cdot x_{2i} + 1.24 \cdot x_{3i} + 1.23 \cdot x_{4i}, \quad i = 1(1)10.$$

Это уравнение «объяснило» 99,7% общей изменчивости отклика y . Получился нелепый результат: будто бы с увеличением массы детали и количества операций трудоемкость обработки уменьшается. Причина

этого недоразумения видна из корреляционной матрицы для факторов: показатель x_4 тесно связан с остальными переменными.

Приведем способ уменьшения эффекта мультиколлинеарности.

Рассмотрим две обратных матрицы для R_{xx} и $(R_{xx} + k \cdot I)$, где I – единичная матрица, R_{xx} – корреляционная матрица между объясняющими переменными.

В таблице 1 приведены результаты вычисления обратных матриц (исходной C и с учетом ридж-параметра C_k) в системе компьютерной математики MathCAD.

Таблица 1

Результаты вычисления обратных матриц

Матрица C	Матрица C_k
$R_{xx}^{-1} = \begin{pmatrix} 21.066 & -51.637 & 33.841 & -2.502 \\ -51.637 & 285.988 & -212.059 & -23.784 \\ 33.841 & -212.059 & 270.287 & -90.651 \\ -2.502 & -23.784 & -90.651 & 117.273 \end{pmatrix}$	$R_{xx}^{-1} = \begin{pmatrix} 7.171 & -3.386 & -1.555 & -1.847 \\ -3.386 & 13.893 & -5.563 & -4.794 \\ -1.555 & -5.563 & 12.982 & -5.627 \\ -1.847 & -4.794 & -5.627 & 12.506 \end{pmatrix}$

Как видно из таблицы, введение малого параметра $k = 0.05$ уменьшило элементы обратной матрицы C_k более чем в 10 раз, что позволяет смягчить эффект мультиколлинеарности. Это означает, что при изменении параметра k , стандартизованные коэффициенты регрессии β_i должны иметь устойчивую динамику для влияющих факторов и неустойчивую для невливающих факторов. Последние могут быть удалены из уравнения регрессии.

Вектор-столбец стандартизованных коэффициентов регрессии вычисляется по следующей формуле:

$$\beta^T = (R_{yx})^T \cdot C_k .$$

Таблица 2

Стандартизованные значения коэффициентов регрессии

Значение ридж-параметра k	Значения стандартизованных коэффициентов регрессии			
	β_1	β_2	β_3	β_4
0.00	-0.297	-0.359	0.633	1.003
0.01	-0.291	0.155	0.449	0.662
0.02	-0.233	0.22	0.428	0.559
0.03	-0.184	0,243	0.41	0.504
0.04	-0.143	0.252	0.394	0.467
0.05	-0.109	0.257	0.381	0.440
0.06	-0.081	0.259	0.37	0.420
0.07	-0.058	0.259	0.36	0.403
0.08	-0.037	0.259	0.352	0.389
0.09	-0.019	0.259	0.344	0.377
0.1	0.004	0.258	0.337	0.367
0.11	0.009	0.258	0.331	0.358
0.12	0.021	0.257	0.326	0.351

Протокол решения задачи с помощью системы компьютерной математики MathCAD для одного значения ридж-параметра $k = 0$ представлен на рисунке 1.

Результаты полученных стандартизованных значений коэффициентов регрессии для k , изменяющегося от 0 до 0.12 с шагом 0.01, приведены в таблице 2.

$$\begin{aligned}
 & k := 0.0 \\
 & R_{xy} := \begin{pmatrix} 1 & 0.97 & 0.96 & 0.96 & 0.92 \\ 0.97 & 1 & 0.996 & 0.993 & 0.98 \\ 0.96 & 0.996 & 1 & 0.995 & 0.99 \\ 0.96 & 0.993 & 0.995 & 1 & 0.99 \\ 0.92 & 0.98 & 0.99 & 0.99 & 1 \end{pmatrix} \\
 & R_{xx} := \begin{pmatrix} 1 + k & 0.9681 & 0.9549 & 0.9558 \\ 0.9681 & 1 + k & 0.9967 & 0.9939 \\ 0.9549 & 0.9967 & 1 + k & 0.9955 \\ 0.9558 & 0.9939 & 0.9955 & 1 + k \end{pmatrix} \\
 & R_{xx}^{-1} = \begin{pmatrix} 21.066 & -51.637 & 33.841 & -2.502 \\ -51.637 & 285.988 & -212.059 & -23.784 \\ 33.841 & -212.059 & 270.287 & -90.651 \\ -2.502 & -23.784 & -90.651 & 117.273 \end{pmatrix} \\
 & C_k := R_{xx}^{-1} \quad C_k = \begin{pmatrix} 21.066 & -51.637 & 33.841 & -2.502 \\ -51.637 & 285.988 & -212.059 & -23.784 \\ 33.841 & -212.059 & 270.287 & -90.651 \\ -2.502 & -23.784 & -90.651 & 117.273 \end{pmatrix} \\
 & R_{YX} := \begin{pmatrix} 0.9186 \\ 0.9813 \\ 0.9901 \\ 0.9925 \end{pmatrix} \quad R_{YX}^T \cdot C_k = (-0.297 \quad -0.359 \quad 0.633 \quad 1.003) \\
 & \beta := R_{YX}^T \cdot C_k \quad \beta^T = \begin{pmatrix} -0.297 \\ -0.359 \\ 0.633 \\ 1.003 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 1. Результаты вычисления стандартизованных коэффициентов регрессии

Теперь интерпретация выглядит логично: с увеличением количества операций (x_2), количества обрабатываемых поверхностей (x_3), количества деталей (x_4), трудоёмкость обработки u повышается.

Литература

1. Лебедева М.Ю. Построение регрессионных моделей в условиях мультиколлинеарности // Известия ОрелГТУ. Информационные системы и технологии. – 2010. – С. 22-27.

2. Горбач А.Н., Цейтлин Н.А. Анализ спонтанных последовательностей в регрессионных моделях в маркетинге. – Харьков: ФО-П Шейнина О.В., 2008. – 182 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕМПИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ БЕЗ ПОТЕРЬ

В.Г. ЛИПОВОЙ, А.О. ШИРЯЕВ

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск

e-mail: baspart@gmail.com

В импульсных источниках питания для повышения КПД целесообразно использовать демпфирующие цепи без потерь.

На рисунке 1,а представлена схема сдвоенного однотактного преобразователя с демпфирующей цепью без потерь [1]. Преобразователь содержит два ключевых транзистора VT1, VT2, два рекуперационных диода VD1, VD6, силовой трансформатор TC с эквивалентом нагрузки. Демпфирующая цепь состоит из двух коммутирующих диодов VD2, VD5, двух корректирующих конденсаторов C2, C3. Цепь перезаряда конденсаторов включает линейную индуктивность L1 и отсекающий диод VD3.

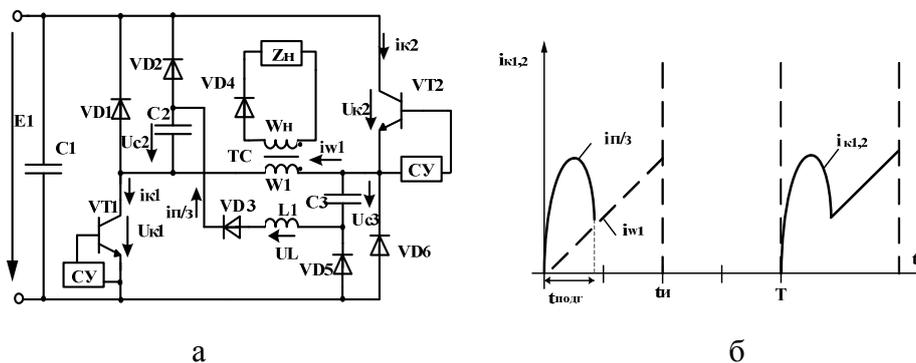


Рис. 1: а – принципиальная схема, б – временные диаграммы токов

В исходном состоянии транзисторы VT1, VT2 открыты, конденсаторы C1, C2 заряжены. При запираии транзисторов конденсаторы разряжаются до нуля по линейному закону, обеспечивая плавное нарастание напряжения на транзисторах.

Перезаряд конденсаторов происходит при открывании обоих транзисторов и носит колебательный характер. В результате него суммарное напряжение на двух конденсаторах равно $2E1$ (по $E1$ на каждый). Ток перезаряда $in/3$ протекает от источника $E1$, через два транзистора, конденсаторы $C2$, $C3$, диод $VD3$ и индуктивность $L1$, ограничивающую ток по амплитуде. Токи коллекторов $ik1$ и $ik2$ имеют выбросы, соответствующие протеканию тока перезаряда (см. рис. 1,б).

Отличие работы схемы на рис. 2,а от рассмотренной выше заключается в принципе работы цепи перезаряда конденсаторов.

Перезаряд здесь осуществляется током, пропорциональным току нагрузки. С этой целью линейная индуктивность $L1$ заменена на трансформатор тока $ТТ$ с нелинейным сердечником.

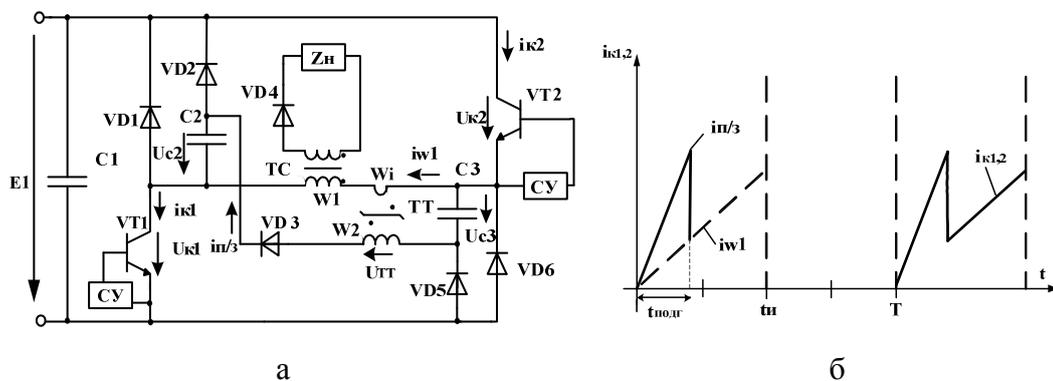


Рис. 2: а – принципиальная схема, б – временные диаграммы токов

Сердечник трансформатора находится в состоянии насыщения $-B_S$ под действием напряженности поля $-H_0$, вызванной ампервитками $i_w1 \cdot W1$.

В начале цикла перезаряда к обмотке $W2$ $ТТ$ прикладывается положительное напряжение $U_{ТТ}$, выводящее сердечник из насыщенного состояния. Пока сердечник $ТТ$ перемагничивается, по обмотке $W2$ протекает ток $in/3$, пропорциональный току первичной обмотки $ТТ$. Этим током перезаряжаются конденсаторы $C1$ и $C2$. Во время перезаряда на токах коллектора $ik1$ и $ik2$ также наблюдаются характерные выбросы (см. рис.2, б).

Анализ работы преобразователя произведен с помощью модели, в которой сделаны упрощения: транзисторные ключи и диоды представлены идеальными элементами, трансформатор – Т-образной схемой замещения [2]. В результате моделирования были получены диаграммы, подтверждающие работоспособность преобразователя с демпфирующей цепью. Упрощенная модель позволяет быстро просчитать переходный процесс, но не позволяет рассчитать траекторию переключения силовых ключей.

Усложненная модель работает во много раз медленнее, в ней

использованы параметры реальных ключевых транзисторов КП946А, для которых при частоте $f=40$ кГц, напряжении питания $E_1=300$ В и мощности нагрузки $P_n=600$ Вт исследуемая демпфирующая цепь позволила снизить суммарные динамические потери вдвое – до 3,4 Вт.

Траектория переключения в зависимости от значения емкостей C_1 и C_2 и противоЭДС нагрузки представлены на рисунке 3.

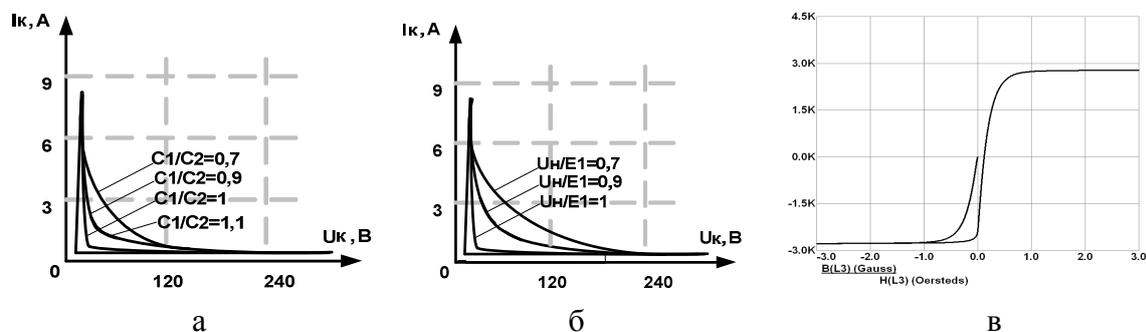


Рис. 3: а, б – траектория переключения силового ключа, в – изменение магнитного состояния сердечника ТТ

На рисунке 4 а,б представлены временные диаграммы работы первой и второй конфигурации схемы. Выброс импульса тока в первом случае имеет колокообразную форму, напряжение на индуктивности меняется по синусоидальному закону (рис.4,а).

Как было сказано выше, при включении в схему трансформатора тока принцип работы остается прежним, однако временные диаграммы токов и напряжений изменяются (рис. 4,б).

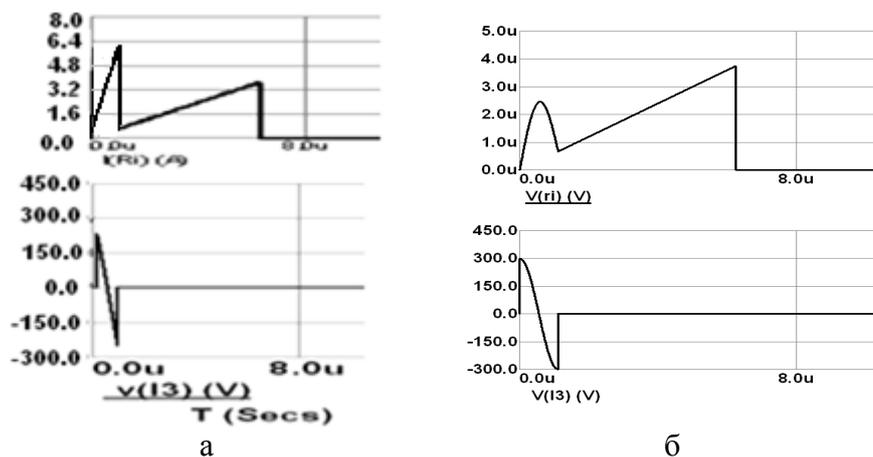


Рис. 4: а, б - временные диаграммы токов и напряжений

Выброс импульса тока здесь имеет линейную форму. Форма напряжения индуктивности также изменяется по линейному закону. Как видно из графиков, схемы работают корректно.

Литература

1. А.С. № 1474823, СССР, Ультразвуковой генератор / Б.А. Глебов и др. Заявка № 4211737. Приоритет изобретения 18.03.1987. Б.и. №15.

2. Глебов Б. Расчет с помощью SPICE демпфирующих цепочек для транзисторных ключей преобразователей напряжения [Электронный ресурс] / Б. Глебов, А. Лебедев, И. Недолужко. – Электрон. дан. Режим доступа: http://www.power-e.ru/2005_04_78.php.

ТЕРМОАВТОМАТ ПРОТАЙКИ ЗИМНИХ ВОДОСТОКОВ КРОВЛИ

Э.А. ЛИСТРАДЕНКОВ, А.О. ШИРЯЕВ
Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск
e-mail: ea-lis@mail.ru

Прошедшая зима доставила немало проблем коммунальным службам, оттепели чередовались с морозами, выпало много снега, из-за чего на большинстве домов появились огромные сосульки.

Традиционным способом борьбы с сосульками является очистка крыш от снега. Если же сосульки образовались, то их можно удалить только механическим путем, что неизбежно приводит к повреждению кровли. Еще один способ предотвращения сосулек – это иметь чистые водостоки. Простейший способ решения этой проблемы – протайка лотков при помощи тепловыводящего кабеля [1]. Выпускаемые кабели питаются от сети переменного напряжения 220/380В и могут разогреваться до 60⁰С. Для крыши площадью 100–200 м² требуется мощность десятки кВт, что приводит к большим затратам электроэнергии.

Установлено, что сосульки образуются при температуре от 0⁰С до -6⁰С. Поэтому для оптимизации электропотребления требуется термоавтомат, который включает обогрев лотков только в указанном диапазоне температур. Для сопряжения термоавтомата с обогревателем не требуется высокоскоростного исполнительного устройства. Можно использовать обычный трехфазный контактор.

На рисунке 1 приведена диаграмма работы термоавтомата. В точках переключения (0⁰С, -6⁰С) из-за слишком медленных тепловых процессов возможно многократное срабатывание контактора, которое может быть устранено с помощью гистерезиса.

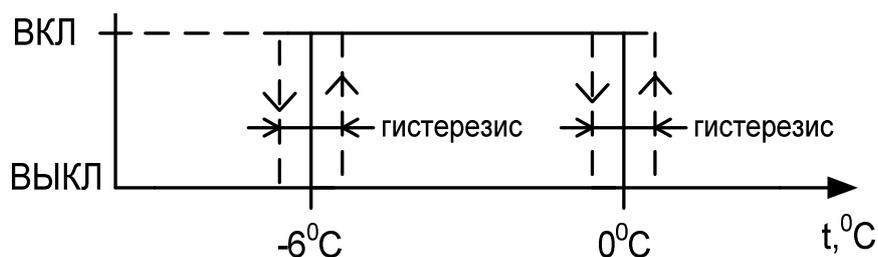


Рис. 1. Диаграмма работы термоавтомата

Для адаптации термоавтомата под параметры конкретной крыши и метеоусловий и для устранения ошибок из-за возможного разброса параметров термодатчиков системе необходима возможность регулировки порогов срабатывания и ширины гистерезиса.

Данная задача легко и дешево решается в аналоговом виде. На рисунке 2 приведена функциональная схема устройства.

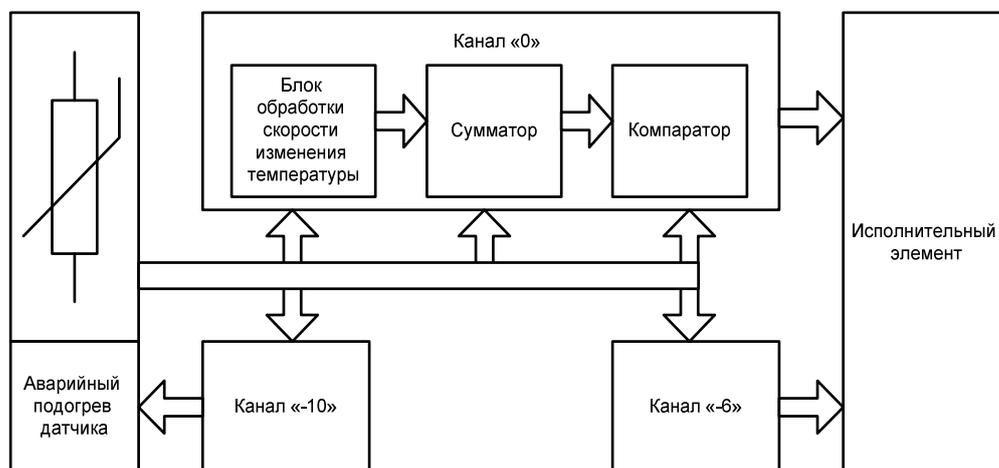


Рис. 2. Функциональная схема устройства

В качестве термодатчика использован терморезистор марки ММТ-1 с отрицательным ТКС.

Канал «-6» обеспечивает срабатывание автомата в районе порога -6°C . Он выполнен как гистерезисный компаратор на ОУ с ПОС.

Канал «0» представляет собой обратный гистерезис. Поэтому в него входит блок управления по скорости. При достижении температурной отметки 0°C он включает/выключает прибор в зависимости от того, в какую сторону изменяется температура.

Вблизи точки 0°C диаграмма работы термоавтомата соответствует обратному гистерезису, при котором замкнутая система не может быть устойчива. Поэтому в канале «0» используется управление по скорости: чем больше скорость изменения температуры, тем более упреждающим должно быть переключение.

Таким образом, на компаратор в канале «0» подается сигнал с датчика температуры плюс производная этого сигнала, которая выделяется в блоке обработки скорости изменения температуры.

Применяемый терморезистор марки ММТ-1 имеет ограничения по низким температурам. Для предотвращения повреждения термодатчика используется дополнительный канал «-10» для аварийного подогрева, который устроен аналогично каналу «-6».

Стоимость разработанного устройства не превышает 300 рублей без стоимости блока питания и контактора.

Литература

1. www.nwterm.ru.

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛЕЙ ОПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ В СРЕДЕ MATLAB+SIMULINK R2010b

Е.В. НАЙДЁНОВ, А.А. ПЕНЬКОВ
Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск
e-mail: nzettez@gmail.com

В систему компьютерной математики MATLAB+Simulink, начиная с версии R2008+, включен пакет моделирования электронных устройств SimElectronics, содержащий библиотеку основных компонентов электромеханических и электронных систем. Модели компонентов обеспечивают более глубокий анализ работы устройств и приближены к моделям типа SPICE, применяемым во многих программах схемотехнического моделирования. В состав библиотеки, в частности, включены модели операционных усилителей (ОУ). Наличие моделей ОУ открывает дополнительные возможности в исследовании электронных схем в среде Simulink. Подробное описание возможностей моделей ОУ SimElectronics в литературе пока отсутствует, а примеры моделирования в справочной системе весьма скудны [1].

В работе рассматриваются особенности применения различных типов моделей ОУ из библиотеки пакета расширения SimElectronics. Проведено сравнение с одним из широкораспространённых пакетов схемотехнического анализа MicroCAP 9 [2].

Пакет расширения SimElectronics 1.5 в MATLAB R2010b содержит всего три модели ОУ: с ограниченной полосой пропускания (Band-Limited Op-Amp), компаратор (Comparator), с конечным коэффициентом усиления (Finite-Gain Op-Amp). В справочной системе представлены уравнения, описывающие модели. Модели являются абстрактными поведенческими и не содержат ни одного транзистора. Система параметров отражает лишь основные свойства ОУ, не учитывая, например, такие важные во многих случаях характеристики, как разность входных токов, напряжение смещения нуля, зависимость входных сопротивлений от частоты, эффекты, связанные с выходом за пределы допустимых значений входных напряжений ОУ, и т.п.

Анализ представленных в пакете MATLAB+Simulink R2010b моделей ОУ показывает, что они являются весьма упрощёнными и соответствуют моделям первого уровня пакетов схемотехнического моделирования, в частности MicroCAP 9. Можно отметить, что модели Band-Limited Op-Amp и Finite-Gain Op-Amp пакета MATLAB+Simulink R2010b содержат весьма ограниченное число параметров, которые лишь приближенно, весьма идеализированно описывают поведение реальных устройств, не учитывая влияния как многих параметров самих микросхем, так и воздействия различных внешних факторов, например, температуры. Параметры же модели компаратора являются сходными

для двух программ, однако также не позволяют судить о компоненте в полной мере и не учитывают многие особенности поведения микросхем. Использование уточненных пользовательских моделей ОУ хотя и возможно, но нецелесообразно, так как резко замедляет скорость вычислений, а сама подготовка таких моделей весьма трудоемка [3].

Пакет MATLAB+Simulink R2010b является универсальной средой математического моделирования, поэтому специализированный пакет схемотехнического моделирования MicroCAP 9 имеет перед ним ряд преимуществ. Обладая широкой библиотекой SPICE-моделей устройств, он позволяет проанализировать большинство из существующих типов ОУ. Моделирование в среде MicroCAP 9 более достоверное, поскольку сами SPICE-модели ОУ здесь имеют большее число параметров и более полно описывают характеристики компонентов [2]. Однако это затруднит их определение в случае отсутствия в библиотеках модели требуемого ОУ. Библиотека пакета расширения SimElectronics не содержит модели конкретных типов ОУ. Благодаря простоте моделей ОУ в ней, задача определения параметров для конкретного типа ОУ по справочным данным решается достаточно просто, не требуя использования специализированных приложений в отличие от MicroCAP 9. Возможности упрощенных моделей в среде MATLAB+Simulink R2010b вполне достаточны для решения задач моделирования на системном или функциональном уровне анализа.

Пакет MATLAB+Simulink R2010b ориентирован на моделирование на функциональном уровне, а появившиеся в его составе новые модели, в частности ОУ, позволяют учесть лишь наиболее общие особенности поведения реальных устройств [3]. При необходимости более подробного исследования требуется использовать программы схемотехнического анализа. Пакет MATLAB+Simulink R2010b имеет достаточно высокую скорость вычислений, сопоставимую с программами схемотехнического моделирования, в том числе при использовании моделей ОУ. Тенденция развития пакетов расширения Simulink позволяет рассчитывать на дальнейшее совершенствование моделей ОУ и появления их в составе SPICE-моделей ОУ.

Литература

1. Дьяконов В.П. Matlab и Simulink для радиоинженеров. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 976 с.
2. Амелина М. А., Амелин С. А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 464 с.
3. Дьяконов В.П. Многовариантное моделирование силовых устройств в Matlab + Simulink // Силовая электроника. – 2011. – № 1. – С. 14–25.

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ПОВЫШАЮЩИМ ИМПУЛЬСНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ В СРЕДЕ MATLAB+SIMULINK

А.А. ПЕНЬКОВ, К.Н. СТРОЕВ, Н.Н. СТРОЕВ

Филиал ГОУ ВПО МЭИ(ТУ), г. Смоленск

Важным направлением совершенствования современных источников питания является применение новых нелинейных алгоритмов управления, построение систем управления (СУ) на основе цифровой схемотехники. Переход к новым структурам СУ, в частности, позволяет качественно улучшить динамические свойства импульсных источников питания, приблизив их к быстрдействию линейных стабилизаторов. Алгоритм управления минимизирует выбросы и провалы выходного напряжения при импульсном характере нагрузки, обеспечивает подавление субгармонических составляющих в пульсациях в индуктивных элементах схем при заданных точностных характеристиках. Разработке методов синтеза таких СУ уделяется большое внимание [1].

Одним из перспективных методов является предложенный ранее в ряде работ [2; 3] принцип синтеза систем управления импульсными преобразователями на основе энергетических соотношений. Закон управления преобразователем должен обеспечивать в среднем поддержание баланса энергии в системе: на каждом периоде работы в установившемся режиме избыточная энергия, накопленная в элементах схемы на одних интервалах времени, полностью расходуется на последующих интервалах работы за счет отдачи в нагрузку или первичный источник питания. Уравнения, описывающие энергетические соотношения в системе, справедливы для любого её состояния и любого момента времени независимо от её импульсного или непрерывного характера.

В докладе рассматривается построение алгоритма управления для повышающего регулятора напряжения с СУ на основе указанного принципа синтеза. Были получены уравнения энергетического баланса для режимов прерывистых и непрерывных токов. При достижении током дросселя $i_L(t)$ значения $I_{L \text{ макс}}$, обеспечивающего выполнение уравнения энергетического баланса, ключ регулятора должен быть разомкнут, т.е. это значение является искомой переменной для СУ. В частности, в режиме прерывистых токов:

$$\frac{L \cdot i_{L \text{ макс}}^2(t)}{2} + E \cdot i_{L \text{ макс}}(t) \cdot \frac{t_p}{2} = u_H(t) \cdot i_H(t) \cdot (T - t) + \frac{C \cdot (U_{\text{оп}})^2}{2} - \frac{C \cdot u_H^2(t)}{2}$$

$u_H(t)$ и $i_H(t)$ – напряжение и ток нагрузки, L – индуктивность дросселя, C – емкость конденсатора выходного фильтра, T – период ШИМ,

$U_{оп}$ – опорное напряжение, равное $u_n(T)$ в установившемся режиме работы, t_p – расчетное значение времени спада тока дросселя до 0.

В отличие от понижающего регулятора равенство мгновенного выходного напряжения $u_n(t)$ заданному напряжению нагрузки $U_{уст}$ в зависимости от режима (тока нагрузки I_n) может достигаться в различные моменты времени на такте работы преобразователя, не связанные с моментами коммутации ключа. Это значительно затрудняет построение алгоритма управления ШИМ, так как в уравнения энергетического баланса входит мгновенное значение напряжения, которое необходимо связать со средним значением выходного напряжения на такте преобразователя. В противном случае поведение СУ имеет явно статический характер – в зависимости от тока нагрузки среднее выходное напряжение изменяется в диапазоне амплитуды пульсаций.

Для решения проблемы возможно построение параметрической системы управления. В таком случае опорное напряжение $U_{оп}$ корректируется пропорционально значению тока нагрузки:

$$U_{оп} = U_{уст} + k \cdot (I_{уст} - i_n(t)),$$

где k – коэффициент пропорциональности, $I_{уст}$ – ток нагрузки, при котором $u_n(T) = U_{уст}$. Другой способ – расчет выходного среднего напряжения $U_{ср}$ на такте работы преобразователя и коррекция опорного напряжения $U_{оп}$ на значение $(U_{уст} - U_{ср})$. В докладе приведены результаты анализа работы СУ с указанными вариантами коррекции.

Для моделирования алгоритмов управления использована среда интегрированного пакета компьютерной математики MATLAB+Simulink. Работа СУ задана программами на встроенном языке MATLAB – блоками пользовательских m-функций. Исследование имитационной модели регулятора с предлагаемым алгоритмом управления показывает его высокое быстродействие – длительность переходных процессов составляет не более 10 тактов преобразования, что значительно лучше традиционных систем ШИМ с обратными связями по току и напряжению и частотной коррекцией.

Литература

1. Мелешин В.И., Овчинников Д.А. Управление транзисторными преобразователями электроэнергетики. – М.: Техносфера, 2011. – 576 с.
2. Пеньков А.А. Принцип синтеза систем управления импульсными преобразователями на основе энергетических соотношений // Практическая силовая электроника. – 2006. – Вып. 22. – С. 28–33.
3. Пеньков А.А., Строев Н.Н., Строев К.Н. Подходы к построению алгоритмов цифрового управления импульсными преобразователями на основе энергетического баланса // Вестник МЭИ. – 2009. – Вып. 5. – С. 66–73.

МАКРОМОДЕЛЬ ФАЗОСДВИГАЮЩЕГО ШИМ-КОНТРОЛЛЕРА В СРЕДЕ MICRO-CAP

М.В. ПОЛЯКОВ, С.А. ТЮТЮННИК, О.А. ФРОЛКОВ

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск

e-mail: polyak_max@mail.ru

В настоящее время отмечен большой интерес к моделированию систем, реализующих алгоритм фазовой широтно-импульсной модуляции (ФШИМ) в управлении мостовыми преобразователями, позволяющий работать в режиме мягкой коммутации силовых ключей. Большинство производителей предлагают встроенные Spice-макромодели специализированных ФШИМ-контроллеров, которые не применимы в обучающей среде моделирования Micro-Cap 9.0. В связи с этим была проведена работа по созданию относительно несложной макромодели контроллера, способной реализовать фазовое управление в Micro-Cap 9.0. Макромодель описана в виде принципиальной схемы, составленной из различных функциональных блоков [1].

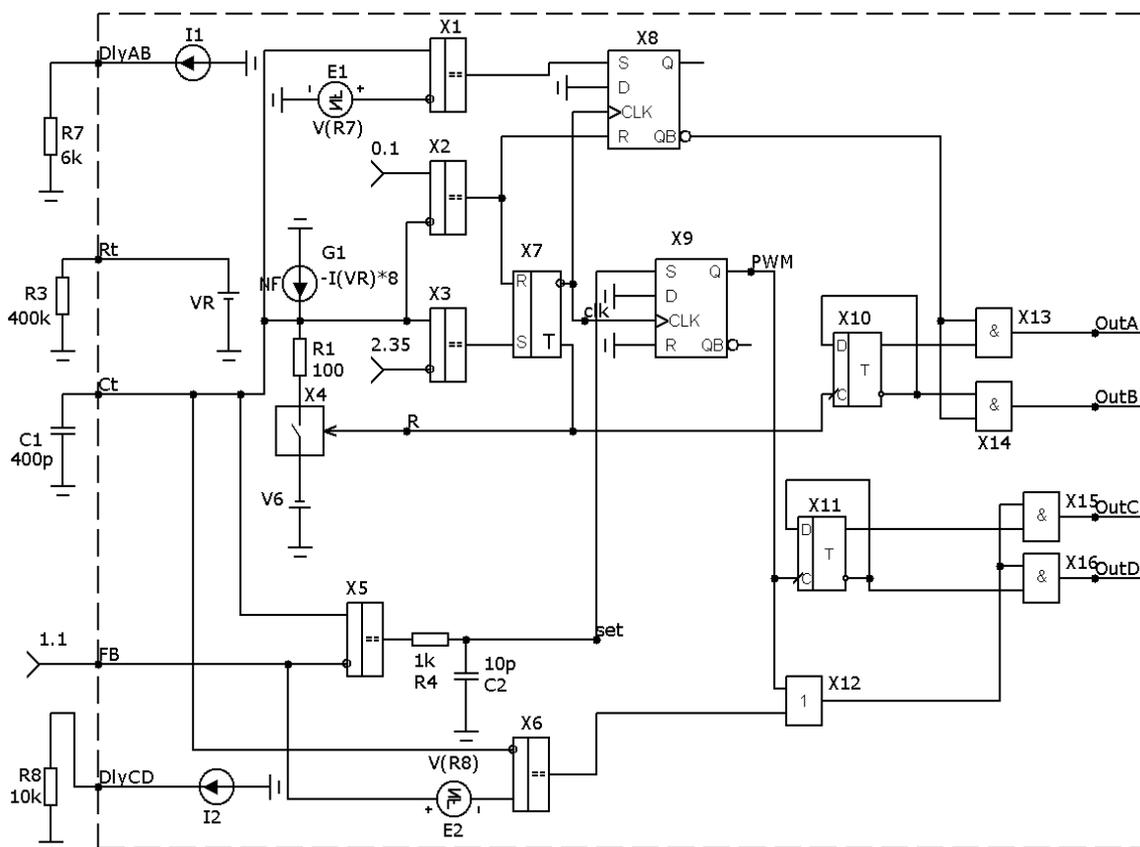


Рис. 1. Структура макромодели ФШИМ контроллера
в среде MicroCap 9

Структурная схема макромодели ФШИМ-контроллера представлена на рисунке 1. Ток источника $G1$, определяемый током через резистор $R3$, заряжает частотозадающий конденсатор $C1$.

Компараторы X2 и X3, управляя с помощью RS триггера X7 ключом X4, определяют диапазон изменения напряжения на C1. Триггер X10 синхронизирован с X7 и работает как фазораспределитель, поочередно включающий каналы OutA и OutB. X5 в сочетании с X9 обеспечивает широтную модуляцию сигнала по фронту и синхронизируется с двухтактным триггером X11. Таким образом, происходит модуляция задержки включения выходов OutC и OutD относительно OutA и OutB (рис. 2).

Резисторы R7 и R8 программируют мертвое время при переключении транзисторов в плечах моста, что предотвращает протекание сквозных токов в транзисторах.

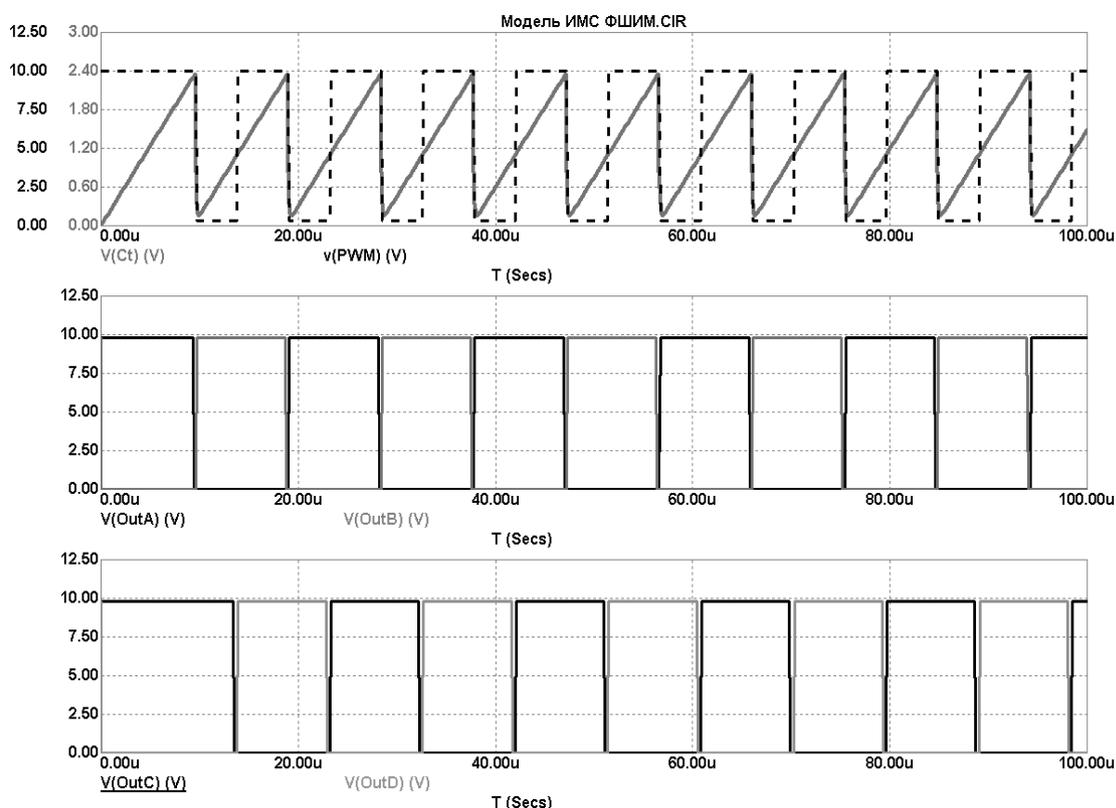


Рис. 2. Результаты моделирования

Данная макромодель позволяет обеспечивать алгоритм фазового управления, применяемых при анализе мостовых преобразователей в среде Micro-Cap 9.0 и производить моделирование статических и динамических процессов в их силовой части, к тому же, дополнив модель различными функциями ограничения и защиты, ее можно вполне сопоставить с макромоделями реальных фазосдвигающих контроллеров.

Литература

1. Амелин С.А., Амелина М.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8. – Москва: Горячая линия-телеком, 2007. – С. 464.

МОДЕЛЬ СОЛНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В СРЕДЕ MICRO-CAP

М.В. ПОЛЯКОВ, С.А. ТЮТЮННИК, О.А. ФРОЛКОВ

Филиал ГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск

e-mail: 22nn@mail.ru

Современное развитие альтернативной энергетики требует создания качественных моделей солнечных элементов, позволяющих с помощью компьютерных САПРов производить анализ работы фотоэнергетических систем.

Физическая модель СЭ представляется следующим соотношением вольтамперной характеристики:

$$I = I_{\phi} - I_0 \left[\exp \left(\frac{e(U + IR_{II})}{AkT} \right) - 1 \right] - \frac{U}{R_{III}}, \quad (1)$$

где I – выходной ток ток СЭ, I_{ϕ} – фототок, I_0 – обратный ток насыщения, e – заряд электрона, U – напряжение на выходе СЭ, R_{II} – последовательное сопротивление СЭ, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, A – коэффициент качества, зависящий от материала СЭ, R_{III} – шунтирующее сопротивление СЭ.

Модель обладает достаточной точностью, однако предназначена скорее для разработчиков солнечных батарей, а не конструкторов-схемотехников, так как её применение при разработке электронной аппаратуры вызывает значительные трудности. Нужно точно знать все модельные параметры используемой солнечной батареи, для чего может потребоваться наличие конкретного образца и проведение лабораторных испытаний.

Чаще всего изготовитель солнечных батарей среди характеристик дает четыре параметра – ток короткого замыкания I_{SC} , напряжение холостого хода U_{OC} , ток I_{MPP} и напряжение U_{MPP} в точке максимальной мощности батареи. В связи с этим в схемотехнических САПРах должны применяться модели, полностью базирующиеся на данных значениях. Этому требованию отвечает ряд моделей, представляющих собой математическую аппроксимацию вольтамперной характеристики солнечной батареи, где отсутствует какой-либо физический смысл, однако достигается максимальное удобство применения.

Для реализации в среде Micro-Cap была выбрана и усовершенствована показательная модель СЭ [1], выражаемая следующим соотношением:

$$I = I_{SC} \cdot ins \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{I_{MPP}}{I_{SC}} \right)^{\left(\frac{1}{ins} \right) \left(\frac{U - U_{OC} + TKU(T-298)}{U_{MPP} - U_{OC} + TKU(T-298)} \right)} \right], \quad (2)$$

где I_{SC} – ток короткого замыкания, U_{OC} – напряжение холостого хода, I_{MPP} и U_{MPP} – ток и напряжение в точке максимальной мощности батареи, ins – относительная освещенность, T_{KU} – температурный коэффициент напряжения, равный $2 \text{ мВ}/^\circ\text{C}$ для кремния, T – абсолютная температура. Модель, реализованная в среде Micro-Cap, изображена на рисунке 1.

$$I_{sc} * (1 - (1 - I_{mpp} / I_{sc})^{((v(out+, out-) - U_{oc} + (U_{oc} / 0.6) * (T_{amb} - 298)) / (U_{mpp} - U_{oc} + (U_{oc} / 0.6) * (T_{amb} - 298))))$$

```
.define Uoc 43.6
.define Tamb 298
.define Impp 5
.define Isc 5.3
.define Umpp 34
```

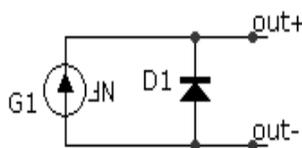


Рис. 1. Модель СЭ в Micro-Cap

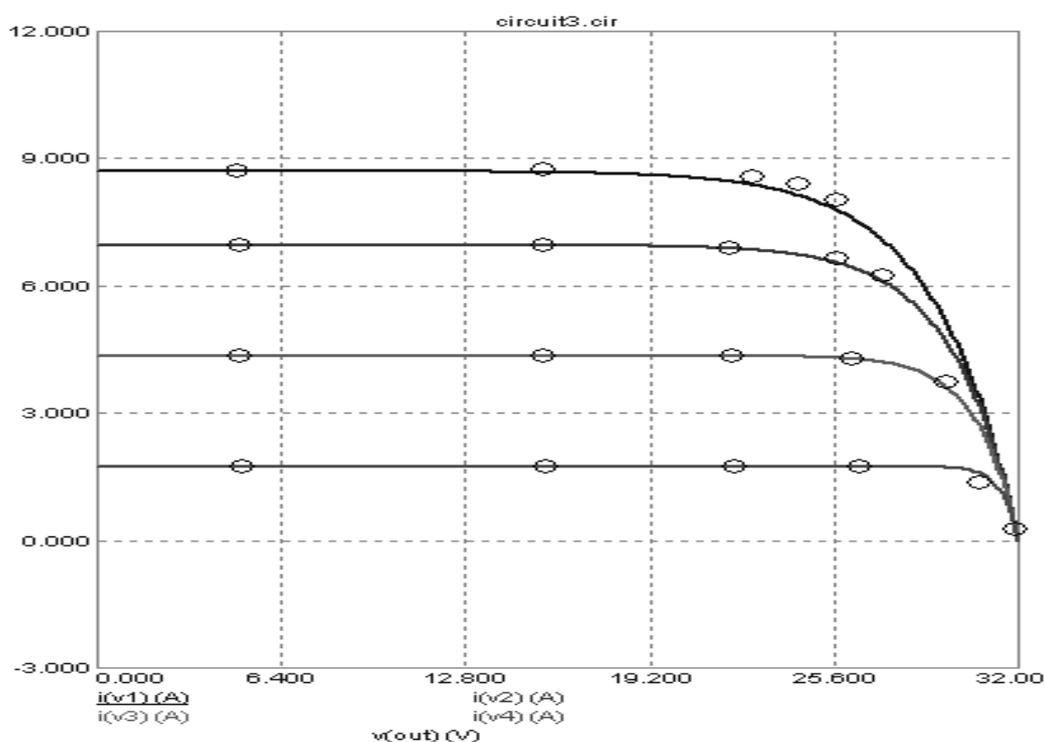


Рис. 2. Экспериментальная и модельная ВАХ солнечной батареи

Модель представлена в виде зависимого источника, функционирующего согласно соотношению (2). Диод D1 учитывает присутствие защитного диода. Такой СЭ является базовым и может быть использован для последовательно-параллельного соединения при построении солнечных модулей и батарей. На рисунке 2 изображены вольтамперные характеристики, полученные при моделировании солнечных батарей RZMP-220 Рязанского завода металлокерамических приборов. Точками выделены экспериментальные значения ВАХ. Максимальное отклонение составляет 10 %.

Литература

1. Шиняков Ю.А. Экстремальное регулирование мощности солнечных батарей // Вестник СГАУ им. М.Ф. Решетнева. – 2007. – № 1. – С. 123–129.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОРТАТИВНЫХ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В.В. СЕНЧИЛОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

За последние годы стоимость флешек и прочих портативных внешних накопителей значительно снизилась, и подобные устройства все чаще используются не только для хранения файлов, но и как носители целого набора программ, которые могут работать практически на любом компьютере. Подобные программы часто называют портативными, поскольку они представляют собой переносимое программное обеспечение («portable application»), которое не нужно полноценно устанавливать на компьютер для запуска и использования. В эту категорию попадают программы, которые без проблем инсталлируются не только на флешку или внешний жесткий диск, но и на CD, DVD, Blu-ray диски, а также те, которые и вовсе работают без установки.

Появление таких переносных программ было обусловлено, прежде всего, желанием избавить пользователей от многих часто встречающихся проблем. Наиболее распространенные из них – наличие нескольких ОС на компьютере, работа на 2 и более компьютерах. Еще одной серьезной проблемой является переустановка системы и, как следствие, переустановка всего используемого до этого софта. Еще 15–20 лет назад многие программы устанавливались обыкновенным копированием, все настройки сохранялись в INI-файлах, которые можно было изменить обычным Блокнотом, а сейчас практически любая программа приписывается в реестре, сохраняя там все изменения и настройки. Причем наиболее негативные эмоции возникают у пользователя при долгой и тщательной настройке уже установленных программ. Существует также еще множество такого рода проблем, как например, установка обновлений программ на большое количество ПК, которые объединены в локальную сеть. При большом количестве программ в ОС реестр быстро заполняется часто неактуальной информацией, из-за чего стабильность работы ОС значительно ухудшается. В качестве решения подобных проблем могут быть использованы портативные программы для переносных устройств.

Семейство Portable-приложений очень велико. Самые популярные программы данного вида собраны на специализированном сайте <http://portableapps.com/> [4]. Из русскоязычных ресурсов можно выделить сайт <http://www.usbsoft.ru/>. Также портативные версии приложений можно обнаружить на официальных сайтах их разработчиков.

Обычно к Portable-приложениям относят те программы, которые устанавливаются простой распаковкой архива или способны переноситься с машины на машину простым копированием, не требуя инсталляторов.

Наиболее распространенными типами портативных программ считаются следующие [3]:

- 1) офисные приложения;
- 2) программы для работы в сети Internet;
- 3) программы для работы с графикой;
- 4) программы для безопасности и мониторинга системы;
- 5) приложения для получения информации о системе;
- 6) программы для работы с мультимедиа и записи дисков;
- 7) игры.

Значительно меньше востребованы программы для обработки математических данных. Во-первых, из-за специфики интерфейса и формы исходных данных для возможности работы с математическими пакетами пользователи должны иметь достаточно высокий уровень подготовки. Во-вторых, абсолютное большинство современных популярных систем компьютерной математики достаточно дорогостоящи и не имеют официальных портативных версий, но в то же время за последние годы практически доведена до высокой степени совершенства идея Internet-работы с некоторыми системами компьютерной математики. Подобный метод был впервые реализован корпорацией Wolfram Research Inc. (США) в конце XX века. В Интернете был выставлен всемирный интегратор, который позволял пользователю задать и вычислить определенный или неопределенный интеграл от некоторого математического выражения, используя систему Mathematica, установленную на удаленном Internet-сайте фирмы [1]. Но интерес общественности к таким средствам оказался небольшим – большинство пользователей предпочитает работать с математическим пакетом, установленным на их ПК, поэтому в последние годы отмечается устойчивый рост заинтересованности пользователей в использовании portable-программ.

Среди наиболее популярных бесплатных (или условно-бесплатных) портативных программ по обработке математических данных можно выделить следующие:

– FreeMat (система для решения широкого круга задач технических и научных вычислений подобно MathLab или IDL);

– Eigenmath (предназначена для алгебраических расчетов, имеет большое число встроенных математических функций, возможность построения графиков, поддержку скриптов);

– SpeQ (имеет около 100 встроенных математических и физических констант, около 60 функций для анализа, тригонометрии, статистики, расчета вероятности, есть возможность построения различных графиков);

– SpeedCrunch (калькулятор с поддержкой большого количества переменных и функций, подсветкой синтаксиса, сохранением истории вычислений с точностью до пятидесятого знака после запятой).

Стоит отметить, что в последние годы Internet-пользователи часто встречаются ссылки на Portable-версии таких известных систем, как MathCad, Maple, Mathematica и многие другие, однако необходимо учитывать, что большинство из них являются примерами нелицензионного ПО, использование которого незаконно.

Выделим основные достоинства портативных программ [2].

Для того чтобы скопировать программу, достаточно просто перенести ее каталог на другой съемный носитель. Многие приложения не требуют установки, их можно копировать и запускать откуда угодно. Но необходимо учитывать, что почти все Portable-программы, предназначенные для одной операционной системы, не будут функционировать в другой.

Большинство дистрибутивов Portable-программ имеют вид обычных или самораспаковывающихся архивов и процедура установки заключается в распаковке компонентов программы в папку на стационарном жестком диске или на съемный USB-накопитель. Дополнительные компоненты и библиотеки, такие как Java Runtime Environment или Microsoft.NET Framework, необходимые обычному ПО, для работы также не требуются. Поскольку реестр операционной системы не используется, а все пользовательские настройки и данные хранятся в папке программы, то для деинсталляции достаточно просто удалить ее.

Возможность распаковать программу из архива и настроить ее один раз, а потом просто скопировать папку с уже настроенной программой на остальные компьютеры экономит немало времени даже при установке одной портативной программы на 5–6 компьютеров.

Установка или переход на новые версии не потребует предварительной инсталляции или обновления дополнительных компонентов.

Заметно упрощается *резервное копирование* и «переезд» сотрудника с одного компьютера на другой – достаточно перенести папки с набором программ на новое рабочее место.

Большая часть известного ПО имеет свои портативные аналоги.

Портативные программы в большинстве своем распространяются бесплатно, с открытым исходным кодом и/или под свободной лицензией. Ни для кого уже не секрет, что свободное программное обеспечение не уступает в функциональности платным аналогам, но компании не торопятся переходить на *Free Software* из опасения, что затраты на обучение сотрудников работе с новыми программами будут намного больше, чем на покупку лицензий. При этом, как правило, служащие в повседневной работе используют только прикладные программы, и при их наличии в другой операционной системе довольно быстро осваиваются, особенно если различия в интерфейсе и базовых операциях не велики.

Большинство прикладных программ используемых в операционных системах семейства Linux имеют версии и для Windows, в том числе и портативные. Их можно использовать для обучения сотрудников перед переходом на свободное ПО.

Портативные программы в основном предназначены для запуска с внешних жестких дисков или флешек, но многие могут работать и с оптических дисков.

При найме сотрудников на удаленную работу часто возникает проблема несовместимости версий ПО на домашнем компьютере работника с программами, используемыми в фирме работодателя, или просто отсутствие необходимого ПО. Можно предоставить ему компакт-диск с набором уже настроенных или модифицированных портативных программ нужной версии. Это позволит избежать не только проблем совместимости, но и избавит от составления дополнительных инструкций по поиску, установке и настройке ПО, особенно если работник не обладает необходимыми навыками и знаниями. Этим же проблем можно избежать и при организации доступа штатных сотрудников к рабочему почтовому ящику или ftp-серверу во время деловых поездок или из дома, заодно избавив их от запоминания паролей и логинов.

Основное преимущество портативных программ - меньшая зависимость от версии операционной системы. Как правило, они хорошо работают практически в любой соответствующей им ОС.

Литература

1. Дьяконов В. П. Internet. Настольная книга пользователя. – Изд. 5-е, доп. и перераб. – М.: МОЛОН-Пресс, 2005.
2. Гузенко Е.Н., Сурядный А.С. Персональный компьютер // Изд-ва: АСТ, Астрель, ВКТ, 2011.
3. Мельниченко В.В, Капитун Д.В., Легейда А.В. Оптимальный ПК. Устройство, сборка, настройка. – Изд-ва: Век +, Корона-Век, 2011.
4. Lambert M. Surhone Portable Application. 2010.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СРЕДЕ MATLAB В ЗАДАЧАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПОДДЕРЖКИ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА В.С. ПУГАЧЕВА)¹

**И.Н. СИНИЦЫН, В.И. СИНИЦЫН, Э.Р. КОРЕПАНОВ, В.В. БЕЛОУСОВ,
Е.С. АГАФОНОВ**

Институт проблем информатики РАН, г. Москва
e-mail: sinitsin@dol.ru

Академик Владимир Семенович Пугачев – известный советский ученый, основоположник статистической теории управления систем, автор фундаментальных работ в области авиационной баллистики и динамики полета, теории управления и информатики, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей. Все прикладные работы В.С. Пугачева всегда были ориентированы на применение вычислений. В 1930-е годы он сам выполнял большие вычислительные работы в области авиационной баллистики, для него были характерны доведенные до числа научные результаты, так необходимые практике. В.С. Пугачев был одним из первых ученых, начавших широко применять вычислительную технику в своей практической работе. Развитие ЭВМ значительно расширило возможность практического применения разработанных В.С. Пугачевым статистических методов. Эти методы в задачах теории управления и информатики вследствие своей большой вычислительной сложности могут быть практически реализованы только с использованием вычислительной техники.

К 100-летию со дня рождения В.С. Пугачева выпущена книга [1], содержащая обзорные статьи и воспоминания его учеников и последователей. Рассмотрим развитие стохастических информационных технологий применительно к задачам компьютерной поддержки научных исследований, полученное в ИПИ РАН в последние годы.

Как известно [1–3], компьютерная поддержка научных исследований (КПНИ) становится все более характерным признаком современных научных исследований и оказывает сильное влияние на их интенсивность и эффективность, превращается в важнейший фактор дальнейшего прогресса науки. Современный этап развития КПНИ характеризуется интенсивным проникновением ее в новые сферы исследований и разработок, расширением контингента пользователей, охватом всех этапов исследований от сбора, первичной обработки данных, управления экспериментами до анализа и планирования направлений научных исследований и их информационных технологий.

Под информационной технологией (ИТ) обычно понимают совокупность систематических и массовых способов создания,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-07-00021) и программы ОНИТ РАН «Анализ сложных систем и информационные технологии» (проект 1.5).

накопления, обработки, хранения, передачи и распределения информации (данных, знаний) с помощью средств вычислительной техники и связи. На практике обычно создается ИТ, рассчитанная на выполнение с ее помощью некоторой основной функции, что связано с необходимостью решения нескольких типовых задач исследований. Перечень основных функций довольно ограничен, а, с другой стороны, выполнение этих функций может потребоваться во многих применениях. Это делает целесообразным выделение функционально-ориентированных, предметно-ориентированных и проблемно-ориентированных ИТ.

В стохастической информатике приходится встречаться с различными описаниями входных и выходных информационных процессов. Так, в системах передачи и обработки сигналов входные и выходные процессы с математической точки зрения представляют собой скалярные или векторные случайные процессы, в вычислительных устройствах – логические переменные, в системах массового обслуживания – потоки событий, в системах распознавания – случайные графы, изображения, случайные функции векторного аргумента и другие образы, как их принято называть в теории распознавания образов. Поэтому в общем случае необходимо считать входные и выходные процессы элементами произвольных абстрактных пространств. В зависимости от принятого статистического описания процессов и связи между ними выделяют различные типы моделей стохастических систем (СтС), лежащих в основе современного стохастического системного анализа.

Центральной задачей исследования стохастических процессов и систем является задача построения их адекватных моделей. Решение этой задачи требует обобщения известных результатов современной прикладной теории стохастических процессов и систем, и исследования неизмеримо усложняются в силу того, что статистическому оцениванию и идентификации подлежат не только параметры в уравнениях, их порядок и структура, но и статистические характеристики действующих на систему внешних и внутренних случайных возмущений.

Для оперативного оценивания текущего состояния и параметров СтС, а также оценивания будущих состояний СтС в реальном масштабе времени (вторая центральная задача) применяются оптимальные, с.к. субоптимальные методы, основанные на упрощении уравнений нелинейной фильтрации (фильтр метода нормальной аппроксимации, обобщенный фильтр Калмана-Бьюси, фильтры второго порядка и др.). Стремление получить практически реализуемые фильтры в задачах большой размерности приводит к теории условно оптимальной фильтрации Пугачева. Теория условно оптимальной фильтрации лежит в основе ряда эффективных методов построения математических моделей

по экспериментальным и статистическим данным в реальном масштабе времени.

Наконец, сформулируем третью центральную задачу. Как известно, при оптимизации сложных СтС обычно нельзя ограничиться каким-либо одним критерием, а надо принимать во внимание ряд локальных критериев, учитывающих несовпадение целей различных подсистем. К задачам оптимизации относится также задача оптимального преобразования и анализа информационных процессов в различных подсистемах. В частности, к этим задачам принадлежат задачи наилучшего прогнозирования работы системы, а также вопросы сжатия, передачи и архивации информационных процессов, задачи обеспечения их сохранения в условиях помех, важные для создания баз данных и знаний.

В [3] дан краткий аналитический обзор специального программного обеспечения (СПО) на основе известных библиотек: MAPLE, MATLAB, MATHCAD, MATHEMATICA (средний возраст существования до 20 лет) и новых библиотек: Octave, Maxima и др. (средний возраст существования до 1–2 лет) применительно к задачам КНИИ. Сделан вывод о перспективности разработок СПО в среде MATLAB. Подробно рассмотрены следующие библиотеки СПО: «СтС-анализ» (2004–2007), «СтС-фильтр» (2004–2007), «СтС-модель» (2007), «СтС-СМА» (2005–2007), «Ст ИТ-КР» (2009–2010), разработанные в ИПИ РАН в среде MATLAB.

Литература

1. Академик Пугачев В.С.: к столетию со дня рождения / предисл. академика С.В. Емельянова; под ред. И.Н. Сеницына. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2011. – 376 с.
2. Информатика: состояние, проблемы, перспективы. // Босов А.В. [и др.]; под ред. И.А. Соколова. – М.: ИПИ РАН, 2009. – 46 с.
3. Сеницын И.Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009. – 768 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ «МАТНЕМАТИСА» С ЯЗЫКАМИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ВЫСОКОГО УРОВНЯ

Н.В. СМЕРНОВ

ООО «Технодата», г. Смоленск
e-mail: nssven@gmail.com

В последнее время системы компьютерной математики получают все более широкую известность как среди профессионалов в области

математики, так и среди представителей других сфер высоких технологий за счет постоянного улучшения качества предоставляемых услуг и расширения спектра возможностей. Особое внимание в данном аспекте стоит уделить программному продукту «Mathematica».

После краткого ознакомления с пакетом в курсе университетской программы возникло желание изучить возможности системы более детально и, исходя из профессиональной деятельности и интересов, уже не столько с точки зрения способностей системы по выполнению математических вычислений, а использованию всего спектра возможностей в собственных приложениях для решения различных задач. То есть моей целью является исследование способов совмещения «Mathematica» (рассматривались версии 7.0 и 8.0 пакета) с языками программирования высокого уровня и использование пакета как вычислительного ядра для запросов, поступающих из реализуемых приложений.

В момент, как только цель исследования была поставлена, но работы еще не успели начаться, были опасения, что придется потратить достаточно много времени, пытаясь найти способы общения с пакетом из внешних приложений, необходимо будет отладить в низкоуровневом отладчике не одну библиотеку для того, чтобы определить механизмы работы и вычлнить API(Application Programming Interface) системы. После изучения документации к «Mathematica» я был приятно удивлен тем, что разработчики уже учли такую возможность и необходимое API с полной документацией и исходными кодами поставляется с дистрибутивом пакета.

Совмещение системы возможно со следующими языками программирования: C/C++, C#, VB.Net, Java, Python и т.д. Причем сразу хотелось бы отметить очень важный момент: программы, написанные на данных языках, могут использовать систему как вычислительное ядро; также и из самой системы можно использовать структуры данных языков для проведения вычислений или выполнения специфичных действий (к примеру, для прочтения и обработки данных из файла с последующей передачей их системе).

Основным компонентом данного API является интерфейс MathLink, который представляет собой реализацию на языке C функций для обработки и обмена данными между сторонним приложением и пакетом «Mathematica». Технология основана на сетевом взаимодействии. При реализации приложения необходимо статически подключить библиотеку (поставляется вместе с пакетом и заголовочным файлом описания функций) и становится возможным использовать функции для вычисления. Также существуют надстройки над MathLink для других языков программирования: J/Link для Java, NetLink для .Net языков(C#,

VB.Net) и т.д. Особое внимание хотелось бы уделить J/Link (использует библиотеку MathLink при помощи Java Native Interface) и использованию системы «Mathematica» с языком программирования Java. Мною был выбран в процессе исследования данный язык по той причине, что он обеспечивает истинную кроссплатформенность, имеет огромный потенциал и на нем возможна реализация приложений любых масштабов, вплоть до серверных систем уровня предприятия. J/Link представляет собой широкий спектр классов по работе с системой, все они документированы и имеются исходные коды. Здесь есть как классы по непосредственному проведению вычислений, так и классы по обработке данных, работе с выражениями, работе с рисунками и графиками, форматированием и проверкой синтаксиса выражений. Передача данных на вычисление может происходить как в виде строки, так и в виде выражения, которое может представлять любую степень сложности и вложенности подвыражений. Результат вычисления может быть также приведен к удобным для программиста типам данных языка (строки, числа, выражения). Работать с данным интерфейсом приятно и удобно, количество кода для проведения вычислений очень невелико, а основные вспомогательные функции, которые могут понадобиться при использовании пакета, уже реализованы.

Также хотелось бы отметить единообразие пакета «Mathematica» при его разработке – интерфейс системы является таким же отдельным приложением и общается с ядром системы через интерфейс MathLink, таким образом, в качестве ядра можно использовать как локальное, так и находящееся где угодно в сети. Тем самым разработчики системы «Mathematica» дают понять, что программисты, пишущие на любом из вышеперечисленных языков, ничем не ограничены при работе с системой и способны реализовать те же возможности, что можно видеть в стандартном GUI системы (вплоть до написания собственного front-end системы).

Несколько слов о параллельных и распределенных вычислениях (несмотря на то, что данные вопросы достойны отдельной статьи): данная возможность появилась в системе сравнительно давно и была значительно улучшена в версии 8.0 (всю работу по распределению данных и управлению параллелизмом между вычислительными ядрами система теперь берет на себя). Эти возможности прекрасно сочетаются с использованием системы из сторонних приложений, мной было проведено несколько экспериментов по запуску параллельных вычислений, проблем при тестировании не возникало.

Резюмируя, хотелось бы сказать, что возможности системы при программировании на языках высокого уровня и ее использовании как инструмента вычислений поражают своей мощностью и продуманностью.

АНАЛИЗ СИСТЕМ АВТОБЛОКИРОВКИ С ТОНАЛЬНЫМИ РЕЛЬСОВЫМИ ЦЕПЯМИ

Н.Н. СТРОЕВ, А.Н. ШТЕМПЕЛЬ

Филиал ГОУ ВПО МЭИ (ТУ) в г. Смоленске

e-mail: sht-alexey@mail.ru

Системы железнодорожной автоматики предназначены для регулирования движения поездов с целью решения таких важных задач, как обеспечение безопасности движения поездов и повышение эффективности перевозочного процесса.

На рисунке 1 показана структура, поясняющая принцип построения тональных рельсовых цепей [1].

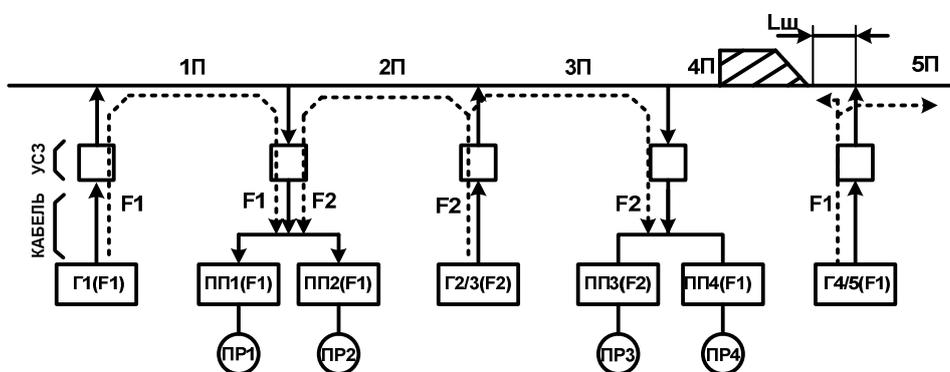


Рис. 1. Структурная схема построения тональных рельсовых цепей

Сигнальный ток частотой $F1$ или $F2$ от генераторов Γ подается в рельсовую линию, по которой распространяется в обе стороны от точки подключения. От генератора $\Gamma 1$ питается рельсовая цепь 1, от генератора $\Gamma 2/3$ – рельсовые цепи 2 и 3 и т. д. Путьевые приемники ПП1 и ПП2, ПП3 и ПП4 подключаются к общей точке релейных концов рельсовых цепей. Приемники обладают свойствами частотной селекции и пороговыми свойствами, т. е. реагируют на сигнал определенной частоты и амплитуды. Путьевые реле на выходах приемников нормально возбуждены. При нахождении подвижной единицы (или изломе рельса), например на 4П, путьевое реле ПП4 обесточивается. Возбуждение этого реле от сигнального тока рельсовой цепи 3П исключено из-за большого затухания частоты $F2$ в приемнике ПП4. Исключается и возможность возбуждения этого реле сигнальным током частоты $F1$ от генератора $\Gamma 1$ рельсовой цепи 1П из-за естественного затухания в рельсовой линии на протяжении трех рельсовых цепей [1].

Процесс развития и совершенствования тональных рельсовых цепей привел к разработкам различных типов аппаратуры тональных рельсовых цепей. Имея общие принципы построения и работы, они

различаются областью применения, технической реализацией аппаратуры и ее характеристиками [1].

Передающая аппаратура первого и второго поколений содержала генератор Г амплитудно-модулированных сигналов, усилитель У, путевой трансформатор ПТ для настройки напряжения питания тональных рельсовых цепей, фильтр питающего конца Ф. В последующем в рельсовых цепях блоки Г, У, Ф и ПТ были объединены в один блок генератора, а фильтры стали выполнять новые функции. На приемном конце последовательно включены два приемника – приемник Пр1 рельсовой цепи 5, настроенный на частоту генератора Г, и приемник Пр2 рельсовой цепи 7 другой частоты. На выходах приемников включены путевые реле 5П и 7П, фиксирующие состояния соответствующих рельсовых цепей. Схема тональных рельсовых цепей предусматривает возможность передачи сигналов автоматической локомотивной сигнализации АЛС числового и частотного кодов. Конденсаторы С являются элементами фильтра передающих устройств автоматической локомотивной сигнализации. В схему тональных рельсовых цепей также входят устройства согласования и защиты УСЗ.

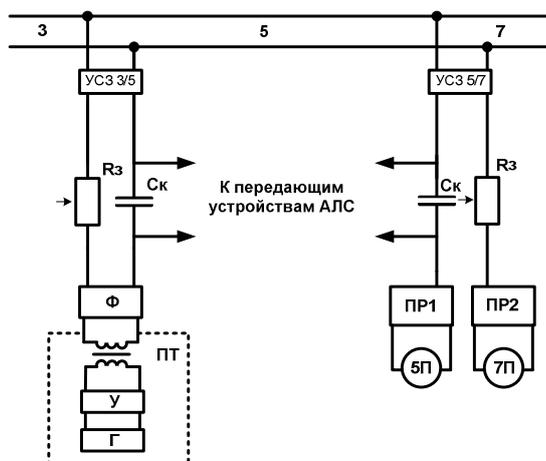


Рис. 2. Обобщенная структурная схема тональных рельсовых цепей

Все системы автоблокировки различаются по способу размещения аппаратуры (децентрализованные и централизованные), по наличию проходных светофоров, изолирующих стыков и по элементной базе [2].

Для анализа работы систем автоблокировки использовалась среда компьютерного моделирования Multisim.

Литература

1. Дмитриев В.С., Минин В.А. Системы автоблокировки с рельсовыми цепями тональной частоты. – М.: Транспорт, 1992.

2. Федоров Н.Е. Современные системы автоблокировки с тональными рельсовыми цепями: учебное пособие. – Самара: СамГАПС, 2004.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ В СИСТЕМЕ MATHCAD

А.Г. СУХАНОВА*, М.Б. СУХАНОВ**

*Северо-Западная академия государственной службы, г. Санкт-Петербург

**СПбГТИ, г. Санкт-Петербург

e-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru

На практике используют множество методик формирования оптимальной структуры портфеля ценных бумаг. Большинство из них основано на методике Марковица. Он впервые предложил математическую формализацию задачи нахождения оптимальной структуры портфеля ценных бумаг в 1951 году, за что позднее был удостоен Нобелевской премии по экономике.

Основными постулатами, на которых построена классическая портфельная теория, являются следующие [1]:

1. Рынок состоит из конечного числа активов, доходности которых для заданного периода считаются случайными величинами.

2. Инвестор в состоянии, например, исходя из статистических данных, получить оценку ожидаемых (средних) значений доходностей и их попарных ковариаций и степеней возможности диверсификации риска.

3. Инвестор может формировать любые допустимые (для данной модели) портфели. Доходности портфелей являются также случайными величинами.

4. Сравнение выбираемых портфелей основывается только на двух критериях – средней доходности и риске.

5. Инвестор не склонен к риску в том смысле, что из двух портфелей с одинаковой доходностью он обязательно предпочтет портфель с меньшим риском.

Методика Г. Марковица оптимизирует структуру портфеля ценных бумаг на основе статистической информации.

В данной работе рассматривается решение задачи оптимизации портфеля ценных бумаг в системе компьютерной математики Mathcad. Портфель состоит из двух видов облигаций ОФЗ 46014 и ОФЗ 46017. Доходности данных бумаг представлены на рисунке 1.

По этим ценным бумагам были рассчитаны соответствующие математическое ожидание и стандартное отклонение. Были определены оптимальные соотношения доходности и вероятности изменения цены государственных ценных бумаг, по которым сделан выбор.

Исходными данными для реализации методики являются:

- 1) курс облигаций (K_{it});
- 2) рассчитанная на основе курса и календаря купонных выплат годовая эффективная доходность к погашению облигаций (r_{it}).

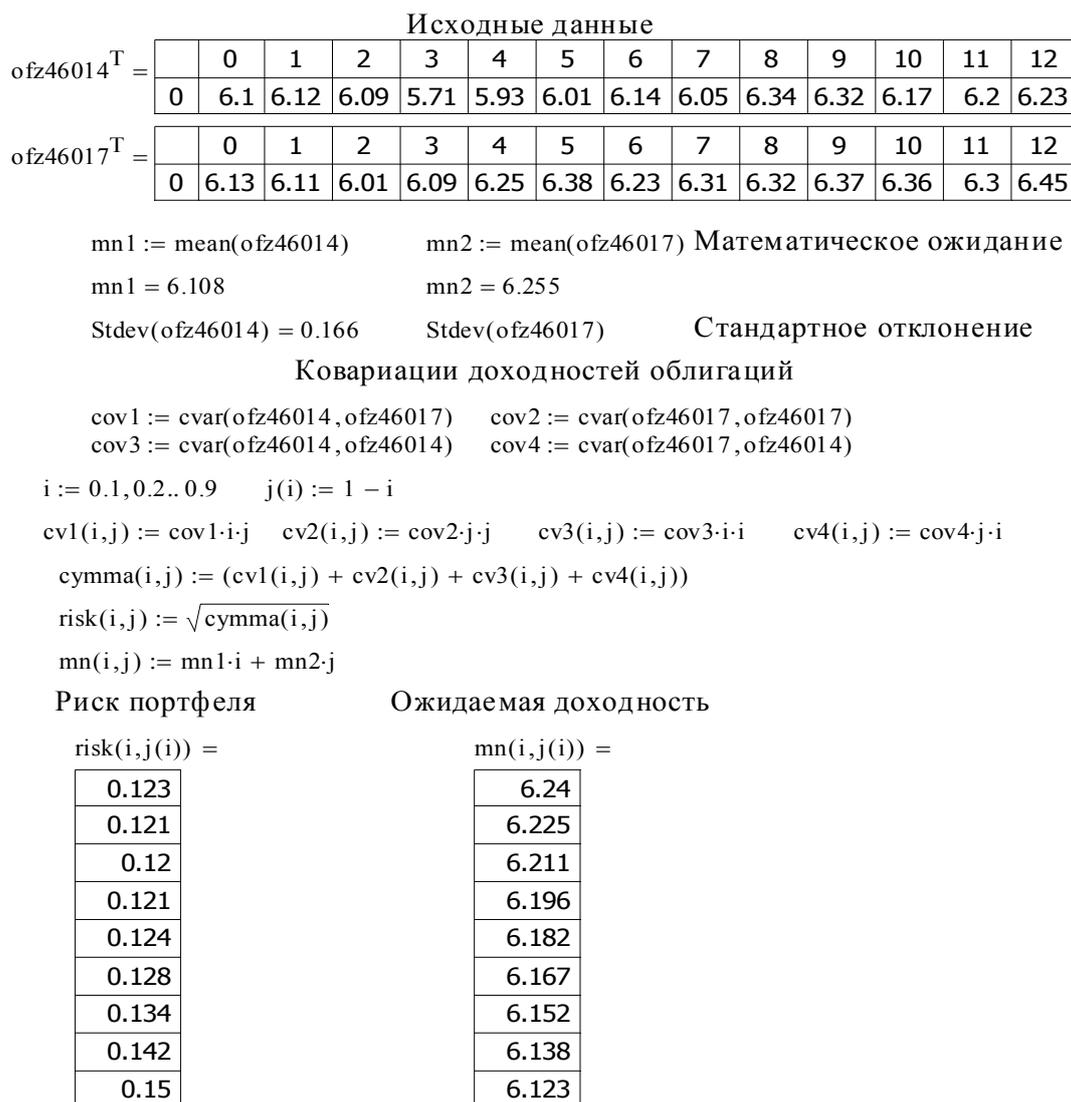


Рис. 1. Расчет основных характеристик портфеля ценных бумаг

Для решения задачи нахождения оптимальной структуры портфеля по модели Марковица используются следующие шаги:

- 1) нахождение математического ожидания и дисперсии эффективной доходности ценной бумаги;
- 2) нахождение ковариаций между эффективными доходностями каждой пары ценных бумаг;
- 3) определение структуры и местоположения эффективного множества;
- 4) выбор приемлемого соотношения доходности и риска;
- 5) нахождение доли инвестиций d_i в каждую ценную бумагу.

Параметрическая модель Марковица допускает эффективную статистическую оценку. Параметры этой модели можно оценить, исходя из имеющихся статистических данных за прошлые периоды.

Математическое ожидание эффективной доходности каждой ценной бумаги (r_i) вычисляется следующим образом [2]:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it}, \quad (1)$$

где r_{it} – эффективная доходность i -й ценной бумаги в период времени t , %, t – номер периода, T – длительность периода.

Стандартное отклонение эффективной доходности i -й ценной бумаги (σ_i) определяется по формуле [2]:

$$y_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i) . \quad (2)$$

Результаты вычисления математического ожидания и стандартного отклонения эффективной доходности каждой ценной бумаги представлены на рисунке 2.

```

risk1 := 1
risk := for i ∈ 0.1, 0.2.. 1
    j ← 1 - i
    cv1 ← cov1·i·j
    cv2 ← cov2·j·j
    cv3 ← cov3·i·i
    cv4 ← cov4·j·i
    cymma ← cv1 + cv2 + cv3 + cv4
    risk ← √cymma
    if risk ≤ risk1
        risk1 ← risk
        ct1 ← i
        ct2 ← 1 - ct1
        mn ← mn1·ct1 + mn2·ct2
    i ← i + 0.1
( risk1 )
  ct1
  ct2
( mn )

```

$\text{risk}^T = (0.12 \ 0.3 \ 0.7 \ 6.211)$

$$\begin{pmatrix} r \\ c1 \\ c2 \\ m \end{pmatrix} := \text{risk}$$

$r = 0.12$ Минимальный риск портфеля
 $c1 = 0.3$ Доля ОФЗ 46014 в портфеле
 $c2 = 0.7$ Доля ОФЗ 46017 в портфеле
 $m = 6.211$ Ожидаемая доходность

Рис. 2. Оптимизация портфеля ценных бумаг

Любой портфель ценных бумаг характеризуется двумя величинами – ожидаемой доходностью и мерой риска портфеля.

Ожидаемая доходность определяется по формуле (3):

$$m_p = \sum_{i=1}^n X_i \cdot m_i, \quad (3)$$

где X_i – доля общего вложения, приходящаяся на i -ю ценную бумагу; m_i – ожидаемая доходность i -й ценной бумаги, %; m_p – ожидаемая доходность портфеля, % [2].

Мера риска есть среднеквадратическое отклонение доходности от ожидаемого значения, определяется как (4):

$$y_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i \cdot X_j \cdot y_{ij}}, \quad (4)$$

где σ_p – мера риска портфеля; σ_{ij} – ковариация между доходностями i -й и j -й ценных бумаг; X_i и X_j – доли общего вложения, приходящиеся на i -ю и j -ю ценные бумаги; n – число ценных бумаг портфеля [2]. Поиск этих величин представлен на рисунке 1.

Минимизация риска портфеля ценных бумаг представлена на рисунке 2.

Из рисунке 2 видно, что оптимальным является портфель ценных бумаг с ожидаемой доходностью $m_p = 6,211\%$ и мерой риска $\sigma_p = 0,12$.

Литература

1. Основные постулаты классической теории портфельных инвестиций. <http://www.internetforex.ru/statii/74.htm>.

2. Галанов В.А., Басов А.И. Рынок ценных бумаг: учебник. – М.: Финансы и статистика, 2009. – 384 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ

А.Г. ХАЙДАРОВ*, В.А. ХОЛОДНОВ*, Е.С. БОРОВИНСКАЯ*,
В.П. РЕШЕТИЛОВСКИЙ**

*СПбГТИ, г. Санкт-Петербург

**Институт технической химии, г. Дрезден

e-mail: holodnow@yandex.ru

Программный комплекс написан в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, которая имеет высокую скорость и практически неограниченную скорость вычислений.

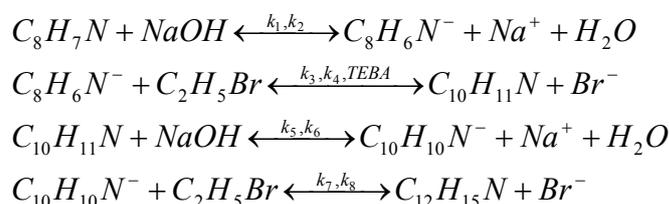
Кроме того, программа поддерживает работу с графикой, включая построение двух- и трехмерных графиков функций.

Постановка задачи:

Решение обратной задачи в интервальной постановке, т.е. нахождение констант скоростей реакции. Исходные данные: схема

реакции, значения концентраций $C_j(t_i)$ для различных $j=1,n$ и $i=1,k$, диапазон изменения констант скоростей реакции.

Исходная схема реакций:



Работа программы.

Все данные, используемые для конкретной реакции берутся из одного файла с именем «Model.txt». Для разделения разных видов данных в файле используются ключевые слова.

Схема реакций задается в текстовом файле, который читается программой. Цифры автоматически переводятся в нижний регистр:

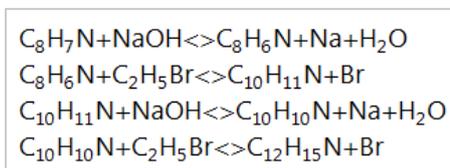


Рис. 1. Вид отображения реакций в программе

Решение обратной задачи представляет собой нахождение границ интервалов констант скоростей реакции, при которых квадрат отклонений верхней и нижней границ в сумме будут давать наименьшее отклонение. Для реализации этого сначала находятся константы скоростей реакции усредненных исходных данных, т.е. где все интервалы будут сжаты в одну точку посередине интервала. Это выполняется для нахождения начального приближения результирующих констант скоростей реакций. После чего нижние границы решения будут меньше начального приближения констант скоростей реакции, а верхние выше. Это упрощение задачи позволяет разбить решение сложной задачи на решение трех более простых задач и решить интервальную задачу достаточно точно.

Исходные данные для обратной задачи представляют собой значения концентраций C_1-C_{10} для моментов времени 0, 1, 2, 3, 4.

Программа производит решение задачи в три этапа, находя, в первую очередь, начальные приближения, а уже затем верхние и нижние границы констант скоростей реакции. Для минимизации процессов вычисления в программе можно задавать, для каких констант скоростей реакции производить поиск решения, т.е. возможно для констант, которые мало влияют на концентрацию, можно не осуществлять решение обратной задачи, а оставлять некоторое фиксированное значение.

Найденные значения констант скоростей реакции:

$$\begin{array}{ll}
 k_1 = [0.370615, 0.370615]; & k_5 = [0.029, 0.029]; \\
 k_2 = [0.537024, 0.68861]; & k_6 = [1.097, 1.097]; \\
 k_3 = [2.235, 2.235]; & k_7 = [1.821, 1.821]; \\
 k_4 = [0.001, 0.001]; & k_8 = [10^{-7}, 10^{-7}];
 \end{array}$$

Поиск решения осуществлялся для констант скоростей k_1, k_2 , остальные константы при этом представляют собой постоянные интервалы, в данном случае нулевой ширины (верхняя и нижняя границы совпадают).

На рисунке 2 изображен график, построенный для полученных констант скоростей реакции. Черными крестиками обозначена границы интервалов исходных данных.

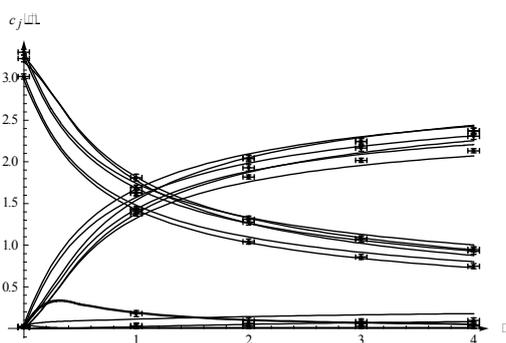


Рис. 2. График решения обратной задачи.

Как можно проследить из построенного графика, найденное решение вполне точно описывает исходные данные.

Литература

1. Полак Л.С. Применение вычислительной математики в химической и физической кинетике. – М.: Наука, 1969. – 282 с.
2. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J Introduction to interval analysis. – Philadelphia: SIAM, 2009. – 190 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТНСАД ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ПОЛУЧЕНИЯ ВИНИЛХЛОРИДА В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

В.А. ХОЛОДНОВ, Д.А. КРАСНОБОРОДЬКО, Р.Ю. КУЛИШЕНКО,
В.Г. ХАЙДАРОВ

СПбГТИ, г. Санкт-Петербург
e-mail: holodnow@yandex.ru

В работе предлагаются методы оптимизации химико-технологических систем с учетом имеющейся неопределенности с использованием системы компьютерной математики MathCAD и интерактивных информационно-моделирующих программ (ИИМП),

которые позволяют сочетать возможности этих программ и современные возможности разработки «гибких химико-технологических систем». При моделировании и оптимизации ХТС практически всегда имеет место неопределенность [1].

Когда технолог сталкивается с неопределенностью в процессе принятия решений, то он чаще всего игнорирует существование неопределенности и использует детерминированные модели вероятности неопределенных параметров в виде независимых случайных величин.

На примере упрощенной ХТС получения винилхлорида рассматриваются разработанные авторами методы для моделирования и оптимизации ХТС с учетом условий неопределенности [2]. На основании опыта и интуиции химика-технолога выбираются факторы, влияющие на критерий оптимизации. Факторы делятся на управляющие

– вектор $\bar{U}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ и неопределенные – вектор $\bar{X}(x_1, x_2, \dots, x_m)$. С использованием существующих методов планирования с помощью ИИМП производится вычислительный эксперимент по расчету численного значения критерия оптимизации

Далее с использованием полученных данных строится модель, которая отражает зависимость критерия оптимизации от всех факторов в одном из двух видов: мультипликативная по методу Брандона или регрессионная модель, вид которой соответствует плану эксперимента.

На следующем этапе с использованием зависимости целевой функции от исследуемых факторов решается задача оптимизации рассматриваемой ХТС в условиях неопределенности одним из предлагаемых методов.

Решение задач оптимизации реализовано в системе компьютерной математики MathCAD с помощью встроенной в неё функции Minimize (и Maximize). Соответствующие значения частных производных вычисляются с помощью инструмента символьной математики MathCAD, что является большим достоинством этой системы компьютерной математики по сравнению с программами Scilab, GAMS.

В рассматриваемом случае в качестве управляющих выбраны степени превращения в 3 реакторах – $\bar{U}(u_1, u_2, u_3)$, в качестве неопределенных параметров 3 – флегмовых числа в основных колоннах – $\bar{X}(x_1, x_2, x_3)$.

По определенному плану был произведен вычислительный эксперимент по расчету численного значения критерия оптимизации. В нашем случае это так называемый Е-фактор, который характеризует чистоту получаемого продукта. В качестве плана эксперимента был

выбран ортогональный центральный композиционный план. Был произведен 71 вычислительный эксперимент.

На основе вычислительного эксперимента была построена соответствующая регрессионная модель, которая соответствует плану эксперимента.

Отметим, что при оптимизации ХТС получения винилхлорида с использованием номинальных значений неопределенных параметров значение Е-фактора составило 0.98. По мере увеличения «гибкости» рассматриваемой ХТС значение Е-фактора уменьшается.

Значение Е-фактора для процесса получения винилхлорида с использованием номинальных значений неопределенных параметров при ступенчатом изменении потока питания составило 0.987, расход винилхлорида увеличился с 271 до 289 кмоль/ч.

Литература

1. Островский Г.М., Волин Ю.М. Технические системы в условиях неопределенности: анализ гибкости и оптимизация: уч. пособие. – М: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 319 с.

2. Краснобородько Д.А., Холоднов В.А., Кулишенко Р.Ю. Исследование химико-технологических систем в условиях неопределенности с использованием интерактивных информационно-моделирующих программ // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института. – 2011. – Вып. 10. – С. 61–70.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НИТРИФИКАЦИИ В ОДНОСТУПЕНЧАТОЙ СИСТЕМЕ С АКТИВИРОВАННЫМ ИЛОМ

В.А. ХОЛОДНОВ, Р.Ю. КУЛИШЕНКО, В.Г. ХАЙДАРОВ, А.В. ГАЙКОВ

СПбГТИ, г. Санкт-Петербург

e-mail: holodnow@yandex.ru

Нитрификация [1], происходящая в одноступенчатой системе с активированным илом – процесс окисления аммиака, осуществляемый специальными организмами, называемыми нитрификаторами (рис. 1). Скорость их размножения значительно меньше, чем скорость роста микроорганизмов, окисляющих органических углерод, и нитрифицирующие микроорганизмы легко могут быть вымыты из реактора потоком убывающего ила (поток F_5). В системе активированного ила, где масса органической составляющей велика ($F_0 S_0 / V_0$), из-за высокой скорости роста биомассы требуется большая скорость потока. Нитрификация невозможна в условиях, когда концентрация микроорганизмов-нитрификаторов становится слишком низкой.

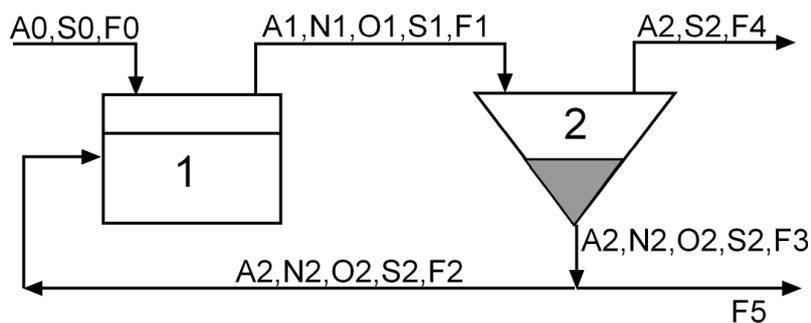


Рис. 1. Схема установки и потоки для системы с активированным илом

Уравнения материальных балансов в динамике можно записать для всех компонентов, основываясь на системе в целом: реакторе и отстойнике, рассматривая их как отдельные объекты. Отстойник упрощенно рассматривается как хорошо перемешиваемая система с выходящими потоками, очищающими ячейку разделения.

Уравнения материального баланса

1. Баланс по органическому субстрату в реакторе:

$$\frac{V_1 dS_1}{dt} = F_0 S_0 + F_2 S_2 - F_1 S_1 - \frac{R_1 V_1}{Y_1}.$$

2. Баланс по аммиачному субстрату в реакторе:

$$\frac{V_1 dA_1}{dt} = F_0 A_0 + F_2 A_2 - F_1 A_1 - \frac{R_2 V_1}{Y_2}.$$

3. Баланс по стабилизирующим микроорганизмам в реакторе:

$$\frac{V_1 dO_1}{dt} = F_2 O_2 - F_1 O_1 + R_1 V_1.$$

4. Баланс по микроорганизмам-нитрификаторам в реакторе:

$$\frac{V_1 dN_1}{dt} = F_2 N_2 - F_1 N_1 - R_2 V_1.$$

5. Баланс по органическому субстрату в отстойнике:

$$\frac{V_2 dS_2}{dt} = F_1 S_1 - F_3 S_2 - F_4 S_2.$$

6. Баланс по аммиачному субстрату в отстойнике:

$$\frac{V_2 dA_2}{dt} = F_1 A_1 - F_3 A_2 - F_4 A_2.$$

7. Баланс по стабилизирующим микроорганизмам в отстойнике:

$$\frac{V_2 dO_2}{dt} = F_1 O_1 - F_3 O_2.$$

8. Баланс по микроорганизмам-нитрификаторам в отстойнике:

$$\frac{V_2 dN_2}{dt} = F_1 N_1 - F_3 N_2.$$

Уравнения для расходов

1. Расход потока рециркуляции:

$$F_2 = F_0 R,$$

где R – фактор рециркуляции.

2. Выходной расход реактора:

$$F_1 = F_2 + F_0 = F_0 R + F_0.$$

3. Расход осаждающего ила:

$$F_3 = \frac{F_1}{C},$$

C – концентрационный фактор.

4. Расход субстрата на выходе:

$$F_4 = F_1 - F_3.$$

5. Выходной расход отработанного ила:

$$F_5 = F_3 - F_2.$$

Уравнения скорости роста микроорганизмов:

$$R_1 = \mu_1 O_1 = \frac{\mu_{1max} S_1 O_1}{K_1 + S_1}, R_2 = \mu_2 N_1 = \frac{\mu_{2max} A_1 N_1}{K_2 + A_1}.$$

Таблица 1

Спецификация принятых обозначений и размерность параметров

Обозначения	Наименование	Размерность
1	2	3
A	Концентрация аммиачного субстрата	$\frac{кг}{м^3}$
C	Концентрационный фактор для отстойника	-
F	Расход	$\frac{м^3}{ч}$
F_{0-5}	Расходы, отнесенные к отдельным частям системы	$\frac{м^3}{ч}$
K_1	Константа насыщения микроорганизмов, стабилизирующих органику	$\frac{кг}{м^3}$
K_2	Константа насыщения микроорганизмов-нитрификаторов	$\frac{кг}{м^3}$
N	Концентрация нитрификаторов	$\frac{кг}{м^3}$
O	Концентрация микроорганизмов-стабилизаторов органики	$\frac{кг}{м^3}$
R	Фактор рециркуляции	-
R_1	Скорость роста микроорганизмов-стабилизаторов органики	$\frac{кг}{м^3 \cdot ч}$
R_2	Скорость роста микроорганизмов-нитрификаторов	$\frac{кг}{м^3 \cdot ч}$
S	Концентрация органического субстрата	$\frac{кг}{м^3}$

Обозначения	Наименование	Размерность
1	2	3
V	Объемы	$м^3$
Y	Коэффициенты выхода	$\frac{кг}{кг}$
μ_1	Специфическая скорость роста микроорганизмов стабилизирующих органику	$\frac{1}{ч}$
μ_2	Специфическая скорость роста нитрифицирующих микроорганизмов	$\frac{1}{ч}$

На рисунках 2-3 представлены результаты моделирования процесса.

$$\begin{aligned}
 &V1 := 100 \quad S10 := 0.05 \quad S20 := 0.05 \quad K1 := 0.5 \quad MUmax1 := 0.5 \\
 &V2 := 100 \quad A10 := 0.05 \quad A20 := 0.05 \quad K2 := 1.0 \quad MUmax2 := 0.04 \\
 &R := 0.95 \quad O10 := 2 \quad O20 := 2 \quad CINT := 0.15 \quad Y1 := 0.5 \\
 &F0 := 20 \quad N10 := 2 \quad N20 := 2 \quad TFIN := 20 \quad Y2 := 0.1 \\
 &C := 2 \quad S0 := 1 \quad A0 := 0.1 \quad ORIGIN := 1 \\
 &F2 := F0 \cdot R \quad F1 := F2 + F0 \quad F3 := \frac{F1}{C} \quad F4 := F1 - F3 \\
 &F5 := F3 - F2 \quad R1(S1, O1) := \frac{MUmax1 \cdot S1 \cdot O1}{K1 + S1} \\
 &R2(A1, N1) := \frac{MUmax2 \cdot A1 \cdot N1}{K2 + A1} \\
 &X0 := \begin{pmatrix} S10 \\ A10 \\ O10 \\ N10 \\ S20 \\ A20 \\ O20 \\ N20 \end{pmatrix} \quad D(t, X) := \begin{pmatrix} F0 \cdot S0 + F2 \cdot X5 - F1 \cdot X1 - \frac{R1(X1, X3) \cdot V1}{Y1} \\ F0 \cdot A0 + F2 \cdot X6 - F1 \cdot X2 - \frac{R2(X2, X4) \cdot V1}{Y2} \\ \frac{F2 \cdot X7 - F1 \cdot X3 + R1(X1, X3) \cdot V1}{V1} \\ \frac{F2 \cdot X8 - F1 \cdot X4 + R2(X2, X4) \cdot V1}{V1} \\ \frac{F1 \cdot X1 - F3 \cdot X5 - F4 \cdot X5}{V2} \\ \frac{F1 \cdot X2 - F3 \cdot X6 - F4 \cdot X6}{V2} \\ \frac{F1 \cdot X3 - F3 \cdot X7}{V2} \\ \frac{F1 \cdot X4 - F3 \cdot X8}{V2} \end{pmatrix} \\
 &M := Rkadapt(X0, 0, TFIN, 1000, D)
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Результаты моделирования процесса нитрификации

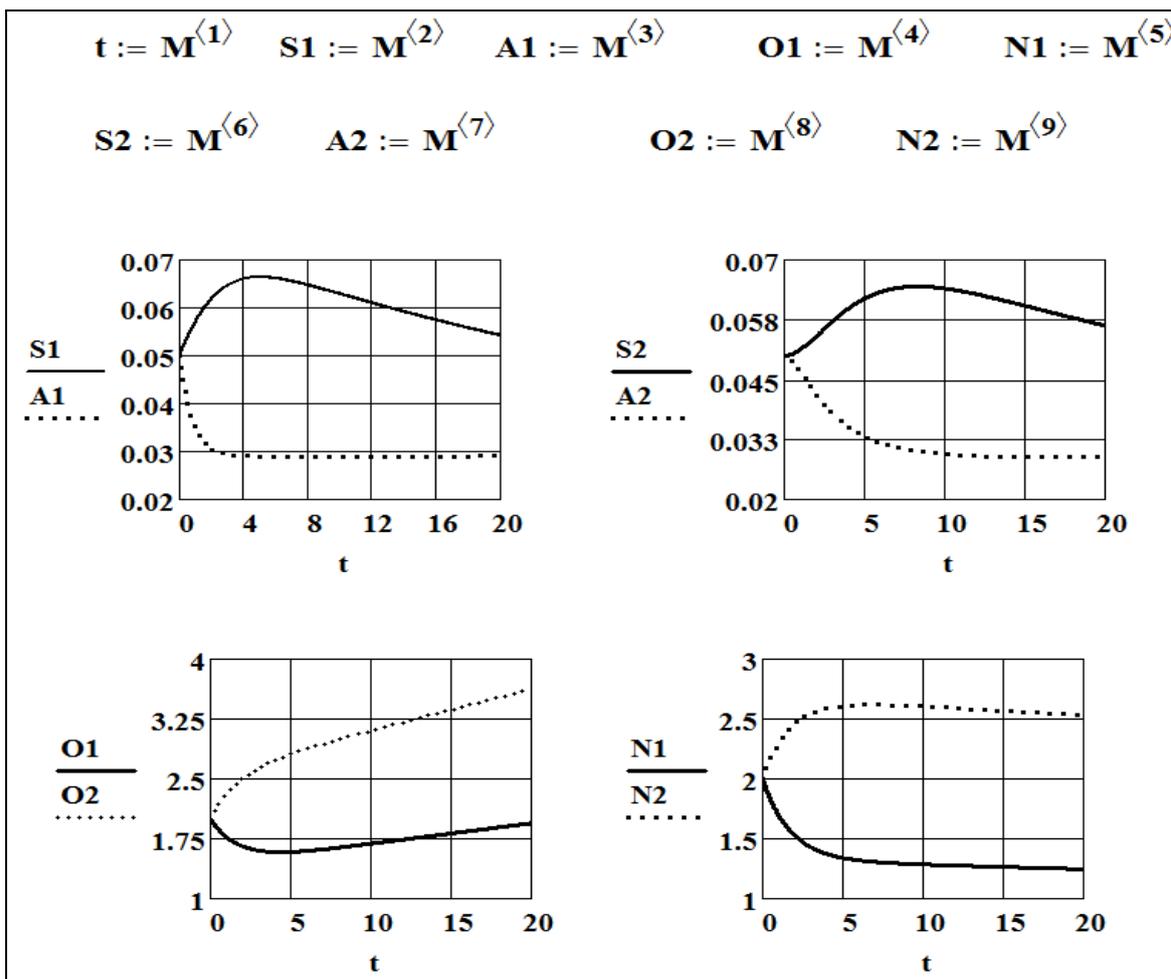


Рис. 3. Результаты моделирования процесса нитрификации

Литература

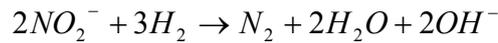
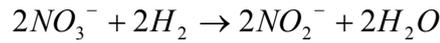
1. Biological Reaction Engineering Dynamic Modelling Fundamentals with Simulation Examples / I.J. Dunn. – [et al.]. – WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2003. – 508 p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕНИТРИФИКАЦИИ ПИТЬЕВОЙ ВОДЫ

В.А. ХОЛОДНОВ, Р.Ю. КУЛИШЕНКО, В.Г. ХАЙДАРОВ, А.В. ГАЙКОВ
 СПбГТИ, г. Санкт-Петербург
 e-mail: holodnow@yandex.ru

Многие источники питьевой воды, особенно в районах интенсивного сельского хозяйства, содержат очень высокий уровень нитрат ионов, выше безопасного уровня, равного 50 мг/л .

Известны некоторые вещества, которые превращают нитрат ионы в нитрит ионы и, в конце концов, в азот, используя водород как электрон-донор в реакции. Уравнения денитрификации можно представить в следующем виде:



Очевидное преимущество этого процесса – это необходимое добавление только водорода к процессу.

Кинетику для каждой реакции можно выразить, используя зависимость (Michaelis – Menten) :

$$r_1 = V_{max_1} \frac{C_{NO_3}}{C_{NO_3} + K_{NO_3}} \frac{C_{H_2}}{C_{H_2} + K_{H_2}}, \quad r_2 = V_{max_2} \frac{C_{NO_2}}{C_{NO_2} + K_{NO_2}} \frac{C_{H_2}}{C_{H_2} + K_{H_2}},$$

где V_{max} – максимальная скорость каждой реакции.

В системе, показанной на рисунке 1, денитрификация питьевой воды выполняется в жидкостном реакторе, содержащем частицы песка. Водород абсорбируется в жидкостном реакторе и в абсорбционном бункере, которые связаны одним циклом, снабжающим поступление водорода в реактор. Это даёт возможность регулировать разницу в концентрации водорода, поскольку концентрация напрямую зависит от скорости реакции. Добавление рецикла облегчает регулирование рН и температуры потока рецикла и, следовательно, реактора. Жидкостной реактор и абсорбционный бункер моделируются на основе модели идеального перемешивания.

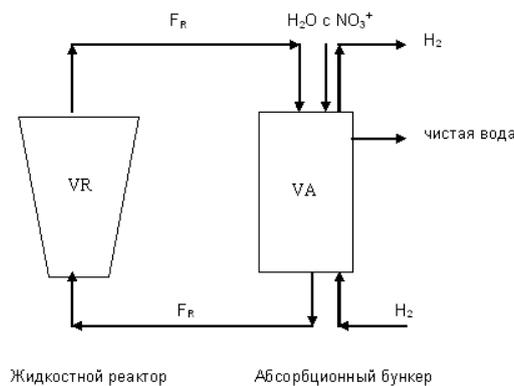


Рис. 1. Схема реактора

Уравнения материального баланса могут быть представлены в следующем виде.

Баланс по нитрату и по нитриту

$$(V_A + V_R) \frac{dC_{NO_3}}{dt} = F(C_{NO_3in} - C_{NO_3}) - r_1 V_R,$$

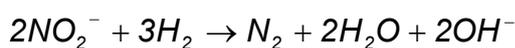
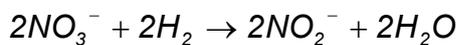
$$(V_A + V_R) \frac{dC_{NO_2}}{dt} = F(C_{NO_2um} - C_{NO_2}) - r_2 V_R,$$

баланс по водороду:

$$V_R \frac{dC_{H_2}}{dt} = F_R(C_{H_2in} - C_{H_2}) - (r_1 S_1 + r_2 S_2) V_R,$$

где V_A и V_R – объёмы абсорбционного бункера и реактора соответственно, F – объёмный расход воды, поступающей в систему.

Согласно проведенным расчетам и построенным по ним графикам (рис. 2), можно сделать заключение: в процессе денитрификации концентрация NO_3^- уменьшается, концентрация NO_2^- сначала возрастает, а потом уменьшается вследствие следующих реакций:



Процесс денитрификации – очищение воды от нитратов, а в процессе реакции выделяется газообразный азот, который покидает систему. Можно сделать вывод, что вода полностью очищена (OH^- никак не влияет на организм).

Таблица 1

Спецификация принятых обозначений и размерность параметров

Обозначения	Наименование	Размерность
CH_2	Концентрация водорода	$\frac{\text{мг}}{\text{л}}$
CNO_2	Концентрация нитрита	$\frac{\text{мг}}{\text{л}}$
CNO_3	Концентрация нитрата	$\frac{\text{мг}}{\text{л}}$
F	Начальный поток	$\frac{\text{л}}{\text{ч}}$
F_R	Циркуляционное течение	$\frac{\text{л}}{\text{ч}}$
KH_2	KS объём для водорода	$\frac{\text{мг}}{\text{л}}$
KNO_2	KS объём для нитрита	$\frac{\text{мг}}{\text{л}}$
KNO_3	KS объём для нитрата	$\frac{\text{мг}}{\text{л}}$
r	Степень превращения нитрата в нитрит	$\frac{\text{мг}}{\text{лч}}$
S_1	Стехиометрический параметр	$\frac{\text{мг } H_2}{\text{мг } NO_3}$
S_2	Стехиометрический параметр	$\frac{\text{мг } H_2}{\text{мг } NO_2}$
V_A	Объём абсорбционного бункера	л
V_{max}	Максимальная скорость реакции	$\frac{\text{мг}}{\text{лч}}$
V_r	Объём жидкостного реактора	л

Протокол моделирования в Mathcad представлен ниже.

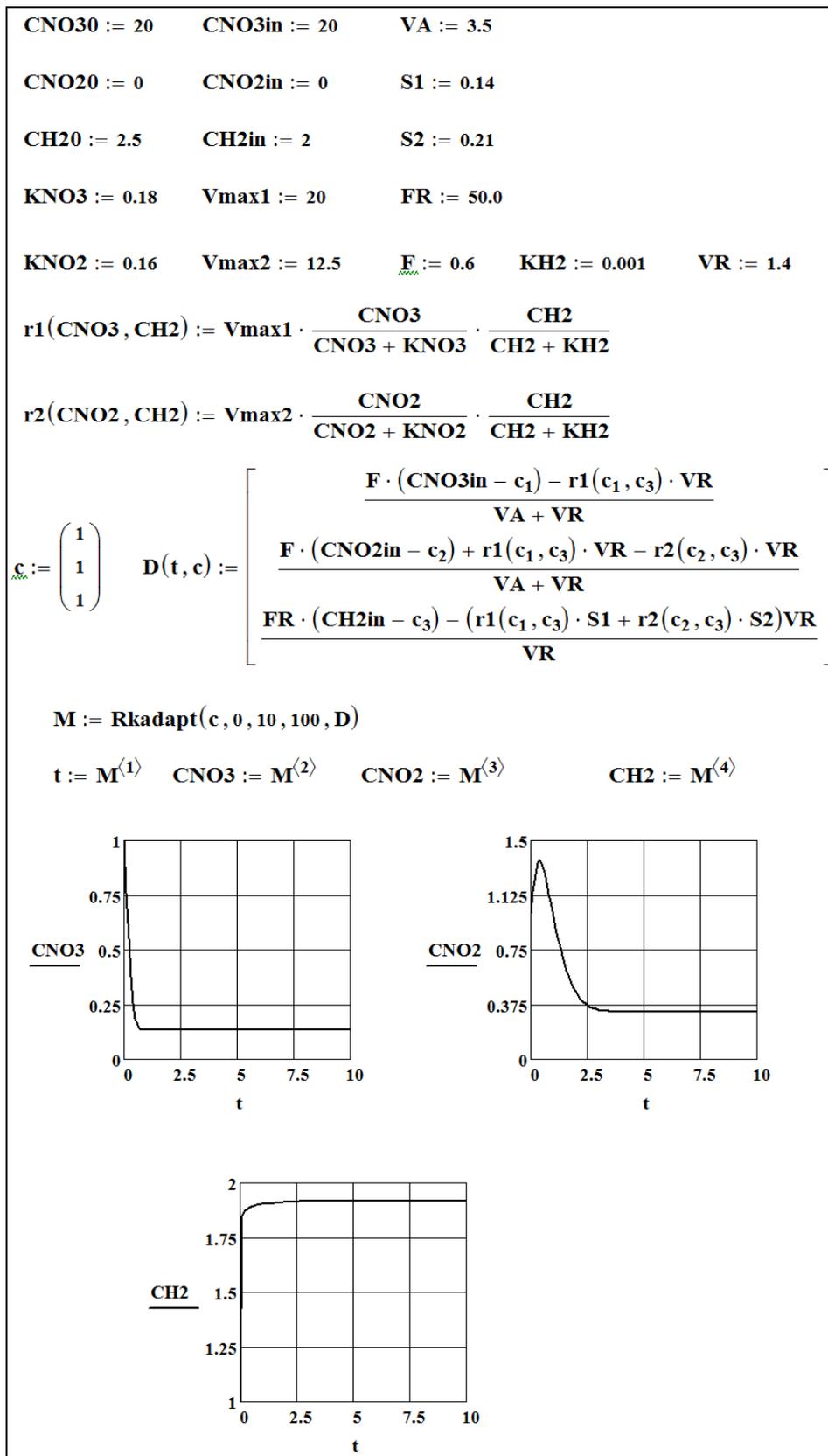


Рис. 2. Результаты моделирования процесса денитрификации питьевой воды

СЕКЦИЯ 2

Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ ПОДХОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЙ

А.Ю. АГРОНИК

ООО «СайнГрейн», г. Москва

e-mail: agronik@sciengrain.ru

Появление широкополосного доступа в сеть Интернет позволило значительно уменьшить время отклика произвольного интернет-сервера на запросы пользователя. Параллельно с ускорением доступа к интернет-серверам значительно улучшились характеристики персональных компьютеров. В этой связи возникла возможность пересмотреть традиционный подход к организации клиент-серверного взаимодействия в пользу увеличения скорости отображения запрашиваемых пользователем данных, повышения интерактивности и разгрузки серверного оборудования. Результатом такого пересмотра стало появления ряда новых концепций клиент-серверного взаимодействия, ключевым элементом которых является возможность совершения асинхронных запросов от клиента к серверу для полного или частичного обновления страницы в браузере пользователя. Рассмотрим некоторые из них подробнее.

Microsoft ASP.NET AJAX. Комплексная система, состоящая из нескольких частей. Первая часть включает в себя библиотеки, предназначенные для разработки клиентской части веб-приложения на языке JavaScript. Библиотеки обладают следующим набором функциональных возможностей: подсистемы, позволяющей имитировать объектно-ориентированное программирование на JavaScript, подсистемы манипулирования объектами DOM (Document Object Model) модели (выбор, добавление, удаление элементов, управление стилями и т.д.), подсистема связи, позволяющая совершать асинхронные запросы к серверу, подсистему компонентов, позволяющую создавать элементы управления, а также управляющая их жизненным циклом. Второй существенной частью ASP.NET AJAX является подсистема «Панелей обновления» (Update Panels). Данная подсистема позволяет без изменения кода серверной части веб-приложения, написанного на декларативном ASP.NET, асинхронно обновлять страницу или ее часть. Для этого достаточно подключить на

страницу или к веб-приложению управляющую библиотеку (ScriptManager) и обернуть необходимую часть страницы в элемент UpdatePanel. Из недостатков ASP.NET AJAX можно отметить тот факт, что в процессе обновления части страницы осуществляется запрос и перезапись всей разметки обновляемой части, что увеличивает количество передаваемой информации с серверной части на клиентскую.

Google Web Toolkit. Представляет собой комплексную систему, позволяющую разработчику создавать асинхронные динамические веб-приложения на языке JAVA. Система включает в себя набор клиентских библиотек, позволяющих манипулировать элементами DOM модели страницы, совершать асинхронные запросы к серверной части, управлять системой истории браузера, систему кеширования ресурсных файлов, систему разделения загружаемого кода клиентской части веб-приложения на части (split points) с целью уменьшения времени первоначальной загрузки приложения. Кроме описанного, система содержит большое количество элементов управления графического интерфейса пользователя (GUI). Основное отличие данной системы от других заключается в наличии транслятора с языка JAVA на язык JavaScript, что позволяет разрабатывать клиентскую и серверную часть веб-приложения на одном языке. Google Web Toolkit предназначена в основном, для создания интерактивных приложений и практически не применима при создании сайтов, ориентированных на содержимое.

FullAjax. Система, позволяющая быстро переработать сайт, разработанный в рамках традиционного подхода так, чтобы данные, передаваемые при переходе между его страницами, загружались асинхронно. Такое поведение достигается за счет системы фильтров, которая преобразовывает ссылки на странице так, что щелчок курсора мыши пользователя по ним не вызывает переход между страницами, а обновляет заданную область страницы данными с ресурса назначения ссылки. Кроме описанных функциональных возможностей, система содержит ряд библиотек клиентского программирования, позволяющих управлять системой истории браузера, манипулировать DOM моделью страницы, создавать простые визуальные эффекты, осуществлять асинхронные запросы к серверной части веб-приложения. Система обладает тем же недостатком, что и описанная выше Microsoft ASP.NET AJAX. Недостаток заключается в том, что в процессе обновления части страницы осуществляется запрос и перезапись всей разметки обновляемой части, что увеличивает количество передаваемой информации с серверной части на клиентскую.

Существует ряд технологий, позволяющих упростить ту или иную часть процесса разработки динамического веб-приложения, но не

предоставляющих комплексного подхода. К таким технологиям относятся многочисленные JavaScript библиотеки, облегчающие работу с DOM моделью страницы, позволяющие управлять историей браузера, реализующие визуальные эффекты, позволяющие создавать сложные элементы управления интерфейса с пользователем, обеспечивающие возможность совершать асинхронные запросы к ресурсам серверной части веб-приложения. Среди таких библиотек можно отметить следующие: jQuery, Prototype, script.aculo.us, Moo Tools, MochiKit, Rialto, Dojo Toolkit, Spry Framework, Clean Ajax Framework и другие.

Представленные подходы позволяют заменить традиционные синхронные обращения к серверу на наборы асинхронных обращений. Возможность подгружать страницу асинхронно и по частям, а не единым блоком, как это происходит в синхронном варианте, позволяет применить многоуровневый подход к кешированию различных частей страницы [3].

Система кеширования может состоять из нескольких частей: клиентская часть (реализуется в виде набора JavaScript-библиотек, выполняющихся в браузере пользователя), серверная часть (реализуемая в виде набора функциональных блоков, написанных на серверных языках управления и функционирующих в рамках серверной части веб-приложения), кеширование на уровне сервера базы данных. Для реализации подобной модели удобно представить страницу в виде набора областей, каждая из которых имеет собственное представление, поведение, идентификационный номер и параметры кеширования. Описанное представление позволяет запоминать состояние блоков страниц в рамках клиентской части веб-приложения и обновлять их (запрашивать с серверной части) только в том случае, если они теряют актуальность. Например, блок с информацией о курсе валют имеет актуальность сутки, а блок с информацией о прогнозе погоды – 3 часа. Такой подход к построению страницы на клиенте уменьшает объем запрашиваемой с сервера информации от одного клиента. Описываемая система также позволяет реализовать кеширование для блоков, которые не несут персонализированной информации и на серверной части веб-приложения, что позволит уменьшить количество обращений к серверу баз данных и других источника данных, которые требуются для отображения блока. Кеширование же на уровне сервера баз данных осуществляется средствами самой СУБД. Уменьшение объема передаваемых данных на различных уровнях увеличивает скорость построения ответа сервера. Таким образом, применение кеширования в новых системах клиент-серверного взаимодействия позволит увеличить скорость построения страницы в браузере пользователя, повысить интерактивность и уменьшить нагрузку на интернет-сервера за счет

уменьшения объема передаваемых данных и вычислений, необходимых для генерации блоков. Подобная система реализована в рамках нового распределенного подхода к построению веб-приложений SCSC [1; 2].

Литература

1. Агроник А.Ю., Григорьев О.Г. Исследования и разработка, распределенного подхода к построению веб-приложений. // "Обработка информационных и графических ресурсов" – сборник трудов ИСА РАН / под ред. В.Л. Арлазарова: 2010.

2. Агроник А.Ю. Создание веб-приложений с равномерным распределением нагрузки клиентской и серверной части // Научные труды международной научно-практической конференции МАДИ(ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ. 17–18 июня 2010 года. Т. 6: Мировая экономика. – Москва-Луганск: Издательство МАДИ(ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ, 2010.

3. Булгаков М.В., Носов В.П. Исследование и разработка методов построения и кэширования веб-приложений // Научно-практический журнал «Открытое образование» – 2008 – N 2 (67).

ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДАННЫХ В ТЕРРИТОРИАЛЬНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Т.К. БИРЮКОВА*, В.И. КИРЕЕВ, М.М. ГЕРШКОВИЧ*, В.И. СИНИЦИН*,**

*Институт проблем информатики РАН, г. Москва

e-mail: biryukova@amsd.com; makmg@mail.ru; VSinitsin@ipiran.ru

**Московский государственный горный университет, г. Москва

e-mail: Vladimir-Kireyev@mail.ru

В современных задачах вычислительной математики и ее приложениях широко используется аппарат сплайн-функций – например, при моделировании сложных геометрических объектов, расчете течений жидкостей и газов, в компьютерной графике, в алгоритмах сжатия видеоизображений и речевых сигналов [1-5].

В настоящее время наиболее развитыми и математически обоснованными являются методы аппроксимации кубическими сплайнами, которые обобщены на сплайны произвольной нечетной степени. По способу построения эти сплайны – дифференциальные, так как их условия согласования с аппроксимируемой функцией носят дифференциальный характер. Широко известны также параболические сплайны, в которых узлы сплайна смещаются относительно узлов

сеточной функции для обеспечения устойчивости вычислений, что ведет к существенному усложнению расчетных алгоритмов [3].

Во многих современных вычислительных задачах выдвигается требование консервативности алгоритмов аппроксимации, то есть сохранения интегральных свойств исходных функций.

Традиционные кубические и параболические сплайны [1-3] не обладают свойством консервативности, так как при их построении не используется интегральное условие согласования с исходной функцией.

В работах [6; 7] предложены разработанные авторами консервативные методы аппроксимации функций одной и двух переменных интегродифференциальными сплайнами (ИД-сплайнами) как параболическими, так и произвольной четной степени, построенными на основе совокупности интегральных и дифференциальных условий согласования аппроксимирующей и аппроксимируемой функций. Использование интегральных условий согласования обеспечивает симметричность условий, определяющих параметры сплайна, и, тем самым, реализуется возможность построения устойчивых одномерных и двумерных параболических ИД-сплайнов дефекта 1, узлы которых совпадают с узлами исходной сеточной функции $f(x)$. В одномерном случае i -е звено ($i = 0, \dots, n-1$) параболического ИД-сплайна на сетке $\Delta_1: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ имеет вид:

$$\tilde{S}_{2\text{ИД},i}(x) = \tilde{f}_i + \left(\frac{6\nabla\hat{I}_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{2\Delta\tilde{f}_{i+1}}{h_{i+1}} \right) (x - x_i) + \left(-\frac{6\nabla\hat{I}_i^{i+1}}{h_{i+1}^3} + \frac{3\Delta\tilde{f}_{i+1}}{h_{i+1}^2} \right) (x - x_i)^2,$$

где $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, $\tilde{f}_i \approx f(x_i)$, $\hat{I}_i^{i+1} \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$, $\nabla I_i^{i+1} = I_i^{i+1} - f_i h_{i+1}$, $\Delta f_{i+1} = f_{i+1} - f_i$,

параметры \tilde{f}_i вычисляются с точностью $O(H^3)$ ($H = \max_{i=1, \dots, n} h_i$) из трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{h_i} \tilde{f}_{i-1} + 2 \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) \tilde{f}_i + \frac{1}{h_{i+1}} \tilde{f}_{i+1} = 3 \left(\frac{\hat{I}_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{\hat{I}_{i-1}^i}{h_i^2} \right), \quad i = 1, \dots, n-1$$

с заданными граничными условиями [7]. Для вычисления \hat{I}_i^{i+1} могут быть использованы квадратурные формулы [7], обеспечивающие при $f(x) \in C_{[a,b]}^m$ ($m \geq 3$) порядок точности вычисления интегралов $O(H^4)$.

В настоящем докладе авторами предлагаются новые подходы к анализу данных с применением ИД-сплайнов в иерархических территориально-распределенных информационных системах, в частности, для анализа параметров их функционирования.

Литература

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.

2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – Новосибирск: Наука, 1980. – 350 с.
3. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
4. Киреев В.И., Войновский А.С. Численное моделирование газодинамических течений. – М.: МАИ, 1991. – 247 с.
5. Серединский А.В., Ванде-Кирков В.А., Буздалина И.А. и др. Применение рекуррентных сплайн-функций для обработки речевых и видеосигналов // Электросвязь, 1982. – № 2. – С. 60-64.
6. Бирюкова Т.К., Киреев В.И. Параболические интегродифференциальные сплайны в задачах интерполирования и сглаживания одномерных и двумерных функций // Вестник МАИ, 1999. – Т. 4, № 2. – С. 26–36.
7. Киреев В.И., Бирюкова Т.К. Полиномиальные интегродифференциальные одномерные и двумерные сплайны // Вычислительные технологии, Новосибирск, ИВТ СО РАН, 1998. – Т. 3, № 3. – С. 19–34.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АССОЦИАТИВНЫХ СРЕДСТВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ¹

В.В. БОРИСОВ*, М.М. ЗЕРНОВ, А.В. ПОЛЯЧКОВ*****

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск

e-mail: *vborisov@etna-it.ru; **zmmioml@yandex.ru; ***polyachkov.sml@yandex.ru;

Вне зависимости от класса решаемых задач интеллектуальной поддержки принятия решений (классификация, кластеризация, регрессия, прогнозирование (предсказание) временных рядов, установление закономерностей между объектами (событиями), ассоциации между информационными объектами по полному или частичному соответствию их признаков: по смежности в пространстве, во времени, по сходству, по контрасту) ключевой их особенностью является то, что решаются они в условиях неопределенности, для учета которой эффективным подходом является использование основных положений теорий нечетких вычислений, нечетких множеств и отношений, нечеткой меры, нечеткой логики и нечеткого вывода.

¹ Работа поддержана грантом Президента РФ для ведущих научных школ НШ-7139.2010.9, а также грантом РФФИ и Администрации Смоленской области, проект № 10-07-97506-р_центр_a.

В соответствии с этим предлагаемый метод построения и использования ассоциативных средств интеллектуальной поддержки принятия решений базируется на следующих принципах:

- покомпонентное представление и распределенное хранения информационных объектов в ассоциативной среде как в четком, так и в нечетком виде;
- обеспечение выполнения требуемой операции покомпонентного сравнения, в том числе нечеткой;
- параллельное покомпонентное сравнение информационных объектов в ассоциативной среде в соответствии с выбранным способом определения сходства;
- определение степени сходства между информационными объектами в ассоциативной среде на основе параллельного объединения результатов покомпонентного сравнения;
- возможность перехода от одного способа определения сходства к другому как на уровне покомпонентного сравнения, так и при объединении результатов этих сравнений.

Для эффективной реализации данного метода, основанного на указанных принципах, предложены следующие способы выполнения нечетких операций и нечеткого вывода:

- одноместных операций над нечеткими логическими значениями (НЛЗ) с результатом – НЛЗ;
- двуместных операций над НЛЗ с результатом – НЛЗ;
- одноместных операций над вектором НЛЗ с результатом – НЛЗ;
- одноместных операций над вектором НЛЗ с результатом – вектор НЛЗ;
- двуместных операций над векторами НЛЗ с результатом – вектор НЛЗ;
- двуместных операций над векторами НЛЗ с результатом – НЛЗ;
- двуместных операций над вектором НЛЗ и матрицей НЛЗ с результатом – вектор НЛЗ;
- двуместных операций над матрицами НЛЗ с результатом – матрица НЛЗ;
- нечеткого композиционного логического вывода.

Разработана технология построения и использования ассоциативных средств интеллектуальной поддержки принятия решений, обеспечивающая гибкость в формировании структуры и обеспечении функциональных возможностей этих средств в зависимости от требований решаемых задач и ориентированная на использование модулей и блоков программируемых логических схем ведущих производителей.

Определена структура и содержание программно-аппаратного обеспечения построения и использования ассоциативных средств интеллектуальной поддержки принятия решений, включая программно-аппаратное обеспечение для реализации жизненного цикла ассоциативных средств интеллектуальной поддержки принятия решений, а также программно-аппаратное обеспечение самих ассоциативных средств.

Разработан способ организации ассоциативной среды для реализации технологии построения и использования ассоциативных средств интеллектуальной поддержки принятия решений, обеспечивающий оптимальное размещение структуры ассоциативной среды на матрице программируемых логических схем и основанный на следующих принципах:

во-первых, декомпозиции ассоциативной среды, состоящей из ассоциативных ячеек, до уровня элементов ячеек, выполняющих отдельные функции;

во-вторых, объединения элементов ячеек, выполняющих одинаковые функции, в функциональные блоки.

Данный способ позволяет максимально полно использовать структуру программируемых логических схем вне зависимости от типа ассоциативной среды.

Разработано методическое обеспечение для моделирования ассоциативных средств интеллектуальной поддержки принятия решений, в рамках которого:

во-первых, рассмотрена многоуровневая структура системы моделирования ассоциативных средств на основе ассоциативных средств различного типа;

во-вторых, предложен метод функционально-логического моделирования ассоциативных средств.

Предложен подход к оценке эффективности применения ассоциативных средств для интеллектуальной поддержки принятия решений, основанный на декомпозиции типовых задач поддержки принятия решений на операции, которые, в свою очередь, могут быть разбиты на операции-примитивы над нечеткими логическими значениями.

Выполнена оценка эффективности применения ассоциативных средств для интеллектуальной поддержки принятия решений, заключающаяся: во-первых, в сравнительной оценке времени выполнения задач интеллектуальной поддержки принятия решений с использованием ассоциативных средств; во-вторых, в сравнительной оценке сложности реализации ассоциативных средств для решения этих задач.

О ВЫРАЖЕНИИ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ОПЕРАЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ АЛГЕБРАХ ДАННЫХ

Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ*, Н.А. ЛЕВИН**, В.И. МУНЕРМАН*

*Смоленский государственный университет, г. Смоленск

**Институт проблем информатики РАН, г. Москва

e-mail: ypy10001@gmail.com, nlevin@ipi.ac.ru, vimoona@gmail.com

В работе рассматривается выражение теоретико-множественных операций в трех алгебрах данных: реляционной, теоретико-множественной и многомерно-матричной. Обычно рассматриваются операции *объединения*, *пересечения* и *разности* множеств, с помощью которых реализуются многие запросы к базам данных. Поэтому проблема выражения этих операций имеет важное теоретическое и технологическое значение, связанное с оптимизацией запросов.

В реляционной алгебре [1] в качестве носителя используется множество отношений, которые задаются схемами вида $R(A_1, \dots, A_n)$. В качестве языка, на котором записываются алгебраические выражения запросов, используется *SQL*. Если даны два отношения $R(A_1, \dots, A_n)$ и $S(A_1, \dots, A_n)$ с одинаковыми схемами, то теоретико-множественным операциям соответствуют следующие запросы.

Объединение:

```
SELECT R.A1, ..., R.An FROM R UNION SELECT S.A1, ..., S.An FROM S;
```

Пересечение:

```
SELECT R.A1, ..., R.An FROM R, S WHERE R.A1=S.A1 AND ... AND R.An=S.An;
```

Разность:

```
SELECT R.A1, ..., R.An FROM R WHERE NOT EXISTS  
(SELECT S.A1, ..., S.An FROM S WHERE R.A1=S.A1 AND ... AND R.An=S.An);
```

Алгебра файлов [2, 3] имеет в качестве носителя множество файлов. Файлом X_K называется фактор-множество множества однотипных записей X по отношению эквивалентности, порожденной множеством K . Традиционно любой файл считается упорядоченным по заданному множеству ключей [4]. Причем упорядоченность может быть как строгой, так и нестрогой.

Теоретико-множественные операции в алгебре файлов реализуются операцией *слияния строго упорядоченных файлов*, которая определяется следующим образом.

Строго упорядоченный файл Z_K получается в результате слияния строго упорядоченных файлов X_K и Y_K , если:

1) все три файла строго упорядочены по одному и тому же множеству ключей K ;

2) классы эквивалентности файла Z_K задаются соотношением $Z_{K^*} = f(X_{K^*}, Y_{K^*})$.

Если слияние строго упорядоченных файлов используется для реализации теоретико-множественной операции объединения файлов, то функция f задается как:

$$f(X_{K^*}, Y_{K^*}) = \begin{cases} Y_{K^*}, & \text{если } X_{K^*} = \Theta, \\ X_{K^*}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для реализации операции пересечения задание функции f будет таким:

$$f(X_{K^*}, Y_{K^*}) = \begin{cases} X_{K^*}, & \text{если } X_{K^*} \neq \Theta \text{ и } Y_{K^*} \neq \Theta, \\ \Theta, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для реализации операции разности файлов задание функции f будет таким:

$$f(X_{K^*}, Y_{K^*}) = \begin{cases} X_{K^*}, & \text{если } X_{K^*} \neq \Theta \text{ и } Y_{K^*} = \Theta, \\ \Theta, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Символ Θ (универсальное неопределенное значение) используется в ситуации, когда не существует класса эквивалентности, соответствующего экземпляру множества ключей K^* .

Алгебра многомерных матриц имеет в качестве носителя множество структур, определяемых в [5] следующим образом.

p -мерная матрица – это совокупность элементов $a_{i_1 \dots i_p}$, где индексы i_1, \dots, i_p принимают значения от 1 до n_α ($\alpha = 1, \dots, p$) соответственно.

Применительно к моделям данных в [2] рассмотрены логические многомерные матрицы, у которых $a_{i_1 \dots i_p} \in \{0, 1\}$. В этом случае для реализации теоретико-множественных операций используется операция сложения матриц с различными логическими операциями над элементами, которые интерпретируются как аддитивные.

Если $A = \|a_{i_1 \dots i_p}\|$ и $B = \|b_{i_1 \dots i_p}\|$ – p -мерные матрицы с одинаковыми наборами индексов i_1, \dots, i_p , то элементы матрицы $C = \|c_{i_1 \dots i_p}\|$ с тем же набором индексов получаются следующим образом.

Объединение: $c_{i_1 \dots i_p} = a_{i_1 \dots i_p} \vee b_{i_1 \dots i_p}$.

Пересечение: $c_{i_1 \dots i_p} = a_{i_1 \dots i_p} \wedge b_{i_1 \dots i_p}$.

Разность: $c_{i_1 \dots i_p} = a_{i_1 \dots i_p} \wedge \bar{b}_{i_1 \dots i_p}$.

Рассмотрены три алгебры данных и показано, что выразительные средства каждой из них позволяют моделировать теоретико-множественные операции, поскольку между носителями этих алгебр может быть установлено однозначное (а при определенных условиях и взаимно-однозначное) соответствие. Поэтому можно считать, что алгебры гомоморфны (изоморфны). Аналогичный результат можно получить и для других операций, применяемых в рассмотренных алгебрах.

Литература

1. Гарсия-Молина Г., Ульман Дж., Уидом Дж. Системы баз данных. Полный курс: пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1088 с.
2. Гендель Е.Г., Мунерман В.И. Применение алгебраических моделей для синтеза процессов обработки файлов // Управляющие системы и машины. – Киев: Наукова думка, 1984. - 4. – С.69–72.
3. Емельченков Е.П., Левин Н.А., Мунерман В.И. Алгебраический подход к оптимизации разработки и эксплуатации систем управления базами данных // Системы и средства информатики. – Доп. выпуск. – М.: Изд. ИПИ РАН, 2009. – С.114–137.
4. Обработка информационных массивов в автоматизированных системах управления/В.М. Глушков [и др.] – Киев: Наукова Думка, 1970. – 184 с.
5. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972. – 175 с.

ДИНАМИЧЕСКИЕ НЕЧЁТКИЕ БАЙЕСОВСКИЕ СЕТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

А.С. ЗАХАРОВ

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск

e-mail: auth1989@yandex.ru

Задачи поддержки принятия решений, в которых учитывается зависимость от времени всех или некоторых факторов, характеризующих проблемную ситуацию, называются *динамическими задачами поддержки принятия решений* (ДЗППР). Для решения динамических задач поддержки принятия решений необходимо использовать качественно новые модели, позволяющие не только отразить состав и структуру предметной области, но и учесть изменения и взаимовлияния компонентов предметной области с течением времени.

В качестве модели предметной области для решения ДЗППР предлагается использовать динамическую нечёткую байесовскую сеть (ДНБС). Байесовские сети представляют собой графовые модели причинно-следственных и вероятностных отношений между переменными предметной области и используются для осуществления вероятностного вывода на основе этих переменных. Однако использование классической модели байесовской сети в процессе решения ДЗППР оказывается невозможным в силу свойств, присущих данной модели.

Рассмотрим способы введения динамики в нечёткие байесовские сети (НБС) [1] и свойства, возникающие в данной модели при осуществлении такого рода нововведений.

Согласно [2], динамика системы определяется следующими составляющими: состояние системы, отображение перехода, отображение выхода.

Обозначим состояние как $z(t)$. Тогда $y(t) = \pi(t, z(t))$ – отображение выхода, $z(t) = \mu_{\tau,t}(z_{\tau}, x^*)$ – отображение перехода. Опишем каждый из компонентов динамики в контексте его отражения в НБС.

Состояние НБС $z(t)$ определяется следующими факторами: *состояния узлов сети* ($P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$), где n – количество узлов сети, P_i – состояние i -го узла сети), *связи между узлами*, т.е. факт влияния одного узла на другой, *условные вероятности*, отражающие степень взаимовлияния узлов сети ($V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$) – множество характеристик влияния узлов (т.е., по сути, таблиц условных вероятностей), $V_i = \{ \langle S_1 \rangle_{i,1}, \dots, \langle S_m \rangle_{i,m} \}$ – таблица условных вероятностей i -го узла, m – число состояний i -го узла, S_j – характеристика влияния на j -е состояние i -го узла со стороны родительских узлов $S_j = \{F(P_{1,1}, \dots, P_{r,1}), \dots, F(P_{1,t}, \dots, P_{r,t})\}$, где F – некоторое отображение, ставящее в соответствие совокупности состояний родительских узлов некоторую численную характеристику нахождения i -го узла в j -ом состоянии ($P_{r,t}$ – вероятность нахождения r -го узла в t -ом состоянии)). Выделение этих компонентов в качестве факторов, определяющих состояние сети, позволяет достичь гибкости в описании динамики системы и учесть влияние на состояние системы различных групп внешних воздействий.

Выходом НБС, учитывающей систему пользовательских предпочтений, которая также может меняться с течением времени, при решении ДЗППР может являться, в зависимости от вида решаемой задачи, либо информация о наилучшей альтернативе, либо упорядоченная совокупность альтернатив. При этом отображение выхода зависит от пользовательских предпочтений. Таким образом,

отображение выхода принимает следующий вид: $y(t) = \pi(t, z(t), SP(t))$, где $SP(t)$ – состояние системы пользовательских предпочтений в момент времени t .

Отражение в модели НБС динамики системы пользовательских предпочтений позволит решать класс ДЗППР, в которых предпочтения лица, принимающего решения, меняются с течением времени.

Отображение перехода характеризует то, в какое состояние переходит система с течением времени при определённых входных воздействиях. В ДНБС отображение перехода определяет зависимость состояний узлов, условных вероятностей и связей между узлами в некоторый момент времени от вышеперечисленных характеристик в предыдущий момент времени и значений входов НБС, к которым относятся свидетельства о состояниях тех или иных узлов. Отражение в НБС влияния характеристик компонентов сети, определяющих состояние сети в текущий момент времени, на характеристики компонентов сети в последующий момент времени позволяет адекватно описать процессы функционирования и развития реальной системы, моделью которой является НБС. $P_i(t+1) = \gamma(< P_i(t), \{P_k(t)\} >, \{P_r(t+1)\})$ – обобщённая зависимость, показывающая, что состояние узла в момент времени $t+1$ может быть определено не только на основании влияния родительских узлов в момент времени $t+1$, но и предысторией состояний самого узла, а также «обратными связями», т.е. состояниями других узлов в момент времени t . При этом оператор Υ может реализовывать одну из моделей динамики, описанную в [3].

Кроме того, связь между временными срезами может проявляться следующим образом: информация о нахождении узла в том или ином состоянии в момент времени t влияет на связь между узлами в момент времени $t+1$, т.е. наличие информации о том, что узел u_i в момент времени t находится в состоянии s_j , меняет наши представления о взаимосвязи узлов u_l и u_k в момент времени $t+1$. Пусть $L(u_l, u_k) = \{S_i\}$ – характеристика причинно-следственной связи между узлами u_l и u_k , описываемая совокупностью условных вероятностей. Тогда зависимость данной причинно-следственной связи от состояния узла u_i в момент времени t выражается следующим образом: $L(u_l, u_k)_{t+1} = f(L(u_l, u_k)_t, u_i(t))$.

Динамические нечеткие байесовские сети позволяют эффективно решать динамические задачи поддержки принятия решений.

Литература

1. Захаров А.С. Поддержка принятия решений на основе нечётких байесовых сетей доверия // Системы компьютерной математики: Материалы 11-й международной научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2010 год. – С. 112–114.

2. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П., Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.

3. Робертс Ф.С. Дискретные модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ НЕЧЁТКИХ БАЙЕСОВЫХ СЕТЕЙ

А.С. ЗАХАРОВ*, В.В. БОРИСОВ**

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск
e-mail: *auth1989@yandex.ru, **vborisov@etna-it.ru

Динамические задачи поддержки принятия решений (ДЗППР) являются разновидностью задач поддержки принятия решений, которая учитывает зависимость от времени всех или некоторых факторов, характеризующих проблемную ситуацию.

Динамическая задача поддержки принятия решений с использованием динамической нечёткой байесовской сети (ДНБС) формулируется следующим образом. Пусть имеется некоторое множество переменных предметной области $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ – узлы байесовской сети доверия, где n – общее число узлов в сети, $U' = \{U(t_1), U(t_2), \dots, U(t_q)\}$ – множество состояний узлов сети на всём интервале моделирования (временной промежутке, в течение которого решается задача поддержки принятия решений (ППР)), q – число временных отрезков на интервале моделирования. Выделим в каждом исходном множестве $U(t_i)$ некоторое абстрактное подмножество $A(t_i) = \{a_1(t_i), a_2(t_i), \dots, a_m(t_i)\}$. Множество $A(t_i)$ назовём множеством альтернатив момент времени t_i , m – общее число альтернатив. Выделим во множестве $U(t_i)$ некоторое подмножество $R(t_i) = \{r_1(t_i), r_2(t_i), \dots, r_p(t_i)\}$, где p – число элементов в $R(t_i)$. Множество $R(t_i)$ назовём множеством исходов в момент времени t_i . Для всех элементов множеств $A(t_i)$ и $R(t_i)$ должно выполняться следующее условие: наличие причинно-следственной связи между выбором некоторой альтернативы $a_i(t_i) \in A(t_i)$ и наступлением исхода $r_j(t_i) \in R(t_i)$. Одним из основных компонентов задачи принятия решений является система пользовательских предпочтений. Совокупность состояний системы пользовательских предпочтений $\Pi = \{\Pi(t_1), \Pi(t_2), \dots, \Pi(t_q)\}$ характеризует динамику предпочтений пользователя на промежутке от t_1 до t_n .

Пусть M – некоторое отображение (метод принятия решений), позволяющее выбрать из множества исходов наилучший: $R(t_i) \xrightarrow{\Pi(t_i)} R'(t_i)$, где $R(t_i)$ – некоторое подмножество множества $U(t_i)$, $R'(t_i)$ – множество наилучших элементов множества $R(t_i)$ по состоянию системы пользовательских предпочтений на момент времени t_i .

Таким образом, постановка динамической задачи поддержки принятия решений с использованием динамической байесовской сети доверия может быть сформулирована следующим образом: пусть $A = \{A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_q)\}$ – совокупность множеств альтернатив для каждого дискретного момента времени из интервала моделирования, $R = \{R(t_1), R(t_2), \dots, R(t_q)\}$ – совокупность множеств исходов для каждого дискретного момента времени из интервала моделирования. Требуется выбрать последовательность альтернатив $\{a_i(t_1), a_j(t_2), \dots, a_k(t_q)\}$ (*траекторию входных воздействий* системы), являющуюся оптимальной в некотором смысле. При этом понятие оптимальной *траектории* непосредственно зависит от постановки требований пользователя.

Рассмотрим возможные постановки требований пользователя при решении динамической задачи поддержки принятия решений с использованием динамической байесовской сети доверия.

1. Пусть требования лица, принимающего решения (ЛПР), представлены в следующем виде: необходимо обеспечить заранее определённое значение целевого параметра (параметров). При этом данный параметр может как являться некоторой агрегацией выходов системы, так и непосредственно быть выходом.

2. Пусть требуется обеспечить максимальное (минимальное) значение целевого параметра за некоторый промежуток времени. При этом целевой параметр получается при помощи некоторой оценочной модели на основе информации о значениях выходных параметров системы.

В зависимости от типа пользовательских предпочтений решение ДЗПР осуществляется различными способами.

1. Пусть требования пользователя соответствуют первому варианту (необходимо обеспечить заранее заданное значение целевого параметра). Например, имеется модель деятельности некоторой фирмы. Фирме необходимо обеспечить заданное значение прибыли на определённом промежутке времени. Выходами модели деятельности фирмы является информация о состоянии отделов. Естественно предположить, что состояние отделов влияет на прибыль. В данном случае необходимо использовать некоторую оценочную модель, позволяющую связать значение выходов системы с целевым показателем. Таким образом, может быть не только осуществлён

обратный переход от значения целевого показателя к значениям выхода системы, но на основе этого осуществлена поддержка изменяющихся предпочтений пользователя путём изменения значения целевого показателя. В случае, когда заданы требуемые значения выходов системы (например, «хорошее» состояние бухгалтерского отдела, «отличное» состояние отдела менеджмента и т.д.), необходимость оценочной модели отпадает и фактически получается упрощённый вариант описанной выше задачи, решение которого осуществляется по той же схеме.

Использование ДНБС в данном случае заключается в следующем: для момента времени t решается статическая задача принятия решений с использованием ДНБС, при помощи имеющейся ДНБС моделируется состояние системы в момент времени $t+1$, далее процесс повторяется для момента времени $t+1$. Таким образом строится оптимальная траектория входных воздействий системы.

Фактически, на каждом шаге решения многостадийной задачи обеспечиваются такие входные воздействия, которые дают нужное значение целевого (целевых) показателей.

2. В случае, когда требования пользователя соответствуют второму варианту (обеспечение минимального или максимального значения целевого показателя за некоторый промежуток времени), метод решения ДЗПР с использованием ДНБС, описанный выше, становится непригоден, поскольку, согласно принципу Беллмана, глобальный минимум (максимум) целевой функции не является в общем случае суперпозицией локальных минимумов (максимумов) и может быть получен движением по дереву решений в «обратную» сторону с указанием пути от вершины к вершине с минимальным (максимальным) значением веса, а затем – выборе такого пути, который обеспечивает минимальное (максимальное) суммарное значение весов.

Динамическая нечёткая байесовская сеть в данном случае должна использоваться для генерации дерева решений. Процедура генерации дерева решений с использованием динамической нечёткой байесовской сети предполагает, во-первых, задание числа допустимых для изменения входных параметров системы, а во-вторых, непосредственное моделирование с использованием ДНБС и генерации дерева решений. Непосредственное моделирование и генерация дерева решений заключается в следующем: определяются всевозможные комбинации допустимых входных воздействий (допустимое число и тип воздействий уже определено), для текущего состояния ДНБС в момент времени t проводится моделирование до момента времени $t+1$. В результате для каждого входного воздействия получается соответствующее ему состояние перехода ДНБС. Входные воздействия соответствуют переходам из состояния в момент времени t , а соответствующие

состояния в момент $t+1$ – состояниям, в которые осуществляется переход. В дальнейшем для каждого состояния в момент $t+1$ повторяется аналогичная процедура. Недостатком данной процедуры является её вычислительная сложность.

После построения дерева решений нахождение оптимальной последовательности входных воздействий может быть осуществлено классическим методом Беллмана. В результате решения получается оптимальная траектория входных воздействий системы.

Поводя итог сказанному, можно отметить, что постановка и метод решения динамической задачи поддержки принятия решений зависит от ряда факторов, среди которых особое место занимает вид целевой функции (чего хочет пользователь).

Литература

1. Захаров А.С. Поддержка принятия решений на основе байесовых сетей доверия // Материалы 7-й межрегиональной науч.–техн. конф. студентов и аспирантов. – Смоленск, 2010. – С. 47–50.
2. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
3. Захаров А.С. Поддержка принятия решений на основе нечётких байесовых сетей доверия // Системы компьютерной математики: Материалы 11-й международной научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2010. – С. 112–114.

ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕРКИ КОРРЕКТНОСТИ РЕАЛИЗАЦИЙ НЕЧЁТКИХ ОПЕРАЦИЙ

М.М. ЗЕРНОВ

Филиал ГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: zmmioml@yandex.ru

Одной из характерных черт нечёткого подхода к построению аналитических/имитационных моделей различного назначения является его вариативность относительно реализации базовых операций. Одна и та же нечёткая операция может быть реализована сразу многими способами, отличающимися как математической постановкой, так и интерпретирующими её алгоритмами. От обоснованного выбора реализации базовых операций зависит характер результатов, получаемых с помощью нечёткой модели. Сам же процесс подобного выбора реализаций и проверки их корректности весьма нетривиален.

В зависимости от класса оцениваемых нечётких операций существенно меняются требования, предъявляемые к их реализациям [1; 2]. При этом будем разделять понятия «реализация нечёткой

операции» как способа организации вычислений и «программная реализация нечёткой операции», т.е. интерпретации способа.

Требования по показателям качества реализации нечётких операций формулируются в виде критериев, количественных (подразумевают наличие меры) или качественных (требование наличия/отсутствия некоторых свойств), позволяющих однозначно судить о её пригодности.

В ряде случаев уже на этапе проверки выполнимости критериев удовлетворительности реализаций может потребоваться их интерпретация. При этом ошибки в интерпретации могут привести к неправильному принятию решения по критерию. Следовательно, обязательной является проверка интерпретации на соответствие математической постановке реализации. Во избежание трудоёмкого процесса тестирования и отладки интерпретаций рекомендуется избегать жёстких формулировок критериев, требующих обязательной проверки средствами пилотного проекта.

Желательно интерпретировать только те реализации, которые уже прошли отбор и доработку математической постановки по всем критериям. В ряде задач интерпретации как таковой может не потребоваться вообще, а отобранная математическая постановка используется напрямую в аналитических расчётах. В большинстве же случаев даже аналитические расчёты подвергаются автоматизации на ЭВМ.

В связи с этим необходимо проводить тестирование интерпретации на соответствие как математической постановке реализации, так и заявленным требованиям, которым по результатам анализа удовлетворяет математическая постановка.

В первом случае проверяется общая логика интерпретации и выполнение характеристических свойств реализации, например характер искажения функций принадлежности. Обязательной является проверка на соответствие результата операций над эталонными операндами аналитически предсказанному результату. Тестирование на каждом этапе повторяется до тех пор, пока после очередной отладки не перестанут возникать ошибки.

Во втором случае целями тестирования являются:

- поиск и исправление ошибок в математической постановке реализации и/или анализе её свойств;
- выявление наиболее эффективной интерпретации, наилучшим образом реализующей заложенный в математической постановке потенциал.

Проверенные интерпретации отобранных реализаций подлежат проверке средствами пилотного проекта. Заметим, что при прочих равных условиях следует в первую очередь проверять те интерпретации,

для которых затраты на кодирование и/или отладку ниже, что позволяет сократить сроки разработки системы.

Окончательно об эффективности внедрённой интерпретации следует судить по результатам тестов, соответствующих по объёму и характеру исходных данных условиям применения разрабатываемой системы в целом. Показателями эффективности здесь выступает непротиворечивость способа организации вычислений целям и условиям функционирования разрабатываемой системы. Так, для систем реального времени определяющим является обеспечение требуемого быстродействия при обеспечении допустимой погрешности вычислений.

По результатам проверки средствами пилотного проекта можно сделать вывод как по корректности постановки задачи на реализацию вычислений, так и об эффективности предложенных решений. При неудовлетворительных показателях возможна как переформулировка критериальных требований к реализациям, так и дополнительные исследования в области поиска новых реализаций, не вошедших в рассматриваемый набор.

Литература

1. Федулов А.С. Вид взаимодействия нечётких чисел, ограничивающий возрастание неопределенности при выполнении операций нечёткой арифметики // Вестник МЭИ. – 2006. – № 1. – С. 101–110.

2. Федулов А.С. Устойчивая операция аккумуляирования нечётких чисел // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2007. – № 1. – С. 27–39.

ЗАДАЧА СОГЛАСОВАНИЯ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК В ПРОЦЕССЕ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В.А. ЗЕРОВ

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленске
e-mail: draculea@list.ru

Одной из основных проблем решения задач принятия решений является обеспечение согласованности экспертных данных. В зависимости от количества экспертов можно говорить о согласовании индивидуальной и групповой экспертных оценок. При наличии нескольких экспертов мнения могут не совпадать. Необходимо не только определить, насколько велико это различие, но и осуществить правильный подбор метода согласования экспертных оценок. В докладе обосновываются признаки задачи выбора на различных этапах ее решения, в соответствии с которыми должен определяться метод согласования оценок.

В задаче выбора можно выделить несколько этапов решения:

Этап 1. Анализ проблемы, определение целей, ограничений. Проводится формулировка и определение типа задачи. Задача выбора сводится к поиску наилучшей альтернативы среди множества предложенных на основании цели и критериев. В качестве исходных данных выделяются:

- множество критериев, по которым выбирается альтернатива;
- множество альтернатив;
- метод оценки предпочтений.

Этап 2. Расстановка приоритетов. Экспертные оценки имеют следующие характеристики:

- количество экспертов (индивидуальная оценка, групповая оценка);
- метод оценивания (лингвистические переменные, числовые значения);
- компетентность экспертов (равная компетенция, различная компетенция).

Этап 3. Обработка исходной информации, ее уточнение и модификация в случае необходимости. Обработка информации может оказаться достаточно трудоемкой, при этом может возникнуть необходимость совершения нескольких итераций и применения различных методов для решения задачи. Решается задача выбора.

Этап 4. Анализ и интерпретация полученных результатов. Полученные результаты могут оказаться несогласованными и потребовать изменений в постановке задачи выбора. В этом случае необходимо будет возвратиться на первый этап и заново осуществить поэтапное решение задачи.

Решение задачи выбора может занимать достаточно длительный промежуток времени, в течение которого характеристики задачи могут измениться и потребовать корректировок в постановке задачи, а также в исходных данных (например, могут появиться новые альтернативы, критерии).

Таким образом, необходимо создать методику и инструмент выбора метода согласования экспертных оценок на основании признаков задачи выбора. Обоснование метода согласования мнений экспертов будет проводиться на втором этапе решения задачи выбора из множества известных методов таких, например, как принцип Парето и принцип большинства, выведение среднего балла, расчет коэффициента конкордации, переоценка результатов с целью достижения согласованности при наличии повторного опроса мнений и т. д.

Литература

1. Орлов А.И. Экспертные оценки: учебное пособие. – М.: ИВСТЭ, 2002. – 31 с.
2. <http://www.spc-consulting.ru/app/expert.htm>.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ В ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СТРУКТУР

В.Д. ИГНАТОВ

Смоленский гуманитарный университет, г. Смоленск

Средства имитационного моделирования отличает от средств программирования, прежде всего, возможность организации в относительно более доступной форме анализа параллельных процессов в модели реальных объектов.

В теории СМО широко известна формула Поллачека-Хинчина, которая устанавливает зависимость среднего времени ожидания в очереди заявок в одноканальных устройствах СМО, прежде всего, от коэффициента вариации [1]. Причем, если значение этого коэффициента принимает максимальное значение, равное единице, то это соответствует экспоненциальным распределениям в потоках такой СМО. Тогда среднее время ожидания заявок в очереди будет самым большим по сравнению со всеми другими видами распределения. А если сравнить с детерминированным распределением, у которого коэффициент вариации равен нулю, то это соотношение приводит к минимальному времени ожидания заявок в очереди. Таким образом, анализ формулы Поллачека-Хинчина показывает, что экспонента в распределении дает вдвое большее среднее время ожидания для заявок, чем детерминированное. Имитационное моделирование таких вариантов одноканальных структур СМО эти утверждения полностью подтверждают [2].

Возникает вопрос, будет ли такой эффект наблюдаться в многоканальных устройствах обслуживания СМО, т.е. на параллельные структуры обслуживания с различными функциями распределения потоков.

Рассмотрим эту задачу в продолжение дальнейшего исследования многоканальных структур имитационного моделирования средствами GPSS World [3], но в данном случае связанную с оценкой влияния функций распределения потока параллельными процессами обслуживания. Исследования затрагивают проблему оценки среднего времени пребывания в модели активных транзактов от изменения распределения потоков обслуживания заявок в имитационных моделях многоканальных структур при неизменном входном потоке с функцией экспоненциального распределения.

Реализация имитационных моделей многоканальных структур средствами GPSS World во многом определяется целью моделирования. Для заданной постановки задачи имитационная модель строится на базе применения блоков Enter и Leave с емкостью (storage) равной 10, т.е. выбрана 10-канальная структура имитационного моделирования.

Исходная модель показана на рисунке 1.

```

MKU Storage 10
Reac Table M1,10,100,20
GENERATE (Exponential(1,0,10))
QUEUE 1
ENTER MKU
DEPART 1
ADVANCE (Exponential(2,0,100))
LEAVE MKU
TABULATE Reac
SAVEVALUE Tvr,TB$Reac
TERMINATE
GENERATE 100000
TERMINATE 1
Start 1
    
```

Рис. 1. Имитационная модель с экспоненциальными распределениями

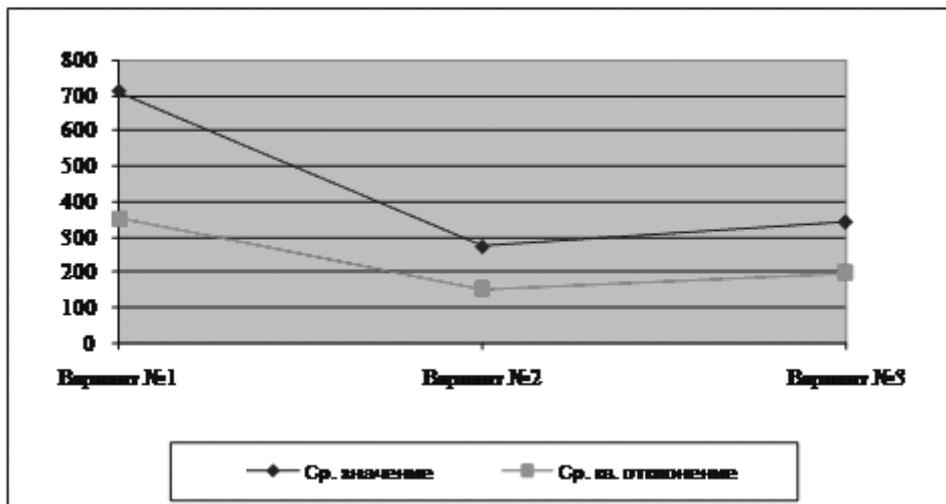


Рис. 2. Графики показателей имитационных прогонов

Loc	Block Type	Current Co...	Entry Co...
1 GEN	GENERATE	0	9879
2 QUE	QUEUE	4	9879
3 ENT	ENTER	0	9875
4 DEP	DEPART	0	9875
5 ADV	ADVANCE	10	9875
6 LEA	LEAVE	0	9865
7 TAB	TABULATE	0	9865
8 SAV	SAVEVALUE	0	9865
9 TER	TERMINATE	0	9865
10 GEN	GENERATE	0	1
11 TER	TERMINATE	0	1

Рис. 3. Фрагмент блок диаграмма модели варианта № 1

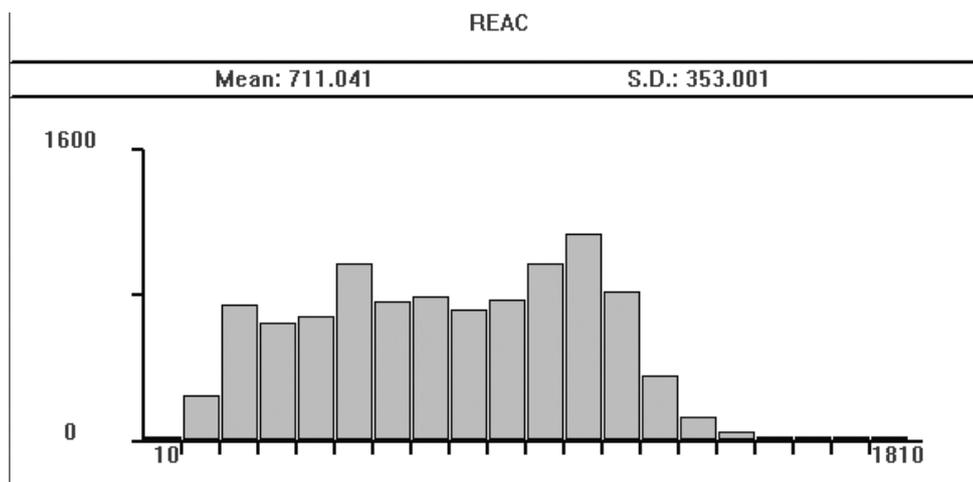


Рис. 4. Гистограмма для выходных параметров модели варианта № 1

Таблица 1

Результаты имитационных экспериментов

	Ср. значение	Ср. кв. отклонение
Вариант №1	711,041	353,001
Вариант №2	272,638	151,232
Вариант №3	342,654	196,292

В имитационной модели (рис. 1) варианта № 1 применяются экспоненциальные функции распределения как для входного потока, так и для потока обслуживания. Прогон всех моделей производился на одинаковом модельном времени $T_M = 100000$ усл. ед. вр. В варианте № 2 поток обслуживания имеет равномерное распределение, которое задается в блоке: ADVANCE 100,10, а в варианте № 3 поток обслуживания имеет нормальное распределение: ADVANCE (Normal (2,100,10)). Для регистрации параметра, связанного с оценкой среднего времени реакции моделируемой системы, используется блок TABULATE Reac, для которого в соответствующей карте Table достаточно применить стандартно числовой атрибут M1, указывающий на прохождение транзактом (активным) весь путь в исследуемой модели.

Результаты моделирования представлены в таблице 1 и в виде графиков на рисунке 2, которые отражают характерные изменения в среднем и среднем квадратичном отклонениях при заданных вариантах данных для экспериментов.

На рисунках 3 и 4 показаны иллюстрации блок диаграммы и гистограммы соответственно, полученные в результате прогона модели в среде GPSS World.

Анализ представленных результатов имитационного моделирования указывает на правомерность формулы Поллачека-Хинчина и для многоканальных структур СМО. Действительно видно,

что экспоненциальные распределения потоков дают самые высокие показатели, характеризующие среднее время ожидания в очереди, чем равномерное и нормальное виды распределения потоков обслуживания в многоканальных устройствах.

Литература

1. Емельянов А.А., Власова Е.А., Дума Р.В. Имитационное моделирование экономических процессов: учебное пособие / под ред. А.А Емельянова. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
2. Игнатов В.Д. Аналитические подходы в имитационном моделировании // Университетский вестник. 2005 – №2 (9). Смоленск: Изд-во «Универсум», – С. 33–38.
3. Игнатов В.Д. Исследование параллельных процессов вычислений средствами имитационного моделирования // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2009. – Вып. 10. – С. 135–138.

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАПРОСА К ДАННЫМ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАЦИЙ АЛГЕБРЫ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ

Д.А. КАФЛИК

ООО «СайнГрейн», г. Москва,
e-mail: dmitry@kaflan.ru

Традиционным фактором, ограничивающим производительность вычислительных систем, является скорость выполнения операции обмена с внешними устройствами. В современных вычислительных системах делается акцент на хранении и обработке данных в оперативной памяти. Поэтому, на текущий момент актуальность задач поиска данных (запросов) в оперативной памяти постоянно возрастает. При обработке запросов главной задачей становится не минимизация обращений к внешней памяти, а эффективная загрузка процессора [1].

Выразительные возможности реляционного языка ограничиваются возможностями реляционной алгебры, поэтому можно прийти к выводу, что обеспечить выполнение реляционных запросов можно было бы средствами алгебры многомерных матриц (АММ), если бы возможно было сопоставить данные алгебры между собой. В [2] показано, что алгебра многомерных матриц гомоморфна реляционной алгебре, следовательно, возможна обработка реляционного запроса к данным с помощью операций алгебры многомерных матриц.

Математический аппарат многомерных матриц (ММ) является плодом трудов нескольких поколений советских и российских ученых. Стоит выделить труды, связанные с практическим применением

математического аппарата алгебры многомерных матриц, для обработки файлов и построения СУБД, которые были поддержаны и развиты в [3; 4; 5]. Был исследован важный для повышения эффективности алгоритмов, использующих алгебру многомерных матриц, подход к представлению разреженных многомерных матриц в иерархических структурах [6].

Указанные материалы покрывают большой пласт теоретико-практических задач, приближающих исследования в данной области к возможности создания полноценных программно-аппаратных комплексов, реализующих различные аспекты хранения и обработки данных. Не получили освещения вопросы связанные с выполнением запросов к данным с помощью операций алгебры многомерных матриц и реализации их распараллеливания. Выполнением запроса к данным, представленным в виде иерархических структур [6] с помощью операций алгебры многомерных матриц, будем называть интерпретацией формулы (алгебраического выражения) алгебры многомерных матриц.

Цель построения формулы АММ в том, чтобы максимизировать скорость выполнения запроса к данным, т.е. вычисления формулы АММ. Для достижения этой цели при реализации механизма вычисления формул АММ стоит сразу закладывать в него функциональность, необходимую для параллельного выполнения. Выбранный в работе метод распараллеливания вычислений имеет тип вычислений, управляемых потоком данных. Поэтому основная задача, которую предстоит решить, – разделение входных и промежуточных данных на части для их параллельной обработки. Необходимо также определить, на каких участках выполнения формулы возможна параллельная обработка, на какое число частей разделять данные и определить наиболее эффективный метод разделения, обеспечивающий наименьшее количество вычислений. Для автоматического решения этих задач для произвольной формулы в процессе выполнения, а также для организации самого параллельного вычисления необходимо вычислять план параллельного вычисления формулы перед ее выполнением.

Для формализации формулы в терминах языков программирования будем использовать объекты «отношения», представляющие собой многомерные матрицы и объекты «операторы» – функциональные звенья. У «операторов» предусмотрены «вход(ы)» и «выход», на вход оператора может быть назначен объект «отношение» или объект «оператор», это означает, что в процессе вычисления формулы, на «вход» «оператора» будет подано либо «отношение» либо «выход» – результат выполнения привязанного оператора. Таким образом, текущая модель задает всю необходимую и достаточную информацию для

расчета плана параллельного вычисления формулы и для параллельного вычисления самой формулы в соответствии с этим планом.

Первым компонентом плана выполнения является граф выполнения операций – его составление необходимо как для вычисления формулы, так и для вычисления остальных компонентов плана. Граф выполнения операций – орграф, в котором операторы и операнды – вершины, а информационные переходы с «выхода» на «вход» – дуги.

При реализации параллельной обработки требуется разделение данных на части на этапе промежуточных вычислений. Для этого необходима информация о том, какие измерения будут у многомерных матриц, которые будут получены в результате промежуточных вычислений. Эта же информация дает возможность определить, какие измерения будут у результирующей ММ, что позволит оценить и проанализировать информацию о результате вычисления формулы до ее выполнения. И даст возможность вычислить, какая часть элементов результирующей матрицы действительно необходима и, в соответствии с этой информацией провести, сечения исходных ММ.

Для хранения и обработки ММ используются иерархические структуры, описанные в [6]. Они обладают следующим свойством: значения первых индексов ММ являются началами не связанных между собой деревьев. То есть если разделить ММ с N измерениями на диапазоны значений в первых M измерениях, то получится набор независимых друг от друга матриц с размерностью $N - M$, с

количеством элементов $k = \prod_{i=0}^M \frac{D_{mm}(i)}{d}$, где $D_{mm}(i)$ – размерность

измерения, i, d – размер диапазона. Количество измерений и размер диапазона для разделения выбирается в соответствии со степенью распараллеливания. Для работы алгоритма необходимы идентификаторы (ключи) всех матриц, которые в нем участвуют. Идентификаторы получившихся при разделении матриц (далее подматрицы) состояются из идентификатора исходной и идентификаторов выбранных измерений.

При параллельном вычислении формулы операции АММ будут оперировать разделенными матрицами. Рассмотрим особенности параллельного выполнения операций:

- сечение и транспонирование – производится для каждой подматрицы отдельно.
- свертка – в том случае, когда свертка включает индексы, по которым было произведено разделение, свертка предусматривает слияние подматриц в одну, иначе производится отдельно для каждой подматрицы;

- суммирование двух матриц – для каждой подматрицы первой матрицы находится подматрица из второй матрицы с совпадающим ключом и производится операция суммирования;

- произведение – в случае, когда матрицы разделены по одинаковым индексам и диапазонам, можно произвести попарное произведение матриц, совпавших по ключу. Иначе, задача решается декартовым произведением множества подматриц первой матрицы и множества подматриц второй матрицы либо суммированием подматриц одной из матриц и произведением всех подматриц второй на результат.

Из написанного выше можно сделать вывод, что выбор измерений для разделения играет важную роль при оптимизации процесса вычисления формулы АММ. Однако индексами для разделения могут стать только первые индексы ММ, из чего следует, что для разделения по другим индексам операцию разделения стоит производить совместно с операцией транспонирования. Стоит отметить, что увеличение производительности от распараллеливания тем больше, чем большие участки программы выполняются параллельно. В связи с этим дополнительные расходы на обеспечение параллельности снижаются. Из этого следует, что если операции происходят с разделенной ММ, в дальнейшем разделении нет нужды. После построения плана выполнения, вычисление формулы АММ, при заданных исходных ММ-ицах, сводится к обходу графа выполнения, разделению ММ-иц на составляющие и параллельному выполнению для них операций АММ, реализованных без применения параллелизма.

Реализация описанного механизма выполнения формулы в терминах алгебры многомерных матриц и параллельного выполнения алгебраического выражения позволит обрабатывать реляционные запросы к данным с помощью операций алгебры многомерных матриц, обеспечив необходимую степень параллелизма.

Литература

1. Никитина Г. Управление данными, размещенными в оперативной памяти. // Открытые системы. 1999 – 01.

2. Мунерман В.И. Формальные модели обработки баз данных // Системы компьютерной математики их приложения. – Смоленск, 2010. Вып. 11. – С. 143–145.

3. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. – М.: Физматгиз, 1960.

4. Гендель Е. Г., Мунерман В. И. Применение алгебраических моделей для синтеза процессов обработки файлов // Управляющие системы и машины. – Киев: Наукова думка, 1984.

5. Левин Н. А., Мунерман В. И., Сергеев В. П. Алгебра многомерных матриц как универсальное средство моделирования

данных и ее реализация в современных СУБД // Системы и средства информатики. – 14. М.: Наука. – С. 86–99.

6. Сергеев В. П. Представление многомерных матриц в иерархических структурах для повышения эффективности хранения и процессов обработки данных // Системы и средства информатики. Стохастические технологии и системы. (Специальный выпуск). – М.: ИПИ РАН, 2005.

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕЧЕТКИХ ДЕРЕВЬЕВ РЕШЕНИЙ

А.В. КОВАЛЕВ

Филиал ГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: drfent@mail.ru

Одним из наиболее существенных недостатков классических четких деревьев решений являются «жесткие» границы описываемых классов, что приводит к потере точности классификации объектов вблизи границ между классами. Наиболее естественным решением данной проблемы является введение нечеткости в аппарат деревьев решений.

Можно выделить следующие классы нечетких деревьев решений (НДР) по способам введения нечеткости:

1. НДР с нечеткими правилами разбиения в узлах дерева и четкими выходными переменными. Входные переменные в данном случае являются четкими.

2. НДР с разбиением по термам лингвистических переменных и четкими выходными переменными. В этом случае входные переменные должны быть предварительно фаззифицированы.

3. НДР с нечеткими правилами разбиения в узлах дерева и нечеткими выходными переменными.

4. НДР с разбиением по термам лингвистических переменных и нечеткими выходными переменными.

С введением нечеткости в аппарат деревьев решений появляются дополнительные параметры настройки модели, вследствие чего увеличивается их гибкость. К таким параметрам относятся:

1. Вид и параметры функций принадлежности нечетких переменных.

2. Механизм осуществления нечетких логических операций конъюнкции и дизъюнкции.

Задача построения оптимального в различных аспектах, таких как глубина и точность классификации, дерева решений, является NP-полной.

Поэтому большинство алгоритмов построения деревьев решений являются жадными алгоритмами, где на каждом шаге выбирается условие в данном узле, которое разделяет ассоциированную с этим узлом обучающую выборку наилучшим образом. Данные жадные алгоритмы являются целеориентированными: предполагается, что данные критерии позволяют получить на выходе алгоритма дерево, обладающее свойствами точности и наименьшей глубины.

Другим подходом к построению деревьев решений являются ценностно-ориентированные алгоритмы, когда критерий, которому будет соответствовать построенное в результате работы алгоритма дерево, задается извне. Таким образом, можно формализовать предпочтение наименьшей глубины или наилучшей классификации в виде функции предпочтения, например, взвешенной суммы. Необходимым условием для ценностно-ориентированных алгоритмов является формирование пространства деревьев-альтернатив, например, используя генетические алгоритмы. Процесс построения дерева сводится к итеративной процедуре изменения пространства альтернатив и его оценивания, пока не будет выполнен критерий останова.

Относительно типов НДР можно привести следующие разновидности методов их построения:

1. Построение НДР на основе фаззификации четкого дерева решений.

2. Построение НДР первого типа при помощи нечеткой версии алгоритма построения четкого дерева решений.

3. Построение НДР второго типа при помощи нечеткой версии алгоритма построения четкого дерева решений.

4. Построение НДР при помощи генетического алгоритма.

5. Построение леса НДР первого или второго типа при помощи алгоритма построения случайного леса НДР.

Выделяют следующие кластеры способов использования НДР:

- использование НДР для решения задачи классификации:
 - использование одного НДР;
 - использование леса НДР с принятием решений путем голосования либо путем принятия взвешенного решения;
- использование НДР для решения задачи регрессии;
- использование НДР для построения базы нечетких ассоциативных правил;
- использование НДР для решения задач поддержки принятия решений.

Литература

1. Murthy S.K. Automatic Construction of Decision Trees from Data: A Multi-Disciplinary Survey // Data Mining and Knowledge Discovery. – 1998. – № 2/4. – P. 345–389.

2. Janikow C.Z. Fuzzy decision trees: issues and methods // IEEE Trans. Systems Man, Cybernetics. – Part B: Cybernetics. – 1998. № 28/1. – P. 1–14.

3. Papagelis A. and Kalles D. GATree: Genetically Evolved Decision Trees // Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence. – 2000. – P. 203.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНДЕКСНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ДАННЫХ

А.Н. КОМИССАРОВА, В.И. МУНЕРМАН

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: vimoona@gmail.com

Одна из проблем при обработке информации в базах данных состоит в совместной обработке сверхбольших объемов данных при высоком коэффициенте активности.

При реализации операций типа *join*, *слияние нестрого упорядоченных файлов*, *умножение многомерных матриц* с большими объемами данных при последовательной обработке заключается в больших временных затратах. Это связано с необходимостью полного прочтения файлов при одновременной сложной программной обработке классов эквивалентности, соответствующих одинаковым значениям ключей. (Класс эквивалентности – совокупность записей, имеющих одинаковое значение ключа, одинаковый индекс.)

В этом случае одним из решений может быть хранение операндов в виде индексно-последовательных файлов. Такой способ позволяет сочетать считывание данных с их параллельной обработкой. Системы с многоядерными процессорами позволяют строить высоко продуктивные параллельные машины баз данных при небольших затратах на оборудование.

Пусть имеется n процессоров (ядер). Назовем процесс считывания данных процессом первого рода, а процесс обработки данных – процессом второго рода. Пусть имеется K процессов первого рода и L процессов второго рода. Пусть t_{i1} – время, затрачиваемое на процесс первого рода в i -ом классе эквивалентности ($i=1, \dots, K$). На i -ый процесс отводится x_{i1} процессоров. Аналогично, для процессов второго рода t_{j2} – время, затрачиваемое на процесс второго рода в j -ом классе эквивалентности ($j=1, \dots, L$). На j -ый процесс отводится x_{j2} процессоров.

Пусть функция $f_i(x_{i1})$ – оценочная функция для процесса первого рода в i -ом классе эквивалентности с помощью x_{i1} процессоров,

принимая значения в отрезке $[0, 1]$. Функция $f_j(x_{j2})$ – оценочная функция для процесса второго рода в j -ом классе эквивалентности с помощью x_{j2} процессоров, принимающая значения в отрезке $[0,5, 1]$.

Построим целевую функцию:

$$f = \sum_{i=1}^K t_{i1} f_i(x_{i1}) + \sum_{j=1}^L t_{j1} f_j(x_{j1}) \rightarrow \min.$$

Она определяет время, требуемое для реализации всех процессов первого и второго рода для классов эквивалентности исходных файлов. При её минимизации мы получим оптимальные значения функций $f_i(x_{i1})$ и $f_j(x_{j2})$, значения которых линейно связаны с количеством процессоров, необходимых для реализации того или иного процесса в том или ином классе эквивалентности. То есть при минимизации данной целевой функции мы получаем оптимальное распределение процессоров между осуществляемыми операциями и процессами.

Зададим ограничения.

Так как в нашем распоряжении только n процессоров, то первое ограничение очевидно

$$\sum_{i=1}^K x_{i1} + \sum_{j=1}^L x_{j1} \leq n.$$

Два следующих ограничения образуются из условий определённости функций $f_i(x_{i1})$ и $f_j(x_{j2})$ на некоторых отрезках

$$0 \leq f_i(x_{i1}) \leq 1,$$

$$0,5 \leq f_j(x_{j1}) \leq 1.$$

Таким образом, получена задача стохастического программирования со случайными величинами t_{i1} и t_{j2} , распределёнными по нормальному закону.

Проведён вычислительный эксперимент, позволивший оценить распределение размеров классов эквивалентности файлов.

Разработано программное обеспечение, с помощью которого синтезированы файлы, содержащие большое количество записей со случайными размерами классов эквивалентности файлов.

Программа синтезирует типизированный файл (типизированные файлы – это файлы, в которых данные одного типа), внося в ячейки случайные значения данных. Затем данные сортируются и выводятся в СУБД, где они синтезируются, проходят численную обработку.

Произведена оценка полученных результатов. Построены и определены типы распределений размеров классов эквивалентности. Получены качественные распределения.

Осуществлена постановка задачи стохастического программирования, позволяющая оптимизировать количество процессоров, выделяемых для обмена данными и их обработки.

Литература

1. Гендель Е.Г., Мунерман В.И. Применение алгебраических моделей для синтеза процессов обработки файлов // Управляющие системы и машины. – Киев: Наукова думка, 1984. – С. 69–72.

ПОДДЕРЖКА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ СРЕДСТВАМИ ИНЖЕНЕРИИ КВАНТОВ ЗНАНИЙ

Н.А. КОНОПЛЕВА

ВА ВПВО ВС РФ, г. Смоленск

e-mail: konoplewa32@mail.ru

В теории управления достаточно долгое время господствует представление о том, что процедура принятия решения в каждом отдельном случае является творческим процессом, основанным на многолетнем профессиональном опыте лица, принимающего решения (ЛПР) [3]. А значит, причиной просчетов в подавляющем большинстве случаев является человеческий фактор – физическое или моральное состояние ЛПР, недостаток опыта и естественные ограничения объема информации, которую человек может удерживать в памяти, обрабатывать за требуемый временной период и учитывать при принятии решений.

Автоматизация поддержки принятия таких решений позволит сохранить опыт высококвалифицированных специалистов и использовать его для вывода решений, увеличить объем учитываемой при принятии решения информации, скорость ее обработки, а значит, повысить качество принимаемых решений и снизить время, требуемое для их принятия [1].

При этом во многих практических приложениях до недавнего времени доминировало представление о системах управления различной сложности, с различной степенью участия человека в контуре управления и принятия решений (автоматических, автоматизированных) как об объектах, реализуемых на основе детерминированных и (или) стохастических моделей. Исследованию таких объектов уделялось большое внимание, были получены важные для теории и практики результаты, например в [4], по актуальным вопросам современной

теории оптимального управления и построения сложных систем. Однако в большинстве случаев, даже в условиях заведомо существенно нечетких процессов, применялись подходы и математический аппарат, учитывающий не в достаточно полной мере специфику процессов и объекта в целом, что априори снижало эффективность систем и приводило иногда к их принципиальной непригодности для функционирования в реальных условиях.

Как следует из анализа [2] разработанных моделей и комплекса решаемых на их основе проблем, существующие искусственные нейронные сети (ИНС) и методы инженерии знаний, основанные на фреймовых, продукционных, генетических, байесовых и других моделях знаний, недостаточно эффективны по причине несовершенства способов представления и машинного манипулирования знаниями. К ним можно отнести организационные неувязки; неудачный метод добычи знаний, не совпадающий со структурой знаний в данной области; неадекватная модель представления знаний и пр. Поэтому выход из сложившейся ситуации видится в построении и проектировании системы поддержки принятия решений (СППР) на базе знаниеориентированного моделирования интеллектуальных умений человека успешно принимать решения в условиях неопределённости, опираясь на интуицию и знания.

В связи со всем вышеизложенным в качестве теоретического базиса для создания компьютерной системы поддержки принятия решений реализуется относительно новая методология инженерии квантов знаний (ИКЗ), разработанная и развиваемая в ХАИ [5–11].

Выбор данной методологии мотивирован ее универсальностью, обоснованностью и принципиальной открытостью к беспрепятственному использованию любых средств математики для ее развития путем применения интеллектуальных информационных технологий. Метод аккумулирует в себе наилучшие качества традиционных моделей представления знаний и позволяет осуществлять алгоритмическое манипулирование квантами (порциями) знаний на основе машинных алгебр и теории предикатов, но имеет фундаментальное преимущество в том, что обладает возможностями математического представления в трех формах: множественной, векторно-матричной и предикатной. Тем самым следовательно, модели и методы инженерии квантов знаний (ИКЗ) имеют существенные преимущества перед существующими методами. Основные их достоинства состоят в непосредственной возможности представления информационных объектов (k -знаний) в фазовом пространстве состояний, а также в открытом доступе ко всему арсеналу средств математики для совершенствования инструментария и методологии ИКЗ [5–11].

ИКЗ-модели легко встраиваются в существующие ПО АСУ без дополнительного расширения современных языков программирования и гибко подстраиваются под требования пользователя [7–9].

Результаты экспериментального сравнения ИКЗ-моделей с наиболее известными средствами инженерии знаний показали высокую адекватность, эффективность и преимущества квантового принятия решений, которые состоят в уменьшении среднего риска на порядок, увеличении скорости процесса обучения в 2,5 раза и сокращения объема памяти базы знаний в 1,5 раза [5–7].

Таким образом, СППР, созданные на базе использования средств ИКЗ, в настоящее время являются наиболее мощным средством для решения слабоструктурированных и плохоформализуемых задач [5–11]. Однако следует заметить, что в отличие от ЭС ИСППР не принимает решения вместо эксперта, а помогает эксперту принимать решение, исходя из накопленных знаний предшественников или других экспертов, исходной информации, что существенно увеличивает гибкость подобных систем.

Литература

1. Автоматизация поддержки принятия управленческих решений с помощью интеллектуальных систем / Л.А. Волобуева [и др.] // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сборник научных трудов. – Вып. 40. – Харьков: Нац. аэрокосм.ун-т «ХАИ», 2008. – С. 150–157.
2. Кучеренко Е.И. Проблемы моделирования и анализа нечетких процессов управления // Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – № 2. – С. 118–121.
3. Люгер Д. Ф. Искусственный интеллект. Стратегии и методы решения сложных проблем: пер. с англ. – 4-е изд. – М.; СПб.: Киев: Вильямс, 2003. – 864 с.
4. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С., Оптимальное управление системами: пер. с англ. / под ред. Б.Р. Левина. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
5. Сироджа И.Б. Квантовые модели и методы инженерии квантов знаний в задачах искусственного интеллекта // Штучний інтелект. – 2002. – № 3. – С. 161–171.
6. Сироджа И.Б. Квантовые модели и методы искусственного интеллекта для принятия решений и управления. – Киев: Наук. думка, 2002. – 420 с.
7. Сироджа И.Б. Принятие решений в управлении знаниями средствами инженерии квантов знаний // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2009. – № 2(36). – С. 161–175.

8. Сироджа И.Б. Теория и новая информационная технология принятия производственных решений на основе инженерии знаний // Інформація та нові технології. – 1996. – № 3. – С. 6–10.

9. Сироджа И.Б., Петренко Т.Ю. Метод разноуровневых алгоритмических квантов знаний для принятия производственных решений при недостатке или нечеткости данных. – Киев: Наук. думка, 2000. – 247 с.

10. Сироджа И.Б., Постернакова В.А., Волобуева Л.А. Принятие решений средствами инженерии квантов знаний для защиты от мошенничества и дебиторской задолженности в телекоммуникационных сетях // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2010. – № 1(42). – С. 115 – 121.

11. Сироджа И.Б. Оценивание качества идентификационных и прогнозных решений в инженерии квантов знаний // Бионика интеллекта. – 2008. – № 2(69). – С. 77–83.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХЕШ-ФУНКЦИЙ

В.И. МУНЕРМАН*, Т.А. САМОЙЛОВА**

Смоленский государственный университет, г.Смоленск

e-mail: *vymoon@gmail.com, **tatsam@hotmail.ru

Предлагается подход к реализации алгоритмов вычисления хеш-функций с использованием возможностей современных процессоров выполнять SSE-команды [1], работающие одновременно с несколькими элементами данных. Эти команды относятся к классу SIMD-команд. Они позволяют вычислять значения хеш-функции от нескольких аргументов параллельно одним потоком команд.

Хеширование – широко распространенный метод обеспечения быстрого поиска информации в оперативной или внешней памяти компьютера. Хеш-функция определяется как отображение вида $h(x): [0, N-1] \rightarrow [0, B-1]$, где область определения – множество числовых значений ключа, а область значений – номер сегмента данных, который содержит запись с ключом x .

Методы хеширования эффективно используются:

– в алгоритмах, реализующих массовый поиск информации в таблицах (компиляция, обработка текстов, организация пользовательских интерфейсов);

– в системах управления базами данных, где требуется наилучшим образом определить положение искомого ключа в основной или внешней памяти;

– в криптографических системах для обеспечения защиты информации;

– в распознавании образов, при идентификации элемента в таблице на основе анализа ряда признаков, сопровождающих объект поиска, при неполном соответствии заданному ключу;

– в при реализации обработки разреженных матриц с целью эффективного использования оперативной памяти и уменьшения времени доступа.

Несмотря на то, что вычисление значений хеш-функций реализуется небольшим количеством арифметических операций, проблема ускорения остается актуальной, поскольку это в основном «медленные» операции: умножение и деление.

Для примера рассмотрим хеш-функцию, известную как «Метод середины квадрата». В этом методе значение ключа преобразуется в число, это число затем возводится в квадрат, из него выбираются несколько средних цифр, которые интерпретируются как адрес записи. В работе рассматривается случай, когда квадрат ключа представлен 32-разрядным целым числом, $B = 2^l$ ($l < 32$), а середина квадрата выделяется константой

$\underbrace{0\dots 0}_{\frac{32-l}{2}} \underbrace{1\dots 1}_l \underbrace{0\dots 0}_{\frac{32-l}{2}}$ при четном l или $\underbrace{0\dots 0}_{\frac{32-l}{2}} \underbrace{1\dots 1}_l \underbrace{0\dots 0}_{\frac{32-l}{2}+1}$ при

нечетном l .

Алгоритмы хеширования могут быть реализованы на разных языках программирования высокого уровня (VB, C#, C++, Pascal, Java, Fortran) и на языке Ассемблера. Далее рассматриваются реализации алгоритма на языке Ассемблера, что позволит использовать возможность современных процессоров обрабатывать несколько элементов хешируемых данных параллельно одним потоком команд. Такие возможности в общедоступных процессорах Intel обеспечивает наличие 128-разрядных регистров и набора SSE-команд (Streaming SIMD Extensions, SIMD – Single Instruction Multiple Data). Набор SSE-команд впервые был представлен в процессорах серии Pentium III на ядре Katamaï в 1999 году. Он содержал команды для обработки наборов из четырех 32-битовых чисел. В последующих расширениях появлялись только новые инструкции, в основном нацеленные на специализированные вычисления. Наличие этих команд сделало возможным одновременное вычисление в одном потоке нескольких значений хеш-функции от разных значений ключей.

Рассмотрим кратко архитектурную реализацию SSE.

1. Процессор содержит восемь 128-битовых регистров, предназначенных для SSE-команд: XMM0 – XMM7.

2. Каждый из этих регистров может содержать одновременно набор из четырех 32-битовых чисел.

3. SSE-регистры организованы так же, как и основные регистры процессора.

4. SSE-команды позволяют работать параллельно с наборами из четырех вещественных чисел.

5. SSE-команды имеют тот же формат, что и команды для работы с обычными регистрами.

На листингах 1 – 3 приведены примеры двух программ, реализующих вычисление хеш-функции методом середины квадрата. Первая программа реализует вычисление значения хеш-функции от одного значения ключа, вторая – одновременное вычисление четырех значений с помощью параллельных SSE-команд.

```
.data
key DD 123456., 234567., 345678., 456789.;           исходные ключи
msk DD 03FF000h,03FF000h,03FF000h,03FF000h;        маски для выделения
                                                       средин квадратов
```

Листинг 1. Фрагмент раздела исходных данных для обеих программ вычисления хеш-функции

```
.code
; загрузка исходного ключа
lea esi, key
mov eax,[esi]
; возведение в квадрат
mul eax
and eax,msk ; выделение середины
квадрата
```

Листинг 2. Фрагмент программы последовательного вычисления хеш-функции

```
.code
; загрузка четырех масок
lea edi, msk
movups xmm1, [edi]
; загрузка четырех ключей
lea esi, key
movups xmm0,[esi]
; возведение в квадрат
mulps xmm0,XMM0
; выделение середины квадрата
andps xmm0, msk
```

Листинг 3. Фрагмент программы параллельного вычисления хеш-функции

Обе программы использовались при проведении эксперимента, в ходе которого общее число обрабатываемых ключей изменялось от 12 до 3200 млн. Во время вычислений производился подсчет числа тактов процессора для последовательной и параллельной программ при одних и тех же количествах обрабатываемых ключей. Результаты, приведенные на рис. 1, свидетельствуют о том, что с ростом числа ключей эффективность распараллеливания возрастает.

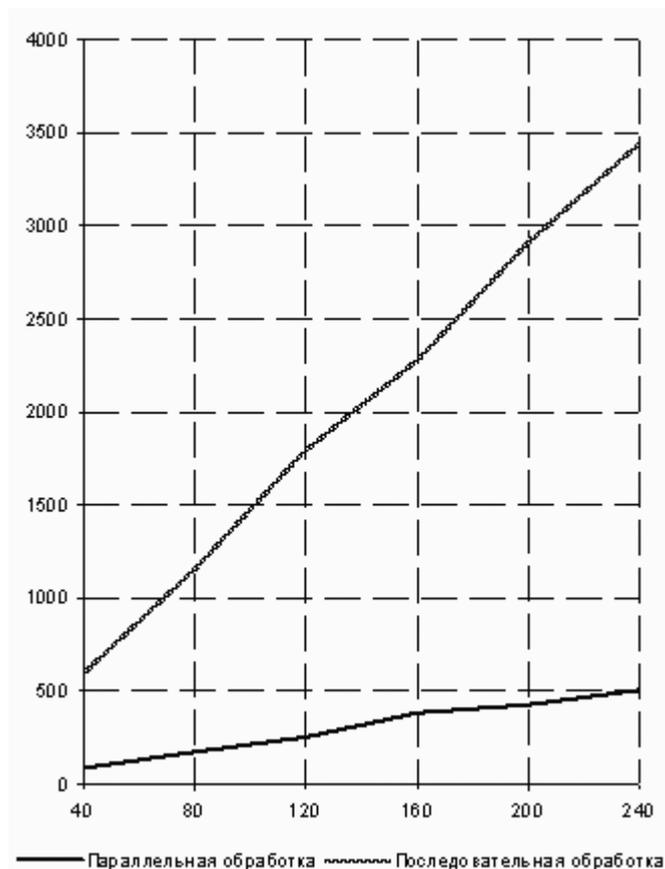


Рис. 1. Диаграмма затрат процессорного времени для вычисления хеш-функции в последовательном и параллельном случаях

Литература

1. Магда Ю.С. Ассемблер для процессоров Intel Pentium. – СПб.: Питер, 2006.

ОРГАНИЗАЦИЯ ДАННЫХ КАК ГРАФА. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ЯЗЫК ЗАПРОСОВ GSQL

К.Б. ПОТАПОВ

ИПИ РАН, г. Москва

e-mail: pokibor@yandex.ru

В настоящее время в организациях с самыми различными направлениями деятельности внедряются среды бизнес-моделирования. Говоря более глобально, существенно возрастает потребность в системах, где данные организованы в виде графа (узлы – **объекты** с набором атрибутов, ребра – **связи** между объектами, связи также могут иметь набор атрибутов). Возникает необходимость как организации взаимодействия между такими системами и традиционными,

основанными на реляционных БД (особенно ERP-системами), так и их доработки под конкретные нужды (например, генерация отчетов).

Частный случай и наиболее актуальная задача – создание на основе среды бизнес-моделирования полноценной системы управления регламентами (СУР), поскольку модели бизнес-процессов в таких системах и являются электронными регламентными документами [1]. Среди других приложений можно выделить, например, геоинформационные системы – и вообще любые, математической основой в которых является теория графов. Ключевой момент решения поставленных задач – разработка удобного и стандартизированного механизма доступа/модификации данных по примеру реляционных БД. Задача эта, таким образом, решается совмещением математической базы в виде теории графов [2] и практического опыта, накопленного при развитии и доработке реляционных СУБД [3] до ERP-систем.

Существенная роль в этом развитии принадлежит языку SQL, ставшему декларативным и относительно стандартизированным инструментом, не требующему такой квалификации, как существующие средства доступа к данным в средах бизнес-моделирования и иных системах с представлением данных, базирующемся на теории графов.

Следует заметить, что, хотя реляционные базы и используются в ряде упомянутых систем, с точки зрения пользователя непосредственное применение языка SQL для запросов неочевидно и затруднительно. Однако для упрощения взаимодействия с реляционными СУБД и обеспечения возможности организации единой системы необходимо обеспечить преемственность разрабатываемого средства доступа, и даже более – возможность его интеграции в SQL.

Данная идея является ключевой в разработке языка, получившего название GSQL [4] (от Graph SQL – SQL для графа), чьи конструкции возможно интегрировать в SQL. Такая возможность достигается за счет преобразования результирующих данных в табличную форму (отправную точку всех SQL-запросов [5]), а сама выборка осуществляется естественным именно для представления данных в виде графа образом.

Язык GSQL разработан таким образом, что в нем присутствует как возможность циклического отбора информации (т.е. учет наперед неизвестного количества переходных узлов между стартовым и конечным), так и учет заданных типов связей (связанные объекты, а также данные связей находятся на одной строке в формируемой таблице).

Отправной точкой языка GSQL являются множества объектов, к которым возможно применять стандартные операции, фильтрацию, циклическую конструкцию и операцию построения связи. При этом

циклическая конструкция реализована таким образом, что в ней исключено заикливание, а операция построения связи не только строит новое множество, но и запоминает связи между объектами для формирования результирующей таблицы, подставляемой в SQL.

Реализация GSQL позволяет непосредственно применить весь опыт и программные средства, созданные для реляционных СУБД в процессе их развития до ERP-систем, к новым системам, в рамках которых возможно совмещение данных, организованных в соответствии с реляционной моделью, с данными, организованными в форме графа. При этом GSQL как метод доступа к таким данным позволяет совместить реляционную алгебру и теорию графов.

Литература

1. Загоруйко А.Е. Электронные административные регламенты. Принципы и аспекты реализации в документационном обеспечении управления. – URL:<http://www.gisa.ru/40399.html>.
2. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
3. Ульман Дж., Уидом Дж. Основы реляционных баз данных. – М.: Издательство «Лори», 2006. – 384 с.
4. Потапов К.Б. «Язык запросов для системы управления регламентами». Первая школа молодых ученых ИПИ РАН: сборник докладов. – М.: ИПИ РАН, 2010. – 54 с.
5. ISO/IEC 9075:1992, Database Language SQL – July 30, 1992. URL:<http://www.contrib.andrew.cmu.edu/~shadow/sql/sql1992.txt>.

ОСОБЕННОСТИ СОВРЕМЕННОГО СЕРВЕРА БАЗ ДАННЫХ

А.О. ПРОВТОРОВА*, А.Е. ШИРАЙ, Т.И. ГАЙДАЕНКО*****

ООО «СайнГрейн», г. Москва

e-mail: *anna@sciengrain.ru, **alexander@sciengrain.ru, ***tatiana@sciengrain.ru

Сервер баз данных – специализированный вычислительный сетевой узел, предназначенный для размещения, накопления и обслуживания информации, хранящейся в специализированном формате в виде базы данных (БД). Сервер обеспечивает целостность и сохранность данных при хранении и при выполнении операций ввода-вывода посредством системы управления базами данных (СУБД). Сервер БД – компонент архитектуры вычислительной сети типа «клиент-сервер», в которой пользовательский интерфейс расположен на ПК клиента (терминале), а СУБД размещена на серверном компьютере. Сервер БД работает под управлением серверной операционной системы и обрабатывает запросы,

формируемые на специализированном языке, например, SQL (Structured Query Language).

Серверы баз данных предъявляют высокие требования к аппаратному обеспечению, так как они предназначены не только для хранения информации, но и обеспечения взаимодействия с базой данных, обработки запросов пользователей, резервного копирования.

Для сервера БД очень важна конфигурация памяти, поскольку она непосредственно влияет на производительность. Оперативная память является не только хранилищем выполняемых программ, большая ее часть используется в качестве буфера (кэша), устраняющего необходимость в физическом обращении к жесткому диску. Поскольку обращение к оперативной памяти происходит быстрее, чем обращение к жесткому диску, то уменьшение операций ввода-вывода представляет собой ключевую задачу в повышении производительности сервера, поэтому в настоящее время мощные серверы имеют избыточный объем оперативной памяти.

Второй важный компонент – внешняя память или дисковая подсистема. К ней предъявляются три основных требования: высокая производительность, надежность и возможность масштабирования. Как правило, все три условия выполняются при построении RAID-массивов, включающих не менее трех дисков (уровней 5, 5e, 6 и 6e). При создании наиболее надежного решения обязательно наличие аппаратного кэширования контроллера RAID, снабженного энергонезависимой памятью (батареинным модулем). В настоящее время имеется тенденция использования массива из большего числа дисков меньшего объема, а не меньшего количества накопителей высокой емкости. Необходимо предусмотреть достаточное количество отсеков для дополнительных жестких дисков. Выбор интерфейса обмена данными зависит от интенсивности обращений к хранилищу, если она высока, то предпочтителен SAS, а не SATA.

Третий компонент – сетевая подсистема. Она должна обеспечивать достаточную пропускную способность даже в пиковых ситуациях для предельного количества пользователей и, так же как и система хранения, обладать высокой надежностью. В настоящее время применяются минимум два канала Gigabit Ethernet с возможностью использования интерфейсов с более высокой пропускной способностью.

При выборе процессора преимущество имеют микропроцессоры с большим объемом кэш-памяти, а не микропроцессоры с высокой тактовой частотой. Как и в случае с оперативной памятью, встроенная в процессор память в десятки раз быстрее оперативной, соответственно, при недостаточном объеме кэш-памяти процессору приходится пропускать такты и ждать, пока нужные данные не поступят из оперативной памяти.

Современные многоядерные микропроцессорные архитектуры рассчитаны на высокопроизводительную обработку данных, имеющих линейную организацию, и значительное количество операций над ними. Такой вычислительный процесс требует высокой пропускной способности оперативной памяти и особой организации кеш-памяти [3]. С ростом количества ядер усложняется тракт доступа к общей кеш-памяти, возникает проблема снижения относительно большого (выраженного в тактах работы процессора) времени обращения к общим данным, расположенным в кеш-памяти второго и третьего уровня. Увеличение времени доступа приводит к тому, что параллельный поток вычислений должен периодически останавливаться в ожидании получения новой порции данных. Чем меньше число операций, выполняемых в процессоре над конкретным данным, тем ниже эффективная загрузка процессора. В этом случае производительность системы обуславливается характеристиками тракта доступа к памяти.

Разбиение задачи на этапы, в которых над данными выполняется много операций, может приводить к значительным потерям эффективности за счет большого числа обменов с оперативной памятью, если каждый этап выполнять по очереди и выгружать промежуточные результаты в оперативную память. Графические карточки, в которых используется такой подход, используют специальную организацию памяти, которая имеет пропускную способность, превышающую в разы пропускную способность тракта памяти универсальных микропроцессоров.

Одним из решений проблемы эффективной загрузки процессора является программная реализация части конвейера или всего конвейера непосредственно в рамках одного этапа вычислений (до выгрузки промежуточных или результирующих данных в память) на многоядерном микропроцессоре [4]. В этом случае данные передаются между ступенями конвейера через кеш-память, что эквивалентно увеличению числа операций, выполняемых в процессоре над каждым данным.

Если алгоритм вычислений слабо зависит от данных и данные имеют линейную организацию, такое решение обеспечивает достижение высокой загрузки ядер процессора и повышение эффективности вычислений. Если эти условия не выполняются, то возрастают накладные расходы на организацию вычислений и затраты на синхронизацию параллельных ветвей программы при доступе к общим данным, что существенно сказывается на времени решения задач [5].

ООО «СайнГрейн» предлагает новые подходы параллельного программирования, которые увеличивают производительность сервера за счет более эффективной загрузки процессоров, даже при использовании стандартной периферии [1]. Созданная технология

параллельного программирования позволяет сократить время обработки запросов к базам данных в 10–20 раз по сравнению с Microsoft SQL Server 2008.

Сравнительная характеристика серверов БД

При выборе сервера основное внимание уделяется характеристикам решаемой задачи, следовательно, разработать универсальную конфигурацию невозможно. Большинство разработчиков серверов БД предоставляют несколько линеек изделий, на основе которых можно построить наиболее оптимальную систему по требованию заказчика. Рассмотрим несколько вариантов наиболее популярных серверов БД, обладающих достаточной универсальностью.

Модель Aquarius T50 D60 [2], выпускаемая в стоечном исполнении, позволяет выбрать достаточный для большинства задач объем оперативной памяти (до 32 Гбайт), а также создать дисковую подсистему на основе RAID-массива из пяти жестких дисков SAS/SATA с возможностью горячей замены. Серверное шасси допускает горячую замену вентиляторов и в базовой поставке снабжается одним источником питания. Если потребуется, конфигурацию можно расширить за счет установки дополнительного БП — в этом случае суммарная мощность составит 1500 Вт. Сетевая подсистема построена на основе двух гигабитных портов, при необходимости она также может быть расширена с помощью дополнительных контроллеров. В шасси предусмотрен отсек для монтажа ленточного накопителя — его применение позволяет упростить процедуру создания резервных копий. Если такой потребности нет, в отсек устанавливают еще один жесткий диск.

Сервер Arbyte Alkazar R2D50 [2], предлагаемый в стоечном исполнении, при типоразмере 2U тоже рассчитан на установку шести жестких дисков, при необходимости объединяемых в RAID-массив. RAID-контроллер поставляется со встроенной кэш-памятью и модулем батарейного питания, способным снизить риск потери данных. С этой целью возможна поставка с двумя блоками питания, включаемыми по схеме «1+1». У Alkazar R2 D50 более широкие возможности в плане расширения функциональности благодаря наличию двух разъемов типа mezzanin, позволяющих поднять производительность сетевой подсистемы за счет установки двух- или четырехпортовых сетевых модулей; — с их помощью количество гигабитных интерфейсов можно увеличить до шести. В сервер устанавливается до 96 Гбайт оперативной памяти. Такое сочетание характеристик делает Alkazar R2 D50 оптимальным выбором для растущей компании: путем последовательного наращивания аппаратуры сервер можно превратить в мощную многопроцессорную систему, обслуживающую большое количество пользователей.

Модель Dell PowerEdge R710 [2] оптимизирована для работы с большими базами данных. Сервер поддерживает до 144 Гбайт оперативной памяти, дисковая подсистема предполагает работу не только с SAS и SATA, но и с другими накопителями. Все диски могут быть объединены посредством как встроенных, так и поставляемых опционально контроллеров RAID, в том числе оснащенных батарейным модулем. Особенностью PowerEdge R710 является энергоэффективность. По заявлениям разработчика, в число усовершенствований входят эффективные источники питания со специально подобранной мощностью, встроенное управление энергопотреблением и тепловыделением на основе политик, а также компоненты с повышенной энергоэффективностью, соответствующие требованиям стандарта Energy Smart.

Для решения менее ресурсоемких задач используется сервер DEPO Storm 2250L2 [2]. В большинстве случаев количества оперативной памяти в 12 Гбайт достаточно для нужд небольшой компании, а возможностей дисковой подсистемы, допускающей установку до шести накопителей SATA или SAS, должно хватить и с учетом дальнейшего расширения. О том, что сервер спроектирован для нужд небольших предприятий как простое экономичное решение, свидетельствует и мощность источника питания – в базовой поставке она составляет 500 Вт.

Такие решения, как DESTEN Navigator DX000 ILR2 G2 [2], предназначены для реализации других задач. Этот сервер – типичное изделие в классе систем высокой плотности, предполагающее концентрацию вычислительных ресурсов на малых площадях или в условиях недостатка места. Несмотря на формфактор 2U, как и у ранее рассмотренных моделей, в данном шасси можно разместить до восьми жестких дисков 2,5 дюйма, а для оперативной памяти предусмотрено 12 слотов (по шесть на каждый CPU). При необходимости в шасси допускается установка двух источников питания по схеме «1+1», мощностью по 750 Вт, что не только обеспечивает высокую надежность, но и позволит наращивать сервер, не заботясь о недостатке мощности блока питания.

Несмотря на то, что большинство рассмотренных серверов построено на платформе Intel, это не означает, что другие решения не востребованы на рынке. К примеру, модель Hyperion RS250 G2 [2] от компании ETegro Technologies представляет собой мощный и расширяемый сервер с одним или двумя четырехъядерными процессорами AMD Opteron в корпусе высотой 2U, который вмещает до шести дисков SCSI или SATA с горячей заменой и до 32 Гбайт оперативной памяти. Сервер имеет все необходимое для модернизации: место под ленточный накопитель, слот PCI-X и два слота PCI Express,

также имеются два порта Gigabit Ethernet, а система дочерних плат расширения обеспечивает широкий выбор конфигураций. Блок питания резервируемый; охлаждение дублированное, с горячей заменой.

Fujitsu PRIMERGY RX 300 S5 [2] – еще один пример мощной расширяемой конфигурации, которую можно дополнять модулями по мере увеличения количества решаемых задач. В шасси устанавливается до 12 жестких дисков или твердотельных накопителей (формфактора SFF), а объем оперативной памяти наращивается до 144 Гбайт. Реализованы функции резервирования или зеркалирования памяти, блоки питания и вентиляторы монтируются с возможностью горячей замены и дублированием. Такая конфигурация позволяет строить отказоустойчивые системы различного масштаба.

Рассматривая продукцию IBM, следует обратить внимание на платформы с 64-разрядными процессорами POWER5, такие как System p5 510 Express [2]. Этот сервер ориентирован на жесткие требования приложений с высокой интенсивностью транзакций и аналитических приложений. Однако сравнивать данную систему с платформами x86 не вполне корректно, поскольку в ее основу заложены другие принципы работы, тем не менее существует ряд ситуаций, при которых System p5 510 Express оказывается более эффективным, несмотря на различия в количестве оперативной памяти, тактовой частоте процессоров и других характеристиках.

Классическим решением для использования в качестве сервера БД можно считать модель Kraftway Express ISP ES25 [2]. Она построена на платформе Intel, использует полностью буферизированную память максимальным объемом до 32 Гбайт, дисковую подсистему на базе SATA или SAS с горячей заменой. Функции расширения представлены как PCI Express, так и PCI-X. Сервер используется там, где не планируется строить дисковую подсистему на основе SAS и предпочтение отдается более традиционным накопителям SATA. Встроенный RAID-контроллер позволяет реализовать полноценную систему хранения начального уровня. Он имеет шесть каналов, поддерживает уровни RAID 0, 1, 10 и 5.

Еще один классический сервер БД для небольших предприятий – Trinity Server E220-M3 [2]. Производитель отмечает, что данное решение в сочетании с терминальным сервером и сервером приложений рассчитано на несколько десятков пользователей (типично для систем 1С на небольших предприятиях). Несмотря на относительно скромное позиционирование, сервер укомплектован производительным RAID-контроллером, а объем ОЗУ можно нарастить до 24 Гбайт. В зависимости от бюджета и требований к надежности поставляется дублированный или одиночный блок питания.

Сетевые накопители QNAP для малых/средних офисов [2]. Компания QNAP сообщила о расширении линейки сетевых накопителей

Turbo NAS двумя моделями для малых и средних офисов. С помощью двухдисковой TS-239 Pro II и четырехдисковой TS-439 Pro II можно организовать сетевое хранилище объемом до 4 и 8 Тбайт соответственно. Процессор Intel Atom D410 (1,66 ГГц) позволяет накопителям обмениваться данными на скоростях до 830 Мбит/с в режиме записи и 700 Мбит/с в режиме чтения. Оба устройства поставляются с микропрограммой версии 3.2, включающей одну из наиболее полных реализаций iSCSI среди сетевых накопителей – с поддержкой набора команд SPC-3 в средах VMware и Windows Server 2008, операций ввода-вывода по нескольким сетевым маршрутам и множественных соединений на сессию. На упрощение работы с накопителями направлены файловый менеджер второго поколения с обновленным интерфейсом и расширенной функциональностью, поддержка распределенных файловых систем, а также функция импортирования учетных записей пользователей. Встроенный веб-сервер с расширением WebDAV используется при совместной работе над документами.

Таблица 1

Сравнительные характеристики серверов

Модель/ Характеристика	Aquarius T50 D60	Arbyte Alkazar R2D50	Dell PowerEdge R710	DEPO Storm 2250L2	DESTEN Navigator DX000ILR2 G2	Etegro Hyperion RS250 G2	Fujitsu PRIMERGY RX300 S5	IBM System p5 510 Express	Kraftway Express ISP ES25	Trinity Server E220-M3
Процессор	1 или 2 Intel Xeon 5400	до 2-х Intel Xeon 55xx	до 2-х Intel Xeon 5500	1 или 2 Intel Xeon 5200/5100 или Intel Xeon 5400/5300	Intel Xeon 5500	1 или 2 AMD Opteron	Intel Xeon 5500	до 4-х IBM POWER5+	Intel Xeon 54xx, 53xx или Intel Xeon 52xx, 51xx, 50xx	до 2-х Intel Xeon 5500
Оперативная память, Гбайт	32 (533, 667 МГц)	24 (1333 МГц), 48 (1066 МГц), 96 (800 МГц)	144 (800, 1066 или 1333 МГц)	12 (533, 667 МГц)	1066/1333 МГц	32	144	32 (528 МГц)	32 (533, 667 МГц)	24
Слоты расширения	PCI Express (1), PCI-X (1)	PCI Express x8 (2), PCI Express x16 (1)	PCI Express x8 (2), PCI Express x4 (2)	PCI Express x8 (2), PCI Express x4 (1), PCI (3)	PCI Express x8 (5)	PCI Express 8x (2), PCI-X (1)	PCI Express (7)	PCI-X (3)	PCI Express x8 (3), PCI Express x4 (2), PCI-X (1)	PCI Express x8 (2), PCI Express x4 (2), PCI (2)
Дисковая подсистема	5; SAS, SATA; RAID 0, 1, 5, 10, 50	5; SATA; RAID 0, 1, 10	SAS, SATA, SSD	6; SATA, SAS	8; SATA, SAS	6; SCSI, SATA	12 (2,5 дюйма) или 6 (3,5 дюйма); SAS, SATA; модульный RAID	4; SCSI	8; SATA, SAS	8; SATA, SAS; RAID 0, 1, 5, 6, 10
Сетевой адаптер	двухпортовый	двухпортовый	расширяется за счет опциональных модулей	двухпортовый	двухпортовый	двухпортовый	двухпортовый	двухпортовый; опция – Fibre Channel 4 Гбит/с и Ethernet 10 Гбит/с	двухпортовый	двухпортовый
Блок питания, Вт	750; до двух	750; до двух	2×570 или 2×870	1×550; 2×500 (опция)	1×750 с дублированием	700	800; дублирование "1+1" (опция)	2×700	1×560; дублированный 700	

Конфигурация, как аппаратуры, так и программного обеспечения сервера баз данных, полностью определяется конкретным применением. Разработать универсальную конфигурацию сервера БД невозможно. ООО «СайнГрейн», разрабатывая конфигурацию сервера,

предусматривает возможность ее наращивания как программно и функционально, так и физически, масштабируя систему и резервируя при этом дополнительное место на стойке.

Литература

1. Гайдаенко Т.И., Провоторова А.О., Ширай А.Е. К вопросу о создании отечественного сервера баз данных // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П.Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. – Вып. 11. – С. 119–122.
2. <http://www.ncc.ru/>, Национальная компьютерная корпорация, Дистрибуция компьютерного и телекоммуникационного оборудования, измерительной аппаратуры; ИТ-EXPERT, 02, #178, 2010. – С. 20.
3. Graham Kirsch. Active memory device delivers massive parallelism // *Microprocessor Forum*. – San Jose, CA. – 2002 October.
4. Ed. Upchurch, T. Sterling, J. Brockman Analysis and Modeling of Advanced PIM Architecture Design. – Tradeo@s 2004 October 6.
5. Mingliang Wei, Marc Snir, Josep Torrellas, R. Brett Tremaine A Near-Memory Processor for Vector, Streaming and Bit manipulation workloads // Technical Report UIUC DCS-R-2005-2557, Dept. of Computer Science, UIUC February 2005.

КОНЦЕПЦИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РИСКАМИ В СЛОЖНЫХ ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А.В. СЕНЬКОВ*, В.В. БОРИСОВ**

Филиал ГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: *asenkov@pochta.ru, **vborisov@etna-it.ru

При возрастании сложности организационно-технических систем и происходящих в них процессов все большее значение приобретает управление рисками, которое осуществляется в условиях комплексного воздействия рискообразующих факторов, неопределенности и неточности системных и внешних параметров.

Одними из основных рисков, присущих сложным организационно-техническим системам и имеющих комплексный характер, являются профессиональные [1, 2] и производственные [3–5] риски, трактуемые как сочетание возможности нанесения ущерба системе (технической подсистеме, подсистеме организации труда, подсистеме управления) и его негативных последствий (тяжести этого ущерба).

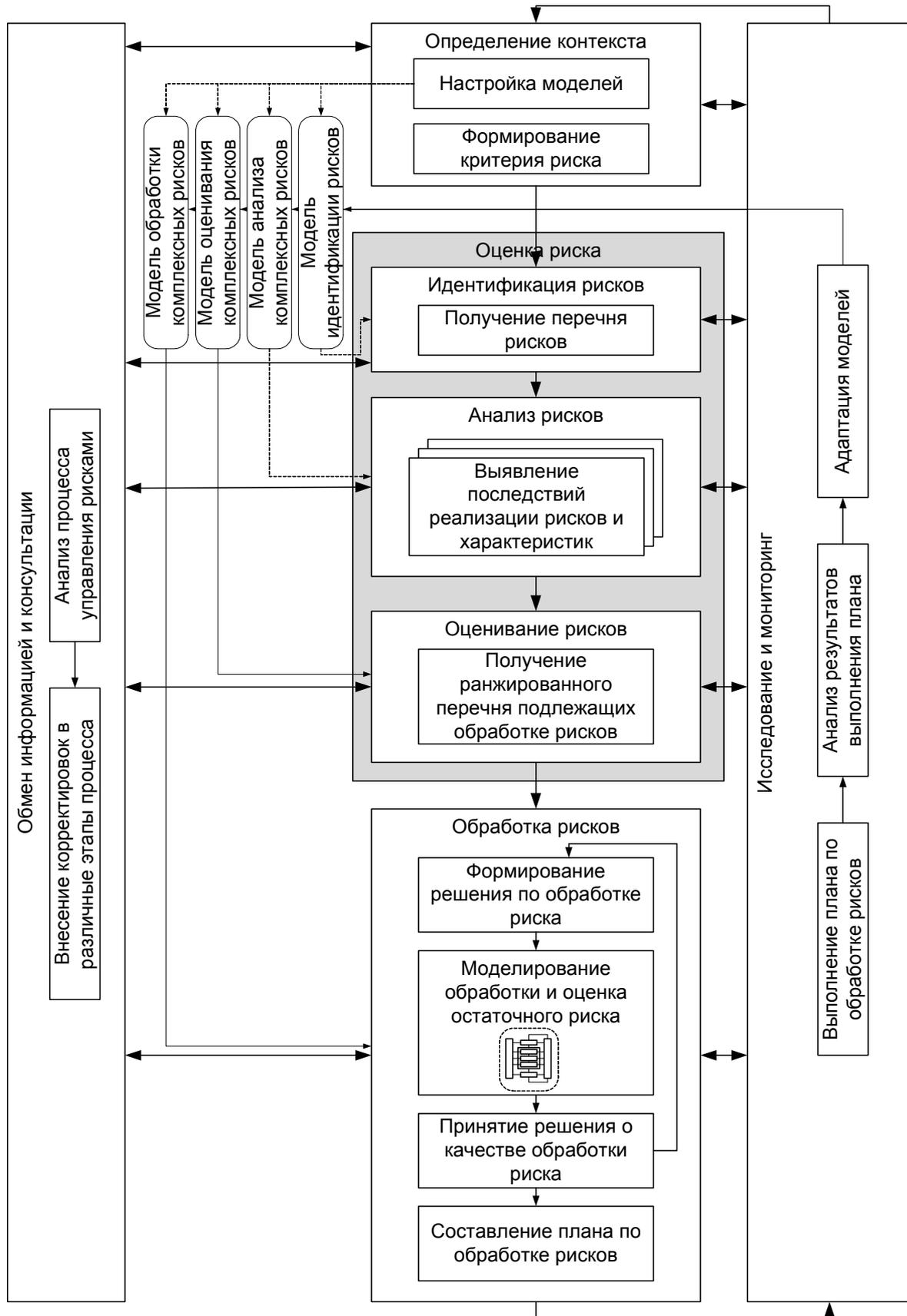


Рис. 1. Этапы метода интеллектуального управления рисками

Комплексное воздействие профессиональных и производственных рисков на организационно-техническую систему, прежде всего, проявляется в том, что и профессиональные, и производственные рискообразующие факторы могут негативно воздействовать как на сотрудников, так и на оборудование, а также на всю систему в целом [6, 7].

При этом негативные последствия от воздействия этих факторов могут быть двух типов:

- мгновенные последствия, например получение травм сотрудниками либо отказ оборудования;
- накапливающиеся последствия, например, профессиональные заболевания сотрудников в результате продолжительного воздействия вредных и опасных производственных факторов или отказ оборудования в результате истощения его ресурса.

И в итоге, негативные последствия от воздействия профессиональных и производственных рискообразующих факторов могут заключаться в нарушении функционирования системы в целом.

В таких условиях управление рисками должно носить не только комплексный, но и интеллектуальный характер. При этом «интеллектуализация» должна быть системной. Обязательным условием управления рисками в таком случае является минимизация вмешательств человека в процесс управления рисками, поскольку он является основным источником неточности и неопределённости данных, что в значительной степени влияет на качество процесса управления рисками.

Исходя из вышесказанного, можно говорить о том, что интеллектуализация должна заключаться:

- в применении нечетких, нейро-нечетких и других интеллектуальных моделей на каждом из этапов управления рисками;
- в гибридизации интеллектуальных технологий на основе одного из следующих подходов:
 - в модели один из компонентов замещается другой моделью;
 - независимые модели, обмениваясь информацией, выполняют различные задачи с целью получения общего решения;
 - одна модель применяется для имитации (и реализации) функционирования другой модели;
- в комплексности подхода к управлению рисками, заключающейся:
 - в управлении как профессиональными, так и производственными рисками;
 - в управлении рисками одновременно на нескольких уровнях иерархии сложной организационно-технической системы;
 - в комплексировании различных моделей для реализации отдельных этапов управления рисками.

Основными этапами управления рисками являются следующие [8]:

- определение контекста;
- идентификация рисков;
- анализ рисков;
- оценивание рисков;
- обработка рисков и планирование мероприятий для противодействия рискам на каждом из этапов управления рисками.

На каждом из этапов возможно осуществление обмена информацией, анализа и мониторинга.

В [5] и [9] приведены описание и сравнительный анализ специализированных моделей, которые могут быть применены на различных этапах управления рисками.

Предлагается метод интеллектуального управления рисками в сложной организационно-технической системе (рис. 1), позволяющий:

- осуществлять интеллектуальное управление рисками в сложных организационно-технических системах;
- формализовать управление рисками, что обеспечит его автоматизацию и ускорит принятие решений по обработке рисков;
- проводить интеллектуальное моделирование поведения сложной организационно-технической системы с точки зрения существующих в ней рисков.

Литература

1. OHSAS 18001:2007. Occupational health and safety management systems – Requirements.
2. Ветошкин А.Г., Таранцева К.Р. Техногенный риск и безопасность. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2001.
3. Надежность технических систем и техногенный риск: Электронное учебное пособие. – Режим доступа: <http://www.obzh.ru/nad>.
4. Сеньков А.В. Анализ рисков в опасных производственных объектах на основе нечёткого дерева отказов // Тезисы докладов Конференции конкурса научных работ студентов «Росэнергоатом: знания молодых ядерщиков – атомным станциям». – Обнинск: ИАТЭ, 2008. – С. 48.
5. Сеньков А.В. Способ оценки производственных рисков на основе нечётких деревьев отказов // Радиоэлектроника, электротехника и энергетика: тезисы докладов XV Международной науч.-техн. конф. студентов и аспирантов. В 3 т. Т 1. – 2009. – С. 292.
6. Борисов В.В. Комплексное управление профессиональными и производственными рисками на основе проведения сертификации работ по охране труда // Тезисы докладов V Международного конгресса «Управление профессиональными рисками – приоритетное направление

в сфере охраны труда Российской Федерации», 2008. – М.: ФГУ «ВНИИ охраны и экологии труда». – С. 35–36.

7. Борисов В.В., Сеньков А.В. Комплексное управление рисками в сложных организационно-технических системах // Математическая морфология. электронный математический и медико-биологический журнал. – Т. 9. – Вып. 4. – 2010. – URL: <http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-28-html/TITL-28.htm>.

8. ISO 31000:2009. Risk management – Principles and guidelines.

9. ISO 31010:2009. Risk management – Risk assessment techniques.

ПЕРЕХОД К МНОГОМЕРНОМУ РЯДУ ПОРЯДКА N ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЧЕТКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

А.А. СИЗОВ

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск

e-mail: aclion@yandex.ru

Пусть $X_t, (t=1, \dots) \subset R$ – универсальное множество, на котором определены нечеткие множества $f_i^i, (i=1, 2 \dots)$ и $F_t = F(t)$ – коллекция $f^i(t), (i=1, 2 \dots)$. Тогда $F_t = F(t)$ называется нечетким временным рядом (НВР). Значениями НВР, в отличие от традиционного ВР, являются нечеткие множества, а не действительные значения уровней ВР.

Нечеткие модели детерминированных (time-variant) и авторегрессионных (time-invariant) ВР первого порядка (first-order) были предложены Сонгом и Чиссомом (Song и Chissom) [1–3], которые применили разработанные модели для прогнозирования количества регистрирующихся студентов университета штата Алабама (США), фаззифицировав предварительно четкий ВР. Это было первое применение нечетких моделей при моделировании ВР и первое определение моделей нечетких временных рядов (НВР).

Моделирование НВР $F(t)$ в соответствии с нечеткой моделью, предложенной в работе [1], состоит в реализации следующих шагов:

- 1) задание области определения (универсума) задачи;
- 2) разбиение универсума на интервалы выбранной (равной) длины;
- 3) определение нечетких множеств;
- 4) фаззификация входных данных – определение степени принадлежности входных данных заданным нечетким множествам;
- 5) формирование нечетких логических отношений (НЛО)
 $F(t-1) \rightarrow F(t)$;
- 6) вычисление результатов применения НЛО (в соответствии с выбранной интерпретацией импликации)

$$f^j(t) = f^i(t-1) \circ R_{ij}(t, t-1), \quad R(t, t-1) = \bigcup_{ij} R_{ij}(t, t-1), \quad (1)$$

$$F(t) \rightarrow F(t) \circ R(t, t-1);$$

7) применение полученной модели к входным данным и получение выходных нечетких результатов;

8) дефаззификация нечетких результатов.

Для одномерного НВР $F(t)$ НЛО первого порядка выглядит следующим образом

$$F(t-1) \rightarrow F(t). \quad (2)$$

Для повышения точности прогнозирования предлагается перейти от одномерного к многомерному НВР, включив тем самым в модель набор факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на исследуемый процесс. Если ВР $F(t)$ зависит от m факторов, то для него НЛО первого порядка можно представить в виде

$$(F_1(t-1), F_2(t-1), \dots, F_m(t-1)) \rightarrow F(t). \quad (3)$$

Ошибка прогнозирования также может быть снижена за счет включения в модель большей предыстории процесса. В случае многомерного НВР НЛО n -го порядка можно представить в виде

$$(F_1(t-n), F_2(t-n), \dots, F_m(t-n)), \dots, (F_1(t-1), F_2(t-1), \dots, F_m(t-1))) \rightarrow F(t). \quad (4)$$

Моделирование процессов на основе многомерных НВР может осуществляться в соответствии с представленным выше алгоритмом прогнозирования одномерного НВР. Учитывая увеличение размерности ряда, указанные этапы необходимо проводить для каждой одномерной составляющей многомерного ВР.

Таким образом, осуществлен переход от модели НВР первого порядка

$$F(t) = F(t-1) \circ R(t, t-1) \quad (5)$$

к многомерному нечеткому ряду порядка n

$$F(t) = (F_i(t-1) \times F_i(t-2) \times \dots \times F_i(t-n)) \circ R_i(t, t-n)$$

$$R_i(t, t-n) = \max_n \left\{ \min_{j=i_1, \dots, i_n} \{f^j(t), f^{i_1}(t-1), \dots, f^{i_n}(t-n)\} \right\}. \quad (6)$$

Литература

1. Song Q., Chissom B.S. Fuzzy time series and its models // Fuzzy Sets and Syst. 54 (1993). – С. 269–277.
2. Song Q., Chissom B.S. Forecasting enrollments with fuzzy time series – part 1 // Fuzzy Sets and Syst. – 54 (1993). С. 1–9.
3. Song Q., Chissom B.S. Forecasting enrollments with fuzzy time series – part 2 // Fuzzy Sets and Syst. 62 (1994). С. 1–8.

ОПЫТ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМЛИ И ГЛОБАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СЕЙСМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА²

И.Н. СИНИЦЫН, И.В. СЕРГЕЕВ, Н.Н. СЕМЕНДЯЕВ

Институт проблем информатики РАН, г. Москва

e-mail: sinitsin@dol.ru

Как известно [1–5], определение успешности прогноза землетрясений – сложнейшая задача, поэтому ее решение должно дополняться любой возможной информацией, позволяющей лучше распознать предвестника. В связи с этим фундаментальный аспект проблемы – изучение и моделирование механизма поведения глобальной составляющей сейсмического процесса (ГССП). Этот процесс тесно связан с фундаментальной проблемой сейсмологии – природой землетрясений, одной из причин которых могут быть особенности вращательно-колебательного движения Земли. Временные ряды числа землетрясений западного и восточного полушарий, а также отдельно северной и южной частей как восточного, так и западного полушарий имеют высокий коэффициент корреляции, что подтверждает наличие ГССП у Земли.

Известно [1, 5], что генерирование землетрясений обычно понимается как стохастический процесс. Однако по экспериментальным данным можно наблюдать, что крупные землетрясения происходят в какой-то мере систематически. Явно прослеживаются долгопериодические особенности сейсмической активности при мощных землетрясениях с магнитудой $M \geq 4,5$, которые тесно коррелируют с вращательно-колебательным движением Земли.

В [5] для интервала времени 1990–2009 (2010) годов решены следующие задачи: 1) на основе данных МСВЗ [2] построены среднегодовые зависимости параметров вращательно-колебательного движения Земли. Изучены их тренды и частотные составляющие; 2) на базе данных наблюдений землетрясений [3] построены среднегодовые кривые сейсмической активности Земли $N(t)$ ($N(t)$ – функция числа землетрясений). Подтверждено наличие ГССП. Оценены коэффициенты корреляции между координатами земного полюса (\bar{x}_p, \bar{y}_p) , изменением длительности суток $\overline{l.o.d}(t)$, модулем ее производной $d|\overline{l.o.d}(t)|/dt$ и $N(t)$ (черта сверху – символ годового осреднения); 3) дано качественное объяснение «всплеска» крупных землетрясений по всей Земле в феврале – апреле 2010 года на основе небесно-механического подхода. Для обеспечения создания информационных ресурсов по проблеме

² Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-07-00021) и программы ОНИТ РАН "Анализ сложных систем и информационные технологии" (проект 1.5).

«Статистическая динамика вращения Земли» в ИПИ РАН в среде MATLAB разработано инструментальное программное обеспечение для корреляционного анализа и статистического моделирования флуктуаций параметров вращения Земли и глобальной составляющей сейсмического процесса.

По результатам моделирования установлены следующие факты: 1) координаты земного полюса (\bar{x}_p, \bar{y}_p) сопровождаются сначала постоянным трендом (1990 – 2004 гг.), затем нарастающим трендом (2004 – 2008 гг.) и, наконец, падающим трендом (2008 – 2009 гг.). Просматриваются медленные колебания тренда с периодом 2 – 3 года. Кривые для $\overline{l.o.d}(t)$, $d|\overline{l.o.d}(t)|/dt$ имеют сходный характер. Уточненные коэффициенты взаимной корреляции найдены в [5]; 2) при малых магнитудах корреляция очень мала или вообще отсутствует. При магнитудах $M \geq 4,5$ корреляция становится статистически значимой ($R \approx 0,40$); 3) одной из первопричин усиления сейсмической активности ГССП, приводящей к мощным землетрясениям, является совместный вращательно-колебательный процесс Земли и нерегулярные воздействия геофизического характера; 4) факт сильной корреляции $N(t)$ и $d|\overline{l.o.d}(t)|/dt$, отмеченный в [1], имеет место и на интервале времени 1990 – 2009 гг. Источником отмеченного эффекта является рост напряжений в земной коре как при ускорениях, так и замедлениях осевого вращения Земли, что приводит с определенной цикличностью к глобальной «разрядке» напряжений земной поверхности; 5) одним из объяснений «всплеска» крупных землетрясений по всей Земле (2010 – 2011 гг.), базирующихся на небесно-механическом подходе, может быть следующее. Из анализа данных наблюдений МСВЗ в рамках построенных моделей колебательно-вращательного движения Земли на интервале времени начиная с конца января 2010 года выявляются значительные флуктуации колебательно-вращательного режима Земли (координат земного полюса (\bar{x}_p, \bar{y}_p) и длительности суток $l.o.d.(\tau)$, обусловленного лунно-солнечными гравитационно-приливными возмущениями. Отклонения реальной траектории полюса от теоретического прогноза могут быть вызваны долгопериодическими гравитационно-приливными возмущениями, а также, возможно, нерегулярными воздействиями геофизического происхождения. Одновременно с аномальным поведением колебательного движения полюса отмечались значимые флуктуации осевого вращения Земли, сопровождающиеся увеличением амплитуды колебаний поправки на возмущения зональных короткопериодических приливов $\Delta l.o.d.(\tau)$ на фоне долгопериодических изменений. Таким образом, естественным оказывается предположение о совместном смешанном влиянии

колебательных и вращательных движений Земли друг на друга под действием внешних возмущений. Складывается ситуация, когда в окрестности рассматриваемой соизмеримости вынужденные вращательно-колебательные движения системы носят характер резонансных, что может явиться спусковым механизмом усиления глобальной сейсмической активности и, как следствие, увеличения числа мощных землетрясений (Гаити, Китай, Чили, Афганистан, Австралия, Япония и т.д.).

Литература

1. Горькавый Н.Н., Трапезников Ю.А., Фридман А.М. О глобальной составляющей сейсмического процесса и ее связи с наблюдаемыми особенностями вращения Земли // ДАН.–1994.–Т. 338. № 4. – С. 525-527.
2. Данные MCB3. – URL:www.iers.org.
3. Данные ISC. – www.isc.ac.uk.
4. Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В., Сеницын И.Н. Развитие методов построения моделей движения полюса Земли // Астроном. журнал. – 2010. № 9. – С. 111–120.
5. Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Сеницын И.Н., Семендяев Н.Н. Вращательно-колебательное движение Земли и глобальная составляющая сейсмического процесса // ДАН. – 2010. – Т. 435. № 3. – С. 1-5.

ГИБРИДНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА ДЕЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Д.Е. СКАЧКОВ

Филиал ГОУ ВПО МЭИ (ТУ), г. Смоленск
e-mail: dmcorp@mail.ru

Рассматриваемая гибридная модель выполняет функцию уточнения связей между концептами когнитивной карты верхнего уровня за счёт сетей Петри с возможностью расчётов взаимовлияния и согласованности.

Тогда, для начального этапа моделирования необходимо построение проблемно-целевой модели системы в виде нечёткой когнитивной карты, охватывающей наиболее значимые элементы системы. Полученная нечёткая когнитивная карта системы является моделью верхнего уровня. Пусть $\hat{K}_i, \hat{K}_j, \hat{K}_y, \hat{K}_k$ – концепты нечёткой когнитивной карты, а $\omega_{i,y}, \omega_{j,y}, \omega_{y,k}$ – связи между концептами.

После построения модели системы необходимо выбрать концепты нечёткой когнитивной карты, на которые могут оказывать влияние факторы, не учтённые при построении модели верхнего уровня. Т.е. необходимо рассмотреть концепты, имеющие более сложную

структуру из-за не описанного в модели когнитивной карты внешнего влияния на данные концепты или не рассмотренных процессов внутри концепта. Такие процессы могли бы существенно нагрузить модель верхнего уровня, затруднив тем самым процесс моделирования. К тому же такие влияния могут носить разовый характер и использоваться при статическом анализе системы.

Пусть на значение концепта \hat{K}_y оказывают влияния другие факторы, не рассмотренные в ходе моделирования нечёткой когнитивной карты. Вводим в рассмотрение модель нижнего уровня, на основе нечёткой сети Петри типа Cf, где в качестве входных характеристик, а именно множества позиций, выступает множество концептов нечёткой когнитивной карты, связанных с концептом \hat{K}_y , а именно концепты \hat{K}_i, \hat{K}_j . В качестве маркеров этих позиций сети Петри берём значения связей между концептами $\omega_{i,y}, \omega_{j,y}$.

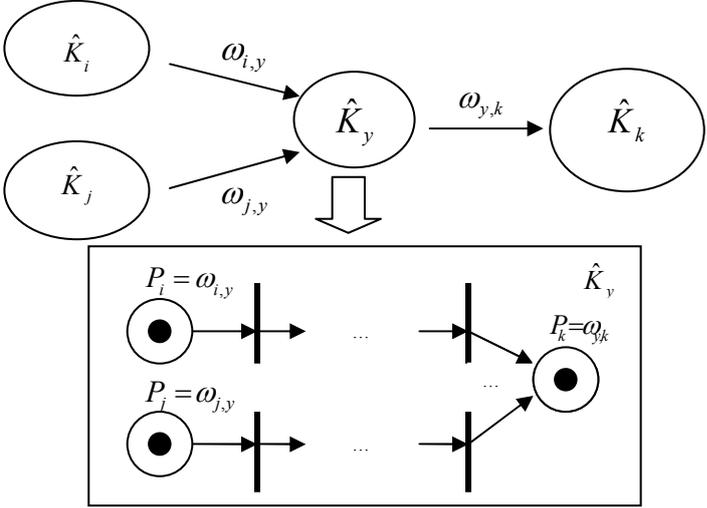


Рис. 1. Структура гибридной модели

Выходной позицией сети Петри будет концепт нечёткой когнитивной карты, связанный с концептом \hat{K}_y по выходным связям – концепт \hat{K}_k . Структура гибридной модели показана на рис. 1.

В результате работы сетей Петри – моделей нижнего уровня – получаем значения маркеров выходных позиций. Эти значения берутся в качестве новых значений выходных связей для уточнённых концептов, полученных в результате моделирования нижнего уровня.

После возврата на верхний уровень моделирования производится анализ нечёткой когнитивной карты с уточнёнными значениями связей между концептами. Получаем матрицу взаимовлияния концептов нечёткой когнитивной карты, которая и позволяет решать задачи проблемно-целевого анализа сложных систем и процессов. На основе этой матрицы могут быть рассчитаны системные показатели нечеткой когнитивной карты.

Литература

1. Компьютерная поддержка принятия сложных организационно-технических систем / В.В. Борисов [и др.] – М.: Горячая линия – ТЕЛЕКОМ, 2002.
2. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

МУЛЬТИАГЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

В.В. СЫСКОВ

Военная академия войсковой ПВО ВС РФ имени Маршала
Советского Союза А. М. Василевского, г. Смоленск
e-mail: smolenskcitey@mail.ru

Существенное влияние на результаты функционирования сложной организационно-технической системы (далее – сложной системы), решающей задачи управления, оказывает эффективное использование ее потенциальных возможностей в процессе решения задач управления. Для оценки ее эффективности при различных способах управления и вариантах построения структуры системы, а также выработки наилучших решений по управлению системой наиболее целесообразным способом моделирования является математическое моделирование с помощью современных компьютерных технологий, в частности – агентное моделирование.

Используемые для реализации этого подхода теории мультиагентных систем и интеллектуальных агентов, являющиеся одними из направлений теории искусственного интеллекта (ИИ), позволяют исследовать поведение децентрализованных объектов и то, как такое поведение определяет функционирование исследуемой системы в целом. В таких системах (моделях) с помощью агентов выполняется поиск оптимального решения задачи, на которое необходимо потратить наименьшее количество одних ресурсов в условиях ограничения других [1, 2].

Формализованное описание мультиагентной модели осуществляется с помощью задания множеств агентов системы, моделирующих элементы, участвующие в приеме информации (A_{II}), управлении системой ($A_{У}$) и выполнении задач ($A_{П}$), множеств отношений (R) и коммуникативных актов взаимодействия (P), а также целей противоборствующих агентов (Z и C), показателей и критериев оценки их эффективности [3]. Это позволяет рассматривать не относящиеся к исследуемой системе объекты внешней среды в качестве

интеллектуальных агентов (E_C), цели которых могут не совпадать с целями агентов системы или быть противоположными им.

Формализованное описание модели каждого типа агента заключается в задании его компонентов и включает задание множеств данных, действий и поведений, определяющих его функционирование, например для агента A_U – при решении задач управления сложной системой.

Задание детерминированных и/или составных действий и поведений моделей агентов осуществляется на основе алгебры поведений, для которой определены собственные элементы и константы, операции последовательной и параллельной композиций, недетерминированного выбора, префиксинга, а также законы [4].

Для решения сложно-формализуемых задач агентами различных типов реализуются различные способы нечеткого логического вывода характеристик моделей агентов, например при моделировании выбора подчиненного для постановки ему задачи. Таким образом для агентов A_P , A_U , A_H и E_C реализуются алгоритмы нечеткого вывода по схемам Мамдани, Сугэно и нечеткого классификатора, сформированные на основе правил, рекомендуемых теорией управления, и результатов экспертного опроса специалистов исследуемой предметной области.

Помимо этого, для описания поведения агентов A_U или A_H , участвующих в выработке решений, предлагается модель и реализуется способ нечеткого управления вида «ситуация – стратегия управления – действие» на основе нечетких ситуационных сетей (НСС).

В каждой нечеткой ситуации агент системы осуществляет различное, наиболее подходящее для данной ситуации, поведение, реализуемое с помощью правил нечеткого вывода. Тем самым агенты системы решают вопрос «что сделать для достижения цели?» в соответствии с применяемой концепцией «оценщика» [5], где нечеткая ситуация \tilde{B} агента системы является нечетким множеством второго уровня [6] и рассматривается в зависимости от целей Z и определяется через признаки ситуации – лингвистические показатели текущих производительности ($Q_{np.lin}$), потерь системы ($Q_{n.cuc.lin}$) и расхода ресурсов ($Q_{p.lin}$).

Построение НСС, представляющей нечеткий ориентированный граф, вершины которого соответствуют ситуациям, а дуги взвешены управляющими решениями и степенями их предпочтений, для одной из целей осуществляется в соответствии с рисунком.

В ходе построения НСС осуществляется определение множества типовых ситуаций, выполняется построение графа $\tilde{G}_{общн.тут.сум}^1$ их общности и оптимизация сети, определяются все возможные переходы \tilde{V}^1 между ситуациями и строится граф $\tilde{G}_{сум.сетн}^1$ ситуационной сети.

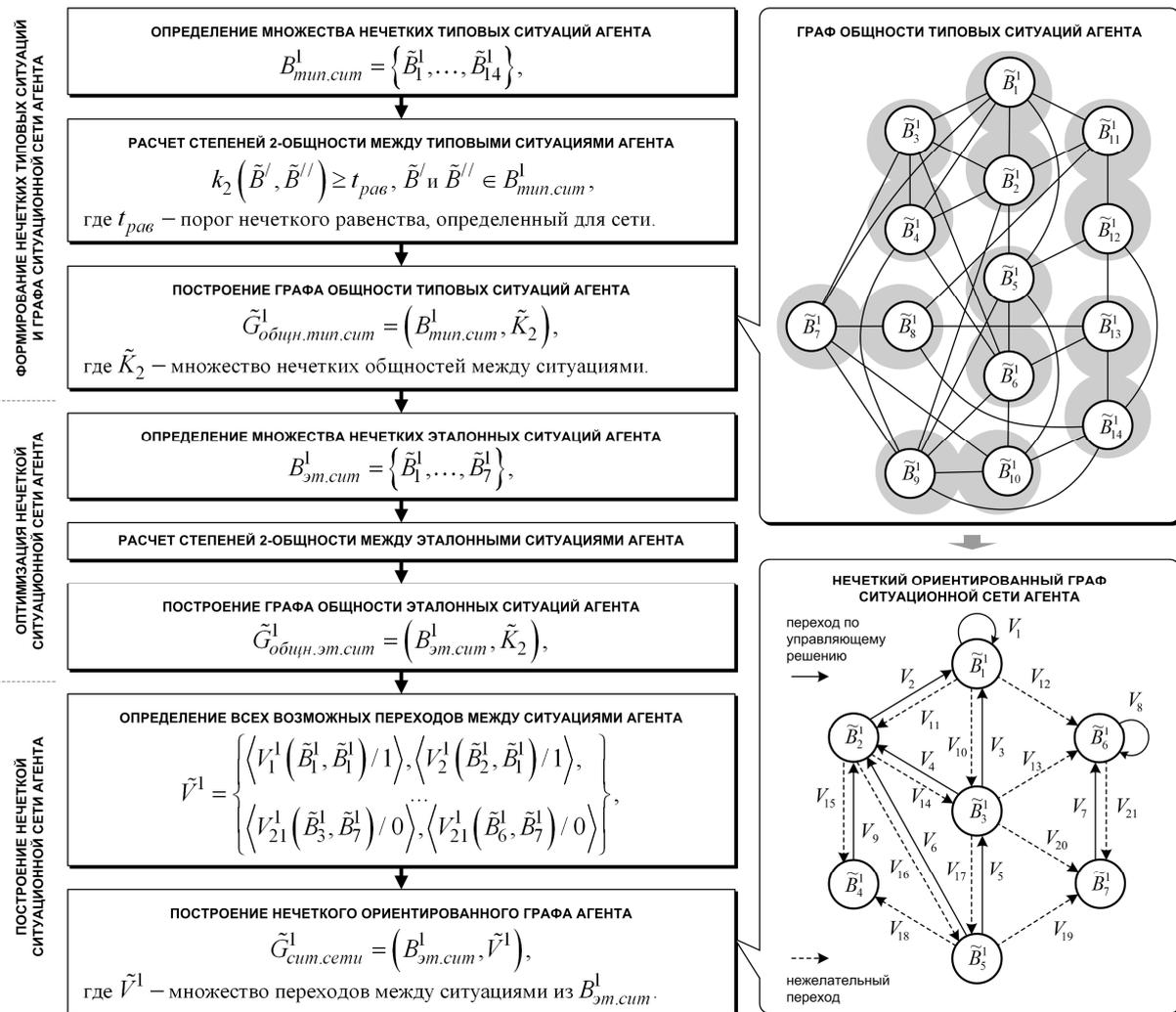


Рис. 1. Построение нечеткой ситуационной сети агента управления сложной системы

Функционирование агента системы при этом осуществляется с помощью реализованного способа нечеткого управления, который заключается в определении текущей ситуации и степени ν ее нечеткого включения в эталонные ситуации из множества $B_{эм.cum}^1$, а затем – в выработке управляющего решения, соответствующего эталонной ситуации, с максимальной степенью ν включения [6].

Определение ситуации \tilde{B}^i проводится по действительным значениям признаков Q_{np} , $Q_{n.cuc}$ и Q_p ситуации. Если максимальная степень включения соответствует более чем одной эталонной ситуации, то выбирается та, которая стоит дальше в списке, выстроенном эвристически от «худшей» до целевой ситуации НСС.

Описание поведения, реализующего управление непосредственно самим агентом A_y и его подчиненными, осуществляется через задание поведений $u_{упр.ag}^z$, реализующих модели нечеткого управления для

каждой из целей Z , составляющих их поведений, соответствующих включению в каждую нечеткую ситуацию сети $\tilde{G}_{сум.сети}^1$, и набора действий $S_{упр.аг}$, необходимых для перехода агента A_y в обозначенную целевую ситуацию. Например, для цели Z_l – в нечеткую ситуацию \tilde{B}_l^1 .

Набор $S_{упр.аг}$ действий для реализации ситуационной сети определяется исходя из рассматриваемых признаков ситуаций и других четких и нечетких характеристик агента A_y , которые логически связаны с ними. Поэтому действия из данного множества являются составной частью управляющих решений \tilde{V}^1 сети.

Применение НСС, реализующих нечеткую модель управления агентом сложной системы, для построения моделей агентов сложной системы позволяет им в зависимости от целей классифицировать входную ситуацию по сети, корректировать характеристики агента системы и реализовывать поведение, включающее набор поведений и действий, необходимых для перехода в целевую ситуацию, т.е. для достижения заданной цели.

Таким образом, модель и способ управления агентом на основе НСС позволяют обеспечить представление процессов управления и других процессов в мультиагентной модели сложной системы с требуемой степенью детализации, а применение нечеткого вывода – учитывать ряд дополнительных (качественных) характеристик и в условиях неполной и неточной исходной информации оперативно формировать рациональные решения. В целом применение агентного подхода обеспечивает относительную простоту моделирования сложной системы за счет возможности ее реализации на основе современных технологий, основанных на поддержке объектно-ориентированного программирования, CASE-технологий и UML, использования различных языков программирования в одной среде, языков логического программирования и программирования ИИ, XML для хранения данных, быстрой настройки и поэтапного развития модели, в частности добавления новых сущностей без изменения существующих.

Литература

1. Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: философия, психология, информатика. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 352 с.

2. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход: пер. с англ.. 2-е изд. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1408 с.

3. Сысков В.В., Борисов В.В. Мультиагентная модель сложной организационно-технической системы. Описание электронного ресурса, № 15819. – М.: ОФЭРНиО «ЦИТиС», 2010. – 11 с.

4. Борисов Е.С. Агенториентированная технология построения систем искусственного интеллекта // Дом-страница Евгения Сергеевича Борисова: Электрон. дан. 2005. – URL:<http://mechanoid.narod.ru/misc/agents>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус.

5. От моделей поведения к искусственному интеллекту / под ред. В.Г. Редько. – М.: КомКнига, 2006. – 456 с.

6. Мелихов А.Н., Берштейн А.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. – М.: Наука. Физматлит, 1990. – 272 с.

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПРЕЦИЗИОННЫХ АНАЛОГО-ЦИФРОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Ю.В. ТРОИЦКИЙ, А.М. БАРАНОВ

Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)», г. Смоленск

e-mail: troickii_yurii@mail.ru

Одним из основных критериев для выбора АЦП следует признать требуемую разрядность АЦП, определяющую заданную погрешность квантования.

На практике разрешение АЦП ограничено отношением сигнал/шум (SNR) входного сигнала. Реально достижимое разрешение описывается эффективной разрядностью (N_E), которая может быть меньше, чем заявленная в паспорте разрядность АЦП.

При заданном значении SNR , учитывая, что каждый двоичный разряд увеличивает коэффициент преобразования в 2 раза (на 6 дБ), эффективная разрядность может быть определена из выражения

$$N_E = SNR/6. \quad (1)$$

Зная эффективную разрядность АЦП, можно рассчитать эффективное значение его собственного шума

$$U_{NoiseADC} = \frac{U_{ref}}{(2\sqrt{2})2^{N_E}}, \quad (2)$$

где U_{ref} – опорное напряжение АЦП.

Для снижения собственного шума квантования часто используется эффект *передискретизации* входного сигнала, при котором входной сигнал квантуется с частотой Kf_e (K – коэффициент передискретизации, f_e – номинальная частота квантования, рассчитанная в соответствии с этим полученные данные фильтруются цифровым фильтром, который подавляет шумы квантования в полосе частот от $f_e/2$ до $(Kf_e/2)$. После

фильтра производится *децимация* цифровых данных, заключающаяся в том, что выходной цифровой поток следует уже с темпом f_e . Передискретизация приводит к улучшению отношения сигнал/шум в β раз

$$\beta = 10 \text{Log} (K),$$

или, учитывая выражение (2),

$$K \approx 4^m, \quad (3)$$

где m – количество дополнительных разрядов, обеспечивающих повышение разрешающей способности АЦП за счет передискретизации, т.е. если необходимо увеличить эффективную разрядность АЦП на 1 разряд, необходимо увеличить частоту дискретизации в 4 раза ($K = 4$).

Такой способ уменьшения шумов квантования на аппаратном уровне используется в аналого-цифровых преобразователях с сигма-дельта модуляцией.

Кроме собственных шумов на эффективную разрядность АЦП оказывают влияние шумы измерительного тракта, включающие шумы первичного датчика и шумы преобразователя параметров датчика, например термосопротивления, в напряжение, а также шумы источника опорного напряжения.

Для определения N_E с учетом влияния шумов первичного преобразователя сигналов $U_{NoiseConv}$ и шумов источника опорного напряжения $U_{NoiseRef}$ необходимо первоначально вычислить суммарное действующее значение шума на входе АЦП U_{NoiseU}

$$U_{NoiseU} = \sqrt{U_{NoiseADC}^2 + U_{NoiseConv}^2 + \left(\frac{U_{NoiseRef}}{2^{Ne}}\right)^2}, \quad (4)$$

затем при известном значении SNR для данного АЦП вычисляем действительное значение эффективной разрядности N_{EOP}

$$N_{EOP} = U_{NoiseU} / SNR. \quad (5)$$

На выбор АЦП влияют также необходимость переключения диапазонов измерения при обработке сигналов от различных первичных датчиков. При неполном использовании диапазона преобразования АЦП, которое, как правило, определяется значением его опорного напряжения U_{Ref} , эффективное значение разрядности снижается пропорционально коэффициенту K_D

$$K_D = U_{max} / U_{Ref}, \quad (6)$$

где U_{max} – максимальное значение напряжения, снимаемого с первичного датчика.

Переключение диапазонов может быть реализовано с помощью программно перестраиваемого встроенного или внешнего усилителя.

Выпускаемые в настоящее время прецизионные 24-разрядные аналого-цифровые преобразователи с сигма-дельта модуляцией со встроенным цифровым фильтром обеспечивают высокую эффективную разрядность в широком диапазоне измеряемых сигналов. Ограничением их применения является малый частотный спектр преобразуемых сигналов, лежащий в пределах от нескольких герц до нескольких килогерц.

Литература

1. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т. 1. – М.: Мир, 1983. – 312 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПОДХОДА В АРХИТЕКТУРЕ МНОГОЯДЕРНОГО МИКРОПРОЦЕССОРА ДЛЯ УСКОРЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОНВЕЙЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А.Е. ШИРАЙ

ООО «СайнГрейн», г. Москва

e-mail: anna@sciengrain.ru, alexander@sciengrain.ru, tatiana@sciengrain.ru

Современные универсальные высокопроизводительные микропроцессоры обеспечивают возможность параллельного выполнения критичных ко времени задач. При этом эффективность использования аппаратных ресурсов зависит от многих факторов.

В частности, к таким факторам относятся:

- параллелизм алгоритма;
- организация обрабатываемых данных;
- количество операций, выполняемых над каждым данным.

Традиционная организация вычислений, доставшаяся в наследство от последовательных алгоритмов, предполагает многоступенчатость вычислений, когда на каждом этапе выполняется одно конкретное действие над множеством данных (программный цикл). Распараллеливание таких вычислений сохраняет последовательность этапов обработки. Таким образом организуется параллельный конвейер обработки данных.

Современные микропроцессорные архитектуры рассчитаны на высокопроизводительную обработку данных, имеющих линейную организацию, и значительное количество операций над ними. Это обусловлено пропускной способностью оперативной памяти, организацией кеш-памяти и возможностями предварительной загрузки данных из памяти на фоне вычислений.

С увеличением числа ядер в микропроцессоре и усложнением тракта доступа к памяти увеличивается относительное время доступа, выраженное в числе тактов работы микропроцессора. Увеличение относительного времени доступа приводит к тому, что параллельный поток вычислений должен периодически останавливаться в ожидании получения новой порции данных. Чем меньше число операций, выполняемых в процессоре над конкретным данным, тем ниже эффективная загрузка процессора. В этом случае производительность системы обуславливается характеристиками тракта доступа к памяти.

При последовательном выполнении этапов задачи, в каждом из которых над элементами множеств данных выполняется мало операций, а результат сохраняется в ОП, возникают значительные потери эффективности. Графические карточки, в которых используется такой подход, используют специальную организацию памяти, которая имеет пропускную способность, в разы превышающую пропускную способность тракта памяти универсальных микропроцессоров.

Одним из решений проблемы загрузки является программная реализация параллельной работы нескольких ступеней конвейера или всего конвейера в целом. В этом случае промежуточные результаты передаются между ступенями конвейера через кеш-память, что эквивалентно увеличению числа операций, выполняемых в процессоре над каждым данным, и только окончательные результаты вычислений записываются в память.

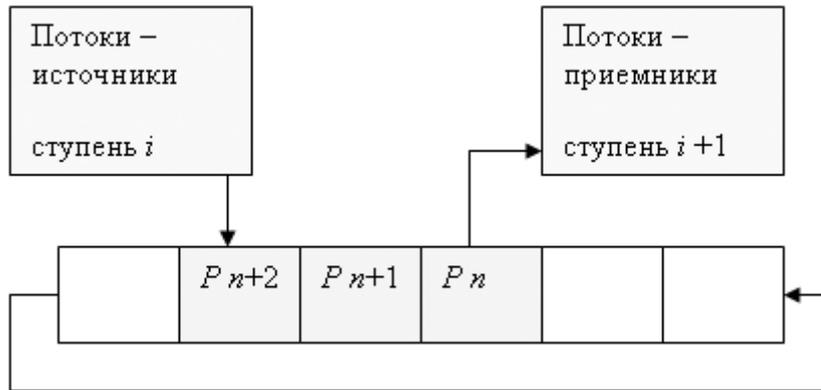
Если алгоритм вычислений слабо зависит от данных и данные имеют линейную организацию, такой подход обеспечивает достижение высокой загрузки ядер процессора и повышение эффективности вычислений. Если эти условия не выполняются, то возрастают накладные расходы на организацию параллельных вычислений, затраты на синхронизацию параллельных ветвей программы при доступе к общим данным, что существенно сказывается на времени решения задач.

Приложения, выполняемые на современных серверах, часто работают с базами данных. Наиболее критичными ко времени исполнения бывают приложения, использующие информацию из БД в системах реального времени. При работе с БД большое значение имеет работа не только с массивами, но и с деревьями, списками, разреженными данными, поэтому задача поддержки параллельных конвейерных вычислений в общем случае является актуальной.

Одним из источников накладных расходов на организацию параллельных конвейеров является традиционная организация тракта доступа к памяти и слабая типизация сегментов. Несовершенство интерфейса между процессором и контроллером памяти приводит к

увеличению затрат на организацию параллельного доступа, усложняет реализацию эффективной стратегии использования кеш-памяти.

Рассмотрим взаимодействие двух ступеней параллельного конвейера через очередь, реализованную как кольцевой FIFO буфер.



Каждая ступень конвейера образована множеством параллельных потоков приложения. По конвейеру циркулируют пакеты данных, дескрипторы которых размещаются в кольцевом буфере.

Традиционный интерфейс между памятью и процессором предполагает для записи дескриптора выполнение следующих действий.

1. Захват очереди (обращение к объекту синхронизации, ожидание освобождения).
2. Чтение указателей записи и чтения, проверка наличия свободного места и проверка на границу буфера.
3. Если очередь полна, то освобождение от «захвата» и уход в ожидание на некоторое время и Переход на 1, иначе 4.
4. Запись дескриптора пакета в очередь.
5. Модификация указателя записи.
6. Освобождение очереди.

Выполнение такой последовательности часто приводит к приостановкам потоков, которые могли сопровождаться вытеснением их данных из кеш-памяти и т.п. эффектам, что существенно увеличивает накладные расходы на параллельную обработку.

Есть проблемы и при реализации FIFO в кеш-памяти, так как механизм LRU, который зачастую используют в кеш-памяти для вытеснения данных, оставляет в кеш-памяти «свежие» данные, но для FIFO характерно то, что «свежие» данные будут востребованы позже «старых» данных, которые могут быть вытеснены из кеш-памяти, что приведет к замедлению доступа.

Объектно-ориентированный подход

В существующих микропроцессорах понятие «тип сегмента памяти», либо отсутствует (страничная организация памяти SUN NIAGARA), либо характеризует такие свойства сегмента, как размер

страницы, разрешение или запрет модификации, свойства защиты и т.п. (X86).

Объектно-ориентированный подход предполагает, что каждый сегмент памяти имеет тип, которому соответствует структура вектора состояния и интерфейс.

Так, для доступа к FIFO определены запросы:

- добавить в очередь,
- выдать очередной элемент.

Получается, что поток-источник и поток-приемник больше не нуждаются в захвате очереди, они не читают указатели на дескрипторы, а просто посылают данные в очередь и продолжают вычисления. При чтении из очереди в некоторый момент времени в локальную кеш-память ядра поступят необходимые данные, как это и происходит при предварительной выборке.

Разбор коллизий производится асинхронно в рамках самого «объекта», соответствующего сегменту. Данная модель не противоречит существующей, а дополняет ее, так как интерфейс «обычного» сегмента памяти является частным случаем.

Предлагаемый подход позволяет существенным образом сократить системные накладные расходы, так как есть возможность организовать оптимальный системный интерфейс, включая интерфейсы виртуальных машин Java, Dot-net.

Реализация ООП в памяти предполагает наличие исполнительного многопоточного устройства, имеющего непосредственный доступ ко всем ресурсам кеш-памяти, включая TLB и контроллер памяти. В настоящее время тема внедрения вычислителей в память достаточно актуальна и эта технология вполне реализуема.

Интерфейс объекта предполагает, что по номеру сегмента считывается его дескриптор, в котором указан тип (как это делается и в X86), а также по номеру сегмента определяется локализация вектора состояния. Тип сегмента однозначно определяет его интерфейс.

Дальнейшая информация в запросе определяет номер метода из интерфейса сегмента и его параметры.

Предполагается, что набор типов сегментов делится на 3 группы:

- сегменты уровня BIOS,
- сегменты уровня ОС,
- сегменты уровня приложения.

Для этого необходимо создать соответствующие библиотеки для компиляторов и реализовать системную поддержку.

Литература

1. Upchurch E., Sterling T., Brockman J. Analysis and Modeling of Advanced PIM Architecture Design // Tradeo@s. – 2004. – October 6, 2004.

2. Ширай А.Е. Принципы организации доступа к данным в вычислительной системе с автоматическим распределением ресурсов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2006. – Вып. 7. – С. 96–97.

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ТЕМАТИЧЕСКОГО РАНЖИРОВАНИЯ ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСОВ НА ОСНОВЕ PAGERANK

М.А. ШИРАЙ

ООО «СайнГрейн», 117638 г. Москва, ул. Сивашская, 6, корп.1, кв. 148
e-mail: michael.sheerai@gmail.com

На данный момент по качеству поиска информационно-поисковые системы (ИПС) сети Интернет не имеют аналогов. Основным критерием качества работы поисковой системы является релевантность поиска (степень соответствия запроса и найденного, то есть уместность результата) [1]. Традиционными подходами к решению данной задачи являются: классификационный поиск и поиск по ключевым словам. К классификационному поиску относится использование различных тематических классификаторов. Чаще всего тематика при поиске определяется по внутренним факторам документов. Для повышения релевантности поиска современные ИПС используют различные методы ранжирования выдачи.

Самым распространённым из них является ссылочное ранжирование, при котором ранг сайта зависит от параметров входящих и исходящих ссылок. Ссылочное ранжирование позволяет значительно увеличить качество результатов поиска. Однако оно имеет ряд недостатков, одним из которых является огромная трудоемкость.

Интернет-документы и их ссылки удобно представить в виде графа связанности Интернет-ресурсов (далее web-граф), в которой документы – вершины, ссылки – дуги. Граф хранится в виде базы данных с информацией обо всех значимых ссылках, их источниках и приемниках в сети Интернет, оптимизированной для поиска всех ссылок для приемника. Для составления графа необходимо посетить все документы в сети Интернет и сохранить информацию о ссылках. Составление и хранение такого графа рассмотрено в [2]. Под моделью ссылочного ранжирования будем понимать функцию, согласно которой вычисляется ранг вершины сети. В этом случае задачей ссылочного ранжирования является решение системы уравнений, состоящей из уравнений вычисления ранга для всех вершин сети. Ввиду высокой трудоемкости

решения подобной задачи (порядка $O(n^3)$ [3]), на практике используют только линейные функции.

Одной из самых знаменитых стала модель вычисления ранга алгоритма PageRank, предложенного С. Брином и Л. Пейджем в 1997 г [4]. В этой модели ранг вершины равен вероятности нахождения этой вершины пользователем, перемещающимся по сети случайным образом. Эта вероятность складывается из равномерно распределенной вероятности того, что пользователь зашел на сайт (например, написав его название в адресной строке), и суммы вероятностей перехода пользователя со ссылающихся документов, умноженной на некоторый коэффициент затухания.

Пусть связный орграф $G(V, E)$ – web-граф на множестве вершин V и дуг E .

$In(v), v \in V$ – множество ссылающихся на v вершин.

$deg_o(v), v \in V$ – число исходящих из вершины v дуг. В этом случае PageRank в вершине v вычисляется по формуле:

$$Pr(v) = d + (1-d) \sum_{w \rightarrow v} \frac{Pr(w)}{deg_o(w)}, \quad (1)$$

где d – так называемый фактор затухания (dumping factor), отражающий вероятность перехода пользователя по ссылке на следующий документ. В этом случае $(1-d)$ – вероятность случайного просмотра документа пользователем. PageRank уже более 10 лет используется в ИПС Google.

Немного перефразируя идею PageRank, можно сказать, что ссылочное ранжирование можно организовать с помощью оценки интернет-документа, основанной на количестве и «качестве» ведущих на него ссылок. «Качество» ссылки определяется рангом документа источника и количеством исходящих ссылок с источника. Рассмотрим модель web-графа сети Интернет.

Пусть S – матрица смежности графа G , состоящей из элементов

$$S_{ij} = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin E \\ 1, & (i, j) \in E \end{cases}$$

Один из вариантов построения и хранения S рассмотрен в [2]. Рассмотрим функцию PageRank (1) в виде итеративной функции:

$$Pr_{z+1}(v) = d + (1-d) \sum_{w \rightarrow v} \frac{Pr_z(w)}{deg_o(w)}, \quad (2)$$

где z – номер шага итерации.

Исходные данные для построения ранга не будут меняться во время работы алгоритма, поэтому, учитывая $\frac{1}{\deg_o(w)}$ за знаком суммы, можно получить аналогичный ранг, уменьшив необходимые для расчета вычисления.

Для этого в (2) проведем замену переменных $X_z(v) = \frac{\text{Pr}_z(v)}{\deg_o(v)}$.

$$X_{z+1}(v) = \frac{d + (1-d) \sum_{w \rightarrow v} X_z(w)}{\deg_o(v)}. \quad (3)$$

Преобразуем (3) с использованием S .

$$X_{z+1}(v) = \frac{d + (1-d) \sum_{w \neq v}^N X_z(w) \cdot S(v, w)}{\deg_o(v)}. \quad (4)$$

Для определения ранга каждого Интернет-ресурса необходимо решить систему уравнений (4). Ее можно использовать в том случае, когда $S \equiv \text{const}$. Разница в количестве вычислений между (1) и (4) составит $\varepsilon = M \cdot V \cdot c$ операций деления, где M – среднее количество ссылок на один домен, c – количество итераций, V – количество вершин.

Ссылка для пользователя сети Интернет представляется в виде выделенного фрагмента текста. Этот фрагмент текста («анкор» ссылки) имеет влияние на вероятность перехода пользователя: вероятность повышается в том случае, если текст «анкора» относится к той же тематике, в которой пользователь заинтересован. Таким образом, исходя из тематик «анкоров» ссылок можно построить тематический ранг Интернет-ресурсов – функцию степени соответствия каждого ресурса каждой тематике. При построении тематического ранга значением функции $X_{z+1}(v)$ должен быть вектор тематических рангов.

Пусть T – некое множество тематик, $P(v, w, t_i)$ – функция определения степени соответствия ссылки $S(v, w)$ тематике $t_i \in T$. Тогда (4) можно представить в виде:

$$\forall t_i \in T$$

$$X_{z+1}(v, t_i) = d + (1-d) \sum_{w \neq v}^N X_z(w, t_i) \cdot S(v, w) \cdot P(v, w, t_i) \frac{|T|}{\deg_o(v)}. \quad (5)$$

Основная сложность алгоритмов, работающих по (4) и (5), заключается в обращении к $S(v, w)$, так как, ввиду больших объемов

данных, $S(v, w)$ хранится только во внешней памяти. Количество обращений к $S(v, w)$ в (5) не возрастет относительно (4), поэтому время расчета не увеличится значительно. Классический подход к определению тематики документа оперирует только внутренними факторами, чаще всего данными, полученными анализом текста документа, что не всегда обеспечивает достаточную точность ввиду неоднозначности языков. Реализация функции тематического ранжирования позволит определить степень соответствия документа или ресурса той или иной тематике, исходя из информации о связанных документах. Это позволит определять тематику документа не только по внутренним факторам, но и по внешним, что позволит увеличить точность категоризации документов и, как следствие, качество поиска информации.

Литература

1. Aboba B. The Online User's Encyclopedia: Bulletin Boards and Beyond. – Massachusetts: Addison-Wesley, November 1993.
2. Ширай М.А. Григорьев О.Г. Исследование ранжирования интернет-ресурсов и методов построения обратного ссылочного индекса // Обработка информационных и графических ресурсов: сборник трудов ИСА РАН / под ред. В.Л. Арлазарова. 2010 (в печати).
3. Вшивков В.А., Засыпкина О.А. Итерационный метод решения СЛАУ первого порядка сходимости с регулируемой матрицей перехода // Сибирский журнал индустр. матем.. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 40–49.
4. Brin S., Page L. The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine // Seventh International World-Wide Web Conference (WWW 1998). 1998 April 14–18.

СЕКЦИЯ 3

Математика и её приложения

О НЕТЕРОВОСТИ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СЛУЧАЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Н.Г. АНИЩЕНКОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Пусть $L = \{t: \text{Im}t = 0\}$, $T^+ = \{z: \text{Im}z > 0\}$ и $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$. В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1].

Рассмотрим следующие краевые задачи. Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F^\pm(z)$, принадлежащие классу $A_2(T^\pm) \cap I^{(2)}(L)$ (см. [2]), исчезающие на бесконечности, ограниченные вблизи узлов контура L и удовлетворяющие во всех обыкновенных точках этого контура (см. [3]) следующим краевым условиям:

Задача GR_{12}

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} = G_{11}(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + G_{12}(t) \overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial x}} + g_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} = G_{21}(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} - G_{22}(t) \overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial y}} + ig_2(t), \quad (2)$$

Задача GR_{22}

$$F^+(t) = G_{11}(t)F^-(t) + G_{12}(t)\overline{F^-(t)} + g_1(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} = -G_{21}(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + G_{22}(t) \overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-}} + ig_2(t), \quad (4)$$

где $G_{kj}(t), g_k(t)$ ($k=1, 2; j=1, 2$) – заданные на L функции, $G_{kj}(t) \in H_0^{(1)}$, $g_k(t) \in H^{(1)}(L)$, причем $G_{k1}(t) \neq 0$.

Отметим, что задачи GR_{12} и GR_{22} , поставленные в монографии К.М. Расулова [1], в непрерывной постановке были исследованы в работах автора в случае произвольных односвязных областей (см., например, [4]).

В работах [5] и [6] получены конструктивные методы решения данных задач в параболическом случае, т.е. когда в обыкновенных точках контура L выполняются условия:

$$|G_{k1}(t)| \equiv |G_{k2}(t)|, \quad k=1, 2. \quad (5)$$

В настоящей работе исследуются картины разрешимости задач GR_{12} и GR_{22} при выполнении условий (5).

Получен следующий основной результат.

Теорема. Пусть $L = \{t: \text{Im}t = 0\}$ и во всех обыкновенных точках контура L выполняются условия $|G_{k1}(t)| \equiv |G_{k2}(t)|$, $k = 1, 2$. Тогда число p условий разрешимости задач GR_{12} и GR_{22} и число l линейно независимых решений соответствующих однородных задач конечны, то есть задачи GR_{12} и GR_{22} нетеровы.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Болотин И.Б. Кусочно-непрерывные краевые задачи типа Римана в классах бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Смоленск, 2004. – 106 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
4. Анищенко Н.Г. Трехэлементные краевые задачи типа Римана для бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Смоленск, 2002. – 120 с.
5. Анищенко Н.Г. Об одной трехэлементной краевой задаче типа Римана для бианалитических функций в случае полуплоскости // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ. – Вып. 10. – С. 157–159.
6. Анищенко Н.Г. Об одной трехэлементной краевой задаче типа Римана в кусочно-непрерывной постановке в случае полуплоскости // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ. – Вып. 11. – С. 168–170.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

И.Б. БОЛОТИН

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: IBBolotin@smolgu.ru

1. Постановка задачи. Исключим из полной комплексной плоскости отрезок действительной оси $[a; b]$, и пусть D есть оставшаяся часть плоскости. Под границей L области D будем понимать выброшенный отрезок (разрез). Таким образом, $D = \bar{C} \setminus L$.

В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1].

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все полианалитические функции $F(z)$, принадлежащие классу $A_n(D) \cap I^{(2n-2)}(L)$, исчезающие на бесконечности, ограниченные вблизи концов контура L и удовлетворяющие во всех внутренних точках L следующим краевым условиям:*

$$\frac{\partial^{n-1} F^+(t)}{\partial x^{n-m} \partial y^{m-1}} = G_m(t) \frac{\partial^{n-1} F^-(t)}{\partial x^{n-m} \partial y^{m-1}} + i^{m-1} g_m(t), \quad (1)$$

где $G_m(t)$, $g_m(t)$ ($m=1,2,\dots,n$) – заданные на L функции и $G_m(t) \neq 0$ на L . Здесь в равенствах (1) множитель i^{m-1} введен для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу будем называть *первой основной задачей типа Римана для полианалитических функций на отрезке* и, ради краткости, обозначать $R_{1,n}$.

Отметим, что задача $R_{1,n}$, поставленная в монографии Ф.Д. Гахова [2], в непрерывной постановке была исследована К.М. Расуловым [1].

2. О решении задачи $R_{1,n}$. Известно (см. [1; [2]], что всякую исчезающую на бесконечности полианалитическую функцию $F(z)$ с линией скачков L можно представить в виде

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \cdot \varphi_k(z), \quad (2)$$

где $\varphi_k(z)$ ($k=0,1,\dots,n-1$) – аналитические в области D функции (аналитические компоненты полианалитической функции), причем

$$\prod \{\varphi_k, \infty\} \geq 1+k, \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Будем искать решение задачи $R_{1,n}$ в виде

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{z} - z)^k f_k(z). \quad (3)$$

Тогда функции $f_k(z)$ будут связаны с аналитическими компонентами искомой полианалитической функции $F(z)$ формулами

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^{k-j} \cdot C_k^{k-j} \cdot z^{k-j} \cdot f_k(z), \quad j=0,1,\dots,n-1. \quad (4)$$

Таким образом, с учетом представления (3), равенства $\bar{t} = t$ и в силу формул

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

краевые условия (1) можно переписать в следующем виде

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot a_{m-1,k} \cdot \frac{d^{n-1-k} f_k^+(t)}{dt^{n-1-k}} = G_m(t) \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot a_{m-1,k} \cdot \frac{d^{n-1-k} f_k^+(t)}{dt^{n-1-k}} + g_m(t), \quad (5)$$

где коэффициенты $a_{m-1,k}$ определяются рекуррентным соотношением $a_{m-1,k} = -2a_{l-1,j-1} + a_{l-1,j}$, $m = 1, 2, \dots, n$, $l = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $a_{0,j} = 0$ при $j = 1, \dots, n-1$, $a_{l,0} = 1$ при $l = 1, \dots, n-1$.

Равенства (5) представляют собой краевые условия скалярных задач Римана для аналитических функций на отрезке.

Учитывая тот факт, что искомая полианалитическая функция $F(z)$ исчезает на бесконечности и ограничена в окрестности концов контура L , получим, что справедлив следующий основной результат.

Теорема 1. *Решение задачи $R_{1,n}$ сводится к последовательному решению n скалярных краевых задач Римана вида (5) (при фиксированном m) в классах кусочно аналитических функций, имеющих ноль порядка n на бесконечности и бесконечность интегрируемого порядка на концах контура L .*

Пусть $\kappa_m = \text{Ind}G_m(t)$ – частные индексы, а κ – индекс задачи $R_{1,n}$. На основании картин разрешимости скалярных задач Римана (5) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При любых значениях индекса κ как число q условий разрешимости неоднородной задачи $R_{1,n}$, так и число l линейно независимых решений соответствующей однородной задачи являются конечными, т.е. задача $R_{1,n}$ является нетеровой.*

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

ОБОБЩЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Я.А. Васильев

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи. Далее в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1].

Пусть конечная односвязная область T^+ на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ ограничена простым замкнутым контуром

Ляпунова L , заданным уравнением $t = x(s) + iy(s)$ (s – естественный параметр). Область, дополняющую $T^+ \cup L$ до полной плоскости, обозначим через T^- .

Рассматривается следующая краевая задача. Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям

$$F^+(t) = G_0(t)F^-(t) + \int_L A_0(t, \tau)F^+(\tau)d\tau + \int_L B_0(t, \tau)F^-(\tau)d\tau + g_0(t), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} = -G_1(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + \int_L A_1(t, \tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial n_+}d\tau + \int_L B_1(t, \tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial n_-}d\tau + it'g_1(t), \quad (1.2)$$

где i – мнимая единица, $G_k(t)$, $g_k(t)$ ($k = 0, 1$) – заданные на L функции, причем $G_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$, $G_k(t) \neq 0$ на L ; n_+ , (n_-) – нормаль к L , направленная в сторону области T^+ (T^-); $A_k(t, \tau)$, $B_k(t, \tau)$ – заданные фредгольмовы ядра класса $H_*^{(2-k)}(L \times L)$.

Сформулированную выше задачу будем называть задачей $GR_{2,2}$, а соответствующую однородную задачу ($g_0 \equiv g_1 \equiv 0$) – задачей $GR_{2,2}^0$.

Сразу отметим, что в частном случае, когда выполняются условия

$$A_0(t, \tau) \equiv A_1(t, \tau) \equiv B_0(t, \tau) \equiv B_1(t, \tau) \equiv 0, \quad (1.3)$$

задача $GR_{2,2}$ представляет собой так называемую вторую основную задачу типа Римана в классе бианалитических функций (см. [1, с. 102]).

В настоящем сообщении устанавливается алгоритм решения задачи $GR_{2,2}$ в случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

2. О решении задачи $GR_{2,2}$ в круге. Известно (см. [1; 2]), что исчезающую на бесконечности кусочно бианалитическую функцию $F(z)$ можно представить в виде

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\varphi_k^+(z) \in A(T^+)$, $\varphi_k^-(z) \in A(T^-)$, $k = 0, 1$, причем

$$\varphi_1^-(z) = z^{-2}f_1^-(z), \quad z \in T^-, \quad \text{а } f_1^-(z) \in A(T^-). \quad (2.2)$$

Так как (см., например, [2], с. 308) $\frac{\partial}{\partial n_\pm} = \pm i \left\{ t' \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right\}$, $t' = \frac{dt}{ds}$, в силу (2.1) краевые условия (1.1) и (1.2) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} \varphi_0^+(t) + \bar{t}\varphi_1^+(t) &= G_0(t)[\varphi_0^-(t) + \bar{t}\varphi_1^-(t)] + \int_L A_0(t, \tau)[\varphi_0^+(\tau) + \bar{\tau}\varphi_1^+(\tau)]d\tau + \\ &+ \int_L B_0(t, \tau)[\varphi_0^-(\tau) + \bar{\tau}\varphi_1^-(\tau)]d\tau + g_0(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
t' \frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + t'\bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \bar{t}'\varphi_1^+(t) = G_1(t) \left[t' \frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + t'\bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \bar{t}'\varphi_1^-(t) \right] + \\
+ \int_L A_1(t, \tau) \left[\tau' \frac{d\varphi_0^+(\tau)}{d\tau} + \tau'\bar{\tau} \cdot \frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau} - \bar{\tau}'\varphi_1^+(\tau) \right] d\tau - \\
- \int_L B_1(t, \tau) \left[\tau' \frac{d\varphi_0^-(\tau)}{d\tau} + \tau'\bar{\tau} \cdot \frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau} - \bar{\tau}'\varphi_1^-(\tau) \right] d\tau + t'g_1(t).
\end{aligned} \quad (2.4)$$

В свою очередь в силу того что на $L = \{t: |t|=1\}$ выполняются равенства $\bar{t} = \frac{1}{t}$ и $t' = it$, краевые условия (2.3) и (2.4) можно представить соответственно в виде

$$\Phi_0^+(t) - G_0(t)\Phi_0^-(t) + \int_L A_0^*(t, \tau)\Phi_0^+(\tau)d\tau + \int_L B_0^*(t, \tau)\Phi_0^-(\tau)d\tau = g_0^*(t), \quad (2.5)$$

$$\Phi_1^+(t) - G_1(t)\Phi_1^-(t) + \int_L A_1^*(t, \tau)\Phi_1^+(\tau)d\tau + \int_L B_1^*(t, \tau)\Phi_1^-(\tau)d\tau = g_1^*(t), \quad (2.6)$$

где

$$\Phi_0^\pm(z) = z\varphi_0^\pm(z) + \varphi_1^\pm(z), \quad (2.7)$$

$$\Phi_1^\pm(z) = z^2 \frac{d\varphi_0^\pm(z)}{dz} + z \frac{d\varphi_1^\pm(z)}{dz} + \varphi_1^\pm(z), \quad (2.8)$$

$$A_k^*(t, \tau) = -\frac{t}{\tau} A_k(t, \tau), \quad B_k^*(t, \tau) = (-1)^{k+1} \frac{t}{\tau} B_k(t, \tau), \quad g_k^*(t) = t^{k+1} \cdot g_k(t), \quad k = 0, 1. \quad (2.9)$$

Нетрудно проверить, что $\Phi_k^+(z) \in A(T^+)$, $\Phi_k^-(z) \in A(T^-)$, $\Phi_k^-(\infty) = 0$, $G_k(t), g_k^*(t) \in H^{(1)}(L)$, $G_k(t) \neq 0$ на L , а $A_k^*(t, \tau), B_k^*(t, \tau) \in H_*^{(1)}(L \times L)$ ($k = 0, 1$). Поэтому равенства (2.5), (2.6) представляют собой краевые условия так называемых *обобщенных скалярных краевых задач Римана* нормального типа для исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций $\Phi_0(z) = \{\Phi_0^+(z), \Phi_0^-(z)\}$ и $\Phi_1(z) = \{\Phi_1^+(z), \Phi_1^-(z)\}$ (см., например, [1, с. 40])

Далее, предположим, что обе обобщенные краевые задачи Римана нормального типа (2.5) и (2.6) разрешимы и уже найдены их решения, т.е. функции $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ (см. [1, с. 40-57]). Покажем, как по уже найденным функциям $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ можно определить искомое решение задачи $GR_{2,2}$. Для этого, учитывая соотношения (2.7) и (2.8), решим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \Phi_0^\pm(z) = z\varphi_0^\pm(z) + \varphi_1^\pm(z), & z \in T^\pm, \\ \Phi_1^\pm(z) = z^2 \frac{d\varphi_0^\pm(z)}{dz} + z \frac{d\varphi_1^\pm(z)}{dz} + \varphi_1^\pm(z), & z \in T^\pm \end{cases} \quad (2.10)$$

относительно неизвестных $\varphi_0^\pm(z)$ и $\varphi_1^\pm(z)$. В итоге получим

$$\begin{cases} \varphi_0^\pm(z) = \frac{1}{2z} \left[z \frac{d\Phi_0^\pm(z)}{dz} + \Phi_0^\pm(z) - \Phi_1^\pm(z) \right], & z \in T^\pm, \\ \varphi_1^\pm(z) = -\frac{1}{2} \left[z \frac{d\Phi_0^\pm(z)}{dz} - \Phi_0^\pm(z) - \Phi_1^\pm(z) \right], & z \in T^\pm. \end{cases} \quad (2.11)$$

Поскольку функции $\Phi_0^\pm(z)$ и $\Phi_1^\pm(z)$ являются аналитическими в круге T^+ , то для них справедливы следующие разложения в степенные ряды:

$$\Phi_0^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} z^k, \quad (2.12)$$

$$\Phi_1^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} z^k, \quad (2.13)$$

где

$$a_{jk} = \frac{d^{(k)}\Phi_j(0)}{dz^k}, \quad j = 0, 1; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Теперь нетрудно проверить, что функция $\varphi_0^+(z)$, определяемая из системы уравнений (2.11), будет аналитической в круге T^+ тогда и только тогда, когда имеет место следующее равенство:

$$a_{00} - a_{10} = 0. \quad (2.15)$$

Наконец, по найденным функциям $\varphi_0^\pm(z)$ и $\varphi_1^\pm(z)$ решение искомой задачи $\mathbf{GR}_{2,2}$ определим по формуле (2.1).

Обратно, если функция $F^\pm(z)$, определяемая по формуле (2.1), есть решение задачи $\mathbf{GR}_{2,2}$, то кусочно аналитическая функция $\Phi_0^\pm(z)$, определяемая по формуле (2.7), удовлетворяет краевому условию (2.5), а функция $\Phi_1^\pm(z)$, определяемая по формуле (2.8), – краевому условию (2.6).

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 2.1. *Если $T^+ = \{z: |z| < 1\}$, то решение краевой задачи $\mathbf{GR}_{2,2}$ сводится к решению двух обобщенных краевых задач Римана нормального типа (2.5) и (2.6) относительно кусочно аналитических функций $\Phi_0(z) = \{\Phi_0^+(z), \Phi_0^-(z)\}$ и $\Phi_1(z) = \{\Phi_1^+(z), \Phi_1^-(z)\}$ соответственно. При этом задача $\mathbf{GR}_{2,2}$ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы задачи (2.5) и (2.6) и, кроме того, выполняется равенство (2.15). При выполнении этих условий общее решение задачи $\mathbf{GR}_{2,2}$ задается формулой (2.1), где функции $\varphi_0^\pm(z)$, $\varphi_1^\pm(z)$ можно найти по формуле (2.11).*

3. Пример. Пусть $T^+ = \{z: |z| < 1\}$. Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$,

исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие следующим краевым условиям на L :

$$F^+(t) = t^2 F^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^2 \tau^2 + t\tau - 1}{t\tau^2} F^+(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau^2}{t^2} F^-(\tau) d\tau + t - \frac{1}{t^2}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} = -\frac{1}{5t} \cdot \frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t+\tau}{\tau} \frac{\partial F^+(\tau)}{\partial n_+} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t-\tau}{\tau} \frac{\partial F^-(\tau)}{\partial n_-} d\tau + it' \left(\frac{2}{t^5} + 1 \right). \quad (3.2)$$

Решение. Здесь имеем: $G_0(t) = t^2$, $G_1(t) = \frac{1}{5t}$, $g_0(t) = t - \frac{1}{t^2}$, $g_1(t) = \frac{2}{t^5} + 1$, $A_0(t, \tau) = \frac{t^2 \tau^2 + t\tau - 1}{t\tau^2}$, $B_0(t, \tau) = \frac{\tau^2}{t^2}$, $A_1(t, \tau) = \frac{t+\tau}{\tau}$, $B_1(t, \tau) = \frac{t-\tau}{\tau}$ (множители $\frac{1}{2\pi i}$ в краевых условиях (3.1)–(3.2) введены для удобства при последующих вычислениях).

Далее, пользуясь обозначениями (2.7)–(2.9), нетрудно проверить, что в нашем случае равенства (2.5)–(2.6) имеют вид:

$$\Phi_0^+(t) - t^2 \Phi_0^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^2 \tau^2 + t\tau - 1}{\tau^3} \Phi_0^+(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau}{t} \Phi_0^-(\tau) d\tau = t^2 - \frac{1}{t}, \quad (3.3)$$

$$\Phi_1^+(t) - \frac{1}{5t} \cdot \Phi_1^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t(t+\tau)}{\tau^2} \Phi_1^+(\tau) d\tau = \frac{2}{t^3} + t^2. \quad (3.4)$$

Равенства (3.3) и (3.4) представляют собой краевые условия *обобщенных скалярных краевых задач Римана* нормального типа с вырожденными ядрами Фредгольма для исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций $\Phi_0(z) = \{\Phi_0^+(z), \Phi_0^-(z)\}$ и $\Phi_1(z) = \{\Phi_1^+(z), \Phi_1^-(z)\}$ соответственно.

Решим сначала краевую задачу (3.3). Будем пользоваться методом, изложенным в монографии [1, с. 54-57].

Введем обозначения:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_0^+(\tau)}{\tau} d\tau, \quad a_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_0^+(\tau)}{\tau^2} d\tau, \quad a_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_0^+(\tau)}{\tau^3} d\tau, \quad b_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \tau \cdot \Phi_0^-(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Тогда краевое условие (3.3) можно переписать в виде

$$\Phi_0^+(t) = t^2 \cdot \Phi_0^-(t) + Q_0(t), \quad (3.6)$$

где $Q_0(t) = (1 - a_0)t^2 - a_1 t - \frac{1 + b_2}{t} + a_2$.

Считая временно $Q_0(t)$ известной функцией и решая обычную задачу Римана (3.6) с индексом $\chi_0 = \text{Ind}\{t^2\} = 2 > 0$ в классе исчезающих на бесконечности функций, будем иметь

$$\Phi_0^+(z) = (1 - a_0)z^2 + (C_1 - a_1)z + C_0 + a_2, \quad (3.7)$$

$$\Phi_0^-(z) = \frac{1+b_2}{z^3} + \frac{C_0}{z^2} + \frac{C_1}{z^2}, \quad (3.8)$$

где C_0, C_1 – произвольные комплексные постоянные.

Далее, с учетом обозначений (3.5), из (3.7) и (3.8) получаем следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров a_0, a_1, a_2, b_2 :

$$\begin{cases} a_0 = C_0 + a_2, \\ a_1 = C_1 - a_1, \\ a_2 = 1 - a_0, \\ b_2 = C_0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Решая систему (3.9) относительно a_0, a_1, a_2, b_2 , получаем: $a_0 = \frac{1+C_0}{2}$, $a_1 = \frac{C_1}{2}$, $a_2 = \frac{1-C_0}{2}$, $b_2 = C_0$. Подставив найденные значения a_0, a_1, a_2, b_2 в (3.7) и (3.8), будем иметь:

$$\Phi_0^+(z) = \frac{1-C_0}{2}z^2 + \frac{C_1}{2}z + \frac{1+C_0}{2}, \quad \Phi_0^-(z) = \frac{1+C_0}{z^3} + \frac{C_0}{z^2} + \frac{C_1}{z}, \quad (3.9)$$

где C_0, C_1 – произвольные комплексные постоянные.

Решим теперь краевую задачу (3.4). Для этого перепишем (3.4) в виде

$$\Phi_1^+(t) = \frac{1}{5t} \cdot \Phi_1^-(t) + Q_1(t), \quad (3.10)$$

где

$$Q_1(t) = \frac{2}{t^3} - (d_1 - 1)t^2 - d_0t, \quad (3.11)$$

$$d_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_1^+(\tau)}{\tau} d\tau, \quad d_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_1^+(\tau)}{\tau^2} d\tau. \quad (3.12)$$

Предположим временно, что $Q_1(t)$ – известная функция. Тогда равенство (3.10) есть краевое условие обычной задачи Римана относительно кусочно аналитической функции $\Phi_1(z) = \{\Phi_1^+(z), \Phi_1^-(z)\}$.

Поскольку $\chi_1 = \text{Ind} \left\{ \frac{1}{5t} \right\} = -1 < 0$, то задача (3.10) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int_L Q_1(\tau) d\tau = 0. \quad (3.13)$$

В силу (3.11) равенство (3.13) действительно верно.

Поэтому, решая задачу Римана (3.10) в классе исчезающих на бесконечности функций, будем иметь:

$$\Phi_1^+(z) = z^2, \quad \Phi_1^-(z) = -\frac{10}{z^2}. \quad (3.14)$$

Проверим теперь, согласно нашему алгоритму, выполнение условий разрешимости (2.15).

$$a_{00} = \Phi_0^+(0) = \frac{1+C_0}{2}, \quad a_{10} = \Phi_1^+(0) = 0. \quad (3.15)$$

Значит, исходная краевая задача (3.1)–(3.2) будет иметь решения тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$C_0 = -1. \quad (3.16)$$

Допустим, что условие (3.16) выполняется. Тогда, в силу (2.11), можно записать:

$$\varphi_0^+(z) = z + \frac{C_1}{2}, \quad \varphi_0^-(z) = \frac{11}{2z^3}, \quad \varphi_1^+(z) = 0, \quad \varphi_1^-(z) = \frac{C_1}{z} - \frac{13}{2z^2}. \quad (3.17)$$

Таким образом, решение исходной краевой задачи задается так:

$$F(z) = \begin{cases} z + \frac{C_1}{2}, & z \in T^+, \\ \frac{11}{2z^3} + \bar{z} \left(\frac{C_1}{z} - \frac{13}{2z^2} \right), & z \in T^-, \end{cases} \quad (3.21)$$

где C_1 – произвольная комплексная постоянная.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦ УЗЛОВЫХ СВЯЗЕЙ

Г.А. ВЕЛИГУРСКИЙ, Л.А. ПОПЛАВСКАЯ

Белорусский государственный университет, г. Минск

e-mail: poplaskaya@gmail.com

При анализе структурно-сложных систем их обычно представляют в виде различных математических моделей, в частности, структурных функций их состояний, которые отображают состояние системы в зависимости от состояний ее элементов и связей между ними. Для построения таких функций существуют различные методы, в частности метод матрицы узловых связей.

Для построения матрицы узловых связей структурно-сложная система представляется в виде направленного графа $S(Z, E)$, в котором множеству вершин Z соответствуют элементы рассматриваемой системы, а множеству ребер E соответствуют линии связи между

элементами системы. Матрица узловых связей размерности $Z \times Z$ с элементами C_{ij} (i соответствует строке матрицы, j – ее столбцу) строится по следующему алгоритму:

- $C_{ij} = 0$, если между вершинами i и j графа связь E отсутствует;
- $C_{ij} = 1$, если $i = j$;
- $C_{ij} = Z_i Z_j$, если между вершинами i и j графа существует какая-либо связь.

Обычно при анализе структурно-сложной системы анализируется одно из ее состояний (это, как правило, работоспособное состояние или состояние отказа). В общем случае строится структурная функция состояний системы, отображающая выходные состояния системы как функцию выходных и внутренних состояний ее элементов.

Структурная функция состояний структурно-сложной системы строится из полученной выше матрицы узловых связей путем понижения порядка данной матрицы последовательным вычеркиванием ее одноименных строк и столбцов от первого до последнего по определенному правилу. В результате оставшийся элемент последней пониженной матрицы будет представлять собой структурную функцию соответствующего состояния структурно-сложной системы.

Данный алгоритм построения структурных функций состояний систем достаточно хорошо отработан для структурно-сложных систем, в которых элементы системы могут находиться в двух состояниях: работоспособном и отказном. В основном здесь используется аппарат булевой алгебры.

Задача значительно усложняется, если элементы структурно-сложной системы, а также сама система могут находиться в более чем двух состояниях.

В предлагаемом алгоритме построения структурной функции состояний структурно-сложной системы элементы системы могут находиться во множестве состояний и описываются с помощью так называемых логических операторов, отображающих выходное состояние элемента системы как функция его внутреннего и входных состояний. Входные состояния рассматриваемого элемента отображают выходные состояния элементов, структурно связанных с ним [1].

С учетом логических операторов элементов структурно-сложной системы строится структурная функция $Y_s^{(l)}$ l -го состояния системы в целом как объединение произведения элементарных событий

$$Y^{(l)} = Y_1^{(l)} \cup Y_2^{(l)} \cup \dots \cup Y_m^{(l)}, \quad (1)$$

где $Y_j^{(l)}$ представляет собой минимальный набор элементарных событий j -го элемента системы, приводящих систему в l -тое состояние, $j = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, k$, k – число состояний системы.

Построение матрицы узловых связей структурно-сложной системы и дальнейшее понижение ее порядка для получения соответствующих структурных функций со многими состояниями элементов системы заключается в следующем:

– каждый элемент системы представляется в виде произведения элементарных событий. При этом произведения элементарных событий будут содержать переменные выходных состояний элементов, структурно связанных с рассматриваемым, и переменную, соответствующую внутреннему состоянию рассматриваемого элемента;

– каждый элемент матрицы вносится в соответствующие строку и столбец;

– последовательным применением классической формулы понижения порядка матрицы, а также операции свертки уменьшается порядок матрицы узловых связей до последней строки и последнего столбца, в результате чего в последней строке и столбце матрицы получается структурная функция системы с множеством состояний ее элементов.

Литература

1. Велигурский Г.А. Аппаратурно-программные методы анализа надежности структурно-сложных систем. – Минск: Наука и техника, 1986. – 256 с.

О ПЛОТНОСТИ МНОЖЕСТВА В ТОЧКЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В. ВИКТОРОВ
США

1. Плотность множества в точке.

Определение А (см. [1, с. 44–45]). Пусть A и B – подмножества топологического пространства X ; A называется плотным в B , если замыкание A содержит B ($\bar{A} \supset B$), т.е. если каждая точка из B является точкой прикосновения для A .

Определение В (см. [2, с. 55]). Пусть A и B – два множества в метрическом пространстве R . Множество A называется плотным в B , если $[A] \supset B$.

Определение С (см. [3, с. 35]). Пусть A и B – подмножества топологического пространства X . Говорят, что A плотно в B , если $ClA \supset B$, и что A всюду плотно, если $ClA \supset X$.

Выше приведены три определения понятия плотности одного множества в другом из трех разных книг. Согласно этим определениям,

каждое множество A плотно в каждом собственном подмножестве своего замыкания включая и пустое подмножество. Думаю, что, следуя духу этого определения, можно считать, что множество A плотно и в своем замыкании. В частности, множество натуральных чисел (которое, как известно, нигде не плотно) плотно в каждой своей точке и в пустом множестве. Получается, что каждое подмножество A плотно в каждом подмножестве своего замыкания.

Ещё одно определение плотности одного множества в другом дал П.С. Александров [4]: "«Множество M называется плотным в открытом множестве $G \subseteq X$, если $G \subseteq [M]_X$ или, что то же, если $M \cap G$ всюду плотно в подпространстве $G \subseteq X$ ». По этому определению множество плотно в своем открытом ядре и каждом открытом подмножестве своего открытого ядра включая и пустое множество. Это определение мне кажется более разумным, хотя и по нему нигде не плотное множество плотно в пустом множестве.

Я предлагаю ввести следующее определение плотности в точке.

Определение 1. Множество A топологического пространства X называется плотным в точке j топологического пространства X тогда и только тогда, когда открытое ядро замыкания множества A содержит точку j . Или, что то же самое, множество A топологического пространства X называется плотным в точке j топологического пространства X тогда и только тогда, когда замыкание множества A содержит некоторую окрестность точки j .

Определение 2. Множество A топологического пространства X называется плотным в множестве B тогда и только тогда, когда множество A плотно в каждой точке множества B .

По моему определению, каждое подмножество A плотно в каждом непустом открытом подмножестве своего замыкания.

Из этих определений следует, что каждое множество плотно в каждой точке открытого ядра своего замыкания (таким образом плотно в каждом непустом подмножестве открытого ядра замыкания) и не плотно во всех остальных точках. Никакое множество не плотно в пустом множестве. В одном предельном случае непустое множество нигде не плотно тогда и только тогда, когда оно не плотно ни в одной точке пространства. В другом предельном случае множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно плотно в каждой точке пространства. Плотность в точке – это своего рода «бытие внутренней точкой второй свежести». Если точка является внутренней точкой множества, то она внутренняя и в замыкании множества (и в ней, конечно, множество плотно), но если точка не является внутренней точкой множества (и даже может ему не принадлежать), однако является внутренней точкой его замыкания, то и тогда множество в ней плотно.

Классификация граничных точек.

Теперь рассмотрим определение канонически открытого множества (см. [4, с. 106]): «Множества, являющиеся открытым ядром какого-нибудь замкнутого множества, называются канонически открытыми». Но почему одно открытое множество канонически открыто, а другое нет? Структура этих множеств одинакова. И то и другое состоит только из внутренних точек. Рассмотрим в стандартной топологии плоскости два открытых множества A и B . И пусть A – открытый круг (круг без окружности), B – открытый круг с выколотым центром. Множество A канонически открыто, а множество B открыто, но не канонически открыто. Различие состоит не в структуре множеств A и B , а в структуре их замыканий. В замыкании множества A каждая граничная точка множества A – граничная точка его замыкания. А в замыкании множества B выколотый центр – граничная точка B , но внутренняя точка его замыкания. Итак, множество B не канонически открыто из-за «плохого» поведения граничной точки множества B . Эта мысль приводит нас к расслоению границы каждого множества. Поэтому дадим следующие определения.

Определение 3. Множество всех граничных точек множества M топологического пространства X называется его границей.

Все граничные точки множества M принадлежат его замыканию. Однако тип этих точек в замыкании может отличаться от их типа как точек множества M . Рассмотрим в стандартной топологии плоскости множество C – круг с выколотым центром. Замыкание множества C – весь круг. Его открытое ядро – внутренность круга без центра, а граница множества C – окружность и выколотый центр. Как видно из этого примера, граничные точки множества могут быть как граничными, так и внутренними точками замыкания. Одна граничная точка множества (центр круга) является внутренней точкой замыкания множества C , а другие (точки окружности) – граничные и для замыкания. Рассмотрим четыре типа граничных точек.

Лемма. *Открытое ядро границы множества совпадает с множеством всех граничных точек, имеющих хотя бы одну открытую окрестность, состоящую только из граничных точек.*

Доказательство. Действительно, если граничная точка x имеет открытую окрестность, состоящую только из граничных точек, то каждая точка этой открытой окрестности принадлежит границе, и поэтому вся открытая окрестность входит в границу. Таким образом, точка x – внутренняя точка границы.

И наоборот, если точка x входит в открытое ядро границы, то у нее есть открытая окрестность, которая состоит только из граничных точек. Рассмотрим в стандартной топологии плоскости с декартовой системой

координат круг. Из этого круга возьмем только точки с рациональными координатами. Назовем это множество D . Все точки круга являются граничными точками множества D . А круг без ограничивающей его окружности – открытое ядро границы множества D .

Определение 4. Граничная точка множества M топологического пространства X называется точкой внутреннего топологического дефекта множества M тогда и только тогда, когда она не принадлежит открытому ядру границы множества M и существует открытая окрестность этой точки, содержащая как граничные, так и внутренние точки этого множества M , но не содержащая внешних точек.

В множестве C , круге с выколотым центром, центр круга является точкой внутреннего топологического дефекта множества C .

Определение 5. Граничная точка множества M топологического пространства X называется точкой внешнего топологического дефекта множества M тогда и только тогда, когда она не принадлежит открытому ядру границы множества M и существует открытая окрестность этой точки, содержащая как граничные, так и внешние точки этого множества M , но не содержащая внутренних точек.

Рассмотрим в стандартной топологии вещественных чисел множество $F = [0; +\infty)$. Совокупность всевозможных множеств вида $(a, +\infty)$, где $a > 0$, а также пустое множество и множество $F = [0; +\infty)$ образуют топологию. Это топологическое пространство называется стрелкой. В топологии стрелки все точки множества $[0; 2]$ являются точками внешнего топологического дефекта множества $[1; 2]$.

Определение 6. Граничная точка множества M топологического пространства X называется граничной точкой общего типа тогда и только тогда, когда каждая открытая окрестность этой точки содержит как внешние, так и внутренние точки множества M .

Точки окружности в множестве C – это граничные точки общего типа.

Итак, граница множества M топологического пространства X разбивается на четыре дизъюнктивных множества, объединение которых есть граница множества M . Эти дизъюнктивные множества таковы:

- 1) граничные точки общего типа;
- 2) точки открытого ядра границы;
- 3) точки внутреннего топологического дефекта;
- 4) точки внешнего топологического дефекта.

Рассмотрим в стандартной топологии вещественных чисел множество H , полученное следующим образом: возьмем отрезок $[0; 1]$ все иррациональные точки открытого интервала $(1; 2)$ и добавим к ним

все точки последовательности $\{k^2\}$, где k – натуральное число, $k > 1$. В разбиении числовой прямой относительно множества H присутствуют точки всех указанных типов:

- 1) внутренние точки множества H – это точки открытого интервала $(0, 1)$;
- 2) внешние точки множества H – это все точки дополнения отрезка $[0; 2]$, кроме точек последовательности $\{k^2\}$;
- 3) точка 0 – граничная точка общего типа;
- 4) все точки открытого интервала $(1, 2)$ образуют открытое ядро границы;
- 5) точка 1 является точкой внутреннего топологического дефекта, и, наконец, точка 2 и все точки последовательности $\{k^2\}$ являются точками внешнего топологического дефекта.

Каноническое множество.

Вернемся к каноническим открытым и каноническим замкнутым множествам.

«Множества, являющиеся открытым ядром какого-нибудь замкнутого множества, называются каноническими открытыми», а «множество, являющееся замыканием открытого множества, называется каноническим замкнутым». Теперь уже ясно, что каноничность множества зависит от того, какие у него граничные точки. Точнее, все граничные точки канонически открытых и канонически замкнутых множеств – граничные точки общего типа.

Определение 7. Открытое множество M топологического пространства X называется канонически открытым тогда и только тогда, когда у него либо нет граничных точек, либо они – граничные точки общего типа.

Определение 8. Замкнутое множество M топологического пространства X называется канонически замкнутым тогда и только тогда, когда у него либо нет граничных точек, либо они – граничные точки общего типа.

Из этих двух определений ясно, что понятия канонически открытого и канонически замкнутого множеств можно обобщить до понятия канонического множества.

Определение 9. Множество M топологического пространства X называется каноническим тогда и только тогда, когда у него либо нет граничных точек, либо его граничные точки – граничные точки общего типа.

Рассмотрим в стандартной топологии плоскости множество G – открытый круг в объединении с множеством из двух точек, лежащих на окружности. Это каноническое множество. Его открытое ядро –

канонически открытое множество, а его замыкание – канонически замкнутое множество.

2. Локально замкнутое множество

Определение 10. Подмножество M топологического пространства X называется локально замкнутым в своей точке x_0 тогда и только тогда, когда существует такая её окрестность U_0 в X , что след M на U_0 (т. е. пересечение $M \cap U_0$) замкнут в подпространстве U_0 .

Определение 11. Множество M топологического пространства X называется локально замкнутым подмножеством пространства X тогда и только тогда, когда M локально замкнуто в каждой своей точке.

Из этих определений следует, что для локальной замкнутости подмножества M в пространстве X необходимо и достаточно, чтобы M являлось открытым подмножеством в подпространстве собственного замыкания. Но можно ввести понятие локальной замкнутости, не обращаясь к понятию подпространства. Если множество открыто в пространстве X , то оно открыто и в любом подпространстве пространства X . Обратное неверно. Множество может быть открытым в подпространстве, но оказаться неоткрытым в объемлющем его пространстве. Каждая внутренняя в пространстве X точка M остается внутренней точкой M и в любом подпространстве пространства X . Следовательно, открытость M в подпространстве может зависеть только от принадлежащих M граничных в пространстве X точек. Дальнейшие рассуждения ведутся применительно к подпространству замыкания множества M (эти рассуждения могут быть адаптированы и к другим подпространствам, но и с другими результатами в отношении граничных точек). Итак, рассмотрим множество M в подпространстве его замыкания. Для каждой граничной принадлежащей M точки в пространстве X каждая окрестность этой точки содержит как точки M , так и точки, не принадлежащие M . Точки, не принадлежащие M , соответственно подразделяются на внешние точки M и граничные точки M , ему не принадлежащие. В подпространстве замыкания каждая окрестность граничной точки M не содержит внешних точек пространства X . Поэтому является ли граничная точка, принадлежащая M , внутренней точкой M в подпространстве замыкания, зависит от существования окрестности этой граничной точки, не содержащей граничных точек M , ему не принадлежащих. Отсюда следует, что M локально замкнуто в данной точке тогда и только тогда, когда у этой точки существует окрестность, не содержащая граничных точек M , ему не принадлежащих.

Определение 12. Подмножество M топологического пространства X называется локально замкнутым в своей точке x_0 тогда и только тогда,

когда в X существует окрестность U_0 точки x_0 , не содержащая его граничных точек, ему не принадлежащих.

Определение 13. Множество M топологического пространства X называется локально замкнутым подмножеством пространства X тогда и только тогда, когда у каждой его точки существует окрестность, не содержащая его граничных точек, ему не принадлежащих.

Пример. Рассмотрим в топологии плоскости подмножество T : круг с выколотым центром и с половиной окружности, причем один конец половины окружности принадлежит T , а второй конец половины окружности не принадлежит T . Замыканием подмножества T является весь круг, включая всю окружность. При этом T не локально замкнуто только в одной точке, в том самом конце окружности, который включен в множество. Во всех остальных точках T локально замкнуто.

Предел отображения в точке топологического пространства.

В топологическом пространстве определена непрерывность отображения в точке. Поэтому можно дать определение предела отображения в точке через непрерывность.

Определение 14. Пусть дано отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y . Элемент $y_0 \in Y$ называется пределом отображения $f: X \rightarrow Y$ в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное в точке x_0 отображение

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ y_0, & x = x_0. \end{cases}$$

Это определение эквивалентно определению предела по фильтру, если рассматривать предел только по фильтру проколотых окрестностей точки x_0 .

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = 0$ при $x \neq x_0$ и $f(x_0) = 1$.

1. Фильтр с базой из проколотых окрестностей нуля. Это классическая ситуация, соответствующая определению предела при $x \neq x_0$. База соответствующего фильтра в множестве значений состоит из множеств $\{0\}$ и $\{0, 1\}$. Предел равен нулю.

2. Фильтр с базой $\{0\}$. Это ситуация псевдоопределения предела без ограничения $x \neq x_0$. База соответствующего фильтра в множестве значений состоит из множеств $\{1\}$ и $\{0, 1\}$. Предел равен единице. Фильтр как бы говорит: «мне безразлично, что там вокруг нуля. В нуле значение единица!».

3. Фильтр всех окрестностей нуля. База соответствующего фильтра в множестве значений состоит из множества $\{0, 1\}$. Предел функции по

этому фильтру не существует! Фильтр как бы говорит: «противоречие между стремлением и результатом».

Новое определение соответствует только первому случаю.

Литература

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. – М.: Высшая школа, 1979.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- 3., Элементарная топология / О.Я. Виро [и др.]. – СПб.: СПГУ, 2007.
4. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977.

КВАЗИОБРАТНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Ю.М. ВУВУНИКЯН

Гродненский государственный университет
230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, тел. +375152740674;
e-mail: vuv64@mail.ru

В настоящей работе мы приводим общий эффективный метод построения квазиобратных операторов [1; 2] произвольной степени для эволюционного оператора, определяемого следующим нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$x' + ax + bx^2 = f(t).$$

Рассматриваемому уравнению соответствует нелинейный эволюционный оператор

$$Ax = a_1 * x + S_2(a_2 * x^{\otimes 2}),$$

где $a_1 = \delta' + a\delta$, $a_2 = b\delta^{\otimes 2}$ (δ – дельта-функция, $*$ – операция свертки).

Пусть эволюционный оператор

$$Bf = b_1 * x + S_2(b_2 * f^{\otimes 2}) + \dots + S_r(b_r * f^{\otimes r})$$

является квазиобратным оператором r степени к оператору A .

Обозначим

$$x_1 = b_1 * f, \quad x_2 = S_2(b_2 * f^{\otimes 2}), \quad \dots, \quad x_r = S_r(b_r * f^{\otimes r}).$$

Тогда

$$Bf = \sum_{k=1}^r x_k .$$

Рассмотрим композицию операторов A и B : $A \circ B$. Имеем:

$$\begin{aligned} (A \circ B)f &= a_1 * Bf + S_2(a_2 * (Bf)^{\otimes 2}) = a_1 * \sum_{k=1}^r x_k + S_2(a_2 * (\sum_{k=1}^r x_k)^{\otimes 2}) = \\ &= \sum_{k=1}^r (a_1 * x_k) + S_2(a_2 * \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^r (x_k \otimes x_j)) = \sum_{k=1}^r (a_1 * S_k(b_k * f^{\otimes k})) + \\ &\quad + S_2(a_2 * \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (S_i(b_i * f^{\otimes i}) \otimes S_j(b_j * f^{\otimes j}))) = a_1 * b_1 * f + \\ &\quad + a_1 * S_2(b_2 * f^{\otimes 2}) + \dots + a_1 * S_r(b_r * f^{\otimes r}) + S_2(a_2 * (b_1 * f)^{\otimes 2}) + \\ &\quad + S_2(a_2 * (b_1 * f) \otimes S_2(b_2 * f^{\otimes 2})) + S_2(a_2 * (b_1 * f) \otimes S_r(b_r * f^{\otimes r})) + \\ &\quad + S_2(a_2 * S_2(b_2 * f^{\otimes 2}) \otimes (b_1 * f)) + S_2(a_2 * S_2(b_2 * f^{\otimes 2})^{\otimes 2}) + \dots + \\ &\quad + S_2(a_2 * S_2(b_2 * f^{\otimes 2}) \otimes S_r(b_r * f^{\otimes r})) + \dots + S_2(a_2 * S_r(b_r * f^{\otimes r}) \otimes (b_1 * f)) + \\ &\quad + S_2(a_2 * S_r(b_r * f^{\otimes r}) \otimes S_2(b_2 * f^{\otimes 2})) + \dots + S_2(a_2 * S_r(b_r * f^{\otimes r})^{\otimes 2}). \quad (1) \end{aligned}$$

Так как оператор B является квазиобратным оператором степени r к оператору A , то из равенства (1) получаем следующие соотношения:

$$a_1 * b_1 * f = f, \quad (2)$$

$$a_1 * (S_2(b_2 * f^{\otimes 2})) + S_2(a_2 * (b_1 * f)^{\otimes 2}) = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_1 * S_r(b_r * f^{\otimes r}) + S_2(a_2 * ((b_1 * f) \otimes S_{r-1}(b_{r-1} * f^{\otimes(r-1)}))) + \\ + S_2(a_2 * (S_2(b_2 * f^{\otimes 2})) \otimes S_{r-2}(b_{r-2} * f^{\otimes(r-2)})) + \dots + \\ + S_2(a_2 * (S_{r-1}(b_{r-1} * f^{\otimes(r-1)}) \otimes (b_1 * f))) = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Из полученного соотношения (2) следует, что $b_1 = a_1^{*-1} = \theta e^{-at}$, где θ – функция Хевисайда. Следовательно, имеем:

$$x_1 = b_1 * f = f * a_1^{*-1} = f * \theta e^{-at} = \theta e^{-at} * f. \quad (5)$$

Из соотношения (3) получаем:

$$a_1 * (S_2(b_2 * f^{\otimes 2})) = -S_2(a_2 * (b_1 * f)^{\otimes 2}),$$

откуда следует равенство

$$S_2(b_2 * f^{\otimes 2}) = -\theta e^{-at} * S_2(a_2 * (b_1 * f)^{\otimes 2}),$$

т.е.

$$x_2 = S_2(b_2 * f^{\otimes 2}) = -\theta e^{-at} * S_2(a_2 * x_1^{\otimes 2}). \quad (6)$$

Так как $a_2 = b\delta^{\otimes 2}$, то $a_2 * x_1^{\otimes 2} = bx_1^{\otimes 2}$, и, следовательно, из равенства (6) получаем

$$x_2 = -\theta e^{-at} * bS_2(x_1^{\otimes 2}) = -b\theta e^{-at} * x_1^2. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь соотношение (4). Это соотношение равносильно следующему:

$$\begin{aligned} a_1 * S_r(b_r * f^{\otimes r}) &= -S_2(a_2 * ((b_1 * f) \otimes S_{r-1}(b_{r-1} * f^{\otimes(r-1)}))) - \\ &- S_2(a_2 * (S_2(b_2 * f^{\otimes 2}) \otimes S_{r-2}(b_{r-2} * f^{\otimes(r-2)}))) - \dots - \\ &- S_2(a_2 * (S_{r-1}(b_{r-1} * f^{\otimes(r-1)}) \otimes (b_1 * f))), \end{aligned} \quad (8)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} x_r = S_r(b_r * f^{\otimes r}) &= -b\theta e^{-at} * [S_2((b_1 * f) \otimes S_{r-1}(b_{r-1} * f^{\otimes(r-1)}))) + \\ &+ S_2((S_2(b_2 * f^{\otimes 2}) \otimes S_{r-2}(b_{r-2} * f^{\otimes(r-2)}))) + \dots + \\ &+ S_2((S_{r-1}(b_{r-1} * f^{\otimes(r-1)}) \otimes (b_1 * f))] = \\ &= -b\theta e^{-at} * [S_2(x_1 \otimes x_{r-1}) + S_2(x_2 \otimes x_{r-2}) + \dots + S_2(x_{r-1} \otimes x_1)] = \\ &= -b\theta e^{-at} * (x_1 x_{r-1} + x_2 x_{r-2} + \dots + x_{r-1} x_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, мы получили следующее утверждение:

Теорема. Квазиобратный степени r эволюционный оператор B к эволюционному оператору A , порожденному нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка $x' + ax + bx^2 = f(t)$, может быть представлен в следующем виде:

$$Bf = \sum_{k=1}^r x_k,$$

где

$$x_1 = \theta e^{-at} * f, \quad (10)$$

$$x_k = -b\theta e^{-at} * \sum_{j=1}^{k-1} x_j x_{k-j} \quad (k = 2, 3, \dots, r). \quad (11)$$

Выделяя в полученном равенстве (11) случай, когда $k = 2m$, и случай, когда $k = 2m + 1$, ($m = 1, 2, 3, \dots$), получаем:

$$\begin{cases} x_{2m} = -2b\theta e^{-at} * \sum_{j=1}^{m-1} x_j x_{2m-j} + x_m^2 \\ x_{2m+1} = -2b\theta e^{-at} * \sum_{j=1}^m x_j x_{2m+1-j} \end{cases}.$$

Литература

1. Вувуникян Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками: монография. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 224 с.

2. Вувуникян Ю.М. Квазиобращение нелинейных эволюционных операторов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2008. – Вып. 9. – С. 144–146.

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ УСЛОВНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

С.А. ГОМОНОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. При изучении структуры предельных множеств полианалитических функций [1] в произвольной точке $a \in \bar{C}$, т.е. функций вида

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) \bar{z}^k,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $f_k(z)$ ($k=0,1,\dots,n-1$) – аналитические функции в $\overset{\circ}{O}(a)$ – области определения функции $F(z)$ (т.е. $F(z)$ задана в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \bar{C}$) оказалось весьма полезным использовать некоторые естественные обобщения этого классического понятия предельного множества функции на многозначные отображения произвольных топологических пространств. Более того, пришлось рассматривать «предельное» поведение многозначных отображений не только в окрестности отдельной точки, но и в окрестности произвольного множества соответствующего топологического пространства [2]. Причем построить необходимые обобщения удалось несколькими способами [2; 3], однако наиболее естественным из них можно признать следующий.

Определение 1. Пусть F – многозначное отображение из топологического пространства (X, τ_X) в топологическое пространство (Y, τ_Y) , $M \subset X$ (см. рис. 1), тогда предельным множеством этого многозначного отображения F на совокупности M назовем следующее множество

$$C(F, M) \stackrel{def}{=} \bigcap_{O(M)} \overline{F(O(M))}.$$

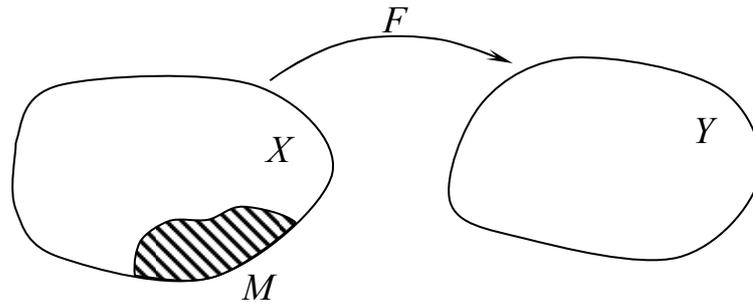


Рис. 1

Однако особенно интересным оказалось использование понятия предельного множества м-отображения топологических пространств для того, чтобы охарактеризовать с чисто топологических позиций зависимость двух многозначных отображений.

Определение 2. Пусть F_1 – м-отображение из произвольного непустого множества U в топологическое пространство (Y, τ_Y) , F_2 – м-отображение из того же множества U в топологическое пространство (X, τ_X) , а M – произвольное непустое подмножество этого пространства. И пусть $F_2^{-1} \circ F_1$ – это м-отображение из (X, τ_X) в (Y, τ_Y) , т.е. композиция м-отображения F_2^{-1} из (X, τ_X) в U и м-отображения F_1 из U в (Y, τ_Y) (см. рис. 2), тогда условным предельным множеством м-отображения F_1 при условии – м-отображении F_2 на множестве $M \subset X$ назовем множество

$$C(F_1, F_2, M) \stackrel{def}{=} C(F_2^{-1} \circ F_1, M).$$

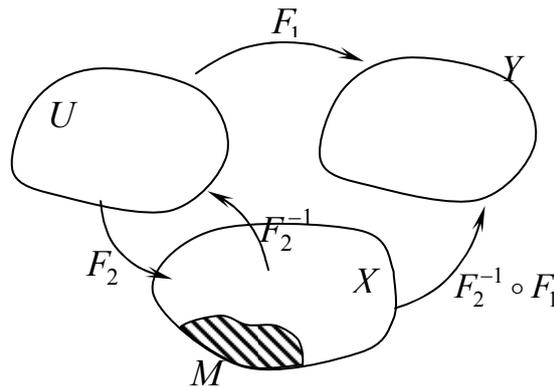


Рис. 2

Так, например, $C(\sin x, \cos x, \{0\}) = \{\pm 1\}$, т.е. если $\cos x_n \rightarrow 0$, где $(x_n) \subset \mathbb{R}$, то $\sin x_n \rightarrow \{\pm 1\}$.

Стоит подчеркнуть, что сформулировать понятие предельного множества м-отображения топологических пространств в терминах

сходящихся последовательностей можно без особого труда, но по-настоящему «рабочим» оно станет лишь при наличии ряда дополнительных условий, например если топологические пространства (X, τ_X) и (Y, τ_Y) будут с первой аксиомой счетности, а M – замкнуто в (X, τ_X) , причем любое бесконечное подмножество этого множества M имеет в M предельную точку [2].

2. Рассмотрим теперь несколько примеров применения понятия условного предельного множества при исследовании предельных множеств полианалитических функций в их изолированных л-точках [3; 4].

Пример 1. Пусть $a \in \bar{C}$ – изолированная л-точка п.а. функции $F(z)$, т.е.

$$C(F(z), a) = \bigcup_{j=1}^k \{l_j(t) \mid t \in \bar{R}\},$$

где $\{l_j(t) \mid t \in \bar{R}\}$ – невырожденные полиномиальные линии, пополненные точкой ∞ ($j=1, 2, \dots, k$) [3; 4], тогда для любой точки $\tilde{a} \in \bar{C}$ с помощью п.а. функции $F(z)$ можно построить другую (и не одну!) п.а. функцию $\tilde{F}(z)$ со свойством

$$C(\tilde{F}(z), \tilde{a}) = C(F(z), a).$$

Продемонстрируем технику построения п.а. функции $\tilde{F}(z)$ на примере функции $F(z) = \bar{z} + z$, для которой $C(F(z), \infty) = \bar{R}$, причем любая последовательность $(z_n) \subset C$, порождающая какую-либо конечную точку из $C(F(z), \infty)$, заведомо удовлетворяет условию $\frac{\bar{z}_n}{z_n} \rightarrow -1$, а значит:

$$\begin{aligned} \bar{R} = C(z + \bar{z}, \infty) &= C\left(\underbrace{z + \bar{z}}_{F_1}, \underbrace{\left(z, \frac{\bar{z}}{z}\right)}_{F_2}, (\infty; -1)\right) = \\ &= C\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}, \left(\frac{1}{z}, \frac{1/\bar{z}}{1/z}\right), (0; -1)\right) = C\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}, \left(z, \frac{z}{\bar{z}}\right), (0; -1)\right) = \\ &= C\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}, \left(z, \frac{\bar{z}}{z}\right), (0; -1)\right) = C\left(-\frac{\bar{z}}{z} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right), \left(z, \frac{\bar{z}}{z}\right), (0; -1)\right) = \\ &= C\left(-\frac{1}{z^2} \cdot \bar{z} - \frac{1}{z}, \left(z, \frac{\bar{z}}{z}\right), (0; -1)\right) = C\left(\frac{1}{z^2} \cdot \bar{z} + \frac{1}{z}, 0\right) = \\ &= C\left(\frac{1}{(z - \tilde{a})^2} \cdot (\bar{z} - \tilde{a}) + \frac{1}{z - \tilde{a}}, \tilde{a}\right), \end{aligned}$$

где $\tilde{a} \in C$, т.е. $\tilde{F}(z) = \frac{1}{(z - \tilde{a})^2} \cdot (\bar{z} - \tilde{a}) + \frac{1}{z - \tilde{a}}$.

Аналогичный прием можно предложить для построения $\tilde{F}(z)$ и в общем случае, когда $C(F(z), a)$ – «настоящее» объединение конечного числа полиномиальных линий, а не только одна линия ($k > 1$).

Пример 2. Покажем на конкретной п.а. функции, как переход к условному предельному множеству позволяет изучить строение ее предельного множества в соответствующей точке $a \in \bar{C}$, а значит, определить классификационную принадлежность этой точки a – полюс это или л-точка данной п.а. функции [3; 4].

Пусть $F(z) = (\bar{z} + z)(\bar{z} + iz)$, $a = \infty$, тогда, так как для любой (z_n) , если она порождает конечную точку из $C(F(z), \infty)$ (хотя пока и неизвестно, есть ли такие последовательности!), обязательно

$$\bar{z}_n / z_n \rightarrow \{-1; -i\},$$

а значит, получаем, что

$$L = C((\bar{z} + z)(\bar{z} + iz), \infty) = C\left((\bar{z} + z)(\bar{z} + iz), \left(z, \frac{\bar{z}}{z}\right), \{\infty\} \times \{-1; -i\}\right) = L_1 \cup L_2,$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= C\left((\bar{z} + z)(\bar{z} + iz), \left(z, \frac{\bar{z}}{z}\right), \{\infty\} \times \{-1\}\right) = \\ &= C\left((\bar{z} + z)((\bar{z} + z) + (i-1)z), \left(z, \frac{\bar{z}}{z}\right), (\infty; -1)\right) = \\ &= C((\bar{z} + z)(\bar{z} + z + (i-1)z), (z, \bar{z} + z), (\infty; 0)) = C((i-1)z(\bar{z} + z), (z, \bar{z} + z), (\infty; 0)) = \\ &= (i-1) \cdot C((x+iy) \cdot 2x, (y, x), (\infty; 0)) = (i-1) \cdot C(2ixy, (y, x), (\infty; 0)) = \\ &= \{(i-1) \cdot i \cdot t \mid t \in \bar{R}\} = \{(1+i)t \mid t \in \bar{R}\}, \end{aligned}$$

аналогично получаем, что

$$\begin{aligned} L_2 &= C\left((\bar{z} + z)(\bar{z} + iz), \left(z, \frac{\bar{z}}{z}\right), \{\infty\} \times \{-i\}\right) = \\ &= C((\bar{z} + iz)((\bar{z} + iz) + z(1-i)), (z, \bar{z} + iz), (\infty; 0)) = \\ &= C((1-i)z(\bar{z} + iz), (z, \bar{z} + iz), (\infty; 0)) = C((1-i) \cdot e^{-\frac{\pi}{4}i} \cdot z(e^{\frac{\pi}{4}i} \bar{z} + e^{\frac{\pi}{4}i} z), \infty) = \\ &= C((1-i)z(\bar{z} + z), \infty) = -L_1 = \{(1+i)t \mid t \in \bar{R}\} = L_1. \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что $L = L_1 = \{(1+i)t \mid t \in \bar{R}\}$ – прямая, пополненная точкой ∞ , а значит, точка $a = \infty$ – изолированная л-точка трианалитической [3; 4] функции $F(z) = (\bar{z} + z)(\bar{z} + iz)$.

Пример 3. Использование понятия условного предельного множества позволяет предложить «быстрое» построение примеров п.а. функций, имеющих весьма «прихотливые» предельные множества в своих изолированных л-точках. Поможет в осуществлении

соответствующих построений следующее почти очевидное равенство: $C\left(F(z), \left(z, \frac{\bar{z}}{z}\right), (\infty, \eta)\right) = C\left(F(z^m), \left(z, \frac{\bar{z}}{z}\right), (\infty, \varepsilon_j)\right)$, где η – любое комплексное число единичного модуля, а ε_j – любое из m значений корня m -той степени из η ($m \in \mathbb{N}$). Тогда получаем:

а) так как $C(\bar{z} - z, \infty) = i\bar{R} = C(\bar{z}^2 - z^2, \infty)$, то $C\left(\bar{z}^2 - z^2 + \frac{\bar{z}}{z}, \infty\right) = (i\bar{R} + 1) \cup (i\bar{R} - 1)$ – пара параллельных прямых, пополненных точкой ∞ ; а вот $C\left(i\bar{z}^3 - iz^3 + \frac{\bar{z}}{z}, \infty\right) = \bar{R} \cup (\varepsilon_1 + \bar{R}) \cup (\varepsilon_2 + \bar{R})$, где $\varepsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\varepsilon_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$, а значит, $C\left(i\bar{z}^3 - iz^3 + \frac{\bar{z}}{z}, \infty\right)$ – объединение трех параллельных прямых, пополненных точкой ∞ .

В свою очередь $C\left(i\frac{\bar{z}}{z}(\bar{z}^3 - z^3), \infty\right) = \bar{R} \cup \varepsilon_1\bar{R} \cup \varepsilon_2\bar{R}$ – объединение трех пересекающихся в точке 0 прямых, пополненных точкой ∞ ;

б) так как $C(-(\bar{z} - z)^2, \infty) = \bar{R}_+$, то $C\left(-(\bar{z}^2 - z^2)^2 + 1, \frac{\bar{z}}{z}, \infty\right) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \cup \{\infty\}$ – объединение двух лучей, пополненных точкой ∞ ; а вот $C\left(-\frac{\bar{z}}{z}(\bar{z}^3 - z^3)^2, \infty\right) = \bar{R}_+ \cup \varepsilon_1\bar{R}_+ \cup \varepsilon_2\bar{R}_+$ – объединение трех лучей с началом в точке 0, образующих между собой углы по 120° (каждый луч пополнен точкой ∞ , ε_1 и ε_2 – те же, что и в пункте а));

в) так как $C((\bar{z} + z + i)^2 + 1, \infty) = \{t^2 + 2ti \mid t \in \bar{R}\}$ – парабола второго порядка, пополненная точкой ∞ , то $C\left((\bar{z}^2 + z^2 + i)^2 + 1 + \frac{\bar{z}}{z}, \infty\right)$ и $C\left(\frac{\bar{z}}{z}((\bar{z}^2 + z^2 + i)^2 + 1), \infty\right)$ – объединения двух парабол, пополненных точкой ∞ .

Литература

1. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М., 1991. – Т. 85. – С. 187–254.
2. Гомонов С.А. О предельных множествах многозначных отображений топологических пространств // Доклады АН СССР. – М., 1989. – Т. 306, № 1. – С. 20–24.
3. Гомонов С.А. О структуре предельных множеств полианалитических функций в изолированных особых точках // Mathematica Montisnigri: ежегодник Черногорского университета. – 1995. – Vol. 5. – С. 27–64.
4. Гомонов С.А. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса для полианалитических функций // Труды Института математики. – Минск, 2004. – Т. 12, № 1. – С. 44–48.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

А.П. ГРИНЬКО

Белорусский государственный университет, г. Минск
e-mail: agrinko_1999@yahoo.com

Хорошо известны ([1, с. 219; 3, т. 3, с. 271]) асимптотические представления дробного интеграла Римана-Лиувилля

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

при $x \rightarrow 0$ и для более общих интегралов типа свёртки с переменным верхним пределом [2]

$$\Omega(x) = \int_0^x F(x-t) f(t) dt$$

при $x \rightarrow \infty$, если известна степенная асимптотика функции $f(x)$ вблизи этих точек.

Настоящая работа посвящена рассмотрению асимптотических представлений обобщённых дробных интегралов

$$(\rho^{-\beta} J_{a+}^{\alpha, \beta, \gamma} \varphi)(x) = \frac{(x-a)^{-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1\left(\gamma; \beta; \alpha; \frac{x-t}{x-a}\right) \varphi(t) dt, \quad (2)$$

$$(\rho^{-\beta} e^{-\nu\rho} \Phi_{a+}^{\alpha, \beta, \gamma, \nu} \varphi)(x) = \frac{(x-a)^{-\beta}}{\Gamma(\alpha) e^{\nu(x-a)}} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \Phi_1\left(\gamma, \beta; \alpha; \frac{x-t}{x-a}; \nu(x-t)\right) \varphi(t) dt, \quad (3)$$

где ${}_2F_1(\beta; \gamma; \alpha; z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\beta)_i (\gamma)_i}{(\alpha)_i i!} z^i$, $|z| < 1$ – гипергеометрическая функция

Гаусса, $\Phi_1(\gamma, \beta; \alpha; w; z) = \sum_{i, k=0}^{+\infty} \frac{(\gamma)_{i+k} (\beta)_i z^k w^i}{(\alpha)_{i+k} k! i!}$, $|w| < 1$, $|z| < +\infty$ –

гипергеометрическая функция Гумберта; $(\beta)_0 = 1, (\beta)_k = \beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)$, $k = 1, 2, \dots$, $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$ – символ Похгаммера, см. [1].

Пусть $0 < \gamma < \alpha$, $\beta, \nu \in R$, $0 \leq a \leq x \leq b < +\infty$, $\varphi(x) \in L_p(a, b)$, $1 \leq p < +\infty$, $x-a = \rho$. Известны следующие представления операторов (2), (3) (см. [1]):

$$(J_{a+}^{\alpha, \beta, \gamma} \varphi)(x) = (\rho^{\beta} I_{a+}^{\gamma} \rho^{-\beta} I_{a+}^{\alpha-\gamma} \varphi)(x) = (\rho^{\gamma} I_{a+}^{\alpha-\gamma} \rho^{\beta-\alpha} I_{a+}^{\gamma} \rho^{\alpha-\gamma-\beta} \varphi)(x), \quad (4)$$

$$(\Phi_{a+}^{\alpha, \beta, \gamma, \nu} \varphi)(x) = \rho^{\beta} e^{\nu\rho} I_{a+}^{\gamma} \rho^{-\beta} e^{-\nu\rho} I_{a+}^{\alpha-\gamma} \varphi(x). \quad (5)$$

Пусть $-1 < \mu_1 + \min(\lambda, 0)$, $\mu_k < 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ и μ_k – возрастающая последовательность действительных чисел. Предположим также, что функция $\varphi(x)$ имеет следующую степенную асимптотику:

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}(x_0)(x-a)^{n+\lambda+\mu_k}, \text{ при } x \rightarrow a. \quad (6)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ имеет асимптотическое представление (6) и $0 < \gamma < \alpha$, $-1 < \mu_1 + \lambda + \min(\lambda, 0, \alpha - \beta - \gamma)$. Тогда обобщённые дробные интегралы $(J_{a+}^{\alpha_1+\alpha_2, \beta, \alpha_2} \varphi)(x)$, $(\rho^{-\beta} e^{-\nu\rho} \Phi_{a+}^{\alpha, \beta, \gamma, \nu} \varphi)(x)$ при $x \rightarrow a$ имеют следующие асимптотические разложения:

$$(\rho^{-\beta} J_{a+}^{\alpha, \beta, \gamma} \varphi)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k} \Gamma(\lambda+n+\mu_k+1) \Gamma(\lambda+n+\mu_k+\alpha-\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\lambda+n+\mu_k+\alpha-\gamma+1) \Gamma(\lambda+n+\mu_k+\alpha-\beta+1)} (x-a)^{n+\mu_k+\lambda+\alpha};$$

$$(\rho^{-\beta} e^{-\nu\rho} \Phi_{a+}^{\alpha, \beta, \gamma, \nu} \varphi)(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{i,k} (x-a)^{i+\mu_k+\lambda+\alpha},$$

где $C_{i,k}$ имеют вид:

$$C_{i,k} = \sum_{m=0}^n \sum_{n=0}^m \frac{a_{n,k} \Gamma(n+\lambda+\mu_k+1) \Gamma(m+\lambda+\mu_k+\alpha-\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+n+\lambda+\mu_k+1) \Gamma(m+\lambda+\mu_k+\alpha-\beta+1)} \frac{\nu^{i-n} (-1)^{m-n}}{(i-m)!(m-n)!}.$$

Доказательство. Доказательство основывается на представлениях (4)–(5) и известных асимптотических разложениях для (1) (см. [1]).

Литература.

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, 1987.
2. Риекстыньш Э.Я. Латвийский математический ежегодник. – 1970. – Вып. 8. – С. 223-239.
3. Риекстыньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов: в 3 т. – Рига: Зинатне, 1974. – Т.1. – 391 с.; 1977. – Т.2. – 463 с.; 1981. – Т.3. – 370 с.

ЗАДАЧА МАРКУШЕВИЧА, СОДЕРЖАЩАЯ ШЕСТЬ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Е.В. ДАВЬЯЛОВА

Белорусский государственный университет, г.Минск
e-mail: e.kiaora@gmail.com

Рассмотрим задачу нахождения функций φ , кусочно аналитических и ограниченных в плоскости переменного $z = x + iy$ с линией разрыва $\text{Im } z = 0$. Предельные значения слева $(\varphi(x^+) = \varphi^+(x))$ и справа

$(\varphi(x^-) = \overline{\varphi(x)})$ от выбранной ориентации оси (ось условимся ориентировать слева направо) связаны уравнением:

$$a(x)\varphi(x^+) + b(x)\overline{\varphi(x^+)} + c(x)\varphi(x^-) + d(x)\overline{\varphi(x^-)} = f(x), \quad (1)$$

коэффициенты которого ограничены, H -непрерывны на $\mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_6\}$ и удовлетворяют другим ограничениям, указываемым ниже. Точки $-\infty < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5 < r_6 = +\infty$ лежат на вещественной оси и выбираются произвольно. Предположим, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим тождествам:

$$|a(x)| = |b(x)|, \quad |c(x)| = |d(x)| \quad \text{при } x \in L_1 := (r_1, r_2) \cup (r_3, r_4) \cup (r_5, +\infty), \quad (2)$$

$$b(x) \equiv d(x) \equiv 0 \quad \text{при } x \in L_2 := (-\infty, r_1) \cup (r_2, r_3) \cup (r_4, r_5), \quad (3)$$

и больше нигде не обращаются в нуль.

Введем в рассмотрение риманову поверхность \mathfrak{R} рода $h=2$, заданную уравнением:

$$w^2 - \hat{f}(z) = 0, \quad (4)$$

где $\hat{f}(z) = \prod_{k=1}^5 (z - r_k)$.

Через $w(z) = \sqrt{\hat{f}(z)}$ обозначим ту непрерывную на $\mathbb{C} \setminus L_1$ ветвь, предельное значение которой сверху при $x \in (r_5, +\infty)$ положительно. Поверхность \mathfrak{R} двулистка. Верхним листом назовем множество точек $(z, w(z))$, где $w(z)$ – выделенная ветвь. Нижний лист есть множество точек $(z, -w(z))$. Введем контур $K = L_1' \cup L_2' \cup L_1'' \cup L_2''$, где

$$L_1' := \{(x, w(x)) \mid x \in L_1\}, \quad L_1'' := \{(x, -w(x)) \mid x \in L_1\},$$

$$L_2' := \{(x, w(x)) \mid x \in L_2\}, \quad L_2'' := \{(x, -w(x)) \mid x \in L_2\}.$$

Ориентация всех кривых контура K – слева направо.

Введем новую неизвестную функцию $\Phi(z, w(z)) := \varphi(z)$, где $(z, w(z))$ принадлежит верхнему листу. Положим также $\Phi(z, -w(z)) := \overline{\varphi(\bar{z})}$, где $(z, -w(z))$ принадлежит нижнему листу. Выразив из двух последних равенств $\varphi(z)$, получим, что $\Phi(z, w(z)) := \overline{\Phi(\bar{z}, -w(\bar{z}))}$. Это условие симметрии, которому должна удовлетворять новая неизвестная функция $\Phi(z, w(z))$. Построим каноническое рассечение поверхности (4), как показано на рисунке. Условимся проводить сплошные линии на верхнем листе, а пунктирные – на нижнем.

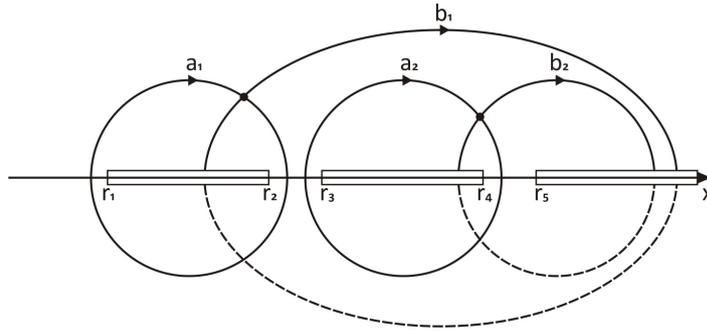


Рис. 1

После ряда преобразований задача сводится к задаче сопряжения:

$$\Phi^+(t, v) = G(t, v)\Phi^-(t, v) + g(t, v), \quad (t, v) \in \mathbb{K}. \quad (5)$$

Рассмотрим однородную задачу сопряжения:

$$\Phi^+(t, v) = G(t, v)\Phi^-(t, v). \quad (6)$$

Данная краевая задача допускает решение в замкнутой форме. Наша цель – найти аналитическое выражение для общего решения. Для этого применяем метод, изложенный в работе [1].

Для решения однородной задачи Римана на гиперэллиптических поверхностях будем использовать в качестве разрывного аналога ядра Коши следующее выражение:

$$\hat{w}_{(z, w(z))}(\tau, \zeta) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{w+\zeta}{2\zeta} \cdot \frac{d\tau}{\tau-z} - \frac{\tau d\tau}{2(\tau^2+1)} & \frac{d\tau}{\zeta} & \frac{\tau d\tau}{\zeta} \\ \int_{a_1} \frac{w+\zeta}{2\zeta} \cdot \frac{d\tau}{\tau-z} & \int_{a_1} \frac{d\tau}{\zeta} & \int_{a_1} \frac{\tau d\tau}{\zeta} \\ \int_{a_2} \frac{w+\zeta}{2\zeta} \cdot \frac{d\tau}{\tau-z} & \int_{a_2} \frac{d\tau}{\zeta} & \int_{a_2} \frac{\tau d\tau}{\zeta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \int_{a_1} \frac{d\tau}{\zeta} & \int_{a_1} \frac{\tau d\tau}{\zeta} \\ \int_{a_2} \frac{d\tau}{\zeta} & \int_{a_2} \frac{\tau d\tau}{\zeta} \end{vmatrix}}, \quad (7)$$

где $\zeta^2 = \hat{f}(\tau)$. Ядро является абелевым дифференциалом по переменной (τ, ζ) с полюсами в точках $(\tau, \zeta) = (z, w)$ и вычетов $+1$, а в точках $(\pm i, \pm w(i))$ с вычетом $-\frac{1}{4}$ в каждой точке. По переменной (z, w) ядро является кусочно мероморфной функцией с линиями разрыва a_ν , $\nu=1,2$ и единственным полюсом в точке $(z, w) = (\tau, \zeta)$. Оно также удовлетворяет условию симметрии. Введем в рассмотрение комплексно-нормированный базис абелевых интегралов 1-го рода с общим нижним пределом:

$$u_1(z, w) = \int_{(\infty, \infty)}^{(z, w)} du_1(t, v), \quad u_2(z, w) = \int_{(\infty, \infty)}^{(z, w)} du_2(t, v), \quad (8)$$

где штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования не пересекает линий канонического рассечения. Рассмотрим систему:

$$\sum_{j=1}^2 u_j(Q_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \ln G(\tau, \zeta) du_j(\tau, \zeta) + n_\nu + \sum_{j=1}^2 B_{\nu j} m_j, \quad \nu = 1, 2, \quad (9)$$

где $B_{\nu j}$ – B -периоды базиса (8), а m_j – неопределенные целые числа. Задача нахождения точек $Q_1, Q_2 \in \mathcal{K}$ и целых чисел n_ν, m_j из системы (9) носит название проблемы обращения Якоби. Она обычно записывается как система сравнений по модулю периодов базиса абелевых интегралов 1-го рода

$$\sum_{j=1}^2 u_j(Q_j) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \ln G(\tau, \zeta) du_j(\tau, \zeta), \quad \nu = 1, 2, \quad (\text{по модулю периодов}). \quad (10)$$

Считаем проблему обращения решенной, а $(z_1, w_1), (z_2, w_2), m_1, m_2, n_1, n_2$ – каким-нибудь ее решением. Тем самым определен дивизор $F = \tilde{Q}^2 Q_1^{-1} Q_2^{-1}$. Таким образом, находим общее решение однородной задачи:

$$\Phi(z, w) = \varphi(z, w) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \ln G(z, w) \hat{\omega}(z, w) - \sum_{k=1}^2 \int_{(\infty, \infty)}^{Q_k} \hat{\omega}(z, w) - \sum_{k=1}^2 2\pi i e_k u_k(z, w) \right\}, \quad (11)$$

где φ – произвольная мероморфная функция, кратная дивизору $\varepsilon^{-1} F^{-1}$, $F = \tilde{Q}^2 Q_1^{-1} Q_2^{-1}$, $\text{ord } F = 0$, $\varepsilon := (r_1, 0)^{z_1} (r_2, 0)^{z_2} (r_3, 0)^{z_3} (r_4, 0)^{z_4} (r_5, 0)^{z_5} (r_6, 0)^{z_6}$, $\text{ord } \varepsilon = \chi$. Подчиняя (11) условию симметрии, получим решение задачи (1).

Литература

1. Зверович Э.И. Успехи математических наук. – 1971. – Т. XXVI, вып. 1(157). – С. 113–179.

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ВИДОИЗМЕНЕННОЙ ЗАДАЧИ ШВАРЦА ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

О.Б. ДОЛГОПОЛОВА, Э.И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет, г. Минск

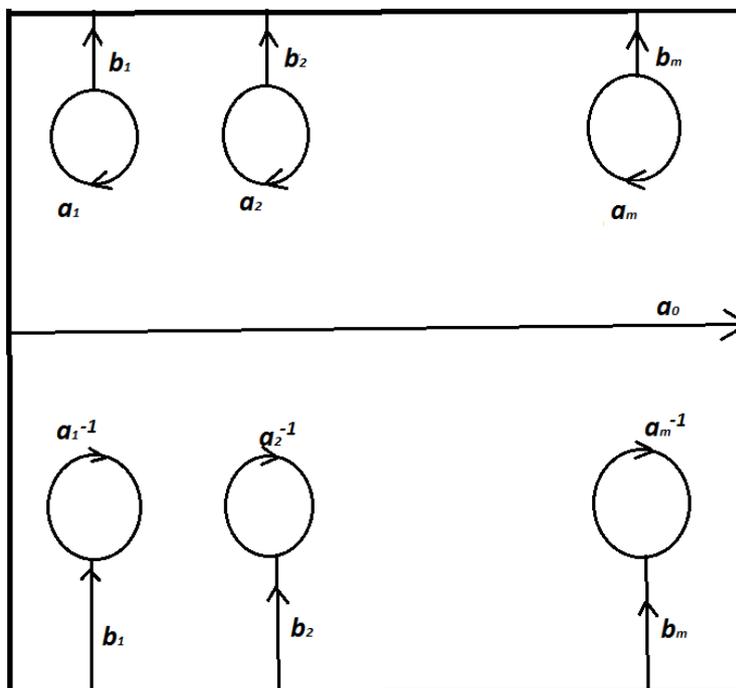
e-mail: dolgopolova@tut.by

Пусть $D \subset \mathbb{C} - (m+1)$ -связная область со стандартно ориентированным простым гладким краем $\partial D = a_0 \cup a_1 \cup \dots \cup a_m$. Рассмотрим так называемую *видоизмененную задачу Шварца*.

Найти константы $c_0, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ и однозначную аналитическую в D функцию $\varphi(z)$ по краевому условию

$$\operatorname{Re} \varphi(t) = c(t) + c_k, \quad t \in a_k, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (1)$$

Плоскость униформирующего параметра z и каноническое рассечение дубля области D выберем так, как показано на рисунке.



Пусть $v_1(z), v_2(z), \dots, v_m(z)$ – базис абелевых интегралов первого рода, комплексно нормированный относительно выбранного канонического рассечения. Проблема обращения Якоби

$$\sum_{\nu=1}^m v_{\nu}(z_{\nu}) \equiv m v_{\mu}(\tau), \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, m$$

имеет очевидное решение $z_1 = z_2 = \dots = z_m = \tau$. Поэтому нетривиальная тэта-функция Римана (iB -матрица b -периодов)

$$\theta(v(z) - m v(\tau) - k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \exp\{-\pi' n B n + 2\pi i' n [v(z) - m v(\tau) - k]\}$$

однозначна и аналитична в D , имеет при $z = \tau$ нуль кратности m и принимает при $z, \tau \in \partial D$ чисто вещественные значения. Выражение

$$d_{\tau} \ln \theta(v(z) - m v(\tau) - k)$$

имеет в точке $z = \tau$ простой полюс с вычетом m и может служить в качестве ядра оператора Шварца области D . Итак, решение задачи (1) следует искать в виде:

$$\varphi(z) = \frac{1}{m\pi i} \sum_{k=0}^m \int_{a_k} [c(t) + c_k] d_t \ln \theta(v(z) - m v(t) - k) + i\beta_0. \quad (2)$$

При фиксированной ветви вектора $\nu(z)$ эта формула дает однозначную аналитическую в D функцию. При изменении ветви $\nu(z)$ переходит в $\nu(z) + iB_\nu$, где iB_ν – ν -ый столбец матрицы iB . Тогда ядро интеграла (2) получает приращение, пропорциональное $dv_\nu(\tau)$, а интеграл получает приращение, пропорциональное интегралу

$$\int_{a_k} [c(t) + c_k] dv_\nu(t). \quad (3)$$

Приравнивая к нулю сумму интегралов (3), получим условие того, что функция (2) не зависит от выбора ветви $\nu(z)$. Это дает систему уравнений

$$\sum_{k=0}^m \int_{a_k} [c(t) + c_k] dv_\nu(t) = 0 \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Полагая $c_0 = 0$, получим:

$$c_\nu = - \int_{\partial D} c(t) dv_\nu(t), \quad \nu = 1, \dots, m.$$

ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

Г.С. ЕВДОКИМОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Большей частью реальные системы массового обслуживания работают в условиях переменной загрузки, поэтому результаты, полученные для случая постоянных параметров, можно применять к ним лишь с большими натяжками. Здесь не стоит приводить примеры зависимостей интенсивности поступления требований от времени, заимствованных из различных областей практики – телефонных сообщений, пунктов скорой медицинской помощи, работы автоматизированных систем и т.д. При этом часто данная зависимость бывает периодической в связи с суточным, годовым или иным ритмом, свойственным природе явления. Подчеркнем, что изменение достигает значительных размеров. Поэтому в настоящее время проблема состоит в построении математических моделей, которые бы больше соответствовали реальности. Тут сразу возникает вопрос: в какой мере можно приближать реальные потоки неоднородными потоками (с параметром, зависящим от времени)? Возможно, что в подавляющем большинстве практических задач такое приближение должно давать вполне удовлетворительные результаты. В частности, особый интерес

при этом должны представлять пуассоновские потоки с параметром, являющимся периодической функцией времени.

Рассмотрим систему массового обслуживания, состоящую из n однородных элементов:

1) каждый элемент может находиться либо в состоянии s_1 , либо в состоянии s_2 ;

2) переход из s_1 , в s_2 осуществляется под воздействием пуассоновского потока событий с периодической интенсивностью $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \lambda(t + \tau);$$

3) переход из состояния s_2 в состояние s_1 происходит с постоянной интенсивностью μ .

Теорема. Пусть дана система, удовлетворяющая условиям 1–3. Тогда при $t \rightarrow \infty$ математические ожидания $m_1(t)$ и $m_2(t)$ состояний s_1 и s_2 изменяются по периодическому закону.

Доказательство. Вполне естественно можно задать следующие начальные условия:

$$m_1(0) = n, \quad m_2(0) = 0.$$

Запишем уравнения математических ожиданий состояний s_1 и s_2 для рассматриваемой системы

$$\begin{cases} m_1'(t) = -\lambda(t)m_1(t) + \mu m_2(t), \\ m_2'(t) = \lambda(t)m_1(t) - \mu m_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Используя нормировочное условие

$$m_1(t) + m_2(t) = n, \quad (2)$$

выразим в (2) $m_1(t)$ через $m_2(t)$ и подставим во второе уравнение системы (1). Получаем дифференциальное уравнение

$$m_2'(t) + [\lambda(t) + \mu]m_2(t) = \lambda(t)n. \quad (3)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$m_2(t) = n \left(\mathbf{1} - e^{-\int_0^t [\lambda(s) + \mu] ds} \right) - n \mu e^{-\int_0^t [\lambda(s) + \mu] ds} \int_0^t e^{\int_0^s [\lambda(s) + \mu] ds} dt. \quad (4)$$

Обозначим $\varphi(t) = e^{\int_0^t [\lambda(s) + \mu] ds}$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ $[\varphi(t)]^{-1} \rightarrow 0$.

Пусть $\overset{0}{\lambda} = \lambda(t) - \bar{\lambda}$ есть центрированная функция.
В этом случае

$$\varphi(t) = e^{\bar{\lambda}t} \overset{0}{\varphi}(t),$$

где

$$\overset{0}{\varphi}(t) = e^{\int_0^t [\lambda(s) + \mu] ds}.$$

Запишем цепочку равенств

$$\frac{\int_0^t \varphi(s) ds}{\varphi(t)} = \frac{\int_0^t e^{\bar{\lambda}s} \overset{0}{\varphi}(s) ds}{e^{\bar{\lambda}t} \overset{0}{\varphi}(t)} = \frac{\int_0^t e^{\bar{\lambda}(s-t)} \overset{0}{\varphi}(s) ds}{\overset{0}{\varphi}(t)},$$

для которых при $s = t - u$ имеем:

$$\frac{\int_0^t e^{\bar{\lambda}(s-t)} \overset{0}{\varphi}(s) ds}{\overset{0}{\varphi}(t)} = \frac{\int_{-t}^0 e^{\bar{\lambda}u} \overset{0}{\varphi}(t+u) du}{\overset{0}{\varphi}(t)}.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \frac{\int_{-\infty}^0 e^{\bar{\lambda}u} \overset{0}{\varphi}(t+u) du}{\overset{0}{\varphi}(t)}. \quad (5)$$

Так как $e^{\bar{\lambda}u} \rightarrow 0$, когда $u \rightarrow \infty$, а $\overset{0}{\varphi}(t)$ ограничена, то интеграл в числителе выражения (5) сходится. В силу периодичности функции $\overset{0}{\varphi}(t)$ функция $\psi(t)$ оказывается также периодической.

Следовательно, при достаточно больших t

$$m_2(t) = n - n \mu \psi(t),$$

$$m_1(t) = n \mu \psi(t).$$

Таким образом, $m_1(t)$ и $m_2(t)$ в установившемся режиме представляют периодические функции.

Обозначая через $P_k(t)$ вероятности нахождения одного элемента в соответствующих состояниях, убеждаемся, что это же утверждение справедливо и для

$$P_k(t) = \frac{m_k(t)}{n}, \quad k = 1, 2,$$

что и доказывает теорему.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2005. – 400 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Академия, 2003. – 464 с.
3. Ермаков С.М. Элементы теории массового обслуживания. – СПб.: Санкт-Петербургский гос. ун-т, 1998. – 296 с.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Е.П. ЕМЕЛЬЧЕНКОВ, В.И. МУНЕРМАН

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: ypy1101@gmail.com

При рассмотрении двух информационных систем $S1$ и $S2$ важно знать, являются ли эти системы информационно эквивалентными, т.е. возможно ли из системы $S1$ получить информацию, которую можно получить из системы $S2$, и наоборот.

При обсуждении эквивалентности информационных систем мы исходим из того, что модели данных представляют собой аксиоматические теории, которые, в частности, могут быть заданы с помощью многоосновных алгебраических систем.

Приведем необходимые определения, большинство которых взято из [1].

Алгебраической системой или просто *системой* называется тройка $S = \langle A; \Omega_F; \Omega_P \rangle$, состоящая из трех множеств: непустого множества A , множества операций $\Omega_F = \{F_1, \dots, F_k\}$, определенных на множестве A , и множества предикатов $\Omega_P = \{P_1, \dots, P_l\}$, заданных на множестве A .

Множество A называется *носителем* или *основным множеством* системы S .

Кортеж $(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l)$, в котором числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ являются аргументами операций F_1, \dots, F_k , а числа β_1, \dots, β_l – аргументами отношений P_1, \dots, P_l , называется *типом* системы S .

В отличие от других операций и предикатов, которые могут быть определены на множестве A , операции F_1, \dots, F_k и предикаты P_1, \dots, P_l называются *основными* или *главными*.

Система $S = \langle A; \Omega_F; \Omega_P \rangle$ называется *алгеброй*, если $\Omega_P = \emptyset$, и *моделью* (*реляционной моделью*), если $\Omega_F = \emptyset$.

Объединяя множества Ω_F и Ω_P системы S и полагая $\Omega = \Omega_F \cup \Omega_P$, мы сможем записать систему более кратко $S = \langle A; \Omega \rangle$.

Если даны две системы $S1 = \langle A; \Omega \rangle$ и $S2 = \langle B; \Omega' \rangle$ одного и того же типа, то главные операции $F_i \in \Omega$ и $F_i' \in \Omega'$, а также главные предикаты $P_j \in \Omega$ и $P_j' \in \Omega'$ для каждого i и j называются *одноименными*. Часто одноименные главные операции и одноименные главные предикаты однотипных алгебраических систем обозначают в каждой из рассматриваемых систем одинаково.

Отображением алгебраической системы $S1$ в алгебраическую систему $S2$ называется отображение основного множества A системы $S1$ в основное множество B системы $S2$.

Изоморфизмом алгебраической системы $S1 = \langle A; F_1, \dots, F_k; P_1, \dots, P_l \rangle$ в алгебраическую систему $S2 = \langle B; G_1, \dots, G_k; Q_1, \dots, Q_l \rangle$ того же типа называется взаимно однозначное отображение φ системы $S1$ в систему $S2$, сохраняющее главные операции и главные предикаты системы $S1$, т. е. удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} \varphi(F_i(x_1, \dots, x_{m_i})) &= G_i(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{m_i})), \\ P_j(x_1, \dots, x_{m_j}) &\Leftrightarrow Q_j(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{m_j})) \end{aligned}$$

для всех наборов переменных из A , для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ и для всех $j \in \{1, \dots, l\}$.

В некоторых случаях удобно в качестве носителя системы рассматривать не единственное множество A , а совокупность A_1, \dots, A_r попарно не пересекающихся множеств. Возникающую при этом систему $S = \langle A_1, \dots, A_r; \Omega \rangle$ называют *многоосновой алгебраической системой*.

Понятие изоморфизма распространяется на однотипные многоосновные алгебраические системы $S1 = \langle A_1, \dots, A_r; \Omega \rangle$ и $S2 = \langle B_1, \dots, B_r; \Omega' \rangle$. При этом отображение φ должно устанавливать взаимно однозначное отображение между соответствующими множествами A_i и B_i систем $S1$ и $S2$ для всех $i \in \{1, \dots, r\}$.

Введем теперь некоторую аналогию понятия изоморфизма многоосновных алгебраических систем для разнотипных систем.

Пусть $S1 = \langle A_1, \dots, A_k; \Omega1 \rangle$ и $S2 = \langle B_1, \dots, B_l; \Omega2 \rangle$ – две многоосновные алгебраические системы. Рассмотрим многоосновную алгебраическую систему $S = \langle C_1, \dots, C_m; \Omega \rangle$ – такую, что любое из множеств $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l$ встречается среди C_1, \dots, C_m , $\Omega1 \subseteq \Omega$ и $\Omega2 \subseteq \Omega$. Предположим, что средствами системы $S1$ нам удалось расширить ее до системы S и, аналогично, средствами системы $S2$ расширить $S2$ до S . Обозначим новые расширенные однотипные многоосновные системы через $S10$ и $S20$ соответственно.

Многоосновные системы $S1$ и $S2$ назовем *псевдоизоморфными*, если возможно построить их однотипные расширения $S10$ и $S20$, между которыми устанавливается изоморфное соответствие $\varphi: S10 \rightarrow S20$.

Из определения следует, что псевдоизоморфизм многоосновных алгебраических систем $S1$ и $S2$ определяется тремя компонентами:

1) совокупностью определений и алгоритмов, конструктивно задающих расширение системы $S1$ до некоторой системы $S10$;

2) совокупностью определений и алгоритмов, конструктивно задающих расширение системы $S2$ до системы $S20$ однотипной с системой $S10$;

3) изоморфизмом φ системы $S10$ на однотипную систему $S20$.

Отметим, что в псевдоизоморфных информационных системах, понимаемых как аксиоматические теории, объемы получаемой (выводимой) информации совпадают (если, разумеется, у этих теорий эквивалентные системы правил вывода).

Отметим также, что две псевдоизоморфные однотипные многоосновные алгебраические системы $S1$ и $S2$ могут быть не изоморфными.

Для иллюстрации приведем примеры двух разнотипных аксиоматических теорий и докажем их псевдоизоморфизм.

Пример 1. Папповой проективной плоскостью называется двухосновная алгебраическая система $S1 = \langle \mathcal{P}, \mathcal{L}; I \rangle$, удовлетворяющая аксиомам А1–А4.

Элементы множества \mathcal{P} называются точками, элементы множества \mathcal{L} – прямыми, предикат I определен на декартовом произведении $\mathcal{P} \times \mathcal{L}$ основ \mathcal{P} и \mathcal{L} . Отношение, соответствующее предикату I , называется отношением инцидентности.

Аксиомами теории проективных папповых плоскостей служат следующие четыре предложения.

А1. Существуют четыре точки, никакие три из которых не инцидентны одной прямой;

А2. Две различные точки инцидентны точно одной прямой;

А3. Существует только одна точка, инцидентная двум различным прямым;

А4. Аксиома Паппа. Если l и l' – две различные прямые, A, B, C – три различные точки, инцидентные прямой l , а A', B', C' – три различные точки, инцидентные l' , причём все эти точки отличны от O – точки пересечения прямых l и l' , то точки пересечения пар соответствующих сторон AB' и $A'B$ (P), BC' и $B'C$ (R), AC' и $A'C$ (Q) лежат на одной прямой (рис. 1).

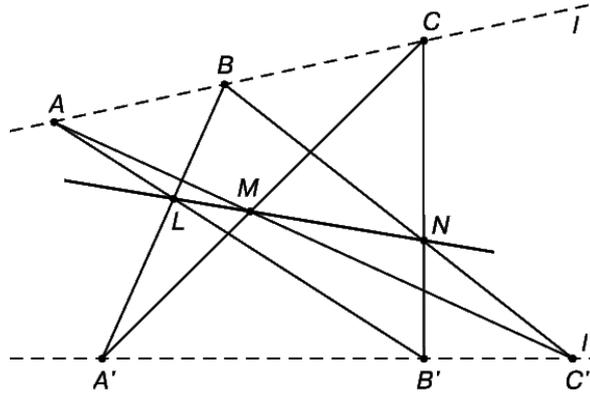


Рис. 1. Аксиома Паппа

Пример 2. Алгебраическая система $S_2 = \langle \mathfrak{M}; +, *, 0, 1 \rangle$ типа $(2, 2, 0, 0)$ называется полем, если выполняются три аксиомы:

V1. Алгебра $\langle \mathfrak{M}; +, 0 \rangle$ является абелевой группой с нейтральным элементом 0;

V2. Алгебра $\langle \mathfrak{M} \setminus \{0\}; *, 1 \rangle$ является абелевой группой с нейтральным элементом 1;

V3. Операция $*$ дистрибутивна относительно операции $+$.

В примерах 1 и 2 приведены две очень непохожие разнотипные алгебраические системы. Покажем, что эти системы псевдоизоморфны. Для этого соответственно расширим системы S_1 и S_2 до систем S_{10} и S_{20} типа $(2, 2, 0, 0; 2)$. По сути дела, системы S_1 и S_2 будут расширяться до системы

$$S = \langle \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}; +, *, 0, 1; I \rangle.$$

Как правило, построение таких расширений не является тривиальным упражнением. Нам, однако, повезло, исследователи проективных плоскостей получили ряд результатов, облегчающих нашу задачу.

Было доказано, что любая паппова проективная плоскость индуцирует алгебру $\langle \mathfrak{M}_1; +_1, *_1, 0_1, 1_1 \rangle$, являющуюся полем. В качестве расширения системы S_1 выберем систему

$$S_{10} = \langle \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}_1; +_1, *_1, 0_1, 1_1; I \rangle.$$

Доказано также, что в системе S_1 можно определить два множества \mathfrak{P}_2 и \mathfrak{L}_2 и предикат I_2 так многоосновная система $\langle \mathfrak{P}_2, \mathfrak{L}_2; I_2 \rangle$ папповой проективной плоскостью. В качестве расширения системы S_2 выберем систему

$$S_{20} = \langle \mathfrak{P}_2, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{M}; +, *, 0, 1; I_2 \rangle.$$

Несложно доказать, что системы S_{10} и S_{20} изоморфны.

Следовательно, системы $S1$ и $S2$ псевдоизоморфны. Учитывая, что в системах $S1$ и $S2$ одинаковые правила вывода, заключаем, что любая новая информация, полученная в $S1$ средствами системы $S1$, может быть получена и в $S2$ средствами системы $S2$ и наоборот. Другими словами, столь не похожие друг на друга системы оказались информационно эквивалентными после установления их псевдоизоморфизма.

Литература

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

ЗАДАЧА О МОДУЛЕ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Э.И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет, г.Минск
e-mail: Zverovich@bsu.by

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – $(m+1)$ -связная область с краем $\partial D = b_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_m$, который будем считать простым и гладким. Поставим следующую краевую задачу. Найти функцию $F(z)$, однозначную и аналитическую в области D , H -непрерывную в $D \cup \partial D$, по следующему краевому условию

$$|F(t)| = g(t), \quad t \in \partial D, \quad (1)$$

где $g(t)$ – заданная H -непрерывная функция. В случае $m=0$, т.е. когда область D – односвязная, решение задачи (1) известно и явно выражается через оператор Шварца области D . Например, в случае круга $|z| \leq 1$ оно имеет следующий вид (см. [1, с. 317]):

$$F(z) = \Phi(z) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{t+z}{t-z} [\ln g(t) - \ln |\Phi(t)|] \frac{dt}{t} \right\}, \quad |z| \leq 1, \quad (2)$$

где $\Phi(z)$ – произвольная аналитическая в круге $|z| \leq 1$ функция, H -непрерывно продолжимая на окружность $|t|=1$, где она не обращается в нуль. Это решение, однако, неприменимо для многосвязных областей, так как оператор Шварца для многосвязной области представляет, вообще говоря, многозначную функцию.

В связи с этим возникла идея искать решение задачи (1) для многосвязной области в виде, аналогичном (2), наложив на расположение нулей функции $\Phi(z)$ такие ограничения, которые бы обеспечивали однозначность функции $F(z)$. Как известно, оператор Шварца для $(m+1)$ -связной области D от функции $c(t)$ можно задать в виде

$$\frac{1}{m\pi i} \int_{\partial D} c(\tau) \cdot d_\tau \ln \theta(\zeta(z) - m\zeta(\tau) - k), \quad z \in D, \quad (3)$$

где $\theta(u)$ – m -кратный тэта-ряд, $k \in \mathbb{C}^m$ – некоторый постоянный вектор, $\zeta(z) = (\zeta_1(z), \dots, \zeta_m(z))$ – базис абелевых интегралов первого рода дубля области D . Интегралы $\zeta_\nu(z)$ выражаются через гармонические меры $\omega_\nu(z)$ граничных кривых b_ν относительно области D по формулам:

$$\zeta_\nu(z) = \frac{\omega_\nu(z) + i\tilde{\omega}_\nu(z)}{2}, \quad z \in D, \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

где $\tilde{\omega}_\nu(z)$ – функция, гармонически сопряженная к функции $\omega_\nu(z)$. Многозначность оператора Шварца (3) описывается тем, что при обходе точкой z кривой b_ν интеграл (3) получает приращение, пропорциональное интегралу

$$2 \int_{\partial D} c(t) d\zeta_\nu(t), \quad \nu = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Станем теперь искать решение задачи (1) в виде

$$F(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{m\pi i} \int_{\partial D} \left[\ln g(t) - \ln \prod_{k=1}^m |t - z_k| \right] d_\tau \ln \theta(\zeta(z) - m\zeta(t) - k) \right\}, \quad z \in D, \quad (6)$$

где $z_1, z_2, \dots, z_m \in D$ – точки, которые будем пытаться подобрать так, чтобы формула (6) представляла однозначную аналитическую функцию. С этой целью подставим в (5) вместо $c(t)$ плотность интеграла (6) и полученное выражение приравняем к $2\pi i k_\nu$, где k_ν – неопределенные целые числа. Тогда получим следующие уравнения:

$$2 \int_{\partial D} \left[\ln g(t) - \ln \prod_{k=1}^m |t - z_k| \right] d\zeta_\nu(t) = 2\pi i k_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Используя, далее, известное представление гармонической меры в виде логарифмического потенциала

$$\omega_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \ln \frac{1}{|t - z|} d\tilde{\omega}_\nu(t), \quad z \in D, \quad \nu = 1, 2, \dots, m,$$

можно преобразовать систему уравнений (7) к виду следующей системы сравнений:

$$\sum_{\nu=1}^m \omega_\mu(z_\nu) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \ln \frac{1}{g(t)} d\tilde{\omega}_\mu(t) \pmod{Z^m}, \quad \mu = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

где $z_1, z_2, \dots, z_m \in D$ – неизвестные точки.

В случае двусвязной области ($m=1$) система (8) сводится к одному уравнению, разрешимость которого очевидна. Вопрос о разрешимости системы (8) в случае $m>1$ остается открытым.

Литература

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.В. КАРАЧИК, М.Е. КОРЖОВА

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: karachik@susu.ru

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами, записанное в виде

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = 0, \quad (1)$$

где $a_k = \text{const}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Построение фундаментальной системы решений уравнения (1) и решения задачи Коши для уравнения (1) с данными при $t=0$

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (2)$$

хорошо известно, восходит еще к Эйлеру и приводится во всех учебных курсах по дифференциальным уравнениям, например [1]. Целью настоящего доклада является представление нового метода построения решения задачи Коши (1)–(2) и фундаментальной системы решений уравнения (1), который не требует нахождения корней характеристического уравнения. Этот метод основан на методе построения решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами [2].

Теорема 1. *Решение задачи Коши (1)–(2) можно записать в форме*

$$y(t) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{\alpha} a_{k+n-\alpha} b_k \right) y_{\alpha}^{+}(t), \quad (3)$$

где $a_n = 1$, а функции $y_{\alpha}^{+}(t)$ определяются равенством

$$y_{\alpha}^{+}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \right)^k \frac{t^{nk+\alpha}}{(nk+\alpha)!}. \quad (4)$$

Замечание 1. Решение задачи Коши (1)–(2) определяется формулой (3), в которую нужно только подставить коэффициенты конкретного уравнения и начальные данные. Никаких дополнительных вычислений не требуется.

Теорема 2. *Функции $y_\alpha^+(t)$ определены на R и $y_\alpha(t) \in C^\infty(R)$, причем дифференцирование $y_\alpha(t)$ законно под знаком суммы.*

Решение $y_\alpha^+(t)$ уравнения (1) из формулы (4) не является обычным степенным рядом, но с помощью пакета компьютерной математики Mathematica можно легко найти любое количество его членов.

Рассмотрим неоднородное уравнение (1)

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = f(t), \quad (5)$$

где функция $f(t)$ непрерывна в R .

Теорема 3. *Частное решение уравнения (5) можно представить в виде*

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) y_{n-1}^+(t-\tau) d\tau$$

или если $f(t)$ – полином вида $f(t) = \sum_p C_p t^p / p!$, то в форме

$$y(t) = \sum_p C_p y_{n+p}^+(t).$$

Формулы дифференцирования решения задачи Коши (1)–(2) по коэффициентам уравнения (1) и начальным данным (2) дает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $y(t)$ -решение задачи Коши (1)–(2). Тогда справедливы следующие формулы дифференцирования*

$$\frac{dy(t)}{db_m} = \sum_{\alpha=0}^{n-m-1} a_{n-\alpha} y_{\alpha+m}^+(t), \quad \frac{dy(t)}{da_m} = \sum_{\alpha=1}^m b_{m-\alpha} y_{n-\alpha}^+(t) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{dy_\alpha^+(t)}{da_m} \sum_{k=0}^{\alpha} a_{k+n-\alpha} b_k,$$

где $0 \leq m \leq n$ и

$$\frac{dy(t)}{da_m} = y^*(t) - \int_0^t y(\tau) y_{n-1-m}^+(t-\tau) d\tau,$$

где обозначено $y^*(t) = \sum_{\alpha=n-m}^{n-1} b_{m+\alpha-n} y_\alpha^+(t)$.

Пример. Решение задачи Коши

$$y^{(4)} + y = 0; \quad y(0) = 1, y^{(1)}(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

согласно формуле (3), в которой $a_0 = a_4 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ и $b_0 = 1$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, имеет простой вид

$$y(t) = y_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{4k}}{(4k)!}.$$

Это же решение, записанное в традиционной форме, имеет вид

$$y(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right).$$

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
2. Karachik V.V. Polynomial solutions to the systems of partial differential equations with constant coefficients // Yokohama Mathematical Journal. – 200. – 47. – P. 121–142.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

М.Н. КИРСАНОВ

Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва
e-mail: mpei@yandex.ru

1. Введение.

Вопросы, рассматриваемые в настоящей статье, ведут свое происхождение из анализа процесса выпучивания реологических систем [1]. Математический аппарат, используемый в этих задачах, может быть обобщен на исследования особенностей некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений. Ниже приводится оператор дифференциального типа, свойства которого определяют поведение нелинейных реологических систем и задают условия для преобразования и упрощения дифференциальных уравнений. Показано также, что этот оператор связан с ортогональными полиномами Эрмита и цилиндрическими функциями.

Дадим следующее определение оператора K_N , действующего в общем случае на $M+1$ функцию, каждая из которых обладает $N-1$ производной:

$$K_N(h_0(t), h_1(t), \dots, h_M(t)) = \det A_N.$$

Элементы матрицы A_N размера N имеют вид $a_{mn} = \sum_{j=0}^{M+1} h_j^{(m-n+j)} C_{n-j-1}^{m-1}$, где $C_n^m = m!/((m-n)!n!)$, $C_n^m = 0$ при $n < 0$ или $n < m$, $h_{M+1} = 1$, верхний индекс в скобках указывает на порядок производной. Для более наглядного представления о структуре матрицы A_N заметим, что справедливо соотношение $a_{mn} = a_{m-1,n-1} + \dot{a}_{m-1,n}$. Приведем два примера.

Пример 1. Пусть $N = 3$, $M = 2$. Матрицу A_N запишем в виде суммы

$$A_N = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ \dot{h}_0 & h_0 & 0 \\ \ddot{h}_0 & 2\dot{h}_0 & h_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & h_1 & 0 \\ 0 & \dot{h}_1 & h_1 \\ 0 & \ddot{h}_1 & 2\dot{h}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & \dot{h}_2 \\ 0 & 0 & \ddot{h}_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Пример 2. $N = 4$, $M = 0$:

$$K_4(g(t)) = \det \begin{bmatrix} g & 1 & 0 & 0 \\ \dot{g} & g & 1 & 0 \\ \ddot{g} & 2\dot{g} & g & 1 \\ g^{(3)} & 3\ddot{g} & 3\dot{g} & g \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Выражение (1) позволяет заметить, что число аргументов $M+1$ оператора ограничено сверху: $M < N$. Приведем две математические задачи, в которых встречается оператор K_N .

2. Точки неустойчивости обобщенной задачи Коши.

Рассмотрим следующее обобщение начальной задачи для произвольного обыкновенного дифференциального уравнения порядка n . Имеем уравнение

$$f(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(n)}) = 0, \quad (3)$$

где $u = u(t)$, а $\dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(n)}$ – производные по t порядков $1, 2, \dots, n$. При $t = t_0$ поставим n начальных условий, каждое из которых имеет вид

$$u^{(k)}(t_0) = U_k, \quad k+1 \in \mathbb{N}, \quad U_k \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Классическая задача Коши следует из (3), (4) при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Для частного случая уравнения (3) при $n = 1$

$$\dot{u} + g(t)u = 0 \quad (5)$$

введем понятие *точки неустойчивости начальной задачи*. Значение $t = \tau_N$ назовем точкой неустойчивости порядка N , если при $t_0 \rightarrow \tau_N$, $u^{(N)}(t_0) = U_N$, $u^{(i)}(t_0) \rightarrow \infty$, $i \neq N$.

Выясним геометрический смысл обобщенной задачи Коши. Если в классической задаче выбирается интегральная кривая, проходящая на плоскости u, t через точку $u = u_0$, $t = t_0$, то в обобщенной задаче из всех интегральных кривых, пересекающих прямую $t = t_0$, требуется выбрать ту, у которой в точке пересечения удовлетворяется условие $u^{(N)}(t_0) = U_N$. Например, при $N = 1$ требуется найти интегральную кривую, пересекающую прямую $t = t_0$ под заданным углом. Одновременно

становится понятным смысл точки неустойчивости: если при $t_0 \rightarrow \tau_1$ ордината пересечения стремится к бесконечности, то точка τ_1 – неустойчивая.

Первый способ определения точек неустойчивости состоит в использовании вида интегральной кривой уравнения (5)

$$u = U_0 \exp(-J), \quad J = \int_{t_0}^t g dt. \quad (6)$$

Дифференцируя (6), получим последовательно

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -U_0 g \exp(-J), \quad \ddot{u} = U_0 (g^2 - \dot{g}) \exp(-J), \dots, \\ u^{(k)} &= (-1)^k U_0 B_k \exp(-J), \end{aligned} \quad (7)$$

где, как легко видеть, функции $B_k(t)$ образуются по правилу

$$B_{k+1} = B_k g - \dot{B}_k. \quad (8)$$

Пусть задана начальная производная порядка N

$$u^{(N)}(t_0) = U_N = (-1)^N U_0 B_N. \quad (9)$$

Исключая U_0 из (9) и (7) при $t = t_0$, получим

$$u^{(k)}(t_0) = (-1)^{k-N} (B_k/B_N) U_N. \quad (10)$$

Значение $u^{(k)}(t_0)$ стремится к бесконечности при $t_0 \rightarrow \tau_N$, где τ_N – нули функции B_N . Следовательно, точки неустойчивости определяются корнями уравнений $B_N = 0$.

Второй способ позволяет найти точки неустойчивости непосредственно по дифференциальному уравнению, не используя его интеграла, и приводит к оператору K_N . Последовательно дифференцируя (5), получим систему N уравнений для переменных $u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(N)}$

$$\begin{aligned} ug + \dot{u} &= 0, \\ u\dot{g} + \dot{u}g + \ddot{u} &= 0, \\ u\ddot{g} + 2\dot{u}\dot{g} + \ddot{u}g + u^{(3)} &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$ug^{(N-1)} + (N-1)\dot{u}g^{(N-2)} + \dots + C_i^{n-1} u^{(i)} g^{(N-1-i)} + \dots + u^{(N)} = 0.$$

Принимая $u^{(N)}$ за известную величину и относя ее в правую часть, получим систему N уравнений для N переменных $u^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, определитель которой равен $K_N(g) = B_N$ (см. пример 2). Таким образом, в нулях функций B_N связь между производными вырождается, что и определяет точки неустойчивости. Раскрывая определитель матрицы (2) по элементам последнего столбца, получим

$$\begin{aligned} B_4 &= g^4 - 6g^2\dot{g} + 3\dot{g}^2 + 4\ddot{g}g - g^{(3)} = \\ &= gB_3 - 3\dot{g}B_2 + 3\ddot{g}B_1 - g^{(3)}B_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $B_0 = 1$, $B_1 = g$, $B_2 = g^2 - \dot{g}$, $B_3 = g^3 - 3g\dot{g} + \ddot{g}$. Соотношение (11) легко обобщить на произвольный порядок системы

$$B_{N+1} = \sum_{k=0}^N (-1)^k C_k^N g^{(k)} B_{N-k}. \quad (12)$$

Выведем формулу Родрига для функций B_N . Рассмотрим следующее выражение

$$B_i = (-1)^i h(t) Q^{(i)}(t), \quad (13)$$

где $Q(t)$ – весовая функция, $h(t)$ – некоторая вспомогательная функция. Подставим (13) в (12) и воспользуемся формулой Лейбница для N -й производной произведения двух функций. Получим

$$Q^{(N+1)} = -(gQ)^{(N)}. \quad (14)$$

Интегралом (14) является соотношение

$$Q = Q_0 \exp(-J). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (13) и выбирая $h = \exp(J)/Q_0$, получим формулу Родрига, задающую функции B_N

$$B_N = \exp(J) (-1)^N \frac{d^N}{dt^N} (\exp(-J)). \quad (16)$$

При $g = 2t$ имеем, согласно (6), $J = t^2$. Из (16) следует определение ортогональных полиномов Эрмита H_N [2]. Таким образом, полиномы Эрмита можно задать с помощью введенного оператора: $K_N(2t) = H_N(t)$.

Понятие неустойчивости имеет приложение в механике. Рассмотрим прямолинейный шарнирно опертый стержень длиной l , сжатый постоянной по времени осевой силой T . Материал стержня подчиняется нелинейному реологическому определяющему соотношению

$$\dot{p} p^\alpha = f(\sigma), \quad (17)$$

где $p = \varepsilon - \sigma/E$ – деформация ползучести, $\dot{p} = dp/dt$ – скорость деформации ползучести, σ, ε – напряжение и деформация; α, E – параметр упрочнения и модуль упругости; $f(\sigma)$ – функция, показывающая зависимость деформации ползучести от уровня напряжений. Под действием некоторого возмущения сжатый стержень примет форму, отличную от прямолинейной, а напряжения и деформации ползучести получат малые приращения $\Delta\sigma$ и Δp , удовлетворяющие линеаризованному соотношению (17)

$$p^\alpha \Delta p + \alpha \dot{p} p^{\alpha-1} \Delta p = f' \Delta \sigma, \quad (18)$$

где $f' = df/d\sigma$. Пользуясь гипотезой плоских сечений и уравнением равновесия, получим из (18) дифференциальное уравнение для амплитуды U прогиба, представленного в виде $\Delta v = U \sin \mu y$, $\mu = m\pi/l$; m – число полуволов по длине стержня [1]

$$(\alpha - \xi)(\dot{p}/p)U + \dot{U} = 0. \quad (19)$$

Здесь введена величина ξ , монотонно связанная со временем t ,

$$\xi = p(f'/f)E\sigma(\sigma_E - \sigma),$$

(σ_E – критическое напряжение упругого стержня). Кривая ползучести $p(t) = [(1 + \alpha)tf]^{1+\alpha}$ получается интегрированием (17) при $\sigma = \text{const}$.

Точки неустойчивости обобщенной задачи Коши для уравнения (19) соответствуют таким значениям времени прямолинейного деформирования, когда возмущения высших производных прогиба вызывают неограниченный прогиб. Найдем эти точки.

Функции $K_N((\alpha - \xi)(\dot{p}/p)) = B_N$, нулями которых являются точки неустойчивости, представим в виде $B_N(t) = (-1)^N b_N(\xi)(\dot{p}/p)^N$, где b_N являются полиномами по ξ . Выпишем первые четыре полинома [1]:

$$\begin{aligned} b_1 &= \xi - \alpha, \\ b_2 &= \xi^2 - 3\xi\alpha + \alpha(2\alpha + 1), \\ b_3 &= \xi^3 - 6\alpha\xi^2 + \alpha(4 + 11\alpha)\xi - \alpha(2\alpha + 1)(3\alpha + 2), \\ b_4 &= \xi^4 - 10\alpha\xi^3 + 5\alpha(2 + 7\alpha)\xi^2 - 5\alpha(2\alpha + 1)(5\alpha + 2)\xi + \\ &\quad + \alpha(2\alpha + 1)(3\alpha + 2)(4\alpha + 3). \end{aligned}$$

Точки неустойчивости связаны здесь со значениями величины ξ . Каждая точка неустойчивости определяет некоторую кривую $\sigma(t)$, проходящую через точку $\sigma = \sigma_E$, $t = 0$, которая соответствует мгновенной потере устойчивости при достижении эйлеровой критической нагрузки упругого стержня. Зная уровень приложенного напряжения, можно вычислить опасные моменты $t = \tau_N$ ($N = 1, 2, \dots$), в которых в соответствии с определением возмущение N -х производных прогиба вызывает выпучивание – бесконечные прогибы в начальный момент.

Определяя место предложенного подхода к анализу выпучивания конструкций среди других теорий, заметим, что теория точек неустойчивости не является теорией устойчивости ни в классическом смысле ни с какой-либо поправкой на вид возмущения. Скорее всего, теория неустойчивости начальной задачи включается в теорию катастроф, так как, согласно [3], катастрофой называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Если предполагать, что стержень в каждый момент времени, начиная со времени приложения осевой нагрузки, тестируется как угодно малыми возмущениями прогиба и производными прогиба по времени, то точка неустойчивости – это момент времени, когда возмущение вызывает заметные (или бесконечно большие) прогибы, тогда как в другие моменты времени реакция на такое возмущение будет также как угодно малой величиной, которой можно пренебречь и считать стержень

прямым. Таким образом, в упомянутом определении катастрофы «плавное изменение внешних условий» – это течение времени опыта сжатия стержня, «скачкообразное изменение» – наличие конечного отклика в точке неустойчивости.

Рассмотрим один частный случай: $\alpha = 1$. Имеет место зависимость

$$b_N = (1 - 2N)b_{N-1} + \xi^2 b_{N-2}. \quad (20)$$

Из (8) следует

$$b_{N+1} = b_N(\xi - 2N - 1) + b'_N \xi, \quad (21)$$

где $b'_N = db_N/d\xi$. Зависимости (20) и (21) дают дифференциальное уравнение для b_N

$$b_N \xi + 2b_N(\xi - N) - 2Nb_N = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22), родственное уравнению Бесселя, имеет общее решение вида [4]

$$b_N(\xi) = \xi^\nu e^{-\xi} Z_\nu(i\xi), \nu = (1 + 2N)/2.$$

Следовательно, при определенном выборе констант в решении $Z_\nu = C_1 J_\nu + C_2 Y_\nu$, b_N представимы линейной комбинацией функций Бесселя (с множителем $\xi^\nu e^{-\xi}$). Найдя функцию g из сопоставления (15) и (19)

$$g = (\alpha/p - \lambda)\dot{p}, \lambda = (f'/f)E\sigma/(\sigma_E - \sigma), \quad (23)$$

получим $K_N((1 - \lambda\sqrt{2tf})/(2t)) = \xi^{1-\nu} \exp(-\xi)(C_1 J_\nu + C_2 Y_\nu)$.

Заметим, что явление неустойчивости может проявляться и в других процессах. Например, в [4] исследуется стабильность движения кулисы, а в [5] построена модель течения полимеров, обнаруживающая явление неустойчивости.

3. Некоторые свойства оператора $K_N(g)$.

1. Теорема разделения нулей. Сохраним обозначение $K_N(g) = B_N(t)$.

Докажем теорему, упорядочивающую нули функции $B_N(t)$.

Теорема. *Между нулями $\tau_{N,1}$ и $\tau_{N,2}$ функции $B_N(t)$ (если они существуют) лежит по крайней мере один нуль функции $B_{N+1}(t)$:*

$$\tau_{N,1} < \tau_{N+1} < \tau_{N,2}.$$

Доказательство. Равенство (8) представляет собой линейное дифференциальное уравнение для $B_N(t)$. Предположим, что функция $B_N(t)$ имеет два нуля $\tau_{N,1}$ и $\tau_{N,2}$. Выпишем решение (8) с начальным условием $B_N(\tau_{N,1}) = 0$,

$$B_N(t) = \exp(J) \int_{\tau_{N,1}}^t B_{N+1}(t) \exp(-J) dt,$$

где $J = \int_{\tau_{N,1}}^t g dt$. Если взять здесь в качестве аргумента второй корень уравнения $B_N = 0, t = \tau_{N,2}$, то интеграл от функции B_{N+1} (с положительным множителем $\exp(-J)$) на интервале от $\tau_{N,1}$ до $\tau_{N,2}$ оказывается равным нулю. Следовательно, эта функция, являясь непрерывной, меняет знак, пересекая ось t между $\tau_{N,1}$ и $\tau_{N,2}$. Таким образом, корень уравнения $B_{N+1} = 0$ лежит в этом интервале, что и требовалось доказать.

2. Методом математической индукции с использованием (8) легко доказать следующие свойства оператора K_N :

$$K_N(cg(t)) = c^N K(g(t/c)), \quad (24)$$

$$K_N(a/(t+c)) = a(a+1)\dots(a+N-1)/(t+c)^N, \quad (25)$$

$$K_N(g(t)+a) = \sum_{i=0}^N C_i^N K_i(g(t))a^{N-i}, \quad (26)$$

где a, c – некоторые вещественные константы. Свойство (24) имеет практическое значение при вычислении точек неустойчивости процесса деформирования сжатого стержня при ползучести. Согласно (23), замена $g(t)$ на $cg(t)$ означает, что скорость деформации ползучести увеличивается в c раз. Пересчет точек неустойчивости при этом производится просто: картина их распределения на оси t в соответствии с (24) сжимается в c раз.

Свойство (25) устанавливает, что в ядро оператора K_N входят функции $g = -m/(t+c)$, $m = 0, 1, \dots, N-1$. Рассуждения о ядрах оператора, действующего на несколько функций, приводит нас к следующему результату, связанному с решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Условие редукции дифференциального уравнения.

1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка N

$$y^{(N)} + y^{(N-1)}h_{N-1}(t) + \dots + \dot{y}h_2(t) + \dot{y}h_1(t) + yh_0(t) = 0. \quad (27)$$

Последовательно дифференцируя исходное уравнение $N-1$ раз, составим систему N уравнений, которую запишем в виде

$$G\vec{U} = 0, \quad (28)$$

где $\vec{U} = \{y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(2N-1)}\}$. Матрицу G , размером $N \times 2N$ представим суммой

$$G = \sum_{i=0}^N G_i. \text{ Каждое слагаемое } G_i \text{ отвечает функции } h_i(t) \text{ и имеет структуру}$$

(на примере $N = 4$)

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & h_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dot{h}_i & h_i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddot{h}_i & 2\dot{h}_i & h_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_i^{(3)} & 3\ddot{h}_i & 3\dot{h}_i & h_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Номера ненулевых столбцов матрицы равны $i+1, i+2, \dots, i+N-1$. Каждая k -я строка матрицы представляет собой коэффициенты при $y^{(m)}, i \leq m \leq i+k-1$ в формуле Лейбница для $k-1$ -й производной произведения $h_i(t)y^{(i)}$.

Разделим матрицу G на две части. Первые N столбцов образуют матрицу A_N , последние – матрицу C . Запишем систему (27) в виде

$$A_N \vec{V} = -C \vec{W}, \quad (29)$$

где \vec{V} – вектор, составленный из первых N элементов \vec{U} , а \vec{W} – из N последних. Представим правую часть системы (28) в виде вектора $\vec{F} = -C \vec{W}$, в компоненты которого входят только старшие производные функции y (порядка от N до $2N-1$). Запишем решение (28) по правилу Крамера $y^{(i)} D = D_i, i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, где D – определитель матрицы A_N , или, в соответствии с определением оператора $D = K_N(h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$, а D_i – определитель матрицы, полученной заменой i -го столбца матрицы A_N на вектор \vec{F} . Если $D = 0$, то

$$D_i = y^{(2N)} g_N(t) + \dots + y^{(N+1)} g_1(t) + y^{(N)} g_0(t) = 0, \quad (30)$$

где коэффициенты $g_i(t)$ выражаются через функции $h_i(t)$ и их производные. Вводя обозначение $v = y^{(N)}$, получим из (29) линейное дифференциальное уравнение для v порядка $N-1$. Легко показать, что это уравнение не зависит от номера столбца i , заменяемого в матрице A_N на вектор \vec{F} . Таким образом, функции, составляющие ядро оператора $K_N(h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$, являются коэффициентами при соответствующих производных дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$f(t)\ddot{y} + g(t)\dot{y} + h(t)y = 0. \quad (31)$$

Система (28) имеет для этого уравнения вид

$$\begin{bmatrix} h & g \\ \dot{h} & \dot{g} + h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f\dot{y} \\ (\dot{f} + g)\dot{y} + fy \end{bmatrix}.$$

Условием редукции является соотношение $h(\dot{g} + h) = \dot{h}g$, представляющее собой дифференциальное уравнение для g (или для h). На основании его решения получим следующую связь коэффициентов $g = -(t+a)h$, где a – произвольная константа. Уравнение (30) при условии (31) сводится к уравнению первого порядка для $v = \dot{y}$

$$\begin{vmatrix} h & f \ddot{y} \\ \dot{h} & (\dot{f} + g)\dot{y} + f y^{(3)} \end{vmatrix} = hf\dot{v} + [(\dot{f} + g)h - \dot{h}f]v = 0.$$

3. Если уравнение N -го порядка линейно относительно всех производных функции кроме высшей, то условие редукции такого уравнения не отличается от соответствующего линейного. В результате описанной процедуры исходное уравнение сводится также к нелинейному, но порядка на 1 ниже.

Пример 3. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$(\ddot{y})^k - (t + a)h(t)\dot{y} + h(t)y = 0.$$

Если описанным методом сведем его к уравнению первого порядка

$$(k/(k-1))h\dot{v} - \dot{h}v = -gh.$$

для $v = (\ddot{y})^{k-1}$, то оно имеет решение $v = h^{(k-1)/k} \left(\frac{k-1}{k} \int_{\tau}^t h^{1/k} (t+a) dt + C_1 \right)$.

Пример 4. Уравнение третьего порядка

$$s(t)y^{(3)} + f(t)\ddot{y} + g(t)\dot{y} + hy = 0.,$$

($h = \text{const}$) порождает систему уравнений с матрицей

$$A_3 = \begin{bmatrix} h & g & f \\ 0 & \dot{g} + h & \dot{f} + g \\ 0 & \ddot{g} & \ddot{f} + 2\dot{g} + h \end{bmatrix}.$$

Условие редукции $\det A_3 = 0$ сводится к соотношению

$$(\dot{g} + h)(\ddot{f} + 2\dot{g} + h) = \ddot{g}(\dot{f} + g).$$

При этом для переменной $v = y^{(3)}$ получим уравнение

$$\dot{v}s(h + \dot{g}) + v[(2\dot{s} + f)(h + \dot{g}) - s\ddot{g}] + v[(\ddot{s} + 2\dot{f} + g)(h + \dot{g}) - f - \dot{s}] = 0.$$

Литература

1. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. – 1997. – Vol. 5, № 3. – P. 221–227.
2. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
3. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 127 с.
4. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием системы Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2004. – № 3–4. – С. 134–137.
5. Еренков О.Ю., Ивахненко А.Г., Ивахненко Е.О. Стабильность технологической системы при тчении полимерных материалов // Известия Орловского государственного технического

университета. Серия «Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии». 2008. – № 3–7. – С. 14–23.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Э.Г. КИРЬЯЦКИЙ, Д.Э. КИРЬЯЦКИЙ

Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, г. Вильнюс

e-mail: eduard.kiriyatzkii.takas.lt

Пусть $D(\alpha)$ означает угловую область, ограниченную двумя лучами, выходящими из начала координат и образующими между собой угол величиной α . При этом расположение угловой области $D(\alpha)$ не имеет значения.

Обозначим через $\sigma_{k,n}$ квадратичную форму вида

$$\sigma_{2,n} = \sum z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}, \text{ где } m_1 + \dots + m_n = 2.$$

Теорема. Для любого $n \geq 2$ и любых z_1, \dots, z_n , $z_1, \dots, z_n \in D(\alpha)$, квадратичная форма $\sigma_{2,n} \neq 0$ в угловой области $D(\alpha)$, где $0 < \alpha < 2\pi/3$. Кроме того, $\sigma_{2,n} \neq 0$ на любом луче, выходящем из начала координат.

О КОРНЯХ НЕПОЛНОГО МНОГОЧЛЕНА

Э.Г. КИРЬЯЦКИЙ

Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, г. Вильнюс

e-mail: eduard.kiriyatzkii.takas.lt

Пусть $D(\alpha)$ означает угловую область, ограниченную двумя лучами, выходящими из начала координат и образующими между собой угол, величиной α . При этом расположение угловой области $D(\alpha)$ не имеет значения.

Теорема 1. Любой неполный многочлен

$$P(z) = z^{n+k} + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0, \quad n \geq 1, k \geq 0, \quad (1)$$

имеет не более n корней (с учетом кратности) в угловой области $D(\alpha)$, где $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$, а также на любом луче, выходящем из начала координат.

Теорема 2. Пусть ζ_1, \dots, ζ_n – произвольно взятые точки. Тогда существует единственный неполный многочлен вида (1), имеющий ζ_1, \dots, ζ_n своими корнями. Это многочлен

$$P(z) = z^{n+k} - \sum_{m=2}^n [z^{n+k}; \zeta_1, \dots, \zeta_n] (z - \zeta_1) \dots (z - \zeta_{m-1}) + \zeta_1^{n+k}.$$

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.А. КСЕНОФОНТОВ, К.М. РАСУЛОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L . Для определенности будем предполагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ .

В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все бианалитические функции $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ класса $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, удовлетворяющие на L следующим краевым условиям*

$$a_1(t) \frac{\partial U}{\partial x} + b_1(t) \frac{\partial V}{\partial x} + \int_L A_1(t, \tau) \frac{\partial U}{\partial x} d\tau + \int_L B_1(t, \tau) \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = c_1(t), \quad (1)$$

$$a_2(t) \frac{\partial U}{\partial y} + b_2(t) \frac{\partial V}{\partial y} + \int_L A_2(t, \tau) \frac{\partial U}{\partial y} d\tau + \int_L B_2(t, \tau) \frac{\partial V}{\partial y} d\tau = c_2(t), \quad (2)$$

где $a_k(t), b_k(t), c_k(t)$ ($k = 1, 2$) – заданные на L действительные функции, причем $a_k(t), b_k(t), c_k(t) \in H^{(1)}(L)$ и

$$a_k^2(t) + b_k^2(t) \equiv 1, \quad (3)$$

а $A_k(t, \tau), B_k(t, \tau)$ – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(1)}(L \times L)$.

Всюду в дальнейшем без ограничения общности рассуждений будем предполагать, что искомая бианалитическая функция $F(z)$ удовлетворяет следующему начальному условию:

$$F(0) = 0, \quad (4)$$

которое не ограничивает общности рассуждений.

Сразу отметим, что в частном случае, когда выполнены условия

$$A_1(t, \tau) \equiv B_1(t, \tau) \equiv A_2(t, \tau) \equiv B_2(t, \tau) \equiv 0, \quad (5)$$

задача (1)–(2) представляет собой одну из основных краевых задач типа Гильберта для бианалитических функций, впервые рассмотренную в работе В.С. Рогожина [2] (см. также работы М.П. Ганина [3; 4] и монографию Ф.Д. Гахова [5]). Полное исследование задачи (1)–(2) при выполнении условий (5) в случае произвольных конечносвязных областей с гладкими границами проведено в монографии [1]. Следуя

терминологии, принятой в [1], сформулированную выше задачу в случае, когда не выполняются условия (5), будем называть *первой обобщенной краевой задачей типа Гильберта для бианалитических функций*, или, короче, *задачей $GF_{1,2}$* .

Основной целью настоящего сообщения является изложение одного метода решения задачи $GF_{1,2}$ в случае, когда $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

2. О решении задачи $GF_{1,2}$ в круге. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$. Как известно (см., например, [1, с. 26]), всякую бианалитическую в T^+ функцию можно представить в виде

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z), \quad (6)$$

где $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$ – аналитические в T^+ функции, называемые *аналитическими компонентами* бианалитической функции $F(z)$.

Замечание 1. Важно отметить (см. также [1, с. 26]), что так как решения задачи $GF_{1,2}$ ищутся в классе $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, то аналитические компоненты $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$ должны принадлежать классу $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$.

В силу представления (6) и с учетом условий (3) и соотношений $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$, $U(x, y) = \frac{F(z) + \overline{F(z)}}{2}$, $V(x, y) = \frac{F(z) - \overline{F(z)}}{2i}$ краевые условия (1) и (2) можно переписать соответственно в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi_0(t)}{dt} + \bar{t} \frac{d\varphi_1(t)}{dt} + \varphi_1(t) + G_1(t) \left[\frac{d\overline{\varphi_0(z)}}{d\bar{t}} + t \frac{d\overline{\varphi_1(z)}}{d\bar{t}} + \overline{\varphi_1(z)} \right] + \\ & + \int_L M_1(t, \tau) \left[\frac{d\varphi_0(t)}{dt} + \bar{t} \frac{d\varphi_1(t)}{dt} + \varphi_1(t) \right] d\tau + \int_L N_1(t, \tau) \left[\frac{d\overline{\varphi_0(z)}}{d\bar{t}} + t \frac{d\overline{\varphi_1(z)}}{d\bar{t}} + \overline{\varphi_1(z)} \right] d\tau = g_1(t), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi_0(t)}{dt} + \bar{t} \frac{d\varphi_1(t)}{dt} - \varphi_1(t) - G_2(t) \left[\frac{d\overline{\varphi_0(z)}}{d\bar{t}} + t \frac{d\overline{\varphi_1(z)}}{d\bar{t}} - \overline{\varphi_1(z)} \right] + \\ & + \int_L M_2(t, \tau) \left[\frac{d\varphi_0(t)}{dt} + \bar{t} \frac{d\varphi_1(t)}{dt} - \varphi_1(t) \right] d\tau - \int_L N_2(t, \tau) \left[\frac{d\overline{\varphi_0(z)}}{d\bar{t}} + t \frac{d\overline{\varphi_1(z)}}{d\bar{t}} - \overline{\varphi_1(z)} \right] d\tau = -ig_2(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$G_k(t) = \frac{a_k(t) + ib_k(t)}{a_k(t) - ib_k(t)}, \quad g_k(t) = \frac{2c_k(t)}{a_k(t) - ib_k(t)}, \quad M_k(t, \tau) = \frac{A_k(t, \tau) - iB_k(t, \tau)}{a_k(t) - ib_k(t)}, \quad (9)$$

$$N_k(t, \tau) = -\frac{A_k(t, \tau) + iB_k(t, \tau)}{a_k(t) - ib_k(t)}, \quad k = 1, 2.$$

Далее введем в рассмотрение вспомогательные аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции:

$$\Phi_1(z) = z \frac{d\varphi_0(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1(z)}{dz} + z\varphi_1(z), \quad (10)$$

$$\Phi_2(z) = z \frac{d\varphi_0(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1(z)}{dz} - z\varphi_1(z). \quad (11)$$

Замечание 2. В силу замечания 1 аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, определяемые по формулам (10) и (11) соответственно, должны принадлежать классу $A(T^+) \cap H(L)$, т.е. $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ должны быть аналитическими в круге T^+ и непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаться на окружность L .

Наконец, умножив обе части равенств (7) и (8) на t , с учетом обозначений (10), (11) и того, что на окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ выполняется тождество $\bar{t} = \frac{1}{t}$, будем иметь:

$$\Phi_1(t) + \tilde{G}_1(t)\overline{\Phi_1(t)} + \int_L \tilde{M}_1(t, \tau)\Phi_1(\tau)d\tau + \int_L \tilde{N}_1(t, \tau)\overline{\Phi_1(\tau)}d\tau = \tilde{g}_1(t), \quad (12)$$

$$\Phi_2(t) - \tilde{G}_2(t)\overline{\Phi_2(t)} + \int_L \tilde{M}_2(t, \tau)\Phi_2(\tau)d\tau - \int_L \tilde{N}_2(t, \tau)\overline{\Phi_2(\tau)}d\tau = \tilde{g}_2(t), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{M}_k(t, \tau) &= \frac{t}{\tau} M_k(t, \tau), \quad \tilde{N}_k(t, \tau) = t\tau \cdot N_k(t, \tau), \quad \tilde{G}_k(t) = t^2 G_k(t), \\ \tilde{g}_k(t) &= -(i)^{3k-1} t g_k(t), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

Несложно проверить, $\tilde{G}_k(t), \tilde{g}_k(t) \in H^{(1)}(L)$, а $\tilde{M}_k(t, \tau), \tilde{N}_k(t, \tau) \in H_*^{(1)}(L \times L)$, $k = 1, 2$. Следовательно, равенства (12) и (13) представляют собою краевые условия двух *обобщенных задач Гильберта в классах аналитических в круге T^+ функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$* соответственно. Методы решения обобщенных краевых задач Гильберта вида (12) и (13) для аналитических функций хорошо известны (см., например, монографии [1; 5; 6]).

Предположим, что задачи (12) и (13) разрешимы и найдены их общие решения, т.е. функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ соответственно. Тогда, решая систему из уравнений (10) и (11) относительно неизвестных $\varphi_1(z)$ и $\frac{d\varphi_0(z)}{dz}$, получаем

$$\begin{cases} \varphi_1(z) = \frac{1}{2z} [\Phi_1(z) - \Phi_2(z)] \\ \frac{d\varphi_0(z)}{dz} = \frac{1}{2z} [\Phi_1(z) + \Phi_2(z)] - \frac{1}{z} \frac{d\varphi_1(z)}{dz}. \end{cases} \quad (15)$$

Замечание 3. Из формул (15) видно, что для того, чтобы функции $\varphi_1(z)$ и $\frac{d\varphi_0(z)}{dz}$ были аналитическими функциями класса $A(T^+) \cap H(L)$ (т.е.

для разрешимости задачи $\mathbf{G}\Gamma_{1,2}$ в классе $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \Phi_1(0) = \Phi_2(0), \\ \frac{1}{2}[\Phi_1(0) + \Phi_2(0)] - \frac{d\varphi_1(0)}{dz} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

При выполнении условий (16), с учетом «начального условия» (4), из второго уравнения системы (15) аналитическую в круге T^+ функцию $\varphi_0(z)$ определим следующим образом:

$$\varphi_0(z) = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2\sigma} [\Phi_1(\sigma) + \Phi_2(\sigma)] - \frac{1}{\sigma} \frac{d\varphi_1(\sigma)}{d\sigma} \right) d\sigma, \quad (17)$$

где Γ – произвольная гладкая кривая, лежащая в T^+ и соединяющая точки 0 и z .

Таким образом, с учетом (15) и (17) и в силу представления (5), решение искомой задачи $\mathbf{G}\Gamma_{1,2}$ можно задавать формулой:

$$F(z) = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2\sigma} [\Phi_1(\sigma) + \Phi_2(\sigma)] - \frac{1}{\sigma} \frac{d\varphi_1(\sigma)}{d\sigma} \right) d\sigma + \bar{z} \left\{ \frac{1}{2z} [\Phi_1(z) - \Phi_2(z)] \right\}, \quad (18)$$

где $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ – решения задач Гильберта (12) и (13) соответственно, а Γ – произвольная гладкая кривая, лежащая в T^+ и соединяющая точки 0 и z .

Обратно, если бианалитическая функция $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$ класса $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, задаваемая формулой (18), есть решение задачи $\mathbf{G}\Gamma_{1,2}$, то аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ из класса $A(T^+) \cap H(L)$, определяемые через $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ по формулам (10) и (11) соответственно, будут решениями краевых задач Гильберта (12) и (13).

Итак, справедливо следующее основное утверждение.

Теорема. Если $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, то решение задачи $\mathbf{G}\Gamma_{1,2}$ сводится к решению двух обобщенных задач Гильберта (12), (13) в классах аналитических в T^+ функций. При этом задача $\mathbf{G}\Gamma_{1,2}$ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы задачи Гильберта (12), (13) и выполняются условия (16).

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Рогожин В.С. Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения // Ученые записки Казанского ун-та. – 1950. – Т. 110, кн. 3. – С. 71–93.

3. Ганин М.П. Краевые задачи теории полигармонических функций // Ученые записки Казанского ун-та. – 1950. – Т. 111, кн. 10. – С. 9–13.
4. Ганин М.П. Краевые задачи теории полианалитических функций // Доклады АН СССР. – 1951. – Т. 80, №3. – С. 313–316.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 379 с.

О ЗАДАЧЕ ТИПА НЕЙМАНА В КЛАССЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

О.Н. КУПРИКОВА *, К.М. РАСУЛОВ **

* Смоленский филиал МИИТ, г. Смоленск

** Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L . Область, дополняющую $T^+ \cup L$ до полной плоскости, обозначим через T^- и будем считать, что начало координат находится в T^+ .

Многие физические задачи, связанные, например, с диффузией газа при наличии распада и при цепных реакциях приводятся к дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+zz)^2} W = 0, \quad (1.1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, n – некоторое фиксированное неотрицательное целое число, $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ – неизвестная функция (см., например, [1; 2]).

В дальнейшем под *регулярным решением* дифференциального уравнения (1.1) в некоторой области T^+ будем понимать всякую функцию $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ класса $C^2(T^+)$ и удовлетворяющую уравнению (1.1) в рассматриваемой области.

Известно [3–5], что всякое регулярное решение дифференциального уравнения (1.1) в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k \left(\frac{\bar{z}}{1+zz} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (1.2)$$

где $A_k^n := (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ – аналитическая (голоморфная) в области T^+ функция.

Ясно, что если в (1.1) положить $n = 0$, то регулярные решения этого уравнения в области T^+ представляют собой класс *гармонических в T^+ функций*.

Всюду в дальнейшем при $n \geq 1$ регулярные в области T^+ решения уравнения (1.1) будем называть *квазигармоническими функциями рода n в области T^+* , а функцию $\varphi^+(z)$ из представления (1.2) назовем *аналитической компонентой* соответствующей квазигармонической функции $W(z)$.

Определение 1.1. Будем говорить, что квазигармоническая функция $W(z)$ принадлежит классу $C^m(T^+ + L)$, если в представлении (1.2) аналитическая компонента $\varphi^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача N. *Требуется найти все квазигармонические функции рода n ($n \geq 1$), принадлежащие классу $C^{n+1}(T^+ + L)$ и удовлетворяющие на L условию:*

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n} + G(t)\overline{W(t)} = g(t), \quad (1.3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к L , а $G(t)$ и $g(t)$ – заданные на контуре L функции класса $H^{(1)}(L)$ (т.е. удовлетворяющие на контуре L условию Гельдера вместе со своими производными первого порядка).

В дальнейшем задачу N будем называть *видоизмененной задачей типа Неймана для квазигармонических функций рода n* . Если же в (1.3) $g(t) \equiv 0$, то соответствующую задачу называем *однородной видоизмененной задачей типа Неймана* (короче, *задачей N⁰*).

Ясно, что если $G(t) \equiv 0$, то задача N представляет собой обычную (классическую) краевую задачу Неймана для квазигармонических функций.

Напомним (см., например, [6, с. 82]), что *теорема единственности классической (внутренней) задачи Неймана для уравнения Лапласа* состояла в том, что два различных решения $W_1(z)$ и $W_2(z)$ этой задачи в рассматриваемой области могут отличаться лишь на постоянную, т.е. $W_1(z) - W_2(z) \equiv const$.

Основной целью настоящего сообщения является построение метода решения краевой задачи **N** в случае, когда $n = 2$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $G(t) \equiv 0$.

2. О решении задачи N в случае $n = 2$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $G(t) \equiv 0$.

Рассмотрим сначала однородную краевую задачу Неймана для квазигармонических функций второго рода в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, т.е. задачу, состоящую в отыскании всех квазигармонических функций второго рода $W(z)$, принадлежащих классу $C^3(T^+ + L)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{6}{(1 + z\bar{z})^2} W = 0, & z \in T^+, \\ \frac{\partial W(t)}{\partial n} = 0, & t \in L. \end{cases} \quad (2.1)$$

Учитывая, что при $n = 2$ представление (1.2) принимает вид

$$W(z) = \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - 6 \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12 \left(\frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right)^2 \varphi^+(z), \quad (2.2)$$

где $\varphi^+(z)$ – аналитическая в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функция, нетрудно установить следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Общее решение однородной задачи Неймана (2.1) можно задавать в виде*

$$W_0(z) = \frac{C_0 \bar{z}^2 + C_1 (1 - z\bar{z})^2 - 2C_1 z\bar{z} + C_2 z^2}{(1 + z\bar{z})^2}, \quad (2.3)$$

C_0, C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Доказательство. С учетом соотношения (см., например, [7, с. 304])

$$\frac{\partial}{\partial n} = -i \left(t' \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad (2.4)$$

а также в силу представления (2.2), краевое условие $\frac{\partial W(t)}{\partial n} = 0$, $t \in L$, можно переписать так:

$$t^2 \frac{d^3 \varphi^+(t)}{dt^3} - 3t \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + 3 \frac{d\varphi^+(t)}{dt} = 0, \quad t \in L. \quad (2.5)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную аналитическую (голоморфную) в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функцию

$$\Phi^+(z) = z^2 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - 3z \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + 3 \frac{d\varphi^+(z)}{dz}, \quad (2.6)$$

где $\varphi^+(z)$ – аналитическая компонента искомого регулярного решения $W(z)$ дифференциального уравнения (1.2) при $n = 2$. Поскольку решения задачи Неймана (2.1) ищутся в классе $C^3(T^+ + L)$, то равенство (2.5) относительно голоморфной функции $\Phi^+(z)$ означает, что она всюду на окружности L имеет нулевые граничные значения. Следовательно, в силу граничной теоремы единственности для голоморфных функций (см., например, [8, с. 292]), имеем: $\Phi^+(z) \equiv 0, z \in T^+$, т.е.

$$z^2 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - 3z \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + 3 \frac{d\varphi^+(z)}{dz} = 0, \quad z \in T^+. \quad (2.7)$$

Нетрудно проверить (например, методом степенных рядов), что все аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ решения линейного дифференциального уравнения (2.7) задаются в виде:

$$\varphi^+(z) = C_2^* z^4 + C_1^* z^2 + C_0^*, \quad (2.8)$$

где C_0^*, C_1^*, C_2^* – произвольные комплексные постоянные.

Наконец, подставив в правую часть формулы (2.2) вместо $\varphi^+(z)$ ее значения из (2.8), получим формулу (2.3), где приняты обозначения $C_0 = 12C_0^*, C_1 = 2C_1^*, C_2 = 12C_2^*$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Если $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, то неоднородная задача Неймана

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{6}{(1 + z\bar{z})^2} W = 0, & z \in T^+, \\ \frac{\partial W(t)}{\partial n} = g(t), & t \in L, \end{cases} \quad (2.9)$$

в классе $C^3(T^+ + L)$ разрешима тогда и только тогда, когда функция $g(t)$ удовлетворяет условиям:

$$\int_L g(t) \cdot t^{m-3} dt = 0, \quad m = 0, 2, 4, 5, 6, \dots \quad (2.10)$$

При выполнении условий (2.10) частное решение задачи (2.9) можно задавать в виде

$$W_1(z) = \frac{3\bar{z}^2}{2(1 + z\bar{z})^2} \int g_1(z) dz + \frac{2z\bar{z} - (1 - z\bar{z})^2}{2(1 + z\bar{z})^2} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz + \frac{3z^2}{2(1 + z\bar{z})^2} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz, \quad (2.11)$$

где $g_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{tg(t)}{t-z} dt$, а $\int g_1(z) dz$, $\int \frac{g_1(z)}{z^2} dz$ и $\int \frac{g_1(z)}{z^4} dz$ – фиксированные

первообразные аналитических в круге T^+ функций $g_1(z)$, $\frac{g_1(z)}{z^2}$ и $\frac{g_1(z)}{z^4}$ соответственно.

Доказательство. В силу (2.2) и (2.4) краевое условие $\frac{\partial W(t)}{\partial n} = g(t)$, $t \in L$, можно записать в виде

$$t^2 \frac{d^3 \varphi^+(t)}{dt^3} - 3t \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + 3 \frac{d\varphi^+(t)}{dt} = tg(t), \quad t \in L. \quad (2.12)$$

Далее, вводя в рассмотрение вспомогательную аналитическую в круге T^+ функцию (2.6), равенство (2.12) примет вид:

$$\Phi^+(t) = tg(t), \quad t \in L. \quad (2.13)$$

Но равенство (2.13) есть краевое условие задачи об аналитическом продолжении (см., например, [7, с. 40]) относительно аналитической функции $\Phi^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$, т.е. функция $tg(t)$ должна быть граничным значением аналитической в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции, непрерывной (в смысле Гельдера) в замкнутом круге $\overline{T^+} = T^+ \cup L$. Отсюда следует (см., например, [8, с. 100]), что функция $tg(t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\int_L g(t) \cdot t^j dt = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.14)$$

Пусть выполняются равенства (2.14). Тогда в силу (2.12) в любой точке $z \in T^+$ имеет место равенство

$$z^2 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} - 3z \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + 3 \frac{d\varphi^+(z)}{dz} = g_1(z), \quad z \in T^+, \quad (2.15)$$

где

$$g_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{tg(t)}{t-z} dt. \quad (2.16)$$

Равенство (2.15) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка относительно неизвестной функции $\varphi^+(z)$.

Учитывая, что формулой (2.8) задается общее решение соответствующего однородного уравнения (2.7), найдем одно из частных решений неоднородного уравнения (2.15), например, методом вариации произвольных постоянных, т.е. в виде

$$\varphi_1(z) = C_0(z) + C_1(z)z^2 + C_2(z)z^4, \quad (2.17)$$

где $C_0(z)$ – аналитическая в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функция, а $C_1(z), C_2(z)$ – некоторые мероморфные в этом круге функции комплексной переменной z , для которых выражение $C_0(z) + C_1(z)z^2 + C_2(z)z^4$ есть аналитическое решение дифференциального уравнения (2.15) в этом круге, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающееся на контур L

вместе со своими производными до третьего порядка включительно. Для нахождения функций $C_0(z), C_1(z), C_2(z)$ составим соответствующую систему уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} C_0'(z) + z^2 C_1'(z) + z^4 C_2'(z) = 0, \\ 2z C_1'(z) + 4z^3 C_2'(z) = 0, \\ 2C_1'(z) + 12z^2 C_2'(z) = \frac{g_1(z)}{z^2}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Решая систему (2.18), получим

$$C_0'(z) = \frac{1}{8} g_1(z), \quad C_1'(z) = -\frac{1}{4z^2} g_1(z), \quad C_2'(z) = \frac{1}{8z^4} g_1(z). \quad (2.19)$$

Из последних равенств видно, что, для того чтобы функции $C_1(z), C_2(z)$ были мероморфными в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$g_1'(0) = 0 \text{ и } g_1'''(0) = 0.$$

Но с учетом (2.16) последние условия можно записать соответственно так:

$$\int_L g(t) \cdot t^{-1} dt = 0 \text{ и } \int_L g(t) \cdot t^{-3} dt = 0. \quad (2.20)$$

При выполнении условий (2.20), с помощью интегрирования из (2.19) будем иметь:

$$C_0(z) = \frac{1}{8} \int g_1(z) dz, \quad C_1(z) = -\frac{1}{4} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz, \quad C_2(z) = \frac{1}{8} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz, \quad (2.21)$$

где $\int g_1(z) dz$, $\int \frac{g_1(z)}{z^2} dz$ и $\int \frac{g_1(z)}{z^4} dz$ – фиксированные первообразные мероморфных в круге T^+ функций $g_1(z)$, $\frac{g_1(z)}{z^2}$ и $\frac{g_1(z)}{z^4}$ соответственно.

Таким образом, с учетом (2.21) частное решение (2.17) принимает вид:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{8} \int g_1(z) dz - \frac{z^2}{4} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz + \frac{z^4}{8} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz. \quad (2.22)$$

Наконец, подставив в правую часть (2.2) вместо аналитической компоненты $\varphi^+(z)$ ее значение из (2.22), получим формулу (2.11). *Лемма доказана.*

Из лемм 2.1 и 2.2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.1. Если $g(t)$ удовлетворяет условиям (2.10), то общее решение неоднородной задачи Неймана (2.9) можно задавать в виде

$$W(z) = \frac{C_0 \bar{z}^2 + C_1(1 - z\bar{z})^2 - 2C_1 z\bar{z} + C_2 z^2}{(1 + z\bar{z})^2} + \frac{3\bar{z}^2}{2(1 + z\bar{z})^2} \int g_1(z) dz + \frac{2z\bar{z} - (1 - z\bar{z})^2}{2(1 + z\bar{z})^2} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz + \frac{3z^2}{2(1 + z\bar{z})^2} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz, \quad (2.21)$$

где C_0, C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные, $g_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{tg(t)}{t-z} dt$,

а $\int g_1(z) dz$, $\int \frac{g_1(z)}{z^2} dz$ и $\int \frac{g_1(z)}{z^4} dz$ – фиксированные первообразные мероморфных в круге T^+ функций $g_1(z)$, $\frac{g_1(z)}{z^2}$ и $\frac{g_1(z)}{z^4}$ соответственно.

Замечание 2.1. Как видно из теоремы 2.1, для задачи Неймана N в случае $n=2$ и $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ не имеет место теорема единственности, так как два различных решения $W_1(z)$ и $W_2(z)$ этой задачи в круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ могут отличаться друг от друга на выражение вида $\frac{C_0 \bar{z}^2 + C_1(1 - z\bar{z})^2 - 2C_1 z\bar{z} + C_2 z^2}{(1 + z\bar{z})^2}$, где C_0, C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные, т.е. здесь $W_1(z) - W_2(z) \neq const$.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
2. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М., 1957.
3. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. – 1965. – Schriften 23.
4. Heersink R. Über Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum. – 1986. – Bericht № 268.
5. Расулов К.М. О решении краевой задачи типа Дирихле для уравнения Бауэра-Пешля первой степени // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. – Смоленск, 2007. – Вып. 8. – С. 62–70.
6. Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. – М.: Физматлит, 2002.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.
8. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.-Л., 1950.

О СЧЕТНЫХ СТЕПЕНЯХ НУЛЬМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С.В. МЕДВЕДЕВ

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: medv@math.susu.ac.ru

В заметке рассматриваются только нульмерные (в смысле Ind) метрические пространства.

В общей топологии важную роль играют пространства, которые являются степенями некоторых пространств. Так, пространство Бэра $B(k) = D^\omega$ в тихоновской топологии, где D – дискретное пространство мощности k , является универсальным пространством для нульмерных метрических пространств, вес которых не превосходит k . Отметим, что пространство Бэра $B(k)$ и пространство рациональных чисел Q являются h -однородными пространствами. Мы рассмотрим несколько случаев, когда счетная степень пространства будет h -однородным пространством.

Введем обозначения и напомним определения. ω – наименьший бесконечный кардинал. X – пространство первой категории, если X можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных подпространств. Пространство X называется h -однородным, если любое непустое открыто-замкнутое подмножество из X гомеоморфно всему X . Говорят, что X – топологически полное пространство, если оно гомеоморфно некоторому полному метрическому пространству. Через k^+ обозначается кардинал, непосредственно следующий за кардиналом k .

Теорема 1. Пусть дано h -однородное пространство X первой категории. Тогда для любого нульмерного пространства Y произведение $X \times Y^\omega$ будет h -однородным пространством.

Теорема 2. Счетная степень X^ω нульмерного пространства X первой категории будет h -однородным пространством.

Теорема 3. Пусть нульмерное пространство X содержит всюду плотное топологически полное подпространство. Тогда счетная степень X^ω будет h -однородным пространством.

Указанные выше теоремы не являются тривиальными. В теоремах 2 и 3 пространство X может не обладать никаким свойством типа однородности. Поэтому кажется удивительным, что при возведении в счетную степень исчезает неоднородность пространства. Для конечных степеней X^n пространства X теоремы 2 и 3 неверны.

Теорема 4. Пусть дано нульмерное метрическое пространство Y . Пусть F – подмножество типа F_σ или типа G_δ в пространстве $Q \times Y^\omega$. Тогда произведение $F \times Q \times Y^\omega$ гомеоморфно $Q \times Y^\omega$.

Теорема 5. Пусть дано G_δ -подмножество F из нульмерного пространства Y^ω . Пусть F и Y имеют всюду плотные топологически полные подпространства. Тогда произведение $F \times Y^\omega$ гомеоморфно Y^ω .

Понятие h -однородного пространства возникло при изучении свойств борелевских множеств. Оно оказалось тесно связанным с понятием универсальности пространства. Пространство Y называется *универсальным* для некоторого семейства множеств K , если для любого пространства X из семейства K в пространстве Y найдется замкнутое подмножество F , которое гомеоморфно пространству X .

Хансел [1] ввел семейство k -борелевских множеств в пространстве X веса k как наименьшую σ -алгебру множеств, содержащую все открытые множества и замкнутую относительно операции счетного объединения дискретных подсемейств. Он построил для каждого ординала $\alpha < k^+$ в пространстве $B(k)$ множества $A_\alpha(k)$ и $M_\alpha(k)$ аддитивного и мультипликативного класса α соответственно, которые не являются множествами низших классов. Отметим, что произведение $B(k) \times M_\alpha(k)$ является универсальным пространством для множеств мультипликативного класса α , лежащих в $B(k)$. Используя множество $M_\alpha(k)$, можно построить множество $M_\alpha^I(k)$ мультипликативного класса α первой категории и множество $M_\alpha^{II}(k)$ мультипликативного класса α , содержащее всюду плотное топологически полное подпространство. При этом множества $M_\alpha^I(k)$ и $M_\alpha^{II}(k)$ являются h -однородными пространствами, если $3 \leq \alpha < k^+$.

Теорема 6. Пусть $3 \leq \alpha < k^+$. Тогда для любого множества F мультипликативного класса α из пространства Бэра $B(k)$ произведение $F \times M_\alpha^I(k)$ гомеоморфно $M_\alpha^I(k)$.

Теорема 7. Пусть $3 \leq \alpha < \tau^+$ и $\tau \leq k$. Тогда произведение $B(k) \times M_\alpha^I(\tau)$ гомеоморфно $M_\alpha^I(k)$, а произведение $B(k) \times M_\alpha^{II}(\tau)$ гомеоморфно $M_\alpha^{II}(k)$.

Теоремы 1, 2, 4 и 6 доказаны в работе [2]. Автор надеется опубликовать доказательства остальных теорем в ближайшее время.

Темой h -однородных пространств занимались van Mill, van Engelen, А.В. Островский, А. Dow, Е. Pearl, L. Lawrence, R. de la Vega, Т. Terada и ряд других ученых. В последнее время активно изучаются свойства типа h -однородности в классе неметризуемых компактных пространств.

Литература

1. Hansell R.W. On the non-separable theory of k -Borel and k -Souslin sets // Gen. Top. Applic. – 1973. – V. 3. – P. 161–195.
2. Medvedev S.V. On properties of h -homogeneous spaces of first category // Topol. Applic. – 2010. – V. 157, № 18. – P. 2819–2828.

О ВЕСОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА СОБОЛЕВА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИДИСКЕ ФУНКЦИЙ

Е.В. МИШИНА

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
241036, Брянск, ул. Бежицкая, 14
e-mail: MishinaE.V.@yandex.ru

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n, |z_j| < 1, 1 \leq j \leq n\}$ – единичный полидиск n -мерного комплексного пространства C^n , $T^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n, |z_j| = 1, 1 \leq j \leq n\}$ – его остов, $H(U^n)$ – множество всех голоморфных в U^n функций.

Если $z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in C^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$, тогда

$$z^\alpha := z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_n}, |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n, (1 - |z|^2)^\alpha := \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^{\alpha_j}, (1 - \bar{\zeta}z)^{\alpha+2} := \prod_{j=1}^n (1 - \bar{\zeta}_j z_j)^{\alpha_j+2}.$$

Обозначим через $L_\alpha^p(U^n)$ класс измеримых по Лебегу в U^n функций f , для которых

$$\|f\|_{L_\alpha^p} = \left(\int_{U^n} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^\alpha dm_{2n}(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_j > -1, 1 \leq j \leq n,$$

где $m_{2n}(\zeta)$ – $2n$ -мерная мера Лебега на U^n .

Положим, $A_\alpha^p(U^n) = H(U^n) \cap L_\alpha^p(U^n)$. Здесь вводится соответствующая L^p -квазинорма.

Для изложения основных результатов работы введём также обозначения:

Если $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \beta_j \geq 0$, то определим дробную производную порядка β в смысле Римана-Лиувилля (см. [1]). Пусть

$f \in H(U^n), f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k z^k$, тогда

$$D^\beta f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(k + 1)} a_k z^k = \sum_{k_1 \dots k_n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(k_j + \beta_j + 1)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\beta_j + 1)\Gamma(k_j + 1)} a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}.$$

Весовым анизотропным классом Соболева аналитических функций $A_{\alpha,m}^p(U^n)$, $0 < p < +\infty, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_j > -1, 1 \leq j \leq n, m = (m_1, \dots, m_n) \in R_+^n$ назовем следующий класс голоморфных функций $A_{\alpha,m}^p(U^n) = \{f \in H(U^n), D^m f \in A_{\alpha+mp}^p\}$.

Справедливы следующие утверждения

Теорема 1. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j > -1 - m_j p$, $0 \leq m_j \leq +\infty$, $1 \leq j \leq n$, $0 < p < +\infty$, тогда справедливы следующие оценки

$$\begin{aligned} C_1 \int_{U^n} |D^m f(z)|^p (1-|z|)^{\alpha+mp} dm_{2n}(z) &\leq \int_{U^n} |f(z)|^p (1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) \leq \\ &\leq C_2 \int_{U^n} |D^m f(z)|^p (1-|z|)^{\alpha+mp} dm_{2n}(z), \end{aligned} \quad (1)$$

где C_1, C_2 – положительные константы.

Теорема 2. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j > -1 - m_j p$, $0 \leq m_j \leq +\infty$, $1 \leq j \leq n$, $0 < p < +\infty$, тогда следующие утверждения равносильны:

- а) функция $g \in H(U^n)$ является мультипликатором класса $A_{\alpha, m}^p(U^n)$;
- б) $g \in H^\infty(U^n)$, т.е. функция g является голоморфной ограниченной функцией в U^n .

Замечание. В случае $m=1$, левая оценка неравенства (1) и импликация б) \Rightarrow а) теоремы 2 доказаны в работе [2].

Доказательство теорем 1 и 2 опирается на следующее вспомогательное утверждение, которое можно вывести из результатов работ [3; 4].

Лемма 1. Если $f \in A_\alpha^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$, тогда при достаточно больших $\gamma \in \mathbb{N}^n$ справедливо представление

$$f(z) = C(m, \gamma) \int_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^\gamma D^m f(\zeta)}{(1-\zeta z)^{\gamma+2-m}} \psi(\zeta) dm_{2n}(\zeta), \quad \zeta, z \in U^n,$$

где $\psi(\zeta)$ – функция, которая голоморфна в U^n и непрерывна в $U^n \cup \partial U^n$.

Литература

1. Djrbashian M.M., Shamoyan F. A. Topics in the Theory of $A^p(\alpha)$ spaces. Leipzig: Teubner-Texte. Math., 1988.
2. Harutyunyan A., Harutyunyan G. Holomorphic Besov spaces in the polydisc and bounded Toeplitz operators // Analysis. – 2010. – V.30, № 4. – P. 365–381.
3. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. The Hardy-Littlewood Theorem and the Operator of Harmonic Conjugate in Some Classes of Simply Connected Domains with Rectifiable Boundary // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2009. – V. 5, № 2. – P. 192–210.
4. Антоненкова О.Е., Шамоян Ф.А. Преобразование Коши линейных непрерывных функционалов и проекторы в пространствах аналитических функций // Сибирский матем. журнал. – 2005. – Т.46, № 6. – С. 1208–1234.

О РЕШЕНИИ ВТОРОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

Н.Р. ПЕРЕЛЬМАН

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи.

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L . Для определенности будем полагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ . Рассматривается следующая краевая задача, сформулированная К.М. Расуловым (см. [5, с. 288]).

Требуется найти все бианалитические функции $F(z)$ класса $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, удовлетворяющие на L краевым условиям:

$$F^+[\alpha(t)] = G_{11}(t)F^+(t) + G_{12}(t)\overline{F^+(t)} + g_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+} = G_{21}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} + G_{22}(t)\frac{\partial \overline{F^+(t)}}{\partial n_+} + (-1)g_2(t), \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_+}$ – производная по внутренней нормали к L , $L \in C_\mu^1$, а $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ ($k=1,2; j=1,2$) – заданные на L комплекснозначные функции, причем $G_{k1}(t), G_{k2}(t) \in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$, $G_{k2}(t) \neq 0$ на L , $\alpha(t)$ – прямой или обратный сдвиг контура L , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \quad (3)$$

и такой, что $\alpha(t) \in H^{(1)}(L)$, $\alpha'(t) \neq 0$.

Здесь, в краевом условии (2), множитель (-1) при $g_2(t)$ введён для удобства в дальнейших обозначениях.

Следуя [5], сформулированную задачу назовем *трехэлементной задачей типа Карлемана для бианалитических функций*, или, короче, *задачей $K_{2,2}$* .

В данном сообщении задача $K_{2,2}$ исследуется в случае, когда $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

2. О редукции задачи $K_{2,2}$ к двум двухэлементным краевым задачам в классах аналитических функций.

Известно (см., например, [5, с. 26]), что всякую бианалитическую в круге T^+ функцию можно представить в виде:

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z), \quad (4)$$

где $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$ – аналитические в T^+ функции, называемые аналитическими компонентами бианалитической функции $F(z)$.

Далее, с учетом представления (4), известного соотношения $\frac{\partial}{\partial n_+} = i \left(t' \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right)$ (см., например, [1, с. 304]) и того, что в точках окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ выполняются равенства $\bar{t} = \frac{1}{t}, t' = it$, перепишем краевые условия (1) и (2) в виде:

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = G_{k1}(t)\alpha(t)t^{-1}\Phi_k^+(t) + G_{k2}(t)\alpha(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + \alpha(t)g_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

где

$$\Phi_1^+(z) = z\varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad (6)$$

$$\Phi_2^+(z) = z^2 \frac{d\varphi_0(z)}{dz} + z \frac{d\varphi_1(z)}{dz} + \varphi_1(z). \quad (7)$$

Очевидно, что равенства (5) представляют собой краевые условия двух трехэлементных задач типа Карлемана относительно аналитических в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функций $\Phi_1^+(z), \Phi_2^+(z)$ соответственно (см. [2, с. 295]).

Простыми преобразованиями (см., например, [2]) из условий (5) получим следующие соотношения:

$$A_k(t)\Phi_k^+(t) = B_k(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + H_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (8)$$

где

$$A_k(t) = 1 - G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t) - G_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k2}(t)}, \quad (8a)$$

$$B_k(t) = t^2 \cdot \{G_{k1}[\alpha(t)]G_{k2}(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k1}(t)}\}, \quad (8б)$$

$$H_k(t) = t \cdot \{G_{k1}[\alpha(t)]g_k(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)]\}, \quad k = 1, 2. \quad (8в)$$

Из структуры равенств (8) вытекает, что далее целесообразно различать следующие *четыре случая*:

1) либо выполняются условия (*вырожденный случай*):

$$A_k(t) \neq 0, B_k(t) \neq 0, H_k(t) \neq 0, t \in L, k = 1, 2; \quad (9a)$$

2) либо выполняются условия (*невырожденный случай*):

$$A_k(t) \equiv 0, B_k(t) \equiv 0, H_k(t) \equiv 0, t \in L, k = 1, 2; \quad (9б)$$

3) либо выполняются условия (*первый полувыврожденный случай*):

$$\begin{cases} A_1(t) \equiv 0, B_1(t) \equiv 0, H_1(t) \equiv 0, t \in L, \\ A_2(t) \neq 0, B_2(t) \neq 0, H_2(t) \neq 0, t \in L; \end{cases} \quad (9B)$$

4) либо выполняются условия (*второй полувыврожденный случай*):

$$\begin{cases} A_1(t) \neq 0, B_1(t) \neq 0, H_1(t) \neq 0, t \in L, \\ A_2(t) \equiv 0, B_2(t) \equiv 0, H_2(t) \equiv 0, t \in L. \end{cases} \quad (9Г)$$

В настоящее время задача $K_{2,2}$ изучена в вырожденном случае (см., например, [7, 8]). Невырожденный случай и полувыврожденные случаи до сих пор не были рассмотрены.

Далее задача $K_{2,2}$ исследуется в невырожденном случае.

3. О решении задачи $K_{2,2}$ в невырожденном случае (9б) при обратном сдвиге контура.

Пусть выполняются условия (9б). Ясно, что при выполнении условий (9б) трехэлементная краевая задача $K_{2,2}$ не приводится к двухэлементным краевым задачам вида (8). Для решения задачи $K_{2,2}$ в рассматриваемом случае введем обозначения:

$$a_k(t) = G_{k1}(t)\alpha(t)t^{-1}, \quad b_k(t) = G_{k2}(t)\alpha(t)t, \quad h_k(t) = \alpha(t)g_k(t). \quad (10)$$

Тогда краевые условия (5) можно переписать в более компактном виде

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = a_k(t)\Phi_k^+(t) + b_k(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + h_k(t), \quad k=1,2. \quad (11)$$

Далее будем пользоваться методами решения задач вида (11) в случае выполнения условий (9б), разработанными в статье [6].

Следуя [6], можно показать, что решение задач (11) может быть сведено к последовательному решению двух интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода, а также обычной скалярной задачи Римана.

Предположим, что задачи (11) разрешимы и уже найдены $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$. Тогда функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ определяются из (6), (7) по формулам:

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_1^+(z) - \Phi_2^+(z)}{z} + \frac{d\Phi_1^+(z)}{dz} \right), \quad (12)$$

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2} \left(\Phi_1^+(z) + \Phi_2^+(z) - z \frac{d\Phi_1^+(z)}{dz} \right). \quad (13)$$

Поскольку функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$ являются аналитическими в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, то для них справедливы следующие разложения в степенные ряды:

$$\Phi_1^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k} z^k, \quad \Phi_2^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2,k} z^k,$$

где

$$a_{j,k} = \frac{d^{(k)}\Phi_j^+(0)}{dz^k}, \quad j=1,2; k=1,2,\dots$$

Теперь нетрудно проверить, что функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, определяемые по формулам (12) и (13) соответственно, будут аналитическими в круге T^+ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$a_{1,0} - a_{2,0} = 0. \quad (14)$$

Итак, при выполнении условия (14) решение искомой задачи $K_{2,2}$ можно получить по формуле (4), где $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ – аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции, определяемые по формулам (12) и (13) соответственно.

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
3. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
4. Перельман Н.Р. Об исследовании второй трехэлементной задачи типа Карлемана для трианалитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2008. – Вып. 9. – С. 176–179.
5. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 345 с.
6. Расулов К.М. Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Известия СмолГУ. – 2008. – № 2. – С. 94–104.
7. Расулов К.М., Титов О.А. О второй основной трехэлементной краевой задаче типа Карлемана в классах бианалитических функций в круге // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Т. 25 / Казанск. матем. общество. Актуальные проблемы мат. и мех: материалы международной научной конференции. – Казань: Изд-во Казанск. матем. общества, 2004. – С. 224–225.
8. Расулов К.М., Титов О.А. Об исследовании второй основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: межвузовский сборник научных трудов / Смоленский гос. пед. ун-т. – Смоленск, 2004. – Вып. 5. – С. 66–77.

О РЕШЕНИИ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ, Н.Н. БОГДАНОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Постановка задачи. Всюду в дальнейшем будем пользоваться в основном терминами и обозначениями, принятыми в монографиях [1; 2].

Пусть T^+ – конечная односвязная область на расширенной плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $L \in C_\mu^2$, а $T^- = \bar{C} / (T^+ \cup L)$. Для определенности будем предполагать, что начало координат принадлежит области T^+ .

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на контуре L следующим условиям:*

$$A_{11}(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + A_{12}(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + G_{12}(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial x} + g_1(t), \quad (1)$$

$$A_{21}(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial y} - A_{22}(t) \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} = G_{21}(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} - G_{22}(t) \frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial y} - ig_2(t), \quad (2)$$

где $A_{kj}(t), G_{kj}(t), g_j(t)$ ($k=1,2, j=1,2$) – заданные на L комплекснозначные функции класса $H^{(2)}(L)$, i – мнимая единица, $\alpha(t)$ – прямой или обратный сдвиг контура L , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \quad (3)$$

причем $\alpha'(t) \in H(L)$.

В формуле (2) множитель (-1) перед $A_{22}(t)$ и $G_{22}(t)$, а также множитель $(-i)$ перед $g_2(t)$ введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Кроме того, в дальнейшем без ограничения общности будем считать, что выполняется следующее начальное условие:

$$F^+(0) = 0. \quad (4)$$

Сформулированную задачу будем называть *первой основной четырехэлементной краевой задачей типа Карлемана в классах бианалитических функций*, или, короче, *задачей K_{41}* , а соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) – *задачей K_{41}^0* .

Сразу отметим, что в частном случае, когда

$$A_{12}(t) \equiv A_{22}(t) \equiv G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0, \quad A_{11}(t) \equiv A_{21}(t) \equiv 1,$$

используя оператор сопряжения, задача K_{41} элементарно сводится к основной (двухэлементной) краевой задаче типа Римана для бианалитических функций, сформулированной Ф.Д. Гаховым в его известной монографии (см. [3, с. 319]).

Если же, например, на контуре L выполняются условия:

$$A_{11}(t) \equiv A_{21}(t) \equiv G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0, \quad A_{12}(t) \equiv A_{22}(t) \equiv 1,$$

то задача K_{41} представляет собой основную (двухэлементную) краевую задачу типа Газемана для бианалитических функций. Двухэлементные задачи типа задачи Римана и типа задачи Газемана для бианалитических функций в случае произвольных конечносвязных областей с гладкими границами подробно исследованы в монографии [1]. В работе [4] задача K_{41} изучалась при условии $A_{11}(t) \equiv A_{21}(t) \equiv 0$, $A_{12}(t) \equiv A_{22}(t) \equiv 1$ и $\alpha(t) \equiv t$. Следует отметить также, что в частном случае, когда $\alpha(t) \equiv t$, задача K_{41} была исследована в диссертации Ю.А. Медведева [5].

В случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, задача K_{41} была изучена в работе [6]. В настоящем сообщении строится конструктивный алгоритм решения задачи K_{41} в указанной выше постановке в случае, когда выполняются условия:

$$A_{11}(t) \equiv A_{21}(t) \equiv 1, \quad A_{12}(t) \equiv A_{22}(t), \quad G_{11}(t) \equiv G_{21}(t) \neq 0, \quad G_{12}(t) \equiv G_{22}(t). \quad (5)$$

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.
2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. Анищенкова Н.Г. Трехэлементные краевые задачи типа Римана для бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Смоленск, 2002. – 120 с.
5. Медведев Ю.А. Четырехэлементные краевые задачи типа задачи Римана в классах бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Смоленск, 2007. – 115 с.
6. Богданова Н.Н., Расулов К.М. О решении невырожденной четырехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Известия Саратовского университета. – 2009. – Т. 9. Серия Математика. Механика. Информатика. Вып. 2. – Саратов, 2009. – С. 6–12.

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

К.М. РАСУЛОВ, А.А. БОТЕНКОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи. В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Определение 1. Будем говорить, что бианалитическая в T^+ функция $F(z)$ вида

$$F(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z} \cdot \varphi_1^+(z), \quad z \in T^+, \quad (1.1)$$

принадлежит классу $A_2(T^+) \cap H(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ непрерывно продолжаются на контур L , причем так, что граничные значения этих функций удовлетворяют на L условию Гельдера (т.е. принадлежат классу Гельдера $H(L)$).

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все бианалитические в круге T^+ функции $F(z)$ класса $A_2(T^+) \cap H(L)$, удовлетворяющие на L краевому условию:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} + G(t) \overline{F^+(t)} + \int_L A(t, \tau) F^+(\tau) d\tau + \int_L B(t, \tau) \overline{F^+(\tau)} d\tau = g(t), \quad (1.2)$$

где $F^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} F(z)$, $\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}}$; $G(t)$ и $g(t)$ – заданные на L функции класса $H(L)$, причем $G(t) \neq 0$; $A(t, \tau)$ и $B(t, \tau)$ – заданные фредгольмовы ядра (т.е. $A(t, \tau), B(t, \tau) \in H_*(L \times L)$).

Сформулированную задачу будем называть **обобщенной неклассической задачей типа Гильберта для бианалитических функций**, или, короче, **задачей Γ** , соответствующую однородную задачу ($g(t) \equiv 0$) – **задачей Γ^0** .

Отметим, что если в (1.2) положить $A(t, \tau) \equiv B(t, \tau) \equiv 0$, то мы получаем **обычную неклассическую задачу типа Гильберта для бианалитических функций**, подробно изученную в работе [2] в классах метааналитических функций.

Основной целью настоящего сообщения является построение конструктивного метода решения задачи Γ , установление ее **нетеровости**, а также выявление важных частных случаев, когда задача Γ допускает решение в **замкнутой форме** (т.е. когда ее общее решение выражается в интегралах типа Коши).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$, где \bar{C} – расширенная комплексная плоскость (т.е. $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$).

2. Метод редукции задачи Γ к векторно-матричной задаче Римана для аналитических функций. С учетом представления (1.1) и того, что на окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ имеет место соотношение $\bar{t} = \frac{1}{t}$, $t \in L$, краевое условие (1.2) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \varphi_1^+(t) + G(t)[\overline{\varphi_0^+(t)} + t \cdot \overline{\varphi_1^+(t)}] + \int_L A(t, \tau) \left[\varphi_0^+(\tau) + \frac{1}{\tau} \varphi_1^+(\tau) \right] d\tau + \\ + \int_L B(t, \tau) [\overline{\varphi_0^+(\tau)} + \tau \cdot \overline{\varphi_1^+(\tau)}] d\tau = g(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Переходя в (2.1) к комплексно сопряженным значениям, получим

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1^+(t)} + \overline{G(t)} \left[\varphi_0^+(t) + \frac{1}{t} \varphi_1^+(t) \right] + \int_L \overline{A(t, \tau)} [\overline{\varphi_0^+(\tau)} + \tau \cdot \overline{\varphi_1^+(\tau)}] d\tau + \\ + \int_L \overline{B(t, \tau)} \left[\varphi_0^+(\tau) + \frac{1}{\tau} \varphi_1^+(\tau) \right] d\tau = \overline{g(t)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее введем в рассмотрение аналитические в T^- функции вида

$$\varphi_k^-(z) = \overline{\varphi_k^+ \left(\frac{1}{z} \right)}, \quad z \in T^-, \quad k = 0, 1. \quad (2.3)$$

Известно (см., например, [3, с. 291]), что граничные значения функций $\varphi_k^-(z)$, определенных по формулам (2.3), удовлетворяют следующим условиям «симметрии»:

$$\varphi_k^-(t) = \overline{\varphi_k^+(t)}, \quad t \in L, \quad k = 0, 1. \quad (2.4)$$

Наконец, с учетом равенства (2.4) и соотношения $\overline{d\tau} = -\frac{1}{\tau^2} d\tau$, краевые условия (2.1) и (2.2) соответственно можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1^+(t) + G(t)[\overline{\varphi_0^-(t)} + t \cdot \overline{\varphi_1^-(t)}] + \int_L A(t, \tau) \left[\varphi_0^+(\tau) + \frac{1}{\tau} \varphi_1^+(\tau) \right] d\tau + \\ + \int_L B(t, \tau) [\overline{\varphi_0^-(\tau)} + \tau \cdot \overline{\varphi_1^-(\tau)}] d\tau = g(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1^-(t)} + \overline{G(t)} \left[\varphi_0^+(t) + \frac{1}{t} \varphi_1^+(t) \right] + \int_L \overline{A_1(t, \tau)} [\overline{\varphi_0^-(\tau)} + \tau \cdot \overline{\varphi_1^-(\tau)}] d\tau + \\ + \int_L \overline{B_1(t, \tau)} \left[\varphi_0^+(\tau) + \frac{1}{\tau} \varphi_1^+(\tau) \right] d\tau = \overline{g(t)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $A_1(t, \tau) = -\frac{1}{\tau^2} \overline{A(t, \tau)}$, $B_1(t, \tau) = -\frac{1}{\tau^2} \overline{B(t, \tau)}$.

Замечание 2.1. Важно отметить, что равенства (2.5) и (2.6) в совокупности представляют собой краевое условие следующей обобщенной векторно-матричной задачи Римана относительно кусочно аналитического вектора $\varphi^\pm(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0^\pm(z) \\ \varphi_1^\pm(z) \end{pmatrix}$:

$$a(t)\varphi^+(t) + b(t)\varphi^-(t) + \int_L M(t, \tau)\varphi^+(\tau)d\tau + \int_L N(t, \tau)\varphi^-(\tau)d\tau = h(t), \quad (2.7)$$

где

$$a(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \overline{G(t)} & t \cdot G(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} G(t) & t \cdot G(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ \overline{g(t)} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$M(t, \tau) = \begin{pmatrix} A(t, \tau) & \bar{\tau} \cdot A(t, \tau) \\ B_1(t, \tau) & \bar{\tau} \cdot B_1(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad N(t, \tau) = \begin{pmatrix} B(t, \tau) & \tau \cdot B(t, \tau) \\ A_1(t, \tau) & \tau \cdot A_1(t, \tau) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det a(t) \neq 0$ и $\det b(t) \neq 0$, то обобщенная задача Римана (2.7) является задачей *нормального типа* (см., например, [1; 3–5]).

Далее, умножив слева обе части равенства (2.7) на матрицу $a^{-1}(t)$, обратную $a(t)$, будем иметь:

$$\varphi^+(t) + b_1(t)\varphi^-(t) + \int_L M_1(t, \tau)\varphi^+(\tau)d\tau + \int_L N_1(t, \tau)\varphi^-(\tau)d\tau = h_1(t), \quad (2.9)$$

где

$$b_1(t) = a^{-1}(t) \cdot b(t) = \begin{pmatrix} -\bar{t} \cdot G(t) & -G(t) + \frac{1}{G(t)} \\ G(t) & t \cdot G(t) \end{pmatrix}, \quad h_1(t) = a^{-1}(t) \cdot h(t) = \begin{pmatrix} -\bar{t} \cdot g(t) + \frac{\overline{g(t)}}{G(t)} \\ g(t) \end{pmatrix},$$

$$M_1(t, \tau) = \begin{pmatrix} -\bar{t} \cdot A(t, \tau) + \frac{B_1(t, \tau)}{G(t)} & -\bar{t}\tau \cdot A(t, \tau) + \frac{\bar{\tau} \cdot B_1(t, \tau)}{G(t)} \\ A(t, \tau) & \bar{\tau} \cdot A(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$N_1(t, \tau) = \begin{pmatrix} -\bar{t} \cdot B(t, \tau) + \frac{A_1(t, \tau)}{G(t)} & -\bar{t} \cdot \tau \cdot B(t, \tau) + \frac{\tau \cdot A_1(t, \tau)}{G(t)} \\ B(t, \tau) & \tau \cdot B(t, \tau) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что обобщенная векторно-матричная задача Римана (2.9) разрешима и уже найдено ее общее решение $\varphi^\pm(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0^\pm(z) \\ \varphi_1^\pm(z) \end{pmatrix}$. Тогда, выбрав среди найденных решений $\varphi^\pm(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0^\pm(z) \\ \varphi_1^\pm(z) \end{pmatrix}$ задачи Римана (2.9) лишь те, которые удовлетворяют условиям «симметрии»

$$\varphi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)}, \quad t \in L, \quad (2.11)$$

определим аналитические компоненты $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ искомого решения $F(z)$ задачи Γ . Наконец, само решение $F(z)$ задачи Γ определяется по формуле (1.1).

Таким образом, справедливо следующее важное утверждение.

Теорема 2.1. *Если $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $G(t) \neq 0, t \in L$, то решение задачи Γ для бианалитических функций сводится к решению обобщенной векторно-матричной задачи Римана (2.9) нормального типа в классе кусочно аналитических векторов $\varphi^\pm(z)$ с линией скачков L . При этом задача Γ будет разрешимой тогда и только тогда, когда обобщенная задача Римана (2.9) имеет решения, удовлетворяющие условию «симметрии» (2.11).*

Поскольку векторно-матричная задача Римана нормального типа (2.9) является нетеровой (см., например, [5, с. 49]), то из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Если $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $G(t) \neq 0, t \in L$, то краевая задача Γ является нетеровой.*

3. О разрешимости задачи Γ в замкнутой форме. Из теоремы 2.1 вытекает, что задача Γ разрешима в замкнутой форме всякий раз, когда векторно-матричная задача Римана (2.9) является разрешимой в замкнутой форме.

Поскольку главные миноры матрицы $-b_1(t)$ отличны от нуля на L , то векторно-матричную задачу Римана (2.9) можно решить методом, изложенным в §18 монографии [1]. Пользуясь этим методом, устанавливаются следующие результаты.

Теорема 3.1. *Если $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $A(t, \tau) \equiv B(t, \tau) \equiv 0$, то решение задачи Γ сводится к последовательному решению обобщенной скалярной задачи Римана вида*

$$\varphi_0^+(t) = \frac{1}{tG(t)} \varphi_0^-(t) + \left(G(t) - \frac{1}{G(t)} \right) X_1^-(t) \int_L K_1(t, \tau) \varphi_0^-(\tau) d\tau + Q_0(t), \quad (3.1)$$

$$\text{где } Q_0(t) = \left(G(t) - \frac{1}{G(t)} \right) \left\{ \frac{g(t)}{2tG(t)} + \frac{X_1^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X_1^-(t) P_{z_1}(t) \right\} + \frac{\overline{g(t)}}{G(t)} - \bar{t}g(t),$$

$$K_1(t, \tau) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{G(\tau)}{X_1^+(\tau)} - \frac{G(t)}{X_1^+(t)} \right] \frac{1}{\tau - t}, \quad (3.1a)$$

и обычной скалярной задачи Римана вида

$$\varphi_1^+(t) = -tG(t)\varphi_1^-(t) + Q_1(t), \quad (3.2)$$

где

$$Q_1(t) = -G(t)\varphi_0^-(t) + g(t).$$

При этом для разрешимости задачи Γ необходимо и достаточно, чтобы обе скалярные задачи Римана (3.1) и (3.2) имели решения, удовлетворяющие условиям «симметрии» (2.11).

Теорема 3.2. Если $T^+ = \{z: |z| < 1\}$, $|G(t)|^2 \equiv 1$, $t \in L$, и $A(t, \tau) \equiv B(t, \tau) \equiv 0$, то решение задачи Γ сводится к последовательному решению двух обычных скалярных задач Римана вида

$$\varphi_0^+(t) = \frac{1}{tG(t)} \varphi_0^-(t) + \frac{\overline{g(t)}}{G(t)} - \bar{t}g(t) \quad (3.3)$$

и (3.2). При этом задача Γ будет разрешимой тогда и только тогда, когда обе задачи Римана (3.3) и (3.2) имеют решения, удовлетворяющие условиям «симметрии» (2.11).

Пусть теперь ядра $A(t, \tau)$ и $B(t, \tau)$ в краевом условии (1.3) представляются в виде:

$$A(t, \tau) = m(t) \cdot n(\tau) \text{ и } B(t, \tau) = r(t) \cdot s(\tau), \quad (3.4)$$

где $m(t), r(t)$ – заданные на L функции переменной t , принадлежащие классу $H(L)$, а $n(\tau), s(\tau)$ – заданные на L функции переменной τ , также принадлежащие классу $H(L)$, причем $[m(t) \cdot n(\tau)]^2 + [r(t) \cdot s(\tau)]^2 \neq 0$. Кроме того, ограничимся случаем, когда выполняется условие:

$$|G(t)|^2 \equiv 1, \quad t \in L. \quad (3.5)$$

Теорема 3.3. Если $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ и выполняются условия (3.4) и (3.5), то решение задачи Γ сводится к решению двух обычных скалярных задач Римана в классах кусочно аналитических функций и некоторой алгебраической системы из 8 уравнений с 8 неизвестными параметрами. При этом для разрешимости задачи Γ необходимо и достаточно, чтобы была совместной указанная система алгебраических уравнений и обе скалярные задачи Римана имели решения, удовлетворяющие условиям «симметрии» (2.11).

Таким образом, поскольку обычные скалярные задачи Римана в классах кусочно аналитических функций решаются в замкнутой форме, то, как видно из теорем 3.1–3.3, задача Γ решается в замкнутой форме, например, в следующих трех случаях:

- 1) $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ и $A(t, \tau) \equiv B(t, \tau) \equiv 0$, а ядро (3.1а) – вырожденное;
- 2) $T^+ = \{z: |z| < 1\}$, $A(t, \tau) \equiv B(t, \tau) \equiv 0$ и выполняется условие (3.5);
- 3) $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ и выполняются условия (3.4), (3.5).

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998.

2. Кирьяцкий Э.Г., Расулов К.М. Об одной неклассической краевой задаче типа Дирихле для метааналитических функций в круге // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка. – 2009. – № 1(77). – С. 3–10.

3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.

4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970.

5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977.

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА В КЛАССАХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ, С.Ю. КУРИЦЫН

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром L . Для определенности будем предполагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ . В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + A_1(z) \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + A_0(z) F(z) = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – дифференциальный оператор Коши-Римана, а коэффициенты $A_1(z), A_0(z)$ – кусочно аналитические функции с линией скачков L , задаваемые следующим образом:

$$A_k(z) = \begin{cases} a_k, & \text{если } z \in T^+, \\ \frac{a_k}{z^{2-k}}, & \text{если } z \in T^-, \quad k = 0, 1, \end{cases} \quad (2)$$

причем a_0, a_1 – некоторые комплексные числа.

Решения уравнения (1) в области $T^+(T^-)$ будем называть *метааналитическими функциями в $T^+(T^-)$* .

Пусть λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (3)$$

Известно [1-4], что всякую метааналитическую функцию $F^+(z)$ в

области T^+ можно представить в виде

$$F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]e^{\lambda_0\bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \quad (4a)$$

или

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \varphi_1^+(z)e^{\lambda_2\bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (4б)$$

где $\varphi_k^+(z) \in A(T^+), k = 0, 1$.

Аналогично, в области T^- всякая метааналитическая функция $F^-(z)$ задается в виде

$$F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)]e^{\lambda_0\frac{\bar{z}}{z}}, \text{ если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \quad (5a)$$

или

$$F^-(z) = \varphi_0^-(z)e^{\lambda_1\frac{\bar{z}}{z}} + \varphi_1^-(z)e^{\lambda_2\frac{\bar{z}}{z}}, \text{ если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (5б)$$

где $\varphi_k^-(z) \in A(T^-), k = 0, 1$.

Для краткости класс метааналитических в $T^+(T^-)$ функций будем обозначать через $M_2(T^+)$ ($M_2(T^-)$).

Определение 1. Кусочно метааналитической функцией с линией скачков L будем называть функцию $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$, которая в двух дополняющих друг друга областях T^+ и T^- определяется следующим образом:

$$F(z) = \begin{cases} [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]e^{\lambda_0\bar{z}}, & z \in T^+, \\ [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)]e^{\lambda_0\frac{\bar{z}}{z}}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (6a)$$

или

$$F(z) = \begin{cases} \varphi_0^+(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \varphi_1^+(z)e^{\lambda_2\bar{z}}, & z \in T^+, \\ [\varphi_0^-(z)e^{\lambda_1\frac{\bar{z}}{z}} + \varphi_1^-(z)e^{\lambda_2\frac{\bar{z}}{z}}], & z \in T^-, \end{cases} \quad (6б)$$

где $\varphi_k^+(z) \in A(T^+), \varphi_k^-(z) \in A(T^-), k = 0, 1$, а $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ – некоторые постоянные ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

При этом кусочно метааналитическую функцию $F(z)$ будем называть исчезающей на бесконечности, если $\Pi\{\varphi_k^-; \infty\} = 1 + k, k = 0, 1$.

Определение 2. Пусть m – фиксированное натуральное число. Будем говорить, что метааналитическая в T^+ функция $F(z)$ (вида (3) или (4)) принадлежит классу $M_2(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ непрерывно продолжаются на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно, причем так, что

граничные значения этих функций и указанных производных удовлетворяют на L условию Гельдера (т.е. функции $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ принадлежат классу $A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$).

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F^\pm(z)$ класса $M_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} = G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \int_L A_1(t, \tau) \frac{\partial F^+(\tau)}{\partial x} d\tau + \int_L B_1(t, \tau) \frac{\partial F^-(\tau)}{\partial x} d\tau + g_1(t), \quad (7)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} = G_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + \int_L A_2(t, \tau) \frac{\partial F^+(\tau)}{\partial y} d\tau + \int_L B_2(t, \tau) \frac{\partial F^-(\tau)}{\partial y} d\tau + ig_2(t), \quad (8)$$

где $G_k(t), g_k(t), k=1,2$, – заданные на L функции, причем $G_k(t) \in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(1)}(L)$ и $G_k(t) \neq 0$ на L , а $A_1(t, \tau), B_1(t, \tau), A_2(t, \tau), B_2(t, \tau)$ – заданные фредгольмовы ядра класса $H_*^{(1)}(L \times L)$; здесь множитель i (i – мнимая единица) перед $g_2(t)$ введен для удобства дальнейших обозначений.

Сформулированную задачу будем называть *обобщенной задачей типа Римана для метааналитических функций* или, короче, *задачей P_M* , соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) – *задачей P_M^o* .

В дальнейшем функции вида (6а) будем называть *кусочно метааналитическими функциями первого типа*, а функции вида (6б) – *кусочно метааналитическими функциями второго типа*.

Отметим, что краевая задача вида (7)–(8) в случае $A_1(t, \tau) \equiv B_1(t, \tau) \equiv A_2(t, \tau) \equiv B_2(t, \tau) \equiv 0$ в классах метааналитических функций рассмотрена в монографии [1].

В настоящем сообщении в случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, разработан метод решения краевой задачи P_M в классах кусочно метааналитических функций вида (6а).

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998.
2. Зуев М.Ф. О полианалитических функциях и некоторых их обобщениях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Смоленск, 1968. – 149 с.
3. Балк М.Б., Зуев М.Ф. О полианалитических функциях // Успехи матем. Наук. – 1970. – Т. 25, № 5. – С. 203–226.
4. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ / Серия Совр. пробл. матем. Фунд. напр. – Т. 85. – М.: ВИНТИ, 1991. – С. 187–246.

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ, А.Ю. СМИРНОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L , а $T^- = \bar{C} / (T^+ \cup L)$. Для определенности будем предполагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ .

В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографиях [1; 2].

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все бианалитические в области T^+ функции $F^+(z)$ класса $A_2(T^+) \cap H(L)$, удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) - G_0(t)\overline{F^+(t)} + \int_L A_0(t, \tau)F^+(\tau)d\tau + \int_L B_0(t, \tau)\overline{F^+(\tau)}d\tau = q_0(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} - G_1(t)\frac{\partial \overline{F^+(t)}}{\partial \bar{t}} + \int_L A_1(t, \tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial \bar{\tau}}d\tau + \int_L B_1(t, \tau)\frac{\partial \overline{F^+(\tau)}}{\partial \bar{\tau}}d\tau = q_1(t), \quad (2)$$

где $\frac{\partial^k F^+(t)}{\partial \bar{t}^k} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial^k F^+(z)}{\partial \bar{z}^k}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – дифференциальный оператор Коши-Римана, а $G_k(t), q_k(t)$ ($k = 0, 1$) – заданные на L функции класса $H(L)$ (Гельдера), $A_k(t, \tau), B_k(t, \tau)$ ($k = 0, 1$) – заданные фредгольмовы ядра (т.е. $A_k(t, \tau), B_k(t, \tau) \in H_*(L \times L)$), причем $G_k(t) \neq 0$ ($k = 0, 1$) на L .

Сформулированную задачу будем называть *обобщенной задачей типа Гильберта для бианалитических функций*, или, короче, *задачей GH* , а соответствующую *однородную задачу* ($q_k(t) \equiv 0, k = 0, 1$) – *задачей GH^0* .

В частном случае, когда в краевых условиях (1) и (2) ядра $A_k(t, \tau), B_k(t, \tau)$ ($k = 0, 1$) тождественно равны нулю, т.е.

$$A_0(t, \tau) \equiv B_0(t, \tau) \equiv A_1(t, \tau) \equiv B_1(t, \tau) \equiv 0, \quad (3)$$

задача GH представляет собой *обычную (классическую) краевую задачу типа Гильберта для бианалитических функций*, впервые рассмотренную в работе В.И. Жегалова [3] (см. также [4]).

2. О равносильности задачи GH обобщенной векторно-матричной задаче Гильберта для аналитического вектора. Известно (см., например, [1; 2]), что всякую бианалитическую в области T^+ функцию $F^+(z)$ можно представить в виде

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), \quad z \in T^+, \quad (4)$$

где $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ – аналитические в T^+ функции, которые принято называть соответственно *нулевой* и *первой аналитическими компонентами* бианалитической функции $F^+(z)$.

Так как $\frac{\partial^k F^+(z)}{\partial \bar{z}} = \varphi_1^+(z)$, то в силу представления (4) краевые условия (1) и (2) можно переписать соответственно в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0^+(t) + \bar{t}\varphi_1^+(t) - G_0(t)[\overline{\varphi_0^+(t) + t\varphi_1^+(t)}] + \int_L A_0(t, \tau)[\overline{\varphi_0^+(\tau) + \bar{\tau}\varphi_1^+(\tau)}]d\tau + \\ + \int_L B_0(t, \tau)[\overline{\varphi_0^+(\tau) + \tau\varphi_1^+(\tau)}]d\tau = q_0(t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varphi_1^+(t) - G_1(t)\overline{\varphi_1^+(t)} + \int_L A_1(t, \tau)\overline{\varphi_1^+(\tau)}d\tau + \int_L B_1(t, \tau)\overline{\varphi_1^+(\tau)}d\tau = q_1(t). \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что равенства (5) и (6) в совокупности представляют собой краевое условие следующей *обобщенной векторно-матричной задачи Гильберта относительно аналитического вектора*

$$\varphi^+(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0^+(z) \\ \varphi_1^+(z) \end{pmatrix}:$$

$$a(t)\varphi^+(t) - b(t)\overline{\varphi^+(t)} + \int_L M(t, \tau)\varphi^+(\tau)d\tau + \int_L N(t, \tau)\overline{\varphi^+(\tau)}d\tau = q(t), \quad (7)$$

где

$$a(t) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} G_0(t) & t \cdot G_0(t) \\ 0 & G_1(t) \end{pmatrix}, \quad q(t) = \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$M(t, \tau) = \begin{pmatrix} A_0(t, \tau) & \bar{\tau} \cdot A_0(t, \tau) \\ 0 & A_1(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad N(t, \tau) = \begin{pmatrix} B_0(t, \tau) & \tau \cdot B_0(t, \tau) \\ 0 & B_1(t, \tau) \end{pmatrix}.$$

Наконец, умножив слева обе части равенства (8) на матрицу $a^{-1}(t)$, обратную $a(t)$, будем иметь:

$$\varphi^+(t) + b_1(t)\overline{\varphi^+(t)} + \int_L M_1(t, \tau)\varphi^+(\tau)d\tau + \int_L N_1(t, \tau)\overline{\varphi^+(\tau)}d\tau = h_1(t), \quad (9)$$

где

$$b_1(t) = a^{-1}(t) \cdot b(t) = \begin{pmatrix} G_0(t) & tG_0(t) + \bar{t}G_1(t) \\ 0 & G_1(t) \end{pmatrix}, \quad h_1(t) = a^{-1}(t) \cdot q(t) = \begin{pmatrix} q_0(t) - \bar{t} \cdot q_1(t) \\ q_1(t) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$M_1(t, \tau) = \begin{pmatrix} A_0(t, \tau) & \bar{\tau}A_0(t, \tau) - \bar{t}A_1(t, \tau) \\ & A_1(t, \tau) \end{pmatrix},$$

$$N_1(t, \tau) = \begin{pmatrix} B_0(t, \tau) & \tau B_0(t, \tau) - \bar{t} B_1(t, \tau) \\ 0 & B_1(t, \tau) \end{pmatrix}.$$

Так как по условию задачи **ГН** $G_k(t) \neq 0$ ($k = 0, 1$) на L , то $\det b_1(t) \neq 0$. Следовательно, равенство (9) есть краевое условие обобщенной векторно-матричной задачи Гильберта *нормального типа* (см., например, [5, с. 162]).

Предположим, что обобщенная векторно-матричная задача Гильберта (9) разрешима и уже найдено ее общее решение $\varphi^+(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_0^+(z) \\ \tilde{\varphi}_1^+(z) \end{pmatrix}$. Тогда, согласно формуле (4), решение исходной задачи **ГН** можно задавать следующей формулой:

$$F^+(z) = \tilde{\varphi}_0^+(z) + \bar{z} \tilde{\varphi}_1^+(z), \quad z \in T^+, \quad (11)$$

где $\tilde{\varphi}_0^+(z)$ и $\tilde{\varphi}_1^+(z)$ – аналитические компоненты вектора $\varphi^+(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_0^+(z) \\ \tilde{\varphi}_1^+(z) \end{pmatrix}$, являющегося решением задачи (9).

Таким образом, справедливо следующее важное утверждение.

Теорема 2.1. *Краевая задача **ГН** равносильна обобщенной векторно-матричной задаче Гильберта (9) в том смысле, что если*

$\varphi^+(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_0^+(z) \\ \tilde{\varphi}_1^+(z) \end{pmatrix}$ – *общее решение задачи Гильберта (9), то*

*бианалитическая функция $F^+(z)$, задаваемая формулой (11), будет общим решением задачи **ГН** и, наоборот, если бианалитическая функция вида (11) является общим решением задачи **ГН**, то аналитический вектор $\varphi^+(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_0^+(z) \\ \tilde{\varphi}_1^+(z) \end{pmatrix}$ будет решением задачи*

*Гильберта (9). При этом задача **ГН** будет разрешимой тогда и только тогда, когда разрешима обобщенная задача Гильберта (9).*

Поскольку при $\det b_1(t) \neq 0$ обобщенная векторно-матричная задача Гильберта нормального типа (9) является *нетеровой* (см., например, [6, с. 49]), то из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Краевая задача **ГН** является нетеровой.*

3. Об одном методе решения задачи **ГН.** Заметим, что матрицы $b_1(t)$, $M_1(t, \tau)$, $N_1(t, \tau)$ в краевом условии (9) являются матрицами «треугольного вида», т.е. краевая задача **ГН** относится к классу краевых задач для бианалитических функций, которые принято называть *задачами треугольного вида* (см., например, [1, с. 19]). Если будем

искать решения краевой задачи **GH** в виде (4), то всегда можно свести ее решение к последовательному решению двух *скалярных* краевых задач типа Гильберта относительно неизвестных аналитических функций $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_0^+(z)$.

В самом деле, с учетом представления (4) краевые условия задачи **GH** всегда можно переписать в виде (5) и (6). Но равенство (6) представляет собой краевое условие хорошо известной (см., например, §3 монографии [1] или §35 монографии [2]) *скалярной обобщенной задачи Римана относительно аналитической функции* $\varphi_1^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$. Предположим, что скалярная задача Гильберта (6) разрешима и уже найдено ее общее решение $\tilde{\varphi}_1^+(z)$. Тогда, подставив в краевое условие (5) вместо $\varphi_1^+(t)$ граничные значения $\tilde{\varphi}_1^+(t)$ решений краевой задачи Гильберта (6), равенство (5) принимает вид:

$$\varphi_0^+(t) - G_0(t)\overline{\varphi_0^+(t)} + \int_L A_0(t, \tau)\varphi_0^+(\tau)d\tau + \int_L B_0(t, \tau)\overline{\varphi_0^+(\tau)}d\tau = Q_0(t), \quad (12)$$

где $Q_0(t) = q_0(t) - \bar{t}\tilde{\varphi}_1^+(t) + tG_0(t)\overline{\tilde{\varphi}_1^+(t)} - \int_L \bar{t}A_0(t, \tau)\tilde{\varphi}_1^+(\tau)d\tau + \int_L tB_0(t, \tau)\overline{\tilde{\varphi}_1^+(\tau)}d\tau$.

Пусть обобщенная краевая задача Гильберта (12) разрешима и $\tilde{\varphi}_0^+(z)$ – ее общее решение. Тогда общее решение исходной задачи **GH** можно найти по формуле (11), где $\tilde{\varphi}_1^+(z)$ и $\tilde{\varphi}_0^+(z)$ – общие решения скалярных обобщенных задач Гильберта (6) и (12) соответственно.

Итак, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Решение задачи **GH** для бианалитических функций сводится к последовательному решению двух обобщенных скалярных задач Гильберта вида (6) и (12) в классах аналитических функций. При этом задача **GH** разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы задачи Гильберта (6) и (12).*

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.
3. Жегалов В.И. Об одном обобщении полианалитических функций // Труды семинара по краевым задачам. – Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1975. – Вып. 12. – С. 50–57.
4. Жегалов В.И. Некоторые краевые задачи для полианалитических функций // Труды семинара по краевым задачам. – Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1976. – Вып. 13. – С. 80–85.
5. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970.
6. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ, А.В. СТЕПАНОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L , а $T^- = \bar{C}/(T^+ \cup L)$. Для определенности будем предполагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ .

В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографиях [1; 2].

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $A_2(T^\pm) \cap H(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$F^+(t) - G_0(t)F^-(t) + \int_L A_0(t, \tau)F^+(\tau)d\tau + \int_L B_0(t, \tau)F^-(\tau)d\tau = g_0(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} - G_1(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial \bar{t}} + \int_L A_1(t, \tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial \bar{\tau}}d\tau + \int_L B_1(t, \tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial \bar{\tau}}d\tau = g_1(t), \quad (2)$$

где $\frac{\partial^k F^\pm(t)}{\partial \bar{t}^k} = \lim_{z \rightarrow t} \frac{\partial^k F^\pm(z)}{\partial \bar{z}^k}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – дифференциальный оператор

Коши-Римана, а $G_k(t), g_k(t)$ ($k = 0, 1$) – заданные на L функции класса $H(L)$ (Гельдера), $A_k(t, \tau), B_k(t, \tau)$ ($k = 0, 1$) – заданные фредгольмовы ядра (т.е. $A_k(t, \tau), B_k(t, \tau) \in H_*(L \times L)$), причем $G_k(t) \neq 0$ ($k = 0, 1$) на L .

Сформулированную задачу будем называть *обобщенной задачей типа Римана для бианалитических функций* или, короче, *задачей GR*, а соответствующую однородную задачу ($g_k(t) \equiv 0$, $k = 0, 1$) – *задачей GR⁰*.

В частном случае, когда в краевых условиях (1) и (2) ядра $A_k(t, \tau), B_k(t, \tau)$ ($k = 0, 1$) тождественно равны нулю, т.е.

$$A_0(t, \tau) \equiv B_0(t, \tau) \equiv A_1(t, \tau) \equiv B_1(t, \tau) \equiv 0, \quad (3)$$

задача **GR** представляет собой *обычную (классическую) краевую задачу типа Римана для бианалитических функций*, впервые рассмотренную в работе В.И. Показеева [3] (см. также [4]).

2. О решении задачи GR. Хорошо известно (см., например, [1; 2]), что всякую исчезающую на бесконечности кусочно бианалитическую функцию $F(z)$ с линией скачков L можно представить в виде:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (4)$$

где $\varphi_k^+(z)$, $\varphi_k^-(z)$ ($k=0,1$) – аналитические соответственно в T^+ и T^- функции, которые принято называть *аналитическими компонентами* бианалитических функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$ соответственно, причем

$$\prod \{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1+k, \quad k=0,1; \quad (5)$$

здесь символ $\prod \{\varphi_k^-, \infty\}$ обозначает порядок аналитической функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z = \infty$.

В силу представления (4) краевые условия (1) и (2) (с учетом $\frac{\partial^k F^\pm(z)}{\partial \bar{z}} = \varphi_1^\pm(z)$) можно записать соответственно в виде

$$\varphi_0^+(t) - G_0(t)\varphi_0^-(t) + \int_L A_0(t, \tau)\varphi_0^+(\tau)d\tau + \int_L B_0(t, \tau)\varphi_0^-(\tau)d\tau = Q_0(t), \quad (6)$$

$$\varphi_1^+(t) - G_1(t)\varphi_1^-(t) + \int_L A_1(t, \tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \int_L B_1(t, \tau)\varphi_1^-(\tau)d\tau = g_1(t), \quad (7)$$

где

$$Q_0(t) = g_0(t) - \bar{t}\varphi_1^+(t) + \bar{t}G_0(t)\varphi_1^-(t) - \int_L \bar{z}A_0(t, \tau) \cdot \varphi_1^+(\tau)d\tau - \int_L \bar{z}B_0(t, \tau) \cdot \varphi_1^-(\tau)d\tau. \quad (8)$$

Но равенство (7) представляет собой краевое условие хорошо известной (см., например, §2 монографии [1] или §36 монографии [2]) *обобщенной задачи Римана относительно кусочно аналитической функции* $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$ класса $A(T^\pm) \cap H(L)$, имеющей на бесконечности порядок $\prod \{\varphi_1^-, \infty\} \geq 2$.

В дальнейшем для удобства при использовании теории разрешимости *обобщенной краевой задачи Римана* вида (7), разработанной в §2 монографии [1], перепишем краевое равенство (7) так:

$$\varphi_1^+(t) - \tilde{G}_1(t)\tilde{\varphi}_1^-(t) + \int_L A_1(t, \tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \int_L \tilde{B}_1(t, \tau)\tilde{\varphi}_1^-(\tau)d\tau = g_1(t), \quad (9)$$

где приняты обозначения:

$$\tilde{\varphi}_1^-(z) = z \cdot \varphi_1^-(z), \quad \tilde{G}_1(t) = \frac{1}{t}G_1(t), \quad \tilde{B}_1(t, \tau) = \frac{1}{\tau}B_1(t, \tau). \quad (10)$$

Таким образом, равенство (9) есть краевое условие *обобщенной задачи Римана относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции* $\tilde{\varphi}_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \tilde{\varphi}_1^-(z)\}$, которая подробно исследована в §2 монографии [1].

Пусть $\chi_1 = \text{Ind} \tilde{G}_1(t)$ – индекс краевой задачи (9). Тогда, как известно (см., например, [1], теоремы 2.1 и 2.2), при $\chi_1 \geq 0$ общее решение краевой задачи (9) (в случае ее разрешимости) можно задавать формулами:

$$\varphi_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{\tau - z} d\tau + \int_L R_1^+(z, \tau)g_1(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{m_1} \beta_{k1} d_{k1}^+(z), \quad z \in T^+, \quad (11)$$

$$\tilde{\varphi}_1^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{\tilde{G}_1(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_1^-(z, \tau) g_1(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{m_1} \beta_{k1} d_{k1}^-(z), \quad z \in T^-, \quad (12)$$

где $m_1 = \chi_1 + \nu_1 - r_1$, причем $\nu_1 \geq r_1$; β_{k1} ($k=1, 2, \dots, m_1$) – произвольные комплексные постоянные, а $R_1^\pm(z, \tau)$ и $d_{k1}^\pm(z)$ – функции, определенным образом выражаемые через заданные функции $G_1(t)$, $A_1(t, \tau)$ и $B_1(t, \tau)$. Кроме того, $\lim_{z \rightarrow t \in L} R_1^\pm(z, \tau) = R_1^\pm(t, \tau) \in H_*(L \times L)$, т.е. $R_1^+(t, \tau)$ и $R_1^-(t, \tau)$ – фредгольмовы ядра.

Если же $\chi_1 < 0$, то общее решение обобщенной задачи Римана (9) (в случае ее разрешимости) также задается формулами вида (11) и (12), где $m = \max(0, \nu_1 - |\chi_1|)$.

Далее, с учетом обозначений (10), из (12) будем иметь:

$$\varphi_1^-(z) = \frac{1}{z} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{\tilde{G}_1(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_1^-(z, \tau) g_1(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{m_1} \beta_{k1} d_{k1}^-(z) \right\}, \quad z \in T^-. \quad (13)$$

Таким образом, все кусочно аналитические функции $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$ класса $A(T^\pm) \cap H(L)$, удовлетворяющие краевому условию (7) и имеющие на бесконечности порядок $\prod \{\varphi_1^-, \infty\} \geq 2$, задаются формулами (11) и (13).

В силу формул Сохоцкого (см., например, [2, с. 38]), из формул (11) и (13) (с учетом обозначений) при $z \rightarrow t \in L$, получим

$$\varphi_1^+(t) = \frac{1}{2} g_1(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L R_1^+(t, \tau) g_1(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{m_1} \beta_{k1} d_{k1}^+(t), \quad t \in L, \quad (14)$$

$$\varphi_1^-(t) = \frac{g_1(t)}{2G_1(t)} + \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_L \frac{\tau \cdot g_1(\tau)}{G_1(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_L t^{-1} R_1^-(t, \tau) g_1(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{m_1} \beta_{k1} t^{-1} d_{k1}^-(t), \quad t \in L. \quad (15)$$

Наконец, подставив в правую часть формулы (8) вместо $\varphi_1^+(t)$ и $\varphi_1^-(t)$ их значения, получаемые соответственно по формулам (14) и (15), определим функцию $Q_0(t)$. Затем, решив (например, методом, изложенным в §2 монографии [1]) обобщенную задачу Римана (6) относительно исчезающей на бесконечности кусочно аналитической функции $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$, при $\chi_0 = \text{Ind} G_0(t) \geq 0$ будем иметь:

$$\varphi_0^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tau - z} d\tau + \int_L R_0^+(z, \tau) Q_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{m_0} \beta_{k0} d_{k0}^+(z), \quad z \in T^+, \quad (16)$$

$$\varphi_0^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_0(\tau)}{G_0(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_0^-(z, \tau) Q_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{m_0} \beta_{k0} d_{k0}^-(z), \quad z \in T^-, \quad (17)$$

где $m_0 = \chi_0 + \nu_0 - r_0$, причем $\nu_0 \geq r_0$; β_{k_0} ($k = 1, 2, \dots, m_0$) - произвольные комплексные постоянные, а $R_0^\pm(z, \tau)$ и $d_{k_0}^\pm(z)$ - функции, определенным образом выражаемые через заданные функции $G_1(t)$, $A_1(t, \tau)$ и $B_1(t, \tau)$. Если же $\chi_0 < 0$, то общее решение обобщенной задачи Римана (6) (в случае ее разрешимости) также задается формулами вида (16) и (17), где $m_0 = \max(0, \nu_0 - |\chi_0|)$.

Таким образом, общее решение задачи **GR** можно задавать в виде (4), где аналитические компоненты $\varphi_k^+(z)$, $\varphi_k^-(z)$ ($k = 0, 1$) определяются по формулам (11), (13), (16) и (17).

Итак, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Решение задачи **GR** в классах кусочно бианалитических функций сводится к последовательному решению двух обобщенных задач Римана вида (7) и (6) в классах кусочно аналитических функций с линией скачков L . При этом задача **GR** разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы задачи Римана (7) и (6).*

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.
3. Показеев В.И. Нерегулярные полианалитические функции // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 103–113.
4. Показеев В.В. Интегралы типа Коши для полианалитических функций // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – Вып. 17. – С. 133–139.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

К.М. РАСУЛОВ, Г.П. ШАПОВАЛОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L , а $T^- = \bar{C} / (T^+ \cup L)$. Для определенности будем предполагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ .

Далее в основном будем использовать термины и обозначения, принятые в монографиях [1] и [2].

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса*

$A_2(T^\pm) \cap H(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на контуре L следующим условиям:

$$F^+(t) = G_{11}(t)F^-(t) + G_{12}\overline{F^-(t)} + g_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} = G_{21}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial \bar{t}} + G_{22}(t)\frac{\partial \overline{F^-(t)}}{\partial \bar{t}} + g_2(t), \quad (2)$$

где $\frac{\partial^p F^\pm(t)}{\partial \bar{t}^p} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial^p F^\pm(z)}{\partial \bar{z}^p}$ ($p = 0, 1$), $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ – дифференциальный оператор Коши-Римана, а $G_{kj}(t)$, $g_j(t)$ ($k = 1, 2$; $j = 1, 2$) – заданные на L комплекснозначные функции класса $H(L)$ (Гельдера), причем $G_{k1}(t) \neq 0$ ($k = 1, 2$) на L .

Сформулированную задачу будем называть *трехэлементной краевой задачей типа Римана для бианалитических функций*, или, короче, *задачей P_{31}* , а соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) – *задачей P_{31}^0* .

Сразу отметим, что в частном случае, когда $G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0$, задача P_{31} представляет собой классическую (двухэлементную) краевую задачу типа Римана для бианалитических функций, впервые рассмотренную и изученную в работе В.И. Показеева [3] (см. также [4]). Общие методы решения классических (двухэлементных) краевых задач для бианалитических функций в случае произвольных конечносвязных областей с гладкими границами разработаны в монографии [1].

Основной целью настоящего сообщения является изложение одного метода решения задачи P_{31} в случае, когда $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

2. О решении задачи P_{31} в случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$. Известно (см., например, [1; 2]), что всякую исчезающую на бесконечности кусочно бианалитическую функцию $F(z)$ с линией скачков L можно представить в виде:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (3)$$

где $\varphi_k^+(z)$, $\varphi_k^-(z)$ ($k = 0, 1$) – аналитические соответственно в T^+ и T^- функции, называемые *аналитическими компонентами* бианалитических функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$ соответственно, причем выполняются условия:

$$\prod \{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1 + k, \quad k = 0, 1; \quad (4)$$

здесь $\prod \{\varphi_k^-, \infty\}$ – обозначение порядка функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z = \infty$.

Поскольку $\frac{\partial^k F^\pm(z)}{\partial \bar{z}} = \varphi_1^\pm(z)$, то в силу представления (4) краевые условия (1) и (2) можно записать соответственно в виде

$$\varphi_0^+(t) = G_{11}(t)\varphi_0^-(t) + G_{12}(t)\overline{\varphi_0^-(t)} + q_1(t), \quad (5)$$

$$\varphi_1^+(t) = G_{21}(t)\varphi_1^-(t) + G_{22}(t)\overline{\varphi_1^-(t)} + g_2(t), \quad (6)$$

где

$$q_1(t) = g_1(t) - \bar{t}\varphi_1^+(t) + \bar{t}G_{11}(t)\varphi_1^-(t) + t \cdot G_{12}(t) \cdot \overline{\varphi_1^-(t)}. \quad (7)$$

Заметим, что равенство (6) представляет собой краевое условие хорошо известной (см., например, §17 монографии [5]) *обобщенной краевой задачи Римана относительно кусочно аналитической функции* $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$ класса $A(T^\pm) \cap H(L)$, имеющей на бесконечности порядок $\prod \{\varphi_1^-, \infty\} \geq 2$.

Следуя Г.С. Литвинчуку (см. [5, с. 223]), рассмотрим систему равенств, состоящую из краевого условия (6) и краевого условия, полученного из (6) переходом к комплексно сопряженным значениям, т.е. систему вида

$$\begin{cases} \varphi_1^+(t) = G_{21}(t)\varphi_1^-(t) + G_{22}(t)\overline{\varphi_1^-(t)} + g_2(t), \\ \overline{\varphi_1^+(t)} = \overline{G_{21}(t)\varphi_1^-(t) + G_{22}(t)\overline{\varphi_1^-(t)} + g_2(t)}. \end{cases} \quad (8)$$

Теперь, вводя в рассмотрение новые неизвестные функции $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ ($k=1,2$), аналитические соответственно в T^+ и T^- , следующими формулами

$$\Phi_1^+(z) = \varphi_1^+(z), \quad \Phi_2^+(z) = \frac{1}{z}\overline{\varphi_1^-\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad z \in T^+, \quad (9)$$

$$\Phi_1^-(z) = \varphi_1^-(z), \quad \Phi_2^-(z) = \frac{1}{z}\overline{\varphi_1^+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad z \in T^-, \quad (10)$$

систему (8) можно записать в виде

$$\begin{cases} \Phi_1^+(t) = G_{21}(t)\Phi_1^-(t) + t \cdot G_{22}(t)\Phi_2^+(t) + g_2(t), \\ \Phi_2^-(t) = \overline{t \cdot G_{22}(t)\Phi_1^-(t) + G_{21}(t)\Phi_2^+(t) + t \cdot g_2(t)}. \end{cases} \quad (11)$$

Замечание 2.1. Здесь важно отметить, что поскольку $\prod \{\varphi_1^-, \infty\} \geq 2$, то, как видно из (9) и (10), функции $\Phi_2^+(z)$ и $\Phi_2^-(z)$ должны удовлетворять следующим «начальным» условиям:

$$\Phi_2^+(0) = 0 \text{ и } \Phi_2^-(\infty) = 0. \quad (12)$$

Далее, разрешая систему (11) относительно предельных значений $\Phi_1^+(t)$ и $\Phi_2^+(t)$, получаем следующую *двухэлементную* векторно-матричную задачу Римана относительно кусочно аналитического вектора $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$:

$$\Phi^+(t) = G_2(t)\Phi^-(t) + Q_2(t), \quad t \in L, \quad (13)$$

$$\text{где } \Phi^+(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^+(z) \\ \Phi_2^+(z) \end{pmatrix}, \quad \Phi^-(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^-(z) \\ \Phi_2^-(z) \end{pmatrix},$$

$$G_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{|G_{21}(t)|^2 - |G_{22}(t)|^2}{\overline{G_{21}(t)}} & \frac{tG_{22}(t)}{\overline{G_{21}(t)}} \\ -\frac{tG_{22}(t)}{\overline{G_{21}(t)}} & \frac{1}{\overline{G_{21}(t)}} \end{pmatrix}, \quad Q_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{\overline{G_{21}(t)g_2(t)} - G_{22}(t)\overline{g_2(t)}}{\overline{G_{21}(t)}} \\ -\frac{tg_2(t)}{\overline{G_{21}(t)}} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Нетрудно проверить, что $\det G_2(t) \neq 0, t \in L$. Следовательно, задача Римана (13) является задачей *нормального типа*, и методы решения таких задач хорошо известны (см., например, [1,; [5–7]). Кроме того, в §17 монографии [5] подробно исследована теория разрешимости задачи (13) в следующих двух важных частных случаях: 1) $|G_{21}(t)| > |G_{22}(t)|$ (т.е. в так называемом *устойчивом случае*) и 2) $|G_{21}(t)| \equiv |G_{22}(t)|$ (т.е. в *вырожденном случае*).

Предположим, что векторно-матричная задача Римана (13) разрешима и уже найдено ее общее решение, т.е. аналитические функции $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ ($k=1,2$), удовлетворяющие «начальным» условиям (12). Тогда по формулам (9) и (10), мы определим и кусочно аналитическую функцию $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$, удовлетворяющую краевому условию (6). Далее, подставив граничные значения $\varphi_1^+(t)$ и $\varphi_1^-(z)$ найденных аналитических функций $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_1^-(z)$ в правую часть формулы (7), определим функцию $q_1(t)$. Наконец, подставив в правую часть равенства (5) найденные значения функции $q_1(t)$, получим *обобщенную задачу Римана (5) относительно кусочно аналитической функции* $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$ класса $A(T^\pm) \cap H(L)$, имеющей на бесконечности порядок $\prod \{\varphi_1^-, \infty\} \geq 1$. Теория разрешимости обобщенной задачи Римана (5) совершенно аналогична теории разрешимости рассмотренной выше обобщенной задачи Римана (6).

Пусть обобщенная задача Римана (5) является разрешимой и уже найдено ее общее решение, т.е. исчезающая на бесконечности кусочно аналитическая функция $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$, удовлетворяющая краевому

условию (5). Тогда решение исходной задачи P_{31} можно получить по формуле (3), где $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$ и $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$ – решения обобщенных задач Римана (6) и (5) соответственно.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.1. *Если $T^+ = \{z: |z| < 1\}$, то решение задачи P_{31} сводится к последовательному решению двух обобщенных задач Римана (6) и (5) в классах $A(T^\pm) \cap H(L)$ кусочно аналитических функций, удовлетворяющих на бесконечности условиям (4). При этом задача P_{31} разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы задачи Римана (6) и (5) в указанных классах функций.*

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.
3. Показеев В.И. Нерегулярные полианалитические функции // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 103–113.
4. Показеев В.В. Интегралы типа Коши для полианалитических функций // Труды Семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – Вып. 17. – С. 133–139.
5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977.
6. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970.
7. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.

О РЕШЕНИИ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА МАРКУШЕВИЧА В КЛАССАХ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.М. РАСУЛОВ, В.С. ШАШКЕВИЧ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L , а $T^- = \bar{C}/(T^+ \cup L)$. Для определенности будем предполагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ .

Рассмотрим следующую краевую задачу, впервые сформулированную в монографии [1].

Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на контуре L следующим условиям:

$$F^+[\alpha(t)] = G_{11}(t)F^-(t) + G_{12}(t)\overline{F^-(t)} + g_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+} = -G_{21}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} - G_{22}(t)\frac{\partial \overline{F^-(t)}}{\partial n_-} - g_2(t), \quad (2)$$

где $G_{kj}(t), g_j(t)$ ($k=1,2; j=1,2$) – заданные на L комплекснозначные функции класса $H(L)$ (Гельдера), $\alpha(t)$ – прямой сдвиг контура L , причем $\alpha'(t) \in H(L)$.

В формуле (2) множитель (-1) перед $G_{21}(t), G_{22}(t)$ и $g_2(t)$ введен для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу будем называть *трехэлементной краевой задачей типа Маркушевича в классах бианалитических функций*, или, короче, *задачей M_2* , а соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) – *задачей M_2^0* .

Сразу отметим, что в частном случае, когда $G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0$ и $\alpha(t) \equiv t$, задача M_2 представляет собой одну из основных (двухэлементных) краевых задач типа Римана для бианалитических функций, сформулированных Ф.Д. Гаховым в его известной монографии (см. [2, с. 319]). Методы решения двухэлементных краевых задач для бианалитических функций в случае произвольных конечносвязных областей с гладкими границами подробно разработаны в монографии [1]. В диссертации Н.Г. Анищенковой [3] задача M_2 изучалась при условии $\alpha(t) \equiv t$.

В настоящем сообщении получен алгоритм решения задачи M_2 в случае, когда контур L – единичная окружность.

2. О сведении задачи M_2 к двум обобщенным задачам Маркушевича для аналитических функций. Первым важным шагом при исследовании задачи M_2 является доказательство следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Если L – единичная окружность, то решение задачи M_2 сводится к решению следующих двух обобщенных задач Маркушевича относительно кусочно аналитических функций с линией скачков L :*

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = t^{k-1} \cdot [\alpha(t)]^{3-k} G_{k1}(t)\Phi_k^-(t) + t^{1-k} [\alpha(t)]^{3-k} G_{k2}(t)\overline{\Phi_k^-(t)} + [\alpha(t)]^{3-k} g_k(t), \quad k=1,2, \quad (3)$$

где

$$\Phi_1^+(z) = z^2 \varphi_0^+(z) + z \varphi_1^+(z), \quad \Phi_2^+(z) = z^2 \frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + z \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} + \varphi_1^+(z), \quad z \in T^+, \quad (4)$$

$$\Phi_1^-(z) = \varphi_0^-(z) + \frac{1}{z} \varphi_1^-(z), \quad \Phi_2^-(z) = \frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} + \frac{1}{z} \frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} + \frac{1}{z^2} \varphi_1^-(z), \quad z \in T^-. \quad (5)$$

Доказательство. Как известно (см., например, [1; 2]), всякую исчезающую на бесконечности кусочно бианалитическую функцию $F(z)$ с линией скачков L можно представить в виде:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + z \varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + z \varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (6)$$

где $\varphi_k^+(z)$, $\varphi_k^-(z)$ – аналитические соответственно в T^+ и T^- функции, для которых выполняются условия:

$$\prod \{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1 + k, \quad k = 0, 1; \quad (7)$$

здесь $\prod \{\varphi_k^-, \infty\}$ – обозначение порядка функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z = \infty$.

Сразу отметим, что в силу (7) вспомогательные аналитические функции $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ ($k = 1, 2$), определяемые по формулам (4) и (5), в свою очередь, должны удовлетворять следующим «начальным» условиям:

$$\Phi_1^+(0) = 0, \quad \prod \{\Phi_k^-, \infty\} \geq k, \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

Известно (см., например, [2, с. 304]), что производные по нормали $\frac{\partial}{\partial n_{\pm}}$ выражаются через формальные производные $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$ по следующей формуле:

$$\frac{\partial}{\partial n_{\pm}} = \pm i \left(t' \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right), \quad t' = \frac{dt}{ds}. \quad (9)$$

Но поскольку для точек $t = t(s) = x(s) + iy(s)$, где s – длина дуги, на единичной окружности выполняется тождество $t' = it$, то формула (9) в случае окружности L примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial n_{\pm}} = \mp \left(t \frac{\partial}{\partial t} + \bar{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right). \quad (10)$$

Далее, с учетом представления (6) и формул (10) краевые условия (1) и (2) перепишем в следующем виде

$$\varphi_0^+[\alpha(t)] + \overline{\alpha(t)} \varphi_1^+[\alpha(t)] = G_{11}(t) (\varphi_0^-(t) + \bar{t} \varphi_1^-(t)) + G_{12}(t) (\overline{\varphi_0^-(t) + \bar{t} \varphi_1^-(t)}) + g_1(t), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left(\alpha(t) \frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt} + \frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt} + \overline{\alpha(t)\varphi_1^+[\alpha(t)]} \right) = G_{21}(t) \left(t \frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \bar{t}\varphi_1^-(t) \right) + \\ + G_{22}(t) \left(\overline{t \frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \bar{t}\varphi_1^-(t)} \right) + g_2(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Наконец, умножив обе части равенств (11) и (12) соответственно на $[\alpha(t)]^2$ и $[\alpha(t)]$ и используя вспомогательные функции $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$, определяемые по формулам (4)–(5), получим равенства (3). *Лемма доказана.*

Предположим теперь, что обе обобщенные задачи Маркушевича вида (3) разрешимы и уже найдены аналитические функции $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ ($k=1, 2$), удовлетворяющие условиям (8). Покажем, как по уже известным функциям $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ ($k=1, 2$) можно получить решение исходной краевой задачи M_2 , т.е. найти исчезающую на бесконечности кусочно бианалитическую функцию $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$, представимую формулой (6) и удовлетворяющую краевым условиям (1), (2).

Для этого заметим, что в силу формул (4) аналитические компоненты $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ искомой бианалитической в T^+ функции $F^+(z)$ можно выразить через $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$ следующим образом:

$$\varphi_0^+(z) = \frac{1}{2z} \left(\frac{d\Phi_1^+(z)}{dz} - \Phi_2^+(z) \right), \quad \varphi_1^+(z) = \frac{1}{z} \left(\Phi_1^+(z) - \frac{z}{2} \frac{d\Phi_1^+(z)}{dz} + \frac{z}{2} \Phi_2^+(z) \right), \quad z \in T^+. \quad (13)$$

Аналогично, из формул (5) можно выразить аналитические компоненты $\varphi_0^-(z)$ и $\varphi_1^-(z)$ искомой бианалитической в T^- функции $F^-(z)$:

$$\varphi_0^-(z) = \frac{z^2}{2} \left(\Phi_2^-(z) - \frac{d\Phi_1^-(z)}{dz} \right), \quad \varphi_1^-(z) = \Phi_1^-(z) - \frac{z}{2} \left(\Phi_2^-(z) - \frac{d\Phi_1^-(z)}{dz} \right), \quad z \in T^-. \quad (14)$$

Пусть для аналитических функций $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ ($k=1, 2$), удовлетворяющих «начальным» условиям (8), имеют место следующие разложения в степенные ряды:

$$\Phi_1^+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} z^n, \quad \Phi_2^+(z) = a_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} z^n, \quad z \in T^+, \quad (15)$$

$$\Phi_1^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} z^{-n}, \quad \Phi_2^-(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_{2n} z^{-n}, \quad z \in T^-. \quad (16)$$

Тогда, как видно из формул (13) и (14), для разрешимости задачи M_2 нужно требовать выполнения следующих условий:

$$a_{11} = a_{20}, \quad b_{22} = -b_{11}, \quad b_{23} = -2b_{12}. \quad (17)$$

При выполнении условий (17) решение задачи M_2 можно получить по формулам (6), где $\varphi_k^+(z)$ и $\varphi_k^-(z)$ ($k=0,1$) определяются из (13) и (14) соответственно.

Таким образом, на основании леммы 2.1 в случае $L = \{t : |t|=1\}$ решение задачи M_2 можно получить по следующему алгоритму.

1. Редуцируем задачу M_2 к двум обобщенным задачам Маркушевича вида (3) в классе аналитических функций и переходим к пункту 2.

2. Если хотя бы одна из задач вида (3) неразрешима, то неразрешима и исходная задача M_2 . Если же обе обобщенные задачи Маркушевича (3) разрешимы, то, решив их, например, методами, разработанными в работах [4–6], находим аналитические в круге T^+ функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$, а затем переходим к пункту 3.

3. Для найденных в пункте 2 функций $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$ проверяем выполнение условий вида (17). Если условия (17) не выполняются, то исходная задача M_2 неразрешима. Если же для найденных в пункте 2 функций $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$ выполняются условия (17), то переходим к пункту 4.

4. Используя формулы (13) и (14), находим сначала аналитические компоненты $\varphi_k^+(z)$, $\varphi_k^-(z)$ ($k=0,1$), а затем по формуле (6) – решение исходной задачи M_2 .

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. Анищенкова Н.Г. Трехэлементные краевые задачи типа Римана для бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Смоленск, 2002. – 120 с.
4. Расулов К.М. Об одном методе решения граничной задачи Маркушевича в классе аналитических функций // Межвуз. сб. науч. трудов «Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям». – Вып. 3. – Смоленск: СПГУ, 2001. – С. 98–109.
5. Расулов К.М. О решении обобщенной граничной задачи Маркушевича в классе аналитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: сб. трудов международной науч. конф. – Смоленск: СПГУ, 2002. – С. 137–141.

6. Rasulov K.M. About the solution in closed form of generalized Markushevich boundary value problem in the class of analytical functions // Mathematical Modelling and Analysis. – Vilnius. – 2004. – Vol. 9, № 3, – P. 223-228.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

К.М. РАСУЛОВ, Д.А. ШИТИКОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L . Для определенности будем предполагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ . В дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + a_1 \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + a_0 F(z) = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – дифференциальный оператор Коши-Римана, а a_0, a_1 – некоторые комплексные числа.

Напомним (см., например, [1–4]), что комплексная функция $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ называется *метааналитической функцией* в области T^+ , если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет там дифференциальному уравнению (1).

Пусть λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (2)$$

Известно [1–3], что всякую метааналитическую в области T^+ функцию можно представить в виде

$$F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] e^{\lambda_0 \bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \quad (3)$$

или

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} + \varphi_1^+(z) e^{\lambda_2 \bar{z}}, \text{ если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (4)$$

где $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ – аналитические в T^+ функции. Обычно функции $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ называются *аналитическими компонентами* метааналитической функции $F(z)$.

Определение 1. Пусть m – фиксированное натуральное число.

Будем говорить, что метааналитическая в T^+ функция $F(z)$ (вида (3) или (4)) принадлежит классу $M_2(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ непрерывно продолжаются на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно, причем так, что граничные значения этих функций и указанных производных удовлетворяют на L условию Гельдера (т.е. функции $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ принадлежат классу $A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$).

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все метааналитические в круге T^+ функции $F(z)$ класса $M_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, удовлетворяющие на L краевым условиям:*

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)}F^+(t)\} = q_0(t), \quad (5)$$

$$\operatorname{Re}\left\{h_1(t)\left(\frac{\partial F^+(t)}{\partial t} - \lambda F^+(t)\right)\right\} = q_1(t), \quad (6)$$

где $F^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} F(z)$, $\frac{\partial F^+(t)}{\partial t} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial F(z)}{\partial z}$, λ – какой-нибудь корень характеристического уравнения (2), а $h_k(t)$ и $q_k(t)$ ($k = 0, 1$) – заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $h_k(t) \neq 0$, $t \in L$ ($k = 0, 1$).

Сформулированную задачу будем называть *задачей типа Гильберта для метааналитических функций*, или, короче, *задачей Γ* , соответствующую однородную задачу ($q_0(t) \equiv q_1(t) \equiv 0$) – *задачей Γ^0* .

В дальнейшем функции вида (3) будем называть *метааналитическими функциями первого типа*, а функции вида (4) – *метааналитическими функциями второго типа*.

Отметим, что впервые краевая задача вида (5)–(6) в случае $\lambda = 0$ в классах метааналитических функций рассматривалась в работе В.И. Жегалова [5].

В настоящем сообщении в случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, разработан общий метод решения краевой задачи Γ в классах метааналитических функций как вида (3), так и вида (4).

Основной целью настоящего сообщения является построение конструктивного алгоритма решения краевой задачи Γ в случае, когда $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

2. О решении задачи Γ в классах метааналитических функций вида (3) в случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$, где $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$ – расширенная комплексная плоскость.

Будем искать решения задачи Γ в виде (3), и пусть в краевом условии (6) $\lambda = \lambda_0$. Тогда в силу представления (3) и равенства

$\frac{\partial^k F^+(z)}{\partial \bar{z}} - \lambda_0 F^+(z) = \varphi_1^+(z) e^{\lambda_0 \bar{z}}$, $z \in T^+$, краевые условия (5) и (6) можно переписать соответственно в виде

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)} e^{\lambda_0 \bar{t}} \varphi_0^+(t)\} = Q_0(t), \quad (7)$$

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_1(t)} e^{\lambda_0 \bar{t}} \varphi_1^+(t)\} = q_1(t), \quad (8)$$

где

$$Q_0(t) = q_0(t) - \operatorname{Re}\{t \cdot \overline{h_0(t)} e^{\lambda_0 \bar{t}} \varphi_1^+(t)\}. \quad (9)$$

Так как $\overline{h_1(t)} e^{\lambda_0 \bar{t}} \neq 0$, то равенство (8) представляет собой граничное условие обычной скалярной задачи Гильберта относительно аналитической в круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ функции $\varphi_1^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ (см., например, [1; 7; 8]).

Предположим, что задача Гильберта (8) разрешима и $\tilde{\varphi}_1^+(z)$ – ее общее решение. Далее, подставив в правую часть формулы (9) вместо $\varphi_1^+(t)$ граничные значения $\tilde{\varphi}_1^+(t)$ решений краевой задачи Гильберта (8), найдем значения функции $Q_0(t)$. Наконец, подставив найденные значения $Q_0(t)$ в правую часть равенства (7), а затем решив скалярную задачу Гильберта (8), определим ее общее решение $\tilde{\varphi}_0^+(z)$. Тогда общее решение исходной задачи Γ можно задавать в виде

$$F^+(z) = [\tilde{\varphi}_0^+(z) + \bar{z} \tilde{\varphi}_1^+(z)] e^{\lambda_0 \bar{z}}, \quad (10)$$

где $\tilde{\varphi}_1^+(z)$ и $\tilde{\varphi}_0^+(z)$ – общие решения скалярных задач Гильберта (8) и (7) соответственно.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Решение задачи Γ в классе метааналитических функций первого типа сводится к последовательному решению двух обычных скалярных задач Гильберта вида (8) и (7) в классах аналитических функций. При этом задача Γ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы задачи Гильберта (8) и (7).*

3. О решении задачи Γ в классах метааналитических функций вида (4) в случае, когда $T^+ = \{z: |z| < 1\}$. В данном случае будем искать решения задачи Γ в виде (4). Для определенности предположим, что в краевом условии (6) $\lambda = \lambda_1$. Тогда в силу представления (4) и равенства $\frac{\partial^k F^+(z)}{\partial \bar{z}} - \lambda_1 F^+(z) = (\lambda_2 - \lambda_1) \varphi_1^+(z) e^{\lambda_2 \bar{z}}$, $z \in T^+$, краевые условия (5) и (6) можно переписать соответственно в виде

$$\operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)} e^{\lambda_0 \bar{t}} \varphi_0^+(t)\} = Q_1(t), \quad (11)$$

$$\operatorname{Re}\{((\lambda_2 - \lambda_1) \overline{h_1(t)}) e^{\lambda_2 \bar{t}} \varphi_1^+(t)\} = q_1(t), \quad (12)$$

где

$$Q_1(t) = q_0(t) - \operatorname{Re}\{\overline{h_0(t)}e^{\lambda_2 \bar{t}}\varphi_1^+(t)\}. \quad (13)$$

Далее, рассуждая так же, как в пункте 2, получаем следующий основной результат.

Теорема 3.2. *Решение задачи Γ в классе метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению двух обычных скалярных задач Гильберта вида (12) и (11) в классах аналитических функций. При этом задача Γ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы задачи Гильберта (12) и (11).*

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998.
2. Зуев М.Ф. О полианалитических функциях и некоторых их обобщениях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Смоленск, 1968. – 149 с.
3. Балк М.Б., Зуев М.Ф. О полианалитических функциях // Успехи матем. Наук. – 1970. – Т. 25, № 5. – С. 203–226.
4. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ / Серия «Совр. пробл. матем. Фунд. напр.» – Т. 85. – М.: ВИНТИ, 1991. – С. 187–246.
5. Жегалов В.И. Об одном обобщении полианалитических функций // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975. – Вып. 12. – С. 50–57.
6. Жегалов В.И. Некоторые краевые задачи для полианалитических функций // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976. – Вып. 13. – С. 80–85.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.
8. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977.

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ ГОЛОМОРФНЫХ В ПРАВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ С МАЖОРАНТОЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Е.Г. РОДИКОВА

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
241036, Брянск, ул. Бежицкая, 14
e-mail: evheny@yandex.ru

Пусть C – комплексная плоскость, D – единичный круг на C , символом C^+ обозначим правую полуплоскость. Если Ω – некоторая

область на комплексной плоскости C , то символом $H(\Omega)$ обозначим множество всех голоморфных в Ω функций. Пусть далее $\lambda(x)$ – монотонно возрастающая положительная функция на $C_+ = [0, +\infty)$. Введем в рассмотрение класс функций

$$X_\lambda^\infty = \{f \in H(C^+) : \ln|f(z)| \leq c_f \cdot \lambda(\operatorname{Re} z), z \in C^+\}.$$

Будем предполагать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \lambda'(x)}{\lambda(x)} = +\infty. \quad (1)$$

В работе Ф.А. Шамояна [1] получено полное описание вещественных корней функций из классов

$$H(\lambda) = \{f \in H(C) : \ln|f(z)| \leq c_f \cdot \lambda(|z|), z \in C\},$$

$$A(\lambda) = \left\{ f \in H(D) : \ln|f(z)| \leq c_f \cdot \lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right), z \in D \right\}$$

при условии (1).

В данной работе получена характеристика вещественных корней функций из класса X_λ^∞ в терминах считающей функции.

Обозначим через Z_f^+ множество вещественных положительных нулей функции f . Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $Z = \{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $0 < r_k \leq r_{k+1}$, $k \in C$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k = +\infty$, функция $\psi(x) = \ln \lambda(x)$ выпукла на C^+ , $\psi'(0) \neq 0$ и $\int_1^{+\infty} \frac{(\psi''(x))^2}{(\psi'(x))^3} < +\infty$. Для того, чтобы последовательность Z можно было представить в виде $Z = Z_f^+$ для некоторой функции $f \in H(X_\lambda^\infty)$, $f \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$n(r) = \operatorname{card}\{r_k : 0 < r_k \leq r\} \leq C \lambda(r), \quad C > 0.$$

Применяя методы работы [1], мы сводим доказательство этого результата к точной оценке конформно отображающей функции криволинейных полос (см. [2]) и классической теореме Адамара (см. [3]).

Литература

1. Шамоян Ф.А. Вещественные корни для некоторых классов аналитических функций с мажорантой бесконечного порядка // Зап. науч. семин. ПОМИ. Т. 376. – СПб., 2010. – С. 176–180.

2. Варшавский С. О конформном отображении бесконечных полос. – Математика, сб. пер., 1958. – Т. 2, № 4. – С. 66–116.

3. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КУСОЧНО БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.П. Титов

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

1. Постановка задачи. Пусть L – простая гладкая замкнутая кривая на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, причем внутри L лежит еще одна простая гладкая замкнутая кривая l . Область, лежащую внутри l , обозначим через D^+ , а область, ограниченную кривыми L и l , – через D^- . В дальнейшем будем пользоваться в основном терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Функцию $F(z)$ будем называть *кусочно бианалитической функцией с линией скачков l* , если она в двух областях D^+ и D^- определяется выражениями $F^+(z)$ и $F^-(z)$:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in D^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in D^-, \end{cases} \quad (1)$$

где $\varphi_k^+(z)$ ($k=0, 1$) – функции, аналитические в области D^+ и непрерывные в замкнутой области $\overline{D^+} = D^+ \cup l$, а $\varphi_k^-(z)$ ($k=0, 1$) – функции, аналитические в области D^- и непрерывные в замкнутой области $\overline{D^-} = D^- \cup l \cup L$.

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z)$ с линией скачков l , удовлетворяющие граничным условиям:*

$$F^+(t) = G_0(t)F^-(t) + g_0(t), \quad t \in l, \quad (2)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} = G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial \bar{t}} + g_1(t), \quad t \in l, \quad (3)$$

и

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{F(t)}{A_0(t)} \right\} = c_0(t), \quad t \in L, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{A_1(t)} \frac{\partial F(t)}{\partial \bar{t}} \right\} = c_1(t), \quad t \in L, \quad (5)$$

где $g_j(t)$, $G_j(t)$ ($G_j(t) \neq 0$) ($j = 0, 1$) – заданные на l комплекснозначные функции класса Гельдера, $A_j(t)$ ($A_j(t) \neq 0$) ($j = 0, 1$) – заданные на L комплекснозначные функции класса Гельдера, а $c_j(t)$ ($j = 0, 1$) – заданные на L вещественнозначные функции класса Гельдера.

Ради краткости сформулированную задачу назовем задачей **SH**, а соответствующую однородную задачу ($g_j(t) \equiv 0$, $c_j(t) \equiv 0$, $j = 0, 1$) – задачей **SH**⁰.

Отметим, что впервые смешанная краевая задача типа Гильберта в классах аналитических функций рассматривалась в работе И.С. Рогожиной [2], а в классах бианалитических функций - в работе Н.С. Гончарова [3] (см. также [4]).

В настоящем сообщении, пользуясь результатами, полученными в работе [2], строится конструктивный алгоритм решения сформулированной выше задачи **SH**.

2. О решении задачи SH. Воспользовавшись представлением (1), перепишем краевые условия (2)–(5) в виде:

$$\varphi_0^+(t) = G_0(t)\varphi_0^-(t) + \bar{t}(G_0(t)\varphi_1^-(t) - \varphi_1^+(t)) + g_0(t), \quad t \in l, \quad (6)$$

$$\varphi_1^+(t) = G_1(t)\varphi_1^-(t) + g_1(t), \quad t \in l, \quad (7)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi_0^-(t)}{A_0(t)} \right\} = c_0(t) - \operatorname{Re} \left\{ \bar{t} \frac{\varphi_1^-(t)}{A_0(t)} \right\}, \quad t \in L, \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi_1^-(t)}{A_1(t)} \right\} = c_1(t), \quad t \in L. \quad (9)$$

Пусть $\chi_0^H = \operatorname{Ind}[A_0]$, $\chi_1^H = \operatorname{Ind}[A_1]$, $t \in L$, а индексы вспомогательных задач Римана (7) и (9) обозначим соответственно $\chi_0^R = \operatorname{Ind}[G_0]$ и $\chi_1^R = \operatorname{Ind}[G_1]$ (см., например, [4, с. 101]). Без ограничения общности будем считать, что $z = 0 \in D^+$.

Равенства (7), (9) представляют собой краевые условия задачи Гильберта для кусочно аналитической функции $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$. Следуя [2], решение этой задачи, если $\chi_1^H + \chi_1^R \geq 0$, можно записать в виде:

$$\varphi_1^+(z) = z^{\chi_1^R + \chi_1^H} A_1(t) \operatorname{Reg}(A_1(t)) e^{\Gamma^+(z) + i[\varphi(z)]} \left(F^+(z) + \Phi(z) + Q_{\chi_1^R + \chi_1^H}(z) \right), \quad (10)$$

$$\varphi_1^-(z) = z^{\chi_1^H} A_1(t) \operatorname{Reg}(A_1(t)) e^{\Gamma^+(z) + i[\varphi(z)]} \left(F^-(z) + \Phi(z) + Q_{\chi_1^R + \chi_1^H}(z) \right), \quad (11)$$

где $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{g_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}$, а $X_1(z)$ – каноническая функция вспомогательной задачи Римана (7), удовлетворяющая дополнительному условию $\operatorname{Im}\{X_1(t)\} = 0$, $t \in L$;

$$\Phi(z) = S_L \left(\frac{c_1(t)}{\text{Reg}(A_1(t))X_1^0(t)} - \text{Re}\{F^-(t)\}, z \right) + ib_0,$$

где b_0 – произвольная действительная постоянная, $\text{Reg}(A_1(t))$ – регуляризирующий множитель функции $A_1(t)$;

$$Q_{\chi_1^R + \chi_1^H}(z) = \sum_{k=1}^{\chi_1^R + \chi_1^H} \{b_k [\omega(z)]^k - \bar{b}_k [\omega(z)]^{-k}\},$$

где b_k ($k = 1, 2, \dots, \chi_1^R + \chi_1^H$) – произвольные комплексные постоянные;

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\ln[\tau^{\chi_1^R} G_1(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad \varphi(z) = -S_L(\text{Im} \Gamma^-(t); z).$$

Если $\chi_1^H + \chi_1^R < 0$, то решение также задается формулами (10)–(11), если потребовать, чтобы $[F^+(z) + \Phi(z)]$ имела в точке 0 нуль порядка $-(\chi_1^H + \chi_1^R)$.

Далее подставим граничные значения $\varphi_1^+(t)$ кусочно аналитической функции $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$, найденных по формулам (10)–(11), в краевые условия (6), (8). Тогда равенства (6), (8) будут представлять собой краевые условия задачи Гильберта относительно кусочно аналитической функции $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$. Рассуждая аналогично, решение можно найти по формулам

$$\varphi_0^+(z) = z^{\chi_0^R + \chi_0^H} A_0(t) \text{Reg}(A_0(t)) e^{\Gamma^+(z) + i[\varphi(z)]} (F^+(z) + \Phi(z) + Q_{\chi_0^R + \chi_0^H}(z)), \quad (12)$$

$$\varphi_0^-(z) = z^{\chi_0^H} A_0(t) \text{Reg}(A_0(t)) e^{\Gamma^+(z) + i[\varphi(z)]} (F^-(z) + \Phi(z) + Q_{\chi_0^R + \chi_0^H}(z)), \quad (13)$$

где $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\bar{t}(G_0(\tau)\varphi_1^-(\tau) - \varphi_1^+(\tau)) + g_0(\tau)}{X_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}$, а $X_0(z)$ – каноническая функция вспомогательной задачи (6), удовлетворяющая дополнительному условию $\text{Im}\{X_0(t)\} = 0, t \in L$;

$$\Phi(z) = S_L \left(\frac{c_0(t) - \text{Re}\left\{ \bar{t} \frac{\varphi_1^-(t)}{A_0(t)} \right\}}{\text{Reg}(A_0(t))X_0^-(t)} - \text{Re}\{F^-(t)\}, z \right) + id_0,$$

где d_0 – произвольная действительная постоянная, $\text{Reg}(A_0(t))$ – регуляризирующий множитель функции $A_0(t)$;

$$Q_{\chi_0^R + \chi_0^H}(z) = \sum_{k=1}^{\chi_0^R + \chi_0^H} \{d_k [\omega(z)]^k - \bar{d}_k [\omega(z)]^{-k}\},$$

где d_k ($k = 1, 2, \dots, \chi_0^R + \chi_0^H$) – произвольные комплексные постоянные;

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\ln[\tau^{\chi_0^R} G_0(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad \varphi(z) = -S_L(\operatorname{Im} \Gamma^-(t); z).$$

Если $\chi_0^H + \chi_0^R < 0$, то решение также задается формулами (12)–(13), если потребовать, чтобы $[F^+(z) + \Phi(z)]$ имела в точке 0 нуль порядка $-(\chi_0^H + \chi_0^R)$.

Таким образом, решение задачи (2)–(5) в случае разрешимости задач (7), (9) и (6), (8) можно задавать в виде (1), где $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$ и $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$ находятся по формулам (10)–(13) и зависят от $2(\chi_0^H + \chi_0^R + \chi_1^H + \chi_1^R + 1)$, произвольных действительных постоянных, если $\chi_0^H + \chi_0^R \geq 0, \chi_1^H + \chi_1^R \geq 0$.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998.
2. Рогожина И.С. Задача Гильберта для кусочно-аналитической функции // Ученые записки Кабардино-Балкарского госуниверситета. – 1963. – № 19. – С. 259–263.
3. Гончаров Н.С. О краевой задаче типа задачи Гильберта для кусочно бианалитических функций // Изв. АН БССР. Серия физ.-матем. Наук. – 1973. – № 5. – С. 34–40.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.

О КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССАХ $N_\alpha, \alpha > -1$ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Ф.А. ШАМОЯН*, В.А. БЕДНАЖ, И.С. КИПЕНЬ*****

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
241036, Брянск, ул. Бежицкая, 14

e-mail: *shamoyanfa@yandex.ru, **verabednazh@rambler.ru, ***kipen69@mail.ru

Для изложения основного результата введём обозначения: $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ – множество всех голоморфных в D функций. Следуя М.М. Джрбашяну [2], обозначим через $N_\alpha, \alpha > -1$, следующий класс функций

$$f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 (t-r)^{\alpha-1} \ln |f(te^{i\varphi})| dt \right)^+ d\varphi < +\infty.$$

Кратная интерполяция в классах Харди была изложена в работе М.М. Джрбашяна [3]. В этой заметке исследуется решение такой же задачи в более общих классах аналитических в круге функций, т.е. в классе N_α , при $\alpha = -1$ N_α совпадает с классом Р. Неванлинны. В классах В.И. Смирнова классическая интерполяционная задача рассмотрена в работе [4]. Описание такого рода задач и библиография имеются в обзоре С.А. Виноградова и В.П. Хавина [1].

Напомним задачу кратной интерполяции. Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $|\alpha_k| < 1$, и $\{\gamma_k\}_1^\infty$ — произвольные последовательности комплексных чисел и $s_j \geq 1$, $j \geq 1$, — кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_1^j$. Требуется выявить критерии для $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$, обеспечивающие существование функции $f \in N_\alpha$, удовлетворяющие интерполяционным условиям

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, \quad k=1, 2, \dots,$$

и построить аппарат для эффективного представления решений такого рода.

Кроме введенного параметра $s_j \geq 1$, $j \geq 1$, обозначим через p_j кратность появления числа α_j во всей последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$. Очевидно, что $1 \leq s_j \leq p_j \leq +\infty$. Также, если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ подчинена условию Бляшке $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|) < +\infty$, то число p_j конечно при любом целом $j \geq 1$.

Последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условиям:

$$\prod_{k \neq j} \left| \frac{\alpha_k - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_k \alpha_j} \right| \geq \exp - \frac{\delta}{(1 - |\alpha_k|)^{\alpha+1}}, \quad \delta > 0,$$

$$\sup_{k \geq 1} \{p_k\} = p,$$

отнесем к классу $\tilde{\Delta}_p$.

Углом Штольца $\Gamma(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ назовём угол, раствора меньше π , биссектриса которого совпадает с отрезком $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$.

Основным результатом работы является следующее утверждение:

Теорема. Пусть последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \tilde{\Delta}_p$, точки α_k , $k = 1, 2, \dots$, находятся в конечном числе углов Штольца. Тогда для того, чтобы для последовательности комплексных чисел $\{\gamma_k\}_1^\infty$ нашлась функция f ($f \in N_\alpha$), такая что $f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k$, $k = 1, 2, \dots$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $c > 0$ такое, что

$$|\gamma_k| \leq \exp \left\{ \frac{c}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}} \right\}, k=1, 2, \dots .$$

Литература

1. Виноградов С.А., Хавин В.П. Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1974. – Т. 47. – С. 15–54.
2. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
3. Джрбашян М.М. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H^2 // Изв. АН Арм. ССР. Серия «Математика». – 1974. – Т. 9, № 5. – С. 339–373
4. Yanagihara N. Interpolation theorems for the class N^+ // Illinois J. Math. 18, 1974. – P. 427–435.

О ДУПЛЕТАХ ФРУАССАРА В МЕТОДЕ ПАДЕ-ЛАПЛАСА

А.Л. ШЕСТАКОВ, В.М. АДУКОВ, О.Л. ИБРЯЕВА, А.С. СЕМЕНОВ

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: oli80@mail.ru

Метод Паде-Лапласа предназначен для нахождения $2N$ комплексных параметров A_j, μ_j функции $f(t) = \sum_{j=1}^N A_j e^{\mu_j t}$ и основан на построении преобразования Лапласа для этой функции и его аналитического продолжения с помощью аппроксимаций Паде. Метод применяется в обработке сигналов, позволяя определить не только параметры сигнала A_j, μ_j , но и заранее неизвестное число экспонент N .

Ключевую роль при этом играет следующий факт. Преобразованием Лапласа для функции $f(t)$ является рациональная дробь $L[f](p) = \int_0^\infty e^{-pt} \sum_{j=1}^N A_j e^{\mu_j t} dt = \sum_{j=1}^N \frac{A_j}{p - \mu_j}$ со степенями числителя и

знаменателя, равными $N-1$ и N соответственно. Как известно, в этом случае в таблице Паде имеется так называемый сингулярный блок, т.е. все аппроксимации Паде $\pi_{n,m}$ типа (n,m) для $L[f](p)$ при $n \geq N-1$ и $m \geq N$ совпадают с $L[f](p)$. Поэтому, если число экспонент N неизвестно, следует рассмотреть последовательность аппроксимаций $\pi_{n-1,n}$, где $n = 2, 3, \dots$. Множество полюсов таких аппроксимаций для $n > N$ будет состоять из точек μ_j , $j = 1, \dots, N$, и «лишних» точек ν_j , $j = N+1, \dots, n$. Точки ν_j являются общими корнями числителя и знаменателя аппроксимации $\pi_{n-1,n}$, и по этой причине аппроксимация $\pi_{n-1,n}$ (после сокращения в числителе и знаменателе общих множителей) оказывается равной $\pi_{N-1,N}$. Однако на практике «лишнему» корню ν_j знаменателя будет соответствовать лишь примерно равный ему корень числителя $\nu_j + \varepsilon$. Такая пара корней носит название дуплетов Фруассара (Froissart doublets). Они характеризуются малой амплитудой $A_j = \text{res} \pi_{n-1,n} |_{p=\nu_j}$, а также крайней неустойчивостью при переходе от $\pi_{n-1,n}$ к $\pi_{n,n+1}$ в отличие от устойчивых полюсов μ_j . На этих фактах основан наиболее распространенный на практике способ выявления дуплетов Фруассара.

Причинами возникновения дуплетов Фруассара считаются ошибки вычислений и наличие шума в экспериментальных данных. Именно по этим причинам коэффициенты c_k ряда Тейлора функции $L[f](p) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (p - p_0)^k$, по которым далее в методе Паде-Лапласа строится аппроксимация Паде, оказываются известными лишь приближенно $\tilde{c}_k = c_k + n_k$. Наличие шума в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} n_k (p - p_0)^k$ приводит к появлению дуплетов Фруассара. Интерес представляет также случай, когда шум имеет вид многочлена (restricted Froissart problem) [1]. Между тем при полиномиальном шуме $n(p) = \sum_{k=0}^P n_k (p - p_0)^k$ можно избежать появления этих дуплетов благодаря наличию сингулярного блока в таблице Паде для рациональной дроби $L[f](p) + n(p)$.

Напомним, что знаменатель аппроксимации Паде находится, вообще говоря, не единственным образом, хотя сама аппроксимация и единственна. При отсутствии шума общие делители знаменателей и числителей аппроксимаций Паде в сингулярном блоке сокращаются и все аппроксимации оказываются равными функции $L[f](p)$. При наличии шума эти общие делители будут лишь примерно равными, что приведет к появлению дуплетов Фруассара. Например, если рассмотреть возмущение функции $f(p) = \frac{(p+1)^2(p-3)}{(p^2+1)(p^2+4)}$ многочленом $n(p) = \sum_{k=0}^4 n_k p^k$, где n_k – значения равномерно распределенной на $[-0.01, 0.01]$ случайной

величины, то ясно, что все $\pi_{n,m}$ для $f(p)+n(p)$ при $n \geq 8$, $m \geq 4$ должны быть равны этой функции. Однако при нахождении $\pi_{10,6}$ с помощью команды `pade` из системы Maple мы наблюдаем появление дуплетов.

Дело в том, что команда `pade` не учитывает многомерности (в общем случае) ядра матрицы, из которого находятся коэффициенты знаменателя аппроксимации Паде. Найденный с ее помощью знаменатель может содержать лишние множители, которые не сократятся с соответствующими множителями числителя. Чтобы этого не происходило, необходимо выбирать знаменатель аппроксимации Паде с минимальной степенью. Алгоритм его вычисления был описан и реализован в системе компьютерной математики Maple [2]. Аппроксимация Паде $\pi_{10,6}$, найденная с помощью этого алгоритма для рассматриваемого примера, уже не содержит дуплетов Фруассара.

Работа выполнена в рамках государственного контракта № П465 на поисковую научно-исследовательскую работу «Разработка и исследование методов оценки состояния преобразователя давления в ходе технологического процесса».

Литература

1. Gilewicz J., Kryakin Y. Froissart doublets in Pade approximation in the case of polynomial noise // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2003. – V. 153. – P. 235–242.
2. Адуков В.М., Ибряева О.Л. О вычислении аппроксимаций Паде и Паде-Чебышева в системе Maple / Системы компьютерной математики и их приложения: тезисы докладов международной конференции. – Смоленск, 19–21 мая 2008. – Смоленск, 2008. – С. 17–19.

ON APPROXIMATION OF THE NETWORK PROCESSES

R. BANYS

Vilnius Gediminas Technical University
Sauletekio al. 11, LT-10223 Vilnius – 40, Lithuania
E-mail: rimasbanys@takas.lt

Consider a single network element (server) of a data network fed by a large number of independent identical *ON/OFF* sources. An *ON/OFF* source can be represented by alternating activity periods X and silence periods Y . When active, the source emits data at a constant rate. The alternating activity and silence periods generate the renewal sequence. Renewals happen at the beginnings of the activity periods.

Now consider a superposition of a large number of *ON/OFF* sources. The superposition of these renewal processes represents the stochastic process

of connections. This process under some natural assumptions is a Poisson process. The superposition $N(t)$ of the ON/OFF processes represents the number of active sources at time t . $N(t)$ can be approximated by a compound Poisson process. The cumulative input of work $A(t)$ to the server by time t is obtained by integrating $N(s)$ over the interval $[0, t]$. The cumulative input process $A(t)$ on large time scales looks like a stable Levy motion or like a fractional Brownian motion subject to the connection rate.

References

1. Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion T. Mikosch [et al.] / Ann. Appl. Probab. – 2002. – №12. – P. 23–68.
2. Banys R. Central limit theorem for alternating renewal processes // Liet. Matem. Rink. – № 47, spec. nr., 2007. – P. 45–48.

A HYBRID APPROACH IN GENETIC ALGORITHM: COEVOLUTION OF THREE VECTOR SOLUTION ENCODING. A CASE-STUDY

D. BORODIN, V. GORELIK, Wim DE BRUYN and Bert VAN VRECKEM

University College Ghent, Ghent, Belgium

Dorodnicyn Computing Center of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

e-mail: dmitriy.borodin@hogent.be; vgor16@mail.ru; wim.debruyne@hogent.be

bert.vanvreckem@hogent.be

Introduction

Genetic algorithms, among other heuristic and meta-heuristic optimization techniques, were successfully used for solving scheduling problems, and chemical batch production problems in particular [2], [7], [9]. The contribution of this research is in applying the genetic algorithm to the batch scheduling problem involving three independent vectors and one fitness function in the solution encoding. Moreover, these vectors have different structure: one vector encodes a permutation, two other vectors encode assignments. The results of the proposed algorithm are compared with the exact solutions of the same problem instances as well as with a Kernighan-Lin (KL) heuristic. The GA outperforms the KL algorithm and the solution quality is acceptable – the deviation from the exact solutions is 3-10% while for some instances GA demonstrated the ability to find the exact solution.

Problem background and statement

We describe the problem background and statement shortly as the technical details are important for the GA efficiency. For the detailed description and mathematical formulation the reader may see [5] (the work was presented at the 24th European conference on Operations Research in

Lisbon in 2010) and the yet unpublished paper [6]. Reference [6] also contains the optimal solutions for the problem instances (calculated using the commercial solver cplex) as well as the Kernighan-Lin heuristic results.

The problem is in finding the optimal schedule of an enzyme production according to the total-weighted tardiness optimality criteria. A mixed-integer programming model was created to solve the problem but the model turned out to be difficult to solve [5, 6]. The idea of fixing integer variables of the model lead to splitting up the problem into two parts in order to get a good solution within a reasonable speed. Indeed, if all integer variables are fixed, then only a contentious linear program (LP) is left to solve. The LP was named evaluation function (*EF*) and provided the schedule and the objective function value (the fitness value) by the given values of integer variables.

Following this idea, the problem can be reduced to the problem involving three vectors of integer variables which represented different stages of the production process. Once there is a need to calculate the fitness function (*FF*) value, the *EF* takes these three vectors as input, solves the LP and provides the *FF* value. From the technical point of view, the *EF* could be interpreted as an objective function in the common sense, and then the problem is in unconditional optimization.

The problem statement:

Find the values of the vectors

R_sequence: (1,2,3,..., *n*)

MF_assignment: (1,5,5,2,...,1)

BT_assignment: (2,5,5,2,...,1)

bringing the minimum to the *EF*.

R_sequence is a sequence of unique integer numbers from 1 to *n* (*n* is the number of batches to be scheduled), which represents the order of how the batches are processed on a stage of production; each component of *MF_assignment* and *BT_assignment* represents the number of the resource the respective batch is assigned to, the values of the components are limited by the number of the resources (machines) and are from 1 to 5 for *MF_assignment* and from 1 to 4 for *BT_assignment*. The dimension of all three vectors is *n*.

Genetic algorithm steps, operators and implementation

The general steps of the GA for the problem under study:

1) Generate an initial set of solutions (a population) randomly, i.e. generate the acceptable values of the three vectors and calculate the *EF* for each one. Normally, the amount of the population varies from 30 to 1000 solutions.

2) Perform the selection of pairs of the solutions from the population in order to crossover them (exchange the minor data of two solutions thus that

the offspring inherit the best characteristics) and add their offspring into the new population (next generation).

3) Mutate (minor random change of a solution) some solutions of the population selected randomly. The mutation probability may vary from 0 to 50%, but the standard “patient” value is 10%.

Mutation is necessary to escape from the local optima by trying different points of the search space.

4) If the stopping criteria is satisfied (the number of iterations is reached, the solution is not improving for a certain number of iterations, time limit is reached), then return the best found solution. Otherwise, continue to step 2.

As vector $R_sequence$ is a permutation, the crossover and mutation operators are similar to the sequencing problems as well as for the travelling salesman problem. We implemented partially-matched (PMX), cyclic (CX) and order (OX) crossovers for this vector. We refer to [1,3,4,8] for the details about these crossovers. For two other vectors (as they can contain duplicates and missing values) the one- and two-point and uniform crossovers were employed. Reference [8] describes these operators and analyzes theoretical difference between them.

Mutation was performed by the insert, swap or reverse operators.

For the selection strategy we tried tournament, roulette-wheel, Genitor-Whitley, two-random, all with best and cascade.

As the value of the EF is computed only by the values of all three vectors the challenging point is to determine the best possible order of applying genetic operators to them. We considered the following choices: 1) evolve all three vectors simultaneously; 2) evolve them consequently (one by one) by fixing the values of two others; 3) evolve two vectors and fix another one.

Table 1

GA results comparison

Instance	CPLEX best	KL best	KL time	GA best	GA time	SA	SR
N10_1	90	91	7	93	5	S,C	1,2
N10_2	30	35	16	30	17	S,C	1,2
N10_3	42	56	10	44	6	C	2
N10_4	49	52	14	50	5	C	2
N10_5	43	48	6	45	12	C	2
N15_1	73	77	80	76	25	C	2
N15_2	43	45	112	45	34	C	2
N15_3	57	70	39	66	75	C	2
N20_1	52	54	490	54	180	C	2
N20_2	58	66	260	64	194	C	2
N30_1		180	1304	186	1560	C	2

Numerical results analysis

The algorithm was programmed in the C# language using the Microsoft Visual Studio .NET environment. Such choice enabled to use the full

performance of the computer processor as well as to test the multicore processor features.

Besides the coevolution strategy, the choice of genetic operators – crossover, mutation and selection – is important as it influences the solution quality, convergence speed and the algorithm robustness.

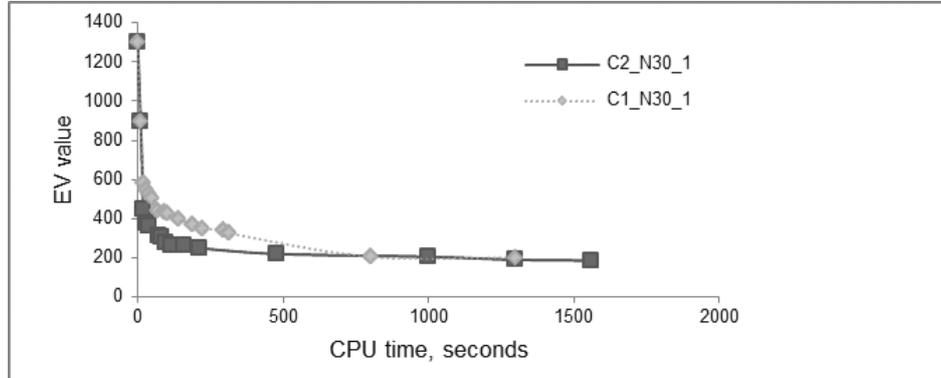


Fig. 1. Convergence speed graph, consequent (C1) and hybrid (C2) coevolution approaches, instance N30_1

Our numerical results showed that different operators and coevolution strategies provided different results for different data instances. But in each case either the robustness was not good (the algorithm could find the best possible solution only in 50-60% of executions) or the algorithm didn't converge to the best possible solution, or the convergence speed was not balanced (too fast or too slow). The question was: how to find the best combination of the operators?

One of the answers is in applying the hybrid approach. In this case, on each iteration different operators are applied, the random choice provided good results for the described problem.

Table 1 shows the time and solution quality comparison of the GA with the exact solutions and the Kernighan-Lin heuristics.

Conclusions

The stochastic character of GAs is important not only for the solution encoding and genetic operators, but also for the choice of these operators and, in the case of the described problem, the coevolution strategy. Deterministic approach (genetic operators are fixed for all iterations) provides good results as well but is less stable and can't guarantee the solution quality for each instance or iteration.

The hybrid approach enhances the exploration and exploitation abilities of a GA thus providing an efficient pseudo optimal solution search method on a large solution space.

References

1. Borodin D., Caluwaerts P., Gorelik V. & Rodyukov A. Optimal Resequencing using Genetic Algorithm. The 6th Moscow International

Conference on Operations Research (ORM2010): Proceedings. MAKS-press? 2010. – P. 271–273.

2. Engell S., Märkert A., Sand G. and Schultz R., Aggregated Scheduling of a Multiproduct Batch Plant by Two-Stage Stochastic Integer Programming, Optimization and Engineering, 2004. – Vol. 5(3). – P. 335–359.

3. Goldberg D. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

4. Goldberg D.E. and Deb K.A Comparative Analysis of Selection Schemes Used in Genetic Algorithms, Foundations of Genetic Algorithms. San Mateo, California, USA: Morgan Kaufmann Publishers. –1991. – P. 69–93.

5. Hege, L., Gicquel, C., and Minoux, M., MILP models and solution approaches for scheduling a chemical batch process, Proceedings of 24th European Conference on Operational Research, 2010. – P. 297.

6. Hege L., Gicquel C. and Minoux M. Mathematical models and solution approaches for a chemical batch scheduling problem, unpublished, 2010. – 27 pages.

7. Kimms A. A genetic algorithm for multi-level, multi-machine lot sizing and scheduling, Computers & Operations Research. – 1999. – Vol. 26(8). – P. 829–848.

8. Moraglio A., Towards a Geometric Unification of Evolutionary Algorithms, PhD Thesis, Department of Computer Science, University of Essex, 2007. – 392 p.

9. Wang L., Zhang L. and Zheng D. An effective hybrid genetic algorithm for flow shop scheduling with limited buffers // Computers & Operations Research. – 2006. – Vol. 33(10). – P. 2960–2971.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Р.М. ГИНЯВИЧЮС*, В.С. ПОДВЕЗЬКО**

Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса

Saulėtekio al. 11, LT – 10223 Vilnius – 40, Lithuania (Литва)

e-mail: *romualdas.ginevicius@vgtu.lt, **valentines.podvezko@vgtu.lt

В задачах принятия решений решается проблема выбора наилучшей альтернативы (варианта) из нескольких предложенных либо ранжирование альтернатив в соответствии с их значимостью относительно цели исследования. Это может быть задача выбора наилучшего инвестиционного или технологического проекта, ранжирование регионов страны или отдельных стран по уровню их социально-экономического развития, сравнение результатов финансово-

экономической деятельности предприятий либо сравнительные оценки их стратегического потенциала, сравнительная оценка деятельности отдельных работников или подразделений учреждений и много других похожих задач. Решая такого типа задачи оптимизации, не всегда удается для их описания и решения применить известные классические методы оптимизации.

Для решения таких задач в последние десятилетия в мире широко применяются так называемые многокритериальные методы (MCDA – Multiple Criteria Decision Analysis) [1].

Основой многокритериальных оценок является матрица $\mathbf{R} = \|r_{ij}\|$ значений показателей (критериев) R_i ($i=1, 2, \dots, m$), характеризующих сравниваемые объекты (альтернативы) A_j ($j=1, 2, \dots, n$), где m – количество показателей, n – количество альтернатив. Цель оценок – используя количественные многокритериальные методы ранжировать сравниваемые объекты A_j в соответствии с целью исследования. При использовании многокритериальных методов необходимо установить, какого типа – максимизируемого или минимизируемого – является каждый показатель. Для максимизируемых показателей наилучшее его значение – наибольшее (напр., доход), для минимизируемых показателей наилучшее его значение – наименьшее (напр., убытки). Критерии количественных многокритериальных методов (аналог целевой функции) обычно объединяют в одну величину нормализованные (безразмерные) значения \tilde{r}_{ij} всех используемых показателей и их веса (значимости) ω_i ($\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$) [2].

Идею объединения нормализованных значения \tilde{r}_{ij} показателей и их весов ω_i в критерий оценки альтернатив наиболее ясно отражает один из простейших и часто используемый на практике метод простого аддитивного взвешивания *SAW* (Simple Additive Weighting) метод. Критерий метода рассчитывается по формуле [2]:

$$S_j = \sum_{i=1}^m \omega_i \tilde{r}_{ij}, \quad (1)$$

где нормализованные значения показателей \tilde{r}_{ij} рассчитываются по формуле:

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sum_{j=1}^n r_{ij}} \quad (2)$$

SAW метод объединяет только значения максимизируемых показателей, поэтому минимизируемые показатели должны быть преобразованы в максимизируемые по соответствующим формулам [3].

Среди других наиболее часто используемых авторами многокритериальных методов можно упомянуть *TOPSIS*, *VIKOR*, *PROMETHEE*, *AHP*, *COPRAS*, метод геометрического среднего [2–5].

Перечисленные и другие многокритериальные методы были многократно применены авторами при оценке социально-экономического развития регионов Литвы, стран Прибалтийского региона и новых стран Европейского Сообщества, сравнительной оценке результатов финансово-экономической деятельности строительных предприятий, оценке качества обслуживания клиентов в банках Литвы, оценке стратегического потенциала предприятий, сравнительной оценке технологий строительства и в других задачах [2–5].

Литература

1. Figueira J., Greco S., Ehrgott M. Eds. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Survey*. Springer. 2005.
2. Ginevičius R., Podvezko V. Some problems of evaluating multicriteria decision methods. *International Journal of Management and Decision Making*. 2007. Vol. 8, No 5/6. P. 527–539.
3. Ginevičius R., Podvezko V. Evaluating the changes in economic and social development of Lithuanian counties by multiple criteria methods. *Technological and Economic Development of Economy*. 2009. Vol. 15, No 3. P. 418–436.
4. Ginevičius R., Podvezko V. Multicriteria evaluation of Lithuanian banks from the perspective of their reliability for clients. *Journal of Business Economics and Management*. 2008. Vol 9, No 4. P. 257–267.
5. Ginevičius R., Podvezko V. Housing in the context of economic and social development of Lithuanian regions. *Int. J. Environment and Pollution*. 2008. Vol. 35, No 2/3/4. P. 309–330.

СЕКЦИЯ 4

Новые информационные и педагогические технологии в образовании и прикладная лингвистика

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ ЗНАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Г.Р. АДИАТУЛЛИНА

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань

e-mail: gulshaton@mail.ru

В работе [1] была предложена аналитическая система тестирования, основанная на возможности СКМ сравнивать математические выражения и выяснять их эквивалентность путем вычисления их разности. Ранее в работе [2] была описана система аналитического тестирования, включающая несколько специализированных библиотек. Позднее в работе [3] идея аналитического тестирования была реализована с учетом возможностей пакета Maplets СКМ Maple. В данной работе представлена система аналитического тестирования, в которой расширено количество тем для изучения. В основе выбора представленных тем лежит курс «Математика» для нематематических факультетов. Данный курс читается в течение двух семестров и разбит на четыре модуля. За основу реализации нашей системы аналитического тестирования мы взяли модуль №2, в который входит изучение нескольких разделов математического анализа. Оценивание знаний студентов по данному курсу происходит по балльно-рейтинговой системе. Поэтому каждый модуль данного курса имеет определенный вес, т.е. максимальный балл, который можно за него получить. Аналогично и каждое задание в тесте по модулю также имеет свой вес. Таким образом, весь практический курс по данному предмету структурирован на части, усвоение которых можно оценить отдельно.

Как было сказано выше, рассматриваемая система аналитического тестирования реализована с помощью маплетов. Главное окно системы содержит название курса и пронумерованные модули, на которые он разделен. Дальнейшее движение в системе подразумевает вход в один из модулей. Окно каждого модуля содержит перечень тем, изучаемых в рамках данного модуля, а также переход к прохождению тестирования по данному модулю. Кроме этого, имеется возможность продолжить движение внутри определенной темы, где студент может получить индивидуальное задание по данной теме, а также проверить результаты его решения.

Реализация данной системы аналитического тестирования позволяет автоматизировать процесс оценивания знаний по

математическим дисциплинам и сделать его более оперативным и объективным.

Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Использование аналитических возможностей пакета Maple для создания программ аналитического тестирования, самотестирования и генерации индивидуальных заданий в курсах высшей математики // Проблемы информационных технологий в математическом образовании: Учебное пособие / под ред. Ю.Г.Игнатъева. – Казань: ТГГПУ. – 2005, С. 9–24.

2. Адиятуллина Г.Р. Библиотеки пользовательских процедур в СКМ по курсу математического анализа: «Функции» // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2009. С. 11–12.

3. Адиятуллина Г.Р. Система аналитического тестирования в форме маплетов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. – С. 5–8.

4. Адиятуллина Г.Р., Игнатъев Ю.Г. Принципы моделирования системы аналитического тестирования знаний на основе системы компьютерной математики Maple // Вестник ТГГПУ. – 2010. – № 2(20). С. 6–12.

5. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006.

6. Кирсанов М.Н. Maple 13 и Maplet. Решение задач механики. – М.: Физматлит, 2010.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ НА ФАКУЛЬТЕТЕ НАЧАЛЬНОГО И СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В.А. АССОНОВА, Н.В. АССОНОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: assonova@mail.ru

В настоящее время практически во всех странах компьютер используется не только как предмет изучения, но и как средство обучения. Новые информационные технологии позволяют сочетать интеллектуализацию деятельности обучаемого с преимуществами индивидуализации и дифференциации обучения. Возможности компьютеров, которые не могут быть заменены каким-либо иным средством, должны быть приоритетными при разработке методик использования ЭВМ в учебном процессе. К ним относятся компьютерные

методики контроля и оценки уровня знаний обучаемых; методические системы обучения, ориентированные на развитие интеллектуального потенциала обучаемых, на формирование умений самостоятельно приобретать знания, осуществлять информационно-учебную, экспериментально-исследовательскую деятельность; различные виды деятельности по самостоятельной обработке информации.

Подобные методики, опирающиеся на информационные технологии, разрабатываются и используются при изучении математики на факультете начального и специального образования Смоленского государственного университета.

Лекции по темам «Элементы теории множеств», «Элементы комбинаторики», «Аксиоматическое построение системы натуральных чисел», «Многогранники», «Площадь» сопровождаются компьютерными презентациями, созданными в редакторе презентационной графики MS PowerPoint. При помощи презентационной программы InterWrite Software, прилегающей к соответствующим интерактивным доскам, создана презентация по теме «Величины». Компьютерные презентации являются мощным инструментом визуального представления данных. При разработке презентаций учитываются общепедагогические требования, предъявляемые к наглядным пособиям. Использование компьютерной техники позволяет значительно уменьшить фактические объемы, отводимые на хранение и размещение наглядного материала. Интерактивная доска используется (при имеющейся возможности) как на лекционных, так и на практических занятиях, избавляет от утомительной меловой работы, позволяет работать эстетично и интересно. Её применение на занятиях даёт студентам навыки, необходимые в будущей профессиональной деятельности (писать виртуальными чернилами, печатать тексты, строить фигуры, группировать и разгруппировывать объекты, увеличивать или уменьшать размеры, распределять информацию на слайдах, переходить на следующие слайды, использовать задвижку для скрытия информации, применять коллекционные материалы, прикреплять для гиперссылок нужные файлы, сохранять набранный материал и открывать его по необходимости).

Сообщения-эссе исторического характера для выступления на лекции готовятся студентами с использованием презентаций. Ответ на теоретический вопрос при подготовке к практическому занятию также может быть представлен студентом в форме презентации.

Компьютерная презентация позволяет эффективно организовать как работу группы студентов, так и самостоятельную работу каждого студента в отдельности. Некоторые практические занятия по математике также проводятся с использованием презентаций (например, занятие на тему «Площадь»). На слайде удобно представлять условия задач,

вопросы. Последовательное выведение информации на слайд даёт возможность быстрой проверки выполненных заданий.

На практических занятиях при изучении вопроса о равносторонности и равновеликости используются компьютерные игры «Танграм», «Пентамино».

Использование компьютерных технологий для автоматического контроля знаний облегчает проверку работ и централизованное хранение результатов, а также получение различных статистических данных.

Авторами составлены тесты по темам «Элементы теории множеств», «Элементы комбинаторики», «Элементы алгебры логики», «Проценты», «Умножение и отношение порядка на множестве N в аксиоматической теории», «Вычитание и деление на множестве N в аксиоматической теории», «Десятичные дроби». Программным обеспечением послужила тестовая оболочка «TeachMaster». Каждый тест состоит из 10 вопросов и рассчитан на 10 минут. Тесты апробированы на факультете начального и специального образования.

На заключительном практическом занятии по теме «Уравнения и неравенства» используется система компьютерной математики «Mathematica-6», позволяющая рассмотреть решение более сложных уравнений и неравенств, а также их систем и совокупностей, в том числе и с параметрами. Некоторые решения представляются графически, и даже в движении (при изменении параметра). СКМ «Mathematica-6» используется на практическом занятии по теме «Многогранники», что позволяет студентам разносторонне рассмотреть многогранники разных типов, «повертеть» их мышью, изучить развёртки и другие характеристики многогранников.

Применение СКМ «Mathematica-6» планируется на заключительном занятии по теме «Комбинаторика» и на занятии, где будут рассматриваться вопросы о графах соответствий и отношений.

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА

Е.И. БЛИНОВА, Л.Ф. ЗВЕРОВИЧ, Н.А. РЫСЮК

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск
e-mail: e_blinova@mail.ru

Стремительное развитие и внедрение новых технологий, их конкуренция на мировом рынке, научно-технический прогресс в целом предъявляют повышенные требования к качеству подготовки специалиста и, в частности, к его математическому образованию.

Важную роль в подготовке высокопрофессионального современного специалиста играет самостоятельная работа, которая учит студента учиться, вырабатывает навыки добычи знаний. В связи с

реформированием высшей школы, введением образовательных стандартов, приближенных к общеевропейским, становятся все более заметными дальнейшие изменения учебных планов в сторону увеличения доли контролируемой самостоятельной работы студентов. Современные учебные программы отводят на самостоятельную работу студентов примерно столько же часов, сколько и на работу в аудитории с преподавателем.

Одной из серьезных проблем, с которыми сталкивается преподаватель при работе со студентами младших курсов, является проблема адаптации первокурсников к вузовским формам и методам обучения. Система высшего образования предполагает, что человек вполне определился со своим выбором, нацелен на овладение специальностью и готов прилагать определенные усилия для получения нужного результата. К сожалению, многие нынешние первокурсники не готовы к этому.

Организация самостоятельной работы студентов первого курса при изучении высшей математики является трудной задачей в силу ряда причин. Это и сложность материала, и интенсивность его изучения (для многих специальностей 8–9 часов в неделю только аудиторных занятий). Но главной причиной является отсутствие навыков самостоятельной работы и большие пробелы в математическом образовании школьников, поступивших учиться в технический вуз. Многие из них не умеют преобразовывать выражения, решать уравнения, плохо знают тригонометрию и логарифмы. Результаты тестовой контрольной работы по школьному курсу математики, которая проводится в нашем вузе в течение многих лет на первом занятии с первокурсниками, ухудшаются с каждым годом.

Недостаточное количество учебных часов, выделяемое на изучение математики в школе (4 часа в неделю в 10 и 11 классах), не позволяет изучить ее качественно, многие формулы не выводятся, теоремы не доказываются. В силу этого у учащихся не развито логическое мышление, отсутствует мотивация активной познавательной деятельности при изучении математики. Преподавателям приходится прилагать большие усилия для преодоления ориентации студентов только на результат мыслительной деятельности и отсутствие интереса к самому движению мысли.

Кафедрой высшей математики Белорусского государственного технологического университета разработан комплекс мероприятий, позволяющих сделать самостоятельную работу студентов первого курса достаточно эффективной.

1. Сотрудниками кафедры проводится большая работа по ликвидации пробелов в довузовском математическом образовании: дополнительные занятия для первокурсников по ключевым темам школьного курса, регулярные консультации, индивидуальная работа с

неуспевающими студентами, а также занятия со школьниками по подготовке к поступлению в вуз.

2. Одним из удачных вариантов организации самостоятельной работы студентов является комплекс индивидуальных заданий, который включает в себя задачи и упражнения разного уровня сложности. Кафедрой разработаны такие задания и методические пособия по основным темам курса с задачами трех уровней сложности и вопросами для самоконтроля.

3. Практикуется подготовка небольших реферативных докладов, с которыми студенты выступают во время аудиторных занятий.

4. Осуществляется руководство учебно-исследовательской работой студентов, результаты которой докладываются на ежегодной университетской студенческой научно-технической конференции.

5. Проводятся вузовские студенческие математические олимпиады.

6. В процессе преподавания используется проблемный подход, рассматриваются задачи, способствующие развитию интеллектуального уровня студентов, формированию творческой личности.

В настоящее время персональные компьютеры и пакеты прикладных программ дают новые возможности использования математики. Современная компьютеризация вносит свои коррективы и в образовательную сферу. Однако владение методами классической математики, умение проводить качественные математические исследования и с их помощью получать правильные постановки и математические модели инженерных задач должны быть неотъемлемой частью математического образования современного инженера.

ИНФОРМАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ КАК СОСТАВНАЯ ЧАСТЬ ЕДИНОГО ИНФОРМАЦИОННО- ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

А.П. БОРИСОВ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Информационное пространство средней школы выступает как *область непосредственного взаимодействия учителя средней школы с информационным образовательным пространством «средняя школа – вуз».*

Отечественные специалисты в области информатизации образования и педагоги-практики выделяют следующие основные функции единого информационного пространства школы: воспитательную, информационную, методическую, коммуникационную, техническую, образовательную, управленческую.

Рассмотрим каждую из этих функций более подробно.

Управленческая функция

Использование технических средств и компьютеров существенно сокращает сроки сбора и обработки информации, повышает оперативность и качество принимаемых управленческих решений.

В образовательном учреждении объектами управления являются:

- учебно-воспитательный процесс;
- кадры;
- материально-техническое обеспечение.

При этом производится диагностика (мониторинг):

- качества обучения;
- эффективности воспитательной работы;
- здоровья и психологического состояния учащихся.

Образовательная функция

Задачи, решаемые в рамках образовательной функции:

- внедрение в учебный процесс ИКТ;
- поддержка профориентации и предпрофильной подготовки учащихся;
- обеспечение проектной и исследовательской деятельности;
- обучение и повышение квалификации преподавателей и администрации;
- поддержка дополнительного образования.

Для поддержки образовательной функции школа должна быть обеспечена образовательными информационными ресурсами (на различных носителях) по разным предметам, в том числе материалами для непрерывного образования по информатике. Кроме того, должны быть созданы условия для их активного использования в учебной деятельности.

Воспитательная функция

Информационное пространство средней школы обеспечит:

- создание дополнительных условий для социализации учащихся;
- формирование критического мышления в условиях работы с большими объемами информации, способностей осуществлять выбор и нести за него ответственность;
- формирование творческих навыков;
- формирование навыков коллективной работы и совместного мышления, умения сотрудничать со сверстниками и взрослыми;
- развитие инициативы у учащихся;
- развитие коммуникативных способностей и навыков публичных выступлений;
- проведение культурно-просветительской работы (правовое, экономическое, эстетическое и др. воспитание).

Для поддержки воспитательной функции школа должна быть обеспечена разнообразными возможностями общения, в том числе внутришкольной локальной сетью и выходом в Интернет.

Информационная функция

Информационная функция информационного пространства средней школы предполагает:

- создание банка педагогической информации;
- формирование программно-методического фонда;
- формирование фонда компьютерных программ;
- формирование фонда библиотеки и медиатеки;
- создание банка информации о здоровье учащихся.

В банке данных педагогической информации могут быть помещены описания:

- образовательных технологий;
- педагогических исследований;
- инновационных образовательных проектов;
- высших и средних учебных заведений.

Программно-методический фонд может содержать:

- учебные планы и программы;
- информационные источники, объединенные в предметные и тематические коллекции.

Методическая функция

Методическая функция предполагает:

- разработку методических материалов для поддержки учебно-воспитательного процесса;
- создание информационно-педагогических модулей на различных носителях;
- разработку педагогических проектов с использованием ИКТ.

Цифровые учебно-методические материалы могут быть использованы учителем и учащимися на уроке, учеником для самостоятельной работы вне урока, а также учителем для подготовки к уроку.

Коммуникационная функция

Большое значение в настоящее время имеет формирование у школьников коммуникативной культуры, которая поможет им общаться и выполнять совместную работу, устанавливать психологический контакт с другими людьми.

В основе коммуникации лежат общепринятые нравственные требования к общению: вежливость, корректность, тактичность, скромность, точность, предупредительность, которые особенно важны для успеха совместной работы.

Работая вместе, формулируя новые гипотезы и теории, участвуя в критическом обсуждении идей других людей, учащиеся переходят на

более глубокие уровни понимания проблемы, осваивают приемы рефлексии.

Техническая функция

Для создания информационного пространства средней школы, как части информационного образовательного пространства «средняя школа – вуз», необходимо выполнение следующих технических требований к материальному оснащению школы:

- создание рабочих мест, оснащенных современным мультимедийным оборудованием, как для учащихся, так и для сотрудников школы;
- организация локальной сети;
- обеспечение доступа к Интернету для учителя и учеников с любого компьютера;
- создание системы технического обслуживания, ремонта и модернизации средств вычислительной и мультимедийной техники.

Компьютерные классы, являющиеся наряду с локальными и глобальными сетями ключевым техническим элементом информационного пространства, предназначены для проведения занятий по информатике и ИКТ, а также по другим предметам с использованием информационных технологий.

Компьютеризированные рабочие места – это рабочие места с установленными компьютерами (с подключенной периферией, с установленным программным обеспечением, с выходом во внутришкольную сеть и Интернет).

Локальная вычислительная сеть образовательного учреждения объединяет компьютеры, установленные в одном помещении (например, в компьютерном классе) или в разных кабинетах одного школы.

ОБУЧЕНИЕ СТУДЕНТОВ-СОЦИОЛОГОВ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ КАК ФАКТОР ПОВЫШЕНИЯ ИХ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ

О.А. ВЕЛЬКО

Белорусский государственный университет, г. Минск
e-mail: O.Velko@tut.by

Математическое образование социологов должно помогать налаживанию отвечающего современным требованиям профессионального образования. В этой связи при подборе учебного материала для занятий целесообразно использовать задачи, составленные на основе реальных статистических данных, которые отражают те или иные социально-экономические и психологические закономерности или явления.

В основе решения многих прикладных социологических задач лежат методы математического моделирования. Умения корректно сформулировать вопрос на языке узких специалистов, адекватно интерпретировать полученные результаты с точки зрения социальных наук, уточнить и скорректировать выстроенную математическую модель являются важнейшими в методологическом арсенале будущего социолога. В связи с этим одним из аспектов профессиональной подготовки студентов-социологов является формирование знаний и умений по использованию метода математического моделирования. Поэтому в курс «Основы высшей математики» для социологов включена тема: «Основы математического моделирования в социологии», которая включает в себя разделы: «Основы теории графов в социальных исследованиях», «Элементы теории игр в социологии», «Математические модели социальных процессов».

Практическими задачами математического моделирования для студентов-социологов являются: анализ социальных объектов и процессов, социологическое прогнозирование, социальное управление.

Рассматривается задача моделирования человеческого поведения, которая (в ее сегодняшнем представлении) отражает в себе основные проблемные моменты, сложившиеся в философии, психологии, социологии, кибернетике и в прочих науках. Очевидно, что вопросы, поднятые в ней, имеют фундаментальное значение как для познания человеком окружающего мира, так и самого себя. Также не вызывает сомнения, что ответы на эти вопросы могут быть найдены на пересечении разных научных дисциплин – путем объединения методов и принципов, изначально относящихся к разным областям знания. Изучаются модели динамики групповых структур человеческих сообществ. Изучается математическая модель конфликтной ситуации.

Построение модели характеризуется формализацией описания задачи с использованием математических методов. Рассмотрим некоторые простые модели.

Пример. (Модели включенности в малую дискуссионную группу). В моделях включенности в малую дискуссионную группу единицей анализа являются коммуникативные действия. Действие определяется как наименьший сегмент поведения. Он может быть отнесен к одной из 12 категорий, таких как:

- «проявляет солидарность» (поднимает статус других, оказывает помощь, поощряет),
- «советует» (руководит, учитывает автономию других),
- «ориентирует» (рассказывает, вносит ясность, подтверждает),
- «не соглашается» (саботирует, проявляет педантизм, не помогает), а также ряда других.

Все группы ранжируются по частоте их действий. Для большого числа групп одинакового размера n на основе опытных данных вычисляется $Nn(r)$ – частота действий индивида r -го ранга в группе размера n . Если бы $N(r)$ была близка к постоянной величине, то это бы означало «равенство» в количестве действий индивидов. Однако многочисленные исследования социальных психологов показывают, что в частоте действий индивидов наблюдаются значительные различия. В реальных группах действия распределены неравномерно среди их членов. Зависимость частоты действий индивида от его ранга имеет вид:

$$N_n(r) = \frac{c_n}{r}, \text{ где } c_n \text{ – эмпирический коэффициент для группы}$$

размера n . Эта зависимость в социальной психологии носит название «закон Ципфа».

Математические модели применяются для исследования широкого круга социально-психических процессов. Можно ожидать, что исследование методов математического моделирования в психологии позволит более четко и однозначно определить процессы памяти, восприятия, мышления, творчества, игры и др.

При подборе учебного материала для активизации учебно-познавательной деятельности студентов используются задачи, составленные на основе реальных социологических данных. Это повышает мотивацию изучения определенной темы по основам высшей математики и математики вообще.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ САЙТА «ЛОГИКА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ»

О.В. ЕВТИХОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Логика – это бог мыслящих.

Л. Фейхтвангер

Что такое логика и для чего она нужна? Велика ли ее роль в повседневной жизни? Насколько важно знать ее законы и с какого возраста лучше начать развивать способности детей логически мыслить?

Эти и многие другие вопросы встают перед учителем, работающим над проблемой формирования и развития логической культуры школьников. Нужно отметить, что логика призвана систематизировать получаемую из окружающего мира информацию. Она предоставляет логические средства для точного выражения мыслей, без чего не обходится ни одна мыслительная деятельность, начиная со школьного обучения и заканчивая научно-исследовательской работой.

Логика – наука о законах и формах мышления; ход рассуждений, умозаключений; разумность, внутренняя закономерность чего-нибудь.

Начинающий учитель на уроке может столкнуться с неумением детей обобщать, анализировать, систематизировать информацию, выделять из общего частное, выявлять истинность суждений, даже основываясь на элементарных логических формулах и законах логики. Возможно, в этом виноват узкий кругозор учеников, но нельзя и отрицать неспособность школьников к таким мыслительным операциям, как анализ, синтез, сравнение, обобщение, классификация, абстракция и конкретизация.

В разработанном нами проекте сайта «Логика для школьников ☺» уделяется внимание развитию логики гуманитариев, предлагаются специальные тесты и задания, направленные на развитие логического мышления учащихся. Сайт будет интересен не только учителям математики, но и преподавателям других предметов. К нему также могут обратиться родители, желающие повысить логическую культуру и уровень интеллектуальных способностей своих детей, и сами ребята.

Ни для кого не секрет, что любому современному человеку, в том числе и школьнику, необходимы умения эффективно и корректно вести различные диалоги, находить нужные аргументы, культурно и логически грамотно опровергать ложные или недоказанные тезисы, встречающиеся в различных формах диалога. Логические упражнения, тесты способствуют развитию этих качеств, гибкости мышления. В этом актуальность данного проекта.

Основной целью создания логического сайта является помощь учащимся в развитии и совершенствовании логических операций.

Сайт «Логика для школьников ☺» направлен на реализацию следующих задач:

- формирование знаний о формах мышления (понятиях, суждениях, умозаключениях);

- усвоение законов (принципов) правильного мышления (закон тождества, закон противоречия, закон исключенного третьего, закон достаточного основания);

- получение школьниками практических навыков аргументации, доказательства и опровержения; знакомство со встречающимися в этом процессе правилами и логическими ошибками, различными «уловками», применяемыми в спорах и других формах диалога;

- выработка у школьников навыков решения логических задач и умения представлять свои суждения графически.

Предварительно нами была проанализирована литература по предмету (прежде всего, упор делался на школьные логические задачи; изучались соответствующие разделы психологии мышления); проведено исследование (во время педагогической практики в сентябре 2009 года в

Смоленской православной гимназии № 1 в 9-м классе, в январе-марте 2010 года в Игоревской средней школе Холм-Жирковского района в 9 «А» и в 9 «Б» классах). В православной гимназии были проведены две контрольные работы (первая – в начале обучения, вторая – по завершении), беседы по предмету, на основе которых делались выводы о развитии тех или иных операций (благодаря небольшому количеству учащихся отслеживание было вполне возможно). В Игоревской средней школе помимо беседы и контрольных работ проведены письменный опрос «Что должен содержать электронный учебник по логике?» и два теста, на основе разбора ошибок в которых строилось объяснение решения логических задач.

Сайт имеет такие вкладки как «Теория», «Задачи с решением», «Реши сам», «Тесты», «Словарь», «Персоналии».

Во вкладке «Теория» представлен необходимый для решения задач теоретический минимум, состоящий из четко сформулированных законов математической логики, исторических сведений, базирующихся на аристотелевской логике.

Следующая вкладка «Задачи с решением» имеет 20 разделов, состоящих в среднем из 6 задач с образцом решения.

Задачи с транзитивными отношениями (I–II); Задачи с нетранзитивными отношениями (II); Задачи на сравнение элементов в отношениях (III); Задачи, решаемые с помощью схем (V); Задачи, решаемые с помощью таблиц (V–VII); Дележи (VI); Задачи с четырьмя элементами (VI–VII); Задачи на переправу (V–IX); Задачи на перебор возможных вариантов (VII–IX); Занимательные задачи (VIII–XI); Игровые задачи (IX–XI); Правдолюбцы и лжецы (VII–IX); Операции над множествами (VI–XI); Выделение элемента множества (V–IX); Комбинаторные задачи (VI–XI); Принцип Дирихле (VIII–XI); Истинные и ложные утверждения (VIII–XI); Инварианты (IX–XI); Правило крайнего (IX–XI); Силлогизмы (IX–XI).

Рядом с каждым разделом приведены номера классов, в которых рассматриваемые задачи могут использоваться, некоторые из них сопровождаются схемами, таблицами, рисунками. Учет возрастных особенностей лег в основу данного раздела.

Вкладка «Реши сам» имеет иную структуру: задачи сопровождаются лишь ответом (без описания хода решения), который пользователь может посмотреть при нажатии на соответствующую кнопку.

Вкладка «Тесты» представляет собой несколько заданий в тестовой форме. Ученик может самостоятельно проверить свои знания таким нестандартным и занимательным способом (набирать очки всегда интересно!). К тому же школьник может посмотреть ответы на весь тест полностью, что позволяет при повторном прохождении использовать

этот тест уже в обучающем плане: дана задача, над которой учащийся уже думал, теперь на нее известен ответ и, стремясь к нему, можно перерешать задание, попытаться разобраться, почему так.

Пройдя по ссылке «Словарь», пользователь найдет перечень основных определений, используемых при решении логических задач, в рассуждениях, что совершенствует знания в терминологии.

Последняя вкладка, доступная с каждой страницы сайта, называется «Персоналии». Это список ученых, занимавшихся проблемами логики, ее развитием, становлением. Здесь можно познакомиться с краткой биографией того или иного ученого, названиями некоторых их трудов. В настоящий момент представлены биографии следующих ученых: Нильс Абель; Аристотель; Стефан Банах; Френсис Бэкон; Джон Венн; Джордж Буль; Курт Гедель; Давид Гильберт; Эдгар Дийкстра; Дхармакрити; Льюис Кэрролл; Вильгельм Лейбниц; Джон Нейман; Блез Паскаль; Алан Тьюринг; Алан Чёрч.

На главной странице помимо основных присутствуют ссылки на «Flash-игры» и «Афоризмы».

Нажав вкладку «Афоризмы», пользователи будут иметь возможность познакомиться с изречениями известных людей о логике. На наш взгляд, это также способствует развитию не только логического мышления учащихся, но и логической культуры, так как в каждом высказывании прослеживается какая-либо специфика данной науки, причинно-следственные связи. Афоризмы, цитаты заставляют задумываться над сильными и слабыми сторонами предмета, над отношением к нему.

На главной странице, пройдя по соответствующей ссылке, можно посмотреть рекомендации и возможные варианты по прохождению предложенных игр.

В настоящий момент ведется работа над преобразованием этого сайта в более сложную систему, в основе которой будет лежать **адаптивное обучение** (это коснется тестов и теоретических материалов). Проектирование сайта с таким содержательным компонентом уже само по себе является уникальным.

Разработанный нами логический сайт имеет как теоретическую, так и практическую ценность для школьников, поскольку содержит в себе материалы обоих видов. Более того, его существенным достоинством является то, что в нем собраны и расположены по степени сложности задачи по разным темам, с указанием класса, в котором задания могут быть использованы. Работ с такой структурой и с такой степенью доступности, какую имеет сайт, практически нет. Как правило, это либо классические курсы логики, либо собрание логических задач, мало учитывающих возрастные особенности учащихся.

ПРЕЗЕНТАЦИЯ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ Н.В. БРОВКА И Л.П. ПРИМАЧУКА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ»

Э.И. ЗВЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет, г. Минск

В издательстве Белорусского государственного университета в серии «Классическое университетское издание», основанной в 2010 году в честь 90-летия Белорусского государственного университета, тиражом 300 экземпляров вышло учебное пособие авторов Н.В. Бровка, Л.П. Примачук «Математический анализ. Функции многих переменных и дифференциальные формы», допущенное Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений по математическим специальностям. Его объем 352 страницы. Книга отражает многолетний положительный опыт преподавания авторами курса «Математический анализ» в БГУ и посвящена тем разделам курса, которые в большинстве традиционных учебников излагаются архаично, нестрого или слишком кратко.

Как отмечает в предисловии ректор БГУ, академик НАН РБ С.В. Абламейко, целью издания книг данной серии является представление модели учебного текста, которая реализует «сплав научной и педагогической мысли, призвана формировать особую культуру знания – передового и доступного, теоретического и практического, общекультурного и специализированного» [1, с. 6].

Содержание учебного пособия разработано в соответствии с программой курса «Математический анализ» для студентов математических специальностей университетов. Особенности этой книги состоят в том, что, во-первых, теоретический материал строится на основе междисциплинарных связей с курсами функционального анализа, высшей алгебры, топологии, дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, изучаемых на математических факультетах университетов. Во-вторых, наряду с теоретическим материалом в пособие включены практикумы, содержащие достаточно обширный перечень примеров решения задач, задания для самостоятельной работы студентов, которые носят характер «теория в упражнениях», дополняя материал существующих задачников. В-третьих, учебное пособие содержит систему упражнений, которая может быть использована в рамках занятий по учебно-исследовательской работе со студентами.

Остановимся более подробно на содержании данного учебного пособия. Оно включает введение и семь глав, содержащих теоретические материалы для лекций, практикумы к главам, которые содержат примеры решения задач и задания для самостоятельной работы студентов, список

литературы. В первой главе «Элементы общей топологии» излагаются такие важнейшие для классического анализа понятия, как отображения метрических и нормированных пространств, пределы и непрерывность таких отображений. Во второй главе подробно излагается дифференциальное исчисление отображений из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m с привлечением аппарата полилинейной алгебры. В третьей главе «Неявные отображения» излагается также теорема об обратных отображениях и теория условного экстремума. В главе 4 «Геометрические приложения» изложены основные факты из теории кривых и поверхностей в \mathbb{R}^3 . Главы 5 – 7 посвящены наиболее трудным разделам курса, которые в традиционных учебниках почти не излагаются или излагаются недостаточно ясно. Глава 5 «Замена переменных в дифференциальных выражениях» содержит ясное изложение соответствующих алгоритмов. Приведенная в пособии матричная формула позволяет варьировать функции, подставляемые в левую и правую части в зависимости от порядка искомой производной, оставляя общий вид формулы неизменным. Изучение аппарата замены переменных в дифференциальных выражениях предусмотрено программой не только курса математического анализа, но и курсов обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Глава 6 содержит элементы полилинейной алгебры и исчисления внешних дифференциальных форм в \mathbb{R}^n . В седьмой главе излагается интегрирование внешних дифференциальных форм, криволинейные и поверхностные интегралы, общая теорема Стокса

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega,$$

различные ее частные случаи (формулы Ньютона-Лейбница, Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса) и некоторые попутные вопросы.

К достоинствам пособия следует отнести большое количество примеров реализации междисциплинарных связей математических дисциплин, а также то, что содержание теоретического материала удачно отобрано, грамотно структурировано и снабжено большим количеством задач с решениями. Данное пособие внедрено в учебный процесс в Белорусском государственном университете, его издание я считаю своевременным и полезным для научно-методического обеспечения современного образовательного процесса в высшей школе.

Литература

1. Бровка Н.В., Примачук Л.П. Математический анализ. Функции многих переменных и дифференциальные формы: учеб. пособие для студентов математических факультетов. – Минск: БГУ, 2010. – 352 с.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОТНОШЕНИЙ БАЗОВЫХ И КРИТЕРИАЛЬНЫХ ПРИЗНАКОВ ПОДЪЯЗЫКА МЕДИЦИНЫ И ОБЩЕГЛАГОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

И.В. ЗИНОВЬЕВА

Смоленский гуманитарный университет, г. Смоленск

e-mail: zinoveva@shu.ru

В современных условиях исследование подъязыков становится одним из наиболее важных направлений в лингвистике, без их изучения представление о языковой системе будет далеко неполным. Особое место среди подъязыков специального использования занимает подъязык медицины «МЕД». Существуют различные точки зрения на взаимоотношение подъязыков и общенационального языка. Поэтому важным вопросом, относящимся к области изучения языков специального назначения и общенациональных языков, является сопоставительный анализ их систем. В исследовании ставится задача сравнить отношения, имеющие место у базовых и критериальных признаков в различных системах: в подъязыке медицины и общеглагольной системе.

Материалом исследования послужила сплошная выборка английских глаголов из известного, широко используемого словаря *Stedman's Medical Dictionary* (Lippincott Williams & Wilkins, 2000, 27th ed.). Общее число глаголов составило 506 единиц. Также к исследованию были привлечены отглагольные производные, зафиксированные в этом словаре. Указанным глаголам и отглагольным производным были приписаны разноуровневые признаки: базовые и критериальные. Методом установления соотношений между признаками явился корреляционный анализ. Данные вопросы на материале общенационального английского языка рассматривались в рамках коллективной темы по исследованию соотношений разноуровневых признаков глаголов [3]. Данные, полученные на материале подъязыка «МЕД», можно сопоставить с результатами коллективного исследования общеглагольной системы «ОС». Для сопоставления признаков «МЕД» и «ОС» применяется мера сходства Жаккара [2]:

$$K = \frac{m}{S_1 + S_2 - m}, \quad (1)$$

где m – число сходных корреляций, либо отсутствие корреляций в двух системах;

S_1 – число всех соотношений в МЕД;

S_2 – число всех соотношений в ОС.

В исследовании принимается достаточно высокий пороговый уровень статистической значимости ($p = 0,01$). Из отмеченных значений коэффициента Жаккара статистически значимыми являются все, кроме

$K = 0,14$ для соотношений обобщенных деривационных признаков со слоговым составом основы и $K = 0,25$ для взаимовлияния конкретных видов аффиксальной сочетаемости. Основываясь на данных, полученных на материале подъязыка «МЕД», можно сделать выводы о том, какой участок системы в МЕД в наибольшей степени сохраняет общеязыковую структуру.

Минимальная вариативность наблюдается в рамках взаимодействия обобщенных деривационных характеристик основы. Этот участок языковой системы может рассматриваться как своего рода интегрирующий компонент. Среднюю степень постоянства демонстрируют соотношения обобщенных деривационных признаков с признаками морфемного состава основ и соотношения суффиксальной сочетаемости глагольных основ с признаками их морфемного состава. Устойчивость корреляций здесь заметно слабее, чем для деривационных взаимосвязей, однако, тем не менее, достаточно выражена. В наибольшей степени изменения имеют место во взаимозависимостях конкретных видов суффиксальной сочетаемости и в соотношениях обобщенных деривационных признаков со слоговым составом основы.

Существенные различия, однако, в меньшей степени, чем в двух предыдущих случаях, наблюдаются в соотношениях обобщенных деривационных признаков с типом ударности основы, соотношениях суффиксальной сочетаемости глагольных основ с их слоговым составом и суффиксальной сочетаемости глагольных основ с типом их ударности.

Таким образом, морфемный состав оказывается значительно более стабильным по своему воздействию на деривационную сочетаемость изучаемого вида в двух системах, чем фонетический облик глаголов, особенно слоговой состав. Это можно признать косвенным подтверждением целесообразности привлечения данного параметра, отражающего длину слова, измеренную в слогах, в стилеметрических исследованиях, направленных на поиск маркеров индивидуального стиля [4].

Суммарное воздействие формальных признаков на изучаемую деривационную сочетаемость в двух системах (МЕД и ОС) составляет 0,37.

Литература

1. Андреев С.Н. Проблемы многомерной классификации языковых единиц (соотношения формальных признаков английских и русских глаголов): автореф. дис. ... д-ра. филол. наук. – Л.: ЛГУ, 1990. – 42 с.
2. Бартков Б.И. О коэффициентах сходства членов синонимических рядов // Структурная и прикладная лингвистика. – Киев, 1981. – С. 6–13.
3. Сильницкий Г.Г., Андреев С.Н., Кузьмин Л.А., Кусков М.И. Соотношение глагольных признаков различных уровней в английском языке. – Минск: Наука и техника, 1990. – 182 с.

4. Bissell A.F. Weighted cumulative sums for text analysis using word counts // Journal of the Royal Statistical Society. – 1995. Vol. 158. P. 525–545.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ В СКМ MAPLE

Э.Г. ИСРАФИЛОВА*, Ю.Г. ИГНАТЬЕВ**

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань
e-mail: *elina88@yandex.ru, **ignatev_yu@rambler.ru

Дифференциальная геометрия имеет многочисленные приложения в различных областях науки и техники, в частности в математическом моделировании объектов механики и теории поля. Методы дифференциальной геометрии кривых являются основой математического и компьютерного моделирования нелинейных динамических систем. С другой стороны, дифференциальная геометрия изучается в вузах недостаточно полно и считается одним из наиболее сложных предметов физико-математического цикла. Одна из объективных трудностей этого предмета вызвана диспропорцией между излагаемыми методами математического анализа кривых и поверхностей, с одной стороны, и слабо разработанной базой конкретных примеров – с другой. Эта диспропорция, в свою очередь, вызвана тем обстоятельством, что подавляющее большинство стандартных задач дифференциальной геометрии сводится к нелинейным дифференциальным уравнениям, для которых отсутствуют развитые методы аналитического исследования решений. Таким образом, курс дифференциальной геометрии повисает в воздухе – большинство задач доводится до систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а дальше сопровождается благими пожеланиями. К таким задачам, например, относятся задачи: восстановления кривых по их натуральным уравнениям, нахождения геодезических линий на поверхностях, построения линий кривизн, а также ортогональных сетей на поверхностях. Устранить противоречие между заявленными и решаемыми задачами курса дифференциальной геометрии, по-видимому, возможно активным применением инструментов СКМ для решения стандартных задач курса. В качестве положительного примера реализации этой идеи можно упомянуть книгу А. Грея [1], посвященную применению пакета Mathematica в курсе дифференциальной геометрии.

В нашей работе описаны библиотеки программных процедур дифференциальной геометрии в пакете Maple, позволяющих решать стандартные задачи курса дифференциальной геометрии и сопровождать

решения трехмерной графической интерпретацией, в том числе и динамической. Созданная библиотека программных процедур может найти широкое применение не только в курсе дифференциальной геометрии, но и в смежных математических и физических курсах, а также в качестве инструмента научных исследований. Следует отметить, что уникальные графические возможности пакета Maple, до сих пор не достигнутые в пакете Mathematica, выдвигают на первое место в качестве инструмента исследования дифференциальной геометрии именно этот пакет. В докладе приводятся многочисленные примеры решения стандартных задач курса дифференциальной геометрии.

Литература

1. Gray A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd Edition. – New-York: CRC Press. – 1997. – 432 p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ И СЕТЕЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ В СРЕДЕ MATHEMATICA

С.В. КАПУСТИН

Елабужский государственный педагогический университет, г. Елабуга
e-mail: kapustin_ds_2011@mail.ru

При изучении теории поверхностей в курсе дифференциальной геометрии замечательные линии и сети на поверхностях (сопряжённая сеть, асимптотические линии, сеть линий кривизны, геодезические линии, полугеодезическая сеть) рассматриваются в теоретическом плане, и большая часть задач на этот материал – задачи на вычисление, какая-либо визуализация отсутствует. Применение информационных технологий на базе компьютерной системы Mathematica позволяет изменить эту ситуацию.

Во-первых, трудоёмкие вычисления по составлению дифференциальных уравнений замечательных линий на поверхностях можно автоматизировать, составив программы в функциональном стиле, которые применимы к любой поверхности.

Во-вторых, решить полученные дифференциальные уравнения целесообразно поручить системе Mathematica; если в квадратурах они не интегрируются, то можно применить предусмотренный в системе Mathematica способ приближённого решения задачи Коши, дающий на выходе интерполяционную функцию.

В-третьих, используя полученную зависимость между криволинейными координатами (включающую новый параметр – постоянную интегрирования), можно получить параметрические уравнения искомых семейств и, придавая постоянной интегрирования

несколько значений, визуализировать каждое семейство линий отдельно. Затем скомбинировать изображение области на поверхности и полученных семейств линий.

Покажем на примере сети асимптотических линий, как решаются подобные задачи.

$$\text{asline}[\mathbf{r}_][\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] := \mathbf{h}_{11}[\mathbf{r}][\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] * \text{Dt}[\mathbf{u}_1]^2 + 2 \mathbf{h}_{12}[\mathbf{r}][\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] * \text{Dt}[\mathbf{u}_1] * \text{Dt}[\mathbf{u}_2] + \mathbf{h}_{22}[\mathbf{r}][\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] * \text{Dt}[\mathbf{u}_2]^2 = 0$$

Это программа-однострочник, составленная в функциональном стиле, предназначенная для составления дифференциальных уравнений асимптотических линий поверхности; \mathbf{h}_{11} , \mathbf{h}_{12} , \mathbf{h}_{22} – вычисленные заранее (также запрограммированные для любой поверхности) коэффициенты второй квадратичной формы; именованный шаблон $\mathbf{r}_$ обозначает координаты радиус-вектора любой поверхности, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ – её криволинейные координаты. Введём параметрические уравнения катеноида (параметр в его уравнении принят равным 1):

$$\begin{aligned} \text{katenooid}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] &:= \{\text{Cos}[\mathbf{u}_1] \text{Cosh}[\mathbf{u}_2], \text{Sin}[\mathbf{u}_1] \text{Cosh}[\mathbf{u}_2], \mathbf{u}_2\} \\ \text{asline}[\text{katenooid}][\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \\ &-\sqrt{\text{Cosh}[\mathbf{u}_2]^4} (\text{Dt}[\mathbf{u}_1] - \text{Dt}[\mathbf{u}_2]) (\text{Dt}[\mathbf{u}_1] + \text{Dt}[\mathbf{u}_2]) \text{Sech}[\mathbf{u}_2]^2 = 0 \end{aligned}$$

Строение левой части полученного уравнения позволяет свести его к совокупности дифференциальных уравнений: $du^1 = du^2$ или $du^1 = -du^2$, которые легко интегрируются и дают возможность визуализировать асимптотическую сеть на катеноиде¹. Два семейства асимптотических линий:

```
askaten1[u1_,c1_] := {Cos[u1]*Cosh[u1+c1], Sin[u1]*Cosh[u1+c1], u1+c1}
askaten2[u1_,c2_] := {Cos[u1] Cosh[-u1+c2], Sin[u1] Cosh[-u1+c2], -u1+c2}
Table[askaten1[u1,c1], {c1, 0, 2π, π/4}]
fam1 = ParametricPlot3D[%, {u1, -2π, 2π}, Boxed -> False, Axes -> False]
Table[askaten2[u1,c2], {c2, 0, 2π, π/4}]
fam2 = ParametricPlot3D[%, {u1, -2π, 2π}, Boxed -> False, Axes -> False]
surf = ParametricPlot3D[katenooid[u1,u2], {u1, 0, 2π}, {u2, -1.8, 1.8},
  Boxed -> False, Axes -> False]
Show[surf, fam1, fam2]
```

В результате получается следующее изображение (рис. 1).

¹ Далее, в целях экономии места, приведём лишь входные ячейки.

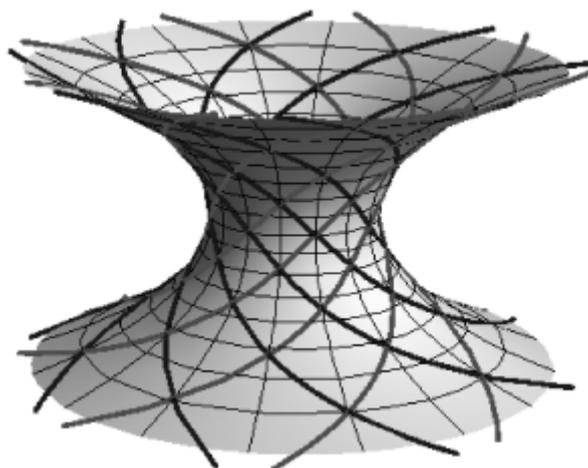


Рис. 1. Катеноид с сетью асимптотических линий

Аналогично визуализируются сопряжённые сети и сети линий кривизны. С геодезическими линиями дело обстоит несколько сложнее, поскольку система дифференциальных уравнений для определения внутренних уравнений геодезической линии имеет второй порядок.

Литература

1. Gray A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. 2nd edition. – Cambridge University Press. 1997, – 1088 p.

СТРУКТУРА НОРМАТИВНОГО КУРСА «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ»

Т.В. КАПУСТИНА

Елабужский государственный педагогический университет, г. Елабуга
e-mail: tv_kapustina@mail.ru

По действующему Государственному образовательному стандарту для вузов (2005) в учебных планах по математическим специальностям предусмотрена нормативная дисциплина «Информационные технологии в математике». Приведём выписку из госстандарта для специальности 032100.00 «Математика с дополнительной специальностью».

При подобной постановке курса из него исключается самое важное: освоение методов и стилей программирования в среде компьютерной математической системы (КМС). Именно программирование является основной сутью КМС; оно позволяет многократно расширить круг математических задач, доступных современному студенту, и является инструментом для создания разнообразных педагогических программных продуктов в компьютерных математических средах.

Обзор пакетов символьных вычислений (Mathematica, Derive, Maple V, MathCAD).

Использование пакетов символьных вычислений: для решения задач символьного дифференцирования и интегрирования функций одного и нескольких переменных; для построения графиков функций и поверхностей; для решения задач матричной алгебры;

для поиска аналитического решения систем линейных уравнений; для решения нелинейных уравнений; для решения дифференциальных уравнений; для решения задач теории чисел и комбинаторных задач;

Технологии подготовки математических текстов. Пакет TeX (LaTeX).

Поскольку за отведённое учебным планом время на изучение ИТМ (52–56 часов аудиторных занятий) не представляется возможным обстоятельно рассмотреть все четыре КМС и в придачу TeX, то для подробного изучения следует выбрать одну КМС (Mathematica или Maple, так как это лидеры среди КМС), а с остальными ознакомить студентов обзорно. На лекциях нужно осветить методологические особенности КМС; для системы Mathematica к ним относятся понятия *интерполяционной функции* (представляющей собой приближённое решение дифференциального уравнения или системы ДУ с заданными начальными условиями, однако использующейся как функция, заданная формулой) и *шаблона* (являющегося обобщением математического понятия переменной величины). Необходимо не только теоретическое изложение принципов программирования в КМС, но и привитие студентам навыков практического использования программирования для решения математических задач и для разработки педагогических программных продуктов. Ниже приводим краткую программу курса.

«Понятие об информационных технологиях. Новые информационные технологии (НИТ) в науке и образовании; в математике. Типология программных средств по функциональному назначению. Компьютерные предметные среды. Системы компьютерной математики и компьютерные математические системы как средства НИТ в научных исследованиях и в обучении. Структура системы компьютерной математики. Исполнительная система, база знаний, интеллектуальный интерфейс. Классификация компьютерно-ориентированных задач. Обзор систем компьютерной математики и компьютерных математических систем (КМС).

Структура КМС Mathematica. Объекты. Главное меню. Численные вычисления в системе Mathematica. Типы чисел и их задание. Точные и приближённые вычисления. Арифметические вычисления. Вычисление значений некоторых математических функций. Применение списков при численных вычислениях. Символьные вычисления. Преобразования алгебраических выражений (многочленов; дробно-рациональных выражений; выражений, содержащих комплексные числа; тригонометрических выражений). Подстановки. Решение уравнений и неравенств. Вычисление пределов и дифференцирование функций. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Решение задач линейной алгебры. Списки и их преобразование.

Графика в КМС Mathematica. Графические функции и их основные опции. Функции двумерной графики. Функции трёхмерной графики. Видоизменение графиков и их комбинирование. Анимация графических образов. Программирование в системе Mathematica. Три основных стиля программирования в Mathematica: функциональный, по правилам преобразований, процедурный. Чистые функции. Объект вида «шаблон». Встроенные функции для организации циклов, рекурсий.

Общее понятие об издательской системе TeX. Достоинства и недостатки. Основные понятия: исходный файл, спецсимволы, команды и их задания в тексте, структура исходного текста, группы, команды с параметрами, команды с аргументами, окружения, единицы длины. Классы документов; разделы документа. Типовые преамбулы. Трансляция tex-файла; просмотр и печать dvi-файла. Набор математических формул. Подготовка рисунков и вставка их в текст. Вёрстка таблиц. Оформление текста в целом».

МЕХАНИКА МЕЖПЛАНЕТНОГО ПОЛЕТА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И ВРЕМЕНИ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Е.В. КИСЛЯКОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: elena151082@mail.ru

Одной из интересных и полезных областей применения законов механики является расчет космических полетов. Используя законы механики Ньютона и сведения из астрономии, можно достаточно точно определить величины, характеризующие движение объекта Солнечной системы или космического корабля. Рассмотрим один из методов расчета движения межпланетного корабля и его моделирование в системе MathCAD.

На первом этапе выявим наиболее важные характеристики процесса, которые необходимо учитывать при построении модели.

Большинство тел Солнечной системы обладают большими, по сравнению с космическим кораблем, массами, поэтому силы тяготения, действующие со стороны небесных тел на корабль, существенно влияют на его движение. Однако, по закону всемирного тяготения, эти силы убывают пропорционально увеличению квадрата расстояния от корабля до небесного тела. Поэтому будем предполагать, что у каждого небесного тела есть сфера действия, за пределами которой его гравитационное притяжение настолько мало, что им можно пренебречь.

Для упрощения расчетов будем предполагать, что орбиты Земли и планеты, к которой движется корабль, являются круговыми и лежат в плоскости эклиптики. Также будем предполагать, что точка старта космического корабля находится за пределами земной атмосферы, что позволит не учитывать силу сопротивления атмосферы. Кроме того, будем считать, что космический корабль предназначен для автоматического исследования планет без участия человека и других живых существ, что позволит не накладывать существенных ограничений на допустимые перегрузки и время космического перелета.

Основной задачей моделирования является определение наименьшей скорости, которую нужно сообщить космическому кораблю вблизи поверхности Земли, чтобы он достиг заданной планеты, и времени, необходимого кораблю для достижения цели.

Решение поставленной задачи начнем с построения физической модели межпланетного полета. При этом будем основываться на законах классической механики, релятивистскими эффектами будем пренебрегать.

Учитывая конечный размер сферы действия силы тяготения небесных тел, траекторию движения корабля можно разделить на 3 участка:

1) от точки старта, расположенной на высоте нескольких сотен километров над поверхностью Земли, до границы сферы действия Земли;

2) от границы сферы действия Земли до границы сферы действия заданной планеты;

3) внутри сферы действия заданной планеты.

На первом участке траектории на космический корабль действует только сила гравитационного притяжения Земли, которая ослабевает по мере удаления корабля от планеты. За то время, пока корабль проходит расстояние до границы сферы действия Земли, наша планета также проходит некоторый путь по своей траектории вокруг Солнца. При этом, в зависимости от направления запуска, космический корабль может двигаться в том же направлении, что и Земля, или в противоположном.

Обозначим скорость движения Земли относительно Солнца через \vec{v} , а скорость движения космического корабля относительно Земли через $\vec{v}_{кз}$. Тогда, согласно классическому закону сложения скоростей, скорость космического корабля относительно Солнца будет равна:

$$\vec{v}_{кс} = \vec{v}_{кз} + \vec{v}. \quad (1)$$

Будем считать, что векторы скорости Земли \vec{v} и космического корабля относительно Земли $\vec{v}_{кз}$ коллинеарные.

По мере удаления от Земли геоцентрическая скорость космического корабля будет непрерывно уменьшаться. Так как радиус сферы действия Земли много больше, чем расстояние от центра Земли до точки, из которой начинает движение космический корабль, то можно приближенно считать, что на выходе из сферы действия Земли геоцентрическая скорость корабля достигнет величины:

$$v_{кз0} = \sqrt{v_0^2 - v_n^2}, \quad (2)$$

где v_0 – начальная скорость космического корабля, v_n – параболическая скорость в точке над поверхностью Земли, из которой стартует космический корабль ($v_n = 11,2 \text{ км/с}$).

На втором участке траектории, от границы сферы действия Земли до границы сферы действия заданной планеты, на космический корабль будет действовать только сила притяжения Солнца.

В зависимости от величины гелиоцентрической скорости $v_{кс0}$ выхода из сферы действия Земли гелиоцентрические орбиты могут быть эллиптическими, параболическими и гиперболическими. В случае эллиптической траектории космический корабль превращается в искусственную планету, в случае параболической и гиперболической орбит корабль навсегда покидает Солнечную систему. Упростим задачу и будем рассматривать только гелиоцентрические орбиты, касательные к орбите Земли. Такие орбиты получаются, если вектор геоцентрической скорости выхода из сферы действия Земли $\vec{v}_{кз0}$ коллинеарен вектору скорости Земли \vec{v} .

Если $v_{кс0} > v$, т.е. геоцентрическая скорость выхода космического корабля из сферы действия Земли совпадает по направлению со скоростью Земли, то орбита космического корабля будет расположена вне орбиты Земли, а ее перигелий будет находиться на Земле. Двигаясь по такой орбите, можно достичь внешних планет (Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун).

Если $v_{кс0} = v$, то орбита искусственной планеты будет совпадать с орбитой Земли.

Если $v_{кс0} < v$, т.е. геоцентрическая скорость выхода направлена в сторону, противоположную скорости Земли, то орбита искусственной планеты будет расположена внутри орбиты Земли, а ее афелий будет

находиться на орбите Земли. Двигаясь по такой орбите, можно достичь внутренних планет (Меркурий, Венера).

Если $\vec{v}_{кз0} = -\vec{v}$, тогда $v_{кз0} = 0$ и орбита искусственной планеты вырождается в радиальную прямую падения на Солнце.

Орбиту космического корабля, ведущую к орбите заданной планеты, будем называть орбитой перехода. Чем больше $v_{кз0}$ в момент выхода корабля из сферы действия Земли, тем больше эксцентриситет орбиты корабля. При определенном значении $v_{кз0}$ орбита перехода будет соприкасаться с орбитой планеты-цели. Минимальное значение скорости отлета с Земли v_0 должно соответствовать орбите перехода, касающейся одновременно орбиты Земли и орбиты планеты цели. Такая орбита называется полуэллиптической.

Скорость отлета с Земли определим по формуле (2), а величину геоцентрической скорости $v_{кз0}$ из закона сложения скоростей (1).

Величину гелиоцентрической скорости выхода $v_{кз0}$ можно вычислить из уравнения эллиптического движения:

$$v_{кз0} = \sqrt{K \left(\frac{2}{R_3} - \frac{1}{a} \right)}, \quad (3)$$

где $K = 1,327 \cdot 10^{11} \text{ км}^3 / \text{с}^2$ – гравитационный параметр Солнца, $R_3 = 1,49 \cdot 10^8 \text{ км}$ – радиус орбиты Земли, $a = \frac{(R_3 + R_{пл})}{2}$ – большая полуось орбиты перехода, $R_{пл}$ – радиус орбиты планеты.

Продолжительность перелета по полуэллиптической траектории вычисляется как половина полного периода обращения искусственной планеты:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{K}} \sqrt{a^3}. \quad (4)$$

Очевидно, что при расчете времени перелета важную роль играет начальная конфигурация Земли и планеты назначения относительно Солнца, позволяющая совершить заданный перелет.

Если перелет совершается не по полуэллиптической, а по параболической траектории, то продолжительность перелета для внешних планет находится по формуле:

$$T_{II} = \sqrt{\frac{2}{K}} \cdot R_3 \cdot \sqrt{\frac{R_{пл}}{R_3} - 1} \cdot \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{R_{пл}}{R_3} - 1 \right) \right]. \quad (5)$$

На третьем участке траектории, внутри сферы действия планеты, на корабль будет действовать только сила притяжения данной планеты.

Если перелет совершается по полуэллиптической траектории, то за гелиоцентрическую скорость входа в сферу действия планеты можно принять гелиоцентрическую скорость подлета к орбите планеты, совпадающую по направлению с орбитальной скоростью планеты.

Планетоцентрическая скорость входа определяется из закона сложения скоростей:

$$\vec{v}_{ксв} = \vec{v}_{кп} + \vec{v}_{пл} \quad (6)$$

Гелиоцентрическую скорость входа в сферу действия планеты можно найти из закона сохранения энергии:

$$v_{ксв}^2 = V_{кс0}^2 - \frac{2K}{R_3} \left(1 - \frac{R_3}{R_{6x}} \right) \quad (7)$$

Математическую модель космического полета реализуем в системе MathCAD.

Начальные данные:

$$V_{osv} := 11.186$$

Параболическая скорость на высоте 200 км

$$K := 1.327 \cdot 10^{11}$$

Гравитационный параметр Солнца

$$R_z := 1.49 \cdot 10^8$$

Радиус орбиты Земли

$$V_z := 29.785$$

Скорость движения Земли по орбите

$$R := \begin{pmatrix} 0.38710 \\ 0.72333 \\ 1.52369 \\ 5.20280 \\ 9.53884 \\ 19.19098 \\ 30.0707 \end{pmatrix}$$

Меркурий
Венера
Марс
Юпитер
Сатурн
Уран
Нептун

$$V := \begin{pmatrix} 47.873 \\ 35.021 \\ 24.129 \\ 13.058 \\ 9.644 \\ 6.799 \\ 5.432 \end{pmatrix}$$

Вычисления:

$$i := 0..6 \quad R_i := R_i \cdot R_z$$

$$a_i := \frac{R_z + R_i}{2} \quad V_{kso}_i := \sqrt{K \cdot \left(\frac{2}{R_z} - \frac{1}{a_i} \right)}$$

$$V_{kzo}_i := |V_{kso}_i - V_z| \quad V_{o}_i := \sqrt{(V_{kzo}_i)^2 + V_{osv}^2}$$

$$T_{pe}_i := \frac{\pi}{\sqrt{K}} \cdot \sqrt{(a_i)^3} \quad T_{pp}_i := 0.22508 \sqrt{\left| \frac{R_i}{R_z} - 1 \right|} \cdot \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{R_i}{R_z} - 1 \right) \right]$$

$$T_{pp}_i := T_{pp}_i \cdot 365.25$$

$$V_{ksv}_i := \sqrt{(V_{kso}_i)^2 - \frac{2 \cdot K}{R_z} \cdot \left(1 - \frac{R_z}{R_i} \right)}$$

$$V_{kp}_i := |V_i - V_{ksv}_i|$$

Результаты вычислений представлены в таблице 1, используемые обозначения аналогичны представленным в тексте статьи.

Таблица 1

Характеристики движения межпланетных космических кораблей

Планета-цель	$R_{пл}$, а.е.	$v_{кс0}$, км/с	v_0 , км/с	$v_{кз0}$, км/с	T , сут	$T_{п}$, сут	$v_{кск}$, км/с	$v_{кп}$, км/с
Меркурий	0,38710	22,3	13,5	7,5	105	–	57,6	9,7
Венера	0,72333	27,3	11,5	2,4	145	–	37,8	2,8
Марс	1,52369	32,8	11,6	3,0	257	70	21,5	2,6
Юпитер	5,20280	38,7	14,3	8,9	992	405	7,4	5,6
Сатурн	9,53884	40,2	15,3	10,4	2196	924	4,2	5,4
Уран	19,19098	41,1	15,9	11,4	5823	2477	2,1	4,7
Нептун	30,0707	41,5	16,2	11,7	11120	4739	1,4	4,1

Таким образом, представленный подход позволяет с хорошей степенью точности рассчитать характеристики движения межпланетного космического корабля и может использоваться на уроках физики и астрономии при моделировании космического полета, а также для приближенных астрономических оценок и расчетов.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА В ПРОГНОЗИРОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

В.Р. КРИСТАЛИНСКИЙ

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: kristvr@rambler.ru

При обучении очень важно уметь прогнозировать, какой уровень знаний может быть достигнут по тем или иным разделам программы, исходя из информации о знаниях по ранее изученным темам. Актуальной является задача построения автоматизированной системы, позволяющей строить обоснованные прогнозы результатов обучения.

Оценка знаний учащихся неизбежно субъективна. Поэтому при построении экспертной системы предполагается использовать аппарат нечеткой логики. Нечеткая логика, как известно [1], является обобщением классической аристотелевой логики, допускающим для степени истинности высказываний любое значение из интервала $[0,1]$. Процесс нечеткого вывода представляет собой процедуру получения нечетких заключений на основе нечетких условий и предпосылок с использованием нечеткой логики. В данной работе предлагается система нечеткого вывода, строящая заключения о возможном уровне знаний

учащихся. Предпосылками здесь является информация об уровне знаний по ранее рассмотренным связанным темам.

В качестве тестового примера построена система, позволяющая прогнозировать уровень знаний по теме «Квадратное уравнение» на основе информации о знаниях по темам «Уравнения первой степени» и «Квадратный трехчлен». Для построения системы использован пакет MatLab. В качестве входных переменных используются оценки по ранее изученным темам. Для каждой из входных переменных строятся три функции принадлежности треугольного вида, соответствующих термам для уровня знаний: плохой, средний и хороший. Такие же функции строятся и для выходной переменной. Строится система продукций вида: *(первая тема усвоена плохо) ∧ (вторая тема усвоена средне) → (прогноз по усвоению новой темы – плохо)*. Удобство системы заключается в том, что учитель может вводить в нее как оценки по пятибалльной системе, так и любые промежуточные оценки. Результат выводится в виде значения итоговой функции принадлежности и графически. На рисунках представлен экран системы нечеткого вывода, построенной в MatLab: результат вывода для конкретных оценок по входным темам.

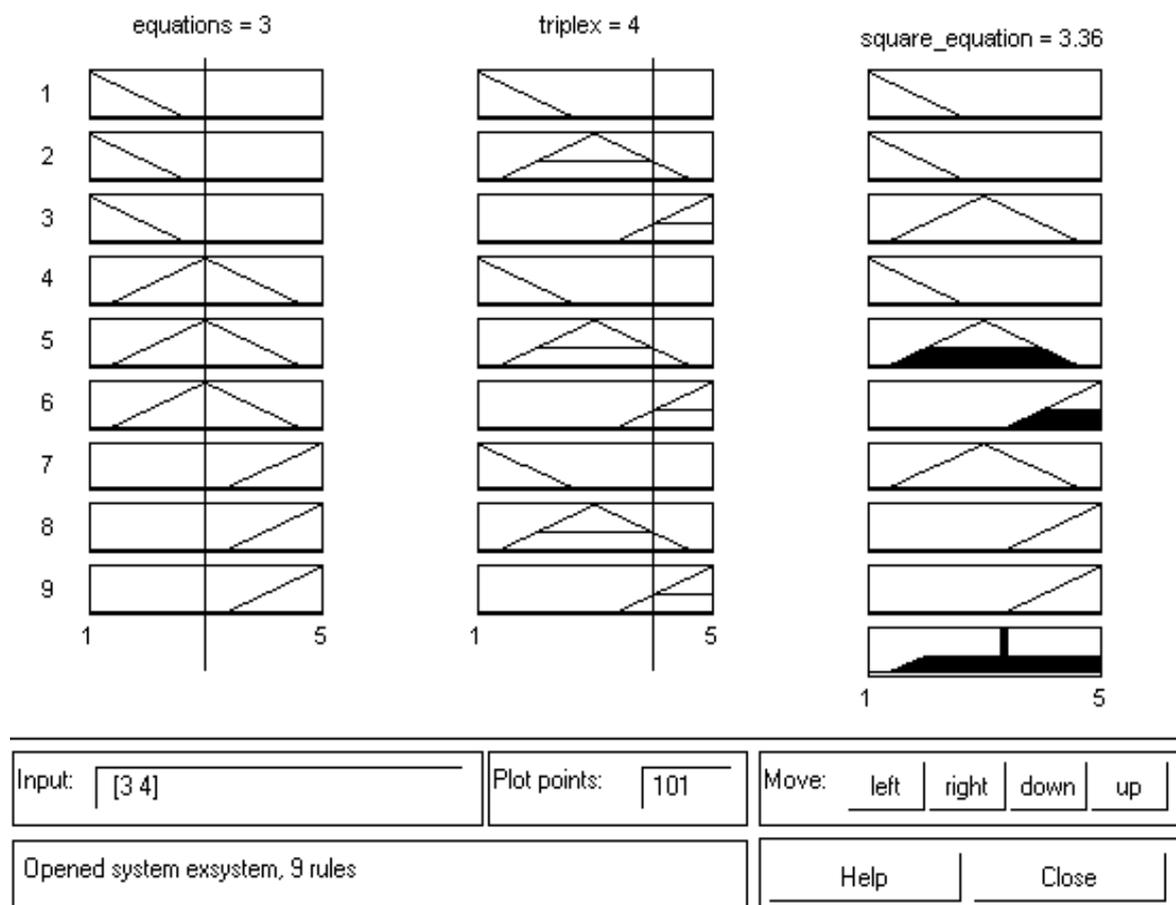


Рис. 1. Результат вывода системы для оценки «3» по первой теме и «4» по второй теме

На основе результатов работы системы можно сделать вывод о том, что при оценках «3» по первой теме и «4» по второй теме прогнозируемый результат по третьей теме – между «3» и «4».

Таким образом, предлагаемая система действительно позволяет, сочетая формализм системы продукции и творчество учителя, давать содержательные прогнозы степени усвоения материала.

Литература

1. Круглов В.В., Борисов Н.Н. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. – М.: Горячая линия – Телеком, 2001.

ОБРАБОТКА ГИПЕРТЕКСТОВЫХ ДАННЫХ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

В.И. МУНЕРМАН, Н.Н. ОМЕЛЬЧЕНКО

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

e-mail: vimoona@gmail.com, NinaOm@mail.ru

Тенденция индивидуализации обучения, связанная с подготовкой дидактических материалов, невозможна без автоматизации работы учителя. Это обусловлено тем, что достижение различных дидактических целей – развитие мотивации выполнения заданий, закрепление полученных знаний, проверка уровня усвоенности материала – требует при подготовке заданий большой рутинной работы и увеличивает загруженность учителя.

Рассмотрим систему автоматизированного подбора задач, при создании которой возникает проблема хранения данных. Суть проблемы в том, что невозможно разработать единую структуру, которая обеспечивала бы хранение разнотипных задач.

На основе анализа диаграмм, отображающих соотношение долей системной и полезной информации в текстовых файлах, используемых для хранения заданий (рис. 1, 2), можно сделать вывод, что с точки зрения хранения и пересылки данных целесообразно собирать много задач в одном документе (файле), создаваемом в некотором текстовом процессоре.

В работе описан способ создания подсистемы обработки текстовых заданий в САПР учителя.

Так как для поиска текстовой информации удобны гипертексты, необходимо формализовать это понятие таким образом, чтобы оно связывалось с моделями современных баз данных и допускало эффективную реализацию поисковых задач на современной вычислительной технике.

В работе [1] предложена математическая модель текста как метрического пространства (рис. 3).

При таком подходе гипертекст можно рассматривать как трехмерную матрицу.

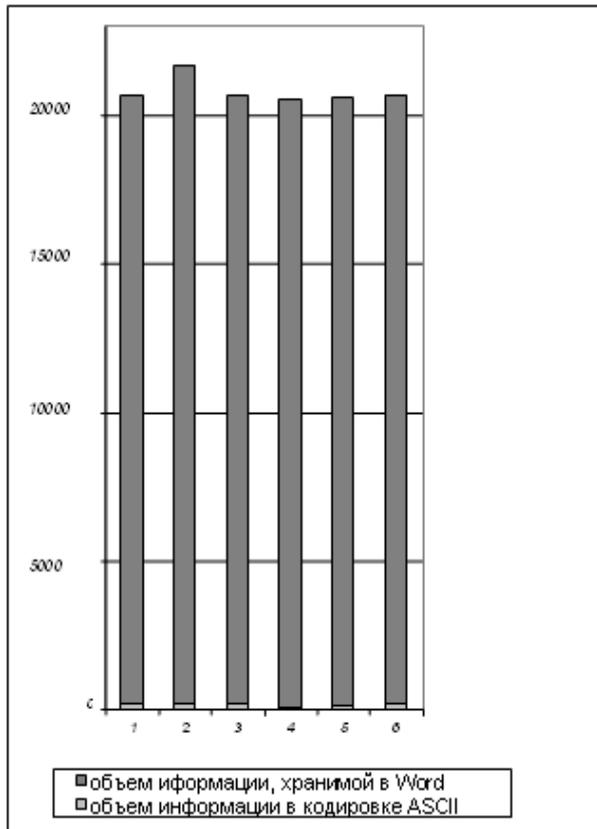


Рис. 1. Доля объема текстовой задачи от объема этой же задачи, хранящейся в документе Microsoft Word

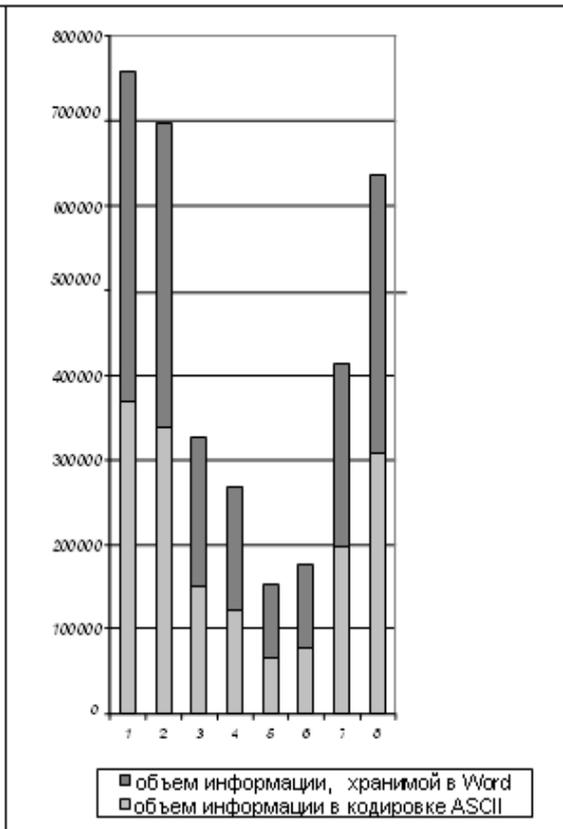


Рис. 2. Доля объема совокупности текстовых задач от объема совокупности этих же задач, хранящихся в Microsoft Word

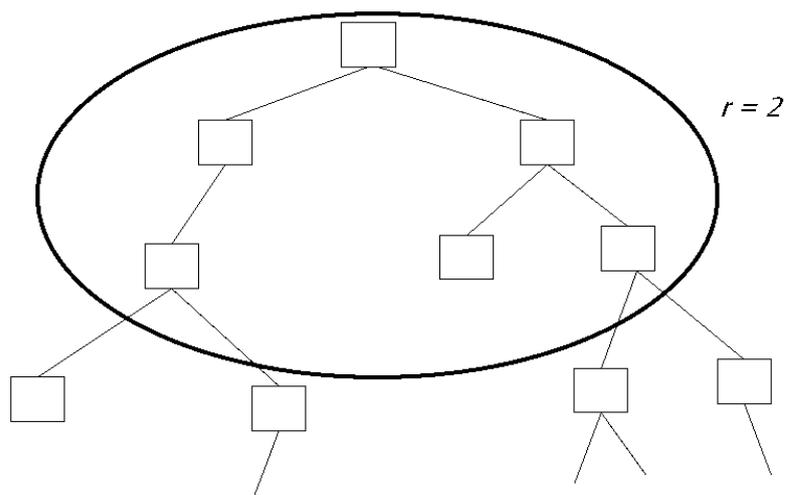


Рис. 3. Модель окрестности в гипертексте

Обозначим теперь $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ – множество данных, составляющих гипертекст (слов, понятий, узлов и т.п.), а $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ – цепочку элементов S ($k < n$). Пусть $p = k_{max}$ – число элементов в самой длинной цепочке. Построим многомерно-матричную модель над полем $GF2$ с операциями дизъюнкции и конъюнкции следующим образом.

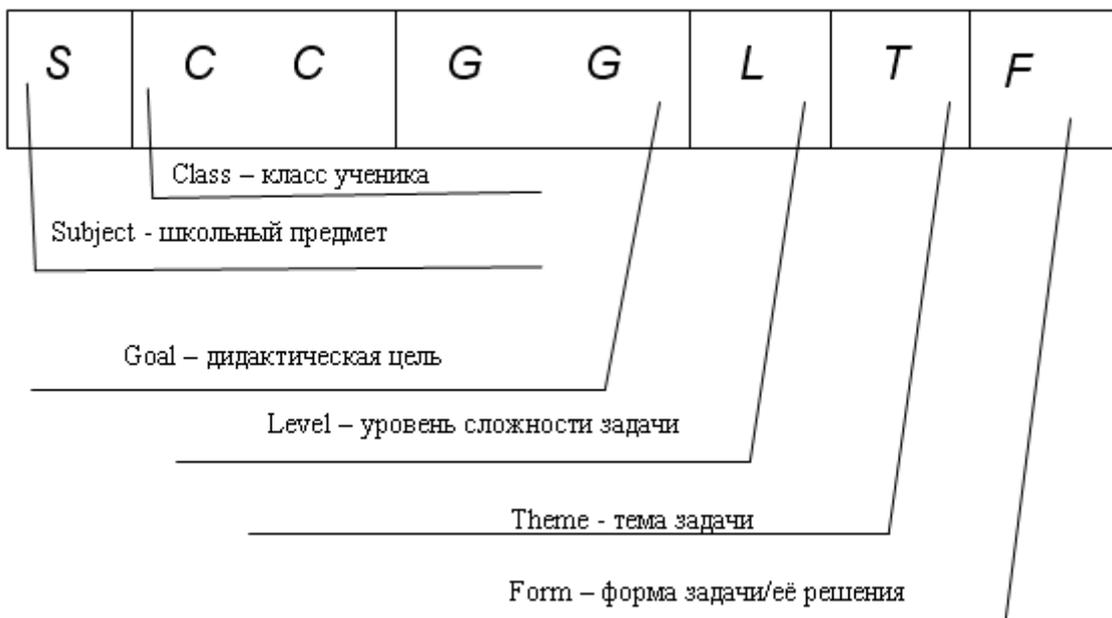
1. Используем в качестве индексов номера элементов множества S .
2. Строим трехмерную матрицу с индексами $i_1 = (1, \dots, n)$, $i_2 = (1, \dots, n)$, $i_3 = (1, \dots, p)$.
3. Элемент $c_{i_1 i_2 i_3} = 1$, если между узлами с номерами i_1^* и i_2^* существует путь длины i_3^* , в противном случае элемент $c_{i_1 i_2 i_3} = 0$.

Построенная таким образом модель позволяет решать различные задачи. Рассмотрим одну из них.

Определим окрестность узла $c_{i_1 i_2 i_3}$ как множество $S' \subset S$ всех узлов, из которых существуют пути в этот узел.

Окрестностью радиуса r узла $c_{i_1 i_2 i_3}$ назовем множество $S^r \subseteq S'$ всех узлов, расстояние (длина пути) от которых до узла $c_{i_1 i_2 i_3}$ не превосходит r .

Для построения гипертекстовой системы целесообразно применить единую систему кодирования каждой задачи в текстовом документе и в базе. Могут использоваться различные методы кодирования: УДК, ББК, штрих-кодирование. Один из способов кодирования может быть таким.



В результате исследования построена гибридная система, которая сочетает в себе свойства обыкновенных баз данных (где поиск осуществляется по ключам) и гипертекстовой системы (где поиск происходит по прямым ссылкам, взятым из баз данных). Если задачи, которые нужно найти, находятся в одном документе, то поиск их осуществляется по связным спискам, в противном случае – по набору кодов.

Реализация программы выглядит следующим образом.

По заданным дескрипторам, например класс, предмет, тема, уровень сложности, в базе выбираются необходимые коды ключевых задач. Затем в гипертекстовом документе выбирается окрестность заданного радиуса ключевой задачи.

Использование многомерно-матричного представления позволяет использовать методы параллельной обработки данных и тем самым ускорить подбор задач для индивидуальных заданий.

Литература

1. Емельченков Е.П., Мунерман В.И. Математическая модель обработки гипертекстов. – Смоленск, 2009.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ В ПАКЕТЕ MAPLE

А.А. ОСИПОВ

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань

Как в геометрии, так и в ее приложениях (например, в механике, физике и т.д.) возникает задача перемещения фигуры, заданной параметрически на плоскости или в пространстве, используя вектор параллельного переноса и набор углов поворота вокруг координатных осей. Данная программа вставляется в маплет.

Сначала рассмотрим движение графика, представленное на плоскости. На входе мы имеем функцию, заданную параметрически, угол поворота и вектор переноса.

$[r_1, r_2]$ – вектор перемещения фигуры вдоль координатных осей.

φ – угол поворота фигуры относительно координатных осей.

Фигуры, исходная и получившаяся при движении, строятся на плоскости в прямоугольной системе координат в визуальном удобном для пользователя представлении.

Теперь рассмотрим более сложный вид движения фигуры – это движение в пространстве. Этот вид движения состоит из перемещения фигуры вдоль каждой из трех координатных осей и поворота на заданный угол относительно каждой оси.

На входе мы имеем параметрически заданную функцию в пространстве, список углов поворота относительно каждой из трех координатных осей и вектор движения, задающий перемещение вдоль каждой координатной оси.

Список $[\varphi, \psi, \theta]$ выступает как список углов поворота фигуры относительно каждой координатной оси.

$[r_1, r_2, r_3]$ – вектор параллельного переноса вдоль каждой из координатных осей.

В результате выполнения программы мы получили новую фигуру, образованную в результате движения и поворота исходной фигуры. Получившаяся и исходная фигуры также представлены в удобной для пользователя интерфайсе.

Литература

1. Кирсанов М.Н. Maple 13 и Maple. Решение задач механики. – М.: Физматлит, 2010.

2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.: ил. – (Серия «Библиотека профессионала»).

3. Игнатъев Ю.Г. Использование аналитических возможностей пакета Maple для создания программ аналитического тестирования, самотестирования и генерации индивидуальных заданий в курсах высшей математики // Проблемы информационных технологий в математическом образовании: учебное пособие под ред. Ю.Г.Игнатъева. – Казань: ТГГПУ, 2005. – С. 9–24.

4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

ОСОБЕННОСТИ КОПИНГ-СТРАТЕГИЙ ПОДРОСТКОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ЦЕННОСТНЫМИ ОРИЕНТАЦИЯМИ

Н.В. ОСТАНИНА

Средняя школа «Атейтес», г. Вильнюс
e-mail: nadezda-05@mail.ru

В данной статье освещаются результаты исследования, задачей которого было определить наличие либо отсутствие связи между ценностными ориентациями и копинг-стратегиями у подростков-девятиклассников; рассмотреть влияние их ценностных ориентаций на предпочтения в выборе копинг-стратегий.

Для проведения исследования были использованы стандартизированные методики: «Ценностные ориентации» М. Рокича,

«Индикатор копинг-стратегий» Д. Амирхана, (адаптация Н.А. Сироты и В.М. Ялтонского) и «Копинг-тест» Р. Лазаруса (адаптация Т. Л. Крюковой).

I. При анализе результатов по методикам «Ценностные ориентации» и «Копинг-тест» выявлен ряд корреляций с уровнем значимости 0,05.

Наиболее интересными в полученных данных нам представляются следующие комбинации копинг-стратегий и ценностных ориентаций.

I.1. «Конфронтационный копинг» и ценность «наличие верных друзей». На первый взгляд, это сочетание не является очевидным, но, учитывая особенности подросткового возраста, эта связь весьма закономерна. Подростки действительно ценят друзей, которые являются неотъемлемым условием их социального и личностного развития. Но нельзя не учитывать влияние таких качеств подросткового возраста, как склонность к крайностям, агрессивность, которые и выражаются в данной копинг-стратегии.

I.2. «Планирование решения проблем» и ценностная ориентация «независимость». Действительно, в подростковом возрасте человек старается проявить свою самостоятельность и при разрешении сложных ситуаций наиболее ярко показать и почувствовать собственную независимость, самостоятельность. Однако, учитывая высокие показатели по копинг-стратегии «поиск социальной поддержки», можно сделать вывод о том, что подросток осознает свою зависимость от взрослых, некомпетентность в решении многих проблемных ситуаций. В силу большого желания стать самостоятельным эта ценность выдвигается им на передний план, так как является действительно значимой и желанной на данном этапе.

I.3. Стратегия «поиск социальной поддержки» и ценностная ориентация «ответственность». Данная корреляция объясняется тем, что подросток, несмотря на свою частичную независимость и нарастающее чувство ответственности, осознает, что многие сложные ситуации он не в силах еще решать сам. В пользу этого говорит и тот факт, что с данной стратегией тесно связана ценность «рационализм». У подростка не хватает жизненного опыта, которым обладает взрослый. Социальная поддержка также означает признание, которое можно заработать ответственным отношением к жизни вообще и к решению сложных вопросов в частности. Связь копинг-стратегии с ценностями «любовь», «красота природы и искусства», «терпимость» подчеркивает и обеспечивает ориентацию на успешное социальное взаимодействие.

I.4. Стратегия «бегство – избегание» и ценность «общественное признание» также является объяснимой на данном возрастном этапе. Чем меньше у человека проблем, тем он успешнее, а успех является залогом высокого статуса в обществе. Это подтверждается также

высоким уровнем поиска социальной поддержки, высокой корреляцией с «воспитанностью», ценностями «верных друзей» и общественного признания, успешности в жизни.

I.5. «Принятие ответственности» и ценность «широта взглядов». Подростку с широким кругозором и знаниями действительно легче осознать свою роль в сложной для него ситуации, поскольку он осознает, что, как и любой другой, сможет выйти из данного положения, используя и приобретая свой жизненный опыт и эрудицию. Интересно, что данная копинг-стратегия имеет обратную корреляцию с ценностью «жизненная мудрость», но это объясняется высоким рангом «рационализма» и «образованности» (склонность к убеждению в том, что проблемы можно разрешать, не опираясь на жизненный опыт).

I.6. «Положительная переоценка» и ценности «развитие», «образованность», «самоконтроль». Подросток в трудной ситуации прилагает усилия по созданию положительного значения с фокусированием на росте собственной личности, осознавая ценности образованности и развития. Для того, чтобы это удалось, ему необходим самоконтроль. Данная связь отражает осознанное отношение к проблемным ситуациям. Интересной является отрицательная корреляция данной копинг-стратегии и «ответственности». Возможно, подростку легче придать положительный оттенок ситуации, чем осознать свою роль в ней. Создавая положительный образ ситуации, он аннулирует свой вклад в сложившуюся ситуацию.

I.7. Связь стратегии «дистанцирование» и ценностей «продуктивная жизнь», «воспитанность» указывает на то, что подросток предпринимает когнитивные усилия отделиться от ситуации, уменьшить ее значимость посредством и в силу умения вести себя в соответствии с нормами культуры поведения, а также максимально полно используя свои способности, возможности.

I.8. Копинг-стратегия «самоконтроль» и ценностная ориентация «самоконтроль». Данная связь особенно четко прослеживается у подростков, ценящих самодисциплину и сдержанность и проявляющих усилия по регулированию своих чувств и действий. Отрицательная корреляция с «ответственностью» говорит о том, что подросток считает, что достаточно контролирует себя для того, чтобы не допустить появления проблем, а при их возникновении не желает брать на себя ответственность, ведь «он такого допустить не мог».

II. Результатом анализа данных, полученных с помощью методик «Ценностные ориентации» и «Индикатор копинг-стратегий», стали следующие корреляции, значимые на уровне 0,05.

Наиболее интересными являются такие связи, как:

1) стратегия «разрешение проблем» и отрицательная корреляция с ценностью «общественное признание»;

- 2) стратегия «поиск социальной поддержки» и «рационализм»;
- 3) стратегия «избегание» и «воспитанность».

Таким образом, мы выявили преобладающие ценностные ориентации у подростков-девятиклассников и соответствующие им копинг-стратегии. Проведенный нами качественный анализ результатов исследования показал, что они соответствуют особенностям данного возрастного этапа: ценностные ориентации у подростков адекватны возрасту 14–15 лет, но и копинг-стратегии, предпочитаемые ими, соответствуют трудностям и проявлениям подросткового возраста. Противоречия между ценностями и копинг-стратегиями возникают в силу того, что личность находится на этапе формирования. Копинг-стратегии и ценности также могут меняться при дальнейшем развитии личности, но уже сейчас мы можем представить общую картину их предпочтительного в подростковом возрасте соответствия.

Литература

1. Гаврилюк В.В., Трикоз Н.А. Динамика ценностных ориентаций в период социальной трансформации (поколенный подход) // Социологические исследования. – 2002. – № 1. – С. 96–105.
2. Психология совладающего поведения: развитие, достижения, проблемы, перспективы // Совладающее поведение: Современное состояние и перспективы / под ред. А.Л. Журавлева, Т.Л. Крюковой, Е.А.Сергиенко. – М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2008. – С.21–63 (в соавт. с Н.А. Сиротой).

FLASH-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕРАКТИВНОЙ ДОСКИ

Е.В. ПЕТРОВА, Е.А. КУРИЛИНА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Неотъемлемой частью документа Flash являются небольшие программы – Flash-сценарии, которые могут описывать поведение какого-либо элемента изображения. Flash-сценарии создаются на языке программирования ActionScript. Этот язык имеет достаточно мощные средства для создания Flash-приложений. Создаваемые приложения могут содержать различные компоненты, такие как кадры анимации, а также интерактивные кнопки. Каждый сценарий привязывается к какому-либо элементу приложения. Все сценарии выполняются в ответ на некоторое событие и называются обработчиками событий [1].

Конечный результат реализуемых Flash-приложений преобразуется в специальный файл, имеющий расширение SWF. Данное расширение поддерживается программным обеспечением практически всех интерактивных досок.

Это дает возможность создания собственных Flash-приложений для различных учебных ситуаций. Например, когда необходимо познакомить учащихся с объектами или явлениями, характерной особенностью которых является движение. Причем процесс движения объекта может быть задан интерактивно, его можно многократно повторять для уточнения и обобщения знаний. В этом случае дидактический материал может состоять из нескольких дидактических частей, представленных в виде галереи.

Разработанная методика создания дидактических материалов для интерактивной доски основывается на использовании специального шаблона FLA-документа [3]. Этот шаблон имеет уже заранее установленные параметры вывода данных:

- размер окна вывода;
- графическое оформление;
- стиль текстовых данных;
- кнопки управления.

Для управляющих кнопок заранее написаны сценарии обработки событий для повторения демонстрационных роликов, поэтапного воспроизведения, показа отдельных фреймов.

Используя Macromedia Flash-технологии, можно выполнять экспортирование данных из различных приложений, которые поддерживают популярные графические форматы. В качестве источника дидактических данных можно использовать системы компьютерной математики. Как известно, различные системы компьютерной алгебры имеют мощные программные средства, обеспечивающие эффективное автоматическое выполнение всех видов математических вычислений с высокой степенью их визуализации [2].

Результатом применения апробированной методики создания дидактических материалов для интерактивной доски является серия демонстрационных Flash-приложений. Они охватывают разделы «Первообразная», «Интеграл и площадь криволинейной трапеции», «Свойства показательной и логарифмической функции», «Решение показательных уравнений и неравенств», «Понятие об обратной функции», «Свойства тригонометрической функции» школьного курса алгебры и начала анализа 10–11 классов. Дидактические материалы демонстрируют характерные свойства нелинейных функций с помощью процедур динамической визуализации. Они наглядно отображают поведение функции, ее зависимость от коэффициентов. Рассматриваются примеры графического решения показательных уравнений и неравенств.

Кроме того, данная методика была использована для разработки демонстрационных материалов с применением интерактивной доски для вузовских дисциплин. Так, например, был разработан ряд Flash-

приложений по теме «Приближение функций» дисциплины «Численные методы» для специальности «Информатика и английский язык». Данные приложения демонстрируют поэтапные изменения характера интерполяционной кривой при увеличении степени интерполяционного полинома. В примерах рассматриваются различные исходные функции, а также, в некотором смысле уникальная для этого случая, функция Рунге. В серию входят примеры, показывающие, как меняется поведение интерполяционного полинома, если изменяется расположение узловых точек по формуле Чебышева.

Итак, уже накопленный опыт показывает, что эффективное применение интерактивной доски в учебном процессе возможно только при наличии широкого набора демонстрационных тематических материалов.

Литература

1. Грин Т., Чилкотт Дж. Macromedia Flash Professional 8: пер. с англ. – М.: ЭКОМ, 2007.
2. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6 в математических и научно-технических расчетах. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008.
3. Петрова Е.В., Курилина Е.А. Разработка дидактических материалов для интерактивной доски // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: СмолГУ, 2010. – Вып. 11. С. 291 – 293.

РАЗРАБОТКА УЧЕБНОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА БАЗЕ РЕЖИМНОГО ТРЕНАЖЁРА ДИСПЕТЧЕРА

А.С. ПИСАРЕНКО*, Е.Е. ПИСАРЕНКО**

*Филиал ЗАО «Монитор Электрик» г. Москва
e-mail: pisarenko_a.s@mail.ru

**Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)» г. Смоленск
e-mail: pisarenko.e.e@mail.ru

В инженерной практике для проведения режимных и противоаварийных тренировок, в том числе межсистемных, для диспетчерского персонала центров управления электроэнергетики с целью обучения и проверки знаний по ведению и управлению режимами энергосистем, предотвращению и ликвидации аварийных ситуаций активно применяются режимные тренажёры диспетчера (РТД). В настоящее время во всех филиалах Системного оператора Единой

энергетической системы (СО ЭЭС) России используются тренажёры ЗАО «Монитор Электрик», г. Пятигорск [2].

В основу РТД «Финист» положена динамическая модель электроэнергетической системы (ЭЭС). Это означает, что тренажёр воспроизводит не только установившиеся режимы между коммутациями или иными возмущениями, но и переходные процессы, представляя ЭЭС живой моделью [1]. Благодаря этому тренажёр может быть эффективно использован как в диспетчерской практике, так и при решении задач подготовки высококвалифицированных кадров в высших учебных заведениях электроэнергетического профиля. Применение данного программного комплекса позволит вести процесс обучения наиболее продуктивно и качественно, а также приблизить обучаемого к рабочему процессу, который может ожидать его в дальнейшем.

Кратко рассмотрим некоторые из тех профильных предметов, использование РТД «Финист» в которых представляется наиболее эффективным.

Для дисциплины *Электромеханические переходные процессы* наглядным окажется изучение поведения ЭЭС при переходных процессах, связанных с глубокими отклонениями частоты и напряжения от номинальных значений в результате возмущений типа включение/отключение мощных нагрузок или генерирующих мощностей, с выпадением из синхронизма генераторов и синхронных компенсаторов.

В рамках предмета *Электрическая часть объектов электроэнергетических систем (станций и подстанций)* полезным окажется рассмотрение различных вариантов главных схем станций и подстанций различного класса напряжения, схем собственных нужд, типовых и нетиповых схем распределительных устройств (РУ), способов подключения к ним основного электрооборудования, а также изучение основных правил проведения оперативных переключений на аппаратах РУ при выводе в ремонт электрооборудования и вводе его в работу после ремонта.

Использование РТД в дисциплине *Электроэнергетические системы и сети* позволит решать такие задачи, как выбор параметров устройств компенсации реактивной мощности и режимов их работы, а также положений регулировочных ответвлений устройств регулирования напряжения трансформаторов в различных режимах работы сети (минимальных и максимальных нагрузок, послеаварийном, ремонтном) для обеспечения минимума потерь электрической энергии в сети и требуемого уровня напряжения у потребителей.

Заметим, что в учебном процессе могут использоваться такие возможности РТД «Финист», как оценка действий проверяемого. Это позволяет проверяющему лицу (преподавателю) вносить по ходу

тренировки ремарки, выставлять баллы за конкретные действия. По итогам проверки формируется протокол в форме, аналогичной той, которую имеет протокол тренировки оперативного персонала энергосистем. Другой важной особенностью тренажёра является формирование набора интегральных показателей эффективности предпринятых в ходе проверки действий (например, длительность перерывов питания, отклонения основных показателей качества электроэнергии).

Авторами данного доклада на кафедре электроэнергетических систем в Смоленском филиале Московского энергетического института средствами РТД «Финист» была создана расчётная модель электроэнергетической системы. Источником энергии в ней принята крупная конденсационная станция установленной мощностью 1000 МВт, выдающая электроэнергию в сеть классов 500 и 220 кВ. Моделируемая ЭЭС представляет собой магистральную сеть напряжением 220, 110 кВ и имеет связи с энергообъединением более высокого уровня по линиям электропередач 500 кВ. Средствами специализированного графического редактора «ТОPAZ Graphics» был создан аналог современного диспетчерского щита для данной ЭЭС с выводом на него всех режимных параметров и параметров состояния оборудования. Данная модель позволила в режиме реального времени следить за состоянием ЭЭС при различных возмущениях и имитации аварийных режимов в ЭЭС. Управление режимом осуществляется путём воздействия на уровни генерации активной мощности и установки АРВ по напряжению на энергоблоках станции, на уровне потребления электроэнергии и на состоянии коммутационных аппаратов.

Планируется, что данная работа послужит основой для создания в дальнейшем универсальной учебной модели ЭЭС. Данная модель будет содержать порядка ста узлов и отображать всё разнообразие оборудования подстанций и электростанций различных типов (ТЭС, ГЭС, АЭС, ГТС), что позволит добиться максимальной схожести поведения моделируемой энергосистемы с реальной ЭЭС. Студенту будет предоставлена возможность изучения сложных, взаимосвязанных процессов, протекающих в реальных ЭЭС. Благодаря мощным узлам генерации и нагрузки, воздействуя на которые в значительной мере будет возможно резко изменять режим сети, возможным станет изучение таких явлений, как выход из синхронизма генераторов и синхронных компенсаторов. Кроме того, появляется возможность деления системы на несколько независимых, работающих несинхронно, «островов» (с целью предотвращения или ликвидации режима асинхронного хода генераторов), а затем, воздействуя на узлы нагрузки/генерации различных островов, добиться возможности их синхронного объединения. Контроль условий синхронизма будет

осуществлять колонка синхронизации, запрещающая объединение несинхронно работающих островов при разнице частот, а также модулей и фаз напряжений сверх нормативно допустимых и установленных преподавателем.

По мнению авторов доклада, на базе данной учебной модели возможна разработка качественно новой дисциплины, направленной на подготовку специалистов к работе диспетчерами в подразделениях ОАО «СО ЕЭС». В рамках дисциплины могут отрабатываться навыки взаимодействия между оперативным и диспетчерским персоналом, представленным разными учебными бригадами, размещёнными на своих рабочих местах, оснащённых разными клиентскими приложениями, входящими в состав РТД. В качестве практических занятий перед студентами могут быть поставлены задачи сохранения устойчивой работы ЭЭС при различных возмущениях в ней (имитациях аварий, нарушениях нормальной работы), а также поддержание контролируемых параметров режима в допустимой области.

Литература

1. «Финист». Режимный тренажёр диспетчера. Т. 3. Математическая модель. ЗАО «Монитор Электрик». – Пятигорск, 2010. – 73 с.
2. <http://www.monitel.ru>.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТРОННОГО МЕТОДИЧЕСКОГО СПРАВОЧНИКА НА БИЛИНГВАЛЬНОЙ ОСНОВЕ: КОНСТАТИРУЮЩИЙ ЭТАП ЭКСПЕРИМЕНТА

А.Н. РОМАНОВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: Vackhanka88@mail.ru

Как известно, реализация активных методов обучения – одна из основных задач дидактики, которая предполагает активизацию всего процесса, выявление системы и приемов, способствующих повышению активности обучаемых через формирование положительной мотивационной структуры учебно-познавательной деятельности. Формирование познавательных потребностей путем организации поиска знаний в процессе изучения учебного материала и удовлетворение этих потребностей во многом может обеспечить использование в образовательном процессе электронных учебных изданий, пособий и справочной литературы.

Также модернизация школьного образования, которая проводится в нашей стране в настоящее время, связывается, прежде всего, с качественным обновлением содержания и обеспечением его

развивающего поликультурного характера. В связи с этим особое внимание уделяется созданию условий для развития творческого личностного потенциала учащегося и расширению возможностей современного образования, в том числе и языкового, причем не только в школах, но и в вузах. В рамках поликультурного образования такие условия складываются в процессе обучения на билингвальной основе.

Таким образом, перед нами встает цель выявить и обосновать формы, методы и средства проектирования и применения электронных методических справочников на билингвальной основе в процессе изучения терминов предметной области на иностранном языке. Для достижения поставленной цели первым шагом является проведение опроса студентов и преподавателей на предмет учета их требований к создаваемому справочнику на билингвальной основе, а также выяснение потребности в подобном ресурсе.

Исходя из данной задачи, нами был проведен констатирующий этап эксперимента, который заключался в опросе студентов 5 курса и преподавателей СмолГУ, а также других вузов г. Смоленска. Респондентам были предложены две анкеты, первая содержала вопросы следующего характера:

1. Используете ли вы во время учебы (работы или практики) электронные справочники?

А) да

Б) нет

2. Есть ли у вас электронные справочники по предмету, который вы преподаете?

А) да

Б) нет

3. Хотели бы вы иметь в пользовании электронный методический справочник, который отражал бы специфику вашей предметной области?

А) да

Б) нет

4. Термины какого раздела методики вы хотели бы видеть в таком справочнике? (общая, частная по какому-либо предмету)

5. Как вы думаете, является ли понимание научных терминов российскими и зарубежными исследователями равнозначным?

А) да

Б) нет

6. Считаете ли вы использование билингвальных методических справочников целесообразным в работе преподавателя?

А) да

Б) нет

7. Считаете ли вы, что их использование облегчит

А) взаимодействие с зарубежными коллегами?

Б) обучение иностранных студентов?

В) повышение интереса наших студентов?

Г) заполнение документации для международных конференций?

(ответов можно выбрать не больше трех)

8. Известны ли вам какие-либо существующие методические билингвальные справочники в электронном виде? (если да, укажите их)

А) нет

Б) да, это: _____

9. Считаете ли вы необходимым переводить электронные методические пособия на разные языки или достаточно одного универсального (например, английского)?

А) необходимо на разные

Б) достаточно одного

10. Хотели бы вы овладеть терминами вашей предметной области на иностранном языке?

А) хочу, но не могу (например, нет времени)

Б) не хочу

В) могу и хочу

В общей сложности в первом опросе приняло участие 63 человека. Нами были получены следующие результаты.

– 77,7% всех опрошенных используют в своей работе (учебе) электронные справочники (ЭС);

– 53,9% имеют ЭС по предмету, который преподают;

– 95,3% хотели бы иметь ЭС, который отражал бы специфику их предметной области;

– 77,8% не считают понимание научных терминов российскими и зарубежными исследователями однозначным;

– 90,4% считают целесообразным использование методических билингвальных справочников в работе преподавателей;

– 32,6% считают, что ЭМС облегчат взаимодействие с зарубежными коллегами;

– 25% считают, что ЭМС облегчат обучение иностранных студентов;

– 14,5% считают, что ЭМС повысят интерес наших студентов;

– 27,7% считают, что ЭМС помогут в заполнении документации для международных конференций;

– 95,2% ответили, что им неизвестны существующие ЭМС (используют в электронном виде, но не методические);

– 61,9% хотели бы видеть ЭМС на разных языках, остальные респонденты считают, что достаточно одного;

– 31,7% хотели бы овладеть терминами своей предметной области на иностранном языке, но не имеют возможности (времени), 60,3% (учителя 66,6%, студенты 54,5%) имеют и время и возможность для обучения, 7,9% (учителя 0%, студенты 15,1%) не хотели бы обучаться.

Наглядно полученные данные можно представить в виде диаграммы 1.

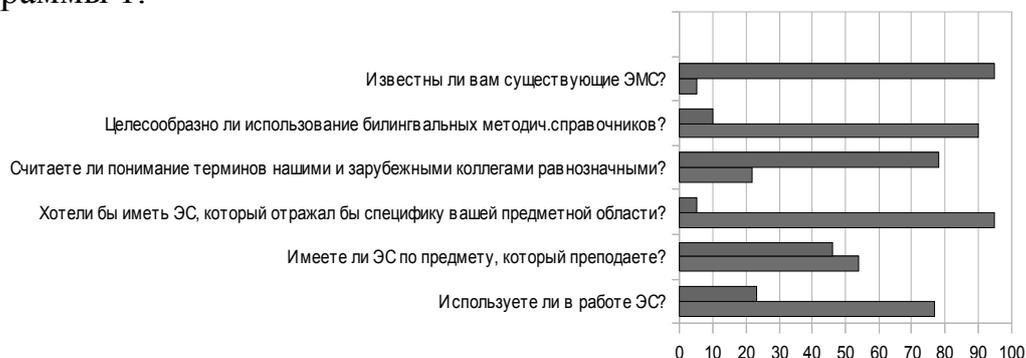


Диаграмма 1

Кроме того, ответы на вопрос «Какие разделы методики вы хотели бы видеть в ЭМС?» совпадали, например: общая и частная методика информатики, понятийный аппарат, разделы, посвященные архитектуре ПК и программированию, история педагогики, педагогические технологии, дидактика, формулы.

Таким образом, выяснилось, что преподаватели практически любых специальностей хотели бы изучать методическую терминологию на английском языке.

Далее, студентам 5 курса специальности «информатика и английский язык» как одним из потенциальных пользователей разрабатываемого справочника была предложена вторая анкета, имеющая целью выяснить основные требования, предъявляемые целевой аудиторией к электронным методическим справочникам.

Респонденты должны были ответить на такие вопросы, как:

1. Удовлетворяет ли вас существующая учебная литература по методике преподавания информатики?

- А) да
- Б) не совсем
- В) нет

2. Хотели бы вы, идя на практику, иметь при себе вспомогательные пособия по методике информатики?

- А) да
- Б) нет

3. В каком виде вы хотели бы иметь методический справочник?

- А) электронном
- Б) печатном

4. Какой тип пособия предпочтительней для вас?

- А) методический справочник

- Б) учебник
- В) карманный словарь

5. Что должна содержать статья такого методического справочника?

- А) краткое определение
- Б) определение, основные методологические подходы
- В) подробную информацию

6. Какая структурная организация словаря для вас наиболее удобна?

- А) алфавитная
- Б) тематическая

7. Удобно ли использовать на уроке электронные пособия и справочники?

- А) да
- Б) нет

8. Какие приложения вы хотели бы видеть в электронном варианте справочника?

- А) видеофрагменты уроков
- Б) поурочные разработки
- В) литература по рассматриваемой теме
- Г) материал для внеклассных занятий

После анализа данных анкет были получены такие результаты:

- 47,6% студентов 5 курса не полностью удовлетворяет существующая методическая литература по информатике;
- 76,2% хотели бы иметь дополнительные пособия при прохождении практики в школе;
- 81% студентов предпочитают справочники в электронном виде;
- 61,9% хотели бы иметь электронный справочник по информатике в виде обычного учебника, но при этом 57% хотят видеть там только основные определения и методологические подходы.

Кроме того, абсолютное большинство, а именно 71% учащихся, высказали мнение, что тематическая организация справочника удобнее, чем алфавитная.

81% хотели бы использовать электронные словари и справочники на уроках в школе, так как считают это удобным при организации процесса обучения.

Также можно наглядно представить тот материал, который должен входить в структуру электронного справочника по методике обучения информатике, по мнению выпускников педагогического вуза (диаграмма 2):

Некоторые пожелания, такие как перевод методической терминологии на несколько языков, остаются пока нереализованными в связи с огромными объемами работ. Почему мы обратили внимание именно на русско-английские словари? Дело в том, что в настоящее

время ощущается нехватка русско-иностранных словарей активного типа (для русскоязычных читателей). Об отсутствии хороших русско-английских словарей, «сравнимых по своим достоинствам с лучшими англо-русскими словарями», говорил, в частности, А.Н. Баранов (см. [1]). В то же время Д.И. Ермолович обращает внимание на «хроническое отставание русско-английской лексикографии от практических требований читателей» (см. [2]).

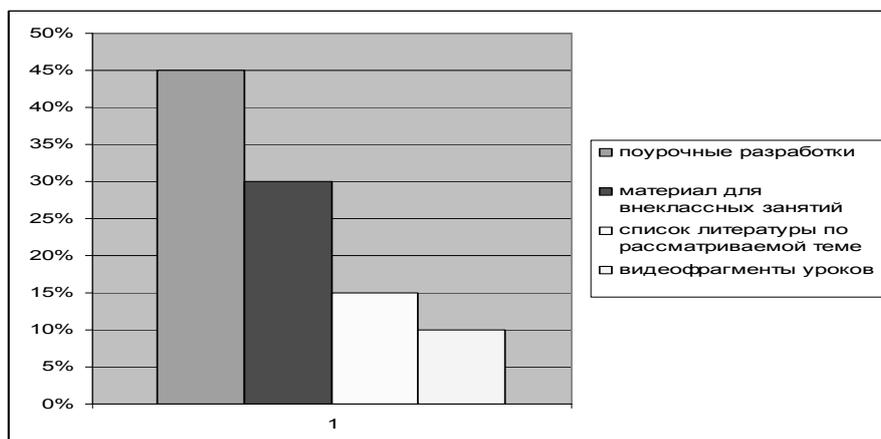


Диаграмма 2. Что должна включать методическая статья. Мнения студентов

Таким образом, можно наблюдать положительную реакцию преподавателей и учащихся педагогических вузов на овладение профессиональной терминологией на английском языке, а также активное использование методической справочной литературы в электронном виде. Это связано в первую очередь с тем, что обучение на билингвальной основе способствует углублению предметной подготовки и расширению сферы межкультурного обучения, совершенствованию общей языковой подготовки и владения иностранным языком в специальных неязыковых предметных целях, а также повышению мотивации в изучении иностранного языка. Помимо этого, активности обучения, раскрытию и использованию творческих способностей каждого обучаемого способствует формирование познавательных потребностей путем организации поиска знаний в процессе изучения учебного материала и удовлетворение этих потребностей, что может быть обеспечено созданием специальных электронных учебных пособий. Именно этим и вызвана актуальность проблемы создания электронных словарей и пособий для применения их в образовательном процессе.

Литература

1. Баранов А.Н. Введение в прикладную лингвистику: учебное пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
2. Ермолович Д.И. Предисловие. Новый большой русско-английский словарь как отражение нового в лексике двух языков на рубеже тысячелетий. – М.: Русский язык – Медиа, 2004.

БИБЛИОТЕКА СЕРВИСНЫХ ПРОЦЕДУР MAPLE ДЛЯ МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ КУРСА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

А.Р. САМИГУЛЛИНА

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань

e-mail: alsu_sam@rambler.ru

Учебный модуль высшей алгебры является составной и базовой частью курса высшей математики для нематематических факультетов. Основная цель этого модуля – изучение теории линейных алгебраических уравнений, необходимой в других модулях курса высшей математики и предметах естественнонаучного цикла и имеющей самостоятельную ценность для решения многочисленных прикладных задач. Кроме того, в этот модуль включается изучение основ матричного исчисления и теории определителей, необходимых для изучения теории систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), а также имеющих многочисленные приложения в других модулях курса высшей математики и самостоятельную ценность. Поэтому информатизация этого модуля имеет большое значение для изучения курса высшей математики.

В работе [1] были рассмотрены основные принципы математического и компьютерного моделирования объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в системе компьютерной математики (СКМ) Maple. В частности, в указанной работе была представлена программа автоматизированного решения системы линейных алгебраических уравнений в СКМ Maple с выводом решений в стандартной для российской системы образования форме. Однако описанная в [1] программная процедура обладает существенным недостатком: при наличии нулевых коэффициентов перед неизвестными эти переменные не считаются и соответствующие нули не попадают в расширенную матрицу системы. Кроме того, встроенные программные процедуры Maple не содержат программы нахождения фундаментальных решений СЛАУ, имеющих большую ценность в многочисленных приложениях и составляющих основу математической культуры. Решение указанных двух задач программными способами в СКМ Maple потребовало значительного усложнения программных процедур. Здесь следует отметить общее правило создания программных продуктов: чем менее профессиональным является пользователь программного продукта, тем большая степень программного сервиса требуется от этого продукта, а значит, и более сложные соответствующие программные процедуры.

С помощью процедуры SolLinBasics библиотеки Algebra фундаментальное решение находится элементарно, причем в стандартном, списочном виде.

Ниже приведен пример применения процедуры `SolLinBasics`.
Рассмотрим систему уравнений Eq3:

```
>Eq3 := [x+2*y-3*z+u-6*t+8*n=1, x-y+2*z-t-  
n=0, 2*x+y-z+3*u-t=1] :  
>Algebra[SolLinBasics](Eq3);  
[[0, 2, 1, 0, 0, 0], [-17/6, -23/6, 0, 1, 7/2, 0], [4, 3, 0, 0, -3, 1]].
```

Созданная библиотека процедур приспособлена для студентов нематематических факультетов, удобна и проста в работе. Она может быть использована и преподавателями для проверки работ студентов, а также для генерации заданий.

Литература

1. Самигуллина А.Р. Математическое моделирование объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в системе компьютерной математики Maple // Вестник ТГГПУ. – 2010. – №3 (21). – С. 69–79.

МАПЛЕТ КАК ОДИН ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ОБУЧЕНИЯ ВИЗУАЛЬНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ В ШКОЛЕ

А.Н. САРКЕЕВА

Школа № 161, г. Казань
e-mail: Anna_sar7@mail.ru

В работе [1] представлена модель содержания системы обучения программированию в школе с использованием системы компьютерной математики Maple. Язык Maple выступает в качестве изучаемого на уроках информатики языка программирования и используется для реализации основных алгоритмических структур (следование, ветвление, цикл).

В последнее время уже наблюдается явная тенденция перехода обучения от структурных к объектно-ориентированным языкам программирования. Объектно-ориентированное программирование является специальной технологией реализации алгоритмических систем в рабочие программные продукты. Одним их элементов, усиливающим подготовку школьников в области программирования, может являться внедрение в раздел обучения программированию с использованием системы Maple написание программ с графической пользовательской оболочкой – Marplet (маплет). Эта технология, основанная на Java-языке, позволяет встраивать кнопки, панели инструментов, меню, радиокнопки, всплывающие меню, перетаскиваемые кнопки, окна для построения графики и обеспечивать работу других элементов.

Отмечено, что программирование пользовательского интерфейса в Maple не так развито, как, например, в Borland Builder или Delphi. Однако для тех, кто знаком с основами программирования в Maple, четкая логика и наглядность этого языка позволяют сделать доступным и понятным процесс визуализации объектов программирования. Программирование маплетов может быть реализовано двумя способами: написанием обычной программы в Maple-сессии и работой в специальной программе визуального программирования Maplet Builder.

Программы с графической пользовательской оболочкой могут быть разных типов: информационные, тестовые, аналитические, вычислительные и пр. Школьники после изучения основ работы с маплетами в системе Maple выполняют проектную работу по созданию графической пользовательской оболочки, например, тестовую программу на одну из тем курса информатики («Логика», «Языки программирования», «Основные операторы языка программирования Maple» и т.п.). Несложный пример создания маплета представлен на рисунке 1.

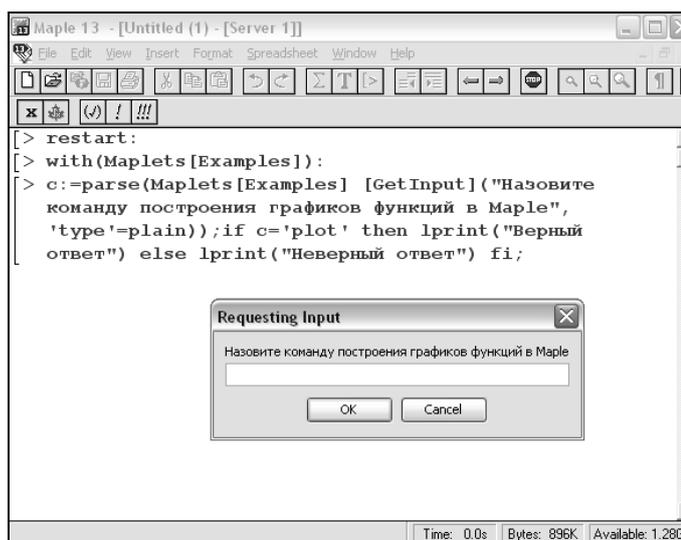


Рис. 1. Пример создания визуально-ориентированного интерфейса

Изучение школьниками объектно-ориентированного визуального языка программирования необходимо для развития у них четкого представления о технологии проектирования и разработки современных программных продуктов. Использование маплетов в обучении программированию школьников развивает их алгоритмическое мышление, совершенствует умения в области программирования и прививает интерес подрастающего поколения к информационным технологиям.

Литература

1. Саркеева А.Н. Использование Maple для обучения программированию в курсе информатики средней школы // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы

международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. – Вып. 11. – С. 303–305.

2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: Солон-Пресс, 2006. – 720 с.

3. Кирсанов М.Н. Maple 13 и MapleT. Решение задач механики. – М.:, 2010. 503 с.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ В ПАКЕТЕ MAPLE

О.А. САЧКОВА

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань
e-mail: sachkova.olga@mail.ru

Дифференциальные уравнения являются одним из основных разделов высшей математики и изучаются всеми специальностями аграрного вуза. Студентам нематематических специальностей трудно дается этот раздел математики. Для лучшего усвоения материала и наглядности следует применять информационные технологии, и в частности СКМ Maple. Студентам нематематического склада ума, не имеющим навыков программирования, достаточно сложно использовать стандартные процедуры в Maple, связанные с выводом решений, вычислениями, связанными с найденными решениями и их графическому представлению. В связи с этим имеет смысл создание сервисных программных процедур для работы с дифференциальными уравнениями. В работе представлены сервисные процедуры для вывода решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и их систем в формате функции с контролируемыми параметрами, действиями над решениями и графического представления решений. Приведены примеры решения в пакете Maple стандартных задач курса дифференциальных уравнений: о скорости размножения бактерий, концентрации раствора, радиоактивном распаде, охлаждении тела, потере заряда проводником, увеличении количества фермента, изолированной колонии организмов, модели сезонного роста, внутреннего питания глюкозой, росте листьев растения и теории эпидемий.

Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Проблемы информационных технологий в математическом образовании: учебное пособие / под ред. Ю.Г. Игнатъева. – Казань: ТГГПУ, 2005. – С. 9–24.

2. Сачкова О.А. Пользовательские библиотеки графических процедур в СКМ Maple для создания демонстраций по курсу математического анализа для нематематических специальностей // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2009. – С. 76–77.

3. Сачкова О.А. Программные и графические процедуры по теме «Векторная алгебра» // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. – С. 28–30.

4. Сачкова О.А. Программирование объектов векторной алгебры и стереометрии в системе компьютерной математики Maple // Вестник ТГГПУ, 2010. – № 3(21). – С. 75–78.

5. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006.

6. Кирсанов М.Н. Maple 13 и MapleT. Решение задач механики. – М.: Физматлит, 2010.

АВТОКОЛЕБАНИЯ НА КОМПЬЮТЕРНЫХ ЗАНЯТИЯХ ПО ФИЗИКЕ

Б.В. СЕЛЮК

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

В Смоленском государственном университете на компьютерных занятиях по физике выполняются лабораторные работы, посредством которых учащиеся изучают те или иные явления, работая с их виртуальными моделями.

В данной статье рассказывается об одной из таких работ, на которых изучаются автоколебания. Работы подготовлены на базе системы компьютерной математики Mathcad, комфортный интерфейс которой позволяет использовать готовые документы даже школьникам.

В описываемой работе детально изучаются колебания маятника с анкерным механизмом, позволяющим дважды за период подталкивать маятник, пополняя его энергию.

Рассматривается математический маятник длиной L . Вращающий момент сил сопротивления пропорционален угловой скорости v . Анкерный механизм подталкивает маятник дважды за период. Он увеличивает угловую скорость с угловым ускорением Δv , когда $v > 0$ и угол отклонения маятника от положения равновесия x удовлетворяет условию $\Delta x_1 \leq x \leq \Delta x$. Когда $v < 0$ и $-\Delta x \leq x \leq -\Delta x_1$, дополнительное

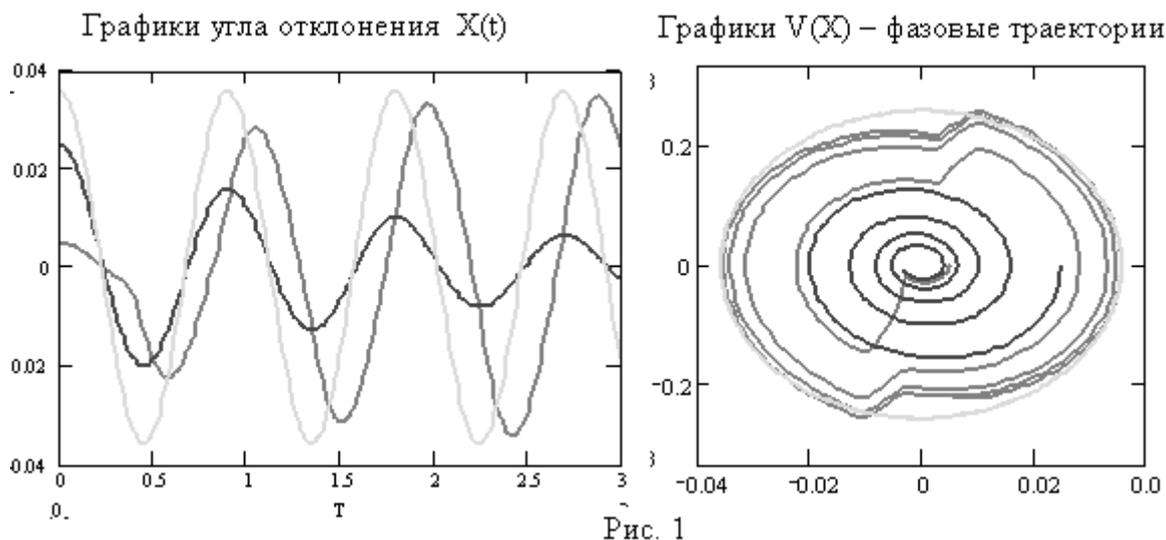
угловое ускорение меняет знак. Предлагается исследовать колебания, полагая, что в начальный момент маятник был отклонен от положения равновесия на угол x_0 и отпущен без начальной скорости. Варьируются: величина толчка Δv , коэффициент сопротивления β , начальный угол отклонения x_0 , нижняя Δx_1 и верхняя Δx границы действия анкерного механизма.

Учащиеся составляют динамические уравнения свободных колебаний маятника и колебаний маятника с анкерным механизмом. Правильность выполнения задания проверяется сопоставлением полученных уравнений с вычислительными блоками (1) и (2):

$$F_1(x_1, v_1, t) := \frac{-g}{L} \cdot x_1 - \beta \cdot v_1, \quad (1)$$

$$F(x, v, t) := \begin{cases} \left(\frac{-g}{L} \cdot x + \Delta v - \beta \cdot v \right) & \text{if } (\Delta x_1 \leq x \leq \Delta x) \wedge (v > 0) \\ \left(\frac{-g}{L} \cdot x - \Delta v - \beta \cdot v \right) & \text{if } (-\Delta x \leq x \leq -\Delta x_1) \wedge (v < 0) \\ \left(\frac{-g}{L} \cdot x - \beta \cdot v \right) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

После ввода численных значений параметров и начальных условий компьютер решает дифференциальные уравнения и выдает результаты в виде графиков, на которых для сравнения одновременно выводятся кривые, относящиеся к собственным колебаниям, свободным колебаниям и автоколебаниям (рис. 1).



Видно, что автоколебания имеют тот же период, что и собственные колебания, но они не являются гармоническими, что отчетливо отражается на фазовой траектории.

Учащиеся исследуют, при каких значениях x_0 , определяющих начальное отклонение маятника, возбуждаются автоколебания. Выясняется, что x_0 должно превышать Δx_1 и тем значительно, чем больше коэффициент сопротивления β . При $\Delta x_1 = 0$ колебания возбуждаются при сколь угодно малых начальных отклонениях x_0 . Сообщается, что такое возбуждение называют мягким в отличие от жесткого возбуждения, при котором минимальная величина отклонения x_0 не должна быть слишком малой.

Исследуется зависимость амплитуды автоколебаний от коэффициента сопротивления β и от величины Δv . Предлагается объяснить наблюдаемые зависимости из энергетических соображений, а также привести примеры систем, в которых реализуются автоколебания.

Во второй работе, посвященной автоколебаниям, анализируется движение бруска по горизонтальной шероховатой ленте транспортера. Брусок прикреплен пружиной к стенке, а лента движется от стены перпендикулярно к ней. Происходят автоколебания. Аналогичным образом возбуждаются колебания скрипичной струны.

СВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ НА КОМПЬЮТЕРНЫХ ЗАНЯТИЯХ ПО ФИЗИКЕ

Б.В. СЕЛЮК

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Рассматривается одна из компьютерных лабораторных работ, в которой исследуются процессы, происходящие в двух колебательных контурах, связанных друг с другом (рис. 1). Нахождение временных изменений токов катушек в одном частном случае представляет собой школьную олимпиадную задачу. Решение этой задачи инициирует обстоятельное изучение процессов, происходящих в системе. Проводя соответствующие исследования, ученики знакомятся с особенностями колебаний многомерного осциллятора на примере данной немеханической модели.

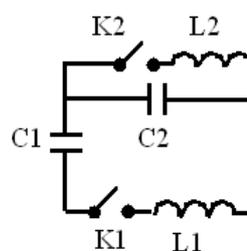


Рис. 1

Учащиеся работают с документом Mathcad, в котором содержится и необходимая информация, и вычислительные блоки, и рекомендации по проведению исследований.

Предлагается следующая задача.

Задача. К $1/3$ части катушки колебательного контура с параметрами $L = 80$ мкГн и $C_1 = 500$ пФ подключают конденсатор емкостью $C_2 = 2 C_1$, заряженный до напряжения $U = 100$ В. Как после этого могут со

временем изменяться токи $J_1(t)$ и $J_2(t)$ в обеих частях катушки в зависимости от первоначального напряжения U_1 на конденсаторе C_1 ? При каких напряжениях U_1 токи изменяются по гармоническому закону? Каковы периоды колебаний этих токов?

Первое задание заключается в составлении уравнений, описывающих процессы в рассматриваемой цепи:

$$\frac{d}{dt}q_1 = J_1, \quad -\frac{d}{dt}q_2 = J_1 + J_2, \quad u_1 = L_2 \cdot \frac{d}{dt}J_2 - L_1 \cdot \frac{d}{dt}J_1, \quad u_2 = L_2 \cdot \frac{d}{dt}J_2. \quad (1)$$

Из этих уравнений получаются дифференциальные уравнения для токов:

$$-\frac{d^2}{dt^2}J_1 \cdot L_1 = \frac{J_1}{C_1} + \frac{J_1 + J_2}{C_2}, \quad -\frac{d^2}{dt^2}J_2 \cdot L_2 = \frac{J_1 + J_2}{C_2}. \quad (2)$$

Система уравнений (2) оказывается посильной школьникам, если обеспечены указанные в задаче соотношения между величинами C_1 , C_2 , L_1 и L_2 , а также заданы такие напряжения на конденсаторах, при которых одинаковы напряжения на катушках, вследствие чего одинаковы и токи J_1 и J_2 . Нужно лишь уловить эти особенности условия, что не легко сделать.

При произвольных значениях параметров целесообразно численное решение системы уравнений (2). На рисунке 2 приведено решение для случая, когда напряжение на конденсаторе C_1 составляет -400 В. Вверху – графики токов, внизу – напряжений на конденсаторах. На рисунке 3 –

аналогичные графики при напряжении на конденсаторе C_1 , равном 200 В.

Таким образом, учащиеся знакомятся с одним из нормальных колебаний. Второе нормальное колебание получается при напряжении на C_1 , равном -100 В. Ученики измеряют периоды обоих нормальных колебаний и сопоставляют их с формулами для частот, которые

получаются из (2): $\omega_1 := \sqrt{\frac{2}{(C_1 \cdot L_1)}}$, $\omega_2 := \sqrt{\frac{1}{(C_2 \cdot L_1)}}$.

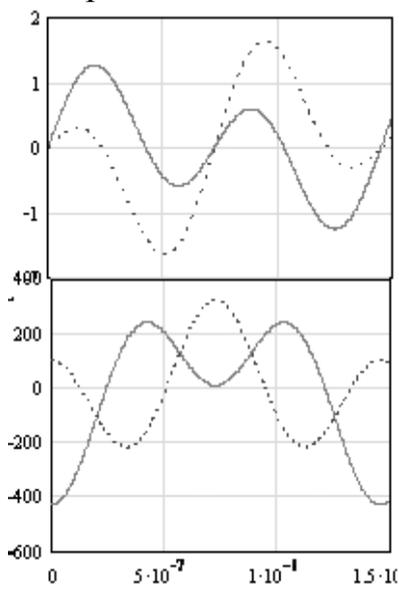


Рис. 2

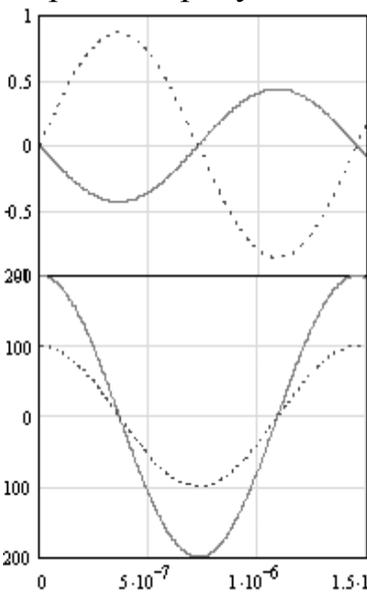


Рис. 3

В одном из заданий предлагается убедиться в том, что произвольные колебания в рассматриваемой системе можно представить в виде линейной комбинации нормальных колебаний:

$$j(t) = A \sin(\omega_1 t) + B \sin(\omega_2 t). \quad (3)$$

Коэффициенты A и B подбираются таким образом, чтобы график функции (3) совпадал с тем или иным графиком токов на рисунке 2. Показывается, как этот процесс может быть автоматизирован компьютером.

Сообщается, что существуют методы нахождения частот нормальных колебаний и связи нормальных координат с переменными, колебания которых рассматриваются (формы нормальных колебаний), в произвольном случае. Автором разработана программа анализа многомерного осциллятора. С помощью этой программы находятся частоты и формы нормальных колебаний для рассматриваемых контуров при $L_1 = L_2$ и $C_1 = C_2$, а также при $C_1 = 2 C_2$. Предлагается проверить, действительно ли при заданных параметрах контура реализуются найденные с помощью указанной программы нормальные колебания.

Подобные работы развивают у учащихся навыки творческой исследовательской деятельности в области физики.

МЕТОД ДИСКРИМИНАНТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ГРУППИРОВКИ ПОЭТИЧЕСКИХ ТЕКСТОВ НА МАТЕРИАЛЕ ЖАНРА ЛИРИЧЕСКИХ ПЕСЕН АНГЛИЙСКИХ ПОЭТОВ- СЕНТИМЕНТАЛИСТОВ XVIII-XIX ВЕКОВ

М.А. УРЫВАЕВА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

Данная работа относится к стилеметрической проблематике дифференциации стилей по лингвистическим параметрам.

Материалом исследования служат 9 произведений жанра песни английских поэтов-сентименталистов XVIII–XIX веков Уильяма Купера (1731–1800) – 4 песни, Уильяма Коллинза (1721–1759) – 2 песни и Джеймса Томсона (1700–1748) – 3 песни.

Целью исследования является определение формальных стихотворных признаков, необходимых для группировки поэтических текстов.

Признаковая схема исследования составляет основные характеристики, отражающие базовые свойства метроритмического анализа стихотворного текста (перенос, наличие синтаксической паузы в строке, эмфатический исход, частичная инверсия, количество простых

предложений в составе сложносочиненного, количество придаточных предложений в составе сложноподчиненного).

Методом исследования является дискриминантный анализ, успешно используемый в работах В.С. Андреева по классификации стилей американских поэтов-романтиков. В настоящее время дискриминантный анализ широко применяется в социологии, антропологии, биологии, медицине, экономике. Дискриминантный анализ используется для выявления различия между двумя и более группами объектов по нескольким переменным, позволяет ответить на вопрос: насколько хорошо можно отличить один класс от другого, используя данный набор переменных [3].

Построенная матрица классификации, содержит информацию о количестве и проценте корректно классифицированных наблюдений в каждой группе (табл. 1). Строками матрицы являются исходные классы, а столбцами – предсказанные классы. В нашем исследовании к первой группе (классу) принадлежат произведения Уильяма Купера, ко второй – Уильяма Коллинза, к третьей – Джеймса Томсона.

Таблица 1

Распределение текстов по автоматической классификации
VS. естественного распределения текстов

Группа	Степень правильной классификации (в процентах)	Купер	Коллинз	Томсон
Купер	100,00	4	0	0
Коллинз	100,00	0	2	0
Томсон	66,67	0	1	2
Всего	88,89	4	3	2

В результате проведенного анализа были получены данные, которые говорят о том, что дифференциальными признаками, обладающим дискриминантной силой, являются наличие синтаксической паузы в строке и эмфатический исход.

Проверка полученной дискриминантной модели показала следующие результаты: все песни Уильяма Купера (4) попали в первую группу, что составило 100% совпадения естественной и искусственной классификаций. Все лирические произведения Уильяма Коллинза вошли во вторую группу, что также составило 100% правильности классификации, и лишь у Джеймса Томсона одна песня попала во вторую группу, а две другие – в третью, что составило 67% корректно классифицированных наблюдений. Тем не менее в целом общий коэффициент правильности составил около 89% корректно классифицированных наблюдений, что почти в три раза превышает

показатель правильности, который был бы достигнут при случайном совпадении результатов.

Таким образом, можно сделать вывод о существовании формальных различий между стилями авторов жанра лирических песен 18-19 века, эти формальные различия могут быть установлены при помощи средств компьютерной математики с высокой степенью разрешения.

Литература

1. Андреев В.С. Классификация стихотворных текстов методом дискриминантного анализа (на материале лирики американских поэтов-романтиков) // Вестник Минского государственного лингвистического университета. Серия 1. Филология. – 2002. – № 10. – С. 141–146.

2. Баевский В.С. Лингвистические, математические, семиотические и компьютерные модели в истории и теории литературы. – М., 2001.

3. Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных: учебное пособие. – СПб.: Речь, 2004. – 392 с.

4. Тулдава Ю.А. Проблемы и методы квантитативно-системного исследования лексики. – Таллин: Валгус, 1987.

ЭЛЕКТРОННОЕ ОБРАЗОВАНИЕ: ОРГАНИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСТАНЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

З.М. ФИЛАТОВА

Набережночелнинский государственный торгово-технологический институт,
г. Набережные Челны
e-mail: czmfzm@mail.ru

В настоящее время мы наблюдаем, что на основе электронного образования без проблем «уживаются» различные формы обучения: очная, заочная, экстернат, дистанционная или их комбинацию. Обучение с использованием дистанционных образовательных технологий (ДОТ), как и любой другой вид обучения, предполагает организации учебного процесса с использованием информационно-коммуникационных технологий (ИКТ).

Организация заочного обучения с использованием ДОТ в государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального обучения «Набережночелнинский государственный торгово-технологический институт» (далее НГТТИ) началась с анализа программного, технического и кадрового обеспечения. Наличие всех трех составляющих послужило успешным залогом для внедрения в

учебный процесс НГТТИ дистанционного обучения (ДО – «интерактивного взаимодействия между участниками учебного процесса и интерактивным источником информационного ресурса, отражающего все присущие учебному процессу компоненты (цели, содержание, методы, организационные формы, средства обучения), осуществляемого в условиях реализации возможностей ИКТ» [1]).

Перенос традиционных методов обучения в систему дистанционного обучения (СДО) НГТТИ показывает, что наиболее приемлемыми оказались следующие: взаимодействие участников учебного процесса с образовательной средой; организация и осуществление учебно-познавательной деятельности, методы трансляции и визуализации учебных материалов; стимулирование учебной деятельности; контроля и самоконтроля.

В обучении с использованием ДОТ применяются традиционные формы обучения, такие как лекции, семинары, лабораторные занятия, контрольные работы, курсовые работы, зачеты, экзамены, консультации, самостоятельная работа и др. Однако необходимо отметить, что рассматриваемые формы обучения адаптированы для обучения на расстоянии.

Основным средством обучения в дистанционной форме является электронный учебный комплекс (ЭУК), в нашем случае сетевой учебный курс (СК – «обучающая программная система комплексного назначения, обеспечивающая непрерывность и полноту дидактического цикла обучения» [2]). Разработанный нами курс представлен несколькими крупными блоками (модулями): 1) *информационный блок* включает представление теоретического материала, тренировочную деятельность и интерактивную связь между преподавателем и обучающимся; 2) *контрольный блок* выполняет функции проверки хода и результатов теоретического и практического усвоения слушателями учебного материала; 3) *коммуникационный блок* предназначен для общения участников образовательного процесса ДО.

Техническая реализация учебного курса осуществляется посредством специализированной среды – СДО «Прометей» [3]. К учебному курсу, размещенному в СДО, прикрепляется группа слушателей, которые знакомятся с материалами СК, используя каналы связи, без посещения учебного заведения. На основе календарных планов изучения дисциплины в системе при помощи инструментальных возможностей организуются контрольные материалы (практические работы, вопросы самоконтроля, электронные тесты и пр.). Обучающиеся проходят дисциплинарный контроль после изучения определенной порции (части) учебной информации. Для прохождения контроля в СДО в определенные временные рамки каждому слушателю ДО выдается

допуск. После прохождения контрольных мероприятий в системе, как правило, автоматически формируются отчеты, где прослеживается успеваемость обучающихся. Диалог участников обучения с использованием ДОТ проводится посредством электронной почты, чатов и форумов, реализуется при помощи встроенных функций СДО: объявления, файлы, почтовая рассылка, книга отзывов, форум, чат.

Литература

1. Толковый словарь терминов понятийного аппарата информатизации образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iiorao.ru>.

2. ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет». Положение об УМК. Саратов 2009 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://techn.sstu.ru/Documentation/Pologenie_ob_UMK.doc.

3. Система дистанционного обучения ГБОУ ВПО «НГТТИ» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://sdo.ngtti.ru>.

О ДИДАКТИЧЕСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСАХ

А.М. ШИЛЯГИНА

Смоленский государственный университет, г. Смоленск
e-mail: pyu1101@gmail.com

Вопрос адаптации человека к жизни в высокодинамичном обществе становится в наше время весьма актуальным. Информационному обществу требуются информационно грамотные люди. Именно поэтому информатизация общества диктует необходимость существенных изменений и в образовании, так как именно образование является фундаментом для всех областей человеческой деятельности. Современное человечество включилось в общеисторический процесс, называемый информатизацией.

Информатизация образования – процесс довольно сложный и требующий определенного времени и поэтапности осуществления.

Образовательные учреждения все больше оснащаются современными техническими средствами (компьютерами, проекторами, интерактивными досками и т.д.). Для того чтобы эти современные средства обучения эффективно работали и приносили желаемые результаты, педагогам необходимо осваивать и применять в учебном процессе информационные и компьютерные технологии (ИКТ).

Современные условия требуют пересмотра организационных форм учебного процесса в сторону увеличения доли самостоятельной, индивидуальной и коллективной работы учащихся, объема

практических и лабораторных работ поискового и исследовательского характера, более широкого проведения внеаудиторных занятий.

Внедрение ИКТ в учебно-воспитательный процесс приводит к коренному изменению функций как учащегося, так и педагога. Взаимодействие учителя и ученика все больше приобретает характер сотрудничества.

На данный момент в образовании наблюдается противоречие между широкими дидактическими возможностями ИКТ и отсутствием современных учебно-методических комплексов, позволяющих использовать эти технологии в полном объеме.

Что же такое современный дидактический информационный комплекс (ДИК)?

ДИК – это новое системное образование, представляющее собой объединение предметного учебно-методического комплекса и многофункциональной системы информационного обеспечения. Основное отличие ДИК от УМК состоит в том, что ДИК существенным образом использует возможности компьютерной среды, в частности ее сетевые возможности.

Происходит трансформация педагогических технологий в интерактивные компьютерные варианты посредством анимации, графики, таблиц, гиперссылок и т.д. Таким образом, формируется обучающая среда с ярким аудиовизуальным представлением учебной информации и высоким уровнем интерактивности, что существенно меняет качество учебного процесса.

Такие комплексы позволяют давать учащимся разноуровневые задания с учетом уровня обученности и индивидуальных способностей каждого, приучают работать самостоятельно, развивают логическое и творческое мышление, повышают мотивацию.

Возникновение новых дидактических структур, а именно ДИК, дает возможность качественно улучшить различные формы обучения: классно-урочную форму, самообразование и дистанционное обучение.

ДИК выполняет в учебном процессе следующие основные функции:

- 1) включает в себя полное содержание учебного предмета;
- 2) отражает методику преподавания предмета;
- 3) содержит информационную компоненту, связанную с применением в учебном процессе информационных и компьютерных технологий.

Таким образом, схематично структуру ДИК можно представить так:
«учебная информация + педагогические технологии + информационные и компьютерные технологии».

Такие комплексы могут разрабатываться по конкретной дисциплине или по отдельным темам.

В дидактических информационных комплексах (ДИК) могут использоваться как традиционные формы представления информации в печатном виде, так и различные варианты её компьютерной интерпретации.

ДИК можно определить как совокупность различных дидактических средств обучения, в том числе печатных и электронных пособий, технических средств обучения (компьютер, проектор, интерактивная доска и т.д.), обучающих программ и средств телекоммуникации, призванных управлять самостоятельной работой студента в процессе изучения учебного курса.

Автором ведется работа по проектированию и внедрению в учебный процесс ДИК. За основу ДИК взято учебно-методическое пособие «Английский язык. Пособие по развитию навыков устной речи». Работа по проектированию ДИК ведется на базе лингафонного кабинета, оборудованного мультимедиа-лингафонным комплектом Rinel-Lingo SX108.

Мультимедиа-лингафонный комплект Rinel-Lingo SX108 – это аппаратный комплекс, предназначенный для дооснащения стандартного учебного компьютерного класса до уровня, необходимого для изучения иностранных языков, информатики и ИКТ.

Комплекс программного обеспечения и оборудования, предназначенного для дооснащения обычного компьютерного класса (до лингафонного класса-кабинета с мультимедиа возможностями) Rinel-Lingo может состоять из ряда компонентов, позволяющих работать в разных режимах.

Программное обеспечение Rinel-Lingo позволяет использовать и создавать учебный материал в виде мультимедийных учебных лингафонных курсов (Lingo-книги).

Lingo-книга, с точки зрения пользователя, представляет собой последовательный набор страниц, которые выводятся на экран монитора, и пользователь имеет возможность их просматривать, прослушивать, а также давать ответы в письменном и звуковом виде с помощью программы Rinel-Lingo Viewer.

Страницы Lingo-книги состоят из блоков (блок текста, блок изображения, блок видео, блок ответа со звуком, блок ответа с проверкой, блок ответа с выбором).

В программу включён виртуальный магнитофон, с помощью которого можно записывать и прослушивать звук. Готовые звуковые файлы можно прослушивать и использовать при создании Lingo-книг или отдельно.

Могут использоваться уже существующие Lingo-книги. Важным является то, что преподаватель имеет возможность разрабатывать свои

Lingo-книги на базе программного продукта Rinel-Lingo компании Rinel и использовать их в учебном процессе.

Нами подготовлена Lingo-книга, как интерактивное электронное приложение к печатному пособию «Английский язык. Пособие по развитию навыков устной речи». Электронное приложение создано с целью обеспечить интерактивный режим работы с учебным материалом пособия.

Хочется отметить, что класс Rinel-Lingo имеет целый ряд преимуществ по сравнению с обычным лингафонным классом:

- преподаватель, не покидая своего рабочего места, может работать с одним студентом или группой студентов;

- на страницах Lingo-книг звук может быть совмещен с текстом, картинкой или видеороликом;

- в контрольном задании вопросы и ответы могут предоставляться не только в текстовой, но и в звуковой форме.

В заключение отметим, что проектирование ДИК с использованием ИКТ – это необходимость, продиктованная временем. Описанные в статье элементы комплекса (печатное пособие и электронное приложение к нему) уже апробированы. Его использование дает хорошие результаты. Работа по созданию ДИК продолжается.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики

<i>Амелина М.А., Амелин С.А., Орехов В.А.</i> Непрерывная модель инверсного SEPIC-конвертера.....	3
<i>Амелин С.А., Амелина М.А., Емельянова А.В.</i> Оптимизированная SPICE-модель контроллера UC3842.....	5
<i>Борисов А.В.</i> Механизм рекуперации энергии в опорно-двигательном аппарате человека.....	7
<i>Бушкова В.А.</i> Сравнительный анализ тензорных вычислений в пакетах Mathematica и Maple на примере исследования геометрии трехмерных и четырехмерных пространств.....	9
<i>Быков А.А.</i> Использование вейвлет-спектограмм для анализа одномерных сигналов в электрорадиотехнике.....	10
<i>Дьяконов В.П.</i> Системы компьютерной математики на выходе из кризиса.....	16
<i>Ермова Л.И.</i> Применение пакета Maple для решения задач оперативного планирования автомобильных перевозок.....	25
<i>Исаков В.А., Пеньков А.А.</i> Моделирование импульсного преобразователя с цифровой системой управления на основе энергетических соотношений.....	26
<i>Кирсанов М.Н., Батулин Е.В.</i> Аналитическое исследование регулярных стержневых структур в системе MapleMaple.....	28
<i>Коромбалёв Д.Е.</i> Перспективы применения интерфейса USB 3.0 в современных измерительных приборах.....	30
<i>Кристалинский Р.Е.</i> Решение вариационных задач в системе Mathematica.....	34
<i>Кругликов И.А., Ширяев А.О.</i> Исследование режимов работы одноконтурного сдвоенного преобразователя.....	35
<i>Лебедева М.Ю.</i> Реализация ридж-регрессии в пакете SPSS в системе компьютерной математики MATHCAD.....	36
<i>Липовой В.Г., Ширяев А.О.</i> Исследование демпфирующих цепей без потерь.....	40
<i>Листраденков Э.А., Ширяев А.О.</i> Термоавтомат протайки зимних водостоков кровли.....	43
<i>Найдёнов Е.В., Пеньков А.А.</i> Особенности моделей операционных усилителей в среде MATLAB+SIMULINK R2010b.....	45
<i>Пеньков А.А., Строев К.Н., Строев Н.Н.</i> Исследование алгоритма управления на основе энергетических соотношений повышающим импульсным регулятором в среде MATLAB+SIMULINK.....	47
<i>Поляков М.В., Тютюнник С.А., Фролков О.А.</i> Макромодель фазосдвигающего ШИМ-контроллера в среде MICRO-CAP.....	49

<i>Поляков М.В., Тютюнник С.А., Фролков О.А.</i> Модель солнечного элемента в среде MICRO-CAP.....	51
<i>Сенчилов В.В.</i> Некоторые особенности использования портативных систем компьютерной математики.....	53
<i>Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Агафонов Е.С.</i> Стохастические информационные технологии в среде Matlab в задачах компьютерной поддержки научных исследований (к 100-летию со дня рождения академика В.С. Пугачева).....	57
<i>Смирнов Н.В.</i> Использование компьютерной системы «Mathematica» с языками программирования высокого уровня.....	59
<i>Строев Н.Н., Штемпель А.Н.</i> Анализ систем автоблокировки с тональными рельсовыми цепями.....	62
<i>Суханова А.Г., Суханов М.Б.</i> Оптимизация портфеля ценных бумаг в системе Mathcad.....	64
<i>Хайдаров А.Г., Холоднов В.А., Боровинская Е.С., Решетиловский В.П.</i> Исследование кинетики химических реакций с использованием интервальных методов.....	67
<i>Холоднов В.А., Краснобородько Д.А., Кулишенко Р.Ю., Хайдаров А.Г.</i> Использование Mathcad при оптимизации процесса получения винилхлорида в условиях частичной неопределенности исходной информации.....	69
<i>Холоднов В.А., Кулишенко Р.Ю., Хайдаров А.Г., Гайков А.В.</i> Моделирование нитрификации в одноступенчатой системе с активированным илом	71
<i>Холоднов В.А., Кулишенко Р.Ю., Хайдаров А.Г., Гайков А.В.</i> Моделирование процесса денитрификации питьевой воды.....	75
 СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры	
<i>Агроник А.Ю.</i> Обзор существующих подходов к построению динамических ВЕБ-приложений.....	79
<i>Бирюкова Т.К., Киреев В.И., Гершкович М.М., Синицын В.И.</i> Интегродифференциальные сплайны и их применение в прикладных задачах анализа данных в территориально-распределенных информационных системах..	82
<i>Борисов В.В., Зернов М.М., Полячков А.В.</i> Метод построения и использования ассоциативных средств интеллектуальной поддержки принятия решений	84
<i>Емельченков Е.П., Левин Н.А., Мунерман В.И.</i> О выражении теоретико-множественных операций в различных алгебрах данных.....	87
<i>Захаров А.С.</i> Динамические нечеткие байесовские сети для решения задач поддержки принятия решений.....	89
<i>Захаров А.С., Борисов В.В.</i> Постановка и решение динамической задачи поддержки принятия решений с использованием динамических нечётких байесовых сетей.....	92

<i>Зернов М.М.</i> Особенности проверки корректности реализаций нечетких операций	95
<i>Зеров В.А.</i> Задача согласования экспертных оценок в процессе поддержки принятия решений.....	97
<i>Игнатов В.Д.</i> Особенности применения функций распределения потоков в имитационных моделях многоканальных структур.....	99
<i>Кафлик Д.А.</i> Параллельное выполнение запроса к данным с помощью операций алгебры многомерных матриц.....	102
<i>Ковалев А.В.</i> Классификация методов построения и использования нечетких деревьев решений.....	106
<i>Комиссарова А.Н., Мунерман В.И.</i> Статистический анализ индексно-последовательной организации данных	108
<i>Коноплева Н.А.</i> Поддержка принятия решений средствами инженерии квантов знаний.....	110
<i>Мунерман В.И., Самойлова Т.А.</i> Параллельная реализация алгоритмов вычисления ХЕШ-функций.....	113
<i>Потапов К.Б.</i> Организация данных как графа. Специальный язык запросов GSQL.....	116
<i>Провоторова А.О., Ширай А.Е., Гайдаенко Т.И.</i> Особенности современного сервера баз данных.....	118
<i>Сеньков А.В., Борисов В.В.</i> Концепция интеллектуального управления рисками в сложных организационно-технических системах.....	125
<i>Сизов А.А.</i> Переход к многомерному ряду порядка N при моделировании нечетких временных рядов.....	129
<i>Синицын И.Н., Сергеев И.В., Семендяев Н.Н.</i> Опыт компьютерного моделирования флуктуаций движения Земли и глобальной составляющей сейсмического процесса.....	131
<i>Скачков Д.Е.</i> Гибридная модель для анализа деловых процессов.....	133
<i>Сысков В.В.</i> Мультиагентное моделирование сложных систем и процессов.....	135
<i>Троцкий Ю.В., Баранов А.М.</i> Анализ эффективной разрешающей способности прецизионных аналого-цифровых преобразователей.....	139
<i>Ширай А.Е.</i> Использование объектно-ориентированного подхода в архитектуре многоядерного микропроцессора для ускорения параллельных конвейерных вычислений.....	141
<i>Ширай М.А.</i> Разработка модели тематического ранжирования интернет-ресурсов на основе PAGERANK.....	145

СЕКЦИЯ 3. Математика и ее приложения

<i>Анищенкова Н.Г.</i> О нетеровости основных краевых задач типа Римана для бианалитических функций с разрывными коэффициентами в случае полуплоскости.....	149
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

<i>Болотин И.Б.</i> Об одной краевой задаче для полианалитических функций на отрезке.....	150
<i>Васильев Я.А.</i> Обобщенная краевая задача типа Римана для бианалитических функций в круге.....	152
<i>Велигурский Г.А., Поплавская Л.А.</i> Построение структурных функций сложных систем с множеством состояний ее элементов с помощью матриц узловых связей	158
<i>Викторов В.</i> О плотности множества в точке топологического пространства.....	160
<i>Вувуникян Ю.М.</i> Квазиобратные эволюционные операторы для нелинейного оператора, порожденного дифференциальным уравнением первого порядка.....	167
<i>Гомонов С.А.</i> О некоторых применениях условных предельных множеств многозначных отображений топологических пространств.....	170
<i>Гринько А.П.</i> Асимптотические разложения обобщенных дробных интегралов....	175
<i>Давьялова Е.В.</i> Задача Маркушевича, содержащая шесть точек разрыва.....	176
<i>Долгополова О.Б., Зверович Э.И.</i> Явное решение видоизмененной задачи Шварца для многосвязной области.....	179
<i>Евдокимова Г.С.</i> Поведение системы массового обслуживания с периодическим входящим потоком в установившемся режиме.....	181
<i>Емельченков Е.П., Мунерман В.И.</i> Об эквивалентности информационных систем	183
<i>Зверович Э.И.</i> Задача о модуле для многосвязной области.....	188
<i>Карачик В.В., Коржова М.Е.</i> Метод построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	190
<i>Кирсанов М.Н.</i> Определение, свойства и приложения одного нелинейного дифференциального оператора.....	192
<i>Кирьяцкий Э.Г., Кирьяцкий Д.Э.</i> Об одном свойстве специальной квадратичной формы.....	201
<i>Кирьяцкий Э.Г.</i> О корнях неполного многочлена.....	201
<i>Ксенофонтов С.А., Расулов К.М.</i> Об одной обобщенной краевой задаче типа Гильберта для бианалитических функций.....	202
<i>Куприкова О.Н., Расулов К.М.</i> О задаче типа Неймана в классе квазигармонических функций в круге	206
<i>Медведев С.В.</i> О счетных степенях нульмерных пространств.....	213
<i>Мишина Е.В.</i> О весовых анизотропных пространствах типа Соболева аналитических в полидиске функций.....	215
<i>Перельман Н.Р.</i> О решении второй трехэлементной задачи типа Карлемана для бианалитических функций в невырожденном случае.....	217

<i>Расулов К.М., Богданова Н.Н.</i> О решении четырехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций.....	221
<i>Расулов К.М., Ботенков А.А.</i> Об одной неклассической краевой задаче типа Гильберта для бианалитических функций в круге.....	222
<i>Расулов К.М., Курицын С.Ю.</i> Об одной обобщенной задаче типа Римана в классах метааналитических функций.....	228
<i>Расулов К.М., Смирнов А.Ю.</i> Об одной обобщенной задаче типа Гильберта для бианалитических функций.....	231
<i>Расулов К.М., Степанов А.В.</i> О решении одной обобщенной задачи типа Римана для бианалитических функций.....	235
<i>Расулов К.М., Шаповалова Г.П.</i> О решении одной трехэлементной задачи типа Римана для бианалитических функций в круге.....	238
<i>Расулов К.М., Шашкевич В.С.</i> О решении трехэлементной краевой задачи типа Маркушевича в классах бианалитических функций	242
<i>Расулов К.М., Шитиков Д.А.</i> О краевой задаче типа Гильберта для метааналитических функций в круге.....	247
<i>Родикова Е.Г.</i> О характеристике вещественных корней голоморфных в правой полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка.....	250
<i>Титов В.П.</i> Об одной смешанной краевой задаче типа Гильберта для кусочно бианалитических функций.....	252
<i>Шамоян Ф.А., Беднаж В.А., Кипень И.С.</i> О кратной интерполяции в классах N_α , $\alpha > -1$ в единичном круге.....	255
<i>Шестаков А.Л., Адуков В.М., Ибряева О.Л., Семенов А.С.</i> О дуплетах Фруассара в методе Паде-Лапласа.....	257
<i>Vanys R.</i> On approximation of the network processes.....	259
<i>Borodin D., Gorelik V., Wim De Bruyn, Bert Van Vreckem</i> A hybrid approach in genetic algorithm: coevolution of three vector solution encoding. A case-study.....	260
<i>Гинявичюс Р.М., Подвезько В.С.</i> Количественные многокритериальные оценки социально-экономических процессов.....	264
СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании и прикладная лингвистика	
<i>Адиятуллина Г.Р.</i> Комплекс программ для тестирования знаний по высшей математике.....	267
<i>Ассонова В.А., Ассонова Н.В.</i> Использование новых информационных технологий при изучении математики на факультете начального и специального образования.....	268
<i>Блинова Е.И., Зверович Л.Ф., Рысюк Н.А.</i> Об организации самостоятельной работы студентов первого курса.....	270

<i>Борисов А.П.</i> Информационное пространство средней школы как составная часть единого информационно-образовательного пространства.....	272
<i>Велько О.А.</i> Обучение студентов-социологов математическому моделированию как фактор повышения их профессиональной компетентности.....	275
<i>Евтихова О.В.</i> Проектирование сайта «логика для школьников».....	277
<i>Зверович Э.И.</i> Презентация учебного пособия Н.В. Бровка и Л.П. Примачука «Математический анализ. Функции многих переменных и дифференциальные формы».....	281
<i>Зиновьева И.В.</i> Сравнительная характеристика отношений базовых и критериальных признаков подязыка медицины и общеглагольной системы.....	283
<i>Исрафилова Э.Г., Игнатьев Ю.Г.</i> Математическое моделирование геодезических линий в СКМ Maple.....	285
<i>Капустин С.В.</i> Моделирование замечательных линий и сетей на поверхностях в среде Mathematica.....	286
<i>Капустина Т.В.</i> Структура нормативного курса «Информационные технологии в математике».....	288
<i>Кислякова Е.В.</i> Механика межпланетного полета: определение скоростей и времени движения в системе MathCAD.....	290
<i>Кристалинский В.Р.</i> Использование систем нечеткого вывода в прогнозировании результатов обучения.....	295
<i>Мунерман В.И., Омельченко Н.Н.</i> Обработка гипертекстовых данных в образовательных информационных системах.....	297
<i>Осипов А.А.</i> Преобразование движения в пакете Maple.....	300
<i>Останина Н.В.</i> Особенности копинг-стратегий подростков с различными ценностными ориентациями.....	201
<i>Петрова Е.В., Курилина Е.А.</i> Flash-приложения для интерактивной доски.....	304
<i>Писаренко А.С., Писаренко Е.Е.</i> Разработка учебной модели электроэнергетической системы на базе режимного тренажёра диспетчера.....	306
<i>Романова А.Н.</i> Проектирование и разработка электронного методического справочника на билингвальной основе: констатирующий этап эксперимента.....	309
<i>Самигуллина А.Р.</i> Библиотека сервисных процедур Maple для методического обеспечения курса высшей алгебры.....	315
<i>Саркеева А.Н.</i> Маплет как один из элементов обучения визуальному программированию в школе.....	316
<i>Сачкова О.А.</i> Обыкновенные дифференциальные уравнения для нематематических специальностей в пакете Maple.....	318
<i>Селюк Б.В.</i> Автоколебания на компьютерных занятиях по физике.....	319

<i>Селюк Б.В.</i> Связанные контуры на компьютерных занятиях по физике.....	321
<i>Урываева М.А.</i> Метод дискриминантного анализа для группировки поэтических текстов на материале жанра лирических песен английских поэтов-сентименталистов XVIII–XIX веков.....	323
<i>Филатова З.М.</i> Электронное образование: организация обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.....	325
<i>Шлягина А.М.</i> О дидактических информационных комплексах.....	327

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 12

Издательство Смоленского государственного
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко*

Подписано к печати 07.04.2011. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. п. л. 21. Уч.-изд. л. 21. Тираж 130 экз.
Заказ № 25.

Отпечатано с оригинал-макета авторов в ИТЦ СмолГУ
214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4.